

T.C  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK - BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**FOURIER ANALİZİ VE TERS  
PROBLEM**  
( Yüksek Lisans Tezi )

Tez Hazırlayan: **Necati ÇAKIR**

İSTANBUL, 2008

T.C  
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK - BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**FOURIER ANALİZİ VE TERS  
PROBLEM**  
(Yüksek Lisans Tezi)

(Tezi Hazırlayan)  
**Necati ÇAKIR**  
Öğrenci No:  
**050860015**

Danışman:  
**Prof . Dr. Mahir RESULOV**

İSTANBUL, 2008

## **ÖNSÖZ**

Öncelikle, bugüne kadar olan eğitim hayatımda bana gösterdikleri desteklerden dolayı aileme çok teşekkür etmek istiyorum.

Tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerini öğrencileriyle paylaşan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a en içten saygılarımı sunar, sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tezimin değişik aşamalarında bana sağlamış olduğu değerli katkılarından dolayı Sayın Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a teşekkürü bir borç bilirim.

**İSTANBUL, 2008**

**Necati ÇAKIR**

## **YEMİN METNİ**

Sunduğum Yüksek Lisans Tezimi, Akademik Etik İlkelerine bağlı kalarak, hiç kimseden akademik ilkelere aykırı bir yardım almaksızın bizzat kendim hazırladığıma and içerim. 16/07/2008

**Aday: Necati ÇAKIR**

## ÖZET

### Fourier Analizi ve Ters Problem

Tezde Fourier dönüşümünü kullanarak bazı sınıf istasyonel olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin gerçel çözümleri incelenmiştir. Ayrıca da serpilmenin ters problemi de kullanılarak birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin gerçel çözümü ele alınmıştır. Bazı durumlarda lineer Schrödinger denkleminin gerçel çözümleri incelenmiştir.

## **ABSTRACT**

### **Fourier Analysis and Inverse Problem**

In this thesis the exact solution of some class of non stationary equations is obtained by applying the Fourier Transform. In addition, using the inverse problem of scattering the exact solution of the Cauchy problem for first order partial differential equation is found. The exact solution of some linear Schrödinger equation is obtained too.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

YEMİN METNİ

JÜRİ SAYFASI

ÖZET

ABSTRACT

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.GİRİŞ.....</b>                                                              | <b>1</b>  |
| <b>2. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI.....</b>                             | <b>2</b>  |
| 2.1 Düz ve Ters Fourier Dönüşümleri, Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri.....   | 2         |
| 2.2 Fourier Dönüşümünün 1. Basamaktan Kısmi Türevli Denklemlere Uygulanması..... | 5         |
| <b>3. SCHRÖDİNGER DENKLEMİ VE LAX FORMALİZMİ .....</b>                           | <b>8</b>  |
| <b>4. TERS PROBLEM ( INVERCE PROBLEM ) .....</b>                                 | <b>10</b> |
| 4.1 Klasik Mekanikte Ters Problem.....                                           | 14        |
| 4.2 Kuantum Mekaniğinde Saçılma.....                                             | 15        |
| <b>5. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN BAZI UYGULAMALARI.....</b>                         | <b>25</b> |
| 5.1 Delta Potansiyel.....                                                        | 25        |
| 5.2 Dikdörtgen Şekilli Potansiyel Çukuru.....                                    | 27        |
| 5.3 KdV Denkleminin Schrödinger Denklemine İndirgenmesi.....                     | 33        |
| <b>6. SONUÇLAR.....</b>                                                          | <b>35</b> |
| <b>7.KAYNAKLAR.....</b>                                                          | <b>36</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>                                                             | <b>37</b> |

## 1. GİRİŞ

Genelde birçok pratik problemlerin matematiksel modelleri nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler veya diferansiyel denklemler sistemleri yardımıyla ifade edilmektedir. Bilindiği gibi nonlinear denklemi (denklemler sistemi) için yazılmış başlangıç değer problemlerini çözmek için bazı zorluklarla karşılaşmaktadır. Bu nedenle en doğal yol sözkonusu nonlinear denklemi lineer denkleme ( denklemler sistemine) indirgemek ve çözmek daha kolaydır. Mesela; nonlinear Burgers denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu > 0$$

$u = \mu \frac{\psi_x}{\psi}$  değişken dönüşümü yardımı ile lineer ısı denklemine

$$\psi_t = \mu \psi_{xx}$$

dönüşmektedir. Daha sonra bu yöntem geliştirilerek bazı önemli problemler de çözüme kavuşur.

Diğer önemli problemlerden birise de Korteweg- de Vries denklemini için yazılmış Cauchy probleminin çözümü olmaktadır.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathfrak{R}, \quad t > 0$$

denklemini için

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathfrak{R}$$

problemini göz önüne alalım. Burada  $u_0(x)$  bazı koşulları koruyan bilinen bir fonksiyon olmaktadır.

$$u = v^2 + v_x$$

değişken dönüşümünden sonra KdV denklemini

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0$$

denklemine dönüşür. Burada  $v(x,t)$  fonksiyonu modifiye olunmuş KdV

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

denkleminin çözümü olmaktadır.



Göstermek mümkündür ki, eğer  $u(x, t) = v^2 + v_x$  denkeminin çözümü ise, aşağıdaki Riccati

$$v = \frac{\psi_x}{\psi}$$

dönüşümü sonucu lineer Schrödinger

$$\psi_{xx} - u\psi = 0$$

denklemine dönüştürür. Nonlineer diferansiyel denklemleri dönüştüren genel değişken dönüşümü bulmak mümkün değildir.

Fakat, Fourier dönüşümü kullanılarak birkaç sınıf nonlineer denklemleri lineer Schrödinger denklemine dönüştürmek mümkündür.

Beş bölümden oluşan tezin 2. bölümünde Fourier dönüşümü ve bazı özellikleri incelenmiştir.

3. ve 4. bölümde Schrödinger denklemi ve Lax formalizmi incelenmiş, klasik ve kuantum mekaniğinde saçılma ve Schrödinger denklemine indirgenebilen bazı problemler incelenmiştir.

Tezin sonuncu bölümünde Schrödinger denkleminin bazı uygulamaları incelenmiştir.

## 2. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

### 2.1 Düz ve Ters Fourier Dönüşümleri

$f(x)$  fonksiyonu  $-\infty < x < \infty$  aralığında tanımlı, parça- parça sürekli ve  $x$  noktası etrafında sonlu varyasyona sahip fonksiyon olsun. Ayrıca da varsayalım ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty .$$

Bu özelliğe sahip olan fonksiyonlara Fourier orijinali denir.

**Tanım 1.** Aşağıdaki eşitlikte tanımlanan

$$\mathfrak{F}[f] \equiv \mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (1)$$

fonksiyonuna  $f(x)$  fonksiyonun (düz) Fourier dönüşümü denir,

burada  $i = \sqrt{-1}$  olmaktadır.

**Tanım 2.** Eğer,  $\mathfrak{F}(\xi)$   $f$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü ise

$$\mathfrak{F}^{-1}[f] \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (2)$$

ifadesine ters Fourier dönüşümü denir.

Örneğin,

$$e^{-|x|} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} e^{-|x|}.$$

**Örnek 1.** 7. formülünün doğru olduğunu gösterelim.

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+ik)^2}{2}} dx \cdot e^{-\frac{i^2 k^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \cdot e^{-\frac{k^2}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{k^2}{2}}$$

*Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri*

1. Fourier dönüşümü lineer dönüşümdür.

Yani,  $a$  ve  $b$  herhangi bir sabitler olmak üzere;

$$\mathfrak{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathfrak{F}[f(x)] + b\mathfrak{F}[g(x)]$$

2. Kısmi türevler için Fourier dönüşümleri .

$u(x,t)$  tanım bölgesinde sürekli ve her iki değişkene göre sürekli kısmi türevleri olan fonksiyon olsun,

Aşağıdaki tabloda pratikte çok kullanılan bazı fonksiyonlar için Fourier dönüşümleri verilmiştir.

|    |                    | $f(x)$               | $F(k)$                           |
|----|--------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1. | Delta function     | $\delta(x)$          | 1                                |
| 2. | Square pulse       | $H(a -  x )$         | $\frac{2}{k} \sin ak$            |
| 3. | Exponential        | $e^{-a x }$          | $\frac{2a}{a^2 + k^2}$           |
| 4. | Heaviside function | $H(x)$               | $\pi\delta(k) + \frac{1}{ik}$    |
| 5. | Sign               | $H(x) - H(-x)$       | $\frac{2}{ik}$                   |
| 6. | Constant           | 1                    | $2\pi\delta(k)$                  |
| 7. | Gaussian           | $e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $\sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}}$ |

aşağıdaki özellikler doğrudur:

$$a) \quad \mathfrak{I}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t) e^{-i\xi x} dx = -i\xi \mathfrak{I}[u] ;$$

$$b) \quad \mathfrak{I}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \mathfrak{I}[u] .$$

a) ve b) özelliklerinin ispatı,  $x$  ' e göre kısmi integrasyon yönteminin uygulanması sonucu elde edilir.

$$c) \quad \mathfrak{I}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-i\xi x} dx = \frac{d}{dt} \mathfrak{I}[u] ,$$

$$d) \quad \mathfrak{I}[u_{tt}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{I}[u] .$$

### 3. Bükülme özelliği

**Tanım 3.** Varsayalım ki,  $f(x)$  ve  $g(x)$   $R^1$  de tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar olmaktadır. Aşağıdaki formülle tanımlanan

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

integrale  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarının bükülmesi denir.

$f(x)$  ve  $g(x)$  Fourier orijinalleri ise

$$\mathfrak{I}[f * g] = \mathfrak{I}[f] \mathfrak{I}[g] .$$

olmaktadır.

**Örnek 2.**  $f(x) = x$  ve  $g(x) = e^{-x^2}$  olsun.  $(f * g)(x)$  ' yi bulunuz.

**Çözüm.** Tanım 3'e göre,

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) e^{-\xi^2} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi = \\ &= x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-\xi^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{x}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

## 2.2 Fourier Dönüşümünün 1. Basamaktan Kısmi Türevli Denkleme Uygulanması

Bu bölümde bizim uygulayacağımız yöntem, Fourier yöntemi ve onun genelleştirilmesi olmaktadır. Biz bu yöntemi sonralar bazı nonlinear denklemlere uygulayacağız. Şimdi, biz bu yöntemi birinci basamaktan olan lineer denklem için Cauchy probleminin çözümüne uygulayalım.

Aşağıdaki problemi göz önüne

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) q(t, x) = 0, \quad (3)$$

$$q(0, x) = q^0(x) \quad (4)$$

alalım.

Bellidir ki, bu problemin çözümü

$$q'(x) = q(t, x) = q^0(x - c_0 t) \quad (5)$$

fonksiyonu olmaktadır.

Eğer  $q$  – kompleks değerli tüm  $t \geq 0$  için mutlak integrallenebilen fonksiyon olursa, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(t, x)| dx < \infty,$$

bu durumda  $q'(x)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$(Fq')(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} q(t, x) dx = B'(k) \quad (6)$$

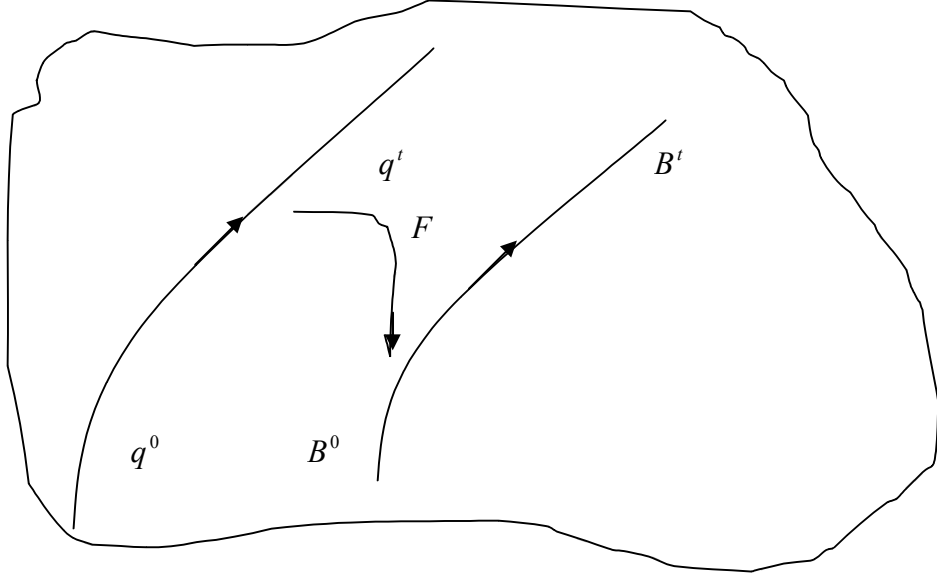
olmaktadır.

$A(\mathfrak{R})$  ile tüm  $\mathfrak{R}$  de tanımlı, sürekli diferansiyellenebilen ve mutlak integrallenebilen fonksiyonlar uzayını gösterelim. Açıktır ki,  $F : A(\mathfrak{R}) \rightarrow A(\mathfrak{R})$ .

Bildiğiniz gibi,  $F$  dönüşümünün  $A(\mathfrak{R})$  ters dönüşümü var ve

$$(F^{-1}B')(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} B(t, x) dk = q'(x) \quad (7)$$

formülü ile tanımlanmaktadır, yani  $F^{-1} : A(\mathfrak{R}) \rightarrow A(\mathfrak{R})$



Şekil 1

Açıktır ki, (3) denklemi  $t = 0$  olduğu durumda  $q^0(x)$  fonksiyonu ile aynı olan  $q^t(x) \in A(\mathfrak{R})$  fonksiyonun evrimini belirlemektedir. Eğer  $t$  değişirse  $q^t(x)$  noktası  $A(\mathfrak{R})$  fonksiyonel uzayında bir eğri oluşturmaktadır. Şekil1'de formal olarak  $F$  dönüşümü bu eğrinin nasıl değiştiğini göstermektedir. Dönüştürülmüş eğri de  $A(\mathfrak{R})$  uzayında  $B^0$  noktasından çıkan bir eğri olmaktadır. Fourier dönüşümünün amacı dönüştürülmüş eğrinin kolayca bulunması ve bu eğrinin incelenmesi olmaktadır. (7)' yi (3) ve (4) de yazarsak

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + ikc_0 \right] B(t, k) = 0, \quad (8)$$

$$B(0, k) = B^0(k) \quad (9)$$

elde ederiz.

(8) ve (9) problemi çok kolayca çözülebilir ve çözüm

$$\frac{dB(t, k)}{dt} = -ikc_0 B(t, k),$$

veya

$$\frac{dB(t, k)}{B(t, k)} = -ikc_0 dt$$

olmaktadır. Buradan ,

$$\ln B(t, k) = -ikc_0 t + c,$$

veya  $B(t, x) = ce^{-ikct_0}$  olarak elde ederiz. Sonuncu ifadeye dahil olan  $c$  sabitini (9)' dan  $c = B^0(k)$  olarak buluruz. Alınan ifade yerine konursa  $B^t(k)$  için

$$B^t(k) = B(t, x) = B^0(k)e^{-ikct_0} \quad (10)$$

ifadesini elde ederiz.

Eğer ters Fourier dönüşümü  $B^t(k)$  fonksiyonuna uygularsak

$$\begin{aligned} q^t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cdot e^{-ikct_0} B^0(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-c_0t)} B^0(k) dk = q^0(x - c_0t) \end{aligned} \quad (11)$$

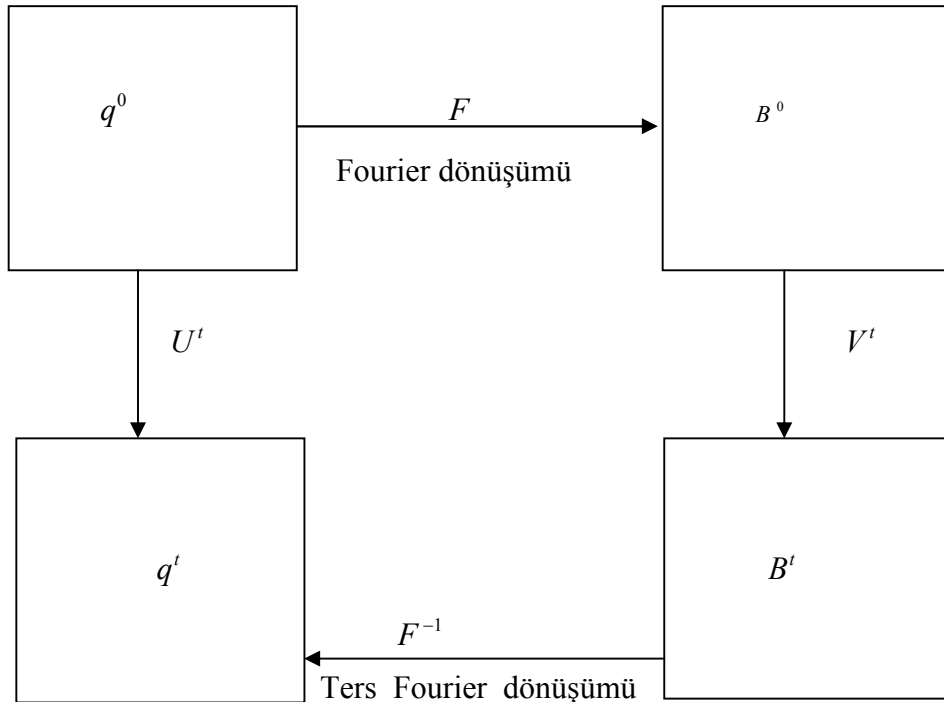
alırız. (4) koşulundan

$$Fq^{(0)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} q^0(x) dx \equiv B^0(k)$$

olur ve

$$(F^{-1}B^0)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} B^0(k) dk = q^0(x)$$

olmaktadır. Yukarıda uygulanmış yöntemi şematik olarak göstermek mümkündür.



Şekil 2

Burada  $U^t : q^0 \rightarrow q^t$  ve  $V^t : B^0 \rightarrow B^t$ .

### 3. SCHRÖDİNGER DENKLEMİ VE LAX FORMALİZMİ

Aşağıdaki denklemi göz önüne

$$Ly = \lambda y \quad (12)$$

alalım. Burada,

$$L = D^2 - u(x, t) \quad \text{ve} \quad D = \frac{d}{dx} \quad (13)$$

olmaktadır. (12) denklemini  $t$ ' ye göre diferansiyelleyelim

$$(Ly)_t = L_t y + Ly_t = \lambda_t y + \lambda y_t \quad (14)$$

$$Ly_t = D^2 y_t(x, t) - u(x, t) y_t = y_{xxt} - u y_t \quad (15)$$

olduğu açıktır. Şimdi  $(Ly)_t$ ' yi bulalım

$$(Ly)_t \equiv \left[ (D^2 - u(x, t)) y \right]_t = (D^2 y)_t - (u(x, t) y)_t = y_{xxt} - u_t y - u y_t \quad (16)$$

(15) ve (16)' i (14)'ün sağ tarafında yerine yazalım ,

$$y_{xxt} - u_t y - u y_t = L_t y + y_{xxt} - u y_t .$$

Buradan

$$-u_t y = L_t y \quad (17)$$

olduğunu elde ederiz. Sonuncu ifadeden ise

$$L_t = -u_t \quad (18)$$

olduğunu görürüz. Bizi öyle  $u(x, t)$  fonksiyonu ve böylelikle  $t$ ' ye bağlı  $y$  fonksiyonları ilgilendiriyor ki ,  $\lambda_t = 0$  olsun.

Farz edelim ki,  $y$  fonksiyonun  $t$ ' ye göre bağıllılığı

$$y_t = B y \quad (19)$$

gibi verilmiştir. Burada  $B$  belli olmayan ve bulunması gereken herhangi (tek olmayan) bir lineer operatör olmaktadır. Ayrıca  $y$ ' nin  $x$ ' e bağıllılığı (12) denklemi ile korunur.

O zaman (19) dikkate alınırsa (14) böyle

$$L_t y + Ly_t = \lambda_t y + \lambda y_t = -u_t y + L B y = \lambda_t y + \lambda B y$$

olur. Sonuncu ifade böyle de

$$-u_t y + LB y = \lambda_t y + B(\lambda y)$$

yazılabilir.  $\lambda y = Ly$  olduğunu dikkate alırsak

$$-u_t y + LBy - BLy = \lambda_t y$$

olur. Sonuncu ifadeyi sağdaki gibi

$$-u_t y + [LB - BL]y = \lambda_t y ,$$

veya

$$(-u_t + [L, B])y = \lambda_t y \quad (20)$$

yazalım . Bu ifadeye A ve B operatörlerinin komutatörü denir. Burada

$$[L, B] = LB - BL \quad (21)$$

olmaktadır. (20) denkleminde görüldüğü gibi  $\lambda$  'nın zamandan bağılı olmaması için, yani  $\lambda_t = 0$  olması için B operatörünü öyle çekmek gerekiyor ki,

$$-u_t + [L, B] = 0 \quad (22)$$

olsun. (22) operatörü denklem oluşturur.

Şimdi biz göstereceğiz ki , B üzerine gereken şartları koymakla  $[L, B]$  ifadesi diferansiyel operatör değil  $u$  'ya ve onun yer eksenine göre olan türevlerini içeren bir fonksiyon olmaktadır. Ve böylelikle biz u fonksiyonuna göre bir kısmi türevli diferansiyel denklem elde edeceğiz. Böylece,  $u$  bu denklemi sağladıkça  $\lambda_t = 0$  olacaktır.

**Örnek 3.** B operatörü olarak  $B = aD \equiv a \frac{\partial}{\partial x}$  , ü göz önüne alalım. Burada a u ve onun yer eksenine göre türevlerini içerebilir.

Tanıma göre,

$$\begin{aligned} [L, B]y &= (LB - BL)y = (D^2 - u)(ay_x) - aD(y_{xx} - uy) = \\ &= D^2(ay_x) - uay_x - aDy_{xx} + aD(uy) \\ &= D^2(ay_x) - uay_x - aDy_{xx} + au_x y + auy_x \\ &= D^2(ay_x) - aDy_{xx} + au_x y . \\ D(ay_x) &= a_x y_x + aDy_x , \text{ ve} \\ D^2(ay_x) &= Da_x y_x + D(aDy_x) = \\ &= a_x Dy_x + a_{xx} y_x + a_x Dy_x + aD^2 y_x . \end{aligned} \quad (23)$$

olduğunu dikkate alırsak (23)' i aşağıdaki gibi

$$a_x D^2 y + a_{xx} Dy + a_x D^2 y + aD^3 y - aDy_{xx} + au_x y \quad (24)$$



$$= au_x D^2 y + a_{xx} D_y + au_x y .$$

yazabiliriz. (24) ifadesi (23)' de yerine konursa

$$[L, B]y = 2a_x D^2 y + a_{xx} D_y + au_x y \quad (25)$$

olur. Eğer, (23) ifadesinde  $D^2 y$  ve  $D_y$  çarpanların katsayıları sıfıra eşit olursa , yani  $a = \text{counst}$  durumunda

$$[L, B] = au_x \quad (26)$$

olur . (26) ifadesi (22)' de yerine konursa

$$-u_t + au_x = 0 , \quad (27)$$

veya

$$u_t - au_x = 0$$

olur . (27) denklemi (20)' da dikkate alınırsa

$$(u_t + au_x)y = \lambda_t y$$

$$\lambda_t = 0 .$$

Gerçektende

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda - u(x)]y = 0$$

denkleminde  $u(x)$  potansiyel fonksiyonu  $x + at$  kadar kaydırsak  $\lambda$  ' lar değişmez kalmaktadır. Bu denkleme Schrödinger denklemi denir.

#### 4. TERS PROBLEM ( INVERSE PROBLEM )

Bu bölümde göstereceğiz ki, Schrödinger denklemi için yazılmış ters problemin çözümü yardımıyla bir çok nonlinear problemlerinin de çözümünü elde etmek mümkündür. Bundan dolayı bu bölümde önce, ters saçılma dönüşümü için gereken alt yapıyı irdelleyeceğiz. Söz konusu problemin temeli kuantum mekaniği ile bağlı olduğundan kullanacağımız sözcükleri de kuantum mekaniğinin sözcükleri ile uzlaştırmak zorundayız.

Bir kural olarak iki değişkene bağlı fonksiyonları kullanacağız,  $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  .

(3) denklemi için  $\mathfrak{S}$  operatörüne benzer diğer dönüşümleri bulmak mümkündür.

Böyle bir özdeğer problemini

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + q(t, x) \right] Y(t, x, k) = -k^2 Y(t, x, k) . \quad (28)$$

göz önüne alalım. Burada  $t$  parametre olmaktadır. Bellidir ki,  $t$  değiştikçe  $k^2$  öz değerleri ve aynı zamanda  $K^Y$  öz fonksiyonları değişecektir.

Eğer  $q^t$  fonksiyonunun evrimi (3) denklemini sağladığı takdirde  $K^Y$ , 'nin  $t$ , ye bağıllığı kesin belli olacak.

Farz edelim ki,  $K^Y$  aşağıdaki denklemini

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) Y(t, x, k) = \alpha(k) Y(t, x, k) \quad (29)$$

sağlamaktadır.

Göstermek mümkündür ki, eğer

$$\frac{\partial^2 Y(t, x, k)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t}(t, x, k) \quad (30)$$

ise (28) denklemi ile (20) denklemi uzlaşır, ve (30)'in korunması için de

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) q(t, x) = 0 \quad (31)$$

olmak zorundadır. Buradan da

$$\frac{\partial(k^2)}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

olur.

Böylelikle (3) denklemi (29) ve (32) denklemlerine dönüştürülür, ve (26) ile (27) uzlaşmaktadır. İlk adımda böyle anlaşılır ki, problemi zorlaştırdık, yani (29) denklemi (3)' den zordur ve (3) denklemi  $\alpha = 0$  olduğu durumda gerçekleşir. Ama  $K^Y$ , 'yi bir fonksiyon gibi göz önüne alıp, biz iveli gidebiliriz. Bu işlemleri  $q^t$  için yapmak olamaz.

Farz edelim ki,  $q^t$

$$q^t(x) \rightarrow 0 \quad , \quad |x| \rightarrow \infty \quad (33)$$

şartını sağlamaktadır. Bu durumda, (20) denklemini asimptotik olarak

$$\frac{d^2 Y(t, x, k)}{dx^2} + k^2 Y(t, x, k) = 0 \quad (34)$$

böyle yazabiliriz.

(34) denkleminin genel çözümü şeklinde

$$Y(t, x, k) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \quad (35)$$

olmaktadır.

Burada,  $A$  ve  $B$   $t$  ve  $k$  'nın fonksiyonu olabilir. Gösterelim ki, eğer çözümün  $x \rightarrow \infty$  asimptotikası belli olursa, o zaman  $x \rightarrow \infty$  olduğu durumda tek bir asimptotika ele almak mümkündür. (34) denkleminin çözümü için aşağıdaki

$$\varphi(t, x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ b^t(k)e^{ikx} + a^t(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (36)$$

asimptotik formülü göz önüne alalım.

(29)' da,  $x \rightarrow -\infty$  olduğu durumda, (36) göz önüne alınır

$$\begin{aligned} + c_0(-ik)e^{-ikx} &= \alpha(k)e^{-ikx} \\ \alpha(k) &= -ikc_0 \end{aligned} \quad (37)$$

olur. Şimdi  $x \rightarrow \infty$  olduğu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} b(k)e^{ikx} + \frac{\partial}{\partial t} a(t, x)e^{-ikx} + c_0 b^t(k)e^{ikx}(ik) + c_0 a^t(k)e^{-ikx}(-ik) \\ = \alpha(k)b^t(k)e^{ikx} + \alpha(k)e^{-ikx}a(t, x), \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial t} b^t(k)e^{ikx} + ikc_0 b^t(t, x)e^{ikx} = \alpha(k)b(t, x)e^{ikx}.$$

Burada  $\alpha(k) = -ikc_0$  olduğu göz önüne alınır, sonuncu eşitliğin korunması için,

$$\frac{\partial}{\partial t} b(t, k) = -2ikc_0 b(t, k) \quad (38)$$

$$\frac{\partial a(t, x)}{\partial t} = 0 \quad (39)$$

alırız. Görüldüğü gibi, (38) denklemi ile (8) denklemi aynı şey olmaktadır. (38) denkleminin çözümü

$$b(t, k) = b^{(0)}e^{-2ikct_0}$$

olmaktadır. Ve bu çözümü dikkate alarak (36) aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\varphi(t, x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ b^0 e^{ik(x-2c_0t)} + a^0 e^{-ikx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (40)$$

(28) denkleminin  $q^0(x)$  karşılık gelen asimptotik çözümü

$$\varphi(0, x, k) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ b^0 e^{ikx} + a^0 e^{-ikx}, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

oluyor.

Böylelikle  $q^0(x - c_0t)$ 'ye karşılık gelen asimptotik çözüm ise

$$\varphi(t, x, k) = \begin{cases} e^{-ik(x-c_0t)}, & x \rightarrow -\infty \\ b^0 e^{ik(x-c_0t)} + a^0 e^{-ik(x-c_0t)}, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

şöyle olacaktır.

(28) denklemi lineer olduğundan dolayı,  $x \rightarrow -\infty$  olduğu durumda  $e^{+ikc_0}$  katsayısını normalleştirmek mümkündür. Sonra eğer  $q^t$  ile asimptotik  $(b^t, a^t)$  arasında bir değerli  $F$  dönüşümü ele alırsak

$$q(t, x) = q^0(x - c_0t)$$

ifadesini alırız. Eğer  $F^{-1}$  dönüşümünü tanımlarsak (29) problemi de aşağıdaki şemada gösterildiği gibi çözülebilir.

$$\begin{array}{ccc} q^0 \in A(\mathfrak{R}) & \xrightarrow{F} & S \in (b^0, a^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ q^t \in A(\mathfrak{R}) & \xleftarrow{F^{-1}} & S \in (b^t, a^t) \end{array} \quad W^+ : (b^0, a^0) \rightarrow (b^t, a^t)$$

Sonraki bölümlerde biz birkaç koulepet  $q(t,x)$ ' ler için  $(b',a')$ ' nin asimptotik koşullar bulacağız. Bu bize  $F$  dönüşümünün tersi olduğu hatta informasyonu verecektir. Sonra göstereceğiz ki,  $(b',a')$  çiftlerinin de  $F^{-1}$  dönüşümünün mevcutluğu için asimptotik verilerin  $q(t,x)$  ile tek olarak bağımlı olması gerekmektedir.

#### 4.1 Klasik Mekanikte Ters Problem

(28) denklemi fiziksel modellerde çok karşımıza çıkmaktadır. Ve bu durumlarda  $F$  ' nin ters dönüşümünün bulunması özgül bir problem olmaktadır. Fazla şartların olması gerekiyor ve  $q(t,x)$  üzerine daha ciddi şart talep olunmaktadır.

Yoğunluğu  $\rho(y)$  olan bir boyutlu esnek çubuğun titreşim olayını göz önüne alalım. Bu olayın denklemi Newton sıvılarının hareket hızı gösteren  $v(y,t)$  fonksiyonu için

$$\rho(y) \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial S(y,t)}{\partial y} \quad (41)$$

denklemi olmaktadır. Burada,  $S(y,t)$

$$S(y,t) = H(y) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right] (y,t) \quad (42)$$

olmaktadır .

Esneklik modülü olan  $H(y)$   $y$  ' ye bağlı fonksiyondur.  $v(y,t)$  ise  $u(y,t)$  ' ye aşağıdaki eşlikle bağlı olan

$$v(y,t) = \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} \quad (43)$$

bir fonksiyondur.

$f(x,t)$  fonksiyonu için  $t$  değişkenine göre Fourier dönüşümünü

$$\tilde{f}(y,k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} f(y,t) \frac{dt}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \quad (44)$$

olmaktadr. Bu durumda (41) , (43) denklemleri

$$ik\rho(y)\tilde{v}(y,k) = \frac{\partial \tilde{S}(y,k)}{\partial y} ,$$

$$ik \tilde{S}(y, k) = x(y) \frac{\partial \tilde{v}(y, k)}{\partial y} ,$$

olmaktadır. Eğer bu denklemlerden  $\tilde{v}(x, k)$ ' yı yok edersek aşağıdaki gibi Sturm – Linwill denklemini

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\rho(y)} \frac{\partial S(y, k)}{\partial y} \right] + \frac{k^2}{x(y)} \tilde{S}(y, k) = 0 \quad (45)$$

elde ederiz.

$$X = \int_0^y \left[ \frac{\rho(u)}{k(u)} \right]^{1/2} du , \quad (46)$$

ve

$$Y(y, k) = \tilde{S}(y, k) (x(y) \rho(y))^{-1/2}$$

değişken dönüşümlerini yaparsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 + Q(y) \right] Y(x, k) = 0 \quad (47)$$

burada

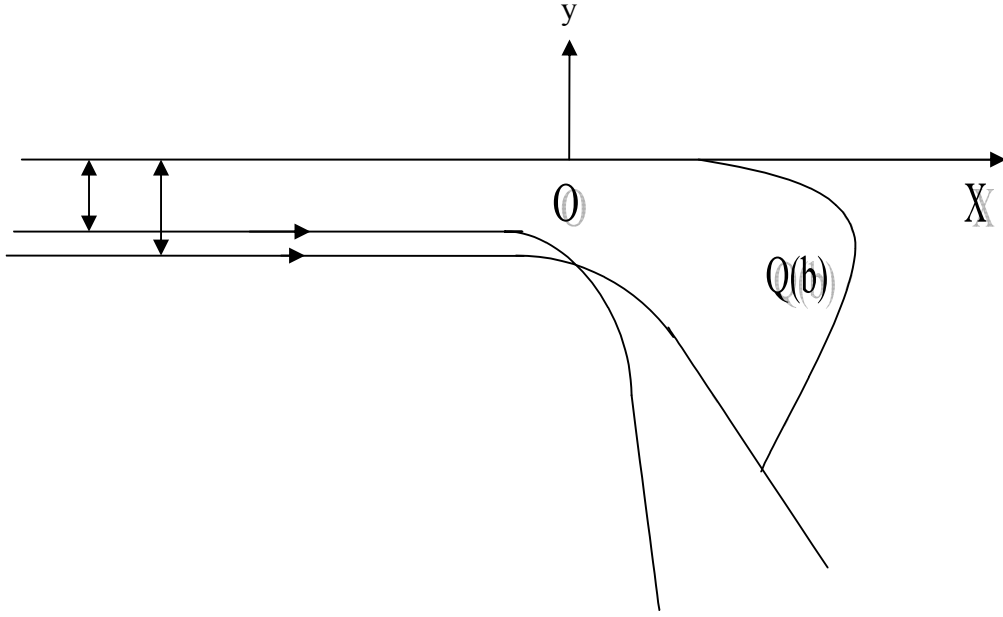
$$Q(y) = -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} , \text{ ve } \varphi(y) = (H(y) \rho(y))^{-1/4}$$

olmaktadır .

## 4.2 Kuantum Mekaniğinde Saçılma

Klasik mekanik güneş sisteminde olan cisimlerin hareketini öğrenen bir bilim alanı olmaktadır. Makroskopik sistemler için ölçme sürelerinin müşahade sonuçlarına çok az etkisi olur.

Klasik mekanikte düz ve ters serpilme problemlerini inceleyelim. Kouservatif kuvvetlerin etkisi altındaki  $\theta$  koordinat başlangıcından çıkan parçacığın hareketini göz önüne alalım. Bu türlü kuvvetlere örnek olarak  $r$  – radial koordinata bağlı  $V(r)$  potansiyel kuvvetini göstermek mümkündür. Eğer, parçacığı etkileyen radial kuvvet  $r \rightarrow \infty$  olduğunda sıfıra yaklaşırsa, bu kuvveti de potansiyel kuvvet olarak kabul kılabiliriz.



Şekil 3

O noktasından yeteri kadar uzaklıkta bulunan ve böyle potansiyel alanda hareket eden parçacığın söz konusu potansiyel parçacığın birkaç yörüngesi gösterilmiştir. Şekilde gösterilen yörüngeler,  $x = -\infty$  noktasından çıkan,  $ox$  ekseninden farklı  $b$  mesafedeki ve  $ox$  'e paralel olarak hareket eden parçacıklara ait olmaktadır. Potansiyel alanın yeteri kadar değiştiği alanda parçacıklar döner, ve merkezden olan minimum uzaklık  $R_b$  yalnız parçacığın  $x$  'den olan  $b$  mesafesine bağlı olmaktadır.  $b$  değişkenine parçacığın “nupuyel” mesafesi denir. Böylelikle, parçacık potansiyel tarafından itilir ve  $ox$  eksenine paralel yörüngesinden çıkarır ve osimptotik olarak 0 noktasından çıkan doğru üzere merkezden uzaklaşır. Bu doğru  $\theta(b)$  açısı ile tanımlanır. Bu durumda düz problem önceden verilmiş  $V(r)$  potansiyeline göre  $\theta(b)$  fonksiyonun bulunması olarak ifade edilmektedir.

Fiziksel olarak yukarıda söylediğimiz problem ince folgadan geçmekte olan elektronların serpilme problemi olmaktadır. Fakat bu durum üç boyutlu problem olur. Lakin eğer  $ox$  eksenine paralel silindirik demet şeklinde hareket eden potansiyeller yukarıdaki problem ait olabilir. Deneğsel olarak  $\theta(b)$  açısını ölçmek mümkün değil. Lakin bazı diğer açıları ölçmek mümkündür ki , bunları kullanarak  $\theta(b)$  açısını da ölçmek mümkün olur. Var sayalım ki, laboratuar ortamında her saniyede birim alandan aynı  $E$  enerjisine sahip olan  $\rho$  kadar parçacık akışı gerçekleştirilmiştir. Söz konusu parçacık demeti  $ox$  ekseni üzere potansiyel alana doğru hareket eder.

$(\theta, \theta + d\theta)$  açısı arasında bir saniye zarfında serpilten parçacıkların sayısı  $2\pi\rho\sigma(\theta)\sin\theta d\theta$  olmaktadır. Burada,  $\sigma(\theta)$  serpilmenin diferansiyel keşifi olmaktadır.  $\theta'$  nin değişme bölgesi  $(\theta, \theta + d\theta)$   $b$  parametrenin  $(b, b + db)$  bölgesine karşılık gelmektedir. Parçacıkların sayısı sabit kalmaktadır. Bir saniyede  $b$  ve  $b + db$  “nupuyel” mesafeleri ile sınırlanan çemberden geçmekte olan parçacıkların sayısı  $2\pi\rho b db$  olur. Parçacıkların sayısı korunduğundan bu sayı  $-2\pi\sigma(\theta)\rho\sin\theta d\theta'$  ya eşit olmaktadır. Buradan

$$\sigma(\theta) = -b \cos \theta \frac{db}{d\theta} \quad (48)$$

olarak elde ederiz. (48) denklemini integrallersek

$$b^2 = 2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (49)$$

alırız.

Klasik mekanik teoriye göre hareket eden her bir cisim keyfi bir zamanda uzayda belli bir noktada olmaktadır. Ve belli bir impulsa, enerjiye ve hareket miktarı momentuma sahip olmaktadır. Yörüngenin keyfi bir noktasında kamet uzayda belli bir noktaya, impulsa, enerjiye ve hareket miktarı momentine sahip olmaktadır. Söz konusu enerji ve hareket miktarı momenti sabit kalmaktadır.

Kuant mekaniğinde, klasik mekanikten farklı olarak, kuant mekaniği küçük ölçülü atomların hareketini incelemektedir. Sanki subatom parçacıkların etkisi de önem taşımaktadır. Kuantum mekaniğinde klasik mekanikten farklı olarak parçacık aynı zamanda belli bir noktaya ve deyiğ impulsa sahip olamayabilir. Çünkü ölçme sürelerine subatom boyutlu sistemlerinde etkisi olur.

Ama, öyle bir takım müşahide karakteristikleri bulmak olur ki, onlar aynı zamanda belli olabilsinler. Örneğin enerji  $E$  ve hareket miktarı momenti  $L$ . Söz konusu iki  $E$  ve  $L$  büyüklükleri birbirine etkisiz aynı zamanda ölçülebilir.

Kuantum mekaniğin temel teorisini anlamak için, özel olarak Schrödinger denklemini incelemek için kuant parçacığın  $v(x)$  potansiyel alanında hareketini göz önüne alalım.  $(-\infty < x < \infty)$

Kuantum parçacığı yalnız olasılık terimlerinde 0 ifade edilebilir. Farz edelim ki söz konsu parçacığın  $t$  zamanında durumu komplex değerli  $\psi'(x)$  fonksiyonu ile belirlenmektedir. Böyle fonksiyona dalga fonksiyonu denir. Bu fonksiyon için



$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^2(x)|^2 dx < \infty \quad (50)$$

şartının korunması şarttır. Yani  $\psi'(x) \in L_2$ . Böyle fonksiyonlar kümesinin oluşturduğu lineer uzayı  $L_2(\mathfrak{R})$  ile gösterelim. Bu koşul ona göre gerekiyor ki,  $\psi'(x)$  fonksiyonun şöyle anlamı olsun.  $|\psi^2(x)|^2 dx$  büyüklüğü kuantum parçacığının  $(x, x+dx)$  aralığında olması olasılığını ifade etmektedir. Eğer (50) koşulu sağlanırsa parçacığın (a,b) aralığında olması olasılığı

$$\int_a^b |\psi'(x)|^2 dx / \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \quad (51)$$

formülü ile hesaplanabilir.

Klasik mekanikten, kuantum mekaniğine dönüşüm yaparken, klasik anlamda müşahide olunan parçacığın uzaydaki yeri  $X$ , impuls  $P$ , enerji  $H$ , gibi operatörleri  $\hat{X}, \hat{P}, \hat{H}$  operatörleri ile dönüştürülür. (Bu operatörler  $\psi$  fonksiyonunu etkileyebilir.) ve böyle

$$\hat{X} \psi(x) = X \psi'(x) \quad (52)$$

tanımlanabilir.

$$\hat{P} \psi'(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \quad (53)$$

$\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  - fiziksel sabittir, Plank sabiti olmaktadır.  $h = 6.6252.10^{-34}$  Gouloc. (ısı birimi). Parçacığın uzaydaki yeri ve impulsun aynı zamanda ölçülebilen olmaması formal olarak onu gösterir ki  $\hat{X}$  ve  $\hat{P}$  kommutatif operatörler değildir. Aşağıdaki kommutörü göz önüne alalım.

$$\left[ \hat{X}, \hat{P} \right] = \hat{X} \hat{P} - \hat{P} \hat{X}$$

(52) ve (53) 'den belli olduğ gibi

$$\hat{X} \hat{P} = X.f,$$

$$\begin{aligned}
\hat{P}f &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} f \\
\left[ \hat{X}, \hat{P} \right] \psi^t &= \hat{X} \hat{P} \psi^t - \hat{P} \hat{X} \psi^t = \\
&= X \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^t}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (X \psi^t) = X \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^t}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} X \frac{\partial \psi^t}{\partial x} - \\
&\quad - \frac{\hbar}{i} \psi^t = \frac{i\hbar}{1} \psi^t, \text{ Yani} \\
\left[ \hat{X}, \hat{P} \right] &= i\hbar
\end{aligned}$$

Böylelikle  $\hbar$  sanki, parçacığın uzayda yerinin ve impulsun aynı zamanda ölçülmesi mana olan bir şeydir. Göstermek mümkündür,  $\hbar \rightarrow 0$  kuantum mekaniği klasik mekaniğe dönüşür. Bu olay klasik limit gibi isimlenmiştir.

Kütlesi  $m$  olan parçacığın klasik enerjisi

$$H = \frac{p^2}{2m} + v(\alpha) \quad (54)$$

gibi hesaplanmaktadır.

Bu enerjiye karşılık gelen operatör enerjisi ve Hamilton operatörü

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + v(\hat{x}) = -\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + v(x)(\bullet) \quad (55)$$

gibi olur.

Kuantum sisteminin zamana göre olan evrimini Schrödinger denklemi yardımı ile

$$i\hbar \frac{\partial \psi^t}{\partial t} = \hat{H} \psi^t \quad (56)$$

verilmiştir. (55) dikkate alırsa (56)

$$i\hbar \frac{\partial \psi^t(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^t(x)}{\partial x^2} + v(x) \psi^t(x) \quad (57)$$

böyle yazılabilir. (57) denkleminde Schrödinger denklemi denir. Şimdi biz gösterelim ki, söz konusu terim  $\psi^t$  fonksiyonu ile uzlaşır. Eğer  $\psi^t(x)$   $t = t_0$  normalleşmiş fonksiyon ise, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{t_0}(x)|^2 dx = 1, \quad (58)$$

Bu durumda bu fonksiyonu diğer  $t$ ' ler içinde normalleşmiş olması lazım. Bu koruma kanunundan gözüküyor. (57) denklemi için koruma kanununu ele alalım. Bundan dolayı (57) denkleminin eşlenik olan denklemi bulalım. Bu amaçla,

$$A\psi^t(x) \equiv \left[ i\hbar \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} - v(x)(\bullet) \right] \psi^t(x)$$

operatörünün eşleniğini bulalım.

$$\begin{aligned} (\psi^*, A\psi^t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left[ i\hbar \frac{\partial \psi^t}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^t}{\partial x^2} - v(x)\psi^t \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* i\hbar \frac{\partial \psi^t}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^t}{\partial x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\psi^* \psi^t dx, \end{aligned}$$

Böyle bir fonksiyonu göz önüne

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = [\psi^* \psi]$$

alalım. Buradan,

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

A operatörünün eşleniği,

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^t}{\partial x^2} + v(x)\psi^*$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi^t(x)|^2 &= -\psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v(x)\psi\psi^* - \psi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \\ &\quad - v(x)\psi^* \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right] = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

(59) ifadesi  $v(x)$  ' e bağlı değildir. Sonuncu ifadenin integralini alalım.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^t(x)|^2 dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right] = 0, \quad (60)$$

$\psi^t \rightarrow 0$  ,  $x \rightarrow -+\infty$  .

Buradan,

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^t(x)|^2 dx = \text{count}$ , yani  $t$  ' ye bağılı değil. Böyle notasyonlar kabul

$$p^t(x) = |\psi^t(x)|^2 ,$$

$$I(x,t) = \frac{\hbar}{2m} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \quad (61)$$

edelim. Bu durumda,

$$\frac{\partial p^t}{\partial t} + \frac{\partial I^t(x)}{\partial x} = 0 . \quad (62)$$

Burada  $p^t(x)$  ve  $I^t(x)$  olasılık yoğunluğu, olasılık seli gibi anlaşılır.  $I^t(x)$  böyle de

$$I^t = \frac{\hbar}{2m} W(\psi^*, \psi) = \det \begin{bmatrix} {}_t\psi^* & {}_t\psi \\ \frac{\partial {}_t\psi^*}{\partial x} & \frac{\partial {}_t\psi}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (63)$$

yazılabilir. Eğer biz nontasionar Schrödinger denkleminin  $E$  enerjisine sahip olan çözümünü bulmak istersek

$$H({}_E\psi^t) = E({}_E\psi^t) = 2\hbar \frac{\partial}{\partial t} ({}_E\psi^t) , \quad (64)$$

(57) denkleminin çözümünü

$$\psi^t(x) = T(t)U(x) = e^{\frac{iEt}{\hbar}} U(x,E) \quad (65)$$

gibi arayalım.

$$i\hbar T'(t)U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} T'(t) + V(x)u(x)T(t)$$

veya

$$\frac{i\hbar T'}{T(t)} = \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)U(x)}{u(x)}$$

olur. Bu bağlantı, yalnız her iki tarafı aynı sabite eşitse sağlanır. Bu sabite  $E$  diyelim.

Bu durumda

$$i\hbar \frac{dT(t)}{dt} = ET(t) \text{ olur.}$$

$u(x)$  için olan denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + v(x)u(x) = Eu(x) \quad (66)$$

gibi elde ederiz. Bu denklemi böyle de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, E) + V(x)\psi(x, E) = E\psi(x, E) \quad (67)$$

yazabiliriz. (66)'e zamana bağlı olmayan Schrödinger denklemi denir.

Altını çizelim ki,  $E$ 'nin  $t$ 'ye göre evrimi dalga fonksiyonunun yalnız fazının değişmesine neden olur. Çünkü,  $p^t$  ve  $I^t$  zamana bağlı değildir.  $I^t$ 'nin önemli özelliğinden biri de onun  $v(x)$  potansiyeline bağlı olmamasıdır. Enerjinin özdeğer durumuna karşı başka böyle kemiyetlerde bulmak olur. Eğer  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  (66) denkleminin çözümüdürlerse, o zaman kolayca göstermek olur ki

$$\frac{\partial}{\partial x} W(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (68)$$

Yani sabit enerjinin iki çözümünden oluşan wronskiyan sabit olmaktadır.  $\psi(x, E)$ 'nin kuadrati ile integrallenebilir olması ve  $\psi(x, E)$ 'nin süreksiz olması (66) denkleminin genel çözümünü kullanarak, özel problemleri ifade etmeye imkan sağlamaktadır.

Eğer,

$$Q(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} v(x), \quad k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2},$$

$$y(x, k) = \psi\left(x, \frac{\hbar k^2}{2m}\right) \quad (69)$$

işaret edersek (66) denklemini böyle

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \right] y(x, k) = k^2 y(x, k) \quad (70)$$

yazabiliriz. Bu denklemi böyle de ifade etmek olur.

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + Q(x), \quad (71)$$

### Operatörünün özdeğerlerinin bulunması.

L- Schrödingerin sarılma operatörüdür. Bu denklemin  $E$  özdeğerleri sistemin mümkün olan enerji değerlerini vermektedir. Klasik durumda  $E$  süreksiz ve  $E \geq V_{\min}$  şartını koruyor. ( $V_{\min} = \min Q(x)$ ) Ama, kuantum mekaniğinde  $E$  süreksiz olmak zorunda değildir. Genelde  $L$  operatörünün izole olunmuş dislepe kümesi ve birkaç aralıkları dolduran süreksiz enerji değerleri olabilir. Bunlara  $L$  operatörlerinin spektrumları denir. Kuantum operatörünün öz fonksiyonlarının hepsi kuadrati ile integrallenebilme olmayabilir. Böyle fonksiyonlar dalga fonksiyonu oluştururlar. Çünkü onların olasılık kuralını sağlamıyorlar. Böyle normalleşmiş dalga fonksiyonuna genelleşmiş dalga fonksiyonu denir. Örneğin, impuls  $\hat{P}$  operatörünün oluşturduğu

$$\hat{P}({}_k y(x)) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}({}_k y(x)) = (\hbar k)({}_k y(x)) \quad (72)$$

denkleminin çözümü  $p = \hbar k$  özel değerine karşı gelen  ${}_k y(x)$  çözümü denelleşmiş dalga fonksiyonu olmaktadır.

(72) çözümü,

$$y(x, k) = b(k)e^{ikx} \quad (73)$$

$b(k)$  – sabittir.

Bu türlü impulsun özel durumları fiziksel olarak dalga fonksiyonu oluşturmaz ama, kuantum mekaniğinde onlardan karesi ile integrallenebilen dalga fonksiyonlarını seriye ayırmak için temel fonksiyonlar gibi kullanılmaktadır. Bu ise pratik olarak Fourier analizi olmaktadır. Bizim amacımıza yetişmek için dalga fonksiyonuna matematiksel olarak onun  $L_2(\mathfrak{R})$  dahil olmasından daha ciddi koşullar söylememiz gerekiyor.

Dalga fonksiyonunun süreksiz diferansiyellenen ve mutlak integrallenebilen olması, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y'(x)| dx < \infty ,$$

onun  $L_2(\mathfrak{R})$  dahil olmasını temin ediyor. (Bu Cauchy –Schwartz eşitsizliğinden çıkmaktadır.) Ayrıca, bu koşulun sağlanması bize Fourier analizini kullanmağa imkan sağlamaktadır. Analizden bellidir ki, süreksiz diferansiyellenebilen ve mutlak integrallenebilen fonksiyonlar için ,

$$y^t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{y}(k) dk, \quad (74)$$

veya

$$y^t(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} y^t(x) dx \quad (75)$$

integral gösterileri var olmaktadır.

$e^{ikx} \tilde{y}^t(k)$  ifadelerine  $y^t$  fonksiyonlarının modaları denir. Yalnız bu durumda, eğer  $v(x) \equiv 0$ ,  $y(x)$  (66) denklemini sağlar. Eğer,

$E = \hbar^2 \frac{k^2}{2m}$  stasiorar Schrödinger denklemi, potansiyel sıfıra eşit olduğu durumda böyle olabilir.

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] y(x, t) = 0 \quad (76)$$

(76) denkleminin genel çözümü,

$$Y(x, k) = b(k)e^{ikx} + a(k)e^{-ikx}, \quad k > 0 \quad (77)$$

gibi olmaktadır.  $V(x) = 0$  olduğu durum (76) denklemi ile ifade olunan parçacığın serbest hareketini modellemektedir. Bu ise parçacığın klasik mekanikte olduğu gibi doğrusal hareketine denk gelir. Serbest zamana bağlı Schrödinger denkleminin genel çözümü

$$y^t(x) = \int_0^{\infty} Y(x, k) e^{\frac{ik^2 t \hbar}{2m}} dx \quad (78)$$

gibi olmaktadır. Bu ifade enerji ve impulsun öz fonksiyonları ile ifade edilmiş Fourier integrali olmaktadır. Bunlar aynı zamanda müşahideki tarafından ölçülebilir.

$y^t(x)$  fonksiyonu iki kısımdan oluşmuştur.

$$y^t_+(x) \text{ ve } y^t_-(x),$$

burada

$$y^t_+(x) = \int_0^{\infty} b(k) e^{i\left(kx - k^2 \frac{t\hbar}{2m}\right)} dk, \quad (79)$$

$$y^t_-(x) = \int_0^{\infty} a(k) e^{-i\left(kx + k^2 \frac{t\hbar}{2m}\right)} dk \quad (80)$$

olmaktadır.

$y'_+(x)$  sağ tarafa dağılan,  $y'_-(x)$  ise sol tarafa dağılan dalgalar oluştururlar. Böyle olan durumda biz stasiorar Schrödinger denklemini göz önüne alırsak,

$$y(x, k) = b(k)e^{ikx} + a(k)e^{-ikx} \quad (81)$$

ifadesine yukarıda sözünü ettiğimiz iki dalganın superpozisyonu gibi dikkate almak gerekir ve bu dalga  $\hbar k$  özdeğerine karşılık gelen impuls öz fonksiyonu olan ve sağa dağılan koşan bir dalga oluşturmaktadır. Ayrıca sola doğru koşan dalga  $-\hbar k$  özdeğerine karşılık gelmektedir.

Şimdi  $v \neq 0$  olduğu duruma geleyim. Farz edelim ki,  $v(x) \rightarrow 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Eğer kuant parçacığı  $-\hbar k$  impulsu ile  $-x = +\infty$  hareket ediyorsa, şunlar olabilir. Parçacık potansiyelin çekirdeğinden gelerek oradan  $-\hbar k$  impulsu ile gelecek ve  $x \rightarrow -\infty$  yönüne doğru hareket edecek ve yere serbest olacak. Ama böyle durumda olabilir. Parçacık potansiyelin baryerden yansıyarak  $x = \infty$  tarafa  $+\hbar k$  impulsu ile hareket edecektir. Bu iki durum klasik mekanikte aynı zamanda olamaz. Ama, kuantum mekaniğinde olabilir.

Noustasionar durumda başlangıç dalga paketi sonsuzluktan hareket ederek, potansiyel alanına düştükçe o iki Fourier modalarına ayrılır. Paketin bir kısmı baryeri dolarak geçmekte devam ediyor.  $x \rightarrow -\infty$  gibidir. Yerde kalan kısmı geriye döner.

Gayses potansiyeli

$Q(x) = 2e^{-x^2}$  olduğunda buna Gauss potansiyeli denir.

## 5. SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN BAZI UYGULAMALARI

### 5.1 Delta Potansiyel

Aşağıdaki potansiyeli göz önüne

$$Q(x) = Q_0 \delta(x) \quad (82)$$

alalım. Burada  $\delta(x)$  - Dirak fonksiyonu olmaktadır, ve Dirak fonksiyonuna Gauss potansiyeller  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 \alpha^2}$  ailesinin  $\alpha \rightarrow -\infty$  olduğunda limiti gibi bakmak olur.

(82) potansiyeli için Schrödinger denklemi



$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 + Q_0 \delta(x) \right] \varphi(x, k) = 0 , \quad (83)$$

olmaktadır.

$\delta(x)$  fonksiyonu  $x \neq 0$  olduğu noktalarda sıfıra eşit olduğundan onu serbest parçacık gibi kabul edebiliriz.  $x = 0$   $\delta(x)$  fonksiyonu aşağıdaki sınır koşulu ortaya çıkarır. (83) denklemini  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  aralığında integralleyelim.

$$\left[ \frac{d}{dx} \varphi(x, k) \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{Q_0 \delta(x) + k^2\} \varphi(x, k) dx = 0 . \quad (84)$$

Eğer,  ${}_k\varphi$  fonksiyonu  $x = 0$  noktasında sürekli olduğunu var sayarsak ve  $\delta(x)$ ' in özelliklerini kullanırsak  $\varepsilon \rightarrow 0$  olduğunda

$$\frac{d}{dx}({}_k\varphi)(0^+) - \frac{d}{dx}({}_k\varphi)(0^-) = Q_0(\varphi_k(0)) , \quad (85)$$

elde ederiz. Elde edilen eşitlik  ${}_k\varphi$  fonksiyonun 1. türevinin de sürekli olması koşuluna zıt olmaktadır.  $\varphi(x, k)$  fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} b(k)e^{ikx} + a(k)e^{-ikx} , & x \rightarrow +\infty \\ e^{-ikx} , & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (86)$$

${}_k\varphi$ ' nın  $x = 0$ ' da sürekli olmasından

$$a(k) + b(k) = 1 , \quad (87)$$

ve (85) koşulundan

$$ik - ik[a(k) - b(k)] = -Q_0 . \quad (88)$$

elde ederiz. Bu iki denklemden

$$a(k) = 1 + \frac{Q_0}{2ik} , \quad b(k) = -\frac{Q_0}{2ik} \quad (89)$$

olarak buluruz. Bulunan ifadelerin doğruluğunu  $|a|^2 - |b|^2 = 1$  eşitliği ile kontrol edebiliriz. Bu koşul itimal akının korunması kanunu olmaktadır.

Eğer,  $k$ ' nın sanal olduğunu kabul etsek (bu koşul negatif enerjinin varlığını gösterir.)  ${}_k\varphi$  - fonksiyonunu  $a(k)$ ' nın kompleks  $(k)$  düzleminin pozitif kısmında

sıfıra eşitliği koşulu çerçevesinde, normlaştırmak mümkündür.  $Q_0 > 0$  kabul edersek

$a(k)$ ' nın sıfırı  $k = \frac{iQ_0}{2}$  sanal ekseninin pozitif kısmında yerleşir.

Bu koşullar çerçevesinde (86) çözümü için

$$\varphi\left(x, \frac{iQ_0}{2}\right) = e^{-Q_0|x|/2} \quad (90)$$

ifadesini elde ederiz.

Eğer, dalga fonksiyonunu kuantum mekaniği açısından ele alırsak normlaştırma bu durumda  $L_2(\mathfrak{R})$  anlamında kast edilmektedir, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(x)|^2 dx = 1$$

olması gerekiyor.

(82) fonksiyonu bu anlamda normlaştırarak normlaşmış fonksiyonu  $\sqrt{c}\varphi\left(x, \frac{iQ_0}{2}\right)$  oluyor, burada

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \varphi\left(x, \frac{iQ_0}{2}\right) \right]^2 dx = \frac{2}{Q_0} \quad (91)$$

gibi elde edilir. Bu durumda normlaştırma kuantum mekaniği anlamındaki normlaşmış fonksiyonunun aynısı olmaktadır. Çünkü  $\varphi\left(x, \frac{iQ_0}{2}\right)$  real fonksiyonu olmaktadır. (90)

formülü ile tanımlanan dalga fonksiyonu  $x = 0$  merkez noktasında yani potansiyelin lokalleştiği alandaki parçacığın hareketini ifade eder. Bu türlü karakterlere bağımlı hareketler denir. Bu durum  $Ay$ ' in yer etrafındaki hareketinin benzeri olmasıdır.

## 5.2 Dikdörtgen Forumlu Potansiyel Çukuru

Aşağıdaki potansiyeli göz önüne alalım.

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0, & |x| \leq \alpha, \\ 0, & |x| > \alpha, \end{cases} \quad (92)$$

Bu durumda Schrödinger denklemi

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 + Q_0 \right] \varphi(x, k) = 0, \quad |x| \leq \alpha, \quad (93)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] \varphi(x, k) = 0 \quad |x| > \alpha. \quad (94)$$

şeklinde olmaktadır. Bu denklemlere aşağıdaki koşulları sağlayan  $x > \alpha$ ,  $|x| < \alpha$  ve

$x < -\alpha$  bölgeleri için dalga fonksiyonlarını yazalım.  $({}_k \varphi)$  fonksiyonu ve  $({}_k \varphi)'$   $x = +\infty$  sürekli fonksiyonlardır.

$$\varphi(x, k) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x \leq \alpha, \\ B(k, \zeta) e^{i\zeta x} + A(k, \zeta) e^{-i\zeta x}, & |x| \leq \alpha, \\ b(k, \zeta) e^{ikx} + a(k, \zeta) e^{-ikx}, & x \geq \alpha, \end{cases} \quad (95)$$

${}_k \varphi$  fonksiyonunun  $x = +\infty$  sürekli olmasından  $\zeta^2 = k^2 + Q_0^2$ .

$$A e^{i\zeta \alpha} + B e^{-i\zeta \alpha} = e^{ik\alpha}, \quad (96)$$

$$A e^{-i\zeta \alpha} + B e^{i\zeta \alpha} = a e^{-ik\alpha} + b e^{ik\alpha}, \quad (97)$$

$$A e^{i\zeta \alpha} - B e^{-i\zeta \alpha} = \frac{k}{\zeta} e^{ik\alpha}, \quad (98)$$

$({}_k \varphi')$  fonksiyonun sürekli olmasından ise

$$A e^{-i\zeta \alpha} - B e^{i\zeta \alpha} = \frac{k}{\zeta} (a e^{-ik\alpha} - b e^{ik\alpha}). \quad (99)$$

$$A(k, \zeta) = \frac{1}{2} e^{-i\zeta \alpha} \left( 1 + \frac{k}{\zeta} \right) e^{ik\alpha}, \quad B(k, \zeta) = \frac{1}{2} e^{i\zeta \alpha} \left( 1 - \frac{k}{\zeta} \right) e^{ik\alpha}. \quad (100)$$

(96) ve (98) den

$$a(k, \zeta) = \frac{1}{2} e^{ik\alpha} \left( 1 + \frac{\zeta}{k} \right) A e^{-i\zeta \alpha} + \left( 1 - \frac{\zeta}{k} \right) B e^{i\zeta \alpha}, \quad (101)$$

elde ederiz. Aynı yolla (98) ve (100)' de

$$b(k, \zeta) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\zeta}{k} \right) A e^{-i\zeta\alpha} + \left( 1 + \frac{\zeta}{k} \right) B e^{-ik\alpha} . \quad (102)$$

$$a(k, \zeta) = e^{2ik\alpha} \left[ \cos 2\zeta\alpha - \frac{i}{2} \left( \frac{\zeta}{k} + \frac{k}{\zeta} \right) \sin 2\zeta\alpha \right] , \quad (103)$$

$$b(k, \zeta) = \frac{i}{2} \left( \frac{\zeta}{k} - \frac{k}{\zeta} \right) \sin 2\zeta\alpha , \quad (104)$$

olduğunu buluruz. (101) ve (102)' den a ve b

$$a(k, \zeta) \rightarrow a(k) = 1 - \frac{i\bar{Q}_0}{2ik} , \quad \alpha \rightarrow 0 , \quad (105)$$

$$b(k, \zeta) \rightarrow b(k) = \frac{i}{2k} \bar{Q}_0 , \quad \alpha \rightarrow 0 , \quad (106)$$

şeklinde elde ederiz. Ele aldığımız ifadeleri (101) ve (102) ile karşılaştırdığımızda (96) ve (98)' den

$$a(k, \xi) = e^{2ik\alpha} \left[ \cos 2\xi\alpha - \frac{i}{2} \left( \frac{\xi}{k} + \frac{k}{\xi} \right) \sin 2\xi\alpha \right] , \quad (107)$$

$$b(k, \xi) = \frac{i}{2} \left( \frac{\xi}{k} - \frac{k}{\xi} \right) \sin 2\xi\alpha . \quad (108)$$

bu ifadeler  $|a(k, \xi)|^2 - |b(k, \xi)|^2 - 1$  koşulunun reel  $k$  ve  $\xi$  için korurlar. Bu ise ihtimal

akışının korunmasına denk gelir ve bu sayı tüm  $x$  ' ler için  $-\frac{k}{m}$  'e eşit olmaktadır.

$Q_0 = \bar{Q}_0/2\alpha$  olmakla  $\alpha \rightarrow 0$  limiti gerçek  $\xi\alpha \rightarrow 0$  ve  $\xi \sin 2\xi\alpha \rightarrow \bar{Q}_0$  .  $\alpha \rightarrow 0$  yaklaştığında (107) ve (108) denklemleri aşağıdaki ifadelere dönüşür.

$$a(k, \xi) \rightarrow a(k) = 1 - \frac{i\bar{Q}_0}{2k} \quad \alpha \rightarrow 0 , \quad (109)$$

$$b(k, \xi) \rightarrow b(k) = \frac{i}{2k} \bar{Q}_0 \quad \alpha \rightarrow 0 , \quad (110)$$

burada  $a(k)$  ve  $b(k)$   $\delta(x)$  potansiyel çukurunda olduğu gibi ifadeler vermektedir. Zaten bu sonuçta beklenen bir sonuç olmaktadır. Çünkü;

$$Q(x, \alpha) = \begin{cases} -Q_0/2\alpha, & |x| \leq \alpha, \\ 0, & |x| > \alpha, \end{cases} \quad (111)$$

potansiyeller ailesi  $\alpha \rightarrow 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Q(x, \alpha) = -\bar{Q}_0 \delta(x). \quad (112)$$

Çünkü  $\delta(x)$  potansiyel ( $Q_0 > 0$ ) bağlı hale sahip olduğundan beklemek mümkündür kü potansiyel çukuru da aynı bağımlı hale sahip olmalıdır. Bunları bulmamız için  $a(k, \xi)$  fonksiyonunun sanal  $k = i\kappa$  ( $\kappa > 0$ ) köklerini incelemek gerekmektedir.  $k = i\kappa$  olduğunda  $a(k, \xi)$  olmaktadır.

$$a(i\kappa, \chi) = e^{-\kappa\alpha} \left( \cos 2\chi\alpha - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi}{\kappa} - \frac{\kappa}{\chi} \right) \sin^2 \chi\alpha \right), \quad (113)$$

burada  $\chi^2 = (Q_0 - \kappa^2)^{1/2}$ . Eğer  $\chi^2 < 0$  ise kolayca göstermek mümkündür ki;  $a(i\kappa, \chi)$  hiçbir sifıra sahip değildir. Lakin  $\chi^2 > 0$ ,  $k = i\kappa$  olduğunda  $a(k, \chi)$  fonksiyonun sıfırları

$$tg 2X\alpha = \frac{2xX}{X^2 - x^2}. \quad (114)$$

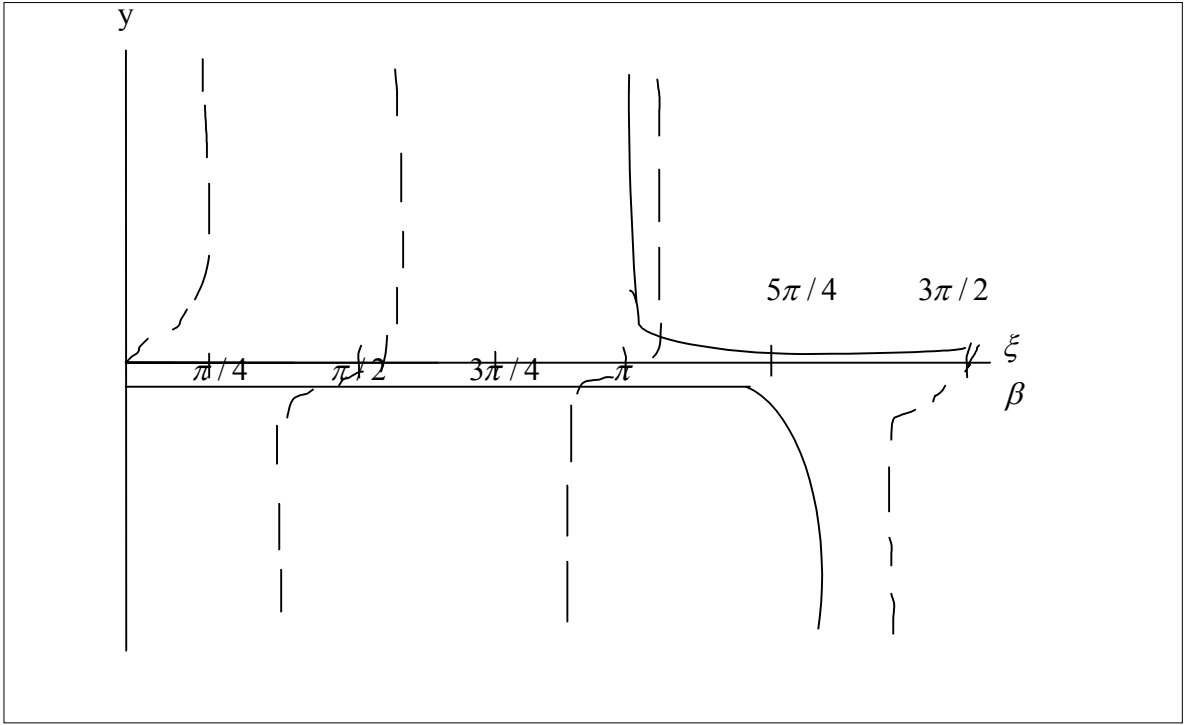
koşulu çerçevesinde mevcut olmaktadır.  $\xi = \chi\alpha$  ve  $\beta^2 = Q_0\alpha^2$  değişkenlerini içerirsek

$$tg 2\xi = \frac{2(\beta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(2\xi^2 - \beta^2)}. \quad (115)$$

şekline düşer. Bu denklemin kökünü  $\xi \leq \beta$  olduğu durumlar için inceleyelim. (115) denklemini grafik yoluyla çözmek mümkündür. Bunun için; fonksiyonların grafiklerini çizip bunların nerede kesiştiklerini bulmak gerekmektedir.

Bu şekilden görüldüğü gibi eğer  $N\pi/2 \leq \beta \leq (N+1)\pi/2$ , olduğunda denklemin

$(N+1)$  tane  $\{\gamma\}_i^{N+1}$  çözümü mevcut olmaktadır. Eğer  $Q_0 = \bar{Q}_0/2\alpha$ , ise  $\beta \rightarrow 0$  ve  $\alpha \rightarrow 0$ , biz gözlüyoruz ki  $\alpha \rightarrow 0$  tek bir bağımlı durum elde ediliyor. Bu da yukarıda incelediğimiz  $\delta(x)$  potansiyelindeki durumun aynısı olmaktadır. Sadelik için potansiyeli



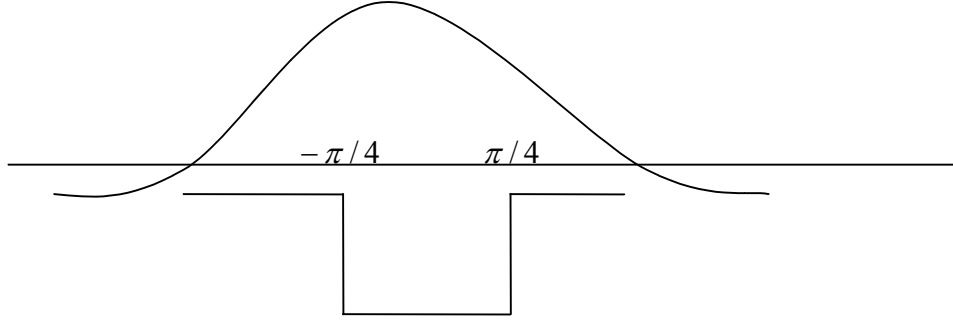
Şekil 4

$$Q(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq \pi/4, \\ 0, & |x| > \pi/4, \end{cases} \quad (116)$$

ele alalım. Açık ki; bu potansiyel tek bir bağlı duruma sahiptir ve enerjisi  $E = -\hbar^2 / 2m$  olmaktadır. Ayrıca da bu durum için dalga fonksiyonu

$$\varphi(x, i) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq \pi/4, \\ e^{-\pi/4} \sqrt{2} \cos x, & |x| \leq \pi/4, \\ e^x, & x \leq -\pi/4, \end{cases} \quad (117)$$

gibi olmaktadır. (117) fonksiyonunun grafiği



Şekil 5

gösterildiği gibidir.

Normlaştırılmış dalga fonksiyonu  $\sqrt{C}\varphi(x,i)$  şeklinde olmaktadır ve

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x,i)]^2 dx = \int_{\pi/4}^{\infty} e^{-2x} dx + 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-\pi/2} \cos^2 x dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-\pi/4} e^{2x} dx = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) e^{-\pi/2} . \quad (118)$$

$\varphi(x,i)$  fonksiyonu reel değerler aldığından bu fonksiyonun normlaşmış durumu kuant mekaniğindeki normlaştırma ile aynı olmaktadır. Parçacığın çukurda olma ihtimali  $(2 + \pi/4 + \pi)$  olmaktadır ki bu da yaklaşık olarak %70'e eşit olmaktadır.

Eğer ,  $k = \sqrt{2}$  enerjisi  $E = h^2 / m$  olan serpilme dalga fonksiyonunun ifadesi

$$\varphi(x,2)=\begin{cases} \exp(-i\sqrt{2}x), & x \leq -\pi/4, \\ -\exp(i\pi/2\sqrt{2})\{\sin 2x + (\cos 2x)/\sqrt{2}\}, & |x| \leq \pi/4, \\ \exp\{-i\sqrt{2}x + i\pi(1+1/\sqrt{2})\}, & x \geq \pi/4, \end{cases} \quad (119)$$

gibi olmaktadır.

### 5.3 KdV Denkleminin Schrödinger Denklemine İndirgenmesi

Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$u_t - 6uu_x + u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (120)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (121)$$

Burada (120) ve (121) problemin zayıf çözümü olması için,  $u_0(x)$  gereken koşulları korumaktadır.

Aşağıdaki değişken dönüşümünü yapalım.

$$u = v^2 + v_x, \quad (122)$$

Burada  $v = v(x,t)$  olmaktadır. (122)'yi (120)'de yerine yazarsak

$$2vv_t + v_{xt} - 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) + 6v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0. \quad (123)$$

sonuncu denklemi

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0. \quad (124)$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer  $v$  (122) denkleminin çözümü ise bu denklemin çözümü aynı zamanda bize (120) KdV denkleminin çözümünü vermektedir. Altını çizelim ki; eğer  $u$  (122) denklemini korursa (122)'ye biz  $v$  fonksiyonuna göre Riccati denklemi gibi bakabiliriz. Bu denklemde

$$v = \frac{\psi_x}{\psi}, \quad (125)$$

değişken dönüşümü yaparsak;  $\psi$  fonksiyonu

$$\psi_{xx} - u\psi = 0. \quad (126)$$

denkleminin çözümü olmaktadır. Dolayısıyla (126) denkleminin içerdiği  $u(x,t)$  fonksiyonu (120) KdV çözümü olmaktadır. KdV denklemi  $x = x + 6\lambda t$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  olmak koşulu ile bu değişken dönüşümüne invariant kaldığından biz (126) denkleminde fonksiyonu  $u - \lambda$  gibi değiştirebiliriz. Dolayısıyla



$$L\psi = \lambda\psi \text{ ,} \quad (127)$$

elde ederiz. Burada

$$L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \text{ .} \quad (128)$$

olmaktadır. Bu ise Schrödinger denklemi olur.

## 6. SONUÇLAR

Tezde incelenen ve elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür.

1. Birinci basamaktan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü fourier dönüşümü yardımı ile ele alınmıştır.
2. Lax formalizmi kullanılarak bazı sınıf nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler lineer Schrödinger denklemine dönüştürülmüştür.
3. Bazı sınıf Schrödinger denkleminin gerçek çözümleri ele alınmış ve incelenmiştir.
4. KdV denkleminin lineer Schrödinger denklemine dönüştürülmüştür

## **7. KAYNAKÇA**

1. Solitions and Nonlinear.

R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris

2. Solitions and Nonlinear Wave Equations.

Academic Pres, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers)

London Orlando San Diego New York Toronto Montreal Sydney Tokyo.

3. Differantial Equations.

Paul Blachard, Robert Devaney, Glen R. Hall September 2005

## ÖZGEÇMİŞ

28.08.1976 yılında Tokat ili Reşadiye ilçesinde doğdum. İlk ve orta okulu Mehmet Niyazi Altuğ ilköğretim okulunda, lise öğrenimini Sultanahmet Teknik Lisesi'nde tamamladım. 1994 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 1999 yılında İstanbul'da M.E.B'a bağlı bir kurumda matematik öğretmeni olarak göreve başladım. 2000 yılının Nisan ayında vatani görevime Adapazarı 1. Piyade Tugay Komutanlığı'nda başladım ve Erzurum'da Aşağı Özbağ Gaziler İlköğretim okulunda matematik öğretmeni olarak tamamladım. 2006 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladım. Halen matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.