

FUZZY METRİK UZAYLAR VE UYGULAMALARI

Hakan EFE

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARALIK 2008
ANKARA**

Hakan EFE tarafından hazırlanan FUZZY METRİK UZAYLAR VE
UYGULAMALARI adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Tez Danışmanı, Matematik ABD.

Bu çalışma, jürimiz tarafından oybirliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora
tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ
İzmir Üniversitesi, Matematik
Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Gazi Üniversitesi, Matematik
Prof. Dr. Çetin ELMAS
Gazi Üniversitesi, Elektrik Eğitimi
Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi, Matematik
Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Gazi Üniversitesi, Matematik

Tarih : 05/12/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakan EFE

FUZZY METRİK UZAYLAR VE UYGULAMALARI**(Doktora Tezi)****Hakan EFE****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Aralık 2008****ÖZET**

Bu tezde, fuzzy multi metrik uzay kavramı literatürde ilk defa tanımlanmıştır. Fuzzy multi-metrik uzayların topolojik yapısı, bu uzaylarda yakınsaklık ve süreklilik gibi temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca t-norm ve t-conormlarla sezgisel fuzzy metrik uzaylar arasındaki bazı ilişkileri örnekler ışığında verilmiştir. Son olarak sezgisel fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff metriğin kuruluşu detaylı bir şekilde verilmiştir. Sezgisel fuzzy metrik tarafından indirgenen düzgünlük yapısı ile Hausdorff metrik tarafından indirgenen düzgünlük yapısı arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132**Anahtar Kelimeler : Fuzzy metrik uzay, Sezgisel fuzzy metrik uzay, Fuzzy multi-metrik uzay, Hausdorff metrik****Sayfa Adedi : 69****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Cemil YILDIZ**

FUZZY METRIC SPACES AND APPLICATIONS**(Ph.D Thesis)****Hakan EFE****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****December 2008****ABSTRACT**

In this thesis, the concept of fuzzy multi-metric space was defined first time in the literature. Fundamental properties of fuzzy multi-metric spaces like topological structure of fuzzy multi-metric space, convergence and continuity were given. Furthermore, relationships between t-norms and t-conorms and intuitionistic fuzzy metric spaces were given in the light of examples. Finally the construction of Hausdorff metric in intuitionistic fuzzy metric space was introduced in detail. Some relationships between uniform structures induced by intuitionistic fuzzy metric and Hausdorff metric were given.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Fuzzy metric space, Intuitionistic fuzzy metric space, Fuzzy multi metric space, Hausdorff metric.****Page Number : 69****Adviser : Prof. Dr. Cemil YILDIZ**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen, fikirleriyle yol gösteren, değerli zamanlarını bana ayıran ve bana her zaman bir baba şefkatiyle yaklaşan Sayın Hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ' a teşekkürü borç bilirim. Süreç içerisinde karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemde yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ, Prof. Dr. Çetin ELMAS' a ve Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi destekleriyle hiçbir zaman yalnız bırakmayan fedakâr eşim Fatma'ya ve çocuklarım Zeynep ile Ahmet'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR ve BAZI SONUÇLAR.....	4
2.1. Fuzzy Metrik Uzaylar	4
2.2. Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar	6
3. FUZZY MULTİ-METRİK UZAYLAR	16
4. t-NORMLAR ve t-CONORMLARLA SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER	24
5. SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLARDA HAUSDORFF METRİK	40
5.1. Hausdorff Metrik.....	40
5.2. Hausdorff Sezgisel Fuzzy Metrik.....	42
5.3. Hausdorff Metrik Tarafından İndirgenen Düzgün Yapı.....	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. $T_1(x,y)=\min\{x,y\}$ t-normu.....	24
Şekil 4.2. $T_2(x,y)=xy$ t-normu.....	25
Şekil 4.2. $T_3(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$ t-normu.....	25
Şekil 4.2. $S_1(x,y)=\max\{x,y\}$ t-conormu.....	26
Şekil 4.2. $S_2(x,y)=x+y-xy$ t-conormu.....	26
Şekil 4.2. $S_3(x,y)=\min\{1,x+y\}$ t-conormu.....	27

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$*$	Üçgen norm
$\diamond$	Üçgen conorm
(X,d)	Metrik uzay
$(X,M,*)$	Fuzzy metrik uzay
$B(x,r,t)$	Fuzzy metrik uzaydaki açık yuvar
(M,N)	Sezgisel fuzzy metrik
$(X,M,N,*,\diamond)$	Sezgisel fuzzy metrik uzay
$B_{(M,N)}(x,r,t)$	Sezgisel fuzzy metrik uzaydaki açık yuvar
$\tau_{(M,N)}$	Segisel fuzzy metrik uzaydaki topoloji
$a \wedge b$	a ve b nin infimumu
$a \vee b$	a ve b nin supremumu
Kısaltmalar	Açıklama
t-norm	Üçgen norm
t-conorm	Üçgen conorm

1. GİRİŞ

Matematik deyince ilk akla gelen kesinliktir. Halbuki günlük hayatımızda konuşmalarımız sırasında belirsizlik içeren, orta yaşlı insan, uzun zaman, pahalı araba, yüksek bina gibi anlamı kişiden kişiye ve duruma göre değişen bir çok sözcük kullanılır. Klasik mantığın tanımlayamadığı bu tür belirsizliklerin çoğunlukla bilimsel olmadıkları düşüncesi kabul görmesine rağmen, 19. yüzyılın başlarında bu tür belirsizlikler üzerine bir çok filozof düşünmüştür. Einstein bu durumu şu şekilde ifade etmiş: “Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değildir ”. Belirsizliğin, modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası 1965’te California Berkeley Üniversitesinden Azeri matematikçi Lotfi A. Zadeh [1]’in fuzzy (bulanık) mantık ve dolayısıyla fuzzy (bulanık) küme kavramını tanımlaması oldu.

Zadeh bu çalışmasında insan düşüncesinin büyük çoğunluğunun bulanık olduğunu, kesin olmadığını belirtmiştir. Bu yüzden 0 ve 1 ile temsil edilen Boolean mantık bu düşünce işlemi yeterli bir şekilde ifade edememektedir. İnsan mantığı, açık, kapalı, sıcak, soğuk, 0 ve 1 gibi değişkenlerden oluşan kesin ifadelerin yanı sıra, az açık, az kapalı, serin, ılık gibi ara değerleri de göz önüne almaktadır. Fuzzy (bulanık) mantık klasik mantığın aksine iki seviyeli değil, çok seviyeli işlemleri kullanmaktadır. Ayrıca Zadeh insanların denetim alanında, mevcut makinelerden daha iyi olduğunu ve kesin olmayan dilsel bilgilere bağlı olarak etkili kararlar alabildiklerini savunmuştur.

Fuzzy (bulanık) mantığın ilk uygulaması, Mamdani tarafından 1974 yılında bir buhar makinesinin bulanık denetiminin gerçekleştirilmesi olmuştur. 1980 yılında bir Hollanda şirketi çimento fırınlarının denetiminde fuzzy (bulanık) mantık denetimini uygulamıştır. Daha sonraları başta Japonya olmak üzere dünyadaki bir çok ülke araştırma ve mühendislik uygulamalarıyla bu konuda büyük gelişmeler kaydettiler. Örneğin, fuzzy (bulanık) denetimli çamaşır makinesi, bu makinenin çamaşırın cinsine, miktarına, kirliliğine göre en etkili çamaşır yıkama ve su kullanımı programını seçmektedir [2].

Klasik mantıkta bir önermenin doğruluk değeri, doğrular için 1 ve yanlışlar için 0 kullanılırsa, X evrensel kümesindeki bir A kümesi, matematiksel olarak $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuyla karakterize edilir. Burada A kümesine ait elemanlara 1 değerini, ait olmayanlara ise 0 değerini veren χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Fuzzy önermelerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kesin bir şey söylenemeyeceğinden dolayı bunların doğruluk değeri $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ kümesinden bir sayıyla derecelendirilir. Matematiksel olarak, X evrensel kümesindeki bir A fuzzy kümesi $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ şeklinde karakterize edilir. Burada μ_A fonksiyonuna A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu denir. A fuzzy kümesi, X deki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu ikililer kümesidir. Yani $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$ olup burada $\mu_A(x)$ değeri x in A kümesine üyelik (aitlik) derecesini gösterir.

1986 yılında Atanassov [3] boştan farklı bir kümenin her elemanının üyelik olma derecesi ve üyelik olmama derecesi toplamının 1 den küçük ve eşit olma şartını koyarak fuzzy küme kavramının bir genelleştirmesi gibi “Sezgisel fuzzy küme” kavramını vermiştir. Bu yeni tanım ışığında, 1997 yılında Çoker [4] “Sezgisel fuzzy topolojik uzay” kavramını ortaya koymuş daha sonra bu alanda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

2004 yılında Park [5] sezgisel fuzzy küme fikrini kullanarak, sürekli üçgen norm ve sürekli üçgen conorm yardımı ile George ve Veeramani [6]’nin vermiş olduğu fuzzy metrik uzay tanımının bir genelleştirmesi olarak “Sezgisel fuzzy metrik uzay” kavramını ve bu uzayın temel özelliklerini vermiştir. Bu çalışma, bu alanla ilgilenen araştırmacılar için önemli bir açılım getirmiş ve özellikle sabit nokta teorisinde uygulama alanı bulmuştur [7-9].

Tezimizin ikinci bölümünde George ve Veeramani [6] anlamında fuzzy metrik uzay ve Park [5]’in tanımlamış olduğu sezgisel fuzzy metrik uzay kavramları ile bu

uzayların temel özellikleri verilmiştir.

Tezimizin üçüncü bölümünde Smarandache [10,11] tarafından verilen multi-uzay kavramı fuzzy metrik uzaylara taşınarak ilk defa fuzzy multi metrik uzay tanımı ve bu uzayın topolojik yapısı, yakınsaklık ve süreklilik gibi temel özellikleri verilmiştir [9].

Tezimizin dördüncü bölümünde Sapena [13] tarafından verilen t-normlarla fuzzy metrik uzaylar arasındaki bazı ilişkiler, t-normlar ve t-conormlarla sezgisel fuzzy metrik uzaylar arasındaki bazı ilişkilere genelleştirilmiştir.

Tezimizin beşinci bölümünde Gregori, Romeguera ve Veeeramani [14] tarafından verilen sezgisel fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff metriğin kuruluşu detaylı bir biçimde verilmiş ve ilk defa düzgünlük yapısı ile bağlantıları ve bazı özellikleri verilmiştir [15].

2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde, önce George ve Veeramani [6] tarafından t-norm yardımı ile verilen fuzzy metrik uzay tanımı verilmiştir. Daha sonra da Park [5]'in sezgisel fuzzy küme fikri kullanılarak, sürekli üçgen norm ve sürekli üçgen conorm yardımı ile George ve Veeramani [6]'nin vermiş olduğu fuzzy metrik uzay tanımının bir genelleştirmesi gibi olan sezgisel fuzzy metrik uzay kavramı ve bu uzayın tezimiz için gerekli olan bazı temel özellikleri verilmiştir.

2.1. Fuzzy Metrik Uzaylar

2.1.1. Tanım (t-norm):

$*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi eğer,

- (i) $*$ birleşmeli ve değişmeli,
- (ii) $*$ sürekli,
- (iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,
- (iv) $\forall a, b, c$ ve $d \in [0,1]$ için $a \leq b$ ve $c \leq d$ iken $a * c \leq b * d$

şartlarını sağlıyorsa $*$ işlemine üçgen norm (t-norm) denir [16].

2.1.2. Örnek:

$\forall a, b \in [0,1]$ için $a * b = a.b$ ve $a * b = \min\{a, b\}$ şeklinde tanımlanan ikili işlemler sürekli t-normdur.

2.1.3. Tanım (t-conorm):

$\diamond$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi eğer,

- (i) $\diamond$ birleşmeli ve değişmeli,
- (ii) $\diamond$ sürekli,
- (iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a \diamond 0 = a$,
- (iv) $\forall a, b, c$ ve $d \in [0,1]$ için $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a \diamond b \leq c \diamond d$

şartları sağlanıyorsa $\diamond$ işlemine sürekli t-conorm denir [16].

2.1.4.Örnek:

$\forall a, b \in [0,1]$ için $a \diamond b = \min\{a+b, 1\}$ ve $a \diamond b = \max\{a, b\}$ şeklinde tanımlanan ikili işlemler sürekli t-conormdur.

2.1.5.Not:

$*$ ve $\diamond$ işlemleri aşağıdaki şartları sağlar:

- (i) Herhangi $r_1, r_2 \in (0,1)$, $r_1 > r_2$ için $\exists r_3, r_4 \in (0,1)$ var $\ni r_1 * r_3 \geq r_2$ ve $r_1 \geq r_4 \diamond r_2$ dir.
- (ii) Herhangi $r_5 \in (0,1)$ için $\exists r_6, r_7 \in (0,1)$ var $\ni r_6 * r_6 \geq r_5$ ve $r_7 \diamond r_7 \leq r_5$ dir.

2.1.6.Tanım (fuzzy metrik uzay):

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $*$ sürekli t-norm ve $M, X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy küme olsun. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s \in (0, \infty)$ için,

- (FM-1) $M(x, y, t) > 0$,
- (FM-2) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
- (FM-3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- (FM-4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)$,
- (FM-5) $M(x, y, .): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli olsun.

Bu durumda $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir. Burada $M(x, y, t)$ ifadesine x ile y nin t ye göre birbirine yakın olma derecesi denir [6].

2.1.7.Örnek:

$X = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $a * b = a.b$, her $x, y \in X$ ve $t \in (0, \infty)$ için $M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \right]^{-1}$ olmak üzere $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

2.1.8.Örnek:

(X, d) bir metrik uzay olsun. $a * b = a.b$ ve

$$M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)},$$

$k, m, n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $(X, M_d, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Bu örnek t-norm olarak $a * b = \min\{a, b\}$ alınması durumunda da geçerlidir. Ayrıca bu örnek her metriğin bir fuzzy metrik oluşturacağını da göstermektedir. Ayrıca $k=m=n=1$ alınması durumunda

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

elde edilir. Bu metriğe d metriği tarafından oluşturulan standart fuzzy metrik denir.

2.2. Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar

2.2.1.Tanım (sezgisel (intuitionistic) fuzzy metrik uzay):

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $*$ sürekli t-norm, $\diamond$ sürekli t-conorm, M ve N , $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde fuzzy kümeleri $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s \in (0, \infty)$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(IFM-1) \quad M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1,$$

$$(IFM-2) \quad M(x, y, t) > 0,$$

- (IFM-3) $M(x,y,t)=1 \Leftrightarrow x=y$,
 (IFM-4) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$,
 (IFM-5) $M(x,y,t)*M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$,
 (IFM-6) $M(x,y,.) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ sürekli,
 (IFM-7) $N(x,y,t) > 0$,
 (IFM-8) $N(x,y,t)=0 \Leftrightarrow x=y$,
 (IFM-9) $N(x,y,t)=N(y,x,t)$,
 (IFM-10) $N(x,y,t) \diamond N(y,z,s) \geq N(x,z,t+s)$,
 (IFM-11) $N(x,y,.) : (0,\infty) \rightarrow [0,1]$ sürekli.

Bu durumda (M,N) ikilisine X üzerinde sezgisel fuzzy metrik denir. $(X,M,N,*,\diamond)$ beşlisine sezgisel fuzzy metrik uzay denir.

Burada $M(x,y,t)$ ve $N(x,y,t)$ fonksiyonları sırasıyla x ile y nin t ye göre birbirlerine yakın olma ve yakın olmama derecesidir [5].

2.2.2.Not:

Her $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayı $(X,M,1-M,*,\diamond)$ formunda sezgisel fuzzy metrik uzaydır. Burada $*$ ile $\diamond$ birleştirilerek $\forall a,b \in [0,1]$ için $a \diamond b = 1 - ((1-a)*(1-b))$ olarak tanımlanır [17].

2.2.3.Teorem:

Her $x,y \in X$ için $M(x,y,.)$ azalmayan ve $N(x,y,.)$ artmayandır [5].

İspat:

Kabul edelim ki $0 < s < t$ için $M(x,y,t) > M(x,y,s)$, yani M kesin azalan olsun. Dolayısıyla

$$M(x,y,t)*M(y,y,s-t)\leq M(x,y,s)<M(x,y,t)\Rightarrow M(x,y,t)<M(x,y,t)$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $0<s<t$ için $M(x,y,t)\leq M(x,y,s)$, yani M azalmayandır.

Benzer şekilde kabul edelim ki $0<s<t$ için $N(x,y,t)<N(x,y,s)$, yani N kesin artan olsun. Dolayısıyla,

$$N(x,y,t)\diamond N(y,y,s-t)\geq N(x,y,s)>N(x,y,t)\Rightarrow N(x,y,t)>N(x,y,t)$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $0<t<s$ için $N(x,y,t)\geq N(x,y,s)$, yani N artmayandır.

2.2.4.Örnek:

(X,d) bir metrik uzay olsun. Her $a,b\in[0,1]$ için $a*b=a.b$ ve $a\diamond b=\min\{1,a+b\}$ olarak alınırsa, $M_d, N_d, X\times X\times(0,\infty)$ üzerinde her $h,m,n\in\mathbb{R}^+$ için

$$M_d(x,y,t)=\frac{ht^n}{ht^n+md(x,y)} \text{ ve } N_d(x,y,t)=\frac{md(x,y)}{ht^n+md(x,y)}$$

olmak üzere $(X,M_d,N_d,*,\diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

Bu örnek t-norm olarak $a*b=\min\{a,b\}$ ve t-conorm olarak $a\diamond b=\max\{a,b\}$ alınması durumunda da geçerlidir.

Ayrıca burada, $h=m=n=1$ alınırsa,

$$M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)} \text{ ve } N_d(x,y,t)=\frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$$

elde edilir. Bu d metriği tarafından oluşturulan standart sezgisel fuzzy metrik denir.

Burada $\tau_{(M,N)}=\tau_d$ dir.

2.2.5.Tanım:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $r \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $x \in X$ olsun. x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$B_{(M,N)}(x, r, t) = \{y \in X: M(x, y, t) > 1-r, N(x, y, t) < r\}$$

olarak tanımlanır [5].

2.2.6.Tanım:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \in B_{(M,N)}(x, r, t) \subset A$ olacak şekilde $B_{(M,N)}(x, r, t)$ açık yuvarı varsa A ya (M, N) ye göre açıktır denir.

2.2.7.Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayında her açık $B_{(M,N)}(x, r, t)$ yuvarı açık kümedir [5].

İspat

$B_{(M,N)}(x, r, t)$, x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar olsun. $y \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ ise $M(x, y, t) > 1-r$ ve $N(x, y, t) < r$ dir. $M(x, y, t) > 1-r$ olduğundan $0 < t_0 < t$ olacak biçimde en az bir $t_0 \in (0, t)$ var $\ni M(x, y, t_0) > 1-r$ ve $N(x, y, t_0) < r$ olur. $r_0 = M(x, y, t_0)$ olsun. $r_0 > 1-r$ olduğundan en az bir $s \in (0, 1)$ var $\ni r_0 > 1-s > 1-r$ dir. Şimdi verilen r_0 ve s için $r_0 > 1-s$ olduğundan en az bir $r_1, r_2 \in (0, 1)$ var $\ni r_0 * r_1 \geq 1-s$ ve $(1-r_0) \diamond (1-r_2) \leq s$ olur. $r_3 = \max\{r_1, r_2\}$ alalım. ve $B_{(M,N)}(y, 1-r_3, t-t_0)$ açık yuvarını göz önünde bulunduralım.

İddia ediyoruz ki, $B_{(M,N)}(y, 1-r_3, t-t_0) \subset B_{(M,N)}(x, r, t)$ dir. Eğer,

$z \in B_{(M,N)}(y, 1-r_3, t-t_0)$ ise $M(y, z, t-t_0) > r_3$ ve $N(y, z, t-t_0) < 1-r_3$

olur. Böylece,

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t_0) * M(y, z, t-t_0) \geq r_0 * r_3 \geq r_0 * r_1 \geq 1-s > 1-r,$$

$$N(x, z, t) \leq N(x, y, t_0) \diamond N(y, z, t-t_0) \leq (1-r_0) \diamond (1-r_3) \leq (1-r_0) \diamond (1-r_2) \leq s < r$$

olur. Bu da $z \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ ve sonuçta $B_{(M,N)}(y, 1-r_3, t-t_0) \subset B_{(M,N)}(x, r, t)$ elde edilir. O halde, $B_{(M,N)}(x, r, t)$ yuvarı açık kümedir.

2.2.8. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\tau_{(M,N)} = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists t > 0 \text{ ve } r \in (0, 1) \text{ var } \ni B(x, r, t) \subset A\}$$

ile tanımlanan aile X üzerinde bir topolojidir [5].

İspat:

$\tau_{(M,N)}$ ailesinin topoloji olma şartları olarak bilinen t_1, t_2, t_3 şartlarını sağladığını göstereceğiz.

(t_1) $\emptyset$ kümesinin hiçbir elemanı olmadığından $\emptyset$ un elemanlarını merkez kabul eden açık yuvar boştur. O halde $\emptyset \in \tau_{(M,N)}$.

Her $x \in X$ ve $r > 0$ için $B(x, r, t) \subset X$ olduğundan $X \in \tau_{(M,N)}$.

(t_2) $A_1, A_2 \in \tau_{(M,N)}$ olsun. Gösterelim ki $A_1 \cap A_2 \in \tau_{(M,N)}$ dir.

$$A_1 \in \tau_{(M,N)} \Rightarrow \forall x \in A_1 \text{ ve } \forall t > 0, \exists r_1 \in (0, 1) \text{ var } \ni B(x, r_1, t) \subset A_1$$

$$A_2 \in \tau_{(M,N)} \Rightarrow \forall x \in A_2 \text{ ve } \forall t > 0, \exists r_2 \in (0, 1) \text{ var } \ni B(x, r_2, t) \subset A_2$$

$r = \min\{r_1, r_2\}$ alalım. Bu durumda $r \in (0, 1)$ olup

$B_{(M,N)}(x, r, t) \subset B_{(M,N)}(x, r_1, t) \cap B_{(M,N)}(x, r_2, t) \subset A_1 \cap A_2$ dir. Gerçekten,

$$y \in B_{(M,N)}(x, r, t) \Rightarrow M(x, y, t) > 1 - r \text{ ve } N(x, y, t) < r$$

$$\Rightarrow M(x, y, t) > 1 - r > 1 - r_1 \text{ ve } N(x, y, t) < r < r_1$$

$$M(x, y, t) > 1 - r > 1 - r_2 \text{ ve } N(x, y, t) < r < r_2$$

$$\Rightarrow y \in B_{(M,N)}(x, r_1, t) \text{ ve } y \in B_{(M,N)}(x, r_2, t)$$

$$\Rightarrow y \in B_{(M,N)}(x, r_1, t) \cap B_{(M,N)}(x, r_2, t) \text{ dir.}$$

O halde $B_{(M,N)}(x, r, t) \subset A_1 \cap A_2$ olup $A_1 \cap A_2 \in \tau_{(M,N)}$ olduğu elde edilir.

(t₃) Keyfi $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau_{(M,N)}$ olsun. $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{(M,N)}$ olduğunu göstereceğiz.

$$y \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ için } y \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ için } y \in B_{(M,N)}(x, r_{i_0}, t) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ için } y \in B_{(M,N)}(x, r_{i_0}, t) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{(M,N)} \text{ olur.}$$

2.2.9. Sonuç:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $(X, \tau_{(M,N)})$ topolojik uzay olmak üzere,

(i) $\{B_{(M,N)}(x, r, t) : x \in X, r \in (0, 1), t > 0\}$ ailesi $\tau_{(M,N)}$ için bir tabandır.

(ii) $\{B_{(M,N)}(x, 1/n, 1/n) : n = 1, 2, \dots\}$ ailesi $\forall x \in X$ noktası için yerel taban olduğundan

$(X, \tau_{(M,N)})$ uzayı birinci sayılabilir dir.

2.2.10. Teorem:

Her sezgisel fuzzy metrik uzay Hausdorff uzayıdır [5].

İspat:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $x \neq y$, $x, y \in X$ olsun. Dolayısıyla $0 < M(x, y, t) < 1$ ve $0 < N(x, y, t) < 1$ dir. $r_1 = M(x, y, t)$, $r_2 = N(x, y, t)$ ve $r = \max\{r_1, 1 - r_2\}$ diyelim. Her bir $r_0 \in (r, 1)$ için $r_3, r_4 \in (0, 1)$ var $\exists r_3 * r_3 \geq r_0$ ve $(1 - r_4) \diamond (1 - r_4) \leq 1 - r_0$ dir. $r_5 = \max\{r_3, r_4\}$ diyelim ve $B_{(M, N)}(x, 1 - r_5, t/2)$ ile $B_{(M, N)}(y, 1 - r_5, t/2)$ açık yuvarlarını ele alalım. Bu yuvarların arakesiti boştur. Gerçekten,

$$z \in B_{(M, N)}(x, 1 - r_5, t/2) \cap B_{(M, N)}(y, 1 - r_5, t/2) \text{ olsaydı,}$$

$$r_1 = M(x, y, t) \geq M(x, z, t/2) * M(z, y, t/2) \geq r_5 * r_5 \geq r_3 * r_3 \geq r_0 > r_1 \text{ ve}$$

$$r_2 = N(x, y, t) \leq N(x, z, t/2) \diamond N(z, y, t/2) \leq (1 - r_5) \diamond (1 - r_5) \leq (1 - r_4) \diamond (1 - r_4) \leq 1 - r_0 < r_2$$

olurdu ki bu bir çelişkidir. O halde $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzayıdır.

2.2.11. Teorem:

(X, d) metrik uzay ve

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \text{ ve } N_d(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt + d(x, y)}, k \in \mathbb{R}^+$$

X üzerinde sezgisel fuzzy metrik olsun. d metriği tarafından üretilen τ_d topolojisi ile (M, N) tarafından üretilen $\tau_{(M, N)}$ topolojisi çakışır [5].

2.2.12. Tanım:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x, y \in A$, $t > 0$ için en

az bir $r \in (0,1)$ var $\ni M(x,y,t) > 1-r$ ve $N(x,y,t) < r$ ise A kümesine (intuitionistic fuzzy bounded) IF- sınırlıdır denir [5].

2.2.13.Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$, d metriği tarafından oluşturulan sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $A \subset X$, IF-sınırlıdır $\Leftrightarrow A$ sınırlıdır [5].

2.2.14.Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayın her kompakt alt kümesi IF-sınırlıdır [5].

İspat:

$A \subset X$ kompakt olsun. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olsun. A nın $\{B_{(M,N)}(x, r, t) : x \in A\}$ açık örtüsünü alalım. A kompakt olduğundan $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ var $\ni A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r, t)$ dir. $x, y \in A$ olsun.

Dolayısıyla bazı i, j için $x \in B_{(M,N)}(x_i, r, t)$ ve $y \in B_{(M,N)}(x_j, r, t)$ dir.

Buradan,

$$M(x, x_i, t) > 1-r \text{ ve } N(x, x_i, t) < r ; M(y, x_j, t) > 1-r \text{ ve } N(y, x_j, t) < r$$

olur. $\alpha = \min\{M(x_i, x_j, t) : 1 \leq i, j \leq n\}$ ve $\beta = \max\{N(x_i, x_j, t) : 1 \leq i, j \leq n\}$ olsun. $\alpha, \beta > 0$ dir.

Buradan $0 < s_1 < 1$ ve $0 < s_2 < 1$ olmak üzere,

$$M(x, y, 3t) \geq M(x, x_i, t) * M(x_i, x_j, t) * M(x_j, y, t) \geq (1-r) * (1-r) * \alpha > 1-s_1 \text{ ve}$$

$$N(x, y, 3t) \leq N(x, x_i, t) \diamond N(x_i, x_j, t) \diamond N(x_j, y, t) \leq r \diamond r \diamond \beta < s_2$$

olur. $s = \max\{s_1, s_2\}$ ve $t' = 3t$ alırsak $\forall x, y \in A$ için $M(x, y, t') > 1-s$ ve $N(x, y, t') < s$ elde edilir ki bu A nın IF-sınırlı olduğunu gösterir.

2.2.15.Sonuç:

Sezgisel fuzzy metrik uzayda kompakt her küme kapalı ve sınırlıdır.

2.2.16.Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $\tau_{(M, N)}$, X üzerine fuzzy metrik tarafından oluşturulmuş topoloji ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Bu durumda, $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $N(x_n, x, t) \rightarrow 0$ olmasıdır [5].

İspat:

Kabul edelim ki $x_n \rightarrow x$ ve $t > 0$ olsun. Buradan her $r \in (0, 1)$ için en az bir n_0 doğal sayısı var $\exists \forall n \geq n_0$ için $x_n \in B_{(M, N)}(x, r, t)$ dir. Dolayısıyla, $1 - M(x_n, x, t) < r$ ve $N(x_n, x, t) < r$ ve böylece $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $N(x_n, x, t) \rightarrow 0$ olur.

Tersine her bir $t > 0$, $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $N(x_n, x, t) \rightarrow 0$ olsun. Dolayısıyla en az bir n_0 doğal sayısı var $\exists \forall n \geq n_0$ için $1 - M(x_n, x, t) < r$ ve $N(x_n, x, t) < r$ olur. Böylece $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in B_{(M, N)}(x, r, t)$ olup $x_n \rightarrow x$ dir.

2.2.17.Tanım:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun.

(i) Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\exists \forall m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ve $N(x_n, x_m, t) < \varepsilon$ ise $\{x_n\} \subset X$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(ii) Eğer her Cauchy dizisi $\tau_{(M, N)}$ topolojisine göre yakınsak ise $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayına tamdır denir [5].

2.2.18. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. X de her Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse X sezgisel fuzzy metrik uzayı tamdır [5].

İspat:

$\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi ve $\{x_{i_n}\}$ dizisi de x noktasına yakınsayan $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi olsun. Göstermeliyiz ki $x_n \rightarrow x$ dir. $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. $r \in (0, 1)$ seçelim öyle ki $(1-r)*(1-r) \geq (1-\varepsilon)$ ve $r \diamond r \leq \varepsilon$ olur. $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall m, n \geq n_0$ için,

$$M(x_n, x_m, t/2) > 1-r \text{ ve } N(x_n, x_m, t/2) < r$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $x_{i_n} \rightarrow x$ olduğundan $i_p > n_0$ için

$$M(x_{i_p}, x, t/2) > 1-r \text{ ve } N(x_{i_p}, x, t/2) < r$$

olacak şekilde i_p pozitif tamsayısı vardır. Böylece, $n \geq n_0$ için,

$$M(x_n, x, t) \geq M(x_n, x_{i_p}, t/2) * M(x_{i_p}, x, t/2) > (1-r)*(1-r) \geq (1-\varepsilon),$$

$$N(x_n, x, t) \leq N(x_n, x_{i_p}, t/2) \diamond N(x_{i_p}, x, t/2) < r \diamond r \leq \varepsilon.$$

Buradan $x_n \rightarrow x$ dir ve böylece $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı tamdır.

3. FUZZY MULTİ-METRİK UZAYLAR

Smarandache [10,11] multi-uzay tanımını vererek özellikle geometri alanında yeni bir açılım yapmıştır. Daha sonra Mao [18] multi-metrik uzay tanımını vermiştir. Bu bölümde Smarandache'nin verdiği multi-uzay tanımı ile George ve Veeramani [6]'nin vermiş olduğu fuzzy metrik uzay tanımı birleştirilerek fuzzy multi-metrik uzay tanımlanacaktır. Ayrıca bu uzaya ait temel özellikler verilecektir.

3.1.Tanım:

Her $1 \leq i \leq m$ için $(X_i, M_i, *)$ fuzzy metrik uzay olmak üzere $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ olarak tanımlanan metrik uzaya fuzzy multi-metrik uzay denir [12].

3.2.Not:

Yukarıdaki tanım için aşağıdaki durumlar olabilir:

- (i) $1 \leq j \leq s$, $i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $X_{i_1} = X_{i_2} = \dots = X_{i_s}$ olacak biçimde $i_1, i_2, \dots, i_s$ pozitif tamsayıları olabilir.
- (ii) $1 \leq j \leq s$, $l_j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $M_{l_1} = M_{l_2} = \dots = M_{l_s}$ olacak biçimde $l_1, l_2, \dots, l_s$ pozitif tamsayıları olabilir.

3.3.Tanım:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir fuzzy multi-metrik uzay olsun. $t > 0$ olmak üzere $x \in \tilde{X}$ merkezli, $r \in (0, 1)$ yarıçaplı r-disk

$$B(x, r, t) = \{ y \in \tilde{X} : M_k(x, y, t) > 1 - r, 1 \leq k \leq m, k \in \mathbb{N} \}$$

olarak tanımlanır [12].

3.4.Teorem:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir fuzzy multi-metrik uzay olsun.

$$\tau = \{A \subset \tilde{X} : \forall x \in A, \exists t > 0 \text{ ve } r \in (0,1) \text{ var } \ni B(x,r,t) \subset A\}$$

ile tanımlanan aile $\tilde{X}$ üzerinde bir topoloji oluşturur [12].

3.5.Teorem:

Her bir $1 \leq i \leq m$ için (X_i, d_i) metrik uzay olmak üzere $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir multi-metrik uzay olsun. $a*b=ab$, $a*b \neq 0$ ve

$$M_i(x, y, t) = \frac{t}{t + d_i(x, y)}$$

olmak üzere $\tilde{X}$ bir fuzzy multi-metrik uzaydır. Bu, her multi-metrik uzaydan bir fuzzy multi-metrik uzay elde edilebileceğini gösterir [12].

3.6.Teorem:

$M_1, M_2, \dots, M_m$, X üzerinde m-tane fuzzy metrik olsun. Bu durumda $a*b \neq 0$ olmak üzere $M_1 * M_2 * \dots * M_m$, X üzerinde bir fuzzy metriktir [12].

3.7.Teorem:

$d_1, d_2, \dots, d_m$, X üzerinde m-tane metrik olsun. Bu durumda $a*b=ab$ ve $a*b \neq 0$ olmak

üzere her $x, y \in X$ için

$$\frac{t}{t + d_1(x, y)} * \frac{t}{t + d_2(x, y)} * \dots * \frac{t}{t + d_m(x, y)},$$

X üzerinde bir fuzzy metriktir [12].

3.8.Tanım:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir fuzzy multi-metrik uzay, $x \in \tilde{X}$ ve $\{x_n\} \subset \tilde{X}$ bir dizi olsun. Eğer her $r \in (0, 1)$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$ var öyle ki her $n \geq n_0$ iken her $t > 0$ için $M_i(x_n, x, t) > 1 - r$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in \tilde{X}$ noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x$ veya $\lim x_n = x$ ile gösterilir [12].

3.9.Teorem:

Bir $\{x_n\} \subset \tilde{X}$ dizisinin $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ fuzzy multi-metrik uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq k \leq m$ var öyle ki $\{x_n : n \geq n_0\}$ alt dizisi $(X_k, M_k, *)$ fuzzy metrik uzayında yakınsak olmasıdır [12].

İspat:

Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in \tilde{X}$ noktasına yakınsıyorsa tanımdan her $r \in (0, 1)$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq k \leq m$ var öyle ki her $n \geq n_0$ iken her $t > 0$ için $M_k(x_n, x, t) > 1 - r$ olur. Yani $\{x_n : n \geq n_0\} \subset X_k$ ve dolayısıyla $\{x_n : n \geq n_0\}$ alt dizisi $(X_k, M_k, *)$ fuzzy metrik uzayında yakınsaktır.

Eğer $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq k \leq m$ var öyle ki $\{x_n : n \geq n_0\}$ alt dizisi $(X_k, M_k, *)$ fuzzy metrik uzayında yakınsaksa her $r \in (0, 1)$ için tanımdan en az bir $p_0 \in \mathbb{N}$ ve $x \in \tilde{X}$ noktası var

öyle ki $n \geq \max\{n_0, p_0\}$ iken her $t > 0$ için $M_k(x_n, x, t) > 1 - r$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi $\tilde{X}$ fuzzy multi-metrik uzayında yakınsaktır.

3.10. Teorem:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir fuzzy multi-metrik uzay, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ $\tilde{X}$ da diziler ve $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ bir dizi olsun. Eğer $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $t_n \rightarrow t_0$ ve en az bir $1 \leq p \leq m$ için $x_0, y_0 \in X_p$, $t > 0$ ise, $\lim_n M_p(x_n, y_n, t_n) = M_p(x_0, y_0, t_0)$ olur [12].

İspat:

$x_n \rightarrow x_0$ ve $y_n \rightarrow y_0$ olduğundan en az bir n_1 ve n_2 doğal sayıları var öyle ki $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ iken $x_n, y_n \in X_p$ dir. $\delta < t/2$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı seçelim. Bu durumda en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ için $|t_n - t| < \delta$ dır. Böylece her $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ için

$$M_p(x_n, y_n, t_n) \geq M_p(x_n, x_0, \delta) * M_p(x_0, y_0, t - 2\delta) * M_p(y_n, y_0, \delta) \text{ ve} \\ M_p(x_0, y_0, t + 2\delta) \geq M_p(x_n, x_0, \delta) * M_p(x_n, y_n, t_n) * M_p(y_n, y_0, \delta)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_n M_p(x_n, y_n, t_n) \geq 1 * M_p(x_0, y_0, t - 2\delta) * 1 \text{ ve} \\ M_p(x_0, y_0, t + 2\delta) \geq 1 * \lim_n M_p(x_n, y_n, t_n) * 1$$

olur. $t \rightarrow M_p(x, y, t)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$\lim_n M_p(x_n, y_n, t_n) = M_p(x_0, y_0, t_0)$ elde edilir.

3.11. Teorem:

Fuzzy multi-metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir [12].

İspat:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir fuzzy multi-metrik uzay, $\{x_n\} \subset \tilde{X}$ bir dizi, $x_1, x_2 \in \tilde{X}$ olmak üzere

$x_n \rightarrow x_1$ ve $x_n \rightarrow x_2$ olsun. Bu durumda en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$ var öyle ki her $n \geq n_0$ için $x_n \in X_i$ olur. Böylece,

$$1 \geq M_i(x_1, x_2, t) \geq M_i(x_1, x_n, t/2) * M_i(x_n, x_2, t/2)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$1 \geq M_i(x_1, x_2, t) \geq 1 * 1 = 1$$

elde edilir ki bu da $x_1 = x_2$ olduğunu gösterir.

3.12. Teorem:

Fuzzy multi-metrik uzayda yakınsak bir dizi sınırlıdır [12].

3.13. Tanım:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir fuzzy multi-metrik uzay, $\{x_n\} \subset \tilde{X}$ bir dizi olsun. Eğer her $r \in (0, 1)$ ve

$t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq s \leq m$ var öyle ki her $n, p \geq n_0$ için $M_s(x_n, x_p, t) > 1 - r$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [12].

3.14. Teorem:

Bir $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ fuzzy multi-metrik uzayında bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsak

olması için gerek ve yeter şart her k , $1 \leq k \leq m$ için $|\{x_n\} \cap X_k|$ nın sonlu veya sonsuz ise

$\{x_n\} \cap X_k$ dizisinin $(X_k, M_k, *)$ fuzzy metrik uzayında yakınsak olmasıdır [12].

İspat:

$(\Rightarrow)$: Açıktır.

$(\Leftarrow)$: Tanımdan en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq s \leq m$ var öyle ki her $n \geq n_1$ için $x_n \in X_s$ dir. Eğer $|\{x_n\} \cap X_k|$ sonsuz ve $\lim(\{x_n\} \cap X_k) = x$ ise $k=s$ olmalıdır. $\{x_n\} \cap X_k = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots\}$ ile gösterelim. Herhangi $\delta \in (0,1)$ için $n_2 \geq n_1$ doğal sayısı var öyle ki her $p, n \geq n_2$ ve her $t > 0$ için $M_k(x_n, x_p, t/2) > 1-\delta$ ve $M_k(x_{k_n}, x, t/2) > 1-\delta$ dır. Buradan,

$$M_k(x_n, x, t) \geq M_k(x_n, x_{k_n}, t/2) * M_k(x_{k_n}, x, t/2) \geq (1-\delta) * (1-\delta) > 1-\varepsilon$$

elde edilir ki bu da $\lim x_n = x$ olduğunu gösterir.

3.15.Tanım:

Eğer bir fuzzy multi-metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsaksa bu uzaya tamdır denir [12].

3.16.Teorem:

$\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ bir tam fuzzy multi-metrik uzay olsun. $n=1,2,\dots$, $0 < \varepsilon_n < 1$ olmak üzere

$\{B(x_n, \varepsilon_n, t)\}$ ε -disk dizisi için aşağıdakiler sağlansın:

(i) $B(x_1, \varepsilon_1, t) \supset B(x_2, \varepsilon_2, t) \supset \dots \supset B(x_n, \varepsilon_n, t) \dots$

(ii) $\lim_n \varepsilon_n = 0$.

Dolayısıyla, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, \varepsilon_n, t)$ tek nokta kümesine eşittir [12].

İspat:

Önce $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (i) koşulundan, eğer $p \geq n$ ise her $t > 0$ için $x_p \in B(x_p, \varepsilon_p, t) \subset B(x_n, \varepsilon_n, t)$ olur. Böylece $1 \leq i \leq m$ ve $x_p, x_n \in X_i$ için $M_i(x_p, x_n, t) > 1 - \varepsilon_n$ elde edilir. Herhangi $\varepsilon \in (0, 1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğundan en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n > n_0$ iken $\varepsilon_n < \varepsilon$ olur. Böylece eğer $x_n \in X_i$ ise $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = x_n$ dir. Buradan bir n' doğal sayısı var öyle ki $p \geq n_0$ iken $x_p \in X_i$ dir. $p, n \geq \max\{n', n_0(\varepsilon)\}$ olacak biçimde p ve n doğal sayılarını seçelim. Bu durumda

$$M_i(x_p, x_n, t) > 1 - \varepsilon_n > 1 - \varepsilon$$

olur ki bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^m X_i$ tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $x_0 \in \tilde{X}$ gibi bir noktaya yakınsar. (i) ve (ii) koşullarından $p \rightarrow \infty$ iken $M_i(x_0, x_n, t) > 1 - \varepsilon_n$ olur. Böylece, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, \varepsilon_n, t)$ olur. Eğer

$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, \varepsilon_n, t)$ olacak şekilde bir y varsa $y \in X_i$ dir. Buradan her $t > 0$ için

$$1 \geq M_i(y, x_0, t) = \lim_n M_i(y, x_n, t) \geq \lim_n (1 - \varepsilon_n) = 1$$

olur. Böylece $M_i(y, x_0, t) = 1$ olur ki bu da $y = x_0$ olması demektir.

3.17.Tanım:

$\tilde{X}_1$ ve $\tilde{X}_2$ iki fuzzy multi-metrik uzay ve f , $\tilde{X}_1$ den $\tilde{X}_2$ ye bir fonksiyon, $x_0 \in \tilde{X}_1$ ve $f(x_0) = y_0 \in \tilde{X}_2$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için en az bir $\delta \in (0, 1)$ var öyle ki her $x \in B(x_0, \delta, t) \subset \tilde{X}_1$ iken $y \in B(y_0, \varepsilon, t) \subset \tilde{X}_2$, yani, $f(B(x_0, \delta, t)) \subset B(y_0, \varepsilon, t)$ oluyorsa f ye x_0

noktasında sürekli denir. Eğer f , $\widetilde{X}_1$ in her noktasında sürekli ise f ye $\widetilde{X}_1$ den $\widetilde{X}_2$ ye sürekli fonksiyon denir [12].

3.18.Teorem:

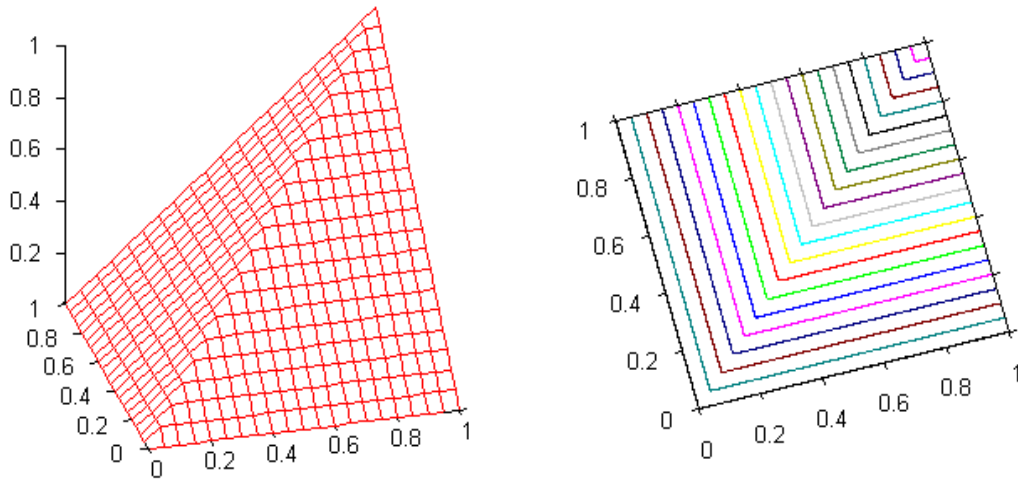
$\widetilde{X}_1$ ve $\widetilde{X}_2$ iki fuzzy multi-metrik uzay ve f , $\widetilde{X}_1$ den $\widetilde{X}_2$ ye sürekli bir fonksiyon ve $\{x_n\} \subset \widetilde{X}_1$ bir dizi olsun. $x \in \widetilde{X}_1$ olmak üzere eğer $x_n \rightarrow x$ ise $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dir [12].

4. t-NORMLAR ve t-CONORMLARLA SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

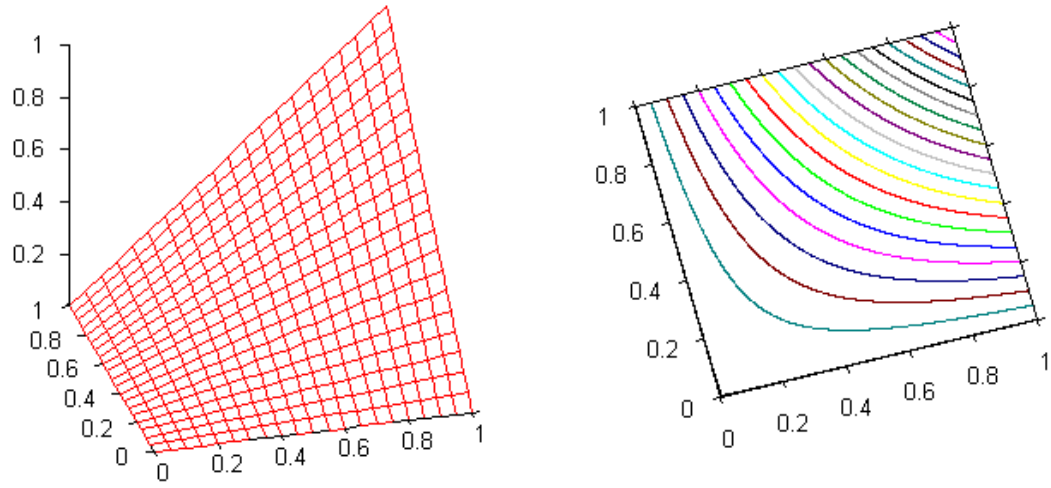
Bu bölümde Sapena [13]'nin vermiş olduğu t-normlarla George ve Veeremani [6] anlamındaki fuzzy metrik uzaylar arasındaki bazı ilişkiler, t-norm ve t-conormlarla Park [5] anlamındaki sezgisel fuzzy metrik uzaylara taşınarak genelleştirilecektir. Ayrıca sezgisel fuzzy metrik uzay örnekleri verilecek ve ürettikleri topolojiler elde edilecektir.

$[0,1] \subset \mathbb{R}$, $i=1,2,3$ için $T_i, S_i: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ olmak üzere her $x,y \in [0,1]$ için $T_1(x,y)=\min\{x,y\}$, $T_2(x,y)=xy$, $T_3(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$ t-normlarını ve $S_1(x,y)=\max\{x,y\}$, $S_2(x,y)=x+y-xy$, $S_3(x,y)=\min\{1,x+y\}$ t-conormlarını ele alalım.

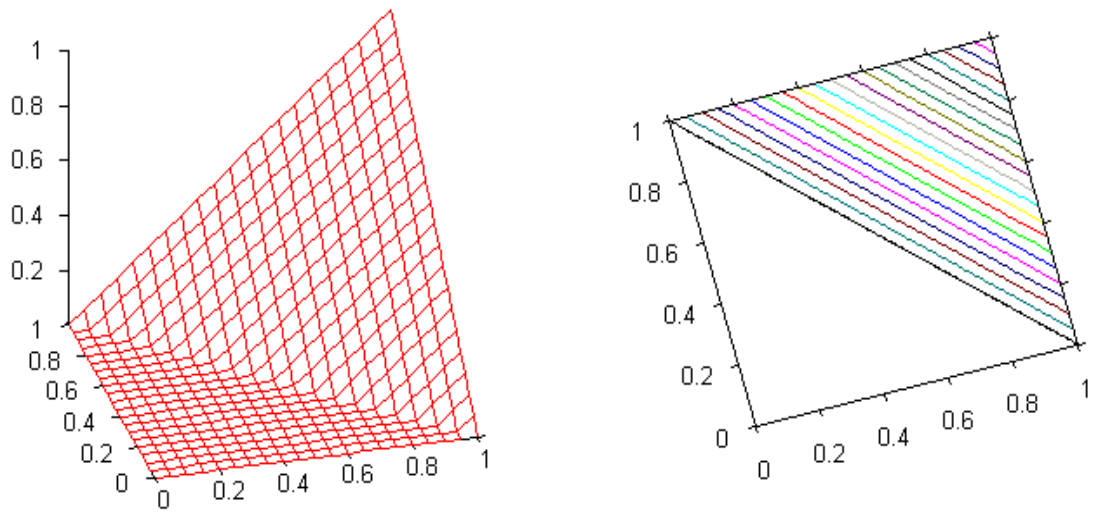
Aşağıdaki şekillerde bu t-norm ve t-conormların üç ve iki boyuttaki grafikleri verilmiştir.



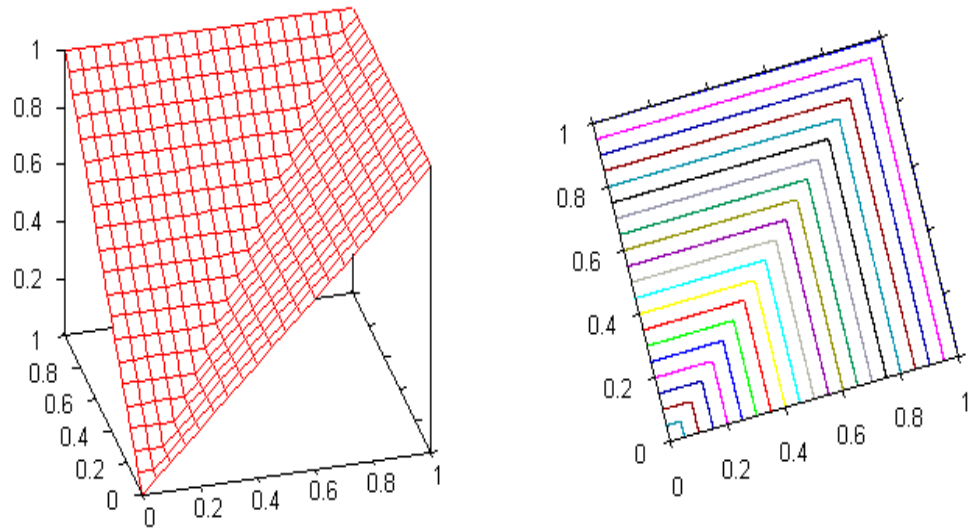
Şekil 4.1. $T_1(x,y)=\min\{x,y\}$ t-normu



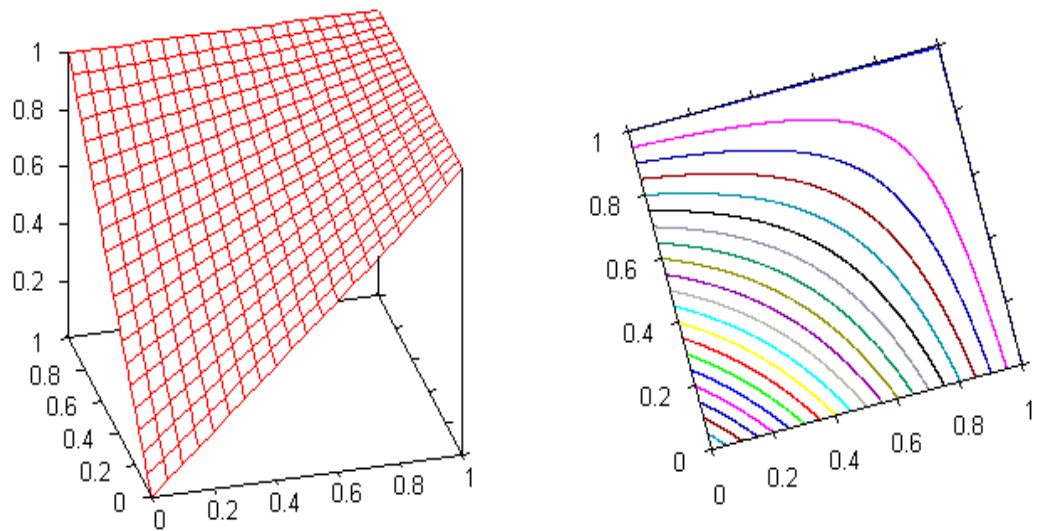
Şekil 4.2. $T_2(x,y)=xy$ t-normu



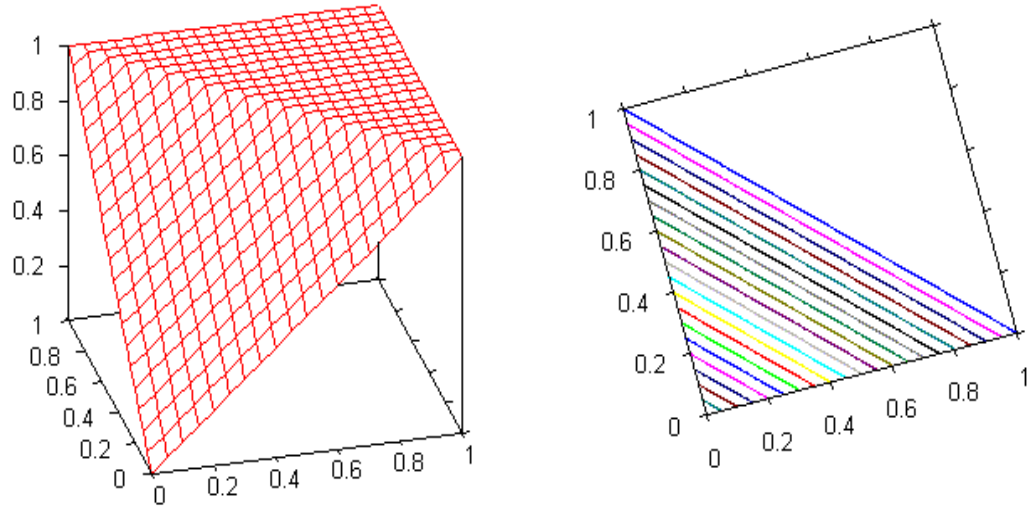
Şekil 4.3. $T_3(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$ t-normu



Şekil 4.4. $S_1(x,y)=\max\{x,y\}$ t-conormu



Şekil 4.5. $S_2(x,y)=x+y-xy$ t-conormu



Şekil 4.6. $S_3(x,y)=\min\{1,x+y\}$ t-conormu

4.1.Önerme:

$x,y \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdakiler vardır:

- (i) $T_3(x,y) \leq T_2(x,y) \leq T_1(x,y)$,
- (ii) Her sürekli t-norm için $T(x,y) \leq T_1(x,y)$,
- (iii) $S_1(x,y) \leq S_2(x,y) \leq S_3(x,y)$,
- (iv) Her sürekli t-conorm için $S_1(x,y) \leq S(x,y)$ [19].

4.2.Lemma:

(X,M,N,T,S) sezgisel fuzzy metrik uzay, $T' \leq T$ ve $S' \geq S$ olacak şekilde T' ve S' sırasıyla t-norm ve t-conorm olsun. Bu durumda (M,N,T',S') , X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir.

İspat:

(IFM-5) ve (IFM-10) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

(IFM-5): $T'(M(x,y,t),M(y,z,s)) \leq T(M(x,y,t),M(y,z,s)) \leq M(x,z,t+s)$.

(IFM-10): $S'(N(x,y,t),N(y,z,s)) \geq S(N(x,y,t),N(y,z,s)) \geq N(x,z,t+s)$.

4.3.Önerme:

$(X,M,N,*,\diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $k \in (0,1)$ olsun. Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\mu(x,y,t) = \max\{M(x,y,t), k\} \text{ ve } \eta(x,y,t) = \min\{N(x,y,t), 1-k\}$$

olsun. Bu durumda $(X,\mu,\eta,*,\diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır, IF-sınırlıdır ve (M,N) nin ürettiği topoloji ile (μ,η) nin ürettiği topoloji aynıdır.

İspat:

$(X,\mu,\eta,*,\diamond)$ nin sezgisel fuzzy metrik uzay olduğunu ispatlamak için (IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını görelim.

(IFM-5): $\mu(x,y,t) * \mu(y,z,s) \leq \mu(x,z,t+s)$ eşitsizliğinin sağlandığını görelim.

1.Durum: $\max\{M(x,y,t), k\} = M(x,y,t)$ ve $\max\{M(y,z,s), k\} = M(y,z,s)$ olsun. Buradan $\mu(x,y,t) * \mu(y,z,s) = M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s) \leq \max\{M(x,z,t+s), k\} = \mu(x,z,t+s)$.

2.Durum: $\max\{M(x,y,t), k\} = k$ ve $\max\{M(y,z,s), k\} = M(y,z,s)$ olsun. Buradan, $\mu(x,y,t) * \mu(y,z,s) = k * M(y,z,s) \leq k \leq \max\{M(x,z,t+s), k\} = \mu(x,z,t+s)$.

3.Durum: $\max\{M(x,y,t), k\} = k$ ve $\max\{M(y,z,s), k\} = k$ olsun. Buradan,

$$\mu(x,y,t)*\mu(y,z,s)=k*k \leq k \leq \max\{M(x,z,t+s),k\}=\mu(x,z,t+s).$$

(IFM-10): $\eta(x,y,t) \diamond \eta(y,z,s) \geq \eta(x,z,t+s)$ eşitsizliğinin sağlandığını görelim.

1.Durum: $\min\{N(x,y,t),1-k\}=N(x,y,t)$ ve $\min\{N(y,z,s),k\}=N(y,z,s)$ olsun. Buradan $\eta(x,y,t) \diamond \eta(y,z,s) \geq N(x,y,t) \diamond N(y,z,s) \geq N(x,z,t+s) \geq \min\{N(x,z,t+s),1-k\}=\eta(x,z,t+s)$.

2.Durum: $\min\{N(x,y,t),k\}=1-k$ ve $\min\{N(y,z,s),k\}=N(y,z,s)$ olsun. Buradan, $\eta(x,y,t) \diamond \eta(y,z,s) = (1-k) \diamond N(y,z,s) \geq 1-k \geq \min\{N(x,z,t+s),1-k\}=\eta(x,z,t+s)$.

3.Durum: $\min\{N(x,y,t),1-k\}=1-k$ ve $\min\{N(y,z,s),1-k\}=1-k$ olsun. Buradan, $\eta(x,y,t) \diamond \eta(y,z,s) = (1-k) \diamond (1-k) \geq 1-k \geq \min\{N(x,z,t+s),1-k\}=\eta(x,z,t+s)$.

Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için $\mu(x,y,t) \geq k$ ve $\eta(x,y,t) \leq 1-k$ olduğundan $(X, \mu, \eta, *, \diamond)$ IF-sınırlıdır.

Ayrıca $r < 1-k$ için $B_{(M,N)}(x,r,t) = B_{(\mu,\eta)}(x,r,t)$ olduğundan $\tau_{(M,N)} = \tau_{(\mu,\eta)}$ dir.

4.4.Önerme:

$i=1,2,3$ için (X, M, N, T_i, S_i) sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. $k > 0$ olmak üzere her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M'(x,y,t) = \frac{k + M(x,y,t)}{1+k} \text{ ve } N'(x,y,t) = \frac{N(x,y,t)}{1+k}$$

olsun. Bu durumda (X, M', N', T_i, S_i) IF-sınırlı sezgisel fuzzy metrik uzaydır. Ayrıca (M, N) nin ürettiği topoloji ile (M', N') nün ürettiği topoloji aynıdır.

İspat:

(X, M', N', T_i, S_i) nin sezgisel fuzzy metrik uzay olduğunu ispatlamak için (IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını görelim. (T_1, S_1) e göre göstermek yeterlidir.

(IFM-5): $\min\{M(x, y, t), M(y, z, s)\} \leq M(x, z, t+s)$ olduğundan $M(x, y, t) \leq M(x, z, t+s)$ ve $M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)$ dir. Buradan,

$$\frac{k + M(x, y, t)}{1 + k} \leq \frac{k + M(x, z, t+s)}{1 + k} \text{ ve } \frac{k + M(y, z, s)}{1 + k} \leq \frac{k + M(x, z, t+s)}{1 + k}$$

olup

$$\min\left\{\frac{k + M(x, y, t)}{1 + k}, \frac{k + M(y, z, s)}{1 + k}\right\} \leq \frac{k + M(x, z, t+s)}{1 + k}$$

elde edilir ki bu da istenilendir.

(IFM-10): $\max\{N(x, y, t), N(y, z, s)\} \geq N(x, z, t+s)$ olduğundan $N(x, y, t) \geq N(x, z, t+s)$ ve $N(y, z, s) \geq N(x, z, t+s)$ dir. Buradan,

$$\frac{N(x, y, t)}{1 + k} \geq \frac{N(x, z, t+s)}{1 + k} \text{ ve } \frac{N(y, z, s)}{1 + k} \geq \frac{N(x, z, t+s)}{1 + k}$$

olup

$$\max\left\{\frac{N(x, y, t)}{1 + k}, \frac{N(y, z, s)}{1 + k}\right\} \geq \frac{N(x, z, t+s)}{1 + k}$$

elde edilir.

$M'(x, y, t) > \frac{k}{1+k}$ ve $N'(x, y, t) < \frac{1}{1+k}$ olduğundan (X, M', N', T_i, S_i) IF-sınırlı sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

$t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ olsun.

$$\begin{aligned} B_{(M, N)}(x, r, t) &= \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r, N(x, y, t) < r\} \\ &= \{y \in X : (1+k)M'(x, y, t) - k > 1 - r, (1+k)N'(x, y, t) < r\} \\ &= \left\{ y \in X : M'(x, y, t) > 1 - \frac{r}{1+k}, N'(x, y, t) < \frac{r}{1+k} \right\} = B_{(M', N')}\left(x, \frac{r}{1+k}, t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{(M', N')}(x, r, t) &= \{y \in X : M'(x, y, t) > 1 - r, N'(x, y, t) < r\} \\ &= \left\{ y \in X : \frac{k + M(x, y, t)}{1+k} > 1 - r, \frac{N(x, y, t)}{1+k} < r \right\} \\ &= \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - (1+k)r, N(x, y, t) < (1+k)r\} = B_{(M, N)}(x, r(1+k), t) \end{aligned}$$

olup $\tau_{(M, N)} = \tau_{(M', N')}$ elde edilir.

4.5.Önerme:

$(X, M_1, N_1, *, \diamond)$ ve $(X, M_2, N_2, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\mu'(x, y, t) = \min\{M_1(x, y, t), M_2(x, y, t)\} \text{ ve } \eta'(x, y, t) = \max\{N_1(x, y, t), N_2(x, y, t)\}$$

olmak üzere $(X, \mu', \eta', *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

İspat:

(IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını görelim.

$$\underline{\text{(IFM-5):}} \mu'(x, y, t) * \mu'(y, z, s) = \min\{M_1(x, y, t), M_2(x, y, t)\} * \min\{M_1(y, z, s), M_2(y, z, s)\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \min \{M_1(x,y,t) * M_1(y,z,s), M_2(x,y,t) * M_2(y,z,s)\} \\ &\leq \min \{M_1(x,z,t+s), M_2(x,z,t+s)\} = \mu'(x,z,t+s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(IFM-10): } \eta'(x,y,t) \diamond \eta'(y,z,s) &= \text{maks} \{N_1(x,y,t), N_2(x,y,t)\} \diamond \text{maks} \{N_1(y,z,s), N_2(y,z,s)\} \\ &= \text{maks} \{N_1(x,y,t) \diamond N_1(y,z,s), N_2(x,y,t) \diamond N_2(y,z,s)\} \\ &\geq \text{maks} \{N_1(x,z,t+s), N_2(x,z,t+s)\} = \eta'(x,z,t+s) \end{aligned}$$

4.6.Önerme:

(X, M_1, N_1, T_1, S_1) ve (X, M_2, N_2, T_2, S_2) sırasıyla d_1 ve d_2 metrikleri tarafından üretilen sezgisel fuzzy metrikler,

$$(\mu, \eta) = (\min \{M_1, M_2\}, \text{maks} \{N_1, N_2\}) \text{ ve } (\mu', \eta') = (M_1 \cdot M_2, N_1 + N_2 - N_1 \cdot N_2)$$

olsun. (μ, η) sezgisel fuzzy metriğini üreten bir metrik olmasına rağmen (μ', η') sezgisel fuzzy metriğini üreten bir metrik yoktur.

İspat:

$$\begin{aligned} (\mu, \eta) &= (\min \{M_1, M_2\}, \text{maks} \{N_1, N_2\}) = \\ &\left(\min \left\{ \frac{t}{t + d_1(x, y)}, \frac{t}{t + d_2(x, y)} \right\}, \text{maks} \left\{ \frac{d_1(x, y)}{t + d_1(x, y)}, \frac{d_2(x, y)}{t + d_2(x, y)} \right\} \right) \\ &= \left(\frac{t}{t + \text{maks} \{d_1(x, y), d_2(x, y)\}}, \frac{\text{maks} \{d_1(x, y), d_2(x, y)\}}{t + \text{maks} \{d_1(x, y), d_2(x, y)\}} \right) \end{aligned}$$

olup (μ, η) metriği $d(x, y) = \text{maks} \{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ metriği tarafından üretilmiştir.

Diğer taraftan, $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ de $d_1(x, y) = |x - y|$ ve $d_2(x, y) = \text{maks} \{x, y\}$ metriklerini alalım.

(M_1, N_1) ve (M_2, N_2) sırasıyla d_1 ve d_2 metrikleri tarafından indirgenen sezgisel fuzzy metrikler olsun. $(\mu', \eta') = (M_1 \cdot M_2, N_1 + N_2 - N_1 \cdot N_2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mu'(x,y,t) &= M_1(x,y,t) \cdot M_2(x,y,t) = \frac{t}{t+d_1(x,y)} \cdot \frac{t}{t+d_2(x,y)} \\
&= \frac{t^2}{t^2 + t \cdot d_1(x,y) + t \cdot d_2(x,y) + d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)} \\
&= \frac{t^2}{t \cdot \left[t + d_1(x,y) + d_2(x,y) + \frac{d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)}{t} \right]} \\
&= \frac{t}{t + d_1(x,y) + d_2(x,y) + \frac{d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)}{t}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta'(x,y,t) &= N_1(x,y,t) + N_2(x,y,t) - N_1(x,y,t) \cdot N_2(x,y,t) \\
&= \frac{d_1(x,y)}{t+d_1(x,y)} + \frac{d_2(x,y)}{t+d_2(x,y)} - \frac{d_1(x,y)}{t+d_1(x,y)} \cdot \frac{d_2(x,y)}{t+d_2(x,y)} \\
&= \frac{t \cdot d_1(x,y) + t \cdot d_2(x,y) + d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)}{t^2 + t \cdot d_1(x,y) + t \cdot d_2(x,y) + d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)} \\
&= \frac{d_1(x,y) + d_2(x,y) + \frac{d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)}{t}}{t + d_1(x,y) + d_2(x,y) + \frac{d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)}{t}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$D(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) + \frac{d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)}{t}$ diyelim. Bu durumda $D(x,y)$ üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Çünkü,

$$\begin{aligned}
&D(2,3) + D(3,4) \\
&= d_1(2,3) + d_2(2,3) + \frac{d_1(2,3) \cdot d_2(2,3)}{t} + d_1(3,4) + d_2(3,4) + \frac{d_1(3,4) \cdot d_2(3,4)}{t} \\
&= 1 + 3 + \frac{1 \cdot 3}{t} + 1 + 4 + \frac{1 \cdot 4}{t} = 4 + \frac{3}{t} + 5 + \frac{4}{t} = 9 + \frac{7}{t}
\end{aligned}$$

ve

$$D(2,4) = d_1(2,4) + d_2(2,4) + \frac{d_1(2,4) \cdot d_2(2,4)}{t} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{t} = 6 + \frac{8}{t}$$

elde edilir. $t < \frac{1}{2}$ için $6 + \frac{8}{t} < 9 + \frac{7}{t}$ olup bu da $D(2,3) + D(3,4) < D(2,4)$ olması demektir ki bu bir çelişkidir.

4.7.Lemma:

(X,d) metrik uzay ve $s,t>0$ olsun. $n \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{d(x,z)}{(t+s)^n} \leq \max \left\{ \frac{d(x,y)}{t^n}, \frac{d(y,z)}{s^n} \right\}.$$

4.8.Örnek:

(X,d) metrik uzay olsun. $n \geq 1$ olmak üzere

$$M(x,y,t) = e^{-\frac{d(x,y)}{t^n}} \text{ ve } N(x,y,t) = 1 - e^{-\frac{d(x,y)}{t^n}}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (X,M,N,T_1,S_1) sezgisel fuzzy metrik uzaydır ve ayrıca $\tau_{(M,N)} = \tau_d$ dir.

İspat:

(X,M,N,T_1,S_1) nin sezgisel fuzzy metrik uzay olma şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
B_{(M,N)}(x, r, t) &= \{y \in X : M(x, y, t) > 1-r, N(x, y, t) < r\} \\
&= \left\{ y \in X : e^{\frac{d(x,y)}{t^n}} < \frac{1}{1-r} \right\} = \left\{ y \in X : \frac{d(x,y)}{t^n} < -\ln(1-r) \right\} \\
&= \{y \in X : d(x, y) < -t^n \ln(1-r)\} = B(x, -t^n \ln(1-r))
\end{aligned}$$

ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
B(x, r) &= \{y \in X : d(x, y) < r\} = \left\{ y \in X : \frac{d(x,y)}{t^n} < \frac{r}{t^n} \right\} = \left\{ y \in X : e^{\frac{d(x,y)}{t^n}} < e^{\frac{r}{t^n}} \right\} \\
&= \left\{ y \in X : e^{\frac{d(x,y)}{t^n}} > 1 - \left(1 - e^{-\frac{r}{t^n}}\right), 1 - e^{-\frac{d(x,y)}{t^n}} < 1 - e^{-\frac{r}{t^n}} \right\} = B_{(M,N)}\left(x, 1 - e^{-\frac{r}{t^n}}, t\right)
\end{aligned}$$

olup $\tau_{(M,N)} = \tau_d$ dir.

4.9. Not:

Yukarıdaki Örnek $n < 1$ olması durumunda geçerli değildir. Reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış metriği göz önüne alalım. $n=1/2$, $x=1$, $y=2$ ve $z=3$ olsun. Bu durumda,

$$M(x, z, 2) = e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}} < \min\left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right\} = \min\{M(x, y, 1), M(y, z, 1)\}$$

$$N(x, z, 2) = 1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}} > \max\left\{1 - \frac{1}{e}, 1 - \frac{1}{e}\right\} = \max\{N(x, y, 1), N(y, z, 1)\}$$

olur ki bu bir çelişkidir.

4.10. Örnek:

(X, d) bir metrik uzay olsun. Her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond b = \max\{a, b\}$

olarak alınırsa, M_d ve N_d , $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde fuzzy kümeler, her $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

$$M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} \text{ ve } N_d(x, y, t) = \frac{md(x, y)}{kt^n + md(x, y)}$$

şeklinde tanımlanan $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

Burada $\tau_{(M, N)} = \tau_d$ dir.

İspat:

(IFM-5) ve (IFM-10) şartlarının sağlandığını görelim.

(IFM-5):

$$\begin{aligned} 1 + \frac{md(x, z)}{k(t+s)^n} &\leq \max \left\{ 1 + \frac{md(x, y)}{kt^n}, 1 + \frac{md(y, z)}{ks^n} \right\} \\ \Rightarrow \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x, z)} &\geq \min \left\{ \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}, \frac{ks^n}{ks^n + md(y, z)} \right\} \end{aligned}$$

(IFM-10):

$$\begin{aligned} 1 + \frac{md(x, z)}{k(t+s)^n} &\leq \max \left\{ 1 + \frac{md(x, y)}{kt^n}, 1 + \frac{md(y, z)}{ks^n} \right\} \\ \Rightarrow \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x, z)} &\geq \min \left\{ \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}, \frac{ks^n}{ks^n + md(y, z)} \right\} \\ \Rightarrow \frac{md(x, z)}{k(t+s)^n + md(x, z)} &\leq \max \left\{ \frac{md(x, y)}{kt^n + md(x, y)}, \frac{md(y, z)}{ks^n + md(y, z)} \right\} \end{aligned}$$

Diğer taraftan, $x \in X$, $t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ için

$$B_{(M,N)}(x, r, t) = \left\{ y \in X : \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} > 1-r, \frac{md(x, y)}{kt^n + md(x, y)} < r \right\}$$

$$= \left\{ y \in X : d(x, y) < \frac{kt^n r}{m(1-r)} \right\}.$$

Ayrıca,

$$B(x, r) = B_{(M,N)}\left(x, \frac{mr}{kt^n + mr}, t\right) \text{ olduğundan } \tau_{(M,N)} = \tau_d \text{ elde edilir.}$$

4.11.Örnek:

$X=(0,\infty)$ ve $a>0$ olsun. Her $x,y \in X$ ve $t>0$ için,

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^a & ; \quad x \leq y \\ \left(\frac{y}{x}\right)^a & ; \quad y \leq x \end{cases} \text{ ve } N(x, y, t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^a & ; \quad x \leq y \\ 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^a & ; \quad y \leq x \end{cases}$$

olsun. (X, M, N, T_2, S_2) sezgisel fuzzy metrik uzay olup (X, M, N, T_1, S_1) sezgisel fuzzy metrik uzay değildir. Bu örnek J.H.Parkın $X = \mathbb{N}$ ve $a=1$ için vermiş olduğu örneğin genelleştirmesidir.

4.12.Not:

$x \in X$, $t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ olsun.

$$\begin{aligned}
B_{(M,N)}(x,r,t) &= \left\{ y \in X : x \leq y, \left(\frac{x}{y} \right)^a > 1-r, 1 - \left(\frac{x}{y} \right)^a < r \right\} \\
&\cup \left\{ y \in X : y \leq x, \left(\frac{y}{x} \right)^a > 1-r, 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^a < r \right\} \\
&= \left\{ y \in X : x \leq y < \frac{x}{(1-r)^{\frac{1}{a}}} \right\} \cup \left\{ y \in X : x(1-r)^{\frac{1}{a}} < y \leq x \right\} \\
&= \left(x(1-r)^{\frac{1}{a}}, \frac{x}{(1-r)^{\frac{1}{a}}} \right)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $B_{(M,N)}(x,r,t)$ $\mathbb{R}$ de açık aralıktır. $r \rightarrow 0$ iken $B_{(M,N)}(x,r,t)$ nin çapı sıfıra yaklaşır. $\tau_{(M,N)}$ topolojisi $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisinden indirgenen topolojidir.

Yukarıdaki (M,N) ikilisi (T_1, S_1) e göre sezgisel fuzzy metrik değildir. $a=1, x=1, y=2, z=3$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
M(x,z,t+s) &= \frac{1}{3} < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\} = \min \{M(x,y,t), M(y,z,s)\} \\
N(x,z,t+s) &= \frac{2}{3} > \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\} = \max \{N(x,y,t), N(y,z,s)\}
\end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir.

4.13.Örnek:

$X=(1,\infty)$ ve $M,N:X \times X \rightarrow [0,1]$, her $a,b \in X$ ve $t > 0$ için $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ ve $a \vee b = \sup\{a,b\}$ olmak üzere,

$$M(a,b,t) = 1 - \left(\frac{1}{a \wedge b} - \frac{1}{a \vee b} \right), N(a,b,t) = \frac{1}{a \wedge b} - \frac{1}{a \vee b}$$

olsun. Bu durumda (X, M, N, T_3, S_3) sezgisel fuzzy metrik uzay olup, (X, M, N, T_2, S_2) sezgisel fuzzy metrik uzay değildir. Ayrıca $\tau_{(M, N)}$ topolojisi $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisinden X üzerine indirgenen topoloji ile çakışır.

4.14.Örnek:

$X=(2, \infty)$ ve $M, N: X \times X \rightarrow [0, 1]$, her $a, b \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(a, b, t) = \begin{cases} 1 & ; a = b \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} & ; a \neq b \end{cases}, N(a, b, t) = \begin{cases} 0 & ; a = b \\ 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) & ; a \neq b \end{cases}$$

olsun. Bu durumda (X, M, N, T_3, S_3) sezgisel fuzzy metrik uzay olup, (X, M, N, T_2, S_2) sezgisel fuzzy metrik uzay değildir. Ayrıca $\tau_{(M, N)}$ nin ürettiği topoloji ayrık topolojidir.

5. SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLARDA HAUSDORFF METRİK

Bu bölümde herhangi bir metrikten faydalanılarak elde edilen Hausdorff metrik ve farklı iki gösterimi açıklanarak verilmiş daha sonra sezgisel fuzzy metrikten faydalanarak Hausdorff sezgisel fuzzy metriğin kuruluşu detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Ayrıca Hausdorff sezgisel fuzzy metriğin indirgediği düzgün yapı ile sezgisel fuzzy metriğin indirgediği düzgün yapı arasındaki bazı bağıntılar verilmiştir.

5.1. Hausdorff Metrik

5.1.1.Tanım (Hausdorff metrik):

(X,d) metrik uzayının boştan farklı, kapalı ve sınırlı altkümelerini $CB_0(X)$ ile gösterelim.

$$N(A,\varepsilon)=\{x\in X:d(x,A)<\varepsilon\} \text{ ve } d(x,A)=\inf_{a\in A} d(x,a)$$

olmak üzere, her $A,B\in CB_0(X)$ için,

$$H_d : CB_0(X)\times CB_0(X)\rightarrow[0,\infty)$$

$$H_d(A,B)=\inf\{\varepsilon: B\subset N(A,\varepsilon), A\subset N(B,\varepsilon)\}$$

ile tanımlanan H_d fonksiyonu $CB_0(X)$ üzerinde bir metrik olup bu metriğe d metriği tarafından elde edilen Hausdorff metriği denir [20].

5.1.2.Önerme:

Yukarıda verilen tanıma denk olarak,

$$H_d(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}=\max\left\{\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(b,a)\right\}$$

eşitliği elde edilebilir.

İspat:

A kapalı ve sınırlı olduğundan en az bir $a \in A$ var $\ni d(x,A)=d(x,a)$ ve B kapalı ve sınırlı olduğundan en az bir $b \in B$ var $\ni d(x,B)=d(x,b)$ dir. Buradan,

$$N(A,\varepsilon)=\{x \in X: \exists a \in A, d(x,a) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) \text{ ve}$$

$$N(B,\varepsilon)=\{x \in X: \exists b \in B, d(x,b) < \varepsilon\} = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon)$$

olur. 5.1.1.Tanım’ında verilen Hausdorff metrik denklemi, A nın B ye uzaklığının şu iki infimumunun büyük olanı olduğunu söyler:

$$H_d(A,B)=\max\{\inf\{\varepsilon: A \subset \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon)\}, \inf\{\varepsilon: B \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)\}\}.$$

$$A \subset \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon) \Rightarrow A \subset \bigcup_{b \in B} \{x : d(x, b) < \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \forall a \in A, \exists b \in B \text{ var } \ni d(a,b) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall a \in A, \inf_{b \in B} d(a,b) < \varepsilon \text{ olur. Benzer şekilde,}$$

$$B \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) \Rightarrow B \subset \bigcup_{a \in A} \{x : d(x, a) < \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \text{ var } \ni d(a,b) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall b \in B, \inf_{a \in A} d(a,b) < \varepsilon \text{ olur. Dolayısıyla,}$$

$$H_d(A,B)=\max\{\inf\{\varepsilon: \forall a \in A, \inf_{b \in B} d(a,b) < \varepsilon\}, \inf\{\varepsilon: \forall b \in B, \inf_{a \in A} d(a,b) < \varepsilon\}\}$$

$$=\max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(b,a)\}$$

$$=\max\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\}$$

elde edilir.

5.1.3.Örnek:

$(\mathbb{R}, d)$ Öklid uzayı, $A=[a_1, a_2]$ ve $B=[b_1, b_2]$, $\mathbb{R}$ de iki kompakt küme olsun. Bu durumda,

$$H_d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \text{ olur.}$$

5.1.4.Örnek:

$X \neq \emptyset$, $|X| \geq 2$ ve (X, d) ayrık metrik uzay olsun. $A, B \subset X$, $A \neq B$ boştan farklı ve sonlu olsun. Dolayısıyla $H_d(A, B) = 1$ dir.

5.1.5.Örnek:

$\mathbb{R}^n$ nin tüm boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesini $P_K(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. A ve B , $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı ve sınırlı alt kümeleri, $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid normunu göstermek üzere bu kümeler arasındaki uzaklık Hausdorff metriği,

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\right\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $(P_K(\mathbb{R}^n), H)$ metrik uzay olur.

5.2. Hausdorff Sezgisel Fuzzy Metrik

Bu bölümde sezgisel fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff metriğinin kuruluşunu detaylı bir biçimde vereceğiz.

5.2.1.Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda M ve N , $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

İspat:

$x, y \in X$, $t > 0$ ve keyfi $(x'_n, y'_n, t'_n)_n \subset X \times X \times (0, \infty)$ dizisi (x, y, t) noktasına yakınsasın. $(M(x'_n, y'_n, t'_n))_n$ ve $(N(x'_n, y'_n, t'_n))_n$, $[0, 1]$ aralığında diziler olduklarından $(x'_n, y'_n, t'_n)_n$ dizisinin bir $(x_n, y_n, t_n)_n$ alt dizisi var $\ni (M(x_n, y_n, t_n))_n$ ve $(N(x_n, y_n, t_n))_n$ dizileri $[0, 1]$ aralığında yakınsaktır. Gerçekten, $\delta < t/2$ olacak biçimde keyfi $\delta > 0$ sayısı seçelim. $t_n \rightarrow t$ olduğundan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq n_0$ için $|t_n - t| < \delta$ olur. Böylece $\forall n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned} M(x_n, y_n, t_n) &\geq M(x_n, y_n, t - \delta) \geq M(x_n, x, \delta/2) * M(x, y, t - 2\delta) * M(y, y_n, \delta/2), \\ N(x_n, y_n, t_n) &\leq N(x_n, y_n, t - \delta) \leq N(x_n, x, \delta/2) \diamond N(x, y, t - 2\delta) \diamond N(y, y_n, \delta/2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} M(x, y, t + 2\delta) &\geq M(x, y, t_n + \delta) \geq M(x, x_n, \delta/2) * M(x_n, y_n, t_n) * M(y_n, y, \delta/2), \\ N(x, y, t + 2\delta) &\leq N(x, y, t_n + \delta) \leq N(x, x_n, \delta/2) \diamond N(x_n, y_n, t_n) \diamond N(y_n, y, \delta/2) \end{aligned}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_n M(x_n, y_n, t_n) &\geq 1 * M(x, y, t - 2\delta) * 1 = M(x, y, t - 2\delta), \\ \lim_n N(x_n, y_n, t_n) &\leq 0 \diamond N(x, y, t - 2\delta) \diamond 0 = N(x, y, t - 2\delta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} M(x, y, t + 2\delta) &\geq 1 * \lim_n M(x_n, y_n, t_n) * 1 = \lim_n M(x_n, y_n, t_n), \\ N(x, y, t + 2\delta) &\leq 0 \diamond \lim_n N(x_n, y_n, t_n) \diamond 0 = \lim_n N(x_n, y_n, t_n) \end{aligned}$$

olur. $t \rightarrow M(x, y, t)$ ve $t \rightarrow N(x, y, t)$ fonksiyonları sürekli olduğundan

$$M(x, y, t) = \lim_n M(x_n, y_n, t_n) \text{ ve } N(x, y, t) = \lim_n N(x_n, y_n, t_n)$$

elde edilir. Böylece M ve N , $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

5.2.2.Tanım:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $a \in A$ ve $\emptyset \neq B \subset X$ olsun.

$$M(a, B, t) = \sup \{M(a, b, t) : b \in B\} \text{ ve } N(a, B, t) = \inf \{N(a, b, t) : b \in B\}$$

ile tanımlanan $M(a, B, t)$ ve $N(a, B, t)$ ifadelerine sırasıyla t ye göre $a \in A$ nın B kümesine yakın olma ve yakın olmama derecesi denir [21].

5.2.3.Not:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olmak üzere $P_0(X)$, $F_0(X)$ ve $K_0(X)$ ile sırasıyla $(X, \tau_{(M, N)})$ nin boştan farklı, boştan farklı sonlu ve boştan farklı kompakt tüm alt kümelerin ailesini göstereceğiz.

5.2.4.Lemma:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda her $a \in X$, $B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ için $M(a, B, t) = M(a, b_0, t)$ ve $N(a, B, t) = N(a, b_0, t)$ olacak şekilde en az bir $b_0 \in B$ vardır.

İspat:

$a \in X$, $B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ olsun. 5.2.1.Teorem'inden $y \rightarrow M(x, y, t)$ ve $y \rightarrow N(x, y, t)$ fonksiyonları süreklidir. B kompakt olduğundan $\sup_{b \in B} M(a, b, t) = M(a, b_0, t)$ ve

$\inf_{b \in B} N(a, b, t) = N(a, b_0, t)$ olacak şekilde en az bir $b_0 \in B$ vardır. Buradan,

$$M(a, B, t) = M(a, b_0, t) \text{ ve } N(a, B, t) = N(a, b_0, t)$$

yazılabilir.

5.2.5.Lemma:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda her $a \in X$ ve $B \in K_0(X)$ için $t \rightarrow M(a, B, t)$ ve $t \rightarrow N(a, B, t)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

İspat:

$\sup_{b \in B} M(a, b, t) = M(a, B, t)$ ve $\inf_{b \in B} N(a, b, t) = N(a, B, t)$ ve her bir $b \in B$ için

$t \rightarrow M(a, b, t)$ ve $t \rightarrow N(a, b, t)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında sürekli olduğundan $t \rightarrow M(a, B, t)$ ve $t \rightarrow N(a, B, t)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığında sırasıyla alt ve üst yarı süreklidirler.

Göstereceğiz ki, $t \rightarrow M(a, B, t)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında üst yarı sürekli ve $t \rightarrow N(a, B, t)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında alt yarı süreklidir.

$(t_n)_n \subset (0, \infty)$ ve $t_n \rightarrow t$ olsun. 5.2.4.Lemma'sından her $n \in \mathbb{N}$ için bir $b_n \in B$ var $\ni M(a, B, t_n) = M(a, b_n, t_n)$ ve $N(a, B, t_n) = N(a, b_n, t_n)$ olur. 5.2.1.Teorem'inden, $B \in K_0(X)$ için $(b_n)_n$ dizisinin bir $(b_{n_k})_k$ alt dizisi var $\ni b_0 \in B$ olmak üzere $b_{n_k} \rightarrow b_0$ olur. Böylece

$$\lim_k M(a, b_{n_k}, t_{n_k}) = M(a, b_0, t) \text{ ve } \lim_k N(a, b_{n_k}, t_{n_k}) = N(a, b_0, t)$$

olur. Buradan,

$$\lim_k M(a, B, t_{n_k}) = M(a, b_0, t) \leq M(a, B, t) \text{ ve } \lim_k N(a, B, t_{n_k}) = N(a, b_0, t) \geq N(a, B, t)$$

elde edilir.

O halde $(0, \infty)$ üzerinde $t \rightarrow M(a, B, t)$ fonksiyonu üst yarı sürekli ve $t \rightarrow N(a, B, t)$ fonksiyonu alt yarı süreklidir. Bu da ispatı tamamlar.

5.2.6.Lemma:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda her $A \in K_0(X)$, $B \in P_0(X)$ ve $t > 0$ için en az bir $a_0 \in A$ var $\exists$

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, B, t) \text{ ve } \sup_{a \in A} N(a, B, t) = N(a_0, B, t) \text{ dir.}$$

İspat:

$\alpha = \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ ve $\beta = \sup_{a \in A} N(a, B, t)$ diyelim. Bu durumda bir $\{a_n\} \subset A$ dizisi var $\exists$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için, $\alpha + 1/n > M(a_n, B, t)$ ve $\beta - 1/n < N(a_n, B, t)$ olur. $A \in K_0(X)$ olduğundan $(a_n)_n$ dizisinin bir $(a_{n_k})_k$ alt dizisi var $\exists a_0 \in A$ olmak üzere $a_{n_k} \rightarrow a_0$ olur.

Keyfi $b \in B$ seçelim. 5.2.1.Teorem'inden

$$\lim_k M(a_{n_k}, b, t) = M(a_0, B, t) \text{ ve } \lim_k N(a_{n_k}, b, t) = N(a_0, B, t) .$$

Her $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 1/n_k > M(a_{n_k}, b, t)$ ve $\beta - 1/n_k < N(a_{n_k}, b, t)$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\alpha \geq M(a_0, B, t) \text{ ve } \beta \leq N(a_0, B, t)$$

dir. Böylece,

$$\alpha = M(a_0, B, t) \text{ ve } \beta = N(a_0, B, t) \text{ olur.}$$

5.2.7.Sonuç:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $A, B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda en az bir $a_0 \in A$ ve $b_0 \in B$ var $\exists$

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, b_0, t) \text{ ve } \sup_{a \in A} N(a, B, t) = N(a_0, b_0, t) \text{ dir.}$$

5.2.8. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda her bir $A, B \in K_0(X)$ için, $t \rightarrow \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ ve $t \rightarrow \sup_{a \in A} N(a, B, t)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

İspat:

5.2.5. Lemma'sından $t \rightarrow M(a, B, t)$ ve $t \rightarrow N(a, B, t)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde süreklidirler. Böylece $(0, \infty)$ üzerinde $t \rightarrow \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ fonksiyonu üst yarı sürekli ve $t \rightarrow \sup_{a \in A} N(a, B, t)$ fonksiyonu alt yarı süreklidir.

Şimdi $(0, \infty)$ üzerinde $t \rightarrow \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ fonksiyonunun alt yarı sürekli ve $t \rightarrow \sup_{a \in A} N(a, B, t)$ fonksiyonunun üst yarı sürekli olduğunu göstereceğiz.

$(t_n)_n \subset (0, \infty)$ bir dizi ve $t_n \rightarrow t$ olsun. 5.2.6. Lemma'sından her $n \in \mathbb{N}$ için bir $a_n \in A$ var $\ni$

$$M(a_n, B, t_n) = \inf_{a \in A} M(a, B, t_n) \text{ ve } N(a_n, B, t_n) = \sup_{a \in A} N(a, B, t_n)$$

olur. $A \in K_0(X)$ olduğundan $(a_n)_n$ dizisinin bir $(a_{n_k})_k$ alt dizisi var $\ni a_0 \in B$ olmak üzere $a_{n_k} \rightarrow a_0$ olur. 5.2.4. Lemma'sından en az bir $b_0 \in B$ var $\ni M(a_0, b_0, t) = M(a_0, B, t)$ ve $N(a_0, b_0, t) = N(a_0, B, t)$ olur. Böylece, 5.2.1. Teorem'inden

$$\lim_k M(a_{n_k}, b_0, t_{n_k}) = M(a_0, b_0, t) \text{ ve } \lim_k N(a_{n_k}, b_0, t_{n_k}) = N(a_0, b_0, t)$$

olur. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni$ her $k \geq k_0$,

$$M(a_0, b_0, t) < \varepsilon + M(a_{n_k}, b_0, t_{n_k}) \text{ ve } N(a_0, b_0, t) > N(a_{n_k}, b_0, t_{n_k}) - \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla her $k \geq k_0$,

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) \leq M(a_0, b_0, t) < \varepsilon + M(a_{n_k}, B, t_{n_k}) = \varepsilon + \inf_{a \in A} M(a, B, t_{n_k}) \text{ ve}$$

$$\sup_{a \in A} N(a, B, t) \geq N(a_0, b_0, t) > N(a_{n_k}, B, t_{n_k}) - \varepsilon = \sup_{a \in A} N(a, B, t_{n_k}) - \varepsilon$$

olur. Sonuç olarak, $(0, \infty)$ üzerinde $t \rightarrow \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ fonksiyonu alt yarı sürekli ve

$t \rightarrow \sup_{a \in A} N(a, B, t)$ fonksiyonu üst yarı süreklidir.

5.2.9.Sonuç:

5.2.8.Teorem'i ayrıca her $A, B \in K_0(X)$ için $t \rightarrow \inf_{b \in B} M(A, b, t)$ ve $t \rightarrow \sup_{b \in B} N(A, b, t)$ fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösterir.

5.2.10.Lemma:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $a \in X$, $B \in K_0(X)$, $C \in P_0(X)$ ve $t, s > 0$ olsun. $b_a \in B$, $M(a, B, t) = M(a, b_a, t)$ ve $N(a, B, t) = N(a, b_a, t)$ olmak üzere

$M(a, C, t+s) \geq M(a, B, t) * M(b_a, C, s)$ ve $N(a, C, t+s) \leq N(a, B, t) \diamond N(b_a, C, s)$ dir.

İspat:

5.2.4.Lemma'sından $M(a, B, t) = M(a, b_a, t)$ ve $N(a, B, t) = N(a, b_a, t)$ şartını sağlayan en az bir $b_a \in B$ vardır. Bu durumda her bir $c \in C$ için,

$$M(a, C, t+s) \geq M(a, c, t+s) \geq M(a, b_a, t) * M(b_a, c, s),$$

$$N(a, C, t+s) \leq N(a, c, t+s) \leq N(a, b_a, t) \diamond N(b_a, c, s)$$

olur. $*$ ve $\diamond$ normların sürekliliğinden,

$$M(a, C, t+s) \geq M(a, b_a, t) * M(b_a, C, s) \text{ ve}$$

$$N(a, C, t+s) \leq N(a, b_a, t) \diamond N(b_a, C, s)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi, Gregori, Romeguera ve Veeeramani [14] tarafından verilmiş olan;

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay olsun. Her $A, B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ olmak üzere, H_M fonksiyonu

$$H_M: K_0(X) \times K_0(X) \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$$

$$H_M(A, B, t) = \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $(H_M, *)$ ikilisi $K_0(X)$ üzerinde bir fuzzy metriktir, teoremini, sezgisel fuzzy metrik uzayda ifade ve ispat edelim.

.

5.2.11. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Her $A, B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ olmak üzere, H_M ve H_N fonksiyonları

$$H_M, H_N: K_0(X) \times K_0(X) \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1],$$

$$H_M(A, B, t) = \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\}$$

$$H_N(A, B, t) = \max \left\{ \sup_{a \in A} N(a, B, t), \sup_{b \in B} N(A, b, t) \right\}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $(H_M, H_N, *, \diamond)$ dördlüsü $K_0(X)$ üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir.

İspat:

$A, B, C \in K_0(X)$ ve $t, s > 0$ olsun.

(IFM-1): $H_M(A, B, t) + H_N(A, B, t) \leq 1$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $\inf_{a \in A} M(a, B, t) \leq \inf_{b \in B} M(A, b, t)$ olsun. Bu durumda

$\sup_{a \in A} N(a, B, t) \geq \sup_{b \in B} N(A, b, t)$ olur. Buradan, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için

$$H_M(A, B, t) = \inf_{a \in A} M(a, B, t) \text{ ve } H_N(A, B, t) = \sup_{a \in A} N(a, B, t)$$

elde edilir.

Diğer taraftan her $a \in A$ ve $t > 0$, $M(a, B, t) + N(a, B, t) \leq 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) + \sup_{a \in A} N(a, B, t) \leq \sup_{a \in A} M(a, B, t) + \sup_{a \in A} N(a, B, t) \leq 1$$

olur ki bu da $H_M(A, B, t) + H_N(A, B, t) \leq 1$ olduğunu gösterir.

Benzer şekilde $\inf_{a \in A} M(a, B, t) \geq \inf_{b \in B} M(A, b, t)$ için de $H_M(A, B, t) + H_N(A, B, t) \leq 1$ elde edilir.

(IFM-2): 5.2.6.Lemma'sından en az bir $a_0 \in A$ ve en az bir $b_0 \in B$ var öyle ki

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, B, t) \text{ ve } \inf_{b \in B} M(A, b, t) = M(A, b_0, t)$$

olur. Böylece $H_M(A, B, t) > 0$ olur.

(IFM-3): $A=B \Leftrightarrow H_M(A, B, t)=1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(IFM-4): Açık olarak, $H_M(A,B,t)=H_M(B,A,t)$ dir.

(IFM-5): 5.2.10.Lemma'sından ve * t-normunun sürekliliğinden,

$$\inf_{a \in A} M(a, C, t + s) \geq \inf_{a \in A} M(a, B, t) * \inf_{a \in A} M(b_a, C, s)$$

olur. Diğer taraftan $\{b_a : a \in A\} \subset B$ için $\inf_{a \in A} M(b_a, C, s) \geq \inf_{b \in B} M(b, C, s)$ olup buradan

$$\inf_{a \in A} M(a, C, t + s) \geq \inf_{a \in A} M(a, B, t) * \inf_{b \in B} M(b, C, s) .$$

Benzer şekilde

$$\inf_{c \in C} M(A, c, t + s) \geq \inf_{b \in B} M(A, b, t) * \inf_{a \in A} M(B, c, s)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$H_M(A,C,t+s) \geq H_M(A,B,t) * H_M(B,C,s).$$

(IFM-6): 5.2.8.Teorem'inden ve 5.2.9.Sonuç'undan $t \rightarrow H_M(A,B,t)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde süreklidir.

(IFM-7): 5.2.6.Lemma'sından en az bir $a_0 \in A$ ve en az bir $b_0 \in B$ var öyle ki

$$\sup_{a \in A} N(a, B, t) = N(a_0, B, t) \text{ ve } \sup_{b \in B} N(A, b, t) = N(A, b_0, t)$$

olur. Böylece $H_N(A,B,t) > 0$ olur.

(IFM-8): $A=B \Leftrightarrow H_N(A,B,t)=1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(IFM-9): Açık olarak, $H_N(A,B,t)=H_N(B,A,t)$ dir.

(IFM-10): 5.2.10.Lemma'sından ve $\diamond$ t-conormunun sürekliliğinden,

$$\sup_{a \in A} N(a, C, t + s) \leq \sup_{a \in A} N(a, B, t) \diamond \sup_{a \in A} N(b_a, C, s)$$

olur. Diğer taraftan $\{b_a : a \in A\} \subset B$ için $\sup_{a \in A} N(b_a, C, s) \leq \sup_{b \in B} N(b, C, s)$ olup buradan

$$\sup_{a \in A} N(a, C, t + s) \leq \sup_{a \in A} N(a, B, t) \diamond \sup_{b \in B} N(b, C, s) .$$

Benzer şekilde

$$\sup_{c \in C} N(A, c, t + s) \leq \sup_{b \in B} N(A, b, t) \diamond \sup_{a \in A} N(B, c, s)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$H_N(A, C, t + s) \leq H_N(A, B, t) \diamond H_N(B, C, s).$$

(IFM-11): 5.2.8.Teorem'inden ve 5.2.9.Sonuç'undan $t \rightarrow H_N(A, B, t)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde süreklidir.

O halde $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ beşlisi bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

5.2.12.Sonuç:

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda, $(M_d, N_d, *, \diamond)$ standart sezgisel fuzzy metriğin $(H_{M_d}, H_{N_d}, *, \diamond)$ Hausdorff sezgisel fuzzy metriği ile H_d Hausdorff metriğinin $(M_{H_d}, N_{H_d}, *, \diamond)$ standart sezgisel fuzzy metriği $K_0(X)$ üzerinde çakışır [15].

İspat:

$A, B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ olsun. Her $a \in A$,

$$M_d(a, B, t) = \frac{t}{t + d(a, B)} \text{ ve } N_d(a, B, t) = \frac{d(a, B)}{t + d(a, B)}.$$

Buradan,

$$\inf_{a \in A} M_d(a, B, t) = \frac{t}{t + \sup_{a \in A} d(a, B)} \text{ ve } \sup_{a \in A} N_d(a, B, t) = \frac{\sup_{a \in A} d(a, B)}{t + \sup_{a \in A} d(a, B)}.$$

Benzer şekilde,

$$\inf_{b \in B} M_d(A, b, t) = \frac{t}{t + \sup_{b \in B} d(A, b)} \text{ ve } \sup_{b \in B} N_d(A, b, t) = \frac{\sup_{b \in B} d(A, b)}{t + \sup_{b \in B} d(A, b)}.$$

Bu durumda,

$$H_{M_d}(A, B, t) = M_{H_d}(A, B, t) \text{ ve } H_{N_d}(A, B, t) = N_{H_d}(A, B, t) \text{ dir.}$$

5.2.12.Sonuç’undan faydalanarak, $(M_d, N_d, *, \diamond)$ standart sezgisel fuzzy metriğin Hausdorff sezgisel fuzzy metriğine göre olan uzaklıklarının hesaplanmasında d metriğinin H_d Hausdorff metriğine göre uzaklığının hesaplanması kullanılabilir. Buna iki örnek verelim:

5.2.13.Örnek:

$(\mathbb{R}, d)$ Öklid metrik uzayı, $A=[a_1, a_2]$ ve $B=[b_1, b_2]$, $\mathbb{R}$ de kompakt iki alt küme olsun. Dolayısıyla $H_d(A, B) = \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\}$ olmak üzere her $t > 0$ için

$$H_{M_d}(A, B, t) = \frac{t}{t + \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}$$

$$H_{N_d}(A, B, t) = \frac{\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}{t + \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}$$

olur.

5.2.14.Örnek:

$X \neq \emptyset$, $|X| \geq 2$ ve (X, d) ayrık metrik uzay olsun. Ayrıca A ve B , $A \neq B$ olmak üzere X in boştan farklı sonlu alt kümeleri olsun. Dolayısıyla, $H_d(A, B) = 1$ olmak üzere her $t > 0$ için

$$H_{M_d}(A, B, t) = \frac{t}{t+1} \text{ ve } H_{N_d}(A, B, t) = \frac{1}{t+1} \text{ olur.}$$

5.3. Hausdorff Metrik Tarafından İndirgenen Düzgün Yapı

5.3.1. Tanım:

(i) $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ ile gösterilen alt kümesine $X \times X$ in köşegeni denir.

(ii) $A \subset X \times X$ olmak üzere $A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$ ile tanımlanır. Eğer $A = A^{-1}$ ise A kümesine simetrik denir.

(iii) $A, B \subset X \times X$ olmak üzere

$$A \circ B = \{(x, y) : \exists z \in X, (x, z) \in A \text{ ve } (z, y) \in B\}$$

ile tanımlanır.

(iv) $A^2 = A \circ A$, $A^{n+1} = A^n \circ A$ ($n=1, 2, \dots$) [22].

5.3.2.Uyarı:

$A, B, C \subset X \times X$ olsun. Aşağıdakiler vardır.

- (i) $A \subset B$ ise $A^{-1} \subset B^{-1}$ ve $A \circ C \subset B \circ C$,
- (ii) $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$,
- (iii) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.

5.3.3.Tanım (Düzgün Uzay):

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $X \times X$ in alt kümelerinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{D}$ ailesine X üzerinde bir düzgün yapı denir.

- (D1) Her $D \in \mathcal{D}$ için $\Delta \subset D$,
- (D2) Herhangi $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ için $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$,
- (D3) Her $D \in \mathcal{D}$ için $E \circ E \subset D$ olacak biçimde bir $E \in \mathcal{D}$ vardır,
- (D4) Her $D \in \mathcal{D}$ için $E^{-1} \subset D$ olacak biçimde bir $E \in \mathcal{D}$ vardır,
- (D5) $D \in \mathcal{D}$ ve $D \subset E$ ise $E \in \mathcal{D}$ dir.

$\mathcal{D}$, X üzerinde bir düzgün yapı olmak üzere $(X, \mathcal{D})$ ikilisine bir düzgün uzay denir [22].

5.3.4.Tanım:

$(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzay olsun. Eğer $\bigcap \{D : D \in \mathcal{D}\} = \Delta$ ise $\mathcal{D}$ düzgün yapısına ve dolayısı ile $(X, \mathcal{D})$ düzgün uzayına bir Hausdorff düzgün uzay denir [22].

5.3.5.Tanım:

$(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzay ve $\beta \subset \mathcal{D}$ bir alt aile olsun. Eğer her $D \in \mathcal{D}$ için $B \subset D$ olacak biçimde bir $B \in \beta$ varsa β ailesine $\mathcal{D}$ düzgün yapısı için bir tabandır denir. Buna göre

eğer bir $\beta \subset \mathcal{D}$ ailesi $\mathcal{D}$ düzgün yapısı için bir taban ise, $\mathcal{D}$ ailesi, β nın elemanlarına onların bütün üst kümeleri de katılarak elde edilir [22].

5.3.6. Teorem:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve β , $X \times X$ in alt kümelerinin

(B1) Her $B \in \beta$ için $\Delta \subset B$,

(B2) Herhangi bir $B_1, B_2 \in \beta$ ise $\exists B_3 \in \beta$ var $\ni B_3 \subset B_1 \cap B_2$,

(B3) Her $B \in \beta$ için $\exists C \in \beta$ var $\ni CoC \subset B$,

(B4) Her $B \in \beta$ için $\exists C \in \beta$ var $\ni C^{-1} \subset B$,

koşullarını sağlayan bir ailesi ise, β ailesi X üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır [22].

İspat:

$\mathcal{D} = \{D \subset X \times X: \exists B \in \beta \text{ var } \ni B \subset D\}$ ailesinin X üzerinde β yı taban kabul eden bir düzgün yapı olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

5.3.7. Örnek:

(i) Her $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon = \{(x, y): |x - y| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{D} = \{D_\varepsilon: \varepsilon > 0\}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır. Bu düzgün yapıya $\mathbb{R}$ nin doğal düzgün yapısı denir.

(ii) (X, d) bir metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $D_\varepsilon^d = \{(x, y) \in X \times X: d(x, y) < \varepsilon\}$ kümelerinin $\mathcal{D} = \{D_\varepsilon^d: \varepsilon > 0\}$ ailesi X üzerinde bir düzgün yapının tabanıdır. Bu düzgün yapıya d metriği ile üretilen metrik düzgün yapı adı verilir.

Eğer bir $(X, \mathcal{D})$ düzgün uzayının düzgün yapısı bir metrik ile üretilebilirse bu düzgün uzaya metriklenabilir düzgün uzay denir.

(iii) X bir küme olmak üzere $X \times X$ in Δ yı içeren bütün alt kümelerinin $\mathcal{D} = \{U \subset X \times X : \Delta \subset U\}$ ailesi X üzerinde bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıya ayrık düzgün yapı denir. Bu düzgün yapının bir tabanı $\beta = \{\Delta\}$ dır.

(iv) X bir küme olmak üzere $\mathcal{D} = \{X \times X\}$, X üzerinde bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıya ilkel düzgün yapı denir.

5.3.8.Tanım:

$(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzay ise her $x \in X$ ve $U \in \mathcal{D}$ için $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$ şeklinde tanımlanır [22].

5.3.9.Teorem:

$(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzay olsun. aşağıdakiler vardır:

- (i) Her $x \in X$ için $\mathcal{U}_x = \{U(x) : U \in \mathcal{D}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojinin x noktasındaki komşuluklar ailesini oluşturur. $\tau_{\mathcal{D}}$ ile gösterilen bu topolojiye $\mathcal{D}$ ile üretilen düzgün uzay topolojisi veya kısaca düzgün topoloji denir.
- (ii) $(X, \mathcal{D})$ Hausdorfftur $\Leftrightarrow (X, \tau_{\mathcal{D}})$ topolojik uzayı Hausdorfftur [22].

5.3.10.Tanım:

$(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $U \in \mathcal{D}$ için

$$U(A) = \bigcup_{x \in A} U(x) = \{y \in X : \exists x \in A \ni (x, y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanan küme A kümesinin bir komşuluğudur. Bu komşuluğa A nın düzgün komşuluğu denir [22].

5.3.11.Teorem:

$(X, \mathcal{D})$ bir düzgün uzayı metriklenebilirdir $\Leftrightarrow (X, \mathcal{D})$ Hausdorff ve sayılabilir bir tabana sahiptir [23].

5.3.12.Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $(X, \tau_{(M, N)})$ metriklenebilir topolojik uzaydır [21].

İspat

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : M(x, y, 1/n) > 1 - 1/n \text{ ve } N(x, y, 1/n) < 1/n\}$$

kümesini tanımlayalım. $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin X üzerindeki $\mathcal{U}$ düzgün yapısı için bir taban olduğunu ve indirgediği topolojinin $\tau_{(M, N)}$ ile çakıştığını göstereceğiz.

Öncelikle her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $\{(x, x) : x \in X\} \subset U_n$, $U_{n+1} \subset U_n$ ve $U_n = U_n^{-1}$ şartları sağlanır. Diğer taraftan $*$ ve $\diamond$ nin sürekliliğinden her bir $n \in \mathbb{N}$ için en az bir $m \in \mathbb{N}$ var öyle ki $m > 2n$ iken $(1 - 1/m) * (1 - 1/m) > 1 - 1/n$ ve $(1/m) \diamond (1/m) < 1/n$ dir.

Şimdi $U_m \circ U_m \subset U_n$ olduğunu gösterelim. Keyfi $(x, y) \in U_m$ ve $(y, z) \in U_m$ olsun. $M(x, y, \cdot)$ ve $N(x, y, \cdot)$ sırasıyla azalmayan ve artmayan olduğundan

$$M(x, z, 1/n) \geq M(x, z, 2/m) \text{ ve } N(x, z, 1/n) \leq N(x, z, 2/m)$$

dir. Buradan,

$$M(x, z, 1/n) \geq M(x, y, 1/m) * M(y, z, 1/m) \geq (1 - 1/m) * (1 - 1/m) > 1 - 1/n \text{ ve}$$

$$N(x,z,1/n) \leq N(x,y,1/m) \diamond N(y,z,1/m) \leq (1/m) \diamond (1/m) < 1/n$$

olup $(x,z) \in U_n$ olur. Böylece $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ ailesi X üzerindeki $\mathcal{U}$ düzgün yapısı için bir tabandır.

Her bir $x \in X$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n(x) = \{y \in X: M(x,y,1/n) > 1-1/n \text{ ve } N(x,y,1/n) < 1/n\} = B(x,1/n,1/n)$$

olduğundan $\mathcal{U}$ nun indirgediği topoloji $\tau_{(M,N)}$ ile çakışır. Böylece $(X, \tau_{(M,N)})$ metriklenebilir topolojik uzaydır.

$(X, \tilde{U})$ bir düzgün uzay olmak üzere $P_0(X)$ üzerindeki $\tilde{U}$ nun $H_{\tilde{U}}$ Hausdorff-Baurbaki düzgün yapısının tabanı $U \in \tilde{U}$ olmak üzere

$$H_U = \{(A,B) \in P_0(X) \times P_0(X): B \subset U(A) \text{ ve } A \subset U(B)\}$$

biçimindedir. Burada

$$U(A) = \{y \in X: x \in A \text{ ve } (x,y) \in U\}$$

dır. $H_{\tilde{U}}$ nun $K_0(X) \times K_0(X)$ e kısıtlamasını yine $H_{\tilde{U}}$ ile göstereceğiz.

5.3.13. Not:

(M,N) tarafından indirgenen düzgün yapıyı $\tilde{U}_{(M,N)}$ ile gösteriyoruz. (M,N) nin Hausdorff metriği tarafından indirgenen düzgün yapıyı $\tilde{U}_{(H_M, H_N)}$ ile göstereceğiz.

5.3.14. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $K_0(X)$ de, $H_{\tilde{U}_{(M,N)}}$ Hausdorff-Baumbach düzgün yapısı ile $\tilde{U}_{(H_M, H_N)}$ düzgün yapısı çakışır [15].

İspat:

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} & \{(A, B) \in K_0(X) \times K_0(X) : B \subset U_{n+1}(A) \text{ ve } A \subset U_{n+1}(B)\} \\ & \subset \{(A, B) \in K_0(X) \times K_0(X) : H_M(A, B, 1/(n+1)) \geq 1 - 1/(n+1) \text{ ve } H_N(A, B, 1/(n+1)) \leq 1/(n+1)\} \\ & \subset \{(A, B) \in K_0(X) \times K_0(X) : H_M(A, B, 1/n) > 1 - 1/n \text{ ve } H_N(A, B, 1/n) < 1/n\} \\ & \subset \{(A, B) \in K_0(X) \times K_0(X) : B \subset U_n(A) \text{ ve } A \subset U_n(B)\} \end{aligned}$$

olduğundan $K_0(X)$ de $H_{\tilde{U}_{(M,N)}} = \tilde{U}_{(H_M, H_N)}$ dir.

5.3.15.Tanım:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her bir $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için A nın sonlu bir S alt kümesi var öyle ki $A \subset \bigcup_{x \in S} B_{(M,N)}(x, r, t)$ ise A ya ön kompakt (precompact) küme denir [21].

5.3.16.Uyarı:

(i) $(X, \tilde{U})$ düzgün uzay olmak üzere $(K_0(X), H_{\tilde{U}})$ tamdır (ön kompaktır) ancak ve ancak $(X, \tilde{U})$ tamdır (ön kompaktır).

(ii) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı tamdır ancak ve ancak $(X, \tilde{U}_{(M,N)})$ düzgün uzayı tamdır.

(iii) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayının ön kompakt olması için gerek ve yeter şart X deki her dizinin bir Cauchy alt dizisinin olmasıdır. Ayrıca $(X, M, N, *, \diamond)$

uzayında bir dizinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $(X, \tilde{U}_{(M,N)})$ uzayında Cauchy dizisi olmasıdır. Dolayısıyla, $(X, M, N, *, \diamond)$ uzayının ön kompakt olması için gerek yeter şart $(X, \tilde{U}_{(M,N)})$ uzayının ön kompakt olmasıdır.

5.3.17. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ tamdır ancak ve ancak $(X, M, N, *, \diamond)$ tamdır [15].

İspat:

5.3.16. Uyarı (ii) den $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ tamdır ancak $(K_0(X), \tilde{U}_{(H_M, H_N)})$ tam düzgün uzaydır. 5.3.14. Teorem'inden $K_0(X)$ de $H_{\tilde{U}_{(M,N)}} = \tilde{U}_{(H_M, H_N)}$ olduğundan 5.3.16. Uyarı (i) den $(K_0(X), \tilde{U}_{(H_M, H_N)})$ tamdır ancak ve ancak $(X, M, N, *, \diamond)$ tamdır.

5.3.18. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ ön kompaktır ancak ve ancak $(X, M, N, *, \diamond)$ ön kompaktır [15].

5.3.19. Lemma:

$(Y, M', N', *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve X, Y nin yoğun bir alt kümesi olsun. Bu durumda $F_0(X)$ ve dolayısıyla $K_0(X)$, $(K_0(Y), H_{M'}, H_{N'}, *, \diamond)$ uzayında yoğundur [15].

İspat:

Keyfi $A \in K_0(Y)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ olsun. $F \in F_0(X) \cap B_{(H_{M'}, H_{N'})}(A, \varepsilon, t)$ olacak biçimde

F kümesinin varlığını göstereceğiz. $\delta \in (0, \varepsilon)$ seçelim. $*$ ve $\diamond$ sürekli olduğundan, $1 - \varepsilon < (1 - \delta) * (1 - \alpha)$ ve $\varepsilon > \delta \diamond \alpha$ olacak biçimde $\alpha \in (0, 1)$ bulunabilir.

$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{(M', N')}(a_i, \alpha, t/2)$ olacak biçimde $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$ seçelim. X, Y de yoğun

olduğundan her bir $i=1, 2, \dots, n$ için $x_i \in \bigcup_{i=1}^n B_{(M', N')}(a_i, \delta, t/2)$ vardır. $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

diyelim. Açıkça $F \in F_0(X)$ tir. $F \in B_{(H_{M'}, H_{N'})}(A, \varepsilon, t)$ olduğunu göstereceğiz. Her bir $i=1, 2, \dots, n$ için

$$M'(A, x_i, t) \geq M'(a_i, x_i, t) \geq M'(a_i, x_i, t/2) > 1 - \delta \text{ ve } N'(A, x_i, t) \leq N'(a_i, x_i, t) \leq N'(a_i, x_i, t/2) < \delta$$

olduğundan,

$$\inf_{x \in F} M'(A, x, t) > 1 - \delta > 1 - \varepsilon \text{ ve } \sup_{x \in F} N'(A, x, t) < \delta < \varepsilon$$

elde edilir. Diğer taraftan, verilen $a \in A$ için en az bir $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vardır öyle ki

$M'(a_i, a, t) > 1 - \alpha$ and $N'(a_i, a, t) < \alpha$ olur. Dolayısıyla,

$$M'(a, F, t) \geq M'(a, x_i, t) \geq M'(a, a_i, t/2) * M'(a_i, x_i, t) > (1 - \alpha) * (1 - \delta) \text{ ve}$$

$$N'(a, F, t) \leq N'(a, x_i, t) \leq N'(a, a_i, t/2) \diamond N'(a_i, x_i, t) < \alpha \diamond \delta$$

olur. Böylece,

$$\inf_{a \in A} M'(a, F, t) \geq (1 - \alpha) * (1 - \delta) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \sup_{a \in A} N'(a, F, t) \leq \alpha \diamond \delta < \varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$H_{M'}(A, F, t) > 1 - \varepsilon \text{ ve } H_{N'}(A, F, t) < \varepsilon$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

5.3.20. Teorem:

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ nin tamlanabilir olması için $\Leftrightarrow (X, M, N, *, \diamond)$ nin tamlanabilir olmasıdır [15].

İspat:

Kabul edelim ki $(X, M, N, *, \diamond)$ tamlanabilir olsun. Dolayısıyla X , sezgisel fuzzy metrik tamlaması olan $(\tilde{X}, \tilde{M}, *, \diamond)$ da yoğundur. Böylece 5.3.19.Lemma'sından $K_0(X)$, $(K_0(\tilde{X}), H_{\tilde{M}}, H_{\tilde{N}}, *, \diamond)$ de yoğundur. 5.3.17.Teorem'inden $(K_0(\tilde{X}), H_{\tilde{M}}, H_{\tilde{N}}, *, \diamond)$ tam olduğundan, $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ tamlanabilirdir ve tamlaması $(K_0(\tilde{X}), H_{\tilde{M}}, H_{\tilde{N}}, *, \diamond)$ uzayına izometriktir.

Tersine, kabul edelim ki $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ tamlanabilir olsun. Dolayısıyla $i(K_0(X))$, $K_0(\tilde{X})$ te yoğun olacak biçimde bir $i: (K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond) \rightarrow (K_0(\tilde{X}), H_{\tilde{M}}, H_{\tilde{N}}, *, \diamond)$ izometrisi vardır. Her bir $x \in X$ için $\{x\} \in K_0(X)$ olduğundan, i nin X e kısıtlaması olan i_X , $(X, M, N, *, \diamond)$ den $(i_X(\tilde{X}), H_{\tilde{M}}, H_{\tilde{N}}, *, \diamond)$ e bir izometridir. Dolayısıyla $(\overline{i_X(X)}, H_{\tilde{M}}, H_{\tilde{N}}, *, \diamond)$ bir tam sezgisel fuzzy metrik uzaydır ve $i_X(X)$ yoğun alt uzayına sahiptir. O halde $(X, M, N, *, \diamond)$ tamlanabilirdir.

Aşağıdaki örnek, Hausdorff sezgisel fuzzy metriğin her zaman sezgisel fuzzy metrik vermeyeceğini göstermektedir. $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayının IF- $CB_0(X)$ alt kümesini yani boştan farklı ve IF-sınırlı kümelerinin ailesini alalım.

Her bir $A, B \in IF-CB_0(X)$ ve $t > 0$ için,

$$H_M(A, B, t) = \min \{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \} \text{ ve}$$

$$H_N(A, B, t) = \max\{\sup_{a \in A} N(a, B, t), \sup_{b \in B} N(A, b, t)\} \text{ dir.}$$

5.3.21.Örnek:

Her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = \max\{0, a + b - 1\}$ ve $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$ olsun. $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ ve $(y_n)_{n=2}^{\infty}$ ayrık noktaların dizisi yani $A = \{x_n : n \geq 2\}$ ve $B = \{y_n : n \geq 2\}$ olmak üzere $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $X = A \cup B$, M ve N , $X \times X \times (0, \infty)$ un fuzzy alt kümeleri olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın. Her $m, n \geq 2$ için,

$$M(x_n, x_m, t) = M(y_n, y_m, t) = 1 - \left[\frac{1}{n \wedge m} - \frac{1}{n \vee m} \right]$$

$$N(x_n, x_m, t) = N(y_n, y_m, t) = \frac{1}{n \wedge m} - \frac{1}{n \vee m}$$

$$M(x_n, y_m, t) = M(y_m, x_n, t) = \frac{1}{n} \wedge \frac{1}{m}$$

$$N(x_n, y_m, t) = N(y_m, x_n, t) = 1 - \left[\frac{1}{n} \wedge \frac{1}{m} \right].$$

$(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır ve $\tau_{(M, N)}$, X üzerinde ayrık topolojidir.

Ayrıca A ve B kapalı ve IF-sınırlıdır. Hatta her $n, m \geq 2$ ve her bir $t > 0$ için

$$M(x_n, x_m, t) > 1/2, M(y_n, y_m, t) > 1/2, N(x_n, x_m, t) < 1/2 \text{ ve } N(y_n, y_m, t) < 1/2$$

dir. Her bir $n \geq 2$ ve $t > 0$ için

$$M(x_n, B, t) = M(A, y_n, t) = 1/n \text{ ve } N(x_n, B, t) = N(A, y_n, t) = 1 - 1/n$$

olduğundan,

$$\min \{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \} = 0$$

ve

$$\max \{ \sup_{a \in A} N(a, B, t), \sup_{b \in B} N(A, b, t) \} = 1$$

olup $(H_M, H_N, *, \diamond)$, IF-CB₀(X) üzerinde sezgisel fuzzy metrik değildir.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L. A., “Fuzzy sets”, *Inform and Control*, 8: 338-358 (1965).
2. Elmas, Ç., “Yapay Zeka uygulamaları”, *Seçkin Yayıncılık*, Ankara, (2007).
3. Atanassov, K., “Intuitionistic fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems*, 20 (1): 87 - 96 (1986).
4. Çoker, D., “An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces”, *Fuzzy Sets and Systems*, 88 (1): 81-89 (1997).
5. Park, J. H., “Intuitionistic fuzzy metric spaces”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22: 1039-1046 (2004).
6. George, A. and Veeramani, P., “On some results in fuzzy metric spaces”, *Fuzzy Sets and Systems*, 64: 395-399 (1994).
7. Alaca C, Türkoglu D, Yıldız C., “Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 29:1073–1078 (2006).
8. Alaca, C., Türkoğlu, D., Yıldız, C., Common fixed points of compatible maps in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Southeast Asian Bull. Math.*, 32: 21-33 (2008).
9. Alaca, C., Altun, İ., Türkoğlu, D., On compatible mappings of type (I) and (II) in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Commun. Korean Math. Soc.*, 23 (3): 427-446 (2008).
10. Smarandache, F., “A Unifying field in logics. Neutrosopy: Neturosophic probability, set, and logic”, *American Research Press*, Rehoboth 88-143 (1999).
11. Smarandache, F., “Mixed noneuclidean geometries”, *eprint arXiv*: math/0010119, 10/2000.
12. Efe, H., Alaca, C. and Yıldız, C. “Fuzzy Multi Metric Spaces”, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 10 (3): 367-375 (2008).
13. Sapena, A. “Fuzzy metric spaces defined by t-norms”, *Doctora Thesis*, Valencia, 33-57 (2002).
14. V. Gregori, S. Romaguera and P. Veeremani, “A note on intuitionistic fuzzy metric spaces,” *Chaos, Solitons & Fractals*, 28: 902-905 (2006).
15. Efe, H. and Yıldız, C., “On The Hausdorff Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31 (2): 143-165 (2006).

16. Schweizer, B. and Sklar, A., "Statistical metric spaces", ***Pacific J. Math.***, 10: 314-344 (1960).
17. Lowen, R., "Fuzzy Set Theory", ***Kluwer Academic Publishers***, Dordrecht, 43-57 (1996).
18. Mao, L., "On multi-metric spaces", ***eprint arXiv***: math.GM/0510480,1/2005.
19. Klement, E.P., Mesiar R., Pap, E., "A characterization of the ordering of continuous t-norm", ***Fuzzy Sets and Systems***, 86: 189-195 (1997).
20. Beer, G., "Topologies On Closed And Closed Convex Sets", ***Kluwer Academic Publishers***, Dordrecht, 187-195 (1993).
21. R. Saadati and J. H. Park, "On the intuitionistic fuzzy topological space", ***Chaos, Solitons and Fractals***, 27: 331-334 (2006).
22. Bülbül, A., "Genel Topoloji", ***KTÜ FEF Yayınları***, Trabzon, 226-236 (1994).
23. Kelley, J.,L., "General Topology", ***Springer-Verlag***, 186-187 (1955).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : EFE, Hakan

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri : 25.08.1972 Bursa

Medeni Hali : Evli

Telefon : 0 (312) 202 10 79

e-mail : hakanefe@gazi.edu.tr , hakanefe1972@yahoo.com.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2003
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1995
Lise	İnegöl İHL	1990

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2000-	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. **Efe,H.**, Yıldız, C., “On The Hausdorff Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 31 (2): 143-165, 2006.
2. **Efe, H.**, Alaca, C., “Compact and Bounded Sets in Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces”, Demonstratio Mathematica, 40 (2): 449-456, 2007.
3. **Efe, H.**, Alaca, C., Yıldız, C., “Fuzzy Multi Metric Spaces”, Journal of Computational Analysis and Applications, 10 (3): 367-375, 2008.

4. **Efe, H.**, “Some Theorems on IF-Compact Linear Operators”, Journal of Computational Analysis and Applications, 10 (1): 61-74, 2008.
5. **Efe, H.**, “Ball Closure Property in Fuzzy Metric Spaces”, Journal of Applied Functional Analysis, 3 (2): 209-214, 2008.

Hobiler

Masa Tenisi, Futbol.