

**BOZUCU DIŞLAMA AÇISINDAN
EN UYGUN KUTUP YERLERİNİN BELİRLENMESİ**

Ceyda DOĞAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EKİM 2008
ANKARA**

Ceyda DOĞAN tarafından hazırlanan BOZUCU DIŞLAMA AÇISINDAN EN UYGUN KÖK YERLERİNİN BELİRLENMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarız.

Doç.Dr.Metin U. SALAMCI

.....

Tez Danışmanı, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN

.....

Ortak Tez Danışmanı, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yücel ERCAN

.....

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, TOBB ETÜ

Doç. Dr. Metin U. SALAMCI

.....

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı , Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN

.....

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı , ODTÜ

Prof. Dr. Nizami AKTÜRK

.....

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı , Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Şefaatdin YÜKSEL

.....

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı , Gazi Üniversitesi

Tarih: 22/10/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ceyda DOĞAN

**BOZUCU DIŞLAMA AÇISINDAN
EN UYGUN KÖK YERLERİNİN BELİRLENMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ceyda DOĞAN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ekim 2008

ÖZET

Bu tez çalışmasında; yüksek mertebeden, doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için optimizasyon problemi ele alınmaktadır. Bu problemde amaç; doğrusal karesel düzenleyici ile kontrol edilen sistemin birim basamak bozucu karşısında tasarım parametrelerine göre en uygun (optimal) kutup yerlerinin bulunmasıdır. Tasarım parametreleri çıkışın maksimum aşma değeri, tepe zamanı ve durağan durum değeri olarak alınmaktadır. Bu yaklaşım metodu çok değişkenli sistemler için de uygulanabilir olup bu çalışmada sadece tek girişli-tek çıkışlı sistemlere uygulanabilirliği üzerinde durulmuştur. Bu amaçla tez çalışmasında iki örnek ele alınmıştır. Bu örnekler kontrol sistemlerindeki kullanım sıklığı nedeniyle, ters sarkaç mekanizması ve top-kiriş mekanizmasıdır.

Bilim Kodu : 914.1.084

Anahtar Kelimeler :En uygun kontrol, geçici cevap özellikleri, kök yeri seçimi, bozucu dışlama

Sayfa Adedi : 110

Tez Yöneticisi :Doç. Dr. Metin U. SALAMCI

OPTIMAL POLE PLACEMENT FOR DISTURBANCE REJECTION

(M. Sc. Thesis)

Ceyda DOĞAN

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

October 2008

ABSTRACT

In this thesis; an optimization problem is considered for higher order, linear time invariant systems. The aim is to find the optimal pole locations of the system in the complex plane such that by using linear quadratic regulator, some pre-defined design specifications are guaranteed for a unit step disturbance input. The design specifications are the maximum overshoot, peak time and steady state value of the output. Although the method proposed in this thesis can be applied to multi input multi output systems, only single input-single output cases are considered. For this purpose, in this study two examples are given. These are the inverted pendulum mechanism and ball and beam mechanism, which are commonly used in control system designs.

Science Code : 914.1.084

**Key Words : Optimum control, transient response specifications,
optimal pole placement, disturbance rejection**

Page Number : 110

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Metin U. SALAMCI

TEŞEKKÜR

Öncelikle benim bugünlere gelmemi sağlayan aileme, özellikle büyük fedakarlıklarda bulunan anneanneme teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocalarım Doç. Dr. Metin U. SALAMCI ve Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN' e teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda fırsat buldukça değerli fikirleriyle bana destek olan ve farklı bakış açıları kazandıran çok kıymetli hocam Prof. Dr. Yaşar T. HONDUR' a teşekkür ederim. Kendisi ne kadar uzakta olsa da yardım elini esirgemeyen ve her Matlab programında takıldığım yerlerde bana destek veren, kimi zaman endişelerimi paylaştığım kimi zaman da umutlarıma ortak olan sevgili hocam Arş. Gör. Dr. Tuncay KARAÇAY' a çok teşekkür ederim. Tez çalışmamın her aşamasında yanımda olan, beni her zaman destekleyen ve moral veren çok değerli arkadaşım Mak. Müh. Muhsin ÜNAL' a en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Bu tez çalışması süresince sağladığı imkanlardan dolayı Türkiye Cumhuriyeti Devleti' ne ve yurt içi bursuyla destek sağlayan TÜBİTAK' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN ÇALIŞMA.....	12
2.1. Sistemlerin Zaman Cevabı.....	12
2.2 Kutup (Kök) Yerleştirme Metodu.....	16
2.3. Doğrusal Karesel Regülatör (Düzenleyici) (LQR).....	22
3. DOĞRUSAL YÜKSEK MERTEBEDEN SİSTEMLERİN GEÇİCİ CEVAP PARAMETRELERİNE UYGUN KUTUP YERLERİNİN BULUNMASI	25
3.1. Problemin Çıkarılışı.....	25
3.2. Doğrusal Karesel (LQ) Problem Setinin Çözümünün Açık Tanımı.....	31
3.3. Tek Girişli Bir Sisteme Bozucu Uygulanması Durumu.....	36
3.4. Algoritma.....	40
3.4.1. Birim basamak bozucu uygulanmış tek girişli sistemler için algoritma.....	41
3.4.2. Temel algoritma.....	45
4. UYGULAMA: TEK GİRİŞLİ – TEK ÇIKIŞLI (SISO) SİSTEM ÖRNEĞİ.....	50

Sayfa

4.1. Ters Sarkaç Mekanizması	50
4.1.1. Sistemin durum denklemleri.....	51
4.1.2. Ters sarkaç mekanizmasına önerilen yöntemin uygulanması	53
4.1.3. Benzetim sonuçları.....	57
4.2. Top - Kiriş Mekanizması	69
4.2.1. Sistemin durum denklemleri.....	70
4.2.2. Sistemin doğrusallaştırılması.....	72
4.2.3. Benzetim sonuçları.....	75
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	81
KAYNAKLAR.....	83
EKLER.....	88
EK-1 Sistemlerin tasarım parametrelerini ayarlamak için geliştirilen algoritmanın akış diyagramıyla gösterimi.....	89
EK-2 Kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmüş sistemin doğrusal karesel (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nin bulunması ile ilgili akış diyagramı.....	92
EK-3 Algoritmanın beşinci adımında verilen ağırlık matrisi R'nin bulunmasını gösteren akış diyagramı.....	96
EK-4 Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası.....	98
EK-5 Kontrol edilebilir kanonik form için, doğrusal kuadratik (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nin hesaplanmasını içeren fonksiyon	106
EK-6 R matrisinin bulunması ile ilgili fonksiyon.....	108
ÖZGEÇMİŞ.....	110

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. Ters sarkaç mekanizması parametreleri	51
Çizelge 4.2. Ters sarkaç mekanizması için istenilen %2-%20 aralığındaki maksimum aşma ve buna karşılık gelen tepe zamanı ve çıkışın durağan-durum değerleri	65
Çizelge 4.3. Top-Kiriş mekanizması parametreleri.....	69
Çizelge 4.4. Top-kiriş mekanizması için istenilen %2-%20 aralığındaki maksimum aşma ve buna karşılık gelen tepe zamanı ve çıkışın durağan-durum değerleri.....	78

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. İkinci dereceden bir sistemin birim basamak cevabı	14
Şekil 2.2. İkinci mertebeden bir sistemin sönüm oranına göre birim basamak için belirlenmesi	16
Şekil 3.1. Bozucu uygulanmış bir sistemin blok diyagramla gösterimi.....	36
Şekil 4.1. Ters sarkaç mekanizması	50
Şekil 4.2. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda normalize çıkışın gösterimi.....	58
Şekil 4.3. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda durum değişkenlerinin davranışı.....	59
Şekil 4.4. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda çıkışın zamanla değişim.....	60
Şekil 4.5. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda sisteme uygulanan kontrol girişi.....	61
Şekil 4.6. Ters sarkaç mekanizması için ikinci durumda normalize çıkışın gösterimi.....	62
Şekil 4.7. Ters sarkaç mekanizması için ikinci durumda durum değişkenlerinin davranışı.....	63
Şekil 4.8. Ters sarkaç mekanizması için ikinci durumda çıkışın zamanla değişim.....	63
Şekil 4.9. Ters sarkaç mekanizması için ikinci durumda sisteme uygulanan kontrol girişi.....	64
Şekil 4.10. Ters sarkaç mekanizması için tasarlanan değerler için bulunan kutup bölgesi.....	66
Şekil 4.11. Ters sarkaç mekanizmasında verilen maliyet fonksiyonu İçin en uygun kutbun yeri.....	67

Şekil	Sayfa
Şekil 4.12. Ters sarkaç mekanizmasında kutup bölgesinde maksimum aşma ve çıkışın hatası ön plana çıkarılarak bulunan maliyet fonksiyonu için en uygun kutbun gösterimi.....	68
Şekil 4.13. Top-kiriş mekanizması	69
Şekil 4.14. Top-kiriş mekanizması için normalize çıkışın gösterimi.....	75
Şekil 4.15. Top-kiriş mekanizması için durum değişkenlerinin davranışı..	76
Şekil 4.16. Top-kiriş mekanizması için çıkışın zamanla değişim.....	76
Şekil 4.17. Top-kiriş mekanizması için sisteme uygulanan kontrol girişi.....	77
Şekil 4.18. Top-kiriş mekanizması için tasarlanan değerler için bulunan kutup bölgesi.....	79
Şekil 4.19. Top-kiriş mekanizmasında verilen maliyet fonksiyonu için en uygun kutbun yeri.....	80

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
A	Sistem matrisi
B	Kontrol matrisi
C	Çıkış matrisi
u	Kontrol girişi
M_p	Maksimum aşma
P.O.	Aşma yüzdesi
t_p	Tepe zamanı
t_s	Yerleşme zamanı
t_r	Yükselme zamanı
t_d	Gecikme zamanı
M	Kontrol edilebilirlik matrisi
K	Geri besleme kazanç katsayısı
ω_n	Doğal frekans
ξ	Sönüm oranı
T	Dönüşüm matrisi
PI	Karesel performans indisi
Q	Simetrik, pozitif tanımlı bir matris
R	Simetrik, pozitif tanımlı bir matris
P	Simetrik, pozitif tanımlı bir matris
$\hat{P}$	Simetrik, pozitif tanımlı bir matris
u_{op}	Optimum kontrol
$\Re$	R Matris setinin çözüm kümesi
r	Pozitif tanımlı bir matris (SISO)
θ	Sarkaç konum açısı

Simgeler**Açıklama**

m	Sarkaç kütlesi
l	Sarkaç uzunluğu
b	Sürtünme katsayısı
g	Yerçekimi ivmesi
J	Maliyet fonksiyonu
α_1	Maliyet fonksiyonu katsayısı
α_2	Maliyet fonksiyonu katsayısı
α_3	Maliyet fonksiyonu katsayısı

Kısaltmalar**Açıklama**

SISO	Tek girişli-tek çıkışlı sistem
MIMO	Çok girişli-çok çıkışlı sistem
LQR	Doğrusal karesel düzenleyici

1. GİRİŞ

Bir kontrol sistemi tasarlanırken pek çok kıstas göz önünde bulundurulur. Tasarımcının ilk olarak sağlaması gereken, sistemin kararlı davranışdır. Kararlılık sağlandıktan sonra sistem performansının istenilen ölçütleri sağlayacak biçimde ayarlanması gerekir. Kararlılık ve sistem performansı direkt olarak kapalı çevrim kutup-sıfır yapılandırmasıyla ilişkilidir [1-3].

Doğrusal kapalı çevrim sistemlerde kararlılık; kapalı çevrim kutuplarının s-düzlemindeki yerleşimi ile bulunur. Eğer herhangi bir kutup s-düzleminin sağında kalıyorsa, sistemin geçici cevabı zamanla beraber artar ve bu durum kararsız bir sistemi temsil eder. Bu nedenle doğrusal kontrol sistemlerinde kapalı çevrim kutupların s-düzleminin sağında olması istenmez. Eğer bütün kapalı çevrim kutuplar sanal eksenin sol tarafındaysa, geçici cevap sonunda denge noktasına ulaşır. Bu durum kararlı bir sistemi temsil eder. Kararlılık mutlak ve göreceli olarak sınıflandırılabilir. Mutlak kararlılık sistemin kararlı olup olmamasıyla, göreceli kararlılık ise sistemin ne kadar kararlı olduğuyla ilgilidir. Bir kontrol sisteminin mutlak kararlı olması için yeter ve gerek şart, sistemin kutuplarının karmaşık düzlemin sol yarısında bulunmasıdır [1-8].

Bütün kapalı çevrim kutupların s-düzleminin sol yarısında olması sistem performansının istenilen özellikleri karşılaması için yeterli değildir. Örneğin, kontrol sisteminin kapalı çevrim kutupları sanal eksene çok yakın bulunuyorsa, geçici durum cevabı büyük bir salınım gösterir ya da yerleşme süresi çok yavaş olabilir.

Sistem performansını iyileştirmek için birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların temeli ikinci mertebeden sistemler için bulunan sistem kutupları/kökleri ile sistemin geçici cevabı arasındaki ilişkide yatar. Bu ilişki ikinci bölümde daha ayrıntılı olarak anlatılmaktadır. İkinci mertebeden sistemler ile geçici cevap arasındaki analitik bağıntı yüksek mertebeden

sistemler için bulunamamıştır. Yüksek mertebeden sistemlerin analizini geliştirmek maksadıyla baskın kutuplardan yararlanılmıştır. Buna göre kararlı sistemler s-düzleminin sol yarısında bulunan ayrı kutup ve sıfırlara sahip olan transfer fonksiyonlarıyla gösterilirler. Baskın kutuplar analizinde baskın olmayan sistem kutuplarının sistem cevabına etkisi ihmal edilir. Normalde baskın kutup analizi tahmini olarak yapılır. Tasarımcı baskın kutupları kullanarak cevabı çizdirir. Eğer çizilen cevap tasarlanan cevaba yakınsa tüm model kullanılarak kontrol edilir [6]. Literatürde baskın kutupları bulmak için çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Martins ve ark. çalışmalarında; yüksek mertebeli sistemlerin baskın kutuplarını bulmak için bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu metot Rayleigh iterasyonlarıyla yakından ilişkili nümerik bir çalışmadır [9].

2003 yılında Martins ve Quintão çalışmalarında; çok giriş çok çıkışlı yüksek mertebeden transfer fonksiyonları için nümerik olarak baskın kutupları bulan bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu sayede bulunan baskın kutuplar yüksek mertebeli doğrusal sistemlerde model indirgeme yapabilmek için kullanılabilirler [10].

Rommes ve Martins 2007 yılında karesel baskın kutup algoritması kullanarak ikinci mertebeden transfer fonksiyonları için baskın kutupları bulmuşlardır [11].

Söylemez 2002 yılında; PID kontrolcü kullanarak baskın kutup ataması yapmıştır. Bu çalışmada verilen yöntem ile kapalı çevrim sisteminin iki kutbu istenen noktalara atanmakta, diğer kutuplar ise belirli bir sol yarı düzlem içinde kalacak şekilde sınırlandırılmaktadır [12].

Baskın kutup bulmak, araştırmacılara model mertebesi indirgeme metodu konusunda yardım etmiştir. Örneğin altıncı mertebeden bir sistem baskın kutuplar kullanılarak ikinci mertebeden bir sisteme model indirgeme ile

yakınsayabilir. Bu konuyla ilgili olarak literatürde çeşitli çalışmalar yer almaktadır.

Baki ve Munro çalışmalarında; dengelenmiş dönüşümler temeli üzerine kurulu sabitlenmiş parametre modelleri için geliştirilen model mertebesi indirgeme metodunu parametrik belirsiz modeller için uygulamıştır. İlk olarak yüksek mertebeden sistemler daha düşük mertebeden alt sistemlere ayrılarak bu alt sistemlere model mertebesi indirgeme metodu uygulanmıştır. Daha sonra bu alt sistemler tekrar toplanılarak yüksek mertebeden sisteme ulaşılmıştır [13].

Borovikov 2004 yılında yaptığı çalışmada; en uygun kontrol sistemlerinin mertebe indirgemesi için gerekli ve yeterli olan şartları sunmuştur. Hamiltonian sistemine göre mertebe indirgeme problemlerinin dinamik sistemler, gözlemlenebilir ve sabit diferansiyel formlar cinsinden çözülmesine olanak sağlar [14].

Chahlaoui ve ark. çalışmalarında; orijinal sistemin ikinci dereceden yapısını korurken indirgenmiş mertebe sistemi kurma problemini tartışmışlardır. Model indirgeme tekniğini koruyan Krylov altuzay-tabanlı ve SVD-tabanlı olmak üzere iki çeşit ikinci dereceden yapı sunulmuştur [15].

Manigandan ve ark. 2005 yılındaki çalışmalarında; durağan, doğrusal zamanla değişmeyen, sürekli sistemler için ikinci dereceden indirgenmiş bir model elde eden yeni bir şema önermişlerdir. İkinci dereceden indirgenmiş bir modelin kutup-sıfır yok etme metodu kullanılarak istenen performans özelliklerini karşılaması için bir PID kontrolcü tasarlanmıştır. Bu kontrolcüye indirgenmiş mertebe modeli eklenmiş ve kapalı çevrim cevabı gözlemlenmiştir. Kontrolcünün parametreleri istenen performans özellikleri ile bir cevap elde edilebilmesi için ayarlanmıştır. Ayarlanan kontrolcüye orijinal yüksek mertebeli sistem eklenmiş ve dengeleme işlemi için kapalı çevrim cevabı gözlemlenmiştir [16].

Chen ve White 2000 yılındaki çalışmalarında; tasarımcıların mikromekanik aygıtlar içeren yeterli sistemlerin benzetimini yapmak ve en uygun hale getirmek için bu aygıtların dinamik olarak kesin makro modellere ihtiyaç duyduklarını belirtmişlerdir. Doğrusallaştırılmış analizlerden üretilmiş Krylov alt uzaylarını kullandıran bir karesel indirgeme metodu sunmuşlardır. Sonuç bir karesel doğrusalsızlık ile indirgenmiş merteye metodudur. Metodun sonuçları doğrusal olmayan yaklaşımın doğrusallaştırılmış yaklaşımın tek başına kullanılmasından daha kesin sonuç verdiğini göstermiştir [17].

Görüldüğü gibi kapalı çevrim bir sistemin geçici cevabının karakteristiği, kapalı çevrim kutuplarıyla yakından ilişkilidir. Eğer sistem değişken çevrim kazancına sahipse, kapalı çevrim kutuplarının yeri seçilen çevrim kazancına göre değişir. Bu nedenle dolayı tasarımcı kapalı çevrim kutuplarının, çevrim kazancı değiştikçe s-düzleminde nasıl hareket edeceğini bilmek ister. Kapalı çevrim kutupları karakteristik denklemin kökleridir ve üçüncü mertebeden büyük karakteristik denklemler için bu kökleri bulmak uğraştırıcıdır. Aynı zamanda açık çevrim transfer fonksiyonunun kazancı değiştikçe kökler de değişir ve her seferinde yapılan işlemleri tekrar etmek gerekir. Bundan dolayı W.R.Evans, karakteristik denklemin köklerini bulmak için basit bir metot geliştirmiştir. Bu metoda kök eğrileri metodu denir ve sistem parametrelerinin bütün değerleri için köklerin nasıl hareket edeceğini grafiksel olarak gösterir. Bu parametreler genellikle kazançlardır. Bu metodu kullanarak tasarımcı değişen kazanç değerleri ya da eklenen açık çevrim kutup ve sıfırlarına göre kapalı çevrim kutuplarının yerinin nasıl etkilenebileceğini kestirebilir. Ancak dikkat edilmesi gereken kök eğrileri metodunun; tek giriş tek çıkışlı, doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için kullanışlı olmasıdır [2,3].

Tasarlanacak olan kontrol sistemi birden fazla giriş ve çıkıştan oluşabilir, bu durumda böyle bir sistemi analiz etmek karışık bir hal alır. Böyle sistemlerin analizi için en uygun yol durum-uzay yaklaşımıdır. Klasik kontrol teorisi giriş çıkış arasındaki ilişkiye ya da transfer fonksiyonuna dayanır. Modern kontrol teorisi ise n sayıda birinci dereceden diferansiyel denklemler şeklinde

yazılmış durum denklemlerine dayanır ve bu ifadeler vektör-matris halinde gösterilir. Vektör-matris notasyonunu kullanmak durum denklemlerinin matematiksel ifadesini kolaylaştırır.

Durum-uzay yönteminde kontrol sistemi tasarlanırken temel ve en çok kullanılan metotlardan bir tanesi kök yerleştirme metodudur [3,6]. Kök yerleştirme metodunda eğer sistem tamamıyla kontrol edilebilir ise, kapalı çevrim kutupları durum geri besleme yöntemiyle istenilen noktalara yerleştirilebilir. Tasarlanacak kapalı çevrim kutupları geçici cevabın ya da frekans cevabın gereksinimlerine göre bulunur ve seçilen uygun geri besleme kazanç matrisiyle, istenilen kapalı çevrim kutuplarına sahip olması için sistem zorlanır. Bu metotta baskın olmayan kutupların cevaba etkileri ihmal edilir. Sadece baskın kapalı çevrim kutuplarının belirtilmesinden farklı olarak (klasik kontrol yaklaşımı), kök yerleştirme metodunda bütün kapalı çevrim kutupları belirtilir [3].

Kök yerleştirme metodunda da bahsedilen geri besleme kazanç katsayısını bulmak kontrol sistemi tasarımında önem taşır. Daha iyi bir kazanç matrisi var mıdır sorusu araştırmacıları en uygun kontrol teorisine itmiştir. Bu konuda ilk ve en iyi bilinen problem doğrusal karesel kontrol problemidir (Linear Quadratic Control). Bu problemde amaç en hızlı ve en az çaba harcayarak istenilen noktaya sistemi getirebilmektir. Bu amaçla, Riccati denklem çözümlerinden yararlanılarak, durum değişkenlerine ve kontrol terimine bağlı olan karesel performans indisi minimize edilmeye çalışılmıştır. Eğer sistem kontrol edilebilir bir sistemse en uygun karesel kontrol yöntemiyle sistem kararlı olacak şekilde tasarlanır. Belirli matematiksel işlemler sonucunda bulunan geri besleme kazanç matrisi en uygun (optimum) olarak düşünülür. Bu yöntemde bütün durum değişkenlerinin geri beslenebileceği düşünülmüştür. Eğer bütün durum değişkenleri geri beslemeye uygun değilse, ölçülemeyen durum değişkenlerinin tahmini için durum gözlemcisi tasarlamak gerekir.

Kök yerleştirme ve optimum (en uygun) kontrol konusunu birleştirerek çok sayıda araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalardan bazıları ise aşağıda verilmektedir.

Koussiouris ve Bakirtzis çalışmalarında Riccati denklemlerinin çözümünü kullanmaksızın en uygun kontrol kuralını bulmaya çalışan bir metod geliştirmişlerdir. Burada performans indisini minimize edecek değer Lyapunov matris denkleminin çözümünden bulunmuştur. Bu çalışma bir çok çalışmaya Riccati çözümüne gereksinim duymadığından dolayı temel oluşturmuştur [18]

Kobayashi ve ark. çalışmalarında; kök yerleştirme tekniği ve doğrusal en uygun regülatör tekniği arasında bağlantı kurmaya çalışmışlardır. Bu amaçla Lyapunov fonksiyonlarından yararlanarak iki kapalı çevrim arasında sentez yapmışlardır [19].

Kobayashi ve Shimemura 1981 yılındaki çalışmalarında; doğrusal optimal regülatörlerin bazı özellikleri üzerinde durmuşlardır. İlk olarak çıkışın aşma sınırı hakkında bazı temel ilişkiler çıkarılmıştır. Devamında doğrusal optimal regülatör problemlerinin bir çözüm setinin açık bir tanımı ve mümkün olan bütün karesel performans indisi çıkarılmıştır. Bu çalışmada mümkün olan bütün karesel fonksiyonlar için en uygun çözüm setlerinden istenilen dinamik performansı uygulayan geri besleme kontrol yasasının seçiminde bir yöntem verilmiştir [20].

Keviczky ve Bányász çalışmalarında; çok terimli denklemlerin açık çözümlerinden kaçınan yeni bir kök yerleştirme kontrolcüsü yapısı ve düzenleyici tasarım metodunu tanıtmışlardır. Bu genel şema üzerinden temellendirilmiş tekrarlamalı kontrol düzenleyici için uygulanabilir bir strateji sunulmuş ve simülasyon örnekleriyle gösterilmiştir [21].

Sugimoto 1998 yılındaki makalesinde; bir durum geri besleme kontrol yasasının bazı kapalı-çevrim kutuplarını belirli noktalara tam olarak yerleştirdiği ve aynı zamanda bazı karesel ağırlıklar için en uygun doğrusal karesellik olan gerekli ve yeterli bir şart vermiştir. Bu en uygun kontrolün ters probleminin çözümüyle mümkündür [22].

Söylemez ve Munro 1998 yılında yaptıkları çalışmalarında; doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin kısmi kutup yerleştirmesi için yeni bir teknik sunmuşlardır. Bu yeni metodu kullanarak min (n, φ) kutuplarını isteğe bağlı olarak belirlemek hemen hemen her zaman mümkün olmaktadır [23].

Franzé ve Muraca çalışmalarında; kök yerleştirme problemini doğrusal zamanla değişmeyen çok değişkenli sistemler için statik çıkış geri beslemeyle ve kontrol çabasını da en aza indirgeyerek ele almışlardır. Bu çalışmada temel amaç geri besleme çıkış matrisinin kazanç katsayısının açık parametrelendirilmesinin kullanımı ile diğer kontrol özelliklerinin sağlanmasıdır. Kontrol çabasının en aza indirgenmesi performans indisinin değeri üzerine kurulu optimizasyon algoritması ile gerçekleştirilir. Nümerik sonuçlar hem kontrol çabasının en aza indirgenmesini hem de sistemin gürbüzlüğünü sağlamıştır. Ancak bu optimizasyon problemi için analitik bir cevap bulunamamıştır [24].

Fujinaka ve Omatu çalışmalarında; belirlenen kapalı çevrim kökleri ile doğrusal karesel düzenleyiciyi kuracak bir metot sunmuşlardır. Bu tasarım metodunda tek bir reel kök ya da karmaşık eşlenik kök çiftini zaman içerisinde kaydırma başarılı bir şekilde kullanılmıştır [25].

Doğrusal karesel düzenleyici problemlerinde en sık karşılaşılan sorun ağırlık matrislerinin seçimidir. Bunun nedeni ağırlık matrislerinin gerek cevabın hızında gerekse kontrol çabasının büyüklüğünde önem teşkil etmesidir. Ağırlık matrislerinin seçimi ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında;

Harvey ve Stein 1978 yılındaki çalışmalarında; doğrusal karesel optimal kontrol tasarımında ağırlık matrislerini seçmek için yeni bir yöntem önermişlerdir. Bu yöntemde çok değişkenli doğrusal karesel düzenleyicilerin asimptotik model karakteristikleri temel alınarak kontrol çabasına denk gelen ağırlık matrisi sıfıra yönlendirilmiştir. Bu çalışmadaki tanımlamalar doğrusal karesel düzenleyici tasarımında ağırlıkların seçimi için güçlü bir metot önermektedir [26].

Kawasaki ve Shimemura 1983 yılındaki çalışmalarında; doğrusal karesel optimal kontrol yöntemlerinde ağırlık matrisleri seçimi için yeni bir yöntem denemişlerdir. Doğrusal karesel problemlerde, iyi bir cevap elde edebilmek için ağırlık matrisleri genelde deneme yanılma metodu ile bulunur. Ancak bu metot ile ağırlık matrislerinin seçiminde iyi bir cevap ve kararlılık için bütün kapalı çevrim köklerinin belirli bir bölgeye yerleştirilmesi esas alınmıştır. Bu metot uygulanarak kurulan sistem hem doğrusal karesel problemin yararlarına hem de kök yerleştirme probleminin yararlarına sahiptir. Doğrusal geri beslemeli bir sistem tasarımında bu yöntem faydalı olacaktır [27].

Doğrusal karesel problemin kullanılması ile kurulan kapalı çevrim sisteminin, dinamik karakteristikler üzerinde önemli avantajları olduğu daha önceleri kanıtlanmıştır. Doğrusal sistemin kök yerlerinden etkilenen dinamik karakteristikleri için amaç bütün kökleri iyi cevaplar almak için belirli pozisyonlara yerleştirmektir. Fakat birçok tasarım amacı için bütün kökleri sırasıyla tam olarak istenilen yerlere atamak yerine sol yarı düzlemin belirli bir bölgesine atamak yeterli olacaktır. Öyleyse eğer uygun kök yerleştirme tekniği kullanılarak kurulan kapalı çevrim sistemi aynı zamanda doğrusal karesel problem kullanılarak kurulan sistemin özelliklerine sahipse, sistemin cevaplarının gelişmesi ve asimptotik olarak kararlı olması beklenecektir. Bu amaçla yapılan çalışmalara bakıldığında;

Kawasaki ve Shimemura 1988 yılındaki çalışmalarında; çok değişkenli sürekli zaman sistemin bütün köklerini karmaşık düzlemin sol yarısındaki belirli bir bölgede, doğrusal en uygun karesel düzenleyici problemi uygulayarak

belirlemişlerdir. Bu çalışmada iki en uygun kök yerleştirme metodu tartışılmıştır. İlkinde bütün kökler daire açısının $\frac{1}{2} \pi$ 'den büyük olduğu bölgede belirlenirken daha sonraki metotta daire açısının $\frac{1}{2} \pi$ 'den küçük olduğu bölgede belirlenmiştir. İlk metodun avantajı; kontrol yasası, sistem matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri hesaplanmaksızın her bir iterasyonda en fazla n kadar sonlu sayıdaki iterasyon ile elde edilmektedir. Daha sonraki metodun avantajı ise; istenirse cebirsel Riccati denklemleri çözülmeden en fazla n kadar sonlu sayıdaki iterasyon ile kontrol yasası sağlanmaktadır [28].

Kim ve Furuta 1988 yılındaki çalışmalarında şu iki regülatör tasarımı problemini ele almışlardır: Birincisi, durum geri beslemesiyle belirli bir bölgede kapalı çevrim bir sistemin bütün kökleri nasıl tasarlanacaktır problemi ve diğeri ise belirli bir bölgede yerleştirilmiş kutuplara sahip sistemler için en uygun regülatör nasıl tasarlanır problemidir. Örnek olarak kutupları s düzleminde belirlenmiş bir disk içine yerleştirilecek şekilde (sürekli sistemler için ∞ merkezli ve r yarıçaplı, ayrık sistemler için birim çember kullanılarak) performans indisinin ağırlık matrislerinin nasıl elde edileceğinin üzerinde durulmuştur [29].

Lee ve Wu; zaman-ağırlıklı performans indisi ile en uygun ayrık-zaman doğrusal, zamanla değişmeyen sistemlerin tasarımını incelemişlerdir. Belirli bir bölgede bulunan tüm kapalı-çevrim kutupları sağlayacak ve aynı zamanda zaman-ağırlıklı performans indisini azaltacak en uygun durum geri besleme kontrol yasası türetilmiştir. [30].

Wu ve Lee 1997 yılında çok sınırlı en uygun bölgesel kök yerleştirme problemini çalışmışlardır. Sınırlı bölge birkaç cebirsel eşitsizlikle gösterilir. Bu çalışmada en uygun çözümün sağlandığı gerekli şartlar elde edilmiştir. Bununla birlikte bir çözüm algoritması geliştirilmiş ve son olarak sürekli sistem için yapılan belirsizliğe göre gürbüzlük analizi tartışılmıştır [31].

Kiritsis 2001 yılında yaptığı çalışmasında sabit çıkış geri beslemesi ile kök belirleme problemini transfer fonksiyonu tekniklerini kullanarak incelemiştir. Makalede doğrusal çok değişkenli tamamıyla ulaşılabilir ve gözlemlenebilir sistemler için kutup atama problemini çözen sabit çıkış geri beslemenin varlığı için açıkça gerekli bir şart kanıtlanmıştır [32].

Solheim 1972 yılında yayımlanan makalesinde; karesel performans indeksiyle beraber bir tavsiye edilmiş kapalı-çevrim özdeğerler setini doğrusal çok değişkenli kontrol sistemlerinin tasarımı içi kriter olarak düşünmüştür. Verilen özdeğerlere karşılık gelen ağırlık matrisi elemanlarını bulmak için bir metod geliştirilmiştir. Metod sistem yapısına göre tamamıyla geneldir ve hesaplanarak uygulanması kolaydır. Metodun en uygun tahminçileri tavsiye edilen özdeğerler ile tasarlamak için nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir. Metod ayrıca özdeğerleri zaten en uygun sistemden daha istenen bir pozisyona ötelemek için kullanılır [33].

Literatür taramasından da görüldüğü üzere, araştırmacılar sistemin dinamik karakteristiğini iyileştirmek için birçok çalışmada bulunmuşlardır. Sistemlerin dinamik karakteristiği sistem kutuplarından (köklerinden) etkilenir. Bu tez çalışmasında; doğrusal karesel düzenleyiciden yararlanılarak birim basamak bozucu uygulanmış bir sistemin çıkışı için maksimum aşma ve tepe zamanı ile çıkışın durağan-durum değeri tasarlanan şartlara uygun olacak şekilde bulunmakta ve bu şartları sağlayan kutuplar bir bölge olarak verilmektedir. Bulunan kutup bölgesinden en uygun kutbun bulunması üzerine maliyet fonksiyonu yazılmakta ve tasarlanan şartlara en uygun kutup yeri verilmektedir. Bu amaçla yapılan tez çalışmasının, ikinci bölümü bir ön hazırlıktır. Bu bölümde sistemlerin zaman cevabı ayrıntılı olarak işlenmekte, daha sonra kök yerleştirme ve doğrusal karesel düzenleyici hakkında bir ön bilgi verilmektedir. Üçüncü bölümde problemin çıkarılışı, gösterilecek teoremler ve ön kuramlarla açıklanarak yüksek mertebeden sistemlerin çıkışlarının aşma değerini, tepe zamanını ve hata değerini belirli bir düzeyde tutabilmek için bir algoritma verilmektedir. Dördüncü bölümde verilen

algoritmanın örneklere uygulanması gösterilmektedir. Örnek olarak ters sarkaç mekanizması ve top-kiriş mekanizması ele alınarak algoritma uygulanmakta ve benzetim sonuçları gösterilmektedir. Beşinci bölümde çıkan sonuçlar tartışılmakta ve öneriler verilmektedir.

2. ÖN ÇALIŞMA

2.1 Sistemlerin zaman cevabı

Bir kontrol sisteminin analizinin ve tasarımının yapılabilmesi için performansının tanımlanması ve ölçülmesi gerekir. Tasarlanmış performans temel alınarak, sistem parametreleri tasarlanmış cevabı sağlayacak şekilde ayarlanmalıdır. Analiz problemlerinde sistemlere referans giriş uygulanır ve bu işaretlere verilen yanıtlar incelenerek sistemlerin davranışı değerlendirilmeye çalışılır. Bir kontrol sisteminde eğer çıkış işaretinin giriş işaretini belirli koşullar altında takip etmesi isteniyorsa giriş ve çıkış zaman fonksiyonu olarak karşılaştırılır. Bu nedenle kontrol sistemlerinde sistem davranışının son değerlendirmesi genellikle hep zaman cevabı üzerinden yapılır [1-3,5,6]. Bir sistemin zaman cevabının hesaplanabilmesi için giriş/girişler zamanın bir fonksiyonu olarak verilmelidir ve sistemin matematiksel modelinin bilinmesi gerekir [4].

Zaman cevabı iki kısımdan oluşur. Bunlar; sistemin geçici cevabı ile durağan durum cevabıdır. Sistemin geçici cevabı, kararlı sistemlerde zaman sonsuza giderken kaybolur. Sistemin geçici cevabı; sistem dinamiklerinin bir fonksiyonudur ve girişin niteliğinden bağımsızdır [4]. Sistemin durağan durum cevabı ise geçici cevap söndükten sonra zaman cevabının geriye kalan kısmıdır. Durağan durum cevabı hem sistem dinamiklerinin hem de giriş niceliğinin bir fonksiyonudur [4].

Giriş fonksiyonu ve sistemin cevabı arasındaki farklar geçici durum periyodunda geçici hal hataları, durağan durum periyodunda ise durağan durum hataları adını alır. Kontrol sistemi tasarımında dikkat edilecek husus bu hataların minimuma indirgenmesidir.

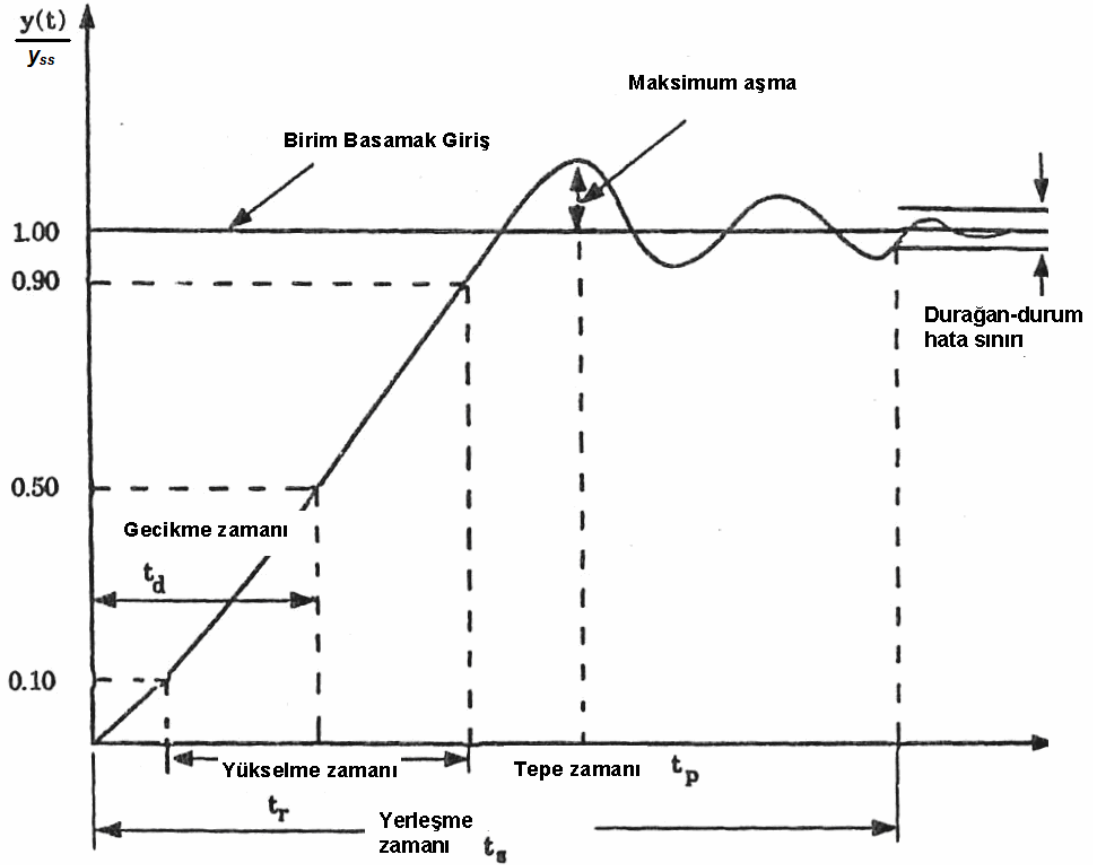
Tüm kararlı kontrol sistemleri durağan duruma gelmeden önce belirli ölçülerde geçici hal davranışları gösterirler. Başka bir ifade ile, kontrol sistemleri girişteki ani değişimlere anında yanıt veremez ve genellikle geçişler gözlenir. Bu nedenle geçici yanıtın kontrolü sistemin dinamik davranışı yönünden önemlidir. Durağan duruma gelmeden önce istenen yanıt ile sistem çıkış yanıtı arasındaki sapma dikkatle kontrol edilmelidir.

Bir kontrol sisteminde geçici cevabın genliği ve süresi belli bir sınırın altında tutulmalıdır. Doğrusal kontrol sistemlerinde geçici cevabın değerlendirilmesi genellikle birim basamak cevabından yararlanılarak yapılır. Bunun başlıca nedenleri; basamak girişin elde edilmesi kolaydır ve yeterince şiddetlidir. Başlangıçta genlikte olan sıçrama, ani giriş değişikliklerine maruz kalan sistemlerin cevap hızı hakkında bilgi edinilmesini sağlar. Sıçrama şeklindeki süreksizlik nedeniyle basamak fonksiyonunun tayfında frekans andı çok geniş olduğundan basamak fonksiyonu sisteme çok sayıda sinüzoidal işaretin uygulanması anlamına da gelmektedir [2,3,34]. Doğrusal bir sistemin basamak giriş cevabı biliniyorsa, matematiksel olarak tüm girişlere cevabını bulmak mümkündür. Bir sistemin basamak cevabını, başlangıç şartları da etkiler. Farklı sistemlerin geçici cevaplarının karşılaştırılmasında uygunluk olması bakımından, sistemlerin başlangıçta durağan olduğu, çıkışların ve bütün zaman türevlerinin sıfır olduğu standart uygulamadır. Bu yaklaşımla farklı sistemlerin cevap karakteristikleri kolaylıkla karşılaştırılır.

Kontrol problemleri çeşitlilik gösterdiğinden her tasarımın kendine özgü gereklilikleri olabilir. Tasarımcı, hangi kriterlerin kritik olduğunu belirlemeli ve uygun kriterleri temel almalıdır. Bu yüzden cevabın belli başlı özelliklerini tarif eden belirli parametrelerin seçilmesi ve bunların performans kriteri olarak kullanılması olağandır. Ancak böyle bir yaklaşımla seçilen kriterleri karşılanan tasarımın en iyi (optimal) tasarım olduğu söylenebilir [6].

Uygulamada bir kontrol sisteminin geçici cevabı kararlı duruma ulaşmadan önce genellikle sönümlü salınımlar yapar. Birim basamak girişi uygulanmış

bir sistemin zaman tanım bölgesi özellikleri Şekil 2.1'de gösterilen ve aşağıda verilen davranış kriterleriyle değerlendirilir;



Şekil 2.1. İkinci dereceden bir sistemin birim basamak cevabı

1. Maksimum aşım, M_{p_t} ve aşma yüzdesi, P.O.: Aşma yüzdesi birim basamak giriş için,

$$P.O. = \frac{M_{p_t} - f_v}{f_v} \times 100\% \quad (2.8)$$

ile tanımlanır. Bu ifadede M_{p_t} ; zaman cevabının tepe değerini, f_v değeri ise zaman cevabının son değeridir. Normalde f_v girişin büyüklüğüdür ama çoğu sistemde son değer girişin büyüklüğünden farklılıklar gösterir.

Maksimum aşma genellikle kontrol sistemlerinin göreceli kararlılığını değerlendirmede kullanılır. Çoğunlukla kontrol sistemlerinde aşımın büyük olması istenmez. Bazı sistemlerde maksimum aşma sonraki tepe değerlerde de oluşabilir ve özellikle sistemin bir sıfırı s-düzleminin sağ tarafındaysa (non-minimum sistem) negatif alt aşım da görülür [1-3].

2. Gecikme süresi, t_d : Gecikme süresi, basamak cevabının son değerinin 50%'sine ilk defada erişmesi için gereken süre olarak tanımlanır [1-3,5,6].

3. Yükselme zamanı, t_r : Aşması az olan sönümlü sistemler için yükselme zamanı son değerin 0% 'dan 100% 'üne erişebilmesi için gereken süre olarak kabul edilir. Eğer sistem çok sönümlü ise 10% 'dan 90%'a kadar ulaşabilmesi için gereken süredir [1-3,5,6].

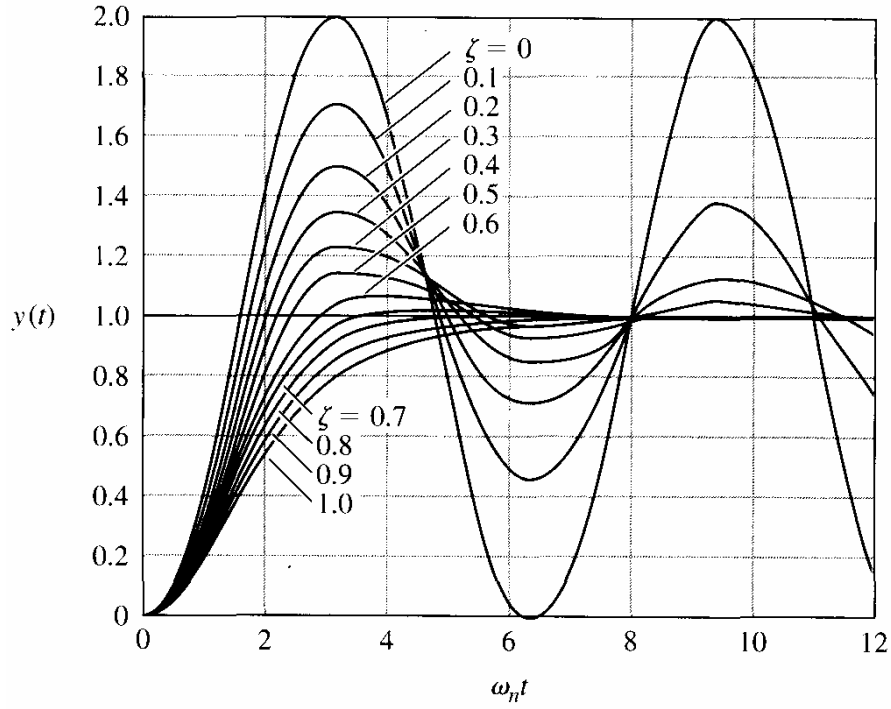
4. Tepe zamanı, t_p : Tepe zamanı ya da maksimum aşma zamanı basamak cevabının aşmasının ilk tepe noktasına ulaşması için gereken süre olarak tanımlanır [1-3,5,6].

5. Yerleşme zamanı, t_s : Yerleşme zamanı, basamak cevabının son değerinin belirli bir yüzdesine kadar azalması ve bu değerin altında kalması için geçmesi gereken süredir. En sık kullanılan yerleşme süresi kriterleri 5% ve 2%'dir [1-3,5,6].

Sistemlerin geçici cevabı iki etkenle tanımlanabilir;

1. Sistemin hızı; yükselme zamanı ve tepe zamanı ile ölçülür.

2. Sistem cevabının tasarlanan cevaba yakınlığı; aşma ve yerleşme zamanıyla ölçülür.



Şekil 2.2. İkinci mertebeden bir sistemin sönüm oranına göre birim basamak için belirlenmesi

Geçici cevabın hızlı ve sönümlü olması istenir. Bu nedenle ikinci mertebe sistemlerin geçici cevabının tasarımında, sönüm oranı 0,4 ile 0,8 arasında alınır. Sönüm oranının küçük değerleri için ($\xi < 0,4$) geçici cevapta aşırı aşmaya neden olurken sönüm oranının büyük değerleri için ($\xi < 0,8$) cevap çok yavaş olur (Şekil 2.2). Maksimum aşma ile yükselme zamanı birbiriyle terstir. Başka bir deyişle hem aşma hem de yükselme zamanı küçültülemez. Eğer bir tanesi küçültülürse diğeri büyür.

2.2 Kutup (Kök) Yerleştirme Metodu

Klasik kontrol teorisinde tek giriş tek çıkış kontrol sistemi tasarlanırken kontrolcü, baskın kapalı çevrim kutuplarının belirlenen bir sönüm oranı ve sönümsüz halin doğal frekansına uygun olacak şekilde bulunur. Böyle bir tasarım yapılırken kök eğrisi metodundan yararlanılabilir. Kontrol sistemleri

tasarlanırken kök eğrilerinden yararlanıldığında, bu yaklaşım kutup yerleştirme olarak tanımlanabilir. Burada sözü geçen kutuplar karakteristik denklemin kökleridir. Kapalı çevrim kutupları ile sistem performansı arasındaki ilişkiden yola çıkarak eğer kutupların yerlerini belirlenirse kontrol sistemi de tasarlanmış olur. Çünkü kök eğrisi metodunda belirli kontrolcülerle (PI, PD, PID gibi) ve bu kontrolcülerin parametreleri değiştirilerek belirlenen kutupların sistem performansına etkileri tespit edilebilmiştir. Eğer sistem üçüncü mertebeden ya da daha yüksek mertebeden olursa, PD, PI, birinci dereceden faz ilerletici ve geriletici kontrolcülerde sadece iki tane serbest parametre bulunduğundan sistemin tüm kutupları birbirinden bağımsız kontrol edilemez [3].

Klasik kontrol teorisi tek giriş-tek çıkış sistemler için yararlıdır. Fakat birçok kontrol sistemi örneğin, havacılık ya da denizcilik sistemleri ele alınırsa çok giriş-çok çıkışlı sistemlerle ilgilenir [35]. Klasik teknikler çok giriş-çok çıkışlı sistemlere uygulanabilir ancak işlemler uğraştırıcıdır. Çok giriş-çok çıkışlı kontrol sistemlerinde kolay uygulanabilir olduğundan durum-uzay metodu tercih edilir.

Durum-uzay metodunda, doğrusal, zamanla değişmeyen, çok değişkenli kontrol edilebilir sistemlerde kök yerleştirme ile ilgili 1967 yılında Wonham yararlı sonuçlar sunmuştur. Bu çalışma ile herhangi bir kontrol edilebilir sistem için kapalı çevrim kökleri durum geri besleme kontrolü ile istenilen bir yere atanabilir [35].

Kutup yerleştirme olarak adlandırılan bu tasarım metodunda, tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir olduğu ve geri besleme için uygun olduğu kabul edilir. Bu ifade; kapalı çevrim sistemlerinin kutupları, uygun geri besleme kazanç matrisi tarafından oluşturulan durum geri besleme sayesinde istenilen konuma yerleştirilebilirse bu sistemin tamamıyla kontrol edilebilir olduğunu gösterir.

İyi bir tasarım için kutup yeri seçimi

Kutup yerleştirme tasarımında ilk adım kapalı çevrim kutup yerlerine karar verilmesidir. Buradaki önemli nokta geri besleme ile taşınan kutup yerlerinin harcanan kontrol gücü ile ilişkili olduğudur. Ayrıca bir kutup sıfıra yakınsa sistem kontrol edilemeyebilir olduğundan bu kutbu taşımak için çok büyük kontrol kazançlarına ve dolayısıyla kontrol gücüne ihtiyaç duyulur. Ancak tasarımcı kontrol gücünü belli bir seviyede tutmak zorunda olduğundan herhangi bir yer seçimi yapamaz. Bu yüzden sadece açık çevrim cevabının istenmeyen yönlerini düzelten ve sıfır yakınındaki kutupları taşırken çok fazla güç artışına izin vermeyen bir kutup yerleştirme tekniği, açık çevrim kutuplarını ve sıfır noktalarını dikkate almayana göre daha küçük kazanç katsayıları ve dolayısıyla daha küçük kontrolcüler gerektirir.

Kutup yerini seçmek için yapılabileceklerden birincisi, kutup yerlerinin kontrol gücü üzerindeki etkisini dikkate almayan ama bu etkinin tasarımcı tarafından dikkate alınmasını gerektiren baskın ikinci dereceden kutuplar metodudur. İkinci metot ise, iyi bir sistem cevabı ve kontrol gücü arasında denge kurmaya çalışan optimal kontrol veya simetrik kök yeri metodudur.

Baskın ikinci dereceden kutuplar

Yüksek dereceden sistemler için kapalı çevrim kutupları istenilen bir çift baskın ikinci derece kutuplar olarak ve geri kalanlar da sönümlü modlarla ilişkili reel kısımları olan kutuplar olarak seçilebilir. Bu sayede sistem uygun bir kontrol gücü ile ikinci dereceden sistem cevabına sahipmiş gibi davranır. Aynı zamanda sıfırların ikinci derece sistem cevabı üzerindeki olumsuz etkilerini önlemek için düzlemin sol tarafında yeteri kadar uzakta olduklarından emin olunmalıdır. Birkaç az sönümlü yüksek frekanslı titreşim moduna ve iki adet düşük frekanslı rijit gövde moduna sahip bir sistem bu metoda örnek olarak verilebilir [3,8]. Burada düşük frekanslı modlar istenilen

ω_n ve ζ değerlerini sağlayacak şekilde seçilebilir. Diğer kutuplar ise yüksek frekanslı modların sönümlmelerini artıracak ama kontrol gücünü minimize etmek için frekanslarını sabit tutacak şekilde seçilebilir.

Kutup yerleştirme tasarım yöntemi

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.22)$$

şeklinde bir kontrol sisteminde; A , B sırasıyla $n \times n$ ve $n \times r$ sabit matrisler, x durum vektörü ve u kontrol girişidir.

$$u = -Kx \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilen kontrol girişi anlık bir durum olarak tanımlanabilir. Bu tanım durum geri besleme olarak adlandırılır. Buradaki $r \times n$ boyutundaki K matrisi durum geri besleme kazanç matrisi olarak bilinmektedir. Eş.2.22 ve 2.23 yardımıyla;

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.24)$$

şeklinde geri beslenmiş sistemin denklemi bulunur. Bu metot durum geri beslemedir. Ayrıca kutup yerleştirmede kullanılan çıkış geri besleme yöntemi de vardır.

Eş.2.24'de verilen geri beslenmiş sistem matrisi $A - BK$ 'nın özdeğerlerinin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ değerlerinde olmasını sağlayacak K matrisini belirlemek için aşağıdaki yol izlenebilir:

İlk olarak, kutup yerleştirme metodunun uygulanılabilir olması için sistemin tamamen kontrol edilebilir olması gerekmektedir. Bu şart sağlandıktan sonra;

A matrisinin karakteristik polinomunu kullanarak $a_1, a_2, \dots, a_n$ değerleri belirlenir.

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

A matrisinin karakteristik polinomunun katsayılarından yararlanılarak, sistemin durum denklemini kontrol edilebilir kanonik forma çeviren T dönüşüm matrisi belirlenir.

İstenilen özdeğerler kullanılarak karakteristik polinomun tekrar yazılır ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ değerleri belirlenir.

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Gerekli durum geri besleme kazanç matrisi K , aşağıdaki denklem kullanılarak belirlenir:

$$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (2.25)$$

Ackermann Formülü

Kutup yerleştirme metodunda en çok bilinen yöntem Ackermann metodudur. Bu yöntemin işleyişi aşağıdaki gibidir;

$$\tilde{A} = A - BK \quad (2.26)$$

Kutup yerleştirme yöntemi uygulanmış sistemin yeni sistem matrisi yukarıdaki gibi gösterilirse; bu sistemin karakteristik denklemi aslında istenilen özdeğerlerden oluşan karakteristik denklemdir;

$$|sI - A + BK| = |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

Cayley-Hamilton teoreminden yararlanılarak yeni sistem matrisi karakteristik denklemde yerine konulabilir;

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0 \quad (2.27)$$

Örnek olarak üçüncü mertebeden bir sistem ele alınırsa Eş. 2.27yardımıyla;

$$\phi(A) = B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^2 BK \\ = \begin{bmatrix} B & : & AB & : & A^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

elde edilir. Eş. 2.27'deki çarpım matrislerinden ilki kontrol edilebilirlik matrisidir. Sistem tamamen kontrol edilebilir olduğundan bu matrisin terside mevcuttur. Bu nedenle;

$$\begin{bmatrix} B & : & AB & : & A^2 B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

elde edilir. K ; geri besleme kazanç matrisini bulabilmek için Eş. 2.28'de verilen denklemin de her iki tarafı $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpılıp düzenlenirse

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & : & AB & : & A^2 B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) \quad (2.30)$$

şeklinde elde edilir. Genelleştirecek olunursa; herhangi mertebeden sistemler için K matrisi aşağıdaki denklem ile bulunabilir. Bu denklem Ackermann formülü olarak bilinmektedir.

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B]^{-1} \phi(A) \quad (2.31)$$

2.3 Doğrusal Karesel Regülatör (Düzenleyici) (LQR)

Bölüm 2.2’de kutup yerleştirme yönteminde amaç sistemi istenilen kutuplara taşıyacak K geri besleme kazanç matrisini bulmaktır. Bahsedildiği üzere genelde baskın kutuplardan yararlanılarak kutup yerleştirme yapılır. Ancak bulunan K matrisinden daha iyi bir matris bulunabilir mi sorusu araştırmacıları optimal kontrol yöntemlerine itmiştir. Bu yöntemde tasarlanan kontrolcüler sistemin bazı karakteristik davranışlarını iyileştirmeye çalışırlar. Optimal kontrol yöntemlerinden en çok bilineni doğrusal karesel düzenleyicidir (Linear quadratic regulator, LQR).

Doğrusal karesel kontrol problemi, İkinci Dünya Savaşı sırasında Wiener’in silah ateşlemesinin kontrolünde ortalama karelerle filtreleme yöntemini kullanmasıyla doğmuştur. Wiener’in sonuçları savaştan kısa bir süre sonra yayınlanmıştır [36]. Burada “doğrusal” terimi sistemin doğrusal davrandığının varsayımından, “karesel” terimi performans ölçütünün hata sinyalinin karelerini içerdiğinden gelmektedir. Ancak “doğrusal karesel” terimi literatürde 50’li yıllara kadar görülmemiş, bu probleme ortalama-kareler kontrol problemi denilmiştir. Wiener’in filtrelemek için uyguladığı analitik yaklaşım 1957 yılında Newton, Gould ve Kaiser tarafından geri beslemeli sistem tasarımında kullanılmıştır. Bu analitik yaklaşım teorik olarak bir hayli ilgi çekmiştir çünkü Nyquist kararlılık kriteri ve çevrim şekilleri ile ilgili deneme yanılma yönteminden kaçınmayı sağlamış ve tasarımcının bazı pratik sonuçları örneğin sensör gürültüsü gibi göz önüne almasını sağlamıştır. 1958 yılında,

Kalman ve Koepcke genelleştirilmiş performans ölçütünü ve durum-değişkenleri modelini kullanarak durum geri besleme kontrolünü örneklenmiş veri için sentezlemiştir. Bu çalışma ile “Doğrusal Karesel Kontrol Teorisi” literatürde ilk defa geçmiştir. Örneklenmiş veri sonuçları kısa bir süre sonra Kalman tarafından Amerika’da ve Letov tarafından Sovyet Rusya’da sürekli zaman sonuçlarına genişletilmiştir. Özellikle 1960 yılında Kalman tarafından geliştirilmiş problemde amaç lineer dinamik sistemine bağlı olarak sistemin performans indisini minimize etmektir. Bu problem en uygun lineer-karesel düzenleyici problemi ya da LQR olarak adlandırılır ve 1960-70 yılları arasında yapılmış olan teorik çalışmaların sonucunda Riccati diferansiyel denkleminin çözümünden yararlanılarak indirgenir [36].

LQR probleminin tasarım teknikleri üzerinde birçok avantajı vardır. Özellikle

- Sonlu zaman aralıkları üzerinde optimizasyon olanağı sağlar. (ortalama kareler frekans-alanı yaklaşımı sonsuz optimizasyon aralığı sağlıyordu.)
- Zamanla değişen sistemlere uygulanabilir. (frekans-alanı yaklaşımı zamanla değişmeyen sistemlerle sınırlıydı)
- Çok değişkenli sistemler için kolayca uygulanabilir [36].

LQR probleminin hesaplanması

LQR probleminde amaç performans indeksini minimize edecek geri-besleme kontrol kazancını bulmaktır. Burada minimize edilecek performans indeksi;

$$PI = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.32)$$

ve sistem dinamiği

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.33)$$

Geri-besleme kontrol kazancı ise

$$u_{op} = -K_{op}x \quad (2.34)$$

ve burada

$$K_{op} = R^{-1}B^T P(t) \text{ 'dir.} \quad (2.35)$$

Bu denklemlerde Q ve R matrisleri simetrik olup, Q pozitif yarı tanımlı, R ise pozitif tanımlı seçilmelidir. Performans indeksinde geçen $x^T Q x$ kontrolün hızını, $u^T R u$ ise kontrol çabasını ifade eder.

$P(t)$ matrisi

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.36)$$

ifadesiyle verilen Riccati denkleminin çözümü olup simetrik ve pozitif tanımlıdır. Buradaki kontrol probleminde durum değişkenlerini sıfır denge noktasına yaklaştırmak regülatör (düzenleyici) problemini temsil eder bu yüzden bu optimizasyon problemine doğrusal karesel regülatör denir.

3. DOĞRUSAL, YÜKSEK MERTEBEDEN SİSTEMLERİN GEÇİCİ CEVAP PARAMETRELERİNE UYGUN KUTUP YERLERİNİN BULUNMASI

Doğrusal yüksek mertebeden sistemlerin geçici cevabını belirlemek için birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar özellikle sistemlerin baskın kutuplarını bularak bunları daha düşük mertebeden sistemler cinsinden ifade etmeye dayanır. İkinci mertebeden sistemler için bile analitik olarak ifade edilmesi güç olan geçici cevap özelliklerinin yüksek mertebeden sistemlerde tanımlanması bir hayli zordur.

Bu tez çalışmasında, yüksek mertebeden sistem çıkışının geçici cevap özelliklerinden maksimum aşma ve tepe zamanı ile durağan-durum değeri(çıkış hatası) tasarımcının isteğine göre şekillendirilmeye çalışılmaktadır. Bu amaçla ikinci bölümde ön bilgi olarak verilen en uygun (optimum) kontrol yöntemlerinden doğrusal karesel düzenleyici (LQR) metodu üzerine kurulu bir algoritma geliştirilmektedir. Daha sonra bu sisteme birim basamak bozucu etki ettirilerek sistemin tasarlanan şartlara gelmesini sağlayan kutup bölgesi bulunmaktadır. Bu kutup bölgesinden en uygun kutbu bulmak için bir maliyet fonksiyonu yazılmaktadır. Bu çalışmanın temeli Kobayashi ve Shiemura'nın 1981 yılında yaptıkları çalışmaya dayanmaktadır [20].

3.1 Problemin Çıkarılışı

Doğrusal, çok değişkenli sistem ve karesel performans indisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$PI = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.2)$$

Burada A , B ve C matrisleri sırasıyla $n \times n$, $n \times r$ ve $m \times n$ sabit matrislerdir. Q ve R matrisleri sırasıyla $n \times n$ ve $r \times r$ pozitif tanımlı simetrik matrislerdir. x ; n -boyutlu durum vektörü, u ; r -boyutlu giriş vektörü ve y ; m -boyutlu çıkış vektörüdür.

Eş. 3.1.'de verilen sistemin kontrol edilebilir olması gerekir. Bir sistemin kontrol edilebilir olması için; bu sistem herhangi bir başlangıç noktası $x(t_0)$ 'dan, herhangi bir son durum $x(t_f)$ 'ye uygun bir kontrol girişi $u(t)$ 'yi $t_0 \leq t \leq t_f$ için uygulayarak getirebilinmelidir [34].

Bu amaçla, kontrol edilebilirlik matrisi;

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde bulunur.

M kontrol edilebilirlik matrisi $x \in R^n$ ve $u \in R^m$ için $(n \times nm)$ boyutlu olup, eğer M matrisinin rankı (n) 'den (sistemin eşitlik sayısından) az değilse, "sistem kontrol edilebilirdir" denir. Eğer rank (n) 'den küçükse, rank kontrol edilebilir durum değişkenlerinin sayısını verir [3] .

Karesel performans indisini minimize edecek en uygun (optimal) giriş;

$$u = -R^{-1}B^T P x \quad (3.4)$$

ifadesiyle bulunur. Burada P matrisi, $n \times n$ pozitif tanımlı simetrik matris olup Riccati denkleminin cevabıdır. Riccati denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.5)$$

P matrisini Eş. 3.1 ve 3.2 'de verilen doğrusal karesel problemin çözümü olarak tanımlayıp $P = LQ(A, B, Q, R)$ biçiminde gösterilebilir.

Kontrol uygulanmış geri beslemeli sistem;

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x \quad (3.6)$$

şeklindedir. Bu sistem asimptotik olarak kararlıdır. Bu ifadeye göre $L(x) = x^T P x$ Lyapunov fonksiyonu ise;

$$\forall t > 0, \quad x(t)^T P x(t) < x(0)^T P x(0) \quad (3.7)$$

ilişkisi geçerlidir. Başka bir ifade ile, sistem kararlı olduğu için başlangıç noktasından başlayan yörünge $L(x) = x(0)^T P x(0)$ ile belirtilen kapalı hiper düzlemin dışına çıkamaz. Eş. 3.7' de verilen ifade sistem çıkışının aşmasının hesaplanmasında temel olarak alınır;

Teorem 1 [20]

P matrisi Eş. 3.1 ve 3.2'de verilen doğrusal karesel problemin çözümü olsun. Eş. 3.6'da verilen kontrol uygulanmış geri beslemeli sistemin çıkışı aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$y(t)^T (CP^{-1}C^T)^{-1} y(t) < x(0)^T P x(0) \quad (3.8)$$

İspat [20]

C matrisinin bütün satır vektörlerinden bağımsız satırlara sahip $(n-m) \times n$ boyutlu matris C^* seçilir. Tekil olmayan $n \times n$ boyutlu S matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulur;

$$S = \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C^* \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Eğer $y^* = C^* x$ denklemi, $L(x)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$L(x) = (y^T \quad y^{*T}) S^{T^{-1}} P S^{-1} (y^T \quad y^{*T})^T \quad (3.10)$$

elde edilir. Eş. 3.10'da verilen denklemin sağ tarafı yeni bir fonksiyon, $f(y, y^*)$ olarak kabul edilirse; bu fonksiyon pozitif tanımlı matris P ve herhangi bir sabit y için y^* 'a göre kareseldir ve y^* 'a göre minimum değeri mevcuttur. $\hat{y}^*$; $f(y, y^*)$ fonksiyonunun minimumunu veren y^* 'ın değeri olsun. O halde $\hat{y}^*$ aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

$$\hat{y}^* = -P_3^{*-1} P_2^{*T} y \quad (3.11)$$

Burada P_2^* ve P_3^* ; $S^{T^{-1}} P S^{-1}$ matrisinin alt matrisleri olup sırasıyla $m \times (n-m)$ ve $(n-m) \times (n-m)$ boyutludurlar.

$$S^{T^{-1}}PS^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^* & P_2^* \\ P_2^{*T} & P_3^* \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$\hat{y}^*$ aşağıdaki ilişkiden kolayca hesaplanabilir;

$$\left. \frac{\partial f(y, y^*)}{\partial y^*} \right|_{y^* = \hat{y}^*} = 0 \quad (3.13)$$

yani

$$[0 \ I_{n-m}]S^{T^{-1}}PS^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \hat{y}^* \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$\forall y, \forall y^*$ için $f(y, y^*) > f(y, \hat{y}^*)$ olduğundan, aşağıdaki eşitsizliği Eş. 3.11'den yararlanarak yazarsak;

$$f(y, y^*) \geq f(y, -P_3^{*-1}P_2^{*T}y), \quad \forall y, \forall y^* \quad (3.15)$$

Başka bir ifadeyle, herhangi x ve buna bağlı y değeri için aşağıda verilen eşitsizlik sağlanır;

$$x^T Px \geq y^T (P_1^* - P_2^*P_3^{*-1}P_2^{*T})y \quad (3.16)$$

Diğer yandan, $S^{T^{-1}}PS^{-1}$ matrisini üçgen matrislerin çarpımı şeklinde ayrıştırılabilir;

$$\begin{bmatrix} P_1^* & P_2^* \\ P_2^{*T} & P_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & P_2^* P_3^{*-1} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^* - P_2^* P_2^{*-1} P_2^{*T} & 0 \\ 0 & P_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ P_3^{*-1} P_2^{*T} & I_{n-m} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Eş. 3.14'de verilen denklemin her iki tarafının da tersi alınırsa;

$$\begin{aligned} (P_1^* - P_2^* P_3^{*-1} P_2^{*T})^{-1} &= (I_m \quad 0)(S^{T^{-1}} P S^{-1})^{-1} (I_m \quad 0)^T \\ &= (I_m \quad 0)(S^{T^{-1}} P S^{-1})(I_m \quad 0) \\ &= C P^{-1} C^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. Eş. 3.8, 3.15 ve 3.18 den yararlanılarak Teorem 1 ispatlanmış olur■

Teorem 2 [20]

P matrisi Eş. 3.1 ve 3.2'de verilen doğrusal karesel problemin çözümü olsun.

Herhangi $\hat{R} \in \mathfrak{R}_P^{r \times r}$, öyle ki $\hat{R}^{-1} \geq \frac{1}{2} R^{-1}$ için (burada $\mathfrak{R}_P^{r \times r}$ $r \times r$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik matris setidir), geri besleme kontrol kuralı $u = -R^{-1} B^T P x$, Eş. 3.1 ile verilen sistemi asimptotik olarak kararlı hale getirir ve Eş. 3.6'da gösterilen geri beslemeli sistemin aşması $\hat{R}$ 'ya bağlı değildir.

İspat [20]

Karesel form;

$$L(x) = x^T P x \quad (3.19)$$

Eş. 3.6'da verilen geri beslenmiş sistemin yörüngesi boyunca t 'ye göre türevi alınır;

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}L(x) &= x^T \left\{ (A - B\hat{R}^{-1}B^T P)^T P + P(A - B\hat{R}^{-1}B^T P) \right\} x \\
 &= x^T \left\{ A^T P + PA - 2PB\hat{R}^{-1}B^T P \right\} x \\
 &= x^T \left\{ PBR^{-1}B^T P - Q - 2PB\hat{R}^{-1}B^T P \right\} x \\
 \frac{d}{dt}L(x) &= -x^T (PB(2\hat{R}^{-1} - R^{-1})B^T P + Q)x \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Matrislerin yapılan tanımlamalarından ötürü, Eş. 3.20'in sağ tarafı negatiftir ve geri beslenmiş sistem asimptotik kararlıdır. Eş. 3.19'da verilen fonksiyon sistemin Lyapunov fonksiyonudur ve Teorem 1 de elde edilen aynı değerlendirmeden ötürü $\hat{R}$ matrisinden bağımsızdır■

3.2 Doğrusal karesel problem (LQ) setinin çözümü

Bu bölümde bütün pozitif tanımlı Q ve R matrisleri için doğrusal karesel problemin(LQ) bütün cevaplarını içeren matris setinin çözümü türetilmektedir. Bu işleme geçmeden önce iki tane ön kuram verilmektedir.

Ön kuram 1 [20]

Doğrusal dönüşüm matrisi T aşağıdaki ilişkiyi sağlar;

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} U \\ \dots \\ A_0 \end{bmatrix} \text{ ve } TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ B_0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Burada A_0 , B_0 ve U sırasıyla $r \times n$, $r \times r$ ve $(n-r) \times n$ boyutlu sabit matrislerdir. U matrisini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz;

$$U = (0, e_1, \dots, e_{\delta_1-2}, 0, e_{\delta_1}, \dots, e_{\delta_2-3}, 0, e_{\delta_2-2}, \dots, e_{\delta_r-r+1}, e_{\delta_1-2}, e_{\delta_2-2}, \dots, e_{\delta_r-2})$$

Burada verilen δ_i ; Eş. 3.1 ile gösterilen sistemin kontrol edilebilirlik indisi olup şu şekilde gösterilebilir;

$$\delta_i = \sum_{j=1}^i v_j, \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$$

e_i ; $(n-r)$ -boyutlu sadece i.nci elemanı bir olup diğerleri sıfır olan birim vektördür.

Bu ön kuramla; Eş. 3.1'deki gibi tanımlanan sistemler kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülebilir.

Ön kuram 2 [20]

$r \times r$ boyutlu pozitif tanımlı M_3 matrisi aşağıdaki ilişkiyi herhangi $(n-r) \times (n-r)$ boyutlu pozitif tanımlı M_1 matrisi ve $(n-r) \times r$ boyutlu M_2 matrisi için sağlar;

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

Bu ön kuram aşağıdaki formdan türetilmiştir;

$$\det M = \det M_1 \det (M_3 - M_2^T M_1^{-1} M_2)$$

Ön kuram 3 [20]

Doğrusal dönüşüm matrisi T kullanılarak aşağıdaki ilişki çıkarılabilir;

$$LQ(A, B, Q, R) = T^T [LQ(TAT^{-1}, TB, T^{T^{-1}}PT^{-1}, R)]T \quad [3.23]$$

ya da

$$\begin{aligned} A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \\ = T^T (T^{T^{-1}}A^T T^T T^{T^{-1}}PT^{-1} + T^{T^{-1}}PT^{-1}TAT^{-1} \\ - T^{T^{-1}}PT^{-1}TBR^{-1}BT^T T^{T^{-1}}PT^{-1} + T^{T^{-1}}QT^{-1})T \end{aligned}$$

Teorem 3 [20]

Ön kuram 1 de bahsedildiği üzere doğrusal dönüşüm matrisi T ve U bulunursa,;

$$\begin{aligned} LQ(A, B, \mathfrak{R}_P^{n \times n}, \mathfrak{R}_P^{r \times r}) = \left\{ P \mid P = T^T \hat{P} T, \hat{P} \in \mathfrak{R}_P^{n \times n}, \right. \\ \left. (I_{n-r} \ 0) \hat{P} U^T + U \hat{P} (I_{n-r} \ 0)^T < 0 \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

İspat [20]

P_0 ; $LQ(TAT^{-1}, TB, \mathfrak{R}_p^{n \times n}, \mathfrak{R}_p^{r \times r})$ 'nin elemanı olsun. $Q \in \mathfrak{R}_p^{n \times n}$ ve $R \in \mathfrak{R}_p^{r \times r}$ matrisleri aşağıda verilen eşitliği sağlayacak şekilde seçilirse;

$$A^T P_0 + P_0 \hat{A} - P_0 \hat{B} R^{-1} \hat{B}^T P_0 + Q = 0 \quad (3.25)$$

Burada $\hat{A} = TAT^{-1}$ ve $\hat{B} = TB$ olarak verilmiştir.

P_0 matrisi tekil olmadığından, Eş. 3.25 ile verilen denklemi hem soldan hem sağdan P_0^{-1} ile çarparsak;

$$P_0^{-1} \hat{A}^T + \hat{A} P_0^{-1} - \hat{B} R^{-1} \hat{B}^T + P_0^{-1} Q P_0^{-1} = 0 \quad (3.26)$$

ya da

$$P_0^{-1} Q P_0^{-1} = -P_0^{-1} \hat{A}^T - \hat{A} P_0^{-1} + \hat{B} R^{-1} \hat{B}^T \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Burada Q ; pozitif tanımlı matris ve P_0 simetrik matris olduğundan $P_0^{-1} Q P_0^{-1}$ de pozitif tanımlı matristir. Bu sebepten ötürü aşağıda verilen denklem sağlanır;

$$\begin{aligned} (I_{n-r} \ 0) P_0^{-1} Q P_0^{-1} (I_{n-r} \ 0)^T &= (I_{n-r} \ 0) (-P_0^{-1} \hat{A}^T - \hat{A} P_0^{-1} + \hat{B} R^{-1} \hat{B}^T) (I_{n-r} \ 0)^T \\ &= -\{U P_0^{-1} (I_{n-r} \ 0)^T + (I_{n-r} \ 0) P_0^{-1} U^T\} > 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

P_0 , Eş.3.28'deki şartı sağlayan pozitif tanımlı bir matris olsun. Buradan Ön kuram 2 de R^{-1} yeterince büyük seçildiğinde;

$$Q = -\hat{A}P_0^{-1} - P_0^{-1}\hat{A}^T + \hat{B}R^{-1}\hat{B}^T \quad (3.29)$$

pozitif tanımlı olur.

$LQ(\hat{A}, \hat{B}, \mathfrak{R}_P^{n \times n}, \mathfrak{R}_P^{r \times r})$ çözüm setinin elemanı $P_0 = LQ(A, B, P_0 Q P_0, R)$ olur.

Buradan bu çözüm seti şu şekilde tanımlanabilir:

$$LQ(\hat{A}, \hat{B}, \mathfrak{R}_P^{n \times n}, \mathfrak{R}_P^{r \times r}) = \{P \mid P = \hat{P}^{-1}, \\ (I_{n-r} \ 0)\hat{P}U^T + U\hat{P}(I_{n-r} \ 0)^T < 0\} \quad (3.30)$$

Ön Kuram 3 'ü Eş.3.30 'da yerine koyduğumuzda Teorem 3 elde edilir■

Sonuç:

Tek girişli bir sistemde Teorem 3 basit bir forma indirgenebilir. T sistemi kontrol edilebilir kanonik forma dönüştüren lineer dönüştürücü olursa;

$$LQ(A, b, \mathfrak{R}_P^{n \times n}, \mathfrak{R}_P^{1 \times 1}) = \{P \mid P = T^T \hat{P}^{-1} T \quad s.t. \quad \hat{P} \in \mathfrak{R}_P^{n \times n} \quad ve \\ (I_{n-1} \ 0)\hat{P}(0 \ I_{n-1})^T + (0 \ I_{n-1})\hat{P}(I_{n-1} \ 0)^T < 0\}$$

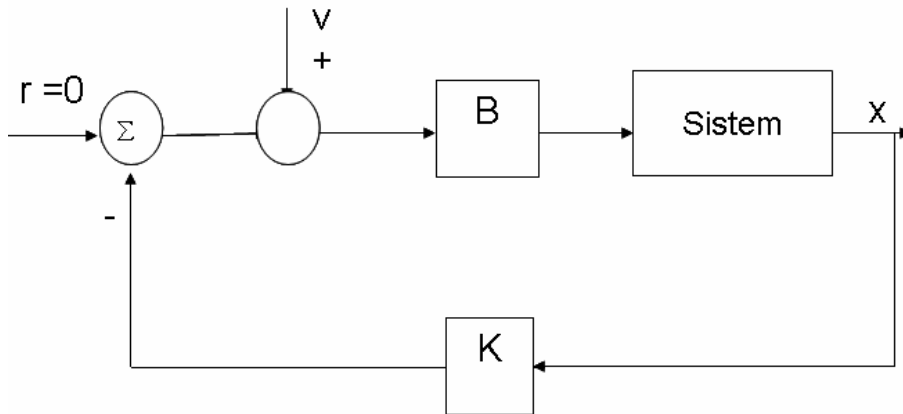
olur.

LQ probleminin çözüm setini performans indisinden değil Teorem 3 kullanılarak doğrudan hesaplanabilir. Böylece performans indisi referansı olmaksızın LQ problemi yardımı ile bir geri besleme kontrol yasası sentezlenmesi mümkün kılınır. Bu teorem ayrıca, verilen bir P matrisinin LQ

probleminin çözümü olup olmama durumunu kontrol edilmesi yönünden basit bir metottur.

3.3 Tek Girişli Bir Sisteme Bozucu Uygulanması Durumu

Bu bölümde bozucu uygulanmış tek girişli bir sistem ele alınarak çıkışın aşma değeri için daha açık bir ifade çıkarılmaktadır. Şekil 3.1'de bozucu uygulanmış sistemin blok diyagramı verilmektedir. Bu çalışmada bozucu v ; birim basamak olarak doğrusal karesel düzenleyici kullanarak kontrol edilen bir sisteme etki etmektedir. Bu amaçla, A tekil olmayan bir matris olarak düşünülerek iki adet ön kuram verilecektir.



Şekil 3.1. Bozucu uygulanmış bir sistemin blok diyagramla gösterimi

Ön kuram 4 [20]

Geri beslenmiş sisteme basamak giriş formunda bozucu etki ederse sistemin başlangıç koşulları $x(0) = 0$ olmak üzere aşağıdaki hali alır;

$$\dot{x} = (A - br^{-1}b^T P)x + bv \quad (3.31)$$

Bu ifade aynı zamanda başlangıç koşulları $A^{-1}b$ yönünde olan sıfır girişli sisteme denktir.

İspat [20]

Basamak bozucu $v(t)$ sisteme eklenirse

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - br^{-1}b^T P)x + bv(t), \quad x(0) = 0 \\ v(t) &= 0, \quad t < 0 \\ v(t) &= v_0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Eş.3.32. ile verilen sistem asimptotik kararlıdır; dolayısıyla sistem asimptotik olarak diğer bir denge noktası olan x_0 'a yaklaşır.

$$Ax_0 = b(r^{-1}b^T Px_0 - v_0) \quad (3.33)$$

Eş.3.33 den gösterildiği gibi x_0 , $A^{-1}b$ uzayına aittir.

$\hat{x} = x - x_0$ olarak yeni bir değişken tanımlanırsa Eş. 3.32 ile verilen sistem aşağıdaki eşdeğer sisteme dönüşebilir:

$$\dot{\hat{x}} = (A - br^{-1}b^T P)\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = -x_0 \quad (3.34)$$

Yukarıda verilen ifade ile Ön kuram 4 kanıtlanmış olur■

Dolayısıyla başlangıç koşullarını sıfır alıp basamak giriş uygulamak yerine, girişi sıfır alıp başlangıç koşullarını $A^{-1}b$ doğrultusunda almak mümkündür. a_n , A matrisinin karakteristik denkleminin sıfıncı dereceden katsayısı

olmak üzere $x(0), -a_n A^{-1}b$ 'ye eşit olduğu zaman $x(0)^T P x(0)$ ilerde görüleceği üzere $\hat{P}$ cinsinden basit forma indirgenebilir.

Ön Kuram 5 [20]

Eğer $x(0) = -a_n A^{-1}b$ ise $x(0)^T P x(0)$, $\hat{P}$ matrisinin ilk sütunun ilk sırasındaki elemanın değerine eşit olur. Şöyle ki,

$$x(0)^T P x(0) = (\hat{P}^{-1})_{11} \quad (3.35)$$

İspat [20]

T doğrusal dönüşümünün tek girişli bir sistemin kontrol edilebilir kanonik formu için aşağıdaki gibi ifade edildiği bilinen bir durumdur;

$$T = \begin{pmatrix} w \\ wA \\ wA^2 \\ \vdots \\ wA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Burada $w = e^T_n (b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b)^{-1}$ alınarak

$$Tx(0) = -a_n TA^{-1}b = -a_n \begin{pmatrix} wA^{-1}b \\ wb \\ wAb \\ \vdots \\ wA^{n-2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n wA^{-1}b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

elde edilir. Diğer taraftan A matrisinin karakteristik denklemini $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ cinsinden yazılırsa;

$$A^{-1} = -(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-2} A + a_{n-1} I) / a_n \text{ olarak alınır ve buradan;} \\ -a_n w A^{-1} b = w A^{n-1} b + a_1 w A^{n-2} b + \dots + a_{n-1} w b = w A^{n-1} b = 1 \quad (3.37)$$

Eş.3.36 ve Eş.3.37 den $Tx(0), e_1$ 'e eşit olacaktır ve böylece ön kuram aşağıdaki Eş. 3.38 'den sağlanabilir;

$$x(0)^T P x(0) = x(0)^T T P^{-1} T x(0) = e_1^T P^{-1} e_1 \quad (3.38)$$

Teorem 4 [20]

Bu teorem Teorem 1, Teorem 3, Ön Kuram 4 ve Ön Kuram 5' in yardımıyla oluşturulur. Eş.3.32 ile verilen sisteme birim basamak bozucu eklendiğinde y çıkışının i .inci elemanının genliği aşağıdaki eşitsizlikle bulunabilir;

$$\forall t > 0, \quad |y_i(t)| < \left\{ \left(\hat{P}^{-1} \right)_{11} \cdot \left(\hat{C}_i \hat{P} \hat{C}_i^T \right)^{1/2} / \left\{ a_n \left(1 - r^{-1} b^T P A^{-1} b \right) \right\} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.39)$$

Burada $C_i, C T^{-1}$ matrisinin i .inci sıra vektörüdür.

$y_i(t)$ 'nin son değeri olan $y_i(\infty)$ şu şekilde hesaplanabilir;

$$(C_i)_1 / a_n (1 - r^{-1} b^T P A^{-1} b)$$

Burada $(C_i)_1$, C_i 'nin ilk elemanıdır. Dolayısıyla $y_i(\infty) \neq 0$ ise $y_i(\infty)$ son değerine $y_i(t)$ salınımlarının genlik oranının şiddeti basamak girişin ölçüsünden bağımsız olan aşağıdaki eşitsizlikle çıkarılır.

$$\forall t > 0, \quad \left| \frac{y_i(t)}{y_i(\infty)} \right| < \left\{ \left(\hat{P}^{-1} \right)_{11} \cdot \left(\hat{C}_i \hat{P} \hat{C}_i^T \right) \right\}^{1/2} / |(C_i)_1| \quad i = 1, \dots, m \quad (3.40)$$

Eş.3.40 da verilen denklemin sağ tarafı aşma sınırını verir. Bu değer klasik teorideki maksimum aşma M_p ile ilişkilidir. Bu nedenle bu değer $\bar{M}_p$ olarak yazılabilir. Bu değerlendirme geri besleme kuralının sentezinde çıkışın aşması göz önüne alındığında çok yararlıdır.

3.4 Algoritma

Bu algoritmanın temel yapısı Kobayashi ve Shimemura'nın 1981 yılında yaptıkları çalışmaya dayanmaktadır. Referansta yapılan çalışmanın algoritmasında;

1. Sistemi kanonik forma çeviren doğrusal dönüşüm matrisi T^{-1} ve Ön Kuram 1'de gösterilen U matrisinin bulunması
2. $\hat{P}$ 'nin bulunması
3. Sistemin P matrisinin bulunması
4. Çıkışın aşmasının kontrol edilmesi
5. R matrisini bulma
6. Kontrol kuralının bulunması

adımları izlenmiştir [20]. Verilen referansta bu algoritmanın kullanım amacı çıkışın aşım sınırının bulunmasıdır. Bu aşım sınırının, geçici cevap özelliklerinden maksimum aşma ile ilgisi referansta verilen çalışmada kurulmamıştır.

Bu tez çalışmasında, referansta verilen algoritma temel alınarak yeni bir algoritma türetilmiştir. Türetilen algoritmanın amacı; çıkışın maksimum aşma değerini, tepe zamanını ve durağan durum değerini tasarımcının isteğine göre şekillendiren sistem kutupları arasında en uygununu (optimum değerini) bulmaktır.

3.4.1 Birim basamak bozucu uygulanmış tek girişli sistemler için algoritma

Adım 1: Doğrusal dönüşüm matrisi T 'yi bulma

İlk olarak verilen sistem, Eş. 3.3'de gösterildiği üzere kontrol edilebilirlik testi yapıldıktan sonra sistemi kanonik hale çeviren T doğrusal dönüşüm matrisi bulunur. Bu işlem için sistemin karakteristik denklemi bulunursa;

Sistemin karakteristik denklemi;

$$|sI - A| = s^n - a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (3.41)$$

şeklinde bulunur.

ve sistemin karakteristik denkleminin katsayıları kullanılarak oluşturulan matris aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Sistemin doğrusal dönüşüm matrisi;

$$D = MW \quad (3.43)$$

şeklinde bulunur.

Kanonik sistemin matrisleri;

$$A_c = D^{-1}AD \quad \text{ve} \quad B_c = D^{-1}B \quad (3.44)$$

şeklinde oluşacaktır.

Ön kuram 1’de verilen doğrusal dönüşüm matrisi göz önüne alındığında;

$$T = D^{-1} \quad (3.45)$$

şeklinde bulunur. Kanonik sistem matrisleri bilindiğinden U matrisi de kanonik sistem matrisinden rahatlıkla çekilir.

Adım 2: Sisteme tasarımcının istediği maksimum aşma aralığının, maksimum tepe zamanının ve maksimum çıkış hatasının girilmesi.

Adım 3: $\hat{P}$ ’nin bulunması

$\hat{P}$ matrisi; kanonik hale çevrilmiş sistemin Riccati çözümüdür. Bu yöntemde Riccati çözümleri yapılmaksızın bu matris bulunmaya çalışılacaktır. Bu niyetle $\hat{P}$ matrisini bulmak için kullanacağımız şartlar aşağıda verilmiştir. Buradaki İkinci şart Teorem 3’den gelmektedir.

1. $\hat{P}$ matrisi pozitif tanımlı simetrik matristir. ($\hat{P} > 0$)

2. $\hat{P}$ matrisi aşağıdaki eşitsizliği sağlamak zorundadır (Teorem 3)

$$(I_{n-1} \ 0)\hat{P}(0 \ I_{n-1})^T + (0 \ I_{n-1})\hat{P}(I_{n-1} \ 0)^T < 0 \quad (3.46)$$

Adım 4: Sistem çıkışının aşma sınırı, $\overline{M}_p$ 'ın kontrol edilmesi üzerine Teorem 4'ün uygulanması.

$$\left\{ \left(\hat{P}^{-1} \right)_{11} \cdot \left(\hat{C}_i \hat{P} \hat{C}_i^T \right) \right\}^{1/2} / |(C_i)_1| \quad (3.47)$$

hesaplanır. Eğer aşma sınırı istenilen ölçüde değilse üçüncü adıma geri dönülür.

Bu yöntem uygulanırken dikkat edilmesi gereken Adım 4'de bulunan değer aşma sınırını belirlediği ancak kontrol teorisindeki maksimum aşmadan farklı olduğudur. Bu sorunun programda nasıl giderildiği örneklerde açıklanmaktadır.

Adım 5: Sistemin P matrisinin bulunması

$\hat{P}$ matrisi kanonik hale dönüştürülmüş sistemin Riccati çözümü olduğuna göre P matrisi ters dönüşüm yaparak bulunabilir. Şöyle ki,

$$P = (T^{-1} \hat{P} T^{T^{-1}})^{-1} \quad (3.48)$$

Adım 6: r değerinin bulunması

• $\dot{x} = (A - br^{-1}b^T P)x$ geri beslemiş sistemi asimptotik kararlı bir şekilde simule edebilecek r değeri aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilmelidir;

$$r^{-1} > \frac{1}{2} \hat{r} \quad (3.49)$$

Burada $\hat{r}$;

$$\hat{r}bb^T \geq P^{-1}A^T + AP^{-1} \quad (3.50)$$

eşitsizliğinden seçilir.

Adım 7: Kontrol kuralının bulunması

r ve P matrisleri bulunan sistemin kontrol kuralı Eş. 3.4 yardımıyla bulunur.

Adım 8: Sistem çıkışının maksimum aşmasının bulunması

Geri beslenmiş sisteme birim basamak bozucu eklenerek sistemin diferansiyel denklemi çözülür. Bu çözümünden sistemin maksimum aşması bulunur. Eğer bulunan maksimum aşma, Adım 2'de verilen tasarımcının istediği aralık içinde değilse Adım 3'e geri dönlür.

Adım 9: Tepe zamanının ve çıkışın durağan-durum değerinin (çıkışın hatasının) ayarlanması

İkinci bölümde de bahsedildiği üzere tepe zamanı; maksimum aşmanın meydana geldiği zamandır. Sistemin maksimum aşması bulunduktan sonra, eğer tepe zamanı uygun sürede oluşmuyorsa uygun başka bir r değerinin seçilmesi yani altıncı adıma tekrar dönülmesi gerekir. Tepe zamanı eğer istenilen maksimum aşma değerinde büyük ise r değerinin artırılması gerekir.

Aynı şekilde iyi bir sistemde çıkışın hata değerinin ya da durağan-durum değerinin az olması istenir. Eğer çıkışın hatası tasarımcının kabul edebileceği hatadan büyükse r matrisinin artırılması gerekir.

Adım 10: İstenilen maksimum aşma, tepe zamanı ve çıkışın hata değerine göre kutupların bulunması

İstenilen maksimum aşma, tepe zamanı ve çıkışın hata değeri kriterleri sağlandıktan sonra bu şartlar sağlayan geri beslenmiş matrisin kutupları yani özdeğerleri bulunur. Eğer tasarımcının verdiği maksimum aşma aralığı daha küçük alt aralıklar olacak şekilde taranıp bu alt aralıklara düşen kutuplar çıkarılırsa bir kutup bölgesi elde edilmiş olur.

Adım 11: Bulunan bölgeden en uygun sonucun eldesi

Verilen aralık için bulunan bölge uygun kutupları içerir. Ancak bu ölgede verilen kutuplardan hangisinin tasarımcı için en uygun (optimal) olduğunu bulmak gerekir. Bu amaçla bir maliyet fonksiyonu yazılırsa;

$$J = \alpha_1 |M_p| + \alpha_2 |t_p| + \alpha_3 |y_{ss}| \quad (3.51)$$

bu fonksiyonu verilen α_1 , α_2 ve α_3 değerleri için minimum yapan değer en uygun (optimum) değerdir. Burada verilen α_1 , α_2 ve α_3 değerleri tasarımcının isteğine göre değişen katsayılardır. Örneğin eğer tasarımcı için çıkışın hatası daha önemliyse α_3 değerini diğerlerine göre büyük tutar.

3.4.2 Temel algoritma

Bu algoritma bütün sistemlere uygulanabilecek şekilde geliştirilmiştir.

*Adım 1** :Doğrusal dönüşüm matrisi T^{-1} ile U matrisinin bulunması

Tek girişli sistemler için dönüşüm matrisinin nasıl bulunacağı bölüm 3.4.1.'de verilmiştir. Eğer sistem çok giriş çok çıkışlı ise dönüşüm matrisini bulmak tek girişli sistemlerde bulunduğu kadar kolay olmayacaktır. Çok değişkenli sistemlerde de sistemin tamamen kontrol edilebilir olması ve B matrisinin rankının r kadar olması gerekmektedir.

$$\text{rank}(B) = r \quad (3.52)$$

Bu amaçla, çok-girişli çok-çıkışlı (MIMO) sistemlerin kontrol edilebilirlik matrisi;

$$M = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (3.53)$$

şeklinde dir. Kontrol edilebilirlik testi tek girişli sistemlerde de olduğu üzere M matrisinin rank değerine bakılarak yapılır.

$$\text{rank}(M) = n \quad (3.54)$$

olmalıdır. sonraki adımda M matrisinin ilk n doğrusal olarak bağımsız sütunu alınarak yeni bir L matrisi oluşturulur. Bu L matrisi B matrisinin bütün b_i sütunlarını içermektedir. B matrisinin rank değeri r kadar olduğundan B matrisini oluşturan b_i sütunları doğrusal olarak birbirinden bağımsızdır. Bu şartlar göz önüne alınarak;

$$L = [b_1, Ab_1, \dots, A^{d_1-1}b_1 : b_2, Ab_2, \dots, A^{d_2-1}b_2 : \dots : b_r, Ab_r, \dots, A^{d_r-1}b_r] \quad (3.55)$$

şeklinde oluşturulur. Burada gösterilen $d_1, d_2, \dots, d_r$; A ve B matrislerinin kontrol edilebilirlik indisleridir.

L matrisi oluşturulduktan sonra tersi alınıp içinden aşağıda verilenlere göre

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= d_1 \\
 \sigma_2 &= d_1 + d_2 \\
 &\vdots \\
 \sigma_k &= \sum_i^k d_i \\
 &\vdots \\
 \sigma_r &= \sum_i^r d_i \equiv n
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

olmak üzere $P^T_{\sigma_k}$ satırları L^{-1} matrisinden çekilirse, dönüşüm matrisi T aşağıdaki şekilde oluşturulacaktır;

$$T = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_1^T A \\ \vdots \\ P_1^T A^{d_1-1} \\ \dots\dots\dots \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_r^T A^{d_r-1} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

Kontrol edilebilir kanonik hale dönüştürülmüş sistem aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\dot{x} = TAT^{-1}x + TBu \tag{3.58}$$

*Adım 2**: Sisteme tasarımcının istediği maksimum aşma aralığının, maksimum tepe zamanının ve maksimum çıkış hatasının girilmesi.

*Adım 3** : $\hat{P}$ 'nin bulunması

Tek girişli sistemdeki algoritmaya benzer olarak aşağıda verilen şartlara uyan $\hat{P}$ matrisi seçilmelidir;

1. $\hat{P}$ matrisi pozitif tanımlı simetrik matristir. ($\hat{P} > 0$)
2. $\hat{P}$ matrisi aşağıdaki eşitsizliği sağlamak zorundadır (Teorem 3)

$$(I_{n-1} \ 0)\hat{P}U^T + U\hat{P}(I_{n-1} \ 0)^T < 0 \quad (3.59)$$

*Adım 4** : Sistemin P matrisinin bulunması

Tek girişli sistemler için verilen dördüncü adımla aynı şekilde bulunur. Eş. 3.47 ile çözülür.

*Adım 5** : Çıkışın aşma sınırının kontrol edilmesi

Eğer sistemin girişi birden çoksa Eş. 3.8'den yararlanılır. Burada dikkat edilmesi gereken husus maksimum aşma değerini veren ifadenin direkt olarak başlangıç koşullarına bağlı olmasıdır Oysaki tek girişli sistemlerde bu durumu ortadan kaldırmak için Ön kuram 4, Ön kuram 5 ve Teorem 3 geliştirilmiştir.

Sistemin çıkışı istenilen değerde değilse adım 3* 'a geri dönülür.

*Adım 6** : R matrisini bulma

• $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x$ geri beslemiş sistemi asimptotik kararlı bir şekilde simule edebilecek R matrisi aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilmelidir;

$$R^{-1} > \frac{1}{2} \hat{R} \quad (3.60)$$

Burada $\hat{R}$;

$$B\hat{R}B^T \geq P^{-1}A^T + AP^{-1} \quad (3.61)$$

eşitsizliğinden seçilir.

*Adım 7** : Kontrol kuralının bulunması

R ve P matrisleri bulunan sistemin kontrol kuralı Eş. 3.4 yardımıyla bulunur.

*Adım 8** , *Adım 9** , *Adım 10** ve *Adım 11**’de tek girişli sistemler için uygulanan metodun aynısı kullanılır.

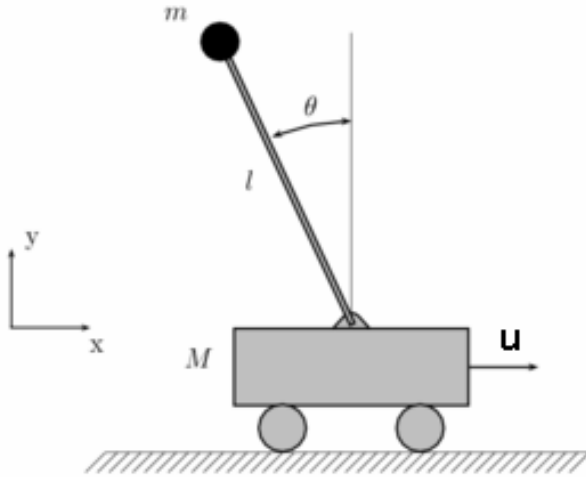
4. UYGULAMA: TEK GİRİŞLİ - TEK ÇIKIŞLI (SISO) SİSTEM ÖRNEKLERİ

Verilen yöntemin örneklere uygulanmasında MATLAB 2008a programından yararlanılmıştır. Uygulanan örneklere ilişkin programlar Ek 4-5-6 dosyalarında yer almaktadır.

4.1 Ters Sarkaç Mekanizması

Ters sarkaç mekanizması kontrol sistemlerinde sıklıkla kullanılan bir örnektir. Bu çalışmada da verilen yönteme uygulanmakta ve çıkışın aşması belirli bir değerde tutulmaya çalışılmaktadır.

Bu mekanizma sadece ileri-geri hareket edebilen bir platform üzerinde bulunan pim bağlantılı ve açısal hareket yapabilen bir koldan oluşmaktadır.



Şekil 4.1 Ters Sarkaç Mekanizması [37]

Çizelge 4.1. Ters sarkaç mekanizması parametreleri [3]

$M = 2 \quad kg$	Platformun kütlesi
$m = 0,1 \quad kg$	Sarkacın kütlesi
$l = 0,5 \quad m$	Sarkacın uzunluğu
$g = 9,81 \quad kgm/s^2$	Yerçekimi kuvveti

Ters sarkaç mekanizmasının hareket denklemleri [3];

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (4.1)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (4.2)$$

Burada I ; sarkaç kolunun atalet momentidir. Bu sistemde kütle kolun başında toplandığı için ağırlık merkezini sarkacın topunun merkezi alınabilir. Bu nedenle analiz yaparken sarkacın atalet momenti sıfır alınacaktır.

4.1.1 Sistemin durum denklemleri

Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 ile verilen sistem hareket denklemlerinde;

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

olarak ifade edilirse, sistemin durum denklemleri,

$$\begin{aligned}
&\bullet \\
&\dot{x}_1 = x_2 \\
&\bullet \\
&\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u \\
&\bullet \\
&x_3 = x_4 \\
&\bullet \\
&\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u
\end{aligned} \tag{4.3}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Bulunan durum denklemleri standart matris formunda yazılırsa;

$$\frac{d}{dt}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \tag{4.4}$$

$\dot{x} = Ax + bu$ standart formu elde edilmiş olur.

Sistemin çıkışı olarak θ ; mafsal noktasına göre sarkacın açısal pozisyonu alınır;

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]x \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir.

4.1.2 Ters sarkaç mekanizmasına önerilen yöntemin uygulanması

Ters sarkaç mekanizması tek girişli bir sistem olduğundan üçüncü bölümde verilen tek girişli sistemler için hazırlanmış algoritma kullanılacaktır. Orada gösterilen sırada adımlar izlenirse;

Adım 1: Sistemi kontrol edilebilir kanonik hale çeviren dönüşüm matrisi T 'nin bulunması

Eş. 3.3'de verilen matrisi kontrol edilebilirlik matrisi;

$$M = [b : Ab : A^2b : A^3b] \quad (4.6)$$

ve Eş. 3.42'de verilen

$$W = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

burada a_i ; karakteristik polinomun katsayılarıdır;

$$|sI - A| = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4$$

matrislerinden yararlanarak sistemi kontrol edilebilir kanonik hale çeviren dönüşüm matrisi aşağıdaki şekilde bulunur;

$$D = MW \quad (4.8)$$

Üçüncü bölümde ifade edilen T^{-1} ; D matrisine eşittir.

Adım 2: Sisteme tasarımcının istediği maksimum aşma aralığının, maksimum tepe zamanının ve maksimum çıkış hatasının girilmesi.

Bu örnek için daha fazla kutup elde edebilmek amacıyla maksimum aşma için %1 ile %20 arasında olan değerleri kabul edip, tepe zamanı ve çıkışın aşma değerlerini bu maksimum aşmaya denk gelen değerler olarak alınacaktır.

Adım 3: $\hat{P}$ matrisinin bulunması

Üçüncü bölümde gösterildiği üzere $\hat{P}$ matrisini bulmak için iki şarta uymak gerekir.

1. $\hat{P}$ matrisi pozitif simetrik matris olmalıdır.
- 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} & \hat{P}_{13} & \hat{P}_{14} \\ \hat{P}_{12} & \hat{P}_{22} & \hat{P}_{23} & \hat{P}_{24} \\ \hat{P}_{11} & \hat{P}_{11} & \hat{P}_{33} & \hat{P}_{34} \\ \hat{P}_{14} & \hat{P}_{24} & \hat{P}_{34} & \hat{P}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} & \hat{P}_{13} & \hat{P}_{14} \\ \hat{P}_{12} & \hat{P}_{22} & \hat{P}_{23} & \hat{P}_{24} \\ \hat{P}_{11} & \hat{P}_{11} & \hat{P}_{33} & \hat{P}_{34} \\ \hat{P}_{14} & \hat{P}_{24} & \hat{P}_{34} & \hat{P}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

Bu iki şarta uygun $\hat{P}$ matrisi seçilir. Bu sebeple bilgisayar programında nümerik bir yol izlenir. Bu matrisinin seçimi EK-2 'de verilmiş olan akış diyagramında verilmekte ve Matlab programı kullanarak yapılan çözümü EK-4'de gösterilmektedir.

Adım 4: Çıkışın aşma sınırının bulunması

Çıkışın aşma sınırını bulabilmek için Teorem 4'de verilen yöntem izlenir. Tasarımcının belirlediği maksimum aşma değeri aralığına ulaşana kadar iterasyona devam eder. Teorem 4'de verilen denklem bilinen klasik aşma değeri değildir. Tasarımcının verdiği klasik aşma değerini sisteme tanıtmak amacıyla grafik üzerinde maksimum nokta bulunduktan sonra bu noktayı istenilen düzeye çekilmesi hedeflenmiştir.

Eğer bulunan maksimum aşma değeri tasarlanan değerde değilse üçüncü adıma geri dönülerek $\hat{P}$ matrisinin tekrar bulunması gerekir.

Adım 5: Sistemin P matrisinin bulunması

Sistemin aşma aralığı istenildiği gibi bulunduğunda P matrisi Eş. 3.48 ile bulunabilir.

Adım 6: r değerini bulma

Bölüm 3.4.1.'de anlatıldığı üzere

$$r^{-1} > \frac{1}{2} \hat{r} \quad \text{ve} \quad \hat{r} b b^T \geq P^{-1} A^T + A P^{-1}$$

şartlarını sağlayacak şekilde r değeri seçilmelidir.

Görüldüğü üzere r değeri de $\hat{P}$ matrisi gibi eşitsizlik çözümleri içerir. Bu değeri bulmak içinde bilgisayar programında nümerik bir yol izlenir.(Bkz. EK-3 ve EK-5) Amaç bu eşitsizlikleri sağlayan r değer setinin içinden bir tanesini seçmektir. r değeri sistemi asimptotik kararlı hale getirdiği gibi aynı zamanda tepe zamanı üzerinde de etkilidir. Tepe zamanı üzerindeki etkisi yedinci adımda daha ayrıntılı anlatılmaktadır.

Adım 7: Kontrol kuralının bulunması

r ve P matrislerinin bulunmasıyla kontrol kuralı aşağıdaki şekilde bulunur;

$$u = -r^{-1}B^T Px$$

Adım 8: Sistem çıkışının maksimum aşmasının bulunması

Geri beslenmiş sisteme birim basamak bozucu eklenerek sistemin diferansiyel denklemi Matlab programında ode45 komutu kullanılarak çözdürülür. Bu çözümünden sistem çıkışının maksimum aşması bulunur. Eğer bulunan maksimum aşma, Adım 2'de verilen tasarımcının istediği aralık içinde değilse Adım 3'e geri dönülür.

Adım 9: Tepe zamanının ve çıkışın durağan-durum değerinin (çıkışın hatasının) ayarlanması

Tepe zamanı aşmanın meydana geldiği süre olarak bilindiğinden maksimum aşma değeri bulunduktan sonra bilgisayar programında bu aşmanın olduğu zaman kolaylıkla bulunur. Eğer tepe zamanı istenilen kriterde değilse iyileştirmek amacıyla altıncı adıma r değerini bulmaya geri dönülür. Bunun sebebi kontrol büyüdükçe tepe zamanının azalmasıdır. Kontrol kazancını büyütmek için r değerini artırmak gerekir. r değeri; eşitsizlikler kümesinin çözüm setidir ve altıncı adımda verilen şartları sağlayan başka bir r değerini

de bulunabilir. Eğer aşma istenilen değerdeyse P matrisini değiştirmek için hiçbir neden yoktur.

Adım 10: İstenilen maksimum aşma, tepe zamanı ve çıkışın hata değerine göre kutupların bulunması

İstenilen maksimum aşma, tepe zamanı ve çıkışın hata değeri kriterleri sağlandıktan sonra bu şartlar sağlayan geri beslenmiş matrisin kutupları yani özdeğerleri Matlab programında “eig” komutuyla bulunur. Bu örnekte maksimum aşma aralığı 0.01 hassasiyetle taranmaktadır. Tarama işleminin sonucunda bulunan kutuplar bir bölge oluşturmaktadır.

Adım 11: Bulunan bölgeden en uygun sonucun eldesi

Eş. 3.50 ile tanımlanan maliyet fonksiyonunda ilk olarak bütün katsayılar eşit olarak alınıp, fonksiyonu minimum yapan kutup en uygun kutup olarak seçilmekte, daha sonra çıkışın hatası dikkate alınarak yeni bir maliyet fonksiyonu yazılıp onu minimum yapan kutup en uygun seçilmektedir.

4.1.3 Benzetim sonuçları

Bu örnekte, üçüncü bölümde verilen algoritma Matlab programından yararlanılarak çözülmüştür (EK-4). İlk olarak sistem matrisleri

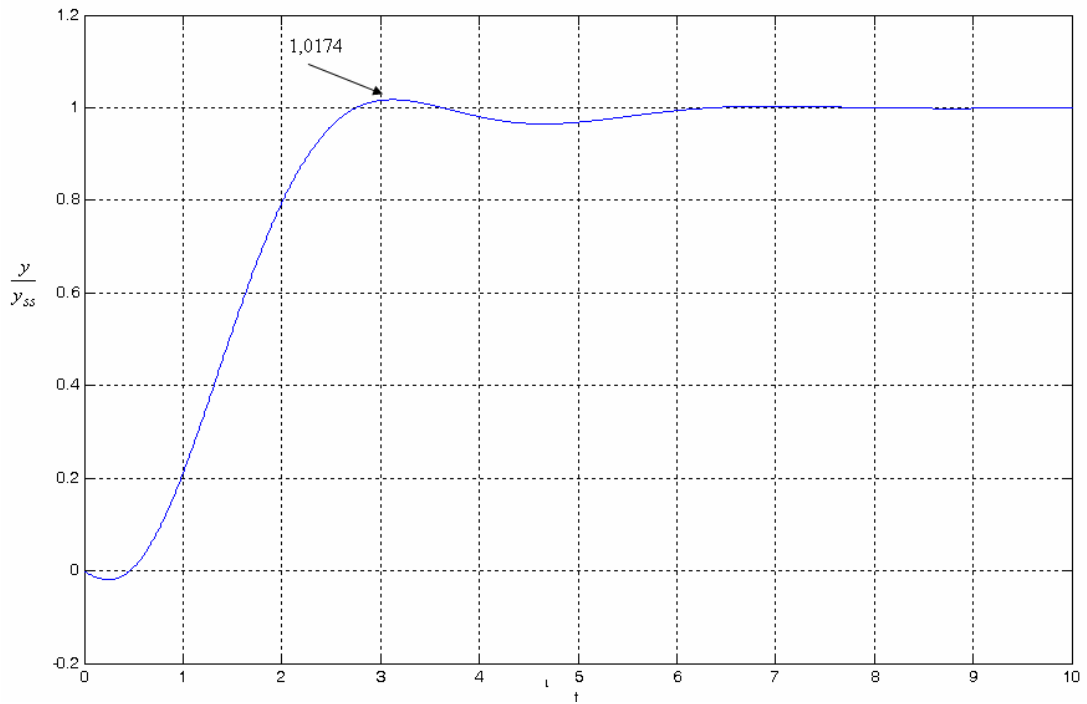
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad c = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

şeklinde verilmiş ters sarkaç mekanizmasının çıkış cevabının maksimum aşma değeri belirli sınırlar içinde tutulmaya çalışılmaktadır. Bu amaçla ilk

olarak iki durum ele alınmaktadır. İlk durumda, maksimum aşma oranı %1 ile %2 arasında olacak şekilde bir değer bulunmakta ve bu değer için durum değişkenleri, çıkışın durağan-durum değeri ve kontrol değeri grafiklerle gösterilmektedir. İkinci durumda maksimum aşma değeri %10 ile %20 arasında olacak şekilde birinci durumda yapılan işlemler tekrarlanmakta ve grafiklerle gösterilmektedir.

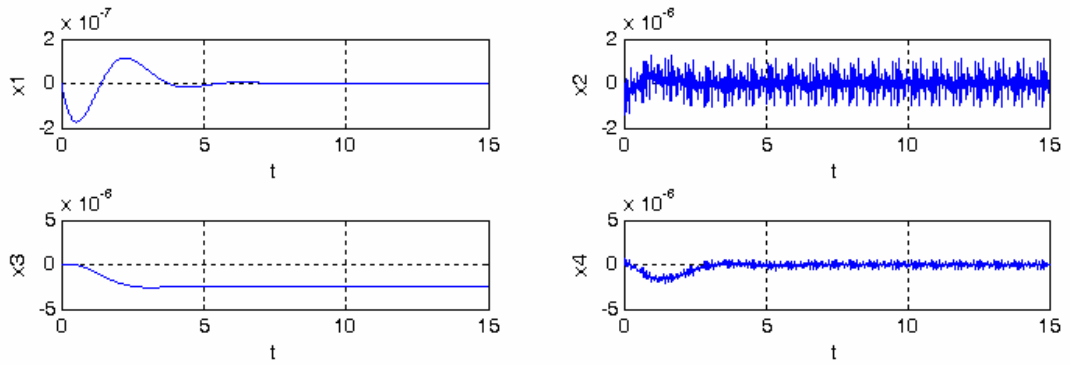
Durum 1: Tasarım şartı olarak maksimum aşmanın %1 ile %2 arasında ve tepe zamanının 5 sn.'den az olarak verilmesi durumu.

EK-1 ve EK-4 de gösterilen algoritma sisteme uygulandığında bu aralık için maksimum aşma %1,74 olarak bulunmaktadır. Bu aşma değeri için bulunan tepe zamanı 3,12 sn. olup normalize çıkış grafiği Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



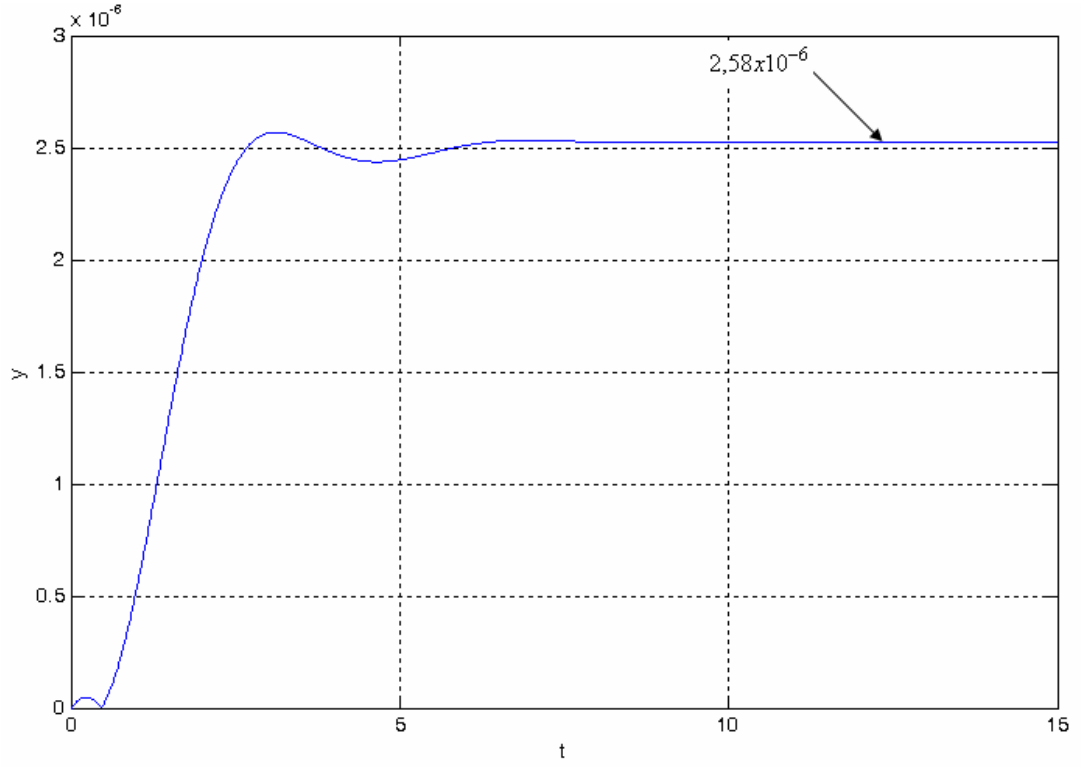
Şekil 4.2. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda normalize çıkışın gösterimi

Bulunan aşma değerinde durum değişkenlerinin davranışı Şekil 4.3'de gösterilmektedir. Burada x_2 ve x_4 'de gözüken yüksek frekanslı değişimlerin Matlab programındaki nümerik hesaplamalardan kaynaklandığı değerlendirilmektedir.



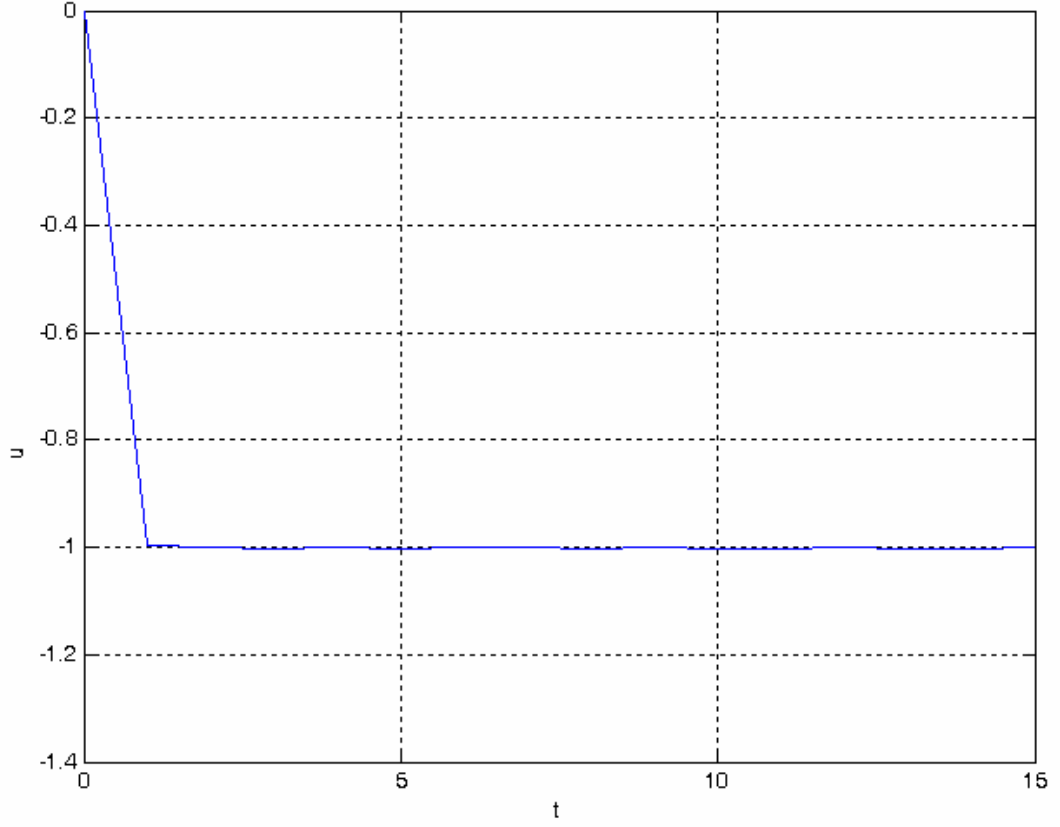
Şekil 4.3. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda durum değişkenlerinin davranışı

Çıkışın cevabı Şekil 4.4.'de verilmektedir. Görüldüğü üzere durağan durum değeri sıfıra oldukça yakındır.

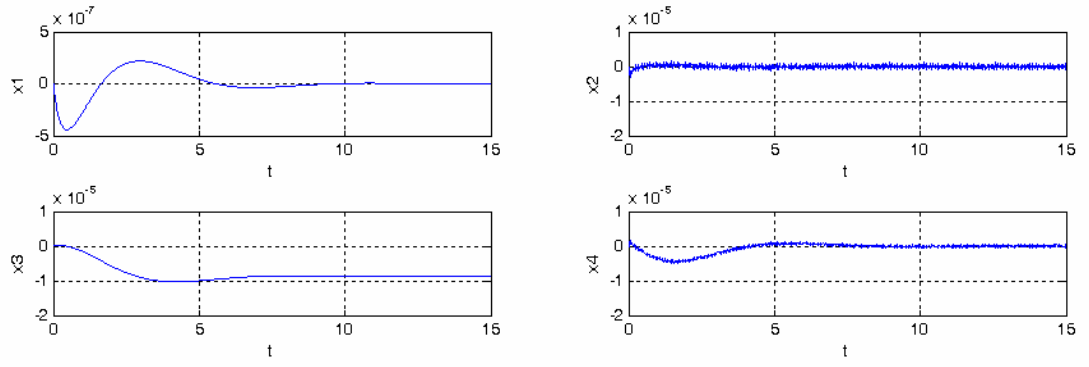


Şekil 4.4. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda çıkışın zamanla değişimi

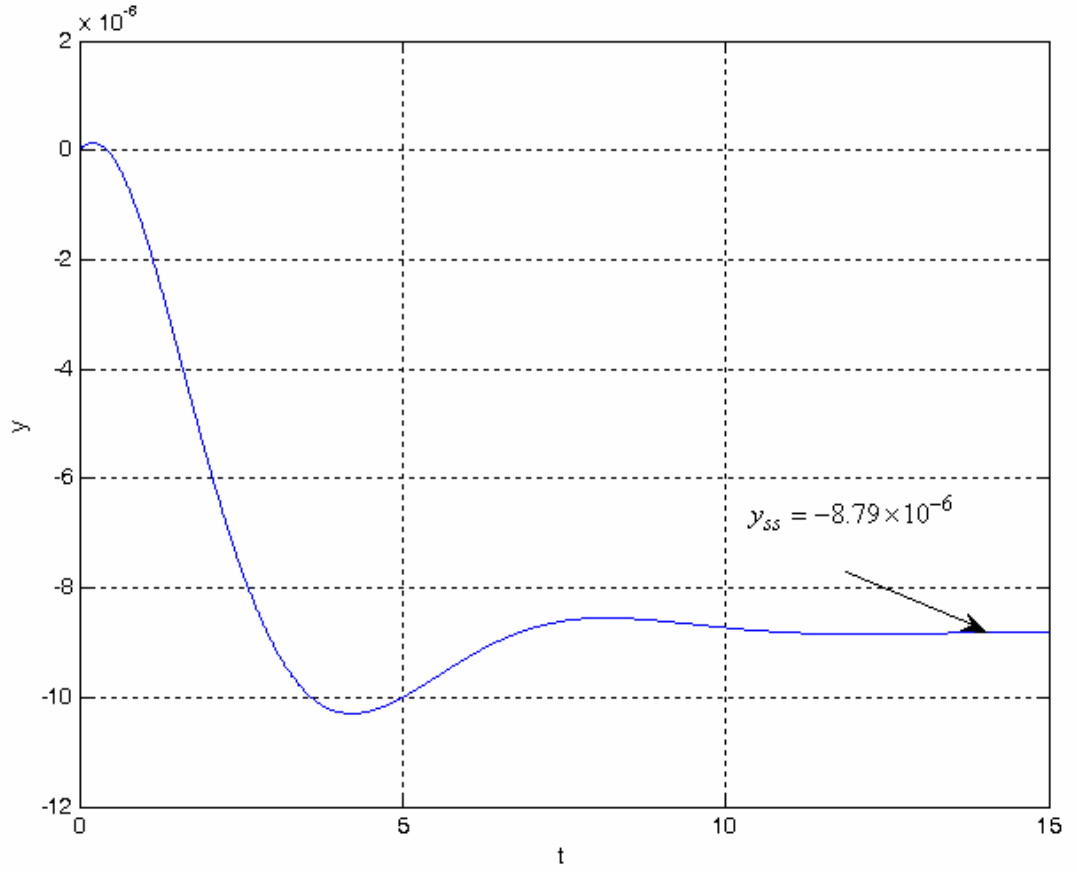
Şekil 4.5’de kontrolcünün zamanla değişimi gösterilmektedir. Görüldüğü üzere bozucu etkisini baskılamak için kontrol uygulaması gerekmektedir.



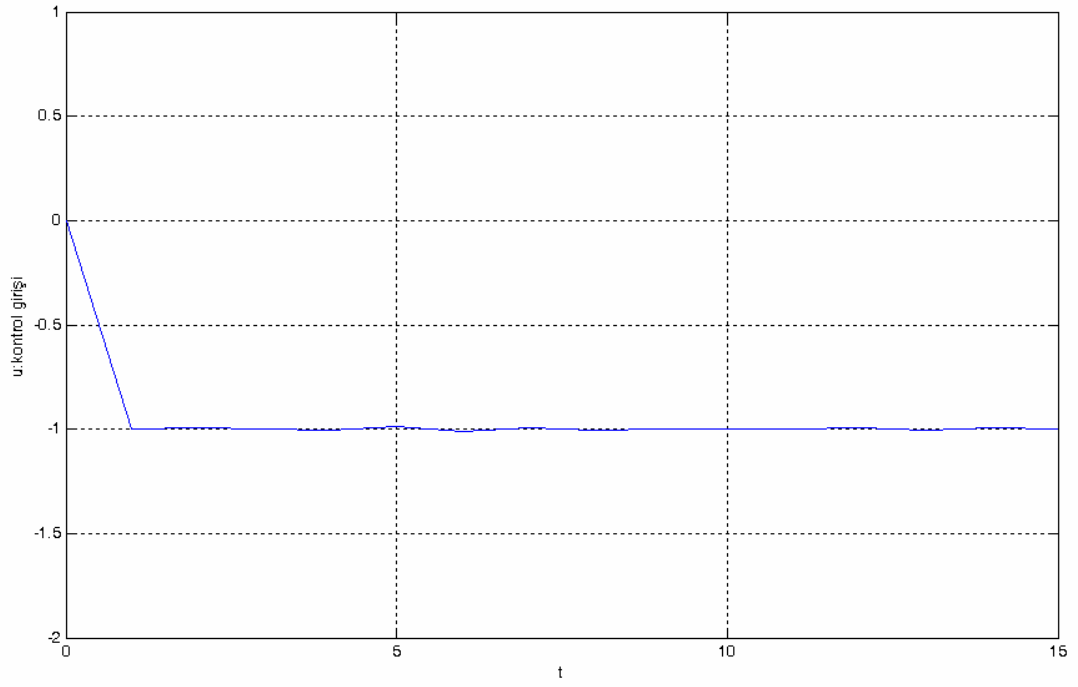
Şekil 4.5. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda sisteme uygulanan kontrol girişi



Şekil 4.7. Ters sarkaç mekanizması için ikinci durumda durum değişkenlerinin gösterim



Şekil 4.8. Ters sarkaç mekanizması için ikinci durumda çıkışın zamanla değişimi



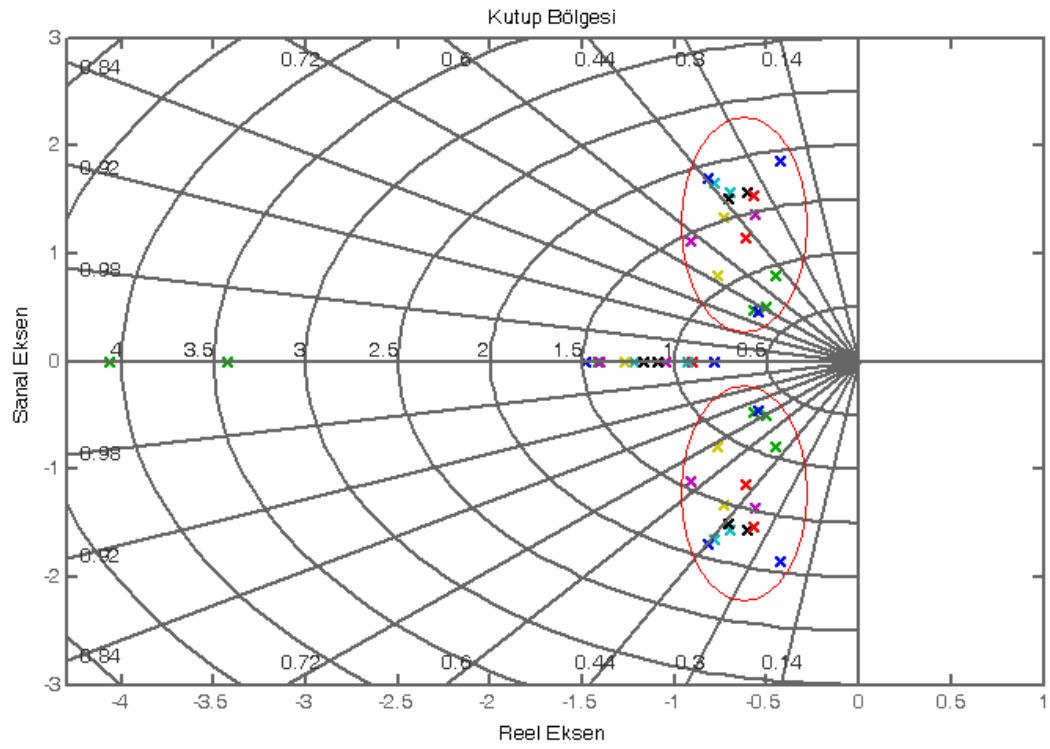
Şekil 4.9. Ters sarkaç mekanizması için birinci durumda sisteme uygulanan kontrol girişi

Durum 1 ve durum 2’de tek bir aralık verilerek yapılan işlemler, maksimum aşma %1 ile %20 arasında olacak şekilde 0,001 hassasiyetle, EK 1 ve EK-4 de verilen algoritmalar da gösterildiği gibi tarama yapıldığında çıkışın maksimum aşma değerleri, bu değerlere karşılık gelen tepe zamanları ve çıkışın durağan-durum değerleri Çizelge 4.2.’de verildiği gibi bulunmaktadır.;

Çizelge 4.2.Ters sarkaç mekanizması için istenilen %1-%20 aralığındaki maksimum aşma ve buna karşılık gelen tepe zamanı ve çıkışın durağan-durum değerleri

	y_{max}	t_p	y_{ss}
1	0,0314	2,57	$3,3682 \times 10^{-5}$
2	0,0217	6,95	$3,3471 \times 10^{-5}$
3	0,0945	3,7	$3,2827 \times 10^{-5}$
4	0,0635	2,76	$1,3044 \times 10^{-6}$
5	0,0992	3,28	$4,4378 \times 10^{-5}$
6	0,0744	3,28	$6,8902 \times 10^{-6}$
7	0,1098	2,83	$6,2187 \times 10^{-6}$
8	0,025	6,99	$6,2750 \times 10^{-5}$
9	0,0397	7,11	0,0013
10	0,0517	3,07	$6,7994 \times 10^{-5}$
11	0,0174	3,12	$2,5849 \times 10^{-6}$
12	0,0319	3,86	$4,5660 \times 10^{-5}$
13	0,0481	4,16	$1,9687 \times 10^{-5}$
14	0,0573	3,07	$1,1016 \times 10^{-4}$
15	0,096	2,57	$2,9160 \times 10^{-6}$
16	0,1702	4,23	$8,79 \times 10^{-6}$

Çizelge 4.2’de bulunan değerlere karşılık gelen kutuplar bir bölge oluşturur. Bu bölge tasarım şartlarını sağlayan kutuplardan oluşur. Şekil 4.10 ’da gösterilmekte ola kırmızı bölgeler tasarım şartlarını sağlayan baskın kutuplardır. Yazılan program her bir kutbun hangi tasarım şartlarında geçerli olduğunu vermektedir. Şekil 4.10 kutup bölgesinin yakınlaştırılmış görüntüsüdür. Şekil 4.10 kutup bölgesinin yakınlaştırılmış görüntüsüdür. Şekil 4.10 kutup bölgesinin yakınlaştırılmış görüntüsüdür. Şekil 4.10 kutup bölgesinin yakınlaştırılmış görüntüsüdür.

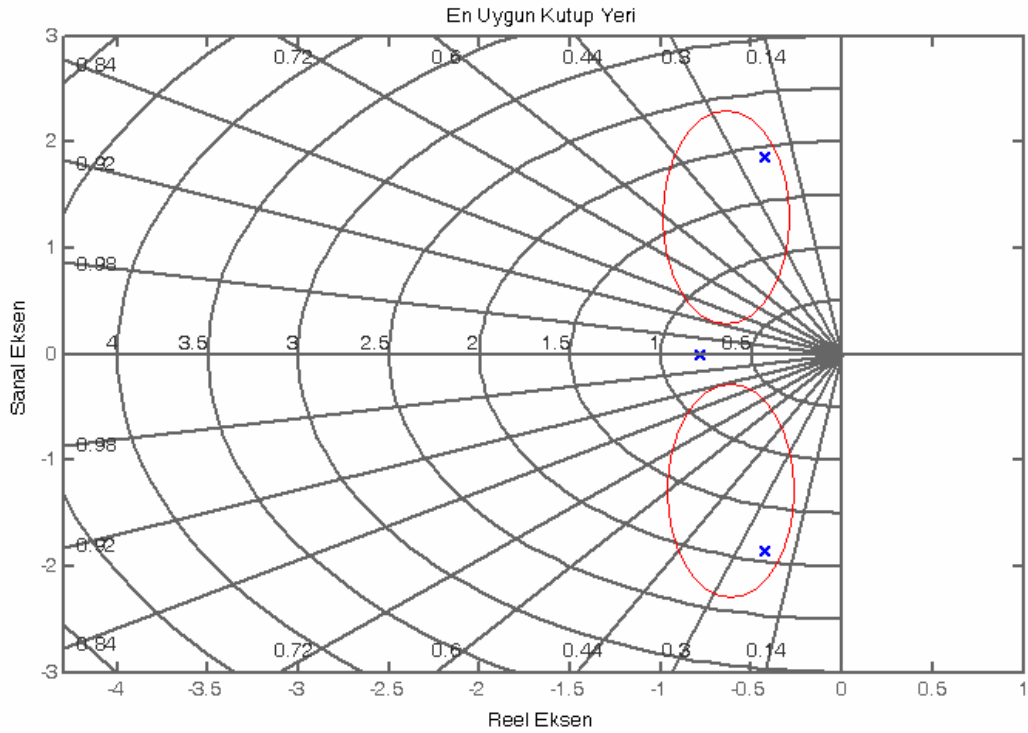


Şekil 4.10. Ters sarkaç mekanizması için tasarlanan değerler için bulunan kutup bölgesi

Şekil 4.10'da gösterilen kutup bölgesi içinden en uygun (optimal) kutbu bulmak için öncelikle maliyet fonksiyonu yazılır. Örnek olarak maliyet fonksiyonu her bir tasarım parametresine eşit katsayılar verilerek

$$J = 0.5|y_{\max}| + 0.5[t_p] + 0.5|y_{ss}| \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu maliyet fonksiyonunu minimize eden kutup en uygun kutuptur. Bu kutup Çizelge 4.2'de birinci sırada yer alan parametreleri sağlar ve Şekil 4.11'de daha önce bulunan kutup bölgesi içindeki yeri gösterilmiştir.

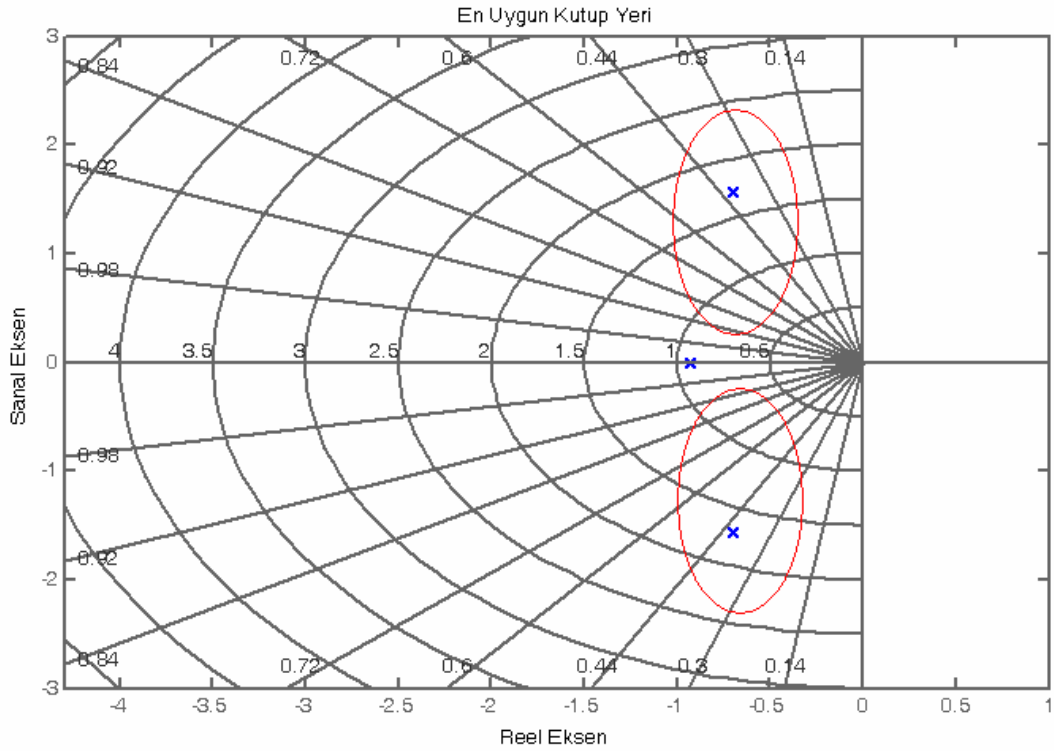


Şekil 4.11. Ters sarkaç mekanizmasında verilen maliyet fonksiyonu için en uygun kutbun yeri

Maliyet fonksiyonunu;

$$J = 5|y_{\max}| + 0.5[t_p] + 5|y_{ss}| \quad (4.10)$$

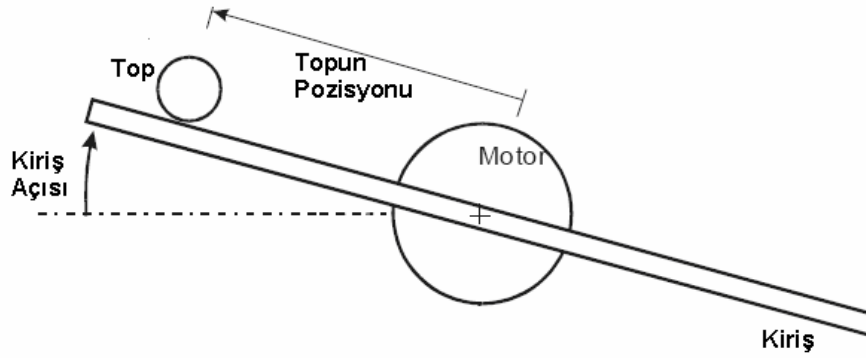
şeklinde tanımlanırsa yani tasarımcı çıkışın maksimum aşma değeri ile durağan-durum değerine önem verirse; maliyet fonksiyonunu minimum yapan değer Çizelge 4.2’de on birinci sırada yer alır. Bu kutbun gösterimi Şekil 4.12’de yer almaktadır.



Şekil 4.12. Ters sarkaç mekanizmasında kutup bölgesinde maksimum aşma ve çıkışın hatası ön plana çıkarılarak bulunan maliyet fonksiyonu için en uygun kutbun gösterimi

4.2 Top-Kiriş Mekanizması

Top-kiriş mekanizması; basitliği ve kolay uygulanabilirliği ile kontrol sistemlerinde çokça kullanılır. Sistemin en önemli özelliği açık çevrim kararsız oluşudur. Top-kiriş mekanizmasında kontrolcü; kirişin açısal yer değiştirmesini kontrol ederek topun denge noktasına gelmesini sağlamaya çalışır [39].



Şekil 4.13. Top-Kiriş Mekanizması [38]

Çizelge 4.3. Top-Kiriş mekanizması parametreleri [39]

$m = 0.09$ kg	Topun kütlesi
$J = 0,021$ kgm ²	Kütle atalet momenti
$\beta = 0,04$	Top-kiriş sürtünme katsayısı
$g = 9,81$ kgm/s ²	Yerçekimi kuvveti

Top-kiriş sisteminin hareket denklemleri aşağıdaki şekilde verilmiştir [39];

$$m\ddot{r}(t) + mg \sin \vartheta(t) + \beta\dot{r}(t) - mr(t)\dot{\vartheta}(t)^2 = 0 \quad (4.11)$$

$$(mr^2(t) + J)\ddot{\theta}(t) + 2mr(t)\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + mgr(t)\cos\theta(t) = u \quad (4.12)$$

Burada;

m : topun kütlesi

β : sürtünme katsayısı

g : yerçekimi ivmesi

r : topun giriş orta eksenine uzaklığı

θ : girişin yatayla yaptığı açı

J : girişin kütle atalet moment

4.2.1 Sistemin durum denklemleri

Eş. 4.11 ve Eş. 4.12 ile verilen sistem hareket denklemlerinde

$$x_1 = r$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r}$$

$$x_3 = \theta$$

$$\dot{x}_4 = \dot{\theta}$$

olarak ifade edilirse, sistemin durum denklemleri,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -g \sin x_3 - \frac{\beta}{m} x_2 + x_1 x_4^2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-2mx_1x_2x_4 - mgx_1\cos x_3}{mx_1^2 + J} + \frac{u}{mx_1^2 + J}$$

(4.13)

biçiminde elde edilmiş olur. Bulunan durum denklemleri matris formunda yazılırsa;

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_4^2 & \frac{-\beta}{m} & \frac{g \sin x_3}{x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2mx_2x_4 - mg \cos x_3}{mx_1^2 + J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mx_1^2 + J} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

olmak üzere

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (4.16)$$

formundaki doğrusal olmayan sistem denklemini elde edilmiş olur.

4.2.2 Sistemin doğrusallaştırılması

Eş. 3.6 ile ifade edilebilen doğrusal olmayan sistem denklemleri ilk olarak doğrusallaştırılacaktır. Sistemi doğrusallaştırmak için kullanılacak Jakobian matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_e} \quad (4.17)$$

Burada f fonksiyonları durum denklemleridir.

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= x_1 = x_2 \\ \dot{f}_2 &= x_2 = -g \sin x_3 - \frac{\beta}{m} x_2 + x_1 x_4^2 \\ \dot{f}_3 &= x_3 = x_4 \\ \dot{f}_4 &= x_4 = \frac{-2mx_1 x_2 x_4 - mgx_1 \cos x_3}{mx_1^2 + J} + \frac{u}{mx_1^2 + J} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Eş. 3.7 ışığında, x durum değişkenlerinin denge noktası sıfır kabul edilirse, Jacobian matrisi;

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

ya da doğrusallaşmış hareket denklemleri;

$$m \ddot{r}(t) + \beta \dot{r}(t) + mg \vartheta = 0 \quad (4.20)$$

$$J \ddot{\vartheta}(t) + mgr - u = 0$$

olarak bulunur. Jacobian matrisi F, sistem matrisini verir.

Top-kiriş mekanizmasının sistem parametreleri Çizelge 4.3 den alınarak Eş. 4.19 a yerleştirildiğinde sistem matrisi A;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4444 & -9.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -42,0429 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Kontrol matrisi b;

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 47,6190 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

olarak bulunur. Böylece doğrusal sistemlerin standart formu

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (4.23)$$

bulunmuş olur.

Sistemin çıkışı olarak sadece topun pozisyonu alınırsa;

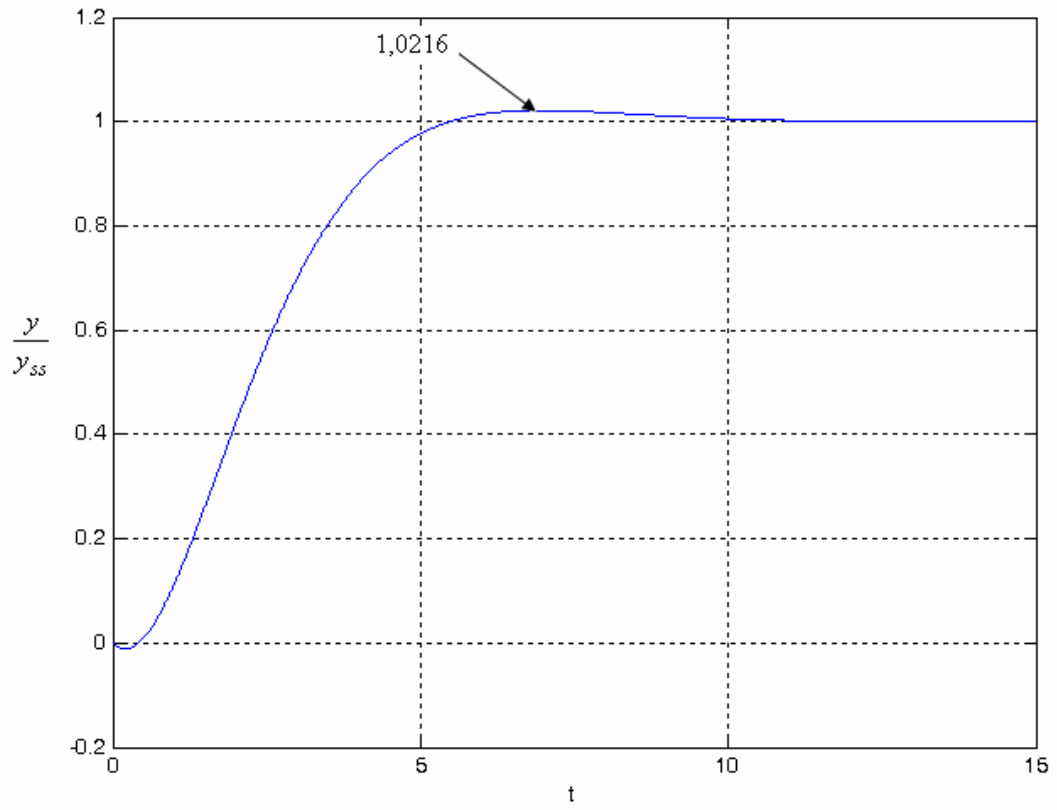
$$y = Cx \quad \text{ve} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır.

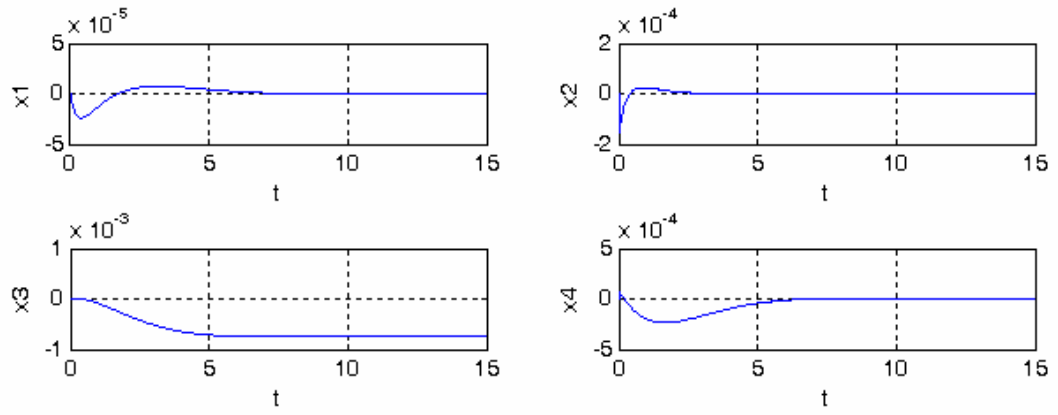
Yöntem, ters sarkaç mekanizmasında gösterildiği gibi uygulanır.

4.2.3 Benzetim sonuçları

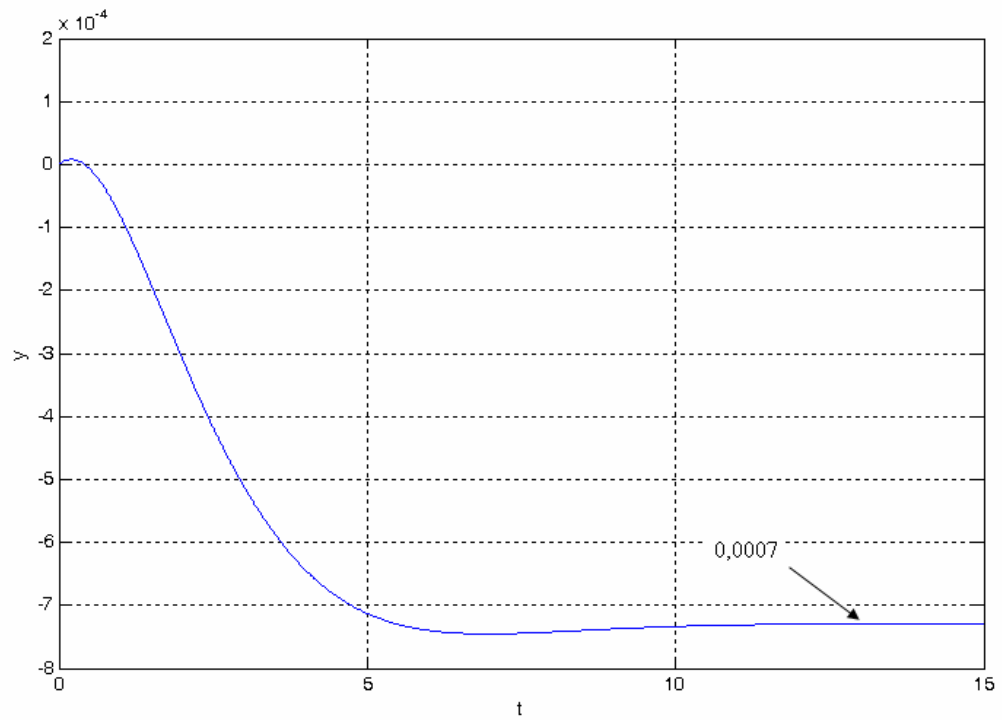
Örnek olarak tasarım şartı maksimum aşma değeri %2 ile %3 olacak şekilde belirlenip algoritma uygulanırsa maksimum aşma değeri %2,16 olarak bulunmakta ve bu değer için çıkışın normalize gösterimi, çıkışın zaman cevabı ve durum değişkenlerinin cevabı şekillerde gösterilmektedir.



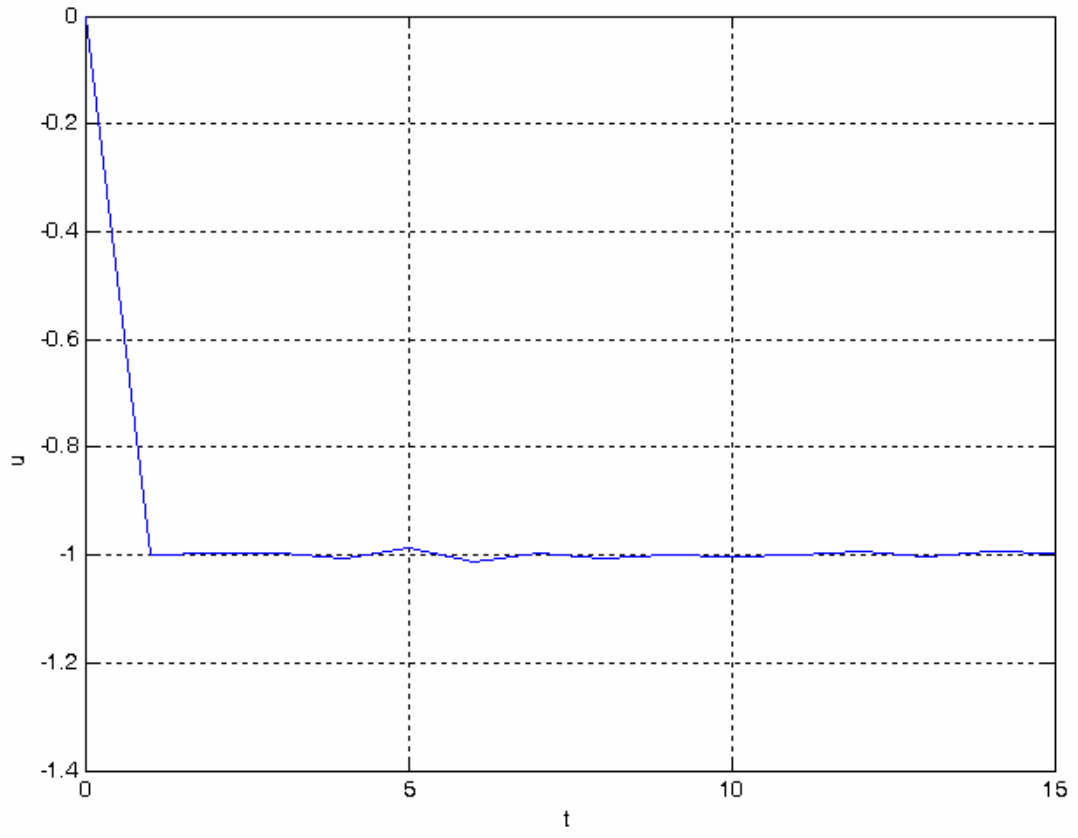
Şekil 4.14. Top-kiriş mekanizması için normalize çıkışın gösterimi



Şekil 4.15. Top-kirış mekanizması için durum değişkenlerinin davranışı



Şekil 4.16. Top-kirış mekanizması için çıkışın zamanla değişimi



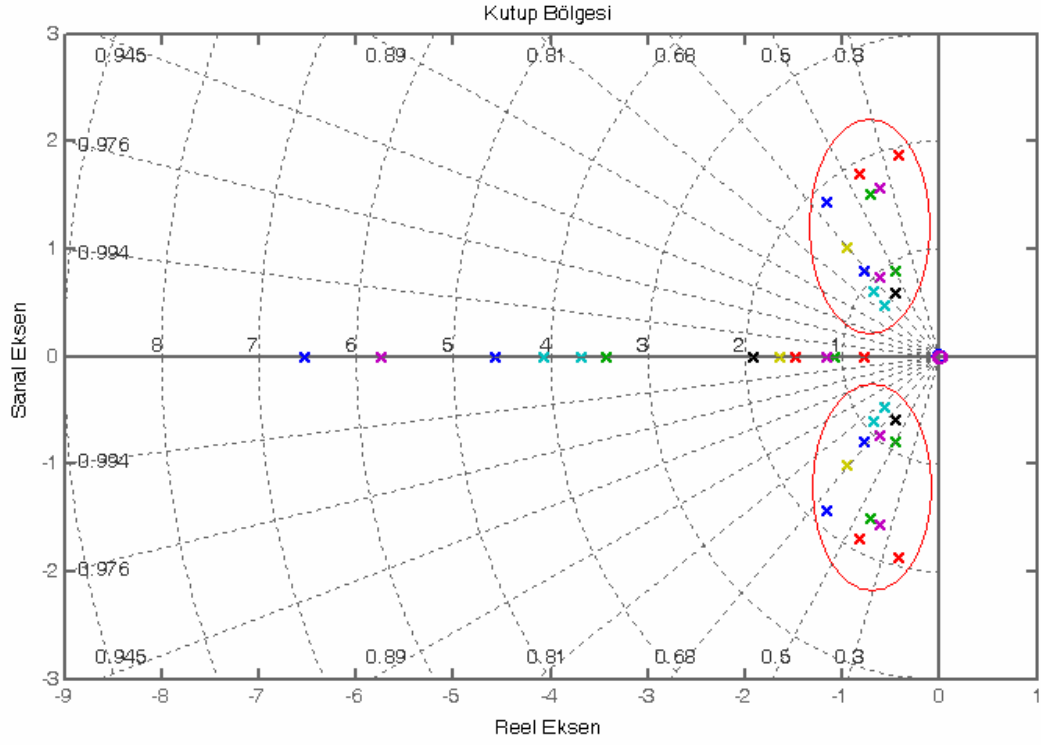
Şekil 4.17. Top-kiriş mekanizması için sisteme uygulanan kontrol girişi

Ters sarkaç mekanizmasında yapılan işlemlerin aynısı maksimum aşma değeri %2 ile %20 arasında olacak şekilde top-kiriş mekanizmasına uyarlanırsa Çizelge 4.4’de verilen değerler elde edilir.

Çizelge 4.4.Top-kiriş mekanizması için istenilen %2-%20 aralığındaki maksimum aşma ve buna karşılık gelen tepe zamanı ve çıkışın durağan-durum değerleri

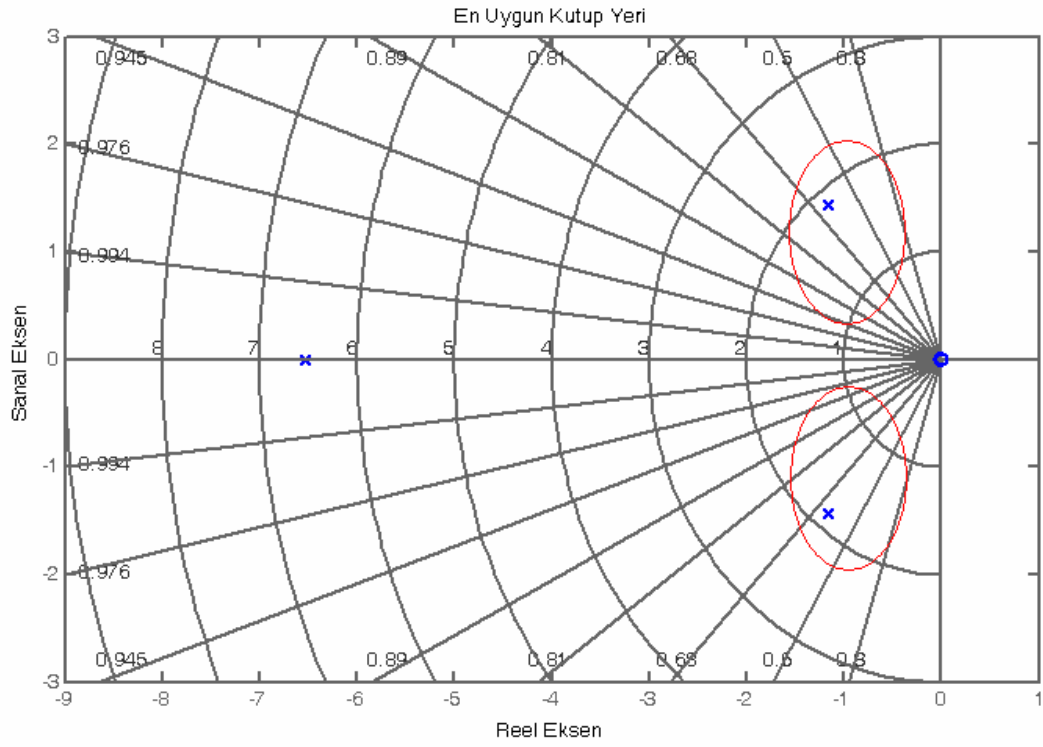
	y_{max}	t_p	y_{ss}
1	0,0472	4	0,0004
2	0,0564	3	0,0022
3	0,0678	3	0,0001
4	0,0266	6	0,0001
5	0,0641	4	0,001
6	0,0296	4	0,0053
7	0,0824	6	0,0434
8	0,0772	2	0,0004
9	0,1664	4	0,0002
10	0,0283	6	0,0007
11	0,0216	7	0,0007
12	0,1046	3	0,0001

Çizelge 4.4’de gösterilen tasarım şartlarına karşı gelen kutup bölgesi Şekil 4.18’de verilmektedir.



Şekil 4.18. Top-kiriş mekanizması için tasarlanan değerler için bulunan kutup bölgesi

En uygun kutbu bulmak için örnek olarak maliyet fonksiyonu eşit katsayılar için düzenlenirse; fonksiyonu minimum yapan değer sekizinci satırda yer alır. Kutup bölgesinde gösterimi Şekil4.19'deki gibidir.



Şekil 4.19. Top-kiriş mekanizması için verilen maliyet fonksiyonu için en uygun kutbun yeri

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yüksek mertebeden sistemlerde önceden tanımlanmış tasarım şartlarını sağlayacak en uygun kutup yerleri doğrusal karesel düzenleyici kullanılarak birim basamak bozucu giriş için bulunmaktadır.

Bu çalışmanın çıkış noktası, özellikle kutup yerleştirme probleminde karşılaşılan ve tasarımcıların çoğunun deneme yanılma yoluyla ulaşmaya çalıştığı en uygun kutup yerinin bulunmasıdır. Bu tez çalışmasında en uygun kutup yerini bulmak için bir algoritma geliştirilmektedir. Geliştirilen algoritmanın temeli Kobayashi ve Shimemura'nın çalışmasına [20] dayanmakta olup iki çalışmanın amaçları birbirinden farklıdır. Referans alınan çalışmadaki algoritmanın amacı, çıkışın üst sınırı ile doğrusal karesel düzenleyicideki ağırlık matrisleri arasında bir ilişki oluşturarak verilen bir üst sınır için gerekli olan ağırlık matrislerini ve böylece bir nevi en iyi kutup yerlerini belirlemektir. Bu tez çalışmasında ise referansta verilen algoritmaya ek olarak, çıkışın üst sınırı ile maksimum aşma arasında bir bağlantı kurulmakta ve aynı zamanda tepe zamanı ve çıkışın durağan durum değeri de kısıtlanarak bir kutup bölgesi elde edilmektedir. Bu bölgeyi elde etmek üzere geliştirilen algoritma, tasarımcılara sadece sistem matrislerini ve tasarım kriterlerini programa girerek istedikleri çıkışı verecek en uygun kutup yerlerini kolayca bulmalarını sağlamaktadır.

Sistemin kutuplarının yeri bulunurken, hem maksimum aşma hem de tepe zamanı ile ilgili kıstasların sağlanması gerekmektedir. Ayrıca çıkışın durağan durum değeri ile ilgili bir sınırlama da getirilmektedir. Bu üç kıstasın sağlanması ise, sistemin baskın kutuplarının yerlerini hem açısal konumları, hem de sanal ve reel eksenden uzaklığı bakımından etkilemektedir. Bütün bu sınırlamaları sağlayan baskın kutupların yerleri kompleks düzlemde bir bölge oluşturmaktır.

Bu çalışmada ortaya çıkan kutup bölgelerinde sistem kutuplarının sadece tek bir kıstasa göre (örneğin sadece maksimum aşmaya göre) hareketini belirlemek son derece güçtür. Çünkü her bir kutbun yeri belirlenirken üç kıstas göz önünde tutulmuş ve bu kıstaslara göre yerleştirilmiştir. Yine de benzetim sonuçlarına bakılarak; baskın kutupların gerçek eksenden açışal konumlarının maksimum aşmaya olan etkisi görülmektedir. Aynı şekilde baskın kutupların, gerçek eksenden uzaklıklarının (kutupların karmaşık kısımları) tepe zamanına olan etkisi ve sanal eksenden uzaklıklarının (kutupların gerçek kısımları) çıkışın durağan durum değerine etkisi belirgin olarak gözükmemektedir.

Bu çalışmada sisteme uygulanan bozucu giriş, birim basamak fonksiyonudur. Basamak fonksiyonunun kullanılma gerekçesi, bu fonksiyonun matematiksel ifadesinin kolay olması, diğer girişler için de uygulanabilir olması ve zaman cevabı özelliklerini karşılaştırmak için birim basamak fonksiyonundan yararlanılmasıdır.

Çalışmada verilen örnekler kontrol sistemlerindeki kullanım sıklığından ötürü ters sarkaç mekanizması ile top giriş mekanizmasıdır. Bu örnekler tek girişli - tek çıkışlı sistemlere örnek olup çok çıkışlı sistemlere, çıkışın normu düşünülerek uygulanabilir. Örneklerde verilen maliyet fonksiyonları tasarımcının isteğine göre şekillenebilir ve genetik algoritma da kolaylıkla uygulanabilir.

Çalışma sonuçları doğrusal olmayan sistemlere de uyarlanabilir, ancak bunun için doğrusal olmayan sistemin kararlılığını garanti edecek şekilde analizlerin yapılması gerekir.

KAYNAKLAR

1. Dorf, R. C., Bishop, R. H., "Modern Control Systems, 8th ed." , **Addison-Wesley Longman Limited**, U.K., 230-242 (1998).
2. Kuo, B. C., "Automatic Control Systems, 6th ed.", **Prentice Hall, Inc.**, U.S.A, 229-231, 307-380, 398-527 (1991).
3. Ogata, K., "Modern Control Engineering, 3rd ed.", **Prentice Hall**, U.S.A., 134-141 (1997)
4. Burns, R. S., "From Advanced Control Engineering, 1st ed.", **Butterworth-Heinemann**, Oxford, 35-38 (2001).
5. Driels, M., "Linear Control Systems Engineering, International ed.", **McGraw-Hill**, Singapore, 57-117 (1995).
6. Dutton, K., Thompson, S., and Barraclough B., "The Art of Control Engineering, 1st ed.", **Addison-Wesley Longman Limited**, U.K., 126-129 (1997).
7. Francis, B. A., "The optimal linear quadratic time-invariant regulator with cheap control", **IEEE Trans. On Automatic Control**, AC-24(4): 616-621 (1979).
8. Franklin, G. F., Powell, J. D., and Emami-Naeini, A., "Feedback Control of Dynamic Systems, 4th ed." , **Prentice Hall, Inc**, U.S.A., 94-157, 529-541 (2002).
9. Martins, N., Lima, L. T. G., And Pinto, H. J. C. P., "Computing Dominant Poles of Power System Transfer Functions", **IEEE Trans. Power Systems**, 11(1):162-170 (1996).

10. Martins, N., Quintao, P. E. M., "Computing Dominant Poles of Power System Multivariable Transfer Functions", ***IEEE Trans. Power Systems***, 18(1):152-159 (2003).
11. Rommes, J., Martins, N., "Computing Dominant Poles of Large Second-order Transfer Functions", ***Proceedings in Applied Mathematics. and Mechanics***, (2007).
12. Söylemez, M. T., "PID Kontrolör ile Baskın Kutup Atama", ***TOK'2002 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı***, Ankara, 219-228 (2002).
13. Baki, H., Munro, N., "A Model Order Reduction Technique for Parametric Uncertain Models", ***UKACC International Conference on CONTROL***, U.K., 302-306 (1998).
14. İnternet: Arxiv "Order Reduction of Optimal Control Systems"
<http://arxiv.org/pdf/math-ph/0409111v1> (2008)
15. Chahlaoui, Y., Gallivan, K. A., Vandendorpe, A., and Van Dooren, P., "Model Reduction of Second Order Systems", ***Model Reduction of Dynamical System, Eds. P. Benner et al.***, Springe Verlag, 1-23 (2004)
16. İnternet: acadjournal "Design of PID Controller Using Reduced Order Model"
<http://www.acadjournal.com> (2008)
17. Chen, Y., White, J., "A Quadratic Method for Nonlinear Model Order Reduction", ***In Inter. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators***, 1-4(2000)

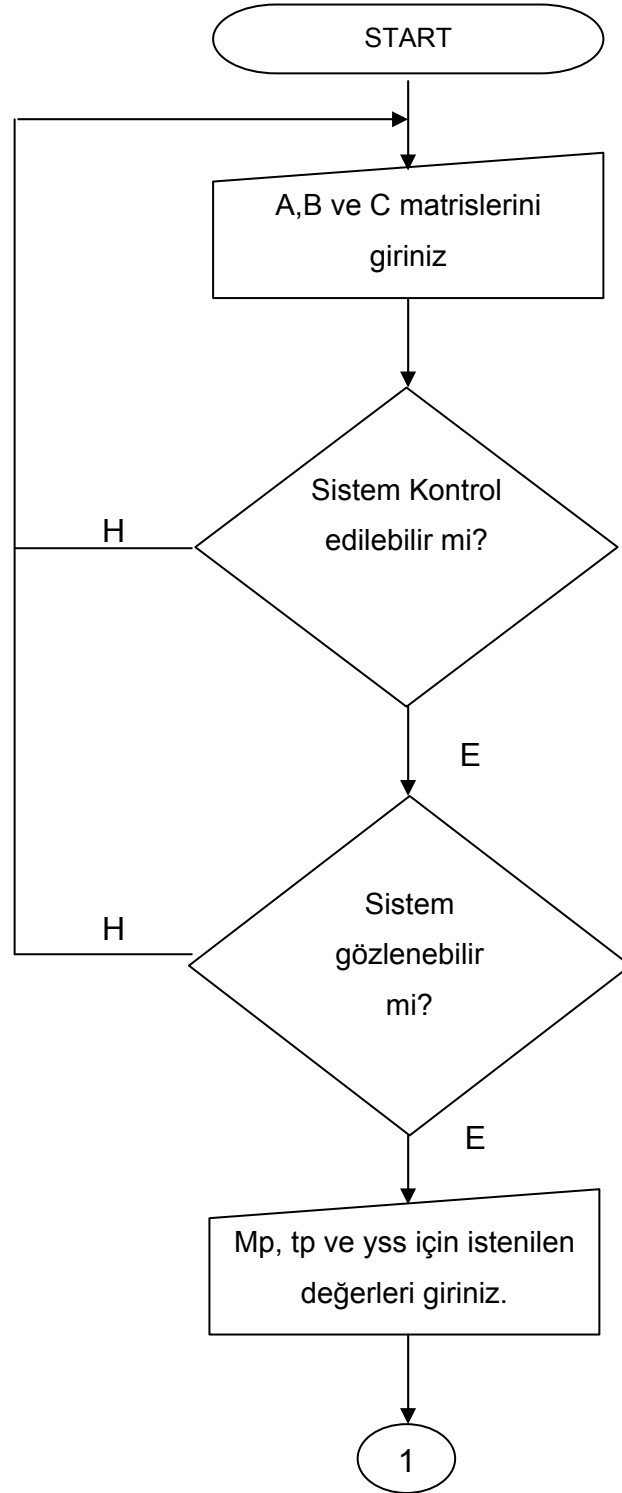
18. Koussiouris, T. G. and Bakirtzis, A. G., "Optimization and pole placement for a single input controllable system", ***International Journal of Control***, 33 (2): 355-362 (1981).
19. Kobayashi, H., Kawasaki, N. And Shimemura E., "Relation between pole assignment and LQ regulator", ***International Journal of Control***, 47 (4): 947-951 (1988).
20. Kobayashi, H., And Shimemura E., "Some properties of optimal regulators and their applications", ***International Journal of Control***, 33 (4): 587-599 (1981).
21. Keviczky, L. And Bányász C., "A new pole placement regulator design method", ***Conference on Decision & Control***, New Orleans, 3408-3413 (1995).
22. Sugimoto, K., "Partial pole placement by LQ Regulators: An inverse problem approach ",***IEEE Trans. On Automatic Control***, 43 (5): 706-708 (1998).
23. Söylemez, M. T. And Munro, N., "A new technique for partial pole placement using constant output-feedback", ***Conference on Decision & Control***, Florida, 1722-1727 (1998).
24. Franzé, G. And Muraca, P., "Eigenvalue assignment by static output feedback: Minimizing of control effort", ***Proceedings of the American Control Conference***, Chicago, 406-407 (2000).
25. Fujinaka, T. And Omatu, S., "Pole placement using optimal regulators", ***T. IEEE Japan***, 121-C(1): 240-245 (2001).

26. Harvey, C. A. and Stein G., "Quadratic weights for asymptotic regulator properties", **IEEE Trans. On Automatic Control**, AC-23(3):378-387 (1978).
27. Kawasaki, N. And Shimemura, E., "Determining quadratic weighting matrices to locate poles in a specified region", **Automatica**, 19 (5): 557-560 (1983).
28. Kawasaki, N. And Shimemura, E., "Pole placement in a specified region based on a linear quadratic regulator", **Int. Journal of Control**, 48 (1): 225-240 (1988).
29. Kim, S. And Furuta, K., "Regulator design with poles in a specified region", **International Journal of Control**, 47 (1): 143-160 (1988).
30. Lee, T. And Wu, J., "Optimal regional pole placement with time-weighted performance index", **Industrial Electr., Control, and Inst.**, U.S.A., 2218-2223 (1993).
31. Wu, J. And Lee T., "A new approach to optimal regional pole placement", **Automatica**, 33(10): 1917-1921 (1997).
32. Kiritsis, K. H., "A necessary condition for pole assignment by constant output feedback", **Systems & Control Letters**, 45 : 317-320 (2002).
33. Solheim, O. A., "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues" **International Journal of Control**, 15 (1): 143-160 (1972).
34. Zümrüt, Y., "Zaman Tanım Bölgesinde Güncel Tasarım Şartı Gruplarını Sağlayan Üçüncü Mertebe Modellerin Belirlenmesi ve Uygulanması Üzerine", Doktora Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 1-15 (2002).

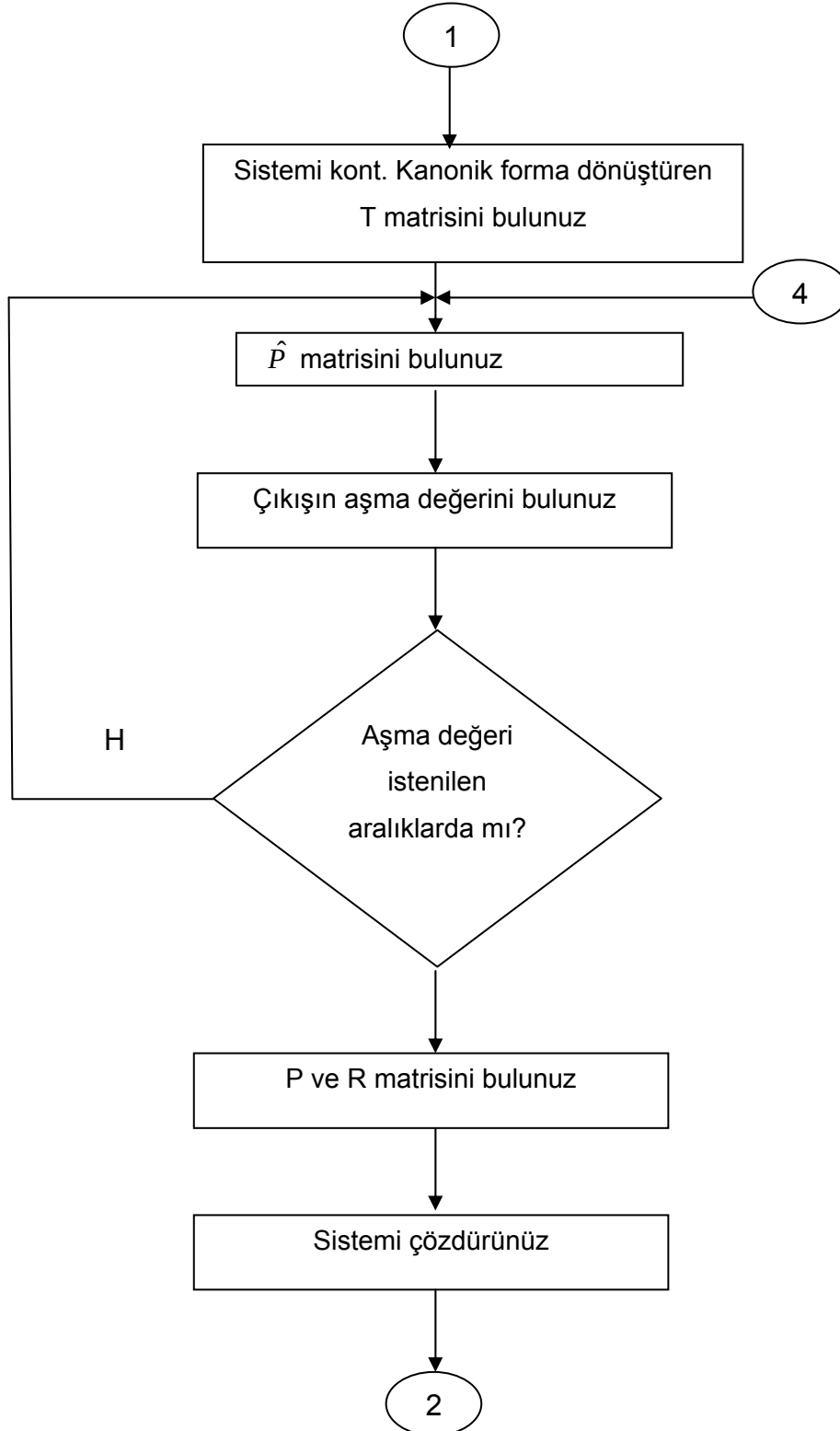
35. Liu, G. P., Patton, R. J., "Eigenstructure Assignment for Control System Design, 1st ed." , **John Wiley & Sons Ltd**, England, 1-27, 97-113 (1998).
36. Dorato, P., Abdallah, C., and Cerone V., "Linear Quadratic Control An Introduction, 1st ed." , **Prentice Hall, Inc.**, U.S.A., 1-33 (1995).
37. İnternet: Newcastle University " Inverted Pendulum"
<http://csd.newcastle.edu.au/simulations/cart.gif> (2008)
38. İnternet: Control System Principles "Ball and Beam"
<http://control-systems-principles-co.uk> (2008)
39. Saraç, H., "Belirsizlik içeren doğrusal olmayan dinamik sistemlere kayan kipli control tasarımı", Bitirme Projesi, **Gazi Üniversitesi**, Ankara, 21-29(2007).

EKLER

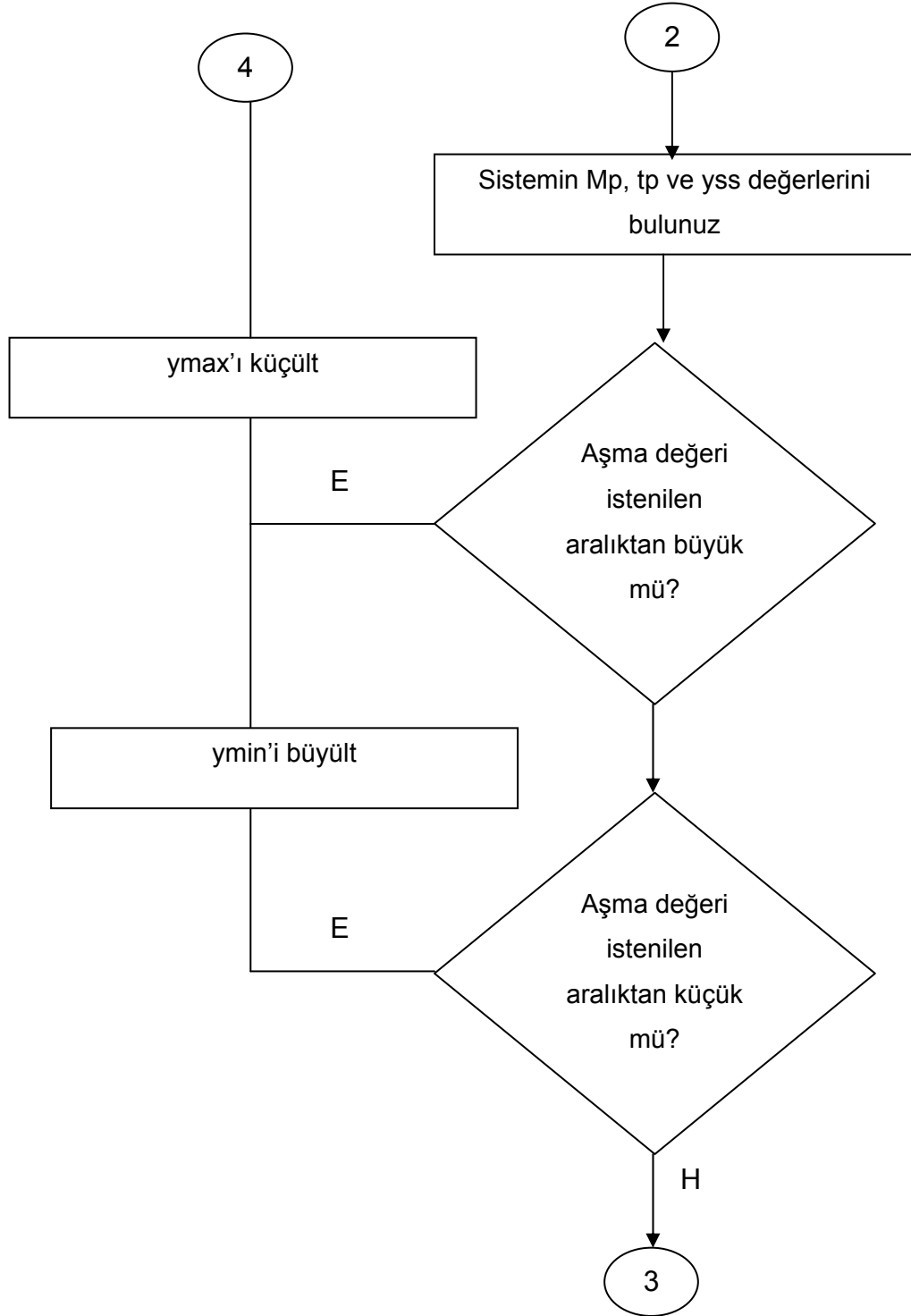
EK-1 Sistemlerin tasarım parametrelerini ayarlamak için geliştirilen algoritmanın akış diyagramıyla gösterimi



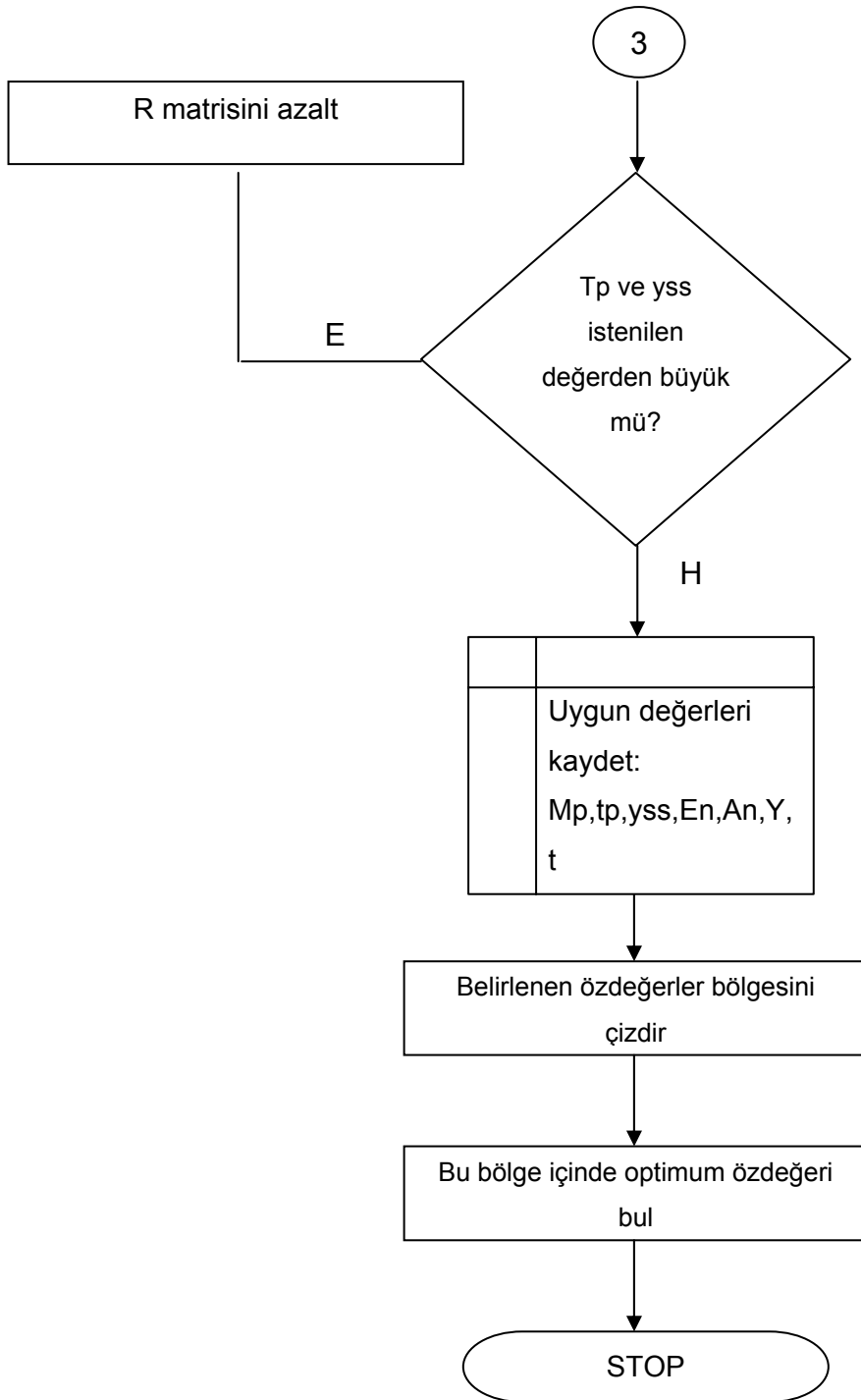
EK-1 (Devam) Sistemlerin geçici cevap parametrelerini ayarlamak için geliştirilen algoritmanın akış diyagramıyla gösterimi



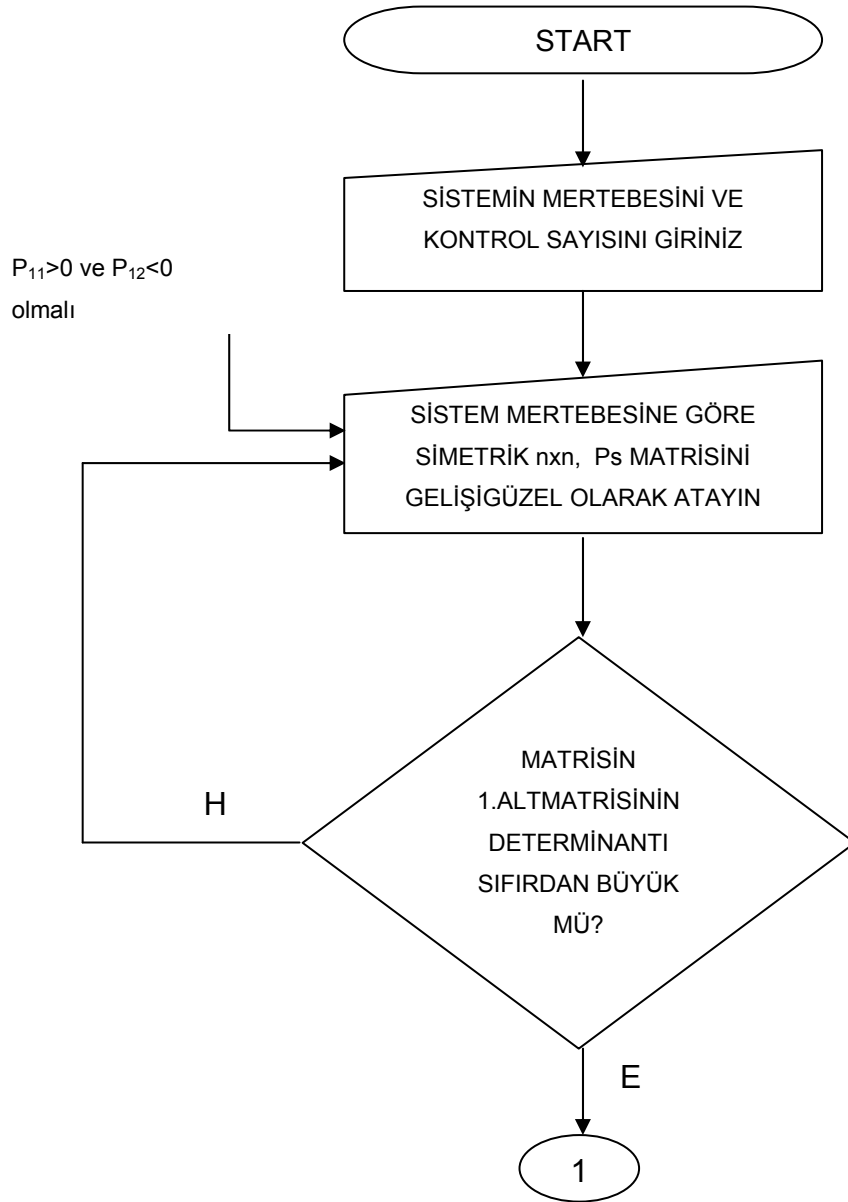
EK-1 (Devam) Sistemlerin geçici cevap parametrelerini ayarlamak için geliştirilen algoritmanın akış diyagramıyla gösterimi



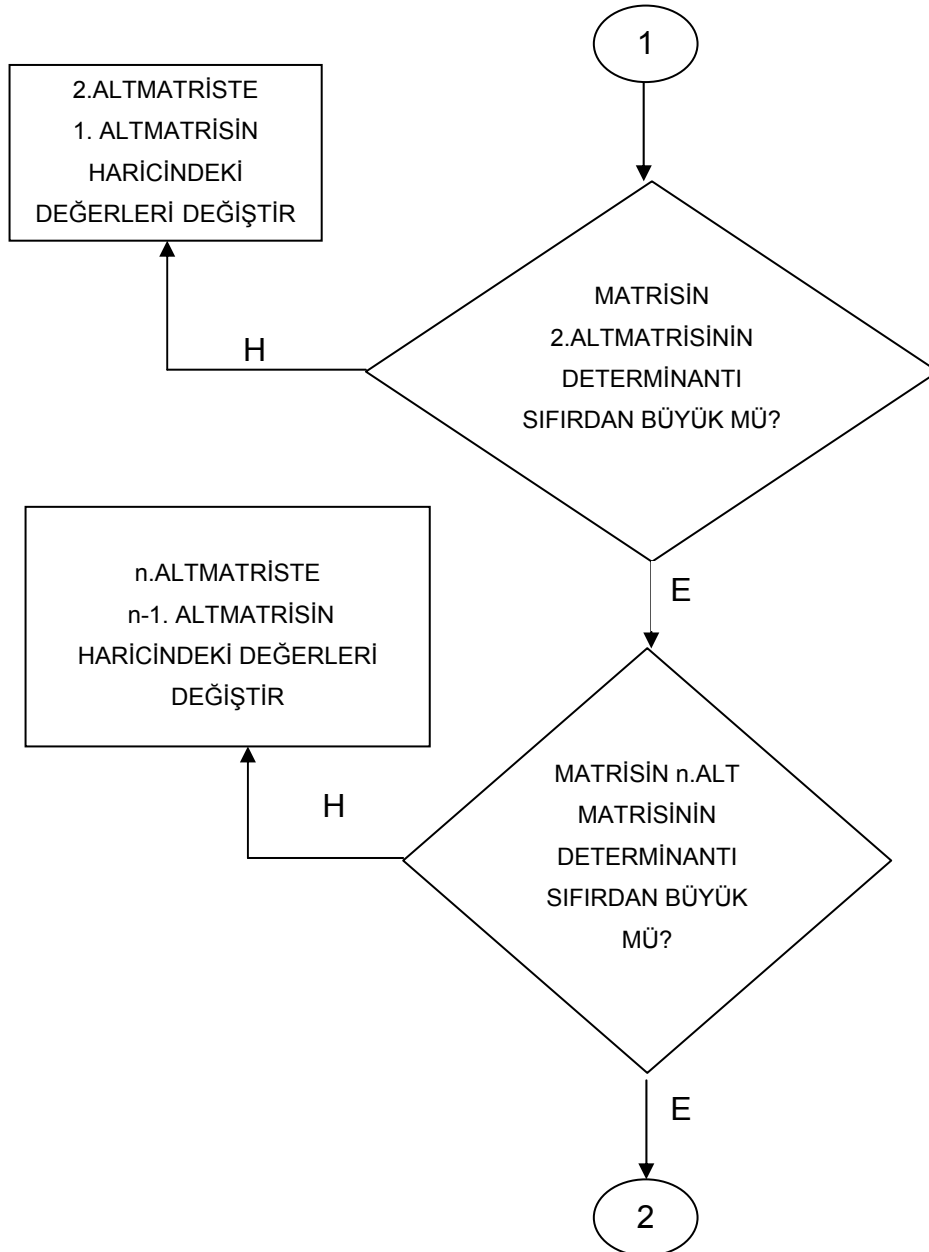
EK-1 (Devam) Sistemlerin geçici cevap parametrelerini ayarlamak için geliştirilen algoritmanın akış diyagramıyla gösterimi



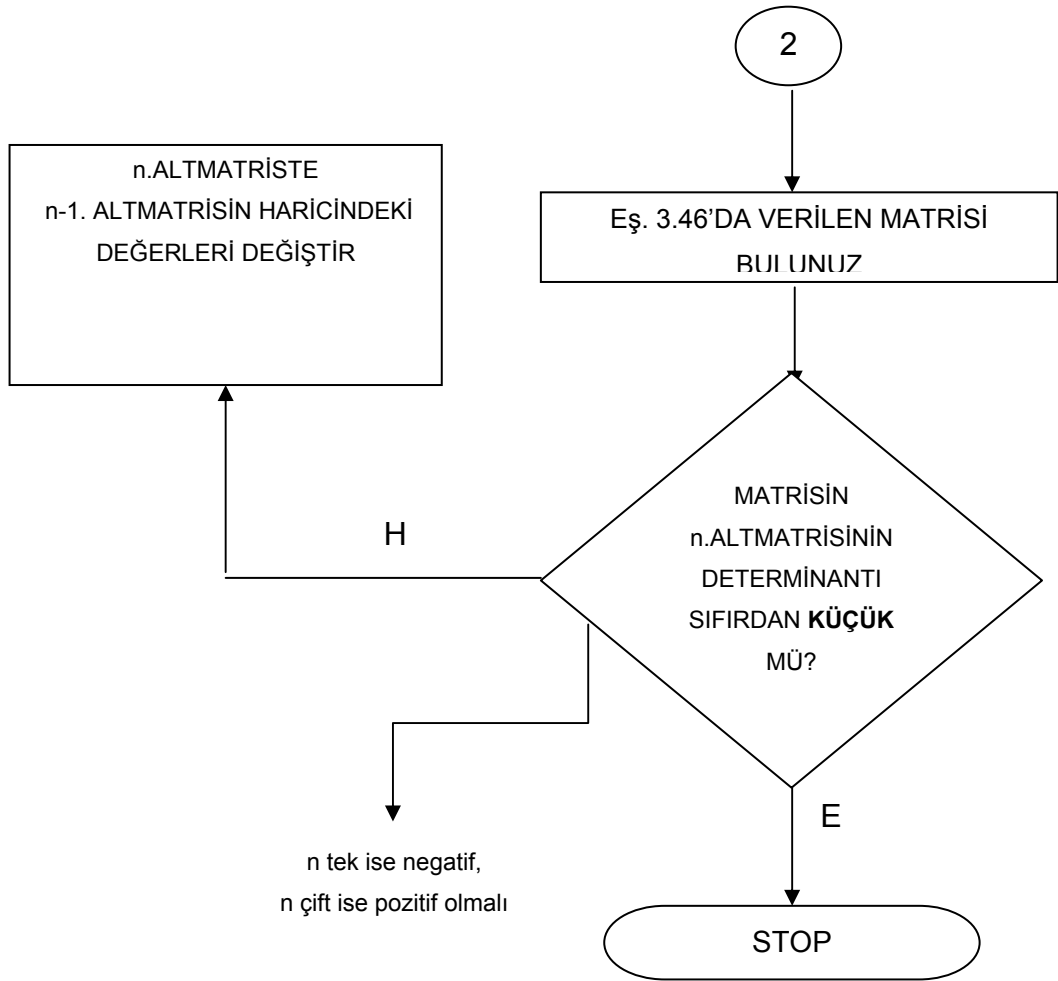
EK-2 Kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmüş sistemin doğrusal karesel (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nın bulunması ile ilgili akış diyagramı



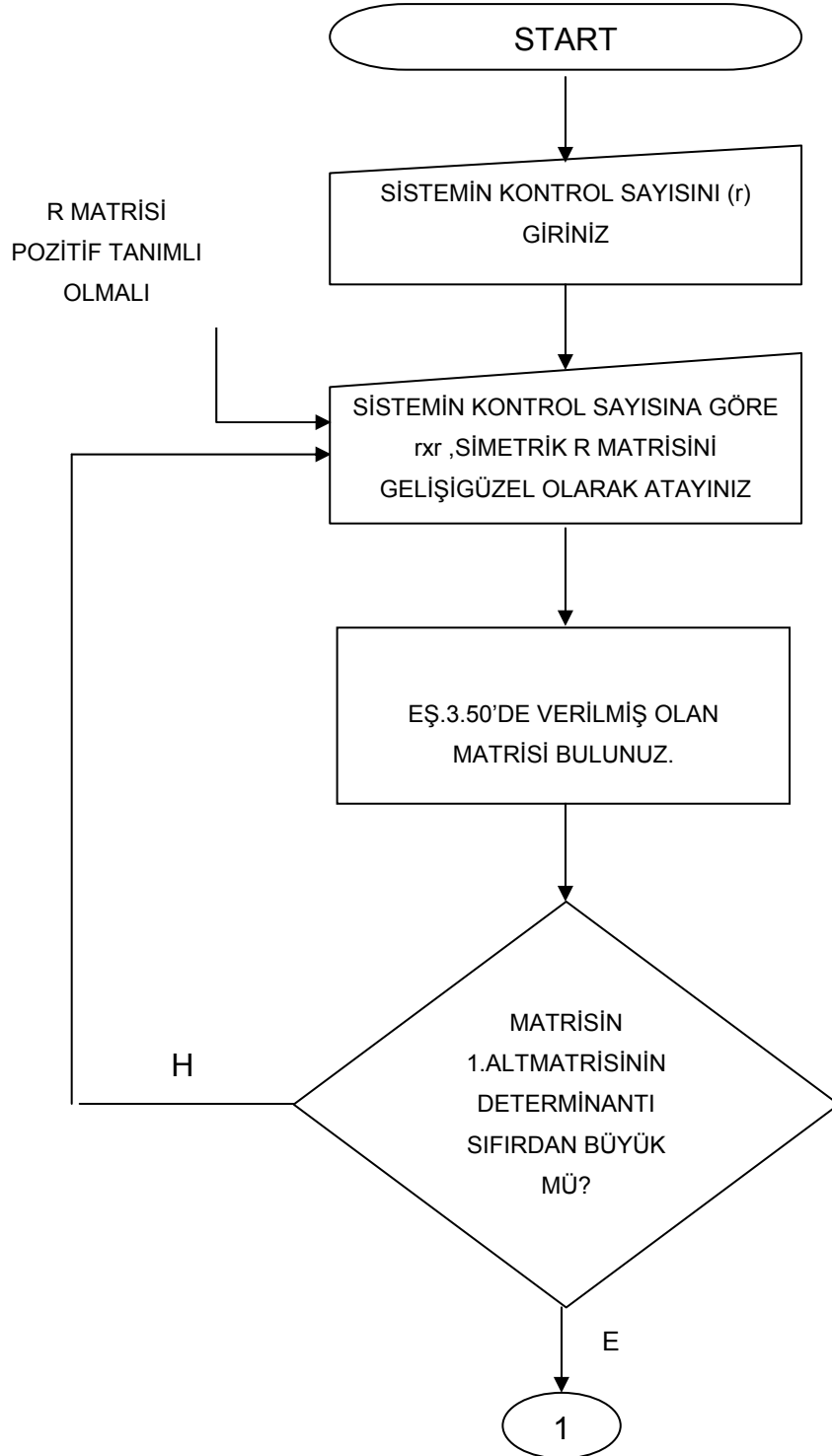
EK-2 (Devam) Kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmüş sistemin doğrusal karesel (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nın bulunması ile ilgili akış diyagramı



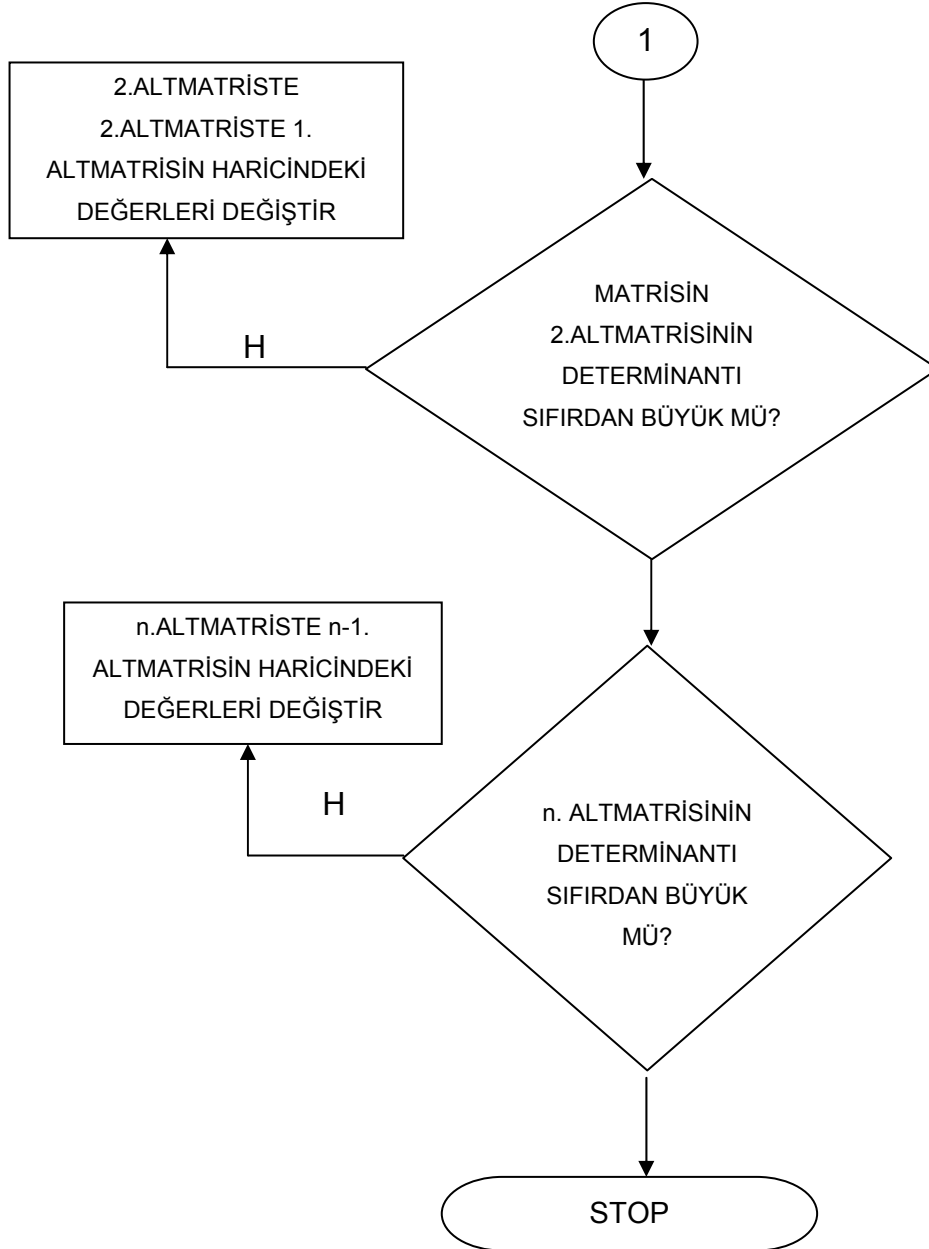
EK-2 (Devam) Kontrol edilebilir kanonik forma dönüştürülmüş sistemin doğrusal karesel (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nın bulunması ile ilgili akış diyagramı



EK-3 Algoritmanın beşinci adımında verilen ağırlık matrisi R' nin bulunmasını gösteren akış diyagramı



EK-3 (Devam) Algoritmanın beşinci adımında verilen ağırlık matrisi R' nin bulunmasını gösteren akış diyagramı



EK-4 Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası

```
% SISO örnek: Ters sarkaç Mekanizması
clear
clc
sonuc_dizisi={};

max_iteration_for_P_matrix=10;
mp_condition=0; % max aşma şartı sağlanmadı 0 sağlandı 1
tp_condition=0; % tp şartı sağlanmadı 0 sağlandı 1
yss_condition=0; % yss şartı sağlanmadı 0 sağlandı 1
process_completed=0; % ana döngü
minimum_deger_sayisi=3; % her aralıkta bulunacak en az değer sayısı

max_iteration_for_aralik=5; %bir aralık için yapılacak maksimum iterasyon sayısı
iteration_aralik=0;

for ind=1:5

    for ind=1:5

        A =input('A matrisini giriniz : ');
        B =input('b matrisini giriniz : ');
        c =input('c matrisini giriniz : ');

        % SISO örnek: Ters sarkaç Mekanizması
        %A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-0.4905 0 0 0];
        %B=[0;-1;0;0.5];
        %c=[0 0 1 0];
        % SISO örnek: Top-Kiriş Mekanizması
        % A=[0 1 0 0;0 -0.4444 -9.81 0;0 0 0 1;-42.0429 0 0 0];
        % B=[0;0;0;47.6190];
        % c=[1 0 0 0];

        % controllability test

        Co=ctrb(A,B);
        unco=length(A)-length(Co);

        if unco==0
            disp('sistem kontrol edilebilir.')
            break
        else disp('sistem kontrol edilemez. Başka sistem matrisi ve kontrol matrisiyle deneyiniz ')
    end
end
```

EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanması içeren Matlab dosyası

```

end
end

%observability test

Ob = obsv(A,c);
unob = length(A)-rank(Ob);

if unob==0
    disp('sistem gözlenebilir.')
    break
else disp('sistem gözlenebilir değil.Başka sistem matrisi ve çıkış matrisiyle
deneyiniz ')
end
end

%%
% STEP 1: sistemi kontrol edilebilir kanonik forma döndürmek

JA=poly(A);
a1=JA(2);a2=JA(3);a3=JA(4);a4=JA(5);
W=[a3 a2 a1 1;a2 a1 1 0;a1 1 0 0;1 0 0 0];
T=Co*W;
TI=inv(T);

%kanonik ifade edilmiş sistem matrisleri

Ac=TI*A*T;
bc=TI*B;
%%
y_min=input('istenilen maksimum aşma değerinin alt sınırını giriniz :');
y_max=input('istenilen maksimum aşma değerinin üst sınırını giriniz :');
yminclass=input('istenilen maksimum aşma (klasik) değerinin alt sınırını
giriniz :');
ymaxclass=input('istenilen maksimum aşma (klasik) değerinin üst sınırını
giriniz :');
sensitivity=input('istenilen hassasiyeti giriniz:');
mpgenel=[yminclass:sensitivity:ymaxclass];

ymin=y_min;
ymax=y_max;

aralik_inx=0;

```


EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası

```

next_inx=1;
iteration_process=0;
toplam_deger_inx=0;

while (~process_completed)

    iteration_process=iteration_process+1

    if (aralik_inx==(length(mpgenel)-1)) % tüm aralıklar tarandı
        process_completed=1;
        break;
    end

    if (next_inx) % eğer şu anki aralık için işlemler tamamsa sonraki aralığa
    geç
        ymin=y_min;
        ymax=y_max;
        aralik_inx=aralik_inx+1;
        next_inx=0;
        aralik_tamam=0;
        araliktaki_deger_sayisi=0;
        'next index'
    end

    mpmin=mpgenel(aralik_inx);
    mpmax=mpgenel(aralik_inx+1);
    iteration_aralik=0;

    while (~aralik_tamam)

        iteration_aralik=iteration_aralik+1

        iteration_mp=0;
        mp_condition=0;

        while(~mp_condition) % max aşma sağlanmadığı müddetçe dön
            iteration_mp=iteration_mp+1;

            [temp,n]=size(A);
            [temp,rr]=size(B);

            [p,e]=psapka(n,rr);

```

EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası

```

Pci=inv(p);
Cc=c*T;
C1=Cc(1,:);

y1=(sqrt(Pci(1)*(C1*p*C1')))/abs(C1(1));

if (y1>ymin )& (y1<ymin)
    P=inv(T*p*(T'));
    mp_condition=1; % p matrisi şarta uygun
else
    mp_condition=0; % p matrisi şarta uygun değil başa dön
end

if iteration_mp>max_iteration_for_P_matrix
    disp('P matrisi bulunamadı');
    iteration_mp
    break;
end
end

if (mp_condition) % Mp şartı sağlanmışsa sonraki adıma geç

    Rt=RsapkaFun(n,rr,A,B,P)
    An=A-B*Rt*B'*P;
    K=-Rt*B'*P;

    disp('ode basla')

%    tspan = 0:0.0001:3;
%    x0=[0;0;0;0];
%    x = ode5(@dif,tspan,x0,An,B);
%    t=0:0.01:15;
%    [t,x]=ode45(@dif,t,x0,[],An,B);
%    Y1=c(1)*x(:,1)+c(2)*x(:,2)+c(3)*x(:,3)+c(4)*x(:,4);
%    U=K(1)*x(:,1)+K(2)*x(:,2)+K(3)*x(:,3)+K(4)*x(:,4);
%    disp('ode bitti')

%
%    Y1
%    yss=abs(Y1(end));
%    Ynew=Y1/Y1(end);
%    [maxy1,yindis]=max(abs(Y1));

```

EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası

```

maxy=abs((maxy1-yss)/yss)
tmax=t(yindis);

if maxy>ymaxclass % şartı sağlamıyor while dön
    ymax=ymax*0.8;
    mp_condition=0;
    next_inx=0; % aynı aralık için tekrar başa dön
    disp('klasik şarta uymadı maximum için');
elseif maxy<=yminclass % şartı sağlamıyor while dön
    ymin=ymin*1.2;
    maxy
    mp_condition=0;
    disp('klasik şarta uymadı minimum için');
    next_inx=0; % aynı aralık için tekrar başa dön
end

end

if (mp_condition)
    while (~tp_condition)

        if (tmax>tpmax)
            Rt=Rt+Rt*0.001; % Rt yi yüzde 10 artır
            Rt
            'Tmax şartı uygun değil Rt yi yüzde 10 artır'
            tp_condition=0;
        else
            'Tmax şartı tamam'
            tp_condition=1;
        end
    end
end

end

if (tp_condition)

    while (~yss_condition)

        if (yss>yssmax)
            Rt=Rt-Rt*0.01; % Rt yi yüzde 10 azalt
            'yssmax şartı uygun değil Rt yi yüzde 10 azalt'
            yss_condition=0;
        else

```

EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanması içeren Matlab dosyası

```

        'yssmax şartı tamam'

        yss_condition=1;
    end
end

end

if (yss_condition) % hem max aşma hem tepe zamanı hemde çıkış
hatasını sağlıyor
    disp('% hem max aşma hem tepe zamanı hemde çıkış hatasını
sağlıyor');

    ayni_sonuc=0;
    if toplam_deger_inx>0
        for e=1:toplam_deger_inx
            if
(maxy==sonuc_dizisi{e,1})&(tmax==sonuc_dizisi{e,2})&(yss==sonuc_dizisi{e
,3})
                ayni_sonuc=1;
                'Benzer sonuç bulunmuştur'
                break;
            end
        end
    end
end

if (~ayni_sonuc)

    mpmin_s=num2str(mpmin);
    mpmax_s=num2str(mpmax);
    An=A-B*Rt*B'*P;
    En=eig(An);
    Bn=B*Rt*B'*P;
    araliktaki_deger_sayisi=araliktaki_deger_sayisi+1;

    toplam_deger_inx=toplam_deger_inx+1;

    sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,1}=maxy;
    sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,2}=tmax;
    sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,3}=abs(yss);
    sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,4}=En;
    sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,5}=An;
    sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,6}=Bn;

```

EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası

```

sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,7}=abs(Y1);
sonuc_dizisi{toplam_deger_inx,8}=t;

disp(sprintf(['Aralık : ',mpmin_s,' ile ',mpmax_s,' arasında']));

iteration_process
end

end

if ( iteration_aralik==max_iteration_for_aralik)
    aralik_tamam=1;
    next_inx=1;
    'Bu aralık için bulunamadı'

end

if (araliktaki_deger_sayisi==minimum_deger_sayisi)
    aralik_tamam=1;
    next_inx=1;
    'aralık tamam'
end
end
end

'İşlem tamamlandı'

alpha1=0.05;
alpha2=0.05;
alpha3=0.9;

for k=1:toplam_deger_inx
    tp=sonuc_dizisi{k,2};
    mp=sonuc_dizisi{k,1};
    yss=sonuc_dizisi{k,3};
    J(k)=alpha1*abs(mp)+alpha2*abs(tp)+alpha3*abs(yss);
End

```

EK-4 (Devam) Ters sarkaç mekanizmasına verilen algoritmanın uyarlanmasını içeren Matlab dosyası

```
Jmin=min(J);
Jmax=max(J);

inx_min=find(J==Jmin);
inx_max=find(J==Jmax);

sonuc_min={sonuc_dizisi{inx_min,:}};
sonuc_max={sonuc_dizisi{inx_max,:}};

figure;

for k=1:toplam_deger_inx
    an=sonuc_dizisi{k,5};
    bn=sonuc_dizisi{k,6};

    [b,a]=ss2tf(an,bn,c,[0 0 0 0],1);h{k}=tf(b,a);

    if k==inx_min
        pzmap(h{k},'g'); %bu p-z ler min yapanlar
    elseif k==inx_max
        pzmap(h{k},'r'); %bu p-z ler max yapanlar
    else
        pzmap(h{k},'b');
    end

    hold on;
end
hold off;

% fig=gca;
% set(fig, 'XTick',[-4:1:2]);
%

figure

subplot(2,1,1);
plot(sonuc_min{8},sonuc_min{7}); title('Minimum için');
grid on
subplot(2,1,2);
plot(sonuc_max{8},sonuc_max{7}); title('Maximum için');
grid on
```

EK-5 Kontrol edilebilir kanonik form için, doğrusal kuadratik (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nin hesaplanmasını içeren fonksiyon

$\hat{P}$ matrisi oluşturmak için iki şart vardır. Bunlardan ilki bu matrisin pozitif tanımlı simetrik matris olmasıdır. Bu şartı sağlamak için ps fonksiyonu ile gösterilen program yapılmıştır. Bu program pozitif tanımlı bir matris yaratır.

```
function p= ps(n)
z=10;
for i=1:20
p(1,1)=rand(1);p(1,2)=-rand(1);p(2,1)=p(1,2);p(2,2)=rand(1);
    if det(p)>0
        break
    end
end
ind=3;
while ind<=n
    p(1:ind,ind)=-z+2*z*rand(ind,1);
    if p(2,3)>0
        p(2,3)=(rand(1)+(p(1,3)./10+p(2,2))^2)/(4*p(1,2));
    end
    for ind1=1:ind-1
        for ind2=3:ind
            p(ind2,ind1)=p(ind1,ind2);
        end
    end
    if det(p(1:ind,1:ind))>0
        ind=ind+1;
    end
end
```

EK-5 (Devam) Kontrol edilebilir kanonik form için, doğrusal kuadratik (LQ) probleminin çözüm matrisi $\hat{P}$ 'nin hesaplanmasını içeren fonksiyon

İkinci şart Eş. 3.46 'da verilmiştir. ps fonksiyonundan bulunan pozitif tanımlı matris şartlara uyuyor mu diye aşağıda verilen psapka fonksiyonuyla kontrol edilir. Bunun sonucunda iki şartı da sağlayan $\hat{P}$ matrisi bulunmuş olur.

```
function [P,E]=psapka(n,rr)
ind3=1;
s=[eye(n-rr) zeros((n-rr),rr)];
st=[zeros((n-rr),rr) eye(n-rr)];
%E matrisini kontrol et
p=ps(n);
while ind3<=(n-rr)
E=s*p*st'+st*p*s';
if ((ind3/2)==round(ind3/2) && det(E(1:ind3,1:ind3))>0 ) ||
((ind3/2)~=round(ind3/2) && det(E(1:ind3,1:ind3))<0)%
ind3=ind3+1;
else
p=ps(n);
ind3=1;
end
end
```


EK-6 R matrisinin bulunması ile ilgili fonksiyon (fonksiyon adları: *agirlik* ve *Rsapka*)

R matrisini oluşturma'nın iki kuralı vardır. Bu sebeple iki tane fonksiyon yazılırsa, bunlardan ilk verilen adı *agirlik* olan fonksiyon pozitif tanımlı R matrisi yaratmak için yazılırsa;

```
function [Rs]= agirlik(rr)

% R; pozitif tanımlı nxr matris ise

Z=1000000;

Rs(1,1)=1000000*rand(1);
ind=2;

while ind<=rr
    Rs(1:ind,ind)=Z*rand(ind,1);%-Z+2*

    for ind1=1:ind-1
        for ind2=2:ind
            Rs(ind2,ind1)=Rs(ind1,ind2);
        end
    end

    if det(Rs(1:ind,1:ind))>0

        ind=ind+1;
    end
end
```

EK-6 (Devam) R matrisinin bulunması ile ilgili fonksiyon (fonksiyon adları: agirlik ve Rsapka)

R matrisini hesaplatmak için ikinci yazılan fonksiyon Rsapka adlı olup agirlik fonksiyonu tarafından bulunan pozitif tanımlı matris R 'ın Eş. 3.50'deki kurala uygun olup olmadığını kontrol edip Eş. 3.49 ve 3.50'deki kurallara uygun matris yaratır;

```
function [Rt]=Rsapka(n,rr,A,B,P)
% R matrisinin hesaplanması

[Rs]= agirlik(rr)

indis=1;

while indis<=(n)
Equation=B*Rs*B'-(inv(P)*A'+A*inv(P));

    if (det(Equation(1:indis,1:indis))>0)
        indis=indis+1;
    else
        [Rs]= agirlik(rr)
        indis=1;
    end
end
Rt=(1/2)*Rs+1
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DOĞAN, Ceyda
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.11.1982, İzmir
 e-mail : ceyda_doan@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Makine Müh. Böl.	2005
Lise	Özel Çukurova Bilfen Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Doğan C.,Salamcı U.M.,Tombul G.S.,"Kararlı Manifold Teoremini Kullanarak Doğrusal Olmayan Sistemler için Denetleyici Tasarımı",Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Kayseri 2005
2. Tombul G.S.,Salamcı U.M.,Doğan C.,"Nonlineer Sistemler için Değişken Yüzey Kullanarak Kayan Kipli Denetim Tasarımı",Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, İstanbul 2005