

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2×2 BLOK MATRİSLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Zübeyde ULUKÖK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA 2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2×2 BLOK MATRİSLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Zübeyde ULUKÖK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ... / ... / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

(Üye)

(Üye)

(Danışman)

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi
 2×2 BLOK MATRİSLER İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Zübeyde ULUKÖK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
2009, 77 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Lineer cebir ve matris teori matematik bilim dalında temel bir araçtır. Matris teori, matematiğin en zengin dallarından biridir. Matris teori, uygulamalı matematiği içeren çeşitli alanlarda, bilgisayar bilimlerinde, ekonomide (iktisatta), mühendisliklerde, istatistik ve diğer birçok alanda geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Özellikle blok matrisler, çeşitli matris problemlerinde özellikle matris eşitsizlikleri türetmek de önemli rol oynamaktadır.

Biz bu çalışmanın temeli olarak, ilk önce pozitif yarı tanımlı blok matrislerin singüler değerleri için bazı eşitsizlikler vereceğiz. Daha sonra blok matrislerin özelliklerinden faydalanarak pozitif yarı tanımlı matrislerin ve pozitif yarı tanımlı blok matrislerin çarpımlarının, Hadamard çarpımlarının ve toplamalarının izleri için elde edilen eşitsizlikleri vereceğiz.

ANAHTAR KELİMELEER: Öz değerler, Singüler Değerler, Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler, Blok Matrisler, İz Eşitsizlikleri, Hadamard Çarpımlar, Matris Eşitsizlikleri.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INEQUALITIES FOR 2×2 BLOCK MATRICES

Zübeyde ULUKÖK

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2009, 77 Pages

Juries: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Linear algebra and matrix theory are fundamental tools in mathematical disciplines. Matrix theory is one of the richest branches of mathematics. Matrix theory is widely used in a variety of areas including applied math, computer science, economics, engineering, operations research, statistics, and others. Especially, block matrices play an important role in various matrix problems, specially in deriving matrix inequalities.

In the first step of this study, we established some inequalities for singular values of positive semidefinite block matrices. Also, we got some inequalities on traces of product, Hadamard product and sum of positive semidefinite matrices and positive semidefinite block matrices by using properties of block matrices.

KEYWORDS: Eigenvalues, Singular Values, Positive Semidefinite Matrices, Block Matrices, Trace Inequalities, Hadamard Product, Matrix Inequalities.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ	v
1. GİRİŞ	1
2. BAZI ÖZEL TİPTEKİ MATRİSLER	5
2.1. Hermityen Matrisler	5
2.2. Pozitif Tanımlı ve Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler	9
2.3. Matris Ayrışimleri	15
3. BLOK MATRİSLER	18
3.1. Blok Matrislerin Elemanter İşlemleri	18
3.2. Blok Matrislerin Determinantı ve Tersi	20
3.3. AB ve BA Matrislerinin Öz Değerleri	24
3.4. Süreklilik Argümanı	26
3.5. Blok Matrislerin Schur Tamamlayanları	26
3.6. Pozitif Yarı Tanımlı Blok Matrisler	38
3.7. Kronecker Çarpım ve Hadamard Çarpım	41
3.8. Schur Tamamlayanları ve Hadamard Çarpımlar	44
3.9. Majorizasyon Eşitsizlikleri	47
4. POZİTİF YARI TANIMLI BLOK MATRİSLERİN SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER	54
5. POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLER İÇİN İZ EŞİTSİZLİKLERİ	63
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	75
7. KAYNAKLAR	76

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma, matris teoride önemli bir yere sahip olan blok matrislerle ve pozitif yarı tanımlı matrislerle ilgili eşitsizlikler üzerine hazırlanmıştır. Çalışmanın birinci bölümü 'GİRİŞ'e ayrılmış, ikinci bölümde bazı özel tipteki matrisler ve özellikleri ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise blok matrislerin temel özellikleri ve blok matrislerle ilgili bilinen eşitsizlikler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, pozitif yarı tanımlı blok matrislerin singüler değerleri için elde edilen eşitsizlikler verilmiştir. Beşinci bölümde ise pozitif yarı tanımlı matrisler ve pozitif yarı tanımlı blok matrislerin izleri ile ilgili elde edilen eşitsizlikler sunulmuştur.

Bu çalışmada benden her türlü yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN'e ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Zübeyde ULUKÖK

Konya, 2009

1. GİRİŞ

Bu bölümde, ilk olarak matrislerin öz değerleri ve singüler değerleri üzerine yapılan çalışmalar hakkında bilgi vereceğiz.

Bhatia ve Kittaneh (2000), herhangi A ve B matrisleri için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği olarak bilinen,

$$2s_j AB^* \leq s_j A^*A + B^*B, \quad j=1,2,\dots$$

singüler değer eşitsizliğini vermiştir.

Zhan (2004), Bhatia ve Kittaneh (2000) tarafından verilen eşitsizliğin blok matrisleri kullanarak yeni bir ispatını vermiştir. Ayrıca Zhan, $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ve $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ matrisi, A ve B matrislerinin direk toplamını belirtmek ve $j=1,2,\dots,n$ olmak üzere,

$$s_j A-B \leq s_j A \oplus B$$

sonucunu elde etmiştir.

Wang, Xi ve Zhang (1999), A ve B aynı mertebeden pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere,

$$s A-B \prec_{\log w} s A+B$$

ve sonuç olarak,

$$s A-B \prec_w s A+B$$

olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca bu yazarlar A ve B aynı mertebeden pozitif yarı tanımlı matrisler ve U ve V herhangi kontrakşın matrisler olmak üzere,

$$\text{tr } A-B \leq \text{tr } |A-UBV| \leq \text{tr } A+B,$$

$A > 0$ ve $B \geq 0$ matrisleri için,

$$\lambda A^{-1}B \geq \lambda A_{11}^{-1}B_{11} \oplus 0$$

ve $A \geq 0$, $B \geq C \geq 0$ ve $A+C > 0$ olmak üzere,

$$\lambda(A+B)^{-1}B \geq \lambda(A+C)^{-1}C$$

eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Tao (2006), $M \in M_m$, $N \in M_n$, $r \equiv \min\{m, n\}$ olmak üzere verilen $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$

pozitif yarı tanımlı blok matrisi için $j = 1, 2, \dots, r$ olacak şekilde,

$$2s_j(K) \leq s_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$$

eşitsizliğini vermiştir.

İkinci olarak, matrislerin izleri üzerine yapılan bazı çalışmaların temel sonuçları verilecektir. Daha sonraki bölümlerde bu sonuçlarla elde ettiğimiz bazı sonuçlar karşılaştırılacaktır.

İz eşitsizlikleri birçok alanda oldukça kullanışlıdır. Örneğin iz eşitsizlikleri, kontrol teorisinde, birçok girdi ve çıktılı iletişim sistemlerinde ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla literatürde de matrislerin izleri ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Şimdi bu çalışmanın hazırlanmasında temel teşkil eden bazı önemli çalışmaların sonuçlarını kısaca vereceğiz.

Zhang ve Wang (1995), pozitif yarı tanımlı $n \times n$ A ve B matrisleri için α , β reel sayılar ve “ $\circ$ ” Hadamard çarpımı belirtmek üzere,

$$\text{iz } A \circ B^{-\alpha} \leq \text{iz } A^{-\alpha} \circ B^{\alpha}, \quad \alpha \leq 0 \text{ ya da } \alpha \geq 1,$$

ve

$$\text{iz } A \circ B^{-\alpha} \geq \text{iz } A^{-\alpha} \circ B^{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

eşitsizliklerini elde etmişlerdir. Ayrıca Zhang ve Wang, A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere,

$$\text{iz } AB^{-\alpha} \leq \text{iz } A^{\alpha} B^{\alpha}, \quad |\alpha| \geq 1$$

ve

$$\text{iz } AB^{-\alpha} \geq \text{iz } A^{\alpha} B^{\alpha}, \quad |\alpha| \leq 1$$

eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Chang (1999), herhangi A ve B Hermityen matrisleri ve pozitif k tamsayısı

için,

$$iz \ AB^{2^k} \leq iz \ A^{2^k} B^{2^k}$$

olduğunu göstermiştir.

Yang (2000), Chang'ın elde ettiği sonuçları 2^k üssünü herhangi tek ve çift tamsayılara genelleştirerek, aynı mertebeden pozitif yarı tanımlı A ve B matrisleri ve $n = 1, 2, \dots$ tamsayısı için,

$$0 \leq iz \ AB^{2n} \leq iz A^{2^{n-1}} iz A^{2^{n-1}} iz B^{2^{n-1}}$$

ve

$$0 \leq iz \ AB^{2n+1} \leq iz A^{2^n} iz B^{2^n} iz A^{2^{n-1}} iz B^{2^{n-1}}$$

olduğunu göstermiştir.

Yang ve Teo (2001), yukarıda verilen Yang'ın elde ettiği sonuçları genelleştirmiş, A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler ve m bir tamsayı olmak üzere,

$$iz \ AB^m \leq iz A^{2m} iz B^{2m-1/2}$$

eşitsizliğini vermişlerdir.

Dannan (2001), A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $m > 0$ olmak üzere,

$$0 < iz \ AB^m < iz \ AB^m,$$

m ve s , $m > s$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$0 < iz \ AB^m < \left[iz \ AB^s \right]^{m/s},$$

$i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $A_i > 0$ ve $B_i > 0$ matrisleri için,

$$\left(iz \sum_{i=1}^k A_i B_i \right)^2 \leq \left(iz \sum_{i=1}^k A_i^2 \right) \left(iz \sum_{i=1}^k B_i^2 \right)$$

ve $A_i B_i > 0$ ise

$$\left(iz \sum_{i=1}^k A_i B_i \right)^2 < \left(iz \sum_{i=1}^k A_i^2 \right) \left(iz \sum_{i=1}^k B_i^2 \right)$$

eşitsizliklerini elde etmiştir. Ayrıca, pozitif tanımlı $n \times n$ A ve B matrisleri için m herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$n \det AB^{m/n} \leq \operatorname{iz} A^m B^m$$

ve

$A \geq 0$, $B \geq 0$ ve $AB = BA$ matrisleri için m herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$2^{(m-1)n} \det A^m + B^m \geq [\det A + B]^m$$

ve

$$2^{m-1} \operatorname{iz} A^m + B^m \geq \operatorname{iz} A + B^m$$

olduğunu ispatlamıştır.

Yang ve Feng (2002), $n \times n$ tipinde herhangi A ve B matrisleri için,

$$\left| \operatorname{iz} AB^{2m} \right| \leq \operatorname{iz} A^* A B B^*{}^m \leq \operatorname{iz} \begin{bmatrix} A^* A^m & BB^*{}^m \end{bmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{iz} AB^{2m} \right| &\leq \operatorname{iz} A^* A B B^*{}^m \\ &\leq \operatorname{iz} \begin{bmatrix} A^* A^m & BB^*{}^m \end{bmatrix} \\ &\leq \operatorname{iz} \begin{bmatrix} A^* A^{1/2} \end{bmatrix}^2 \operatorname{iz} A^* A^{m-1} \operatorname{iz} BB^*{}^m \\ &\leq \left[\operatorname{iz} A^* A^{1/2} \right]^2 \left[\operatorname{iz} A^* A \right]^{m-1} \left[\operatorname{iz} BB^* \right]^m, \quad 1 \leq m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca, A ve B n -kare Hermityen matrisleri için,

$$\begin{aligned} \operatorname{iz} AB^{2m} &\leq \left| \operatorname{iz} AB^{2m} \right| \leq \operatorname{iz} A^2 B^{2m} \\ &\leq \operatorname{iz} A^{2m} B^{2m} \leq \operatorname{iz} A^{4m-1/2} \operatorname{iz} B^{4m-1/2} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

2. BAZI ÖZEL TİPTEKİ MATRİSLER

Bu bölümde, matematiğin birçok alanında ve diğer alanlarda sık kullanılan bazı özel tipteki matrisler ele alınacaktır.

2.1. Hermityen Matrisler

Tanım 2.1.1. A , $n \times n$ kompleks matris olsun. Eğer $A^* = A$ oluyorsa A matrisine *Hermityen matris* denir.

Şimdi $A, B \in M_n$ için bazı incelemeler verelim:

- 1) Her $A \in M_n$ için $A + A^*$, AA^* ve A^*A matrisleri Hermityendir.
- 2) A , bir Hermityen matris ise $k = 1, 2, \dots, n$ için A^k 'de Hermityendir. A , singüler değilse A^{-1} 'de Hermityendir.
- 3) A, B Hermityen matrislerse a, b reel sayıları için $aA + bB$ matrisi de Hermityendir.
- 4) A Hermityense köşegen elemanlarının tümü reeldir (**Horn ve Johnson 1985**).

Teorem 2.1.2. $A \in M_n$ Hermityen matris olsun. Bu takdirde,

- i) Her $x \in \mathbb{C}^n$ için x^*Ax reeldir,
- ii) A matrisinin tüm öz değerleri reeldir,
- iii) Her $S \in M_n$ için S^*AS Hermityendir (**Horn ve Johnson 1985**).

İspat: i) $\overline{x^*Ax} = x^*Ax^* = x^*A^*x = x^*Ax$ olduğundan x^*Ax eşlenik transpozuna eşittir. Böylece x^*Ax reeldir.

ii) $Ax = \lambda x$ ve $x^*x = 1$ ise bu durumda

$$\lambda = \lambda x^* x = x^* \lambda x = x^* A x$$

olur. Böylece (i)'den istenen elde edilir.

iii) Son olarak,

$$S^* A S^* = S^* A^* S = S^* A S$$

olduğundan $S^* A S$ Hermityendir.

Teorem 2.1.3. $A = [a_{ij}] \in M_n$ verilsin. Bu durumda, A matrisinin Hermityen olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden en az birini sağlamasıdır:

- i) Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $x^* A x$ reeldir,
- ii) A matrisinin tüm öz değerleri reeldir,
- iii) Her $S \in M_n$ için $S^* A S$ Hermityendir (**Horn ve Johnson 1985**).

Teorem 2.1.4. (Hermityen Matrisler İçin Spectral Teoremi)

$A \in M_n$ verilsin. Bu durumda A matrisinin Hermityen olması için gerek ve yeter şart $A = U \Lambda U^*$ olacak şekilde bir $U \in M_n$ üniter matrisinin ve bir reel köşegen $\Lambda \in M_n$ matrisinin varlığıdır. Üstelik, A 'nın simetrik olması için gerek ve yeter şart $A = P \Lambda P^T$ olacak şekilde bir reel ortogonal $P \in M_n$ matrisinin ve bir reel köşegen $\Lambda \in M_n$ matrisinin varlığıdır (**Horn ve Johnson 1985**).

2.1.1. Öz Değer ve Singüler Değer Eşitsizlikleri

Bu bölümde, minimum-maksimum Teoremi ve yer değiştirme (interlacing) Teoremi kullanılarak bazı öz değer ve singüler değer eşitsizlikleri türetilacaktır.

Teorem 2.1.1.1. $A, B \in M_n$ Hermityen matrisler olsun. Bu durumda, $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$A \geq B \Rightarrow \lambda_i(A) \geq \lambda_i(B)$$

dir. Bu eşitsizlik Weyl'in monotonluk prensibi olarak adlandırılır. Fischer-Courant

(min-max) Teoreminden, $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$A \geq B \Rightarrow x^* A x \geq x^* B x$$

şeklindedir (Zhang 1999).

Teorem 2.1.1.2. (Rayleigh-Ritz) $A \in M_n$ bir Hermityen matris olsun. Bu durumda A matrisinin öz değerleri $\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}$ olmak üzere,

$$\lambda_n x^* x \leq x^* A x \leq \lambda_1 x^* x$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \min_{x^* x = 1} x^* A x$$

ve

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \max_{x^* x = 1} x^* A x$$

dir (Zhang 1999).

Teorem 2.1.1.3. (Courant-Fischer) $A \in M_n$ bir Hermityen matris olsun. Bu durumda S^k , $\mathbb{C}^n$ 'in k -boyutlu keyfi bir alt uzayını belirtmek üzere,

$$\lambda_k A = \max_{S^k} \min_{x \in S^k, x^* x = 1} x^* A x$$

dir (Zhang 1999).

Teorem 2.1.1.4. (Yer Değiştirme Teoremi) H , $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $n \times n$ Hermityen matris ve $1 \leq m \leq n$ olmak üzere A m -kare matrisi, H 'ın bir esas alt matrisi olsun. Bu durumda, $k = 1, 2, \dots, m$ için

$$\lambda_{k+n-m} H \leq \lambda_k A \leq \lambda_k H$$

dır. Özel olarak $m = n-1$ alındığında,

$$\lambda_n H \leq \lambda_{n-1} A \leq \lambda_{n-1} H \leq \dots \leq \lambda_2 H \leq \lambda_1 A \leq \lambda_1 H$$

olur (Zhang 1999).

Teorem 2.1.1.5. $A, B \in M_n$ Hermityen matrisler olsun. Bu durumda,

$$\text{i) } \lambda_i A + \lambda_n B \leq \lambda_i (A+B) \leq \lambda_i A + \lambda_1 B,$$

$$\text{ii) } A \geq 0 \text{ ve } B \geq 0 \text{ ise } \lambda_i A \lambda_n B \leq \lambda_i AB \leq \lambda_i A \lambda_1 B,$$

$$\text{iii) } A \geq 0 \text{ ve } B \geq 0 \text{ ise } a_{ii} \lambda_n B \leq \lambda_i A \circ B \leq a_{ii} \lambda_1 B$$

şeklindedir (Zhang 1999).

İspat: i) $x \in \mathbb{C}^n$ de birim vektör olsun. Bu takdirde,

$$x^*Ax + \min_x x^*Bx \leq x^*A + B \leq x^*Ax + \max_x x^*Bx$$

dir. Böylece,

$$x^*Ax + \lambda_n B \leq x^*A + B \leq x^*Ax + \lambda_1 B$$

olup (i)'deki sonuç minimum maksimum Teoreminin bir uygulamasıdır.

ii) $\lambda_1 AB = \lambda_1 B^{1/2}AB^{1/2}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\lambda_1 A I - A \geq 0$ dır. Böylece,

$$B^{1/2}AB^{1/2} \leq B^{1/2}AB^{1/2} + B^{1/2} \lambda_1 A I - A B^{1/2} = \lambda_1 A B$$

olur. Teorem 2.1.1.1'in uygulaması ile (ii) elde edilir.

iii) Pozitif yarı tanımlı iki matrisin Hadamard çarpımında pozitif yarı tanımlı olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\lambda_1 B I - B \geq 0$ ve $B - \lambda_n B I \geq 0$ dır. Her iki eşitsizliği A ile Hadamard olarak çarparsak,

$$A \circ \lambda_1 B I - B \geq 0, A \circ B - \lambda_n B I \geq 0$$

olup

$$\lambda_n B I \circ A \leq A \circ B \leq \lambda_1 B I \circ A$$

dir. $I \circ A = \text{köş } a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ dir. Teorem 2.1.1.5'den her i değeri için

$$a_{ii} \lambda_n B \leq \lambda_i A \circ B \leq a_{ii} \lambda_1 B$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1.6. A ve B kompleks matrisler olsun. Bu durumda, A ve B $m \times n$ matrislerse,

$$s_i A + s_n B \leq s_i A + B \leq s_i A + s_1 B$$

ve A , $m \times n$ ve B , $n \times m$ matrislerse,

$$s_i A s_m B \leq s_i AB \leq s_i A s_i B$$

dir (Zhang 1999).

İspat: X , $\text{rank} X = r$ olacak şekilde bir $m \times n$ matris olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}$$

Hermityen matrisini ele alalım. $i = 1, 2, \dots, r$ için $s_i X$, X 'in singüler değerlerini belirtmek üzere bu matrisin öz değerleri,

$$s_1 X, s_2 X, \dots, s_r X, \overset{m+n-2r}{0, \dots, 0}, -s_r X, \dots, -s_2 X, -s_1 X$$

şeklindedir.

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

Hermityen matrislere önceki teoremi uygularsak verilen singüler değer eşitsizlikleri elde edilir. Çarpım üzerine verilen eşitsizlikler için

$$s_i AB = \sqrt{\lambda_i B^* A^* AB} = \sqrt{\lambda_i A^* ABB^*}$$

olduğunu bilmek yeterlidir.

2.2. Pozitif Tanımlı ve Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler

Bu bölümde, pozitif yarı tanımlı matrislerin temel özellikleri, bu matrisleri içeren eşitsizlikler ve sık kullanılan teknikler ele alınacaktır.

Tanım 2.2.1. A , $n \times n$ Hermityen matris olsun. Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $x^* A x \geq 0$ oluyorsa A matrisi *pozitif yarı tanımlı* olarak adlandırılır ve $A \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. A , $n \times n$ Hermityen matris olsun. Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ için $x^* A x > 0$ oluyorsa A matrisi *pozitif tanımlı* olarak adlandırılır ve $A > 0$ ile gösterilir.

Bu tanımlara göre A $n \times n$ kompleks matris ise her $n \times m$ X matrisi için

$$A \geq 0 \Leftrightarrow X^* A X \geq 0$$

dır.

Teorem 2.2.3. Aynı mertebeden pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) iki matrisin toplamı da pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) dır (**Horn ve Johnson 1985**).

İspat: A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler ve $a, b \geq 0$ olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{C}^n$

için

$$x^* (aA + bB) x = a x^* Ax + b x^* Bx \geq 0$$

dır.

Pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) matrislerin lineer kombinasyonu da pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) dır.

Teorem 2.2.4. Pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) bir matrisin tüm öz değerleri pozitif reel (nonnegatif reel) sayıdır (**Horn ve Johnson 1985**).

İspat: A pozitif tanımlı matris, λ , A 'nın bir öz değeri ve x , λ 'ya karşılık gelen öz vektör olsun. Buna göre,

$$x^* Ax = x^* \lambda x = \lambda x^* x$$

dir. Böylece, iki pozitif sayının oranı pozitif olacağından,

$$\lambda = \frac{x^* Ax}{x^* x}$$

değeri pozitifdir.

Teorem 2.2.5. Pozitif tanımlı bir matrisin herhangi bir esas alt matrisi pozitif tanımlıdır (**Horn ve Johnson 1985**).

İspat: S , $1, 2, \dots, n$ 'in bir alt cümlesi olsun. Pozitif tanımlı $A \in M_n$ matrisinin S ile indislenen satır ve sütunlarının silinmesiyle elde edilen matris A_S olsun. Bu durumda A_S , A matrisinin bir esas alt matrisi ve $\det A_S$, A matrisinin bir esas minörüdür. $x \in \mathbb{C}^n$, S ile indislenen bileşenleri keyfî elemanlar diğerleri sıfır olan sıfırdan farklı bir vektör olsun. x_S , sıfır olan bileşenleri silinerek x 'den elde edilen vektör olsun. Böylece,

$$x_S^* A_S x_S = x^* Ax > 0$$

olur. Bu, $x_S \neq 0$ olduğundan A_S matrisinin pozitif tanımlı olduğunu gösterir.

Sonuç 2.2.6. Pozitif yarı tanımlı bir matrisin izi, determinantı ve tüm esas minörleri negatif olmayan reel sayılardır.

İspatı Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.2.5'den kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.7. $A \in M_n$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A , pozitif yarı tanımlıdır,
2. Herhangi bir B matrisi için $A = B^*B$ olarak yazılabilir,
3. Üst üçgen bir C matrisi için $A = C^*C$ olarak yazılabilir,
4. Köşegen elemanları negatif olmayan sayılardan oluşan üst üçgen bir D matrisi için $A = D^*D$ olarak yazılabilir (**Zhang 1999**).

Teorem 2.2.8. $A \in M_n$ Hermityen matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart öz değerlerinin pozitif olmasıdır.

Benzer şekilde, Hermityen bir matrisin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart öz değerlerinin negatif olmamasıdır (**Horn ve Johnson 1985**).

İspat: A matrisinin her bir öz değeri pozitifse sıfırdan farklı herhangi bir $x \in \mathbb{C}^n$ için, A 'nın öz değerlerinden oluşan $D = \text{köş } d_1, \dots, d_n$ köşegen matrisi ve U üniter matrisi için $y = Ux$ olmak üzere;

$$x^*Ax = x^*U^*DUx = y^*Dy = \sum_{i=1}^n d_i \overline{y_i} y_i = \sum_{i=1}^n d_i |y_i|^2 > 0$$

olup, A matrisi pozitif tanımlıdır.

Sonuç 2.2.9. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris ise $k = 1, 2, \dots, n$ için A^k 'da pozitif yarı tanımlıdır.

İspat: A 'nın öz değerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ise A^k 'nın öz değerleri $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ şeklindedir.

Buradan A matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 2.2.10. A , $n \times n$ kompleks matris olsun. A 'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart λ_i 'ler negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$A = U^* \text{köş } \lambda_1, \dots, \lambda_n U$$

olacak şekilde bir U üniter matrisinin varlığıdır (**Zhang 1999**).

Biliyoruz ki, negatif olmayan her sayı negatif olmayan tek bir kareköke sahiptir. Bunun bir benzeri matrisler için de mevcuttur.

Teorem 2.2.11. $A \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$B^2 = A$$

olacak şekilde bir tek $B \geq 0$ matrisi vardır (**Zhang 1999**).

İspat: U bir üniter matris olmak üzere $A = U^* \text{köş } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n U$ ve $B = U^* \text{köş } \lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2} U$ olsun. Bu durumda B pozitif yarı tanımlı ve $B^2 = A$ 'dır.

Bu şekildeki B matrisinin tekliğini göstermek için $C^2 = A$ olacak şekilde bir C matrisinin olduğunu varsayalım. C 'nin öz değerleri A 'nın öz değerlerinin negatif olmayan karekökleri olduğundan, bir V üniter matrisi için

$$C = V^* \text{köş } \lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2} V^*$$

yazılabilir. Buna göre $T = UV$ olmak üzere $A = B^2 = C^2$ özdeşliğinden,

$$T \text{köş } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \text{köş } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n T$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalarla i ve j için

$$t_{ij} \lambda_j = \lambda_i t_{ij}$$

olur. Buradan

$$t_{ij} \lambda_j^{1/2} = \lambda_i^{1/2} t_{ij}$$

yazılabilir. Böylece,

$$T \text{köş } \lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2} = \text{köş } \lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_n^{1/2} T$$

dir. T yerine UV yazılırsa $B = C$ olup istenen elde edilmiştir.

2.2.1. Pozitif Yarı Tanımlı Matris Çifti

Bu bölümde, Hermityen matrisler reel sayıların genelleştirilmesi ve pozitif yarı tanımlı matrisler de pozitif reel sayıların genelleştirilmesi olduğundan reel sayılar için var olan kısmi sıralama bağıntısı ve bazı eşitsizliklerin matrisler için de var olup olmadığı ele alınacaktır.

Tanım 2.2.1.1. $A, B \in M_n$ Hermityen matrisler olsun. $A - B$ matrisi pozitif yarı

tanımlı ise $A \geq B$ yazılır. Benzer şekilde, $A - B$ matrisi pozitif tanımlı ise $A > B$ yazılır.

Hermityen matrisler cümlesi üzerinde Löwner kısmi sıralaması olarak adlandırılan ' $\geq$ ' bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Yani,

1. A bir Hermityen matris olmak üzere, $A \geq A$,
2. $A \geq B$ ve $B \geq A$ ise $A = B$ ve
3. $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise $A \geq C$

dir.

$A \geq 0 \Leftrightarrow X^*AX \geq 0$ ifadesi aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

X uygun mertebeden herhangi bir kompleks matris olmak üzere,

$$A \geq B \Leftrightarrow X^*AX \geq X^*BX \quad (3)$$

dır.

Teorem 2.2.1.2. $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ aynı tipte matrisler olsun. Bu takdirde,

1. $A + B \geq B$,
2. $A^{1/2}BA^{1/2} \geq 0$,
3. $\text{tr } AB \leq \text{tr } A \cdot \text{tr } B$,
4. AB 'nin öz değerleri negatif değildir. Ayrıca, AB 'nin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $AB = BA$ olmasıdır (**Zhang 1999**).

İspat: 1. Pozitif yarı tanımlı matrisler için Löwner kısmi sıralamasının yansıma özelliğinden

$$B \geq B$$

yazabiliriz. Ayrıca $A \geq 0$ olduğundan $A + B \geq B$ elde edilir.

2. (3) eşitsizliğinde $B = 0$ ve $X = B^{1/2}$ olarak alınırsa $A^{1/2}BA^{1/2} \geq 0$ elde edilir.

3. Üniter benzerlik dönüşümü ile, $A = U^*DU$,

$$\text{tr } AB = \text{tr } U^*DUB = \text{tr } DUBU^*$$

olur. $A = \text{köş } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olduğunu varsayalım. Ayrıca, $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ 'ler B matrisinin köşegen elemanları olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
tr \ AB &= \lambda_1 b_{11} + \lambda_2 b_{22} + \dots + \lambda_n b_{nn} \\
&\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} \\
&= tr \ A tr \ B
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. X ve Y aynı tipte kare matrisler olmak üzere XY ve YX matrislerinin aynı öz değerlere sahip olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$AB = A^{1/2} A^{1/2} B$$

olup AB ile $A^{1/2} B A^{1/2}$ matrislerinin öz değerleri aynı ve $A^{1/2} B A^{1/2} \geq 0$ olduğundan $\lambda \ AB \geq 0$ 'dır.

Genel olarak AB matrisi pozitif yarı tanımlı değildir. Ancak A ve B değişmeli matrislerse bu takdirde AB , Hermityendir. Ayrıca öz değerleri negatif olmadığından $AB \geq 0$ 'dır. Tersine, $AB \geq 0$ ise aynı zamanda Hermityendir ve

$$AB = (AB)^* = B^* A^* = BA$$

olduğundan AB matrisi değişmelidir.

Teorem 2.2.1.3. $A \geq B \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

1. $rank \ A \geq rank \ B$,
2. $\det \ A \geq \det \ B$,
3. A ve B singüler değilse, $B^{-1} \geq A^{-1}$

dir (Zhang 1999).

Her pozitif yarı tanımlı matris pozitif yarı tanımlı bir kareköke sahiptir. Karekök, pozitif yarı tanımlı matrisler için Löwner kısmi sıralamasında karekökler alındığında korunan bir monoton matris fonksiyonudur.

Teorem 2.2.1.4. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde,

$$A \geq B \Rightarrow A^{1/2} \geq B^{1/2}$$

dir (Zhang 1999).

İspat: $A^{1/2} - B^{1/2}$ 'nin Hermityen olduğunu biliyoruz. Öz değerlerin negatif olmadığını göstermeliyiz.

$$A^{1/2} - B^{1/2} \quad x = \lambda x, \quad x \neq 0$$

olsun. Bu durumda

$$B^{1/2}x = A^{1/2}x - \lambda x$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, her $x, y \in \mathbb{C}^n$ için

$$|x^*y| \leq \|x\| \|y\|$$

olduğunu ifade eder. Buna göre

$$\begin{aligned} x^*Ax &= x^*Ax^{1/2} x^{1/2}Ax^{1/2} \\ &\geq x^*Ax^{1/2} x^{1/2}Bx^{1/2} \\ &\geq x^*A^{1/2}B^{1/2}x \\ &= x^*A^{1/2}A^{1/2}x - \lambda x \\ &= x^*Ax - \lambda x^*A^{1/2}x \end{aligned}$$

olur. Böylece, her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\lambda x^*A^{1/2}x \geq 0$ olduğundan $\lambda \geq 0$ elde edilir.

2.3. Matris Ayrışimleri

Teorem 2.3.1. $m \leq n$ olmak üzere $A \in M_{m,n}$ ve $\text{rank}A = k \leq m$ olsun. Bu durumda, $A = X\Lambda Y$ olacak şekilde bir $X \in M_m$ üniter matrisi, köşegen elemanları $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m = 0$ olan bir $\Lambda \in M_m$ köşegen matris ve ortonormal satırlı bir $Y \in M_{m,n}$ matrisi vardır. $\Lambda = \text{köş} \lambda_1, \dots, \lambda_m$ matrisi her zaman tek bir şekilde belirlenir ve $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$, AA^* 'ın öz değerleridir. X matrisinin sütunları AA^* 'ın öz vektörleridir. AA^* farklı öz değerlere sahipse bu durumda X , $\theta_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere köşegen elemanları $D = \text{köş} e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ olacak şekilde belirlenir. Yani, $A = X_1\Lambda Y_1 = X_2\Lambda Y_2$ ise bu durumda $X_2 = X_1D$ 'dir. X verilirse ve $\text{rank}A = m$ ise Y tek bir şekilde belirlenir. A reel ise bu durumda X ve Y reel olarak belirlenebilir (Horn ve Johnson 1985).

Teorem 2.3.2. (Singüler Değer Ayrışımı)

$A \in M_{m,n}$ ve $\text{rank} A = k$ olsun. Bu durumda, $V \in M_m$ ve $W \in M_n$ üniter matrisler olmak üzere,

$$A = V \Sigma W^*$$

şeklinde yazılabilir. $\Sigma = [s_{ij}] \in M_{m,n}$ matrisi, $i \neq j$ için $s_{ij} = 0$ ve $q = \min m, n$ olmak üzere, $s_{11} \geq s_{22} \geq \dots \geq s_{kk} > s_{k+1,k+1} = \dots = s_{qq} = 0$ şeklindedir. $s_{ii} \equiv s_i$ sayıları AA^* matrisinin öz değerlerinin negatif olmayan karekökleridir. Bu yüzden tek bir şekilde belirlenirler. V matrisinin sütunları AA^* 'ın öz vektörleri ve W matrisinin sütunları A^*A 'nın öz vektörleridir. $m \leq n$ ve AA^* farklı öz değerlere sahipse bu durumda V , $\theta_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere köşegen elemanları $D = \text{köş} e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ olacak şekilde belirlenir. Yani, $A = V_1 \Sigma W_1^* = V_2 \Sigma W_2^*$ ise bu durumda, $V_2 = V_1 D$ 'dir. $m < n$ ise bu durumda W asla tek bir şekilde belirlenmez. $n = m = k$ ve V verilirse bu durumda W tek bir şekilde belirlenir. $n \leq m$ ise V ve W 'nin tekliği A^* ele alınarak belirlenir. A reel ise bu durumda V , Σ ve W reel olarak alınabilir (**Horn ve Johnson 1985**).

İspat: Genelliği bozmaksızın $m \leq n$ olduğunu varsayalım (Aksi takdirde A^* ile A yer değiştirecek). $X, \Lambda \in M_m$ ve $Y \in M_{m,n}$ olacak şekilde $A = X \Lambda Y$ olarak yazılabilir. $V \equiv X$, $\Sigma \equiv \Lambda : 0 \in M_{m,n}$ ve $W \equiv [Y^* : S^*] \in M_n$ şeklinde tanımlansın. W 'nin sütunları $\mathbb{C}^n$ 'de ortonormal bir cümle olsun. Y^* 'ın sütunları zaten ortonormal olarak seçilmişti. Bu yüzden $m < n$ ise $S^* \in M_{n, n-m}$ 'in sütunları W üniter olacak şekilde seçilebilir. Buna göre $V \Sigma W^* = X \Lambda Y = A$ elde edilir. Bu ifadelerin tekliği Teorem 2.3.1'den elde edilir.

$q = \min m, n$ olmak üzere Σ 'nın $s_i = s_{ii}$ köşegen elemanları $A \in M_{m,n}$ 'in singüler değerleri olarak bilinir ve V ve W matrislerinin sütunları sırasıyla A 'nın sol ve sağ singüler vektörleridir. Bu çarpım A 'nın *singüler değer ayrışımı* olarak bilinir.

Teorem 2.3.3. (Polar Ayrışım) Herhangi bir kare A matrisi için $A = PU$ olacak şekilde pozitif yarı tanımlı bir P matrisi ve bir U üniter matrisi vardır (**Zhang**

1999).

Teorem 2.3.4. (LU Ayrışımı) $A \in M_n$ olsun. Bu durumda $A = LU$ olacak şekilde bir $L \in M_n$ alt üçgen matrisi ve $U \in M_n$ üst üçgen matrisi vardır (**Horn ve Johnson 1985**).

Teorem 2.3.5. (Spectral Ayrışım) A , öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan bir n -kare matris olsun. Bu durumda A matrisinin normal olması için gerek ve yeter şart

$$U^*AU = \text{köş } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

olacak şekilde bir U üniter matrisinin var olmasıdır (**Zhang 1999**).

3. BLOK MATRİSLER

Bu bölümde, blok matris teknikleri ele alınacaktır. Bu bölümdeki konular elemanter işlemleri, blok matrislerin determinantları ve terslerini, pozitif yarı tanımlı blok matrisleri ve bu matrislerle ilgili olan bazı eşitsizlikleri içerir.

3.1. Blok Matrislerin Elemanter İşlemleri

Blok matris kavramı matris teoride temel bir araçtır. Blok matrisleri kullanma teknikleri bilinen nümerik matrislerinkine benzer. $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisini ele alarak başlayalım. Elemanter satır işlemlerinin bir uygulaması olarak verilen matrisin 2. satırını -3 ile çarparak 1. satıra ekleyelim. Yani,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix}$$

dir. Biliyoruz ki, bir matrise 3. tip elemanter satır işlemi uygulandığında matrisin determinanı değişmez.

Matrisler için elemanter satır ve elemanter sütun işlemleri lineer cebirde önemli rol oynar. Bu işlemler aşağıdaki gibi blok matrislere genelleştirilebilir:

1. İki (blok) satır (sütun) yer değiştirebilir,
2. Bir (blok) satır (sütun) soldan (sağdan) singüler olmayan aynı tipte bir matrisle çarpılabilir,
3. Bir (blok) satır (sütun) bir matrisle çarpılıp başka bir satıra (sütuna) eklenebilir.

$A \in M_m$, $D \in M_n$ ve $X \in M_{n,m}$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

matrisi için 3. tip elemanter satır işlemi,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C + XA & D + XB \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Birim matrise tek bir elemanter satır işlemi uygulanarak elde edilen matrise, *genelleştirilmiş elemanter matris* denir. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix}$$

matrisleri 1. ve 3. tip genelleştirilmiş elemanter matrislerdir.

Teorem 3.1.1. G , I birim matrisine elemanter satır (sütun) işlemi uygulanarak elde edilen genelleştirilmiş elemanter matris olsun. Eğer bu aynı elemanter satır (sütun) işlemi bir A blok matrisine de uygulanırsa sonuç matrisi GA (AG) şeklindedir (Zhang 1999).

İspat: Bunu göstermek için 2×2 blok matrisleri ele alacağız. Genel durum 2×2 blok matrislerin bir benzeridir.

A , $m \times m$ ve D , $n \times n$ matrisler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

matrisine 3. tip elemanter satır işlemi uygulayalım. Yani, ilk satırı soldan $n \times m$ tipinde bir E matrisi ile çarpıp ikinci satıra ekleyelim. Bu takdirde,

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ E & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C + EA & D + EB \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bir uygulama olarak A terslenebilir bir matris ise, birinci satırı CA^{-1} ile çarpıp ikinci satırdan çıkararak ve birinci sütunu $A^{-1}B$ ile çarpıp ikinci sütundan çıkararak alt-sol ve üst-sağ matrisleri 0 olan matrisi elde ederiz. Yani,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

dir.

3.2. Blok Matrislerin Determinantı ve Tersİ

A ve D , sırayla m ve n - kare matrisler olmak üzere,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (i)$$

şeklinde bir blok matris verilsin. Bu bölümde, bu şekildeki blok matrislerin determinant ve tersleri incelenecektir. Sonuçlar, matris teorisinde hemen hemen her alanda kullanışlı ve temel bir araçtır. Ayrıca, sonuçlar matris hesaplamalarında ve matris eşitsizliklerinde de önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 3.2.1. M , (i)'de verilen blok matris olsun. Bu takdirde, A tersinir bir matris ise

$$\det M = \det A \det (D - CA^{-1}B)$$

ve $AC = CA$ ise

$$\det M = \det (AD - CB)$$

şeklindedir (Zhang 1999).

İspat: A^{-1} mevcut olduğunda,

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

olduğunu görmek kolaydır. Her iki tarafın determinantı alınırsa

$$\begin{aligned}\det M &= \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} \\ &= \det A \det D - CA^{-1}B\end{aligned}$$

elde edilir.

A ve C değişmeli matrislerse bu durumda A , B , C ve D aynı tipte matrislerdir. Bu özdeşliği sürekli argüman olarak adlandırılan bir metot ile göstereceğiz.

İlk olarak, A , tersinir bir matris olsun. Aynı mertebeden herhangi X ve Y matrisleri için,

$$\det XY = \det X \det Y$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\det M &= \det A \det D - CA^{-1}B \\ &= \det AD - ACA^{-1}B \\ &= \det AD - CAA^{-1}B \\ &= \det AD - CB\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci olarak, A matrisinin singüler olduğunu varsayalım. ε 'a bağlı bir polinom olarak $\det A + \varepsilon I$ sonlu sayıda sıfıra sahip olduğu için $0 < \varepsilon < \delta$ olmak üzere $\det A + \varepsilon I \neq 0$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçilebilir. Yani, $\varepsilon \in (0, \delta)$ için $A + \varepsilon I$ tersinirdir.

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} A + \varepsilon I & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

olsun. $A + \varepsilon I$ ve C değişmeli matrislerdir. Buna göre, $0 < \varepsilon < \delta$ olmak üzere,

$$\det M_\varepsilon = \det \begin{pmatrix} A + \varepsilon I & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

dir. Üstteki eşitliğin her iki yanı da ε 'a bağlı sürekli fonksiyonlardır. $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için

$$\det M = \det AD - CB$$

dir.

Şimdi de blok matrislerin terslerini inceleyelim.

Teorem 3.2.2. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ tersinir bir blok matris ve A, D, X ve V kare matrisler olmak üzere, bu matrisin ters matrisi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda,

$$\det A = \det V \det M \quad (4)$$

dir (Zhang 1999).

İspat:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. Her iki tarafın determinantı alınırsa,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & V \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$$

$$\det M \det V = \det A$$

elde edilir.

Burada A matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart V matrisinin singüler olmasıdır.

Teorem 3.2.3. M ve M^{-1} Teorem 3.2.2 de tanımlanan matrisler olsun. Bu durumda,

$$X = A^{-1} + A^{-1} B (D - CA^{-1} B)^{-1} CA^{-1}$$

$$Y = -A^{-1} B (D - CA^{-1} B)^{-1}$$

$$U = - (D - CA^{-1} B)^{-1} CA^{-1}$$

$$V = (D - CA^{-1} B)^{-1}$$

eşitlikleri geçerlidir (Zhang 1999).

İspat: M matrisinin tersini eklemeli matris metodu ile inceleyelim. Buna göre,

$$\begin{pmatrix} A & B & I & 0 \\ C & D & 0 & I \end{pmatrix}$$

blok matrisine satır işlemleri uygulayabiliriz. 1. satır soldan A^{-1} ile çarpılırsa

$$\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & I \end{pmatrix}$$

elde edilir. 1. satırı C ile çarpıp 2. satırdan çıkardığımızda

$$\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

elde edilir. 2. satırı $D - CA^{-1}B^{-1}$ ile çarparsak,

$$\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & -D - CA^{-1}B^{-1}CA^{-1} & D - CA^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir. 2. satırın $A^{-1}B$ katı 1. satırdan çıkartılırsa M blok matrisinin tersi

$$\begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B D - CA^{-1}B^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B & D - CA^{-1}B^{-1} \\ -D - CA^{-1}B^{-1}CA^{-1} & D - CA^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}$$

olur.

Biliyoruz ki, A ve B n kare matrisler olmak üzere,

$$AB^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

eşitliği vardır. Toplam ve farkta böyle bir durum söz konusu değildir. Şimdi, matris toplamlarının tersini ifade eden bir teorem verelim.

Teorem 3.2.4. $A \in M_m$ ve $B \in M_n$ singüler olmayan matrisler, C ve D sırasıyla $m \times n$ ve $n \times m$ matrisler olsun. $A + CBD$ matrisi singüler değilse bu takdirde,

$$A + CBD^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C B^{-1} + DA^{-1}C^{-1}DA^{-1} \quad (5)$$

dir (Zhang 1999).

İspat: İlk olarak $B^{-1} + DA^{-1}C$ matrisinin singüler olmadığını gösterelim. X ve Y sırasıyla $m \times n$ ve $n \times m$ matrisler olmak üzere;

$$\begin{vmatrix} I_n & Y \\ X & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & X \\ Y & I_n \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\det I_m - XY = \det I_n - YX$$

eşitliği mevcuttur. O halde,

$$\begin{aligned}
\det B^{-1} + DA^{-1}C &= \det B^{-1} \det I_n + BDA^{-1}C \\
&= \det B^{-1} \det I_m + A^{-1}CBD \\
&= \det B^{-1} \det A^{-1} \det A + CBD
\end{aligned}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned}
&A + CBD \quad A^{-1} - A^{-1}C \quad B^{-1} + DA^{-1}C^{-1} \quad DA^{-1} \\
&= I_m - C \quad B^{-1} + DA^{-1}C \quad DA^{-1} + CBDA^{-1} \\
&\quad - CBDA^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1} \quad DA^{-1} \\
&= I_m - C \quad B^{-1} + DA^{-1}C^{-1} - B + BDA^{-1}C \quad B^{-1} + DA^{-1}C^{-1} \quad DA^{-1} \\
&= I_m - C \quad I_n + BDA^{-1}C \quad B^{-1} + DA^{-1}C^{-1} - B \quad DA^{-1} \\
&= I_m - C \quad B \quad B^{-1} + DA^{-1}C \quad B^{-1} + DA^{-1}C^{-1} - B \quad DA^{-1} \\
&= I_m - C \quad B - B \quad DA^{-1} \\
&= I_m
\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

Tersleri içeren birçok sayıda özdeşlik (5) ifadesinden türetilebilir. Aşağıda verilen özdeşlikler buna örnektir.

$$A + B^{-1} = A^{-1} - A^{-1} \quad B^{-1} + A^{-1}^{-1} \quad A^{-1}$$

ve

$$A + UV^{*}^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U \quad I + V^{*}A^{-1}U^{-1} \quad V^{*}A^{-1}.$$

3.3. AB ve BA Matrislerinin Öz Değerleri

A ve B aynı mertebeden kare matrisler olmak üzere AB ve BA matrisleri genel olarak eşit değildir. Ama bu matrislerin öz değerleri hakkında aynı şeyler söylenemez. Bu, matris teorisinde çok önemli bir sonuçtur. Aşağıdaki Teorem bu

konuya açıklık getirecektir.

Teorem 3.3.1. A ve B sırasıyla $m \times n$ ve $n \times m$ kompleks matrisler olsun. Bu takdirde, AB ve BA katlılıkları dahil olmak üzere sıfırdan farklı olan aynı öz değerlere sahiptir (**Zhang 1999**).

İspat: İspatı yapmak için determinantları kullanalım. Blok matrislerin çarpımından,

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ \lambda B & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$$

elde edilir. (6) eşitliğini kullanarak,

$$\lambda^n \det \lambda I_m - AB = \lambda^m \det \lambda I_n - BA$$

elde edilir. Böylece, $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\det \lambda I_m - AB = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\det \lambda I_n - BA = 0$ olmasıdır. Buna göre, AB ve BA matrisleri katlılıkları dahil olmak üzere sıfırdan farklı olan aynı öz değerlere sahiptir.

İspat 2: $P = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. $\det P \neq 0$ olduğundan P^{-1} mevcuttur. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

olacaktır. Yani, $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ matrisleri benzerdir. Böylece

AB ve BA matrislerinin aynı öz değerlere sahip olduğu görülür.

3.4. Süreklilik Argümanı

Matris teoride sık kullanılan tekniklerden birisi de *süreklilik argümanıdır*. Örneğin bu teknik AB ve BA matrislerinin öz değerlerinin aynı olduğunu göstermekte kullanılır. A tersinir bir matris ise

$$AB = A BA A^{-1}$$

olduğundan AB ve BA matrisleri aynı öz değerlere sahiptir diyebiliriz.

A singülerse $A + \varepsilon I$ matrisini ele alalım. Her ε , $0 < \varepsilon < \delta$ için $A + \varepsilon I$ matrisi tersinir olacak şekilde $\delta > 0$ seçilsin. Buna göre, her $\varepsilon \in (0, \delta)$ için $A + \varepsilon I$ B ve $B A + \varepsilon I$ matrisleri aynı öz değer cümlesine sahiptir.

Karakteristik polinomları eşitleyecek olursak,

$$\det(\lambda I - (A + \varepsilon I) B) = \det(\lambda I - B (A + \varepsilon I)), \quad 0 < \varepsilon < \delta$$

yazabiliriz. Her iki taraf ε 'ın sürekli fonksiyonları olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için

$$\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$$

olup AB ve BA aynı öz değerlere sahiptir.

Bu yaklaşım matris problemlerinde oldukça önemli bir yaklaşımdır.

3.5. Blok Matrislerin Schur Tamamlayanları

Başlıca esas alt matrisi P olan $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ kompleks blok matrisi için

$S - RP^{-1}Q$ Schur tamamlayan terimi 1968 yılında Emilie Haynsworth tarafından yayınlanan iki makalede gösterilmiştir.

$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ matrisinde P matrisinin Schur tamamlayanı için

$M/P = S - RP^{-1}Q$ notasyonu ilk olarak 1968 yılında Haynsworth tarafından kullanılmıştır.

3.5.1. Schur Tamamlayanı ve Gauss Eliminasyon

Bir $n \times n$ lineer denklem sistemini çözmenin bir yolu da katsayılar matrisini üst üçgen forma dönüştüren Gauss eliminasyon metodudur. Örnek olarak, M , 1,1 indisli elemanı sıfırdan farklı olan $n \times n$ tipindeki katsayılar matrisini belirtmek üzere $Mz = 0$ homojen lineer denklem sistemini ele alalım.

$$M = \begin{pmatrix} a & b^T \\ c & D \end{pmatrix}$$

b ve c , $n-1 \times 1$ sütun vektörler, D , $n-1$ - kare matris ve $a \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$Mz = 0 \text{ ve } \begin{pmatrix} a & b^T \\ 0 & D - ca^{-1}b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

sistemleri denk sistemlerdir. Böylece problem, daha basit bir lineer denklem sistemine indirgenir: $D - ca^{-1}b^T y = 0$. Bu düşünce başlıca esas alt matrisi singüler olmayan $Mz = 0$ lineer denklem sistemine genişletilebilir.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (7)$$

blok matrisi verilsin. Burada A matrisinin singüler olmadığını varsayalım ve M ile uyumlu olarak $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alalım. $Mz = 0$ lineer denklem sistemi aşağıdaki lineer sistem çiftine eşittir. Yani,

$$Ax + By = 0 \quad (8)$$

$$Cx + Dy = 0 \quad (9)$$

yazabiliriz. (8) ifadesini $-CA^{-1}$ ile çarparak (9) ifadesine ilave edersek x vektör değişkeni yok edilir ve $D - CA^{-1}B \ y = 0$ gibi daha basit bir lineer denklem sistemi elde edilir. $D - CA^{-1}B$ matrisi, M/A ile belirtilir ve M 'de A 'nın Schur tamamlayıcı olarak ya da M 'in A 'ya bağlı Schur tamamlayıcı olarak adlandırılır. Benzer düşünceyle, D matrisi singüler değilse M 'de D 'nin Schur tamamlayıcı;

$$M/D = A - BD^{-1}C$$

şeklindedir.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

homojen olmayan lineer denklem sisteminin çözümünü yapmak için Schur tamamlayanlarını kullanabiliriz. Yani,

$$x = M/D^{-1} u - BD^{-1}v, \ y = M/A^{-1} v - CA^{-1}u$$

şeklindedir.

Schur tamamlayanları matris analizinin birçok alanında temel bir araç olarak kullanılır ve matris eşitsizliklerinin zengin bir kaynağıdır. Lineer sistemlerle ve matris problemleri ile ilgili olarak Schur tamamlayanlar tekniğini kullanma klasik bir düşüncedir.

I. Schur tarafından gösterilen ve Gantmacher tarafından Schur formülü olarak adlandırılan ünlü determinantsal özdeşlik aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.5.1.1 (Schur Formülü) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ blok matrisi verilsin. A matrisi

singüler değilse bu takdirde,

$$\det M/A = \det M / \det A \quad (10)$$

dir (Zhang 2005).

İspat: Blok Gauss eliminasyon aşağıdaki çarpımı verir.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Burada her iki tarafın determinantı alınırsa;

$$\det M = \det I \cdot \det A \cdot \det (D - CA^{-1}B)$$

olur. $D - CA^{-1}B = M / A$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\det M = \det A \cdot \det M / A$$

$$\det M / A = \det M / \det A$$

elde edilir.

(10) ifadesinin direkt sonucu: A singüler değilse M 'nin singüler olmaması için gerek ve yeter şart M / A 'nın singüler olmamasıdır.

Schur formülü, blok matrislerin karakteristik polinomlarını hesaplamak için de kullanılabilir. M blok matrisinde, A ve C matrislerinin değişmeli olduklarını varsayalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \det \lambda I - M &= \det \lambda I - A \det \left[\lambda I - M / \lambda I - A \right] \\ &= \det \left[\lambda I - A \quad \lambda I - D \quad -CB \right] \end{aligned}$$

dir.

Banachiewicz tarafından verilen aşağıdaki kullanışlı formül, elemanları Schur tamamlayanlarını içeren matrisin tersini verir.

Teorem 3.5.1.2. M , (7)'de verilen blok matris olsun ve M ve A matrislerinin singüler olmadığını varsayalım. Bu takdirde, M / A singüler değildir ve

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M / A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M / A)^{-1} \\ -(M / A)^{-1}CA^{-1} & (M / A)^{-1} \end{pmatrix}$$

dir. Böylece M^{-1} 'in (2,2) indisli bloğu $(M / A)^{-1}$ ve $(M^{-1})_{22} = (M / A)^{-1}$

dir (**Zhang 2005**).

İspat: Verilen hipotez altında,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

olup, her iki tarafın tersini yazdığımızda;

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (M/A)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer düşünceyle M^{-1} için aşağıdaki alternatif gösterimlerde verilebilir:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix};$$

ve

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1}B \\ I \end{pmatrix} (M/A)^{-1} \begin{pmatrix} CA^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Ayrıca A , B , C ve D aynı mertebeden kare matrislerse,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}$$

olur. M^{-1} matrislerinin (1,1) indisli blokları karşılaştırıldığında,

$$\begin{aligned} A - BD^{-1}C^{-1} &= A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} \\ &= -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} \\ &= -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} \\ &= C^{-1}D(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}DB^{-1} \end{aligned}$$

özdeşlikleri elde edilir. Schur tamamlayıcı sadece başlıca esas alt matrise göre değil singüler olmayan herhangi bir alt matrise göre de şekillenebilir. α ve β ,

$1, 2, 3, \dots, n$ cümlesinin alt cümleleri olan indis cümleleri olsunlar. $|\alpha|$, indis cümlesinin kardinalitesini (eleman sayısını) gösterebilir ve onun tamamlayıcı da $\alpha^c \equiv 1, 2, \dots, n / \alpha$ ile gösterilsin. $A_{\alpha, \beta}$, A matrisinin α satır ve β sütun indisli bir alt matrisi olsun. Burada, α ve β 'nin her ikisi de artan ve doğal sıradadır.

Genellikle $A_{\alpha, \alpha}$ için A_{α} ifadesini kullanacağız. $|\alpha| = |\beta|$ ve $A_{\alpha, \beta}$, singüler değilse A 'da $A_{\alpha, \beta}$ 'nin Schur tamamlayıcı, $A / A_{\alpha, \beta}$;

$$A / A_{\alpha, \beta} \equiv A[\alpha^c, \beta^c] - A[\alpha^c, \beta] A_{\alpha, \beta}^{-1} A[\alpha, \beta^c] \quad (11)$$

şeklindedir. A / A_{α} yerine A / α almak daha elverişli olacaktır. Şimdi bu konunun daha iyi anlaşılması için nümerik bir örnek verelim.

Örnek 3.5.1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım. $\beta = 1, 2$ ve $\alpha = 3, 4$

sırasıyla satır ve sütun indis cümleleri olmak üzere, $\beta^c = 3, 4$ ve $\alpha^c = 1, 2$ dir. Bu durumda,

$$A[\alpha^c, \beta^c] = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A[\alpha^c, \beta] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A[\alpha, \beta^c] = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

$$A / A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

3.5.2. Bölüm (Quotient) Formülü

1965 yılında Crabtree ve Haynsworth, Schur tamamlama için bir bölüm formülü vermiştir. Bu formüller Ostrowski tarafından yeniden kanıtlanmıştır. Bu formüle bazı yaklaşımlar ve bu formülün bazı uygulamaları birkaç kişi tarafından da verilmiştir.

Bu kısımda bölüm formülünden elde edilen bir matris özdeşliği vereceğiz. M , (7) ile verilen blok matris olsun ve A matrisinin singüler olmadığını varsayalım. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 3.5.2.1. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$ aynı mertebeden blok matrisler olsun. A, X ve U matrislerinin $k \times k$ tipinde olduklarını ve singüler olmadıklarını varsayalım. $\alpha = 1, 2, \dots, k$ olsun. Bu takdirde,

$$LMR / \alpha = L / \alpha \quad M / \alpha \quad R / \alpha = L \begin{bmatrix} \alpha^c \end{bmatrix} M / A \quad R \begin{bmatrix} \alpha^c \end{bmatrix},$$

dir. Yani,

$$LMR / XAU = L / X \quad M / A \quad R / U = Z \quad M / A \quad W$$

olur (Zhang 2005).

İspat: İlk olarak LMR çarpımını hesaplayacak olursak

$$LMR = \begin{pmatrix} XAU & XAV + XBW \\ YAU + ZCU & YAV + ZCV + YBW + ZDW \end{pmatrix}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} LMR / XAU &= YAV + ZCV + YBW + ZDW \\ &\quad - YAU + ZCU \quad XAU^{-1} \quad XAV + XBW \\ &= YAV + ZCV + YBW + ZDW \\ &\quad - YA + ZC \quad A^{-1} \quad AV + BW \\ &= ZDW - ZCA^{-1}BW \\ &= Z \quad D - CA^{-1}B \quad W \\ &= Z \quad M / A \quad W \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$L = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} \Rightarrow L/X = Z - YX^{-1}0 = Z = L \begin{bmatrix} \alpha^c \end{bmatrix}$$

ve

$$R = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix} \Rightarrow R/U = W - 0U^{-1}V = W = R \begin{bmatrix} \alpha^c \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} LMR/XAU &= L/X \quad M/A \quad R/W \\ &= L \begin{bmatrix} \alpha^c \end{bmatrix} \quad M/\alpha \quad R \begin{bmatrix} \alpha^c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi teoremin bazı özel durumlarını inceleyelim:

Durum 1: $X = U = I$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$LMR/A = Z(M/A)W \quad (12)$$

olur.

J , tüm elemanları bir olan kare matris olsun. $Z = V = J$ ise (12) ifadesi

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

çarpımındaki A 'nın Schur tamamlayanının sJ olduğunu gösterir. Burada s , M/A matrisinin tüm elemanlarının toplamını belirtir. Tabii ki sJ , Y ve V matrislerinden bağımsızdır ve rankı birdir. Yani;

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & AV + BJ \\ YA + JC & YAV + JCV + YBJ + JDJ \end{pmatrix} \\ K/A &= J(D - CA^{-1}B)J \end{aligned}$$

şeklindedir. Örnek olarak bir A matrisini ele alalım,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow JAJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matrisinin elemanları toplamı 10 olup $JAJ = 10J$ bulunur.

W singüler değilse ve $Z = W^{-1}$ ise (12) ifadesi LMR/A 'nın M/A 'ya benzer olduğunu gösterir. Böylece M/A 'nın öz değerlerinin hesaplanmasıyla LMR/A 'nın öz değerleri elde edilebilir ve Y ve V 'nin seçilişine ve W 'nın singüler olmamasına bağlı değildir.

Son olarak (12) ifadesi; N matrisi, bir alt üçgen, köşegen ve üst üçgen matrisin çarpımı olarak yazılırsa, yani $N = L\Lambda U$ ise

$$N/\alpha = (L/\alpha)(\Lambda/\alpha)(U/\alpha)$$

olduğunu gösterir.

Durum 2: $X = Z = U = W = I$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$LMR/A = M/A \quad (13)$$

olup, bu eşitlik

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{pmatrix}$$

ifadesinden açık olarak elde edilmektedir.

Eğer $V = 0$ (yani $R = I$) ise bu takdirde

$$(LM)/A = M/A \quad (14)$$

olur.

(13) ve (14) eşitlikleri A 'nın tamamlayan sütunlarına (satırlarına) uygulanan satırlar (sütunlar) için blok Gauss eliminasyonun A 'nın Schur tamamlayanını değiştirmeyeceğini gösterir. Yani, A 'nın sütun (satur) tamamlayanları üzerinde yapılan üç elemanter satur (sütun) işlemi A 'nın Schur tamamlayanı üzerinde hiçbir etkiye sahip değildir. Bu önemli gerçek bölüm formülünü kanıtlamak için kullanılacaktır.

Durum 3: $M = I$ olduğunu varsayalım. O halde $LMR = LR$, bir blok alt üçgen matrisin ve bir blok üst üçgen matrisin çarpımıdır ve

$$(LR)/\alpha = (L/\alpha)(R/\alpha) = L[\alpha^c]R[\alpha^c] \quad (15)$$

olup, L_1 ve L_2 gibi iki blok alt üçgen matris aldığımızda,

$$L_1L_2/\alpha = (L_1/\alpha)(L_2/\alpha)$$

elde edilir.

R_1 ve R_2 , üst üçgen blok matrisler olsun. Bu takdirde,

$$R_1 R_2 / \alpha = R_1 / \alpha (R_2 / \alpha)$$

dır. (15)'in özel hali olarak,

$$(LL^*) / \alpha = (L / \alpha)(L^* / \alpha) = (L[\alpha^\circ])(L[\alpha^\circ])^* \quad (16)$$

ifadesini yazabiliriz.

Pozitif tanımlı herhangi bir N matrisi, bir alt üçgen L matrisleri için $N = LL^*$ olarak yazılabilir. Eğer L matrisinin köşegen elemanları pozitifse bu çarpım N 'in Cholesky çarpımı olarak adlandırılır. Böylece eğer N 'nin Cholesky çarpımına sahipsek (16) özdeşliği, N / α Schur tamamlayanının Cholesky çarpımını sağlar.

Bir blok alt üçgen L matrisi için,

$$(L^* L) / \alpha \leq (L^* / \alpha)(L / \alpha) \quad (17)$$

dir.

T , LU ayrışımına sahip bir kare matris olsun. T matrisinin α indisli singüler olmayan herhangi bir başlıca esas alt matrisini ele alalım. Bu takdirde (17) ifadesi

$$T^* T / \alpha \leq T^* / \alpha \quad T / \alpha \quad (18)$$

olduğunu gösterir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} T^* T / \alpha &= U^* L^* L U / \alpha \\ &= U^* / \alpha \left[(L^* L) / \alpha \right] (U / \alpha) \\ &\leq U^* / \alpha \quad L^* / \alpha \quad L / \alpha \quad U / \alpha \quad [17 \text{ 'den}] \\ &= T^* / \alpha \quad T / \alpha \quad [15 \text{ 'den}] \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 4: $L = R^* = \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ V^* & W^* \end{pmatrix}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, Teorem 3.5.2.1

$$R^* M R / \alpha = R^* / \alpha \quad M / \alpha \quad R / \alpha \quad (19)$$

olduğunu gösterir.

$L^* M L / \alpha$ için (19) ifadesinin herhangi bir benzeri olmamasına rağmen M matrisi pozitif tanımlı ise bu takdirde,

$$L^*ML / \alpha \leq L^*ML [\alpha^c] = L^* / \alpha \quad M[\alpha^c] \quad L / \alpha \quad (20)$$

eşitsizliği vardır. Daha genel olarak N pozitif yarı tanımlı matris ve T 'de N ile aynı mertebeden bir matris olsun. N / α ve T / α singüler değilse bu takdirde,

$$T^*NT / \alpha \leq T^* / \alpha \quad N[\alpha^c] \quad T / \alpha \quad (21)$$

olur. Bu eşitsizlik,

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\alpha) & * \\ 0 & T / \alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak (20) ifadesinden kanıtlanabilir.

Durum 5: Teorem 3.5.1.2'deki

$$A / \alpha^{-1} = A^{-1}[\alpha^c]$$

temel özdeşliği birçok matris probleminde kullanışlıdır. Örneğin bu formül, M matris tersleri sınıfının Schur tamamlayıcı altında kapalı olduğunu göstermek için anahtar formüldür.

Eğer A , LU çarpımına sahipse (15) ifadesi kullanılarak hoş bir ispat yapılabilir.

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

dir. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} A / \alpha^{-1} &= L[\alpha^c]U[\alpha^c]^{-1} \\ &= U^{-1}[\alpha^c]L^{-1}[\alpha^c] \\ &= U^{-1}L^{-1} / \alpha \\ A^{-1} / \alpha &= A^{-1}[\alpha^c] \end{aligned}$$

dir (**Zhang 2005**).

Şimdi, Schur Tamamlayıcı için Crabtree-Haynsworth bölüm formülünü verelim.

Teorem 3.5.2.2 (Bölüm Formülü)

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ve $A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ olmak üzere, M , A , E singüler olmayan kare

matrisler olsun. Bu takdirde, A/E , M/E 'nin singüler olmayan esas alt matrisidir

ve

$$M / A = M / E / A / E$$

dir (Zhang 2005).

İspat:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F & B_1 \\ G & H & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} M / E &= \begin{pmatrix} H & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ C_1 \end{pmatrix} E^{-1} F \quad B_1 \\ &= \begin{pmatrix} H & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ C_1 \end{pmatrix} E^{-1} F \quad E^{-1} B_1 \\ &= \begin{pmatrix} H & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} GE^{-1}F & GE^{-1}B_1 \\ C_1E^{-1}F & C_1E^{-1}B_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H - GE^{-1}F & B_2 - GE^{-1}B_1 \\ C_2 - C_1E^{-1}F & D - C_1E^{-1}B_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A/E & B_2 - GE^{-1}B_1 \\ C_2 - C_1E^{-1}F & D - C_1E^{-1}B_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup, A , singüler değilse A/E 'de singüler değildir. Böylece $M/E / A/E$ iyi tanımlıdır.

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

$$LM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F & B_1 \\ G & H & B_2 \\ 0 & 0 & M/A \end{pmatrix} = \hat{M}$$

olup, $LM/A = M/A$ ifadesinden $LM/E = M/E \Rightarrow \hat{M}/E = M/E$ elde edilir.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\hat{M}/E &= \begin{pmatrix} H & B_2 \\ 0 & M/A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} E^{-1} F B_1 \\ &= \begin{pmatrix} A/E & B_2 - GE^{-1}B_1 \\ 0 & M/A \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\left(\hat{M}/E \right) / A/E = M/A \Rightarrow M/E / A/E = M/A$$

bulunur.

3.6. Pozitif Yarı Tanımlı Blok Matrisler

Bu bölümde, pozitif yarı tanımlı blok matrisler ve özellikleri ilgili bilinen bazı tanım ve özellikleri vereceğiz.

Tanım 3.6.1. A_{11} , A matrisinin bir kare alt matrisi olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (22)$$

kare kompleks blok matrisi verilsin. A_{11} singüler değilse

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

yazılabilir. $\tilde{A}_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ ifadesi A 'da A_{11} 'in Schur tamamlayanı olarak adlandırılır. Her iki tarafın determinantı alınırsa

$$\det A = \det A_{11} \det \tilde{A}_{11}$$

elde edilir.

A pozitif tanımlı bir matris ise bu takdirde A_{11} singüler değildir ve

$$A_{22} \geq A_{11} \geq 0$$

dır.

Teorem 3.6.2. (Fischer Eşitsizliği) A , (22)'de tanımlanan pozitif yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde,

$$\det A \leq \det A_{11} \det A_{22}$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart her iki tarafın sıfır olması ya da $A_{12} = 0$ olmasıdır. Ayrıca, A_{11} , A_{12} , A_{21} ve A_{22} blokları aynı mertebeden kare matrislerse,

$$|\det A_{12}|^2 \leq \det A_{11} \det A_{22}$$

dır (Zhang 1999).

İspat: $X = -A_{11}^{-1}A_{12}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\ &= \det A_{11} \det [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}] \leq \det A_{11} \det A_{22} \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci eşitsizliği elde etmek için

$$A_{22} \geq A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \geq 0$$

ve herhangi X ve Y kare matrisler olmak üzere,

$$\det XY = \det X \det Y$$

olduğunu hatırlayacak olursak

$$|\det A_{12}|^2 \leq \det A_{11} \det A_{22}$$

elde edilir.

Teorem 3.6.3. (Hadamard Eşitsizliği) $A = [a_{ij}] \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olsun. Bu takdirde,

$$\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

dir. Ayrıca, A pozitif tanımlı olduğunda eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart A 'nın köşegen matris olmasıdır (Zhang 1999).

İspat: A singülerse $\det A = 0$ ve A pozitif yarı tanımlı olduğundan tüm köşegen elemanları pozitifdir. Bu durumda eşitsizlik sağlanacaktır. Bu yüzden tüm $a_{ii} \neq 0$

olmak üzere A matrisinin singüler olmadığını varsayalım. $D = \text{köş } d_1, d_2, \dots, d_n$ olmak üzere $d_i \equiv a_{ii}^{-1/2}$ şeklinde tanımlansın. $B = DAD$ olsun. Bu durumda B matrisi köşegen elemanları 1 olan pozitif yarı tanımlı bir matristir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ile

$$n = \text{tr} B = \sum_{i=1}^n \lambda_i B \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i B \right)^{1/n} = n \det B^{1/n}$$

olup, bu $\det B \leq 1$ olduğunu gösterir. Böylece,

$$\det A = \det D^{-1} B D^{-1} = \prod_{i=1}^n a_{ii} \det B \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

elde edilir.

Teorem 3.6.4. $A \in M_n$ pozitif tanımlı matris ve B , bir $n \times m$ matris olsun. O halde herhangi bir $X \in M_m$ pozitif yarı tanımlı matrisi için,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & X \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow X \geq B^* A^{-1} B$$

dir (**Zhang 1999**).

İspat: Gerek şart açık olduğundan sadece yeter şart için ispat yapmak yeterlidir.

$Y = -A^{-1}B$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^* A^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & X - B^* A^{-1}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup, böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.5. H ve K aynı tipte iki Hermityen matris olsun. O halde

$$\begin{pmatrix} H & K \\ K & H \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq \pm K$$

dır (**Zhang 2001**).

Bu bölümdeki teoremler göz önünde bulundurularak pozitif yarı tanımlı matrislere birkaç örnek verelim:

Herhangi $X \geq A \geq 0$ için $\begin{pmatrix} A & A \\ A & X \end{pmatrix} \geq 0$,

1. $A \geq B \geq 0$ ise $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \geq 0$,

2. Herhangi bir X matrisi için $\begin{pmatrix} I & X \\ X^* & X^*X \end{pmatrix} \geq 0$,

3. $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ aynı mertebeden matrislerse, $\begin{pmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{pmatrix} \geq 0$,

4. A herhangi bir $m \times n$ matris ise $\begin{pmatrix} s_{\max} & A & I_n & A^* \\ & A & & s_{\max} & A & I_m \end{pmatrix} \geq 0$,

5. A , pozitif tanımlı bir matris ise $\begin{pmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$,

6. A ve B aynı mertebeden matrisler ise $\begin{pmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B \end{pmatrix} \geq 0$,

7. A ve B aynı mertebeden matrisler ise $\begin{pmatrix} I + A^*A & A^* + B^* \\ A + B & I + BB^* \end{pmatrix} \geq 0$ (**Zhang 1999**).

3.7. Kronecker Çarpım ve Hadamard Çarpım

Matrisler farklı yollarla çarpılabilir. Bu çarpımlardan ikisi, bildiğimiz anlamdaki çarpım kadar önemli olan ve birçok alanda kullanılan Kronecker çarpım ve Hadamard çarpımıdır. Bu çarpımlar aşağıda tanımlanmıştır.

A ve B sırasıyla $m \times n$ ve $s \times t$ tipinde matrisler olmak üzere, A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı;

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Aynı mertebeden A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı;

$$A \circ B = a_{ij}b_{ij}$$

şeklindedir.

Kronecker çarpımın bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.7.1. A, B, C ve D aynı tipte matrisler olmak üzere;

1. $A \otimes B \quad C \otimes D = AC \otimes BD$,
2. $A \otimes B^* = A^* \otimes B^*$,
3. A ve B tersinir matrislerse $A \otimes B^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,
4. A ve B üniter matrislerse $A \otimes B$ üniterdir (**Zhang 1999**).

Teorem 3.7.2. $A, B \in M_n$ olsun. Bu durumda $A \circ B$ Hadamard çarpımı satır ve sütunları $1, n+2, 2n+3, \dots, n^2$ üzerinde dizilen $A \otimes B$ Kronecker çarpımının bir esas alt matrisidir (**Zhang 1999**).

İspat: $e_i, i=1,2,\dots,n$ olmak üzere i . bileşeni 1 ve diğer bileşenleri 0 olan n bileşenli bir vektör ve

$$E = e_1 \otimes e_1, \dots, e_n \otimes e_n$$

olsun. Her i ve j çifti için $E^T (A \otimes B) E$ 'nin i, j indisli elemanı,

$$a_{ij}b_{ij} = e_i^T A e_j \otimes e_i^T B e_j = e_i \otimes e_i^T (A \otimes B) e_j \otimes e_j$$

şeklindedir. Böylece,

$$E^T (A \otimes B) E = A \circ B$$

dır. Bu $A \circ B$ 'nin $A \otimes B$ 'nin bir esas alt matrisi olduğunu gösterir.

Teorem 3.7.3. $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ olsun. Bu durumda, $A \otimes B \geq 0$ dır (**Zhang 1999**).

Teorem 3.7.4. (Schur) A ve B n -kare matrisler olsun. Bu durumda,

$$A \geq 0 \text{ ve } B \geq 0 \Rightarrow A \circ B \geq 0$$

ve

$$A > 0 \text{ ve } B > 0 \Rightarrow A \circ B > 0$$

dır (Zhang 1999).

İspat: $x \in \mathbb{C}^n$ için köşegen üzerindeki x bileşenli n -kare köşegen matris $köşx$ ile belirtilsin. Buna göre,

$$\begin{aligned} x^* A \circ B x &= tr \ köşx^* A köşx B^T \\ &= tr \left(\left(B^{\frac{1}{2}} \right)^T köşx^* A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} köşx \left(B^{\frac{1}{2}} \right)^T \right) \\ &= tr \left(A^{\frac{1}{2}} köşx \left(B^{\frac{1}{2}} \right)^T \right)^* \left(A^{\frac{1}{2}} köşx \left(B^{\frac{1}{2}} \right)^T \right) \geq 0 \end{aligned}$$

olup, istenen elde edilmiştir.

Teorem 3.7.5. A, B, C n -kare matrisler olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$$

olsun. O halde '*' işlemi 'o' ve '+' işlemlerini belirtmek üzere,

$$A * C \geq (B^* * B)$$

ve $AB = BA$ ise

$$A^{\frac{1}{2}} C A^{\frac{1}{2}} \geq B^* B$$

dir (Zhang 2001).

Teorem 3.7.6. $H, R \in M_m$ ve $K, S \in M_n$ pozitif tanımlı matrisler olsun. O halde herhangi $A, C \in M_{p,m}, B, D \in M_{q,n}$ ve $rank U = r$ ya da $rank V = r$ olacak şekildeki $U, V \in M_{r,m}$ ve herhangi a, b reel sayıları için

$$\begin{aligned} &a^2 AH^{-1}A^* \otimes BK^{-1}B^* + b^2 CR^{-1}C^* \otimes DS^{-1}D^* \\ &\geq aAU^* \otimes B + bCV^* \otimes D \quad UHU^* \otimes K + VRV^* \otimes S^{-1} \\ &\times aUA^* \otimes B^* + bVC^* \otimes D^* \end{aligned}$$

dır (Zhang 2000).

3.8. Schur Tamamlayanları ve Hadamard Çarpımlar

Bu bölümde, Schur tamamlayanlarını kullanarak Hadamard çarpımlar ve matris toplamları için bazı eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.6.4'e göre $A > 0$ ise

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & B^* A^{-1} B \end{pmatrix}$$

pozitif yarı tanımlı bir matristir. Bu tipteki matrisler, matris eşitsizlikleri elde etmek için önemli bir araçtır. Aşağıda bu şekilde elde edilen eşitsizlikleri içeren bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 3.8.1 A ve B pozitif tanımlı n kare matrisler ve C ve D herhangi $m \times n$ tipinde matrisler olsun. Bu durumda,

$$C + D \quad A + B^{-1} \quad C + D^* \leq CA^{-1}C^* + DB^{-1}D^* \quad (23)$$

ve

$$C \circ D \quad A \circ B^{-1} \quad C \circ D^* \leq CA^{-1}C^* \circ DB^{-1}D^* \quad (24)$$

dir (Wang ve Zhang 1997).

İspat:

$$X = \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & CA^{-1}C^* \end{pmatrix} \text{ ve } Y = \begin{pmatrix} B & D^* \\ D & DB^{-1}D^* \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $X \geq 0$, $Y \geq 0$, $X + Y \geq 0$ ve $X \circ Y \geq 0$ 'dır. $X + Y \geq 0$ ve $X \circ Y \geq 0$ matrislerinin 1,1 indisli bloklarının Schur tamamlayanları ile istenen elde edilmiş olur.

Teorem 3.8.2. A ve B aynı tipte matrisler olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde,

$$A_{11} + B_{11} \geq A_{11} + B_{11} \quad (25)$$

ve

$$A_{11} \circ B_{11} \geq A_{11} \circ B_{11} \quad (26)$$

dir (Zhang 1999).

İspat:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{pmatrix}$$

olsun. (25) eşitsizliği, $\hat{A} + \hat{B}$ 'de $A_{11} + B_{11}$ 'in Schur tamamlayıcı alınarak ve (23) eşitsizliği kullanılarak elde edilir.

(26) eşitsizliği için,

$$A_{22} \geq A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}, \quad B_{22} \geq B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}$$

eşitsizliklerini ele alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} A_{22} \circ B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} + B_{22} \circ A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ \geq 2 \quad A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \circ B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} A_{11} \circ B_{11} &= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \circ B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \\ &\leq A_{22} \circ B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \circ B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{aligned}$$

Üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (24) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} A_{22} \circ B_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \circ B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \\ \leq A_{22} \circ B_{22} - A_{21} \circ B_{21} \quad A_{11} \circ B_{11}^{-1} \quad A_{12} \circ B_{12} \\ = A_{11} \circ B_{11} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$A_{11} \circ B_{11} \geq A_{11} \circ B_{11}$$

olur.

Ayrıca, aşağıda ispatı Schur tamamlayanları kullanılarak yapılan, Oppenheim tarafından gösterilen bir determinant eşitsizliğini vereceğiz.

Teorem 3.8.3. (Oppenheim) A ve B köşegen elemanları sırasıyla a_{ii} ve b_{ii} olan pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu durumda,

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} b_{ii} \geq \det A \circ B \geq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \det B \geq \det A \det B$$

dir (Zhang 1999).

İspat: İlk ve son eşitsizlikler Hadamard determinantsal eşitsizliğinin direkt sonucudur. İkinci eşitsizliği göstereceğiz.

$\hat{B}$, önceki teoremin ispatındaki gibi olsun. $A \circ \hat{B}$ matrisini ele alalım ve matrislerin mertebesi olan n üzerinden tümevarım kullanılacak.

$n = 2$ ise ispat açıktır. $n > 2$ olduğunu varsayalım ve

$$B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} = B_{22} - B_{11}$$

olduğunu hatırlayalım. $A \circ \hat{B}$ matrisinde $A_{11} \circ B_{11}$ 'in Schur tamamlayıcı alınırsa,

$$A_{22} \circ B_{22} - B_{21} \circ B_{11}^{-1} A_{12} \circ B_{12} \geq 0$$

ya da

$$A_{22} \circ B_{22} - A_{21} \circ B_{21} \circ B_{11}^{-1} A_{12} \circ B_{12} \geq A_{22} \circ B_{11}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sol tarafı $A \circ B$ 'de $A_{11} \circ B_{11}$ 'in Schur tamamlayıcıdır.

Determinantları alınarak,

$$\det A_{11} \circ B_{11} \geq \det A_{22} \circ B_{11}$$

her iki taraf $\det A_{11} \circ B_{11}$ ile çarpılırsa,

$$\det A \circ B \geq \det A_{11} \circ B_{11} \det A_{22} \circ B_{11}$$

elde edilir.

Teoremde ki eşitsizlikler,

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} b_{ii} \geq \prod_{i=1}^n \lambda_i A \circ B \geq \prod_{i=1}^n a_{ii} \lambda_i B \geq \prod_{i=1}^n \lambda_i AB = \prod_{i=1}^n \lambda_i A \lambda_i B .$$

şeklinde öz değerler cinsinden yazılabilir.

3.9. Majorizasyon Eşitsizlikleri

Eşitsizlikler, matematiğin hemen hemen tüm dallarında temel bir rol oynar. Bununla birlikte belli eşitsizlik türleri için majorizasyon kavramı eşitsizlikler türetmek için son derece güçlü ve kullanışlı bir teori olarak ortaya çıkmıştır. Üstelik, majorizasyon metotlarıyla bir eşitsizlik türetme, doğal genelleştirmeleri öne sürmek ve daha iyi anlaşılmasını sağlamak için oldukça kullanışlıdır.

Majorizasyon üzerine Issai Schur (1923)'ün öncü çalışması, 'pozitif yarı tanımlı bir matrisin öz değerleri, köşegen elemanlarını majorize eder' keşfiyle majorizasyon kavramı matris teoriye de girmiştir. Bu keşif Hadamard'ın determinant eşitsizliğinin daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Schur'un keşfiyle sayısız majorizasyon eşitsizliği matris teoriye girmiştir. Bu majorizasyonlar, matris toplam ya da matris çarpımlarının öz değerlerini ve singüler değerlerini içeren özdeşliklerdir.

Bu bölümde çalışmamızda bize yardımcı olacak bazı majorizasyon tanımları ve majorizasyon eşitsizlikleri verilecektir

Tanım 3.9.1. $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, $y = y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için $k = 1, 2, \dots, n$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i$$

ise x , y tarafından *zayıf majorize edilir* denir ve $x \prec_w y$ ile gösterilir. $x \prec_w y$ 'ye ek

olarak $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ sağlanıyorsa x , y tarafından *majorize edilir* denir ve $x \prec y$ ile

gösterilir (Marshall ve Olkin 1979).

Tanım 3.9.2. Tüm elemanları negatif olmayan ve tüm satır toplamaları 1 olan kare matrise *stokastik* matris denir (Marshall ve Olkin 1979).

Tanım 3.9.3. $P = p_{ij}$ $n \times n$ matris olsun. $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $p_{ij} \geq 0$ ve

$$\sum_i p_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_j p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ise P 'ye *duble stokastik* denir (Marshall ve Olkin 1979).

Tanım 3.9.4. $Q = q_{ij}$ olsun. $q_{ij} = \gamma_{ij}^2$ olacak şekilde $\Gamma = \gamma_{ij}$ varsa Q matrisi *ortostokastik* olarak adlandırılır. $q_{ij} = |u_{ij}|^2$ olacak şekilde bir U üniter matrisi varsa Q matrisi *üniter stokastik* olarak adlandırılır. (Yani, ortostokastik matrisler üniter stokastiktir ve üniter stokastik matrisler duble stokastiktir (**Marshall ve Olkin 1979**)).

Teorem 3.9.5. $x \prec y$ olması için gerek ve yeter şart $x = yP$ olacak şekilde bir P duble stokastik matrisin var olmasıdır (**Marshall ve Olkin 1979**).

Teorem 3.9.6. H , köşegen elemanları $h_1, h_2, \dots, h_n$ ve öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan bir Hermityen matris olsun. Bu takdirde,

$$h_1, h_2, \dots, h_n \prec \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

dir (**Marshall ve Olkin 1979**).

İspat: Burada H Hermityen matris olduğu için köşegen elemanlarının ve öz değerlerinin reel olduğunu ve bundan dolayı sıralanabileceğini hatırlatmakta fayda vardır. Yani,

$$h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n \text{ ve } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

şeklindedir.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 'ler H 'ın öz değerleri olmak üzere $H = U D_\lambda U^*$ olacak şekilde bir U üniter matrisi vardır.

H matrisinin, $h_1, h_2, \dots, h_n$ köşegen elemanları $p_{ij} = u_{ij} \overline{u_{ij}}$ olmak üzere

$$h_i = \sum_j u_{ij} \overline{u_{ij}} \lambda_j \equiv \sum_j p_{ij} \lambda_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklindedir. U üniter matris olduğundan Tanım 3.9.4'den $P = p_{ij}$, duble stokastiktir. Sonuç olarak,

$$h_1, h_2, \dots, h_n = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n P$$

dir. Buna göre Teorem 3.9.5'den $h \prec \lambda$ elde edilir.

Teorem 3.9.7. f t bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$x \prec_w y \Rightarrow f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \prec_w f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n)$$

dir (**Zhan 2002**).

Teorem 3.9.8. g t bir artan konveks fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$x \prec_w y \Rightarrow g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n) \prec_w g(y_1), g(y_2), \dots, g(y_n)$$

dir (Zhan 2002).

Tanım 3.9.9. $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ vektörlerinin bileşenleri negatif olmasın. Bu takdirde $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^k x_i \leq \prod_{i=1}^k y_i$$

ise x, y tarafından *zayıf log-majorize edilir* denir ve $x \prec_{w \log} y$ ile gösterilir.

$x \prec_{w \log} y$ 'ye ek olarak $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n y_i$ ise x, y tarafından *log-majorize edilir* denir ve

$x \prec_{\log} y$ ile gösterilir (Marshall ve Olkin 1979).

Bir A matrisinin mutlak değeri $|A| \equiv A^* A^{1/2}$ ile tanımlanır. A 'nın singüler değerleri $|A|$ 'nın öz değerleri olarak tanımlanır. Buna göre A 'nın singüler değerleri $A^* A$ 'nın öz değerlerinin negatif olmayan karekökleridir. Pozitif yarı tanımlı matrisler için singüler ve öz değerler aynıdır.

Teorem 3.9.10. A , öz değerleri $|\lambda_1 A| \geq \dots \geq |\lambda_n A|$ ve singüler değerleri $s_1 A \geq s_2 A \geq \dots \geq s_n A \geq 0$ olan $n \times n$ kompleks matris olsun. Bu takdirde, $k = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere,

$$\prod_{i=1}^k |\lambda_i A| \leq \prod_{i=1}^k s_i A$$

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i A| = \prod_{i=1}^n s_i A$$

dır (Marshall ve Olkin 1979).

Teorem 3.9.11. $A \in M_{m,p}$, $B \in M_{p,n}$ ve $q = \min\{n, p, m\}$ olsun. A, B, AB matrislerinin singüler değerleri sırasıyla $s_1 A \geq \dots \geq s_{\min\{m,p\}} A \geq 0$, $s_1 B \geq \dots \geq s_{\min\{p,n\}} B \geq 0$ ve $s_1 AB \geq \dots \geq s_{\min\{m,n\}} AB \geq 0$ ile belirtilsin. Bu takdirde, $k = 1, \dots, q$ için,

$$\prod_{i=1}^k s_i AB \leq \prod_{i=1}^k s_i A s_i B$$

dir (Marshall ve Olkin 1979).

$m = n = p$ ise $k = n$ için eşitlik sağlanır.

Teorem 3.9.12. A , singüler değerleri $s_1 A \geq s_2 A \geq \dots \geq s_n A \geq 0$ ve öz değerleri

$|\lambda_1 A| \geq \dots \geq |\lambda_n A|$ olan bir matris olsun. Bu durumda, $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\sum_{i=1}^k |\lambda_i A| \leq \sum_{i=1}^k s_i A$$

dır. Özel olarak,

1. $|tr A| \leq \sum_{i=1}^n s_i A$
2. $k = 1, 2, \dots, n$ ve herhangi bir $p > 0$ için $\sum_{i=1}^k |\lambda_i A|^p \leq \sum_{i=1}^k s_i A^p$
3. A , singüler olmayan bir matris ise her $p \in \mathbb{R}$ için $\sum_{i=1}^k |\lambda_i A|^p \leq \sum_{i=1}^k s_i A^p$

dir (Marshall ve Olkin 1979).

Teorem 3.9.13. $A, B, A + B \in M_{m,n}$ matrislerinin singüler değerleri $q = \min m, n$

olmak üzere sırasıyla $s_1 A \geq s_2 A \geq \dots \geq s_q A \geq 0$,

$s_1 B \geq s_2 B \geq \dots \geq s_q B \geq 0$ ve $s_1 A + B \geq s_2 A + B \geq \dots \geq s_q A + B \geq 0$ olsun.

Bu durumda, $k = 1, 2, \dots, q$ için

$$\sum_{i=1}^k s_i A + B \leq \sum_{i=1}^k s_i A + \sum_{i=1}^k s_i B$$

dir (Horn ve Johnson 1991).

Teorem 3.9.14. $L \in M_m, M \in M_n$ ve $X \in M_{m,n}$ verilsin. Bu takdirde,

$$\begin{bmatrix} L & X \\ X^* & M \end{bmatrix} \in M_{m+n} \quad (27)$$

matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart L ve M matrislerinin pozitif yarı tanımlı olması ve $X = L^{1/2} C M^{1/2}$ olacak şekilde bir $C \in M_{m,n}$

$(s_{\max} C \leq 1)$ kontrakşın matrisinin var olmasıdır.

$X \in M_{m,n}$ ve $X = L^{1/2} C M^{1/2}$ olmak üzere (27) formunda pozitif yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde, $k = 1, 2, \dots, q = \min m, n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k s_i X &= \prod_{i=1}^k s_i L^{1/2} C M^{1/2} \\ &\leq \prod_{i=1}^k s_i L^{1/2} s_i C s_i M^{1/2} \\ &\leq \prod_{i=1}^k s_i L^{1/2} s_i M^{1/2} \end{aligned}$$

dır. Bu teorem daha genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir (**Horn ve Johnson 1991**).

Teorem 3.9.15. $L \in M_m, M \in M_n$ ve $X \in M_{m,n}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} L & X \\ X^* & M \end{bmatrix} \in M_{m+n}$$

pozitif yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde L ve M pozitif yarı tanımlı ve her $p > 0$ ve her $k = 1, 2, \dots, \min m, n$ için

$$\prod_{i=1}^k s_i^p X \leq \prod_{i=1}^k s_i^{p/2} L s_i^{p/2} M$$

dir (**Horn ve Mathias 2000**).

Teorem 3.9.16. $A, B \in M_n$ Hermiten matrisler olsun. Bu durumda,

$$\lambda A + B \prec \lambda A + \lambda B$$

dir (**Zhang 1999**).

Lemma 3.9.17. $A, B \in M_n$ Hermiten matrisler olsun. Bu durumda,

$$s A \circ B \prec_w s A \circ s B$$

dir.

$X \in M_n \mathbb{C}$ için $X, \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}$ Hermiten matrisi belirtsin. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda X &= s_1 X, \dots, s_n X, -s_n X, \dots, -s_1 X \\ s X &= s_1 X, s_1 X, \dots, s_n X, s_n X \end{aligned} \quad (28)$$

şeklindedir. Yukarıdaki Lemmanın genelleştirmesini ifade eden teorem aşağıda verilmiştir (Zhang 1988).

Teorem 3.9.18. Herhangi $A, B \in M_n \mathbb{C}$ için,

$$s(A \circ B) \prec_w s(A \circ s(B))$$

dir. (Zhang 1988).

İspat:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

blok matrisleri verilsin. Bu durumda,

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & A \circ B \\ A^* \circ B^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \circ B \\ A \circ B^* & 0 \end{pmatrix} = A \circ B$$

yazabiliriz. Lemma 3.9.17'den

$$s(A \circ B) \prec_w s(A \circ s(B)),$$

yani,

$$s(A \circ B) \prec_w s(A \circ s(B))$$

dir. Buna göre (28)'den

$$s(A \circ B) \prec_w s(A \circ s(B))$$

elde edilir.

Teorem 3.9.19. A ve B aynı tipte pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde,

$$\log s(A - B) \prec_w \log s(A + B)$$

ifadesi geçerlidir. Sonuç olarak,

$$s(A - B) \prec_w s(A + B)$$

olup, böylece,

$$\|A - B\|_{ii} \leq \|A + B\|_{ii}$$

dir (Wang ve ark. 1999).

Teorem 3.9.20. $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$ olmak üzere $A, m \times m$, $C, n \times n$ ve $B, m \times n$

kompleks matrisler olsun. $\text{rank}(B) = r$ olsun. Bu takdirde, $i \leq r$

ise $\mu_i = \max \{ \lambda_i(A), \lambda_i(C) \}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ aksi takdirde sıfır olmak üzere,

$$\log s(B) \prec_w \log \mu$$

dır. Böylece, $s(B) \prec_w \mu$ yazılır. Ayrıca, A, B ve C aynı tipte kare matrislerse,

$$\log |\lambda(B)| \prec_w \log \mu$$

dır (**Zhang 2001**).

4. POZİTİF YARI TANIMLI BLOK MATRİSLERİN SİNGÜLER DEĞERLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, pozitif yarı tanımlı blok matrislerin singüler değerleri için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sınırlarla daha önce bulunan sınırlar arasında ortaya çıkan bazı bağıntılar verilmiştir.

Bu bölümde, tanımlanan herhangi bir $n \times n$ X matrisi için öz değerleri ve singüler değerleri sırasıyla $\lambda_1 X, \lambda_2 X, \dots, \lambda_n X$ ve $s_1 X, s_2 X, \dots, s_n X$ olmak üzere $|\lambda_1 X| \geq |\lambda_2 X| \geq \dots \geq |\lambda_n X|$ ve $s_1 X \geq s_2 X \geq \dots \geq s_n X \geq 0$ şeklinde olacaktır.

Teorem 4.1. $A \in M_m$, $C \in M_n$ ve $r = \min m, n$ olmak üzere pozitif yarı tanımlı

$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ blok matrisi verilsin. Bu takdirde $j = 1, 2, \dots, r$ için

$$s_j A \oplus C - s_1 B \leq s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq s_j A \oplus C + s_1 B$$

dır.

İspat: Pozitif yarı tanımlı $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ blok matrisi aşağıdaki gibi iki Hermityen blok matrisin toplamı şeklinde yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

A ve B aynı mertebeden $m \times n$ matrisler ise

$$s_i A + \lambda_n B \leq s_i A + B \leq s_i A + \lambda_1 B \quad (30)$$

eşitsizliği Bölüm 2.1.1 de verilmişti. Buna göre (29) ve (30) ifadelerini kullanarak;

$$s_i A \oplus C + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \leq s_i \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq s_i A \oplus C + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

yazabiliriz.

$H = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$ blok Hermityen matris olsun. $s_1 B, s_2 B, \dots, s_r B$ 'ler B

matrisinin singüler değerleri ise,

$$s_1 B, s_2 B, \dots, s_r B, 0, \dots, 0, -s_r B, \dots, -s_2 B, -s_1 B$$

cümlesi Hermityen H matrisinin öz değerler cümlesidir. Böylece H matrisinin özelliklerinden faydalanarak B matrisine geçilebilir. Buna göre,

$$\lambda_n H = -s_1 B \text{ ve } \lambda_1 H = s_1 B$$

olduğundan, $j = 1, 2, \dots, r$ için,

$$s_j A \oplus C - s_1 B \leq s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq s_j A \oplus C + s_1 B$$

elde edilir.

Bir sonraki Teoremin ispatında kullanacağımız bir teoremi ifade edelim:

Teorem 4.2. A ve B Hermityen matrisler olmak üzere,

$$\lambda A - \lambda B \prec \lambda A - B$$

dir (**Horn ve Johnson 1991**).

Teorem 4.3. A, B ve C n -kare kompleks matrisler olmak üzere, $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ pozitif

yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde, $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\sum_{j=1}^k s_j A \oplus C - s_j B \leq \sum_{j=1}^k s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^k s_j A \oplus C + s_j B$$

dir.

İspat: $k = 1, 2, \dots, n$ için, verilen pozitif yarı tanımlı blok matrisin öz değerleri,

Teorem 3.9.16 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^k \lambda_j A \oplus C + \lambda_j \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j A \oplus C + s_j B \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$, $A, C \geq 0$ ve $\lambda_j \ A \oplus C = s_j \ A \oplus C$ olduğundan $k=1,2,\dots,n$ için

$$\sum_{j=1}^k s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^k s_j \ A \oplus C + s_j \ B$$

yazabiliriz. Ayrıca $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, üniter matris olduğundan Hermityen matrisler için

Spectral Teoreminden,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{pmatrix}$$

olur. Yani, $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{pmatrix}$ matrisleri üniter olarak denk olup aynı öz

değerlere sahiptirler. Böylece Teorem 4.3'den

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} - \lambda_j \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \ A \oplus C - s_j \ B \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^k s_j \ A \oplus C - s_j \ B \leq \sum_{j=1}^k s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

olup, istenen elde edilmiştir.

Teorem 4.4. A, B ve C n -kare kompleks matrisler olmak üzere, $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ pozitif

yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde, $k=1,2,\dots,n$ için

$$\sum_{j=1}^k s_j \ B + B^* \leq \sum_{j=1}^k s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

dır.

İspat: $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} C & B^* \\ B & A \end{pmatrix}$ matrisleri permütasyonel olarak benzerdir ve

$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$ ise $\begin{pmatrix} C & B^* \\ B & A \end{pmatrix} \geq 0$ 'dır. Buna göre,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & B^* \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+B^* \\ B+B^* & A+C \end{pmatrix} \geq 0$$

dır. Teorem 3.9.16'dan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A+C & B+B^* \\ B+B^* & A+C \end{pmatrix} &\leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} + \lambda_j \begin{pmatrix} C & B^* \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= 2 \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \geq 0$ matrisi için $2s_j(K) \leq s_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\sum_{j=1}^k s_j(B+B^*) \leq \sum_{j=1}^k s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

olup, ispat tamamlanır.

Teorem 4.5. A, B ve C n -kare kompleks matrisler olmak üzere, $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ pozitif

yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde, $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\frac{1}{2} \lambda_j(A+B+B^*+C) \leq \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

ve

$$\frac{1}{2} \lambda_j[A+C - (B+B^*)] \leq \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

dır.

İspat: $A \in M_m$ bir Hermityen matris ise $V^*V = I_n$ şartını sağlayan herhangi bir $m \times n$ V matrisi ve $i = 1, 2, \dots, m$ için öz değerlerin yer değiştirme teoreminden,

$$\lambda_{i+m-n}(A) \leq \lambda_i(V^*AV) \leq \lambda_i(A) \quad (31)$$

yazılabilir. I , $n \times n$ birim matris olmak üzere $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$ kompleks matris olsun.

Buna göre, (31) eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{1}{2} \lambda_j(A+B+B^*+C) \leq \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}$ olarak seçilirse

$$\frac{1}{2} \lambda_j A + C - (B + B^*) \leq \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 4.6. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için A_i 'ler $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri belirtsin.

Bu takdirde,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} s_j \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \leq s_j \oplus_{i=1}^n A_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

dır.

İspat: I , $n \times n$ birim matris olmak üzere, $V = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix}$, $n^2 \times n$ matris olsun. Buna

göre,

$$\begin{aligned} V^* M V &= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} I & I & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n} A_1 + A_2 + \dots + A_n \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \end{aligned} \tag{32}$$

olup, (32) eşitliğini kullanarak

$$\frac{1}{n} s_j \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) \leq s_j \oplus_{i=1}^n A_i$$

elde edilir.

Bir sonraki Teoremin ispatında kullanacağımız bir teoremi ifade edelim.

Teorem 4.7. $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ ve $y_1 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ vektörleri $k = 1, 2, \dots, n$ için

$\prod_{i=1}^k x_i \leq \prod_{i=1}^k y_i$ eşitsizliğini sağlıyorsa $k = 1, 2, \dots, n$ için $\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i$ eşitsizliğini de

sağlar (Marshall ve Olkin 1979).

Sonuç 4.8. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde,

$$\frac{1}{2} \log s(A-B) \prec_w \frac{1}{2} \log s(A+B) \prec_w \log s(A \oplus B)$$

dır.

İspat: A ve B $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$s_j(A-B) \leq s_j(A \oplus B) \quad (32)$$

dır. Teorem 4.6, Teorem 3.9.13 ve (32) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2} \prod_{j=1}^k s_j(A-B) \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^k s_j(A+B) \leq \prod_{j=1}^k s_j(A \oplus B), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

yazabiliriz ve Teorem 4.7'den

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k s_j(A-B) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^k s_j(A \oplus B), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

olup, istenen elde edilir.

Şimdi, bu bölümde elde edilen singüler değer eşitsizlikleri ile daha önce elde edilmiş olan singüler değer eşitsizliklerini karşılaştırmak için bir örnek verelim.

Örnek 4.9: $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $M = XX^* = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi

pozitif yarı tanımlıdır. Bu matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ve } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre M matrisinin öz değerleri azalan sırada,

$$\lambda_1 M = 6, \lambda_2 M = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 4,302, \lambda_3 M = 2, \lambda_4 M = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 0,697$$

şeklindedir. Ayrıca, B matrisinin singüler değerleri sırasıyla,

$$\sigma_1 B = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \cong 1,618 \text{ ve } \sigma_2 B = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \cong 0,618$$

dır. $K = A + B^* + B + C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \geq 0$ olmak üzere, K matrisinin öz değerleri azalan sırada,

$$\lambda_1 K = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{89}}{2} \cong 11,216, \lambda_2 K = \frac{13}{2} - \frac{\sqrt{89}}{2} \cong 1,783$$

şeklindedir. $A \oplus C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ olmak üzere bu matrisin singüler

değerleri azalan sırada,

$$\sigma_1 A \oplus C = 5, \sigma_2 A \oplus C \cong 4,618, \sigma_3 A \oplus C \cong 2,381, \sigma_4 A \oplus C = 1$$

şeklindedir.

Buna göre $2s_j B \leq s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ eşitsizliğinde, $j=1$ için,

$$2s_1 B \leq s_1 \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

$$2.1,618 = 3,236 \leq 6$$

olur. $s_j A \oplus C - s_1 B \leq s_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq s_j A \oplus C + s_1 B$ eşitsizliğinde ise $j=1$ için,

$$s_1 A \oplus C - s_1 B \leq s_1 \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq s_1 A \oplus C + s_1 B$$

$$5 - 1,618 = 3,382 \leq 6 \leq 5 + 1,618 = 6,618$$

olup, blok matrislerin singüler değerleri için bir önceki sonuçtan daha yakın değer

vermektedir. $\frac{1}{2}\lambda_j A + B + B^* + C \leq \lambda_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ eşitsizliğinde ise $j=1$ için,

$$\frac{1}{2}\lambda_1 A + B + B^* + C \leq \lambda_1 \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 11,216 = 5,608 \leq 6$$

olup, blok matrislerin singüler değerleri için önceki iki sonuçtan daha yakın değer vermektedir.

Pozitif yarı tanımlı bir blok matrisin elemanlarına bağlı olan, aşağıdaki majorizasyon eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.10. A, B, C n -kare kompleks matrisler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$$

olsun. Bu takdirde,

$$2s(B) \prec_w s(A) + s(C)$$

ve

$$s^2(B) \prec_w s(A)s(C)$$

dir.

İspat: $B \neq 0$ olduğunu varsayalım. $B = UDV^*$, $D = \text{köş}(s_1(B), s_2(B), \dots, s_n(B))$, U ve V $U^*U = V^*V = I$ şartını sağlayan $n \times n$ kısmi üniter matrisler olmak üzere B matrisinin bir singüler değer ayrışımı olsun. O halde,

$$\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^*AU & U^*BV \\ V^*B^*U & V^*CV \end{pmatrix} \geq 0$$

yazılabilir.

$$U^*BV = D = \text{köş}(s_1(B), \dots, s_n(B))$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 3.7.5'den

$$U^*BV + V^*B^*U \leq U^*AU + V^*CV$$

yazılır. Weyl'in monotonluk prensibi ve Teorem 3.9.16'dan

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \left[\begin{pmatrix} s_1(B) & & \\ & \ddots & \\ & & s_n(B) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(B) & & \\ & \ddots & \\ & & s_n(B) \end{pmatrix} \right] \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j (U^*AU) + \lambda_j (V^*CV)$$

olup, öz değerler için yer değiştirme teoreminden (interlacing teorem),

$$2 \sum_{j=1}^k s_j(B) \leq \sum_{j=1}^k s_j(A) + s_j(C)$$

elde edilir. Buna göre $2s(B) \prec_w s(A) + s(C)$ dir. Ayrıca, Teorem 3.7.5'den

$$U^*BV \circ V^*B^*U \leq U^*AU \circ V^*CV$$

yazılabilir. Benzer şekilde, Weyl'in monotonluk prensibi ile,

$$\lambda_j \left[\begin{pmatrix} s_1(B) & & \\ & \ddots & \\ & & s_n(B) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s_1(B) & & \\ & \ddots & \\ & & s_n(B) \end{pmatrix} \right] \leq s_j(U^*AU \circ V^*CV)$$

elde edilir. Herhangi A ve B matrisi için $s(A \circ B) \prec_w s(A)s(B)$ olduğunu biliyoruz.

Buna göre,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k s_j^2(B) &\leq \sum_{j=1}^k s_j(U^*AU \circ V^*CV) \leq \sum_{j=1}^k s_j(U^*AU) s_j(V^*CV) \\ &\leq \sum_{j=1}^k s_j(A) s_j(C) \end{aligned}$$

olup, böylece

$$s^2(B) \prec_w s(A)s(C)$$

elde edilir.

5. POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLER İÇİN İZ EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, pozitif yarı tanımlı herhangi matrislerin ve pozitif yarı tanımlı blok matrislerin çarpımları, toplamaları ve Hadamard çarpımları için elde edilen iz eşitsizlikleri verilecektir.

Teorem 5.1. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde, m ve n tamsayılar olmak üzere,

$$2iz(AB)^{m+n} \leq iz(AB)^{2m} + iz(AB)^{2n}$$

ve

$$iz(A^{m+n} \circ A^{m+n}) \leq iz(A^{2m} \circ A^{2n})$$

dir.

İspat: A pozitif yarı tanımlı bir matris ise m bir tamsayı olmak üzere A^m 'de pozitif yarı tanımlıdır. O halde,

$$\begin{pmatrix} A^m & 0 \\ A^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^m & A^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{2m} & A^{m+n} \\ A^{m+n} & A^{2n} \end{pmatrix} \geq 0$$

dır. Teorem 3.7.5'den

$$A^{m+n} + A^{m+n} \leq A^{2m} + A^{2n}$$

yazılabilir. Weyl'in monotonluk prensibi ve majorizasyon eşitsizliğinden

$$2\lambda_j(A^{m+n}) \leq \lambda_j(A^{2m} + A^{2n})$$

$$2\sum_{j=1}^k \lambda_j(A^{m+n}) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j(A^{2m} + A^{2n}) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j(A^{2m}) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(A^{2n})$$

olur. $k = n$ için

$$2iz(A^{m+n}) \leq iz(A^{2m} + A^{2n}) = iz(A^{2m}) + iz(A^{2n}) \quad (33)$$

eşitsizliği her $A \geq 0$ matrisi için doğru olduğundan $A, B \geq 0$ için $D = B^{1/2}AB^{1/2} \geq 0$ olmak üzere (33) eşitliği D matrisi içinde doğrudur. Yani,

$$2iz(D^{m+n}) \leq iz(D^{2m}) + iz(D^{2n})$$

dir. Böylece,

$$2iz(AB)^{m+n} \leq iz(AB)^{2m} + iz(AB)^{2n}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 3.7.5'den

$$A^{m+n} \circ A^{m+n} \leq A^{2m} \circ A^{2n}$$

yazılabilir. Böylece Weyl'in monotonluk prensibinden,

$$iz(A^{m+n} \circ A^{m+n}) \leq iz(A^{2m} \circ A^{2n})$$

olur.

Teorem 5.2. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. ' $\circ^k$ ' Hadamard kuvveti belirtmek üzere,

$$iz(A \circ B)^{\circ 2k} \leq iz \left[A \circ B^2 \right]^{\circ k}$$

dır.

İspat: $A, B \geq 0$ ise $A \circ B \geq 0$ olduğunu biliyoruz. $X = A \circ B$ ve $K = \begin{pmatrix} X \\ I \end{pmatrix}$ olsun.

Buna göre

$$M = KK^* = \begin{pmatrix} X^2 & X \\ X & I \end{pmatrix} \geq 0$$

dır. O halde

$$M^{\circ 2} = \begin{pmatrix} X^2 & X \\ X & I \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} X^2 & X \\ X & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 \circ X^2 & X \circ X \\ X \circ X & I \end{pmatrix} \geq 0$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

$$M^{\circ k} = \begin{pmatrix} X^2 \circ X^2 \circ \dots \circ X^2 & X \circ X \circ \dots \circ X \\ X \circ X \circ \dots \circ X & I \end{pmatrix} \geq 0$$

dır. Teorem 3.7.5'den

$$(A \circ B)^{\circ 2k} \leq I \circ A \circ B^2 \circ^k$$

yazabiliriz. H , herhangi bir matris ise

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j(H \circ I) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j(H)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlik ve Weyl'in monotonluk prensibi kullanılarak $k = n$ için

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(A \circ B)^{2k} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[A \circ B^2 \right]^{2k}$$

$$iz(A \circ B)^{2k} \leq iz \left[A \circ B^2 \right]^{2k}$$

elde edilir.

Teorem 5.3. $A \in M_n$ olsun. Bu takdirde,

$$|izA^{2m}| \leq iz \left[A^m (A^*)^m \right] \leq iz \left[AA^* \right]^m$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} |iz(A^{2m})| &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^{2m}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i(A^{2m})| \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i(A^{2m}) \leq \sum_{i=1}^n s_i(A)^{2m} = \sum_{i=1}^n [s_i(AA^*)]^m \\ &= \sum_{i=1}^n [\lambda_i(AA^*)]^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[(AA^*)^m \right] = iz(AA^*)^m \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} iz \left[A^m (A^*)^m \right] &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i(A^m A^{*m})| \leq \sum_{i=1}^n s_i(A^m A^{*m}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i^m(A) s_i^m(A^*) = \sum_{i=1}^n s_i^m(A) s_i^m(A) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i^2(A)^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i(AA^*)^m \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[(AA^*)^m \right] = iz(AA^*)^m \end{aligned}$$

dır. Ayrıca,

$$K = \begin{pmatrix} A^m & 0 \\ A^{*m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{*m} & A^m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^m A^{*m} & A^{2m} \\ A^{*2m} & A^{*m} A^m \end{pmatrix} \geq 0$$

dır. Teorem 3.7.5'den

$$\pm A^{2m} + A^{*2m} \leq A^m A^{*m} + A^{*m} A^m$$

yazılabilir. $X \leq Y$ ise $iz(X) \leq iz(Y)$ olduğundan,

$$|iz \left[A^{2m} + A^{*2m} \right]| \leq iz \left[A^m A^{*m} + A^{*m} A^m \right]$$

yazılır. Ayrıca herhangi X ve Y matrisleri için $iz(X^*) = iz(X)$ ve $iz(XY) = iz(YX)$ olduğundan,

$$|iz(A^{2m})| \leq iz[A^m(A^*)^m]$$

elde edilir. Böylece,

$$|izA^{2m}| \leq iz[A^m(A^*)^m] \leq iz[AA^{*m}]$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 5.4. A , $n \times n$ kompleks matris olsun. Bu takdirde,

$$iz(A^m \circ A^{*m}) \leq iz[A^m(A^*)^m] \leq iz(AA^*)^m$$

dır.

İspat: Burada temel olarak Teorem 3.9.11 ve Teorem 3.9.17'yi kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} |iz(A^m \circ A^{*m})| &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^m \circ A^{*m}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i(A^m \circ A^{*m})| \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i(A^m \circ A^{*m}) \leq \sum_{i=1}^n s_i(A^m) s_i(A^{*m}) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i^2(A^m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^m A^{*m}) = iz(A^m A^{*m}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i(A)^{2m} = \sum_{i=1}^n [s_i^2(A)]^m = \sum_{i=1}^n [\lambda_i(AA^*)]^m \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(AA^*)^m = iz(AA^*)^m. \end{aligned}$$

O halde Teorem 5.3 ve Teorem 5.4'ün sağ taraflarının eşit olduğu görülür. Aşağıdaki iki örnekle bu eşitsizliklerin sol taraflarının genel olarak karşılaştırılamayacağı gösterilecektir.

Örnek 5.5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ olsun. O halde,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -4 & 17 \end{pmatrix} \text{ ve } A \circ A^* = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 25 \end{pmatrix}$$

olur. Buna göre, $iz(A^2) = 18$ ve $iz(A \circ A^*) = 34$ olur. Yani, $iz(A^2) \leq iz(A \circ A^*)$ şeklindedir.

Örnek 5.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. O halde,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } A \circ A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Buna göre, $\text{iz}(A^2) = 9$ ve $\text{iz}(A \circ A^*) = 5$ olur. Yani, $\text{iz}(A \circ A^*) \leq \text{iz}(A^2)$ şeklindedir. Örnek 5.5 ve Örnek 5.6'ya göre herhangi bir A matrisi için $\text{iz}(A^m \circ A^{*m})$ ile $\text{iz}(A^{2m})$ 'i karşılaştıramayız.

Teorem 5.7. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ ve $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$2\text{iz}(A_{12}B_{21}) \leq \text{iz}(A_{11}B_{22}) + \text{iz}(A_{22}B_{11})$$

dır.

İspat: Pozitif yarı tanımlı A ve B blok matrisleri için,

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Herhangi $X, Y \geq 0$

$$0 \leq \text{iz}(XY) \leq \text{iz}(X)\text{iz}(Y)$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$0 \leq \text{iz}(A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \leq \text{iz}(A_{11}B_{11} + A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} + A_{22}B_{22})$$

dır. Buradan

$$\text{iz}(A_{12}B_{21}) + \text{iz}(A_{21}B_{12}) \leq \text{iz}(A_{11}B_{22}) + \text{iz}(A_{22}B_{11})$$

yazabiliriz. Herhangi X, Y matrisleri için $\text{iz}(X) = \text{iz}(X^*)$ ve $\text{iz}(XY) = \text{iz}(YX)$ olduğundan,

$$2\text{iz}(A_{12}B_{21}) \leq \text{iz}(A_{11}B_{22}) + \text{iz}(A_{22}B_{11})$$

elde edilir.

Bir sonraki teoremin ispatında kullanacağımız teoremi ifade edelim:

Teorem 5.8. A ve B , $n \times n$ tipinde matrisler olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{i=1}^t \left| \delta_i \left(AB \right)^{2m} \right| \leq \sum_{i=1}^t \lambda_i \left(A^* A B B^* \right)^m \leq \sum_{i=1}^t \lambda_i \left(A^* A \right)^m \left(B B^* \right)^m, \quad 1 \leq t \leq n, m \in \mathbb{N}$$

dir (Yang ve Feng 2002).

Teorem 5.9. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ ve $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \geq 0$ olsun. Bu takdirde, m bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$iz \left[\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & \frac{1}{2} B_{11}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^{2m} \right] + iz \left[\begin{bmatrix} A_{22}^{\frac{1}{2}} & B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} \end{bmatrix}^{2m} \right] \leq iz(AB)^m \leq iz(A^m B^m)$$

dır.

İspat: $Z = A_{22}^{\frac{1}{2}}, Y = A_{22}^{-\frac{1}{2}} A_{21}, X = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}$ olsun.

Bu takdirde $A = M^* M$ şeklindedir. $Z = (B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12})^{\frac{1}{2}}, Y = B_{21} B_{11}^{-\frac{1}{2}}, X = B_{11}^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere $K = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde $B = K K^*$ şeklindedir. k , bir pozitif tamsayı olmak üzere $M^k = \begin{pmatrix} X^k & 0 \\ * & Z^k \end{pmatrix}$ şeklindedir. İki üst üçgen matrisin çarpımı da bir üst üçgen matris olduğundan,

$$MK = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & \frac{1}{2} B_{11}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ A_{22}^{-\frac{1}{2}} A_{21} B_{11}^{\frac{1}{2}} + A_{22}^{\frac{1}{2}} B_{21} B_{11}^{-\frac{1}{2}} & A_{22}^{\frac{1}{2}} B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. MK matrisinin $2m$. kuvvetini aldığımızda ise

$$MK^{2m} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & \frac{1}{2} B_{11}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^{2m} & 0 \\ * & \begin{bmatrix} A_{22}^{\frac{1}{2}} & B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} \end{bmatrix}^{2m} \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Teorem 5.8'den

$$\begin{aligned}
\left| iz \ MK^{-2m} \right| &\leq \sum_{i=1}^n s_i \ MK^{-2m} \leq \sum_{i=1}^n s_i \ MK^{-2m} \\
&= \sum_{i=1}^n s_i^2 \ MK^{-m} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ M^* M K K^*{}^{-m} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \ AB^{-m} = \sum_{i=1}^n iz \ AB^{-m} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ M^* M^{-m} \ K K^*{}^{-m} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[A^{-m} \ B^{-m} \right] \\
&= iz(A^m B^m)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
\left| iz \ MK^{-2m} \right| &= iz \left[A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right]^{1/2} B_{11}^{1/2} \Big]^{2m} + iz \left[A_{22}^{1/2} \ B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12} \right]^{1/2} \Big]^{2m} \\
&\leq iz \ AB^{-m} \leq iz \ A^m B^m
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$iz \left[\tilde{A}_{22}^{1/2} \ B_{11}^{1/2} \right]^{2m} + iz \left[A_{22}^{1/2} \ \tilde{B}_{11}^{1/2} \right]^{2m} \leq iz \ AB^{-m} \leq iz \ A^m B^m$$

dır. Böylece pozitif yarı tanımlı matrislerin çarpımlarının pozitif tamsayı kuvvetleri için blok matrisler kullanılarak bir alt sınır elde edilmiş olur.

Bir sonraki teoremin ispatında yardımcı olması amacıyla aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 5.10. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ reel sayılar olsun. $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n,$$

için

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i$$

ise bu takdirde her konveks ve artan f fonksiyonu için,

$$\sum_{i=1}^k f(x_i) \leq \sum_{i=1}^k f(y_i), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dir. Özel olarak $f(x) = x^2$ için $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 \leq \sum_{i=1}^k y_i^2$$

dir (Horn and Johnson 1991).

Teorem 5.11. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde m bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$0 \leq iz A^m B^m \leq iz A^{2m} iz B^{2m} \frac{1}{2}$$

dır.

İspat: A matrisi pozitif yarı tanımlı olduğundan köşegenleştirilebilir. O halde $\Lambda = P^T A P$ olacak şekilde bir P ortogonal matrisi ve bir Λ köşegen matrisi vardır. A 'nın özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise $\Lambda = köş \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dir. $d_1, d_2, \dots, d_n$ ve $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ardışık olarak $P^T B P^m$ 'in köşegen elemanlarını ve özdeğerlerini belirtsin. Bu takdirde,

$$iz A^m B^m = iz P \Lambda^m P^T B^m = iz \Lambda^m P^T B P^m = \lambda_1^m d_1 + \lambda_2^m d_2 + \dots + \lambda_n^m d_n$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, herhangi a ve b reel sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \text{ olduğunu ifade eder. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden}$$

$$\begin{aligned} \left[iz A^m B^m \right]^2 &= \lambda_1^m d_1 + \lambda_2^m d_2 + \dots + \lambda_n^m d_n^2 \\ &\leq \lambda_1^{2m} + \lambda_2^{2m} + \dots + \lambda_n^{2m} d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2m} (A) \sum_{i=1}^n d_i^2 P^T B P^m \end{aligned}$$

yazabiliriz. Teorem 5.10 ve Teorem 3.9.6'dan

$$\begin{aligned} \left[iz A^m B^m \right]^2 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2m} A \sum_{i=1}^n d_i^2 P^T B P^m \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2m} A \sum_{i=1}^n \mu_i^2 P^T B P^m \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2m} A \sum_{i=1}^n \mu_i^{2m} B = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2m} A^{2m} \sum_{i=1}^n \mu_i^{2m} B^{2m} \\ &= iz A^{2m} iz B^{2m} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.12. A, B ve C n -kare matrisler olmak üzere $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ pozitif yarı tanımlı blok matris olsun. Bu takdirde,

$$2iz \left[\begin{array}{c} BB^* \\ m \end{array} \right] \leq iz \ A^{2m} + C^{2m}$$

dır.

İspat: $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ve $K = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Biliyoruz ki, X , pozitif yarı tanımlı matris ve Y herhangi bir matris olmak üzere Y^*XY matrisi de pozitif yarı tanımlıdır.

Buna göre $U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ bir üniter matris olmak üzere

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{pmatrix} \geq 0 \quad (34)$$

dır. O halde $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ matrisi ile $\begin{pmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{pmatrix}$ matrisi üniter olarak benzerdir.

Böylece (34) eşitliğinden,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$$

olduğundan, Löwner kısmi sıralamasına göre,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

yazabiliriz. K ve M matrislerinin kuvvetleri ise.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \text{ ise } K^{2m} = \begin{pmatrix} BB^* & 0 \\ 0 & B^*B \end{pmatrix} \text{ ve } K^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & BB^* \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ise $M^{2m} = \begin{pmatrix} A^{2m} & 0 \\ 0 & C^{2m} \end{pmatrix}$ ve $M^{2m+1} = \begin{pmatrix} A^{2m+1} & 0 \\ 0 & C^{2m+1} \end{pmatrix}$ olur.

$M \geq K$ ise Weyl'in monotonluk prensibinden $\lambda_i(M) \geq \lambda_i(K)$ yazılabilir. Böylece,

$$\lambda_i K^{2m} \leq \lambda_i M^{2m}$$

elde edilir. Yani,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i K^{2m} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i M^{2m}$$

$$iz \begin{pmatrix} BB^{*m} & 0 \\ 0 & B^* B^m \end{pmatrix} \leq iz \begin{pmatrix} A^{2m} & 0 \\ 0 & C^{2m} \end{pmatrix}$$

olur. O halde

$$iz \left[BB^{*m} + B^* B^m \right] \leq iz A^{2m} + C^{2m}$$

dir. Herhangi X ve Y matrisleri için $iz(XY) = iz(YX)$ olduğundan $iz BB^{*m} = iz B^* B^m$ yazabiliriz. Böylece,

$$2iz B^* B^m \leq iz A^{2m} + C^{2m}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 5.3'den

$$2|izB^{2m}| \leq 2iz B^m B^{*m} \leq 2iz B^* B^m \leq iz A^{2m} + C^{2m}$$

olur.

Teorem 5.13. A ve B herhangi $p \times q$ tipinde matrisler ve m bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$2iz \left[AA^* BB^{*m} \right] \leq iz \left[A^* A^{2m} + B^* B^{2m} \right]$$

dir.

İspat: A ve B herhangi $p \times q$ tipinde matrisler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} A^* A & A^* B \\ B^* A & B^* B \end{pmatrix} \geq 0$$

dır. $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$ ise $2iz \left[BB^{*m} \right] \leq iz \left[A^{2m} + C^{2m} \right]$ olduğundan,

$$2iz A^* BB^* A \leq iz \left[A^* A^{2m} + B^* B^{2m} \right]$$

yazabiliriz. Ayrıca herhangi X ve Y matrisleri için $iz(XY) = iz(YX)$ olduğundan,

$$2iz \left[AA^* BB^{*m} \right] \leq iz \left[A^* A^{2m} + B^* B^{2m} \right]$$

elde edilir.

Teorem 5.14. $\alpha_{ij} (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$ 'ler negatif olmayan reel sayılar ve $1/\alpha_1 + \dots + 1/\alpha_m = 1$ olmak üzere $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 'ler pozitif sayılar olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{i1} \dots \alpha_{im} \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1}^{\alpha_1} \right)^{1/\alpha_1} \dots \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{im}^{\alpha_m} \right)^{1/\alpha_m}$$

dir (Mirinovic 1970).

Teorem 5.15. A ve B herhangi $p \times q$ tipinde matrisler ve m bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$iz \left[AA^*{}^m BB^*{}^m \right]^2 \leq iz AA^*{}^{2m} iz BB^*{}^{2m}$$

dir. Özel olarak A ve B Hermityen matrisler ise,

$$iz A^{2m} B^{2m} \leq iz A^{4m} iz B^{4m}$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} iz \left[AA^*{}^m BB^*{}^m \right] &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[AA^*{}^m BB^*{}^m \right] \leq \sum_{i=1}^n s_i \left[AA^*{}^m BB^*{}^m \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i \left[AA^*{}^m \right] s_i \left[BB^*{}^m \right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[AA^*{}^m \right] \lambda_i \left[BB^*{}^m \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i AA^* \right]^m \left[\lambda_i BB^* \right]^m = \sum_{i=1}^n s_i^{2m} A s_i^m B \end{aligned}$$

olup Teorem 5.14'den

$$\sum_{i=1}^n s_i^{2m} A s_i^{2m} B \leq \left\{ \sum_{i=1}^n s_i^{4m} A \sum_{i=1}^n s_i^{4m} B \right\}^{1/2}$$

yazılabilir ve

$$s_i^2 A = \lambda_i AA^* \text{ ve } s_i^2 B = \lambda_i BB^*$$

olduğundan

$$iz \left[AA^*{}^m BB^*{}^m \right] \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i AA^* \right]^{2m} \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i BB^* \right]^{2m} \right\}^{1/2} = iz AA^*{}^{2m} iz BB^*{}^{2m}{}^{1/2}$$

elde edilir.

Özel olarak $A, B \geq 0$ seçilirse,

$$\| \operatorname{Im} (A^{2m} B^{2m}) \| \leq \| \operatorname{Im} A^{4m} \| \| \operatorname{Im} B^{4m} \|$$

elde edilir.

Sonuç 5.16. A ve B herhangi matrisler olmak üzere,

$$2 \| \operatorname{Im} \begin{bmatrix} AA^* & AB^* \\ AB^* & BB^* \end{bmatrix} \|^{1/2} \leq 2 \| \operatorname{Im} AA^* \| \| \operatorname{Im} BB^* \|^{1/2} \leq \| \operatorname{Im} (AA^* + BB^*) \|$$

olur.

Sonuç 5.17. A ve B herhangi matrisler olmak üzere,

$$2 \| \operatorname{Im} \begin{bmatrix} A^* A & A^* B \\ A^* B & B^* B \end{bmatrix} \| \leq 2 \| \operatorname{Im} \begin{bmatrix} A^* A & B^* B \end{bmatrix} \| \leq 2 \| \operatorname{Im} A^* A \| \| \operatorname{Im} B^* B \| \leq \| \operatorname{Im} A^* A \|^2 \| \operatorname{Im} B^* B \|^2$$

olur.

Sonuç 5.18. A ve B herhangi matrisler olmak üzere,

$$\| \operatorname{Im} A^* A \| + \| \operatorname{Im} B^* B \| \leq \| \operatorname{Im} A^* A \| + \| \operatorname{Im} B^* B \|^2$$

olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada pozitif yarı tanımlı blok matrislerin singüler değerleri için eşitsizlikler ve pozitif tanımlı herhangi matrisler ve pozitif yarı tanımlı blok matrislerin izleri için eşitsizlikler elde edilmiştir.

Pozitif yarı tanımlı herhangi matrisler ve pozitif yarı tanımlı blok matrislerin normları için yeni sınırlar araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

- Ando, T. , Horn, R. A. , Johnson, C. R. 1987.** The Singular Values of a Hadamard Product: A Basic Inequality, *Linear and Multilinear Algebra*, 21, 345-365.
- Bhatia, R. , Kittaneh, F. 2000.** Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities, *Linear Algebra and its Applications*, 308, 203-211.
- Coope, I. D. 1994.** On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrix, *J. Math. Anal. Appl.* 188, 999-1001.
- Danan, F. M. 2001.** Matrix and Operator Inequalities, *J. Ineq. Pure and Appl.Math.*, Vol 2, Issue 3, Article 34.
- Hardy, G. H. , Littlewood, J. E. , Poyla, G. 1952.** *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Horn, R. A. , Johnson, C. R. 1985.** *Matrix Analysis*, Cambridge University Pres.
- Horn, R. A. , Johnson, C. R. 1991.** *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Pres.
- Lasserre, J. B. 1995.** A Trace inequality for matrix product, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40 (8), 1500-1501.
- Li. C. , Mathias R. 2002.** Inequalities on Singular Values of Block Triangular Matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol 24, Issue1, 126-131.
- Marshall, A. W. , Olkin I. 1979.** *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Pres.
- Marcus, M. 1992.** *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Henryk Minc, New York: Dover Publications.
- Mirinovic, D. S. 1970,** *Analytic Inequalities*, 52-165, Springer-Verlag, New York.
- Telatar, E. 1999.** Capacity of multi-antenna Gaussian channels, *European Trans. on Telecomm.*, 10(6), 585-595.
- Tao, Y. 2006.** More results on singular value inequalities of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 416, 724-729.

- Wang, B. , Zhang, F. 1997.** Schur Complements and Matrix Inequalities of Hadamard Products, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 43, 315-326.
- Wang, B. , Gong, M. P. 1993.** Some eigenvalue inequalities for positive semidefinite matrix power products, Lin. Alg. Appl., 184, 242-249.
- Wang, B. , Zhang, F. 1995.** Trace and Eigenvalue Inequalities for Ordinary and Hadamard Products of Positive Semidefinite Hermitian Matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 16, No. 4, 1173-1183.
- Wang, B. , Yan Xi, B. , Zhang F. 1999.** Some inequalities for sum and product of positive semidefinite matrices, Linear Algebra and its Applications 293, 39-49.
- Yang, X. 2000.** Note A Matrix Trace Inequality, J. Math. Anal. Apply. , 250, 372-374.
- Yang, X. M. , Yang, X. Q. , Teo, K. L. 2001.** Note A Matrix Trace Inequality $1 \simeq J$. Math. Anal. Appl. 263, 327-331.
- Yang, Z. P. , Feng, X. X. 2002.** A Note on The Trace Inequality for Products of Hermitian Matrix Power, J. Ineq. Pure and Appl. Math. , 3(5) Art. 78.
- Zhan, X. 1997.** Inequalities for The Singular Values of Hadamard Products, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 18, No. 4, 1093-1095.
- Zhan, X. 2002.** Matrix Inequalities, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Zhang, F. 1988.** Another Proof of a Singular Value Inequality concerning Hadamard Products of Matrices, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 22, 307-311.
- Zhang, F. 1999.** Matrix Theory: Basic and Techniques, Springer-Verlag, New York.
- Zhang, F. 2000.** Schur Complements and Matrix Inequalities in the Löwner Ordering, Linear Algebra and its Applications, 321, 399-410.
- Zhang, F. 2001.** Matrix Inequalities by Means of Block Matrices, Math. Ineq. Apply., Vol. 4, No. 4.
- Zhang, F. 2005.** The Schur Complement and Its Applications, Springer Science+Business Media, Inc.