

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: Morfik Halkaların Morfik Genişlemesi

YAZAR ADI: Şule Ecevit

Halka teorisinde (özellikle de matris teorisinde), halkadan aldığımız herhangi bir elemanın belli özellikleri olan bir elemana eşit olup olmadığı ilgi çekici bir sorudur. Biz tezde,

$$[R, I, \sigma, n] := \left\{ a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \frac{R[x; \sigma]}{(x^{n+1})} : a_0 \in R, a_i \in I \text{ for } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

halkamızı için inceledik burada R birimli düzenli halka ile $xr = \sigma(r)x$ bu şekilde tanımlanmış bir σ endomorfizmasıdır.

Bu çalışma 3 bölümden oluşuyor.

Birinci bölüme, biz bazı genel ve ön bilgilerle başladık.

İkinci bölümde, $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ ile $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ halkalarının morfik halka olduğunu gösterdik. Burada I , R nin ideali ve $\sigma : R \rightarrow R$ bir halka endomorfizması ki $e^2 = e \in R$ için $\sigma(e) = e$ dir. Biz özellikle sırasıyla [7, Theorem 2] ve [6, Theorem 2] deki teoremleri karakterize ettik.

1. R bir birimli düzenli halka ve $e^2 = e \in R$ için $\sigma(e) = e$ olan bir endomorfizma halkası olsun.

Buradaki $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ halkası her bir $n \geq 0$ için sol morfiktir .

2. I birimli düzenli olan R halkasının bir ideali olsun. O halde $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ halkası sol morfiktir.

Üçüncü bölümde, biz yeni bir halka genişlemesi olan $[R, I, \sigma, n]$ (buradaki R birimli düzenli halka ile σ endomorfizma) halkasını inceledik. Aslında, bölüm 3 bize esas olarak $[R, I, \sigma, n]$ halkasının, ki bu halka $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ ile $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ nin genel halka genişlemelerinin bir formudur, morfik halka olduğunu veriyor. Biz gösterdik ki; eğer I bir birimli düzenli olan R halkasının bir ideali ve $\sigma : R \rightarrow R$ bir halka endomorfizması ki bütün $e^2 = e \in R$ için $\sigma(e) = e$ ise $[R, I, \sigma, n]$ halkası her $n \geq 0$ için sol morfiktir. Bu sonuç,

Bull. Korean Math. Soc., in 2009 or 2010 da yer alacaktır.

SUMMARY

TEZ BAŞLIĞI: Morfik Halkaların Morfik Genişlemesi

YAZAR ADI: Şule Ecevit

It is an interesting question in ring theory (in particular, in the theory of matrix rings) whether and/or when an arbitrary element of a ring is equivalent to an element with a certain property. In this dissertation, we consider this question for the ring

$$[R, I, \sigma, n] := \left\{ a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \frac{R(x; \sigma)}{(x^{n+1})} : a_0 \in R, a_i \in I \text{ for } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

where R is a unit regular ring with an endomorphism σ such that $xr = \sigma(r)x$.

This paper consists of 3 chapters.

In Chapter 1, we introduce some backgrounds and preliminaries.

In Chapter 2, we studied constructing morphic rings via the rings $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ and $(R, I)[x]/(x^{n+1})$, where I is an ideal of R and $\sigma : R \rightarrow R$ is a ring endomorphism such that $\sigma(e) = e$ for all $e^2 = e \in R$. In particular, we characterized the following theorem which was proved in [7, Theorem 2] and [6, Theorem 2], respectively:

1. Let R be a unit regular ring with an endomorphism σ such that $\sigma(e) = e$ for all $e^2 = e \in R$.

Then the ring $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ is left morphic for each $n \geq 0$.

2. Let I be an ideal of a unit regular ring R . Then $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ is left morphic.

Chapter 3 is devoted to investigate the new ring extension $[R, I, \sigma, n]$ where R is a unit regular ring with an endomorphism σ . In fact, Chapter 3 mainly gives a constructing morphic rings via the ring $[R, I, \sigma, n]$ which is a general form of the ring extensions $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ and $(R, I)[x]/(x^{n+1})$. We show that if I is an ideal of a unit regular ring R and $\sigma : R \rightarrow R$ is a ring endomorphism such that $\sigma(e) = e$ for all $e^2 = e \in R$, then $[R, I, \sigma, n]$ is a left morphic ring for every $n \geq 0$. This result will appear in **Bull. Korean Math. Soc.**, in 2009 or 2010.

Contents

1	Giriş	1
1.1	Konunun Kısa Tarihsel Gelişimi	1
1.2	Temel Tanım ve Kavramlar	2
2	Birimli Düzenli ve Morfik Halkalar	5
3	$R[x]/(x^{n+1})$ ve $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ Morfik Halkalardır	12
3.1	$R[x]/(x^{n+1})$ Morfik Halkadır	13
3.2	$(R, I)[x]/(x^{n+1})$ Morfik Halkadır	17
4	$[R; I, \sigma, n]$ Morfik Halkadır	19
4.1	$[R; I, \sigma, n]$ Halkası ve Özellikleri	19
4.2	$[R; I, \sigma, n]$ Morfik Halkadır	20
4.3	$[R; I, \sigma, n]$ nin Matris Halkalarına Bir Uygulaması	23
5	Kaynaklar	24
	Dizin	

1 Giriş

1.1 Konunun Kısa Tarihsel Gelişimi

Morfik halkalar ile ilgili ilk çalışma W. K. Nicholson ve E. Sánchez Campós [9] tarafından 2004 yılında başlamıştır. R birimli bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Herhangi bir $a \in R$ için

$$R/\mathbf{l}_R(a) \cong Ra$$

olduğu modüller için temel homomorfizma teoreminden iyi bilinen bir sonuçtur. Bu izomorfizmanın duali olarak,

$$R/Ra \cong \mathbf{l}_R(a)$$

izomorfizmasını sağlayan a elemanını W. K. Nicholson ve E. Sánchez Campós [9] *sol morfik* eleman olarak isimlendirilmiştir. Bu söylediklerimize biraz daha açıklık getirelim. [4] de G. Ehrlich ispatlamıştır ki; M nin endomorfizma halkası $End_R(M)$ deki bir α elemanının birimli düzenli eleman olması için gerek ve yeterli koşulun α elemanının düzenli bir eleman ve $M/Im(\alpha) \cong Çek(\alpha)$ olmasıdır. Nicholson ve Sánchez [9] çalışmalarında $M =_R R$ olması durumunu göz önüne almışlar ve böylece α homomorfizması da doğal olarak $\alpha : .a :_R R \rightarrow_R R$ şeklindedir. Böylece $M/Im(\alpha) \cong Çek(\alpha)$ izomorfizması tam olarak $R/Ra \cong \mathbf{l}_R(a)$ dır. Nicholson ve Sánchez in bu çalışmalarını 2.Bölümde detaylıca inceledik. En dikkat çekici sonuçlarından birisi de; R bir sol morfik halka iken onun matris halkasının bir morfik halka olmayışına verdikleri örnektir ([9, Example 16]).

Daha sonra morfik halkaları özellikle bazı genişlemeleri ile inceleyen iki çalışma Chen-Zhou [2] ve Lee-Zhou [8] tarafından yapılmıştır. [2] de Chen ve Zhou morfik halkaların $T(R, M)$ aşikar genişlemesini çalışmışlar ve ispatlamışlardır ki R bir Temel İdeal Bölgesi ve $Q(R)$ de R nin kesir cismi iken $T(R, Q(R)/R)$ de morfik halkadır. [8] de ise Lee ve Zhou morfik halkaları $R[x]/x^{n+1}$ polinom halkalar yardımı ile incelemişlerdir ve ispatlamışlardır ki R birimli düzenli bir halka olmak üzere $R[x]/x^{n+1}$ bir sol morfik halkadır. Son olarak Huang ve J. Chen [6] yeni bir halka genişlemesi olarak $(R, I)[x]/x^{n+1}$ halkasını tanımlamışlardır ve I birimli düzenli R halkasının bir ideali olmak üzere $(R, I)[x]/x^{n+1}$ nin da bir sol morfik halka olduğunu ispatlamışlardır.

1.2 Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamız boyunca sıklıkla kullanacağımız bazı iyi bilinen tanım ve teoremleri hatırlayalım.

Aşağıdaki tanım ve teoremler için Anderson-Fuller ^[1] ve Gooderal^[5] in kitaplarını kaynak olarak göz önüne aldık. Çalışmamızın bundan sonraki bölümlerinde burada verdiğimiz tanım ve teoremleri tekrar referans vermeden de kullanabiliriz.

Tanım 1.1.1 R birimli bir halka olsun. Eğer $u.v = 1 = v.u$ olacak şekilde $v \in R$ elemanı var ise $u \in R$ elemanına halkanın *unit* (ya da *tersinir elemanı*) adı verilir.

Teorem 1.1.2 R birimli bir halka ve $U(R)$ de R nin tüm unit elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda;

- (a) $U(R)$ kümesi boş küme değildir.
- (b) $0 \notin U(R)$.
- (c) Her $x, y \in U(R)$ için, $xy \in U(R)$ dir.
- (d) Eğer $x \in U(R)$ ise $-x \in U(R)$ dir.

Tanım 1.1.3 R nin sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R halkası *bölüm halkası* dır.

Önerme 1.1.4 R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) R bir bölüm halkasıdır.
- (ii) R nin sıfırdan farklı her elemanı sağ tersinirdir.
- (iii) R nin sıfırdan farklı her elemanı sol tersinirdir.
- (iv) R nin bir tek sağ idealleri $\{0_R\}$ ve R dir.
- (v) R nin bir tek sol idealleri $\{0_R\}$ ve R dir.

Tanım 1.1.5 R birimli bir halka (değişmeli olması gerekmez) olsun. $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ çarpımı ile birlikte $(M, +)$ değişmeli grubu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa R üzerinde bir *sol R -modüldür* denir ve ${}_R M$ ile gösterilir.

- (1) $1_R \cdot m = m$, her $m \in M$ için,
- (2) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$, her $r \in R$ ve $m, n \in M$ için,
- (3) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$, her $r, s \in R$ ve $m \in M$ için,
- (4) $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$, her $r, s \in R$ ve $m \in M$ için.

Genellikle $\cdot$ yazılmaz ve bunun yerine rm kullanılır. Bir R halkası üzerindeki sağ modül tanımını da mr çarpımı ile benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 1.1.6 R bir halka, M bir sol R -modül ve N de M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer N kümesi M nin toplamsal bir alt grubu ve, her $r \in R$ ve $n \in N$ için, $rn \in N$ ise N ye M nin bir *sol R -alt modülü* denir ve ${}_R N \leq_R M$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.7 Bir M sol R -modülü ve herhangi bir $m \in M$ için ,

$$Rm = \{rm : r \in R\} \subseteq M$$

alt kümesi M nin bir alt modülüdür.

Tanım 1.1.8 M ve N sol R -modüller olsunlar. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $f : M \rightarrow N$ dönüşümüne bir *sol modül homomorfizması* denir.

- (1) $(m + m')f = (m)f + (m')f$ her $m, m' \in M$ için,
- (2) $(rm)f = r(m)f$ her $r \in R$ ve $m \in M$ için.

A ve B iki sol R -modül olsunlar. $A \rightarrow B$ tüm sol R -modül homomorfizmalarının $\text{Hom}_R(A, B)$ kümesi, her $a \in A$ için,

$$(a)(f + g) = (a)f + (a)g \in B$$

şeklinde tanımlı $f + g$ işlemi altında bir değişmeli gruptur.

Tanım 1.1.9 Bire-bir ve örten bir modül homomorfizmasına *modül izomorfizması* adı verilir. Örneğin, $Rm \cong R/ann(m)$.

Modüller için I. izomorfizma teoremi $f : M \rightarrow N$ bir örten R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda,

$$M/\text{Çek}(f) \cong N.$$

Modüller için II. izomorfizma teoremi A ve B bir ${}_R M$ modülünün alt modülleri ve $A \subseteq B$ olsun. Bu durumda

$$M/B \cong (M/A)/(B/A).$$

Modüller için III. izomorfizma teoremi A ve B bir ${}_R M$ modülünün alt modülleri olsun. Bu durumda

$$B/(A \cap B) \cong (A + B)/A.$$

Örnek 1.1.10 Kabul edelim ki ${}_R M$ -modülü M_1 ve M_2 gibi iki alt modülün dik toplamı olarak yazılabilsin, yani $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda $\text{Çek}(\pi_{M_1}) = M_2$ olan $\pi_{M_1} : M = M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$ ve $\text{Çek}(\pi_{M_2}) = M_1$ olan $\pi_{M_2} : M = M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2$ Kanonik örten modül homomorfizmalar adı verilen dönüşümlerimiz vardır. Modüller için I. izomorfizma teoreminden, $M/M_1 \cong M_2$ and $M/M_2 \cong M_1$ elde ederiz.

2 Birimli Düzenli ve Morfik Halkalar

Bu bölümde ilk önce morfik halkaların tanımlandığı literatüre ilk çalışma olarak geçen W. K. Nicholson ve E. Sánchez Campós [9] in "*Rings With The Dual Of The Isomorphism Theorem*" isimli çalışmalarını ele alacağız.

Morfik halkanın tanımı ile başlayalım.

Tanım 2.1.1 R bir halka olsun. Eğer

$$R/Ra \cong \mathbf{l}_R(a)$$

ise $a \in R$ ye R nin bir *sol morfik* elemanı adı verilir.

Her elemanı sol morfik eleman olan halkalara da *sol morfik halkalar* denir.

Morfik elemene örnek olarak kolayca görebiliriz ki:

Örnek 2.1.2

- $R/R0 = R = \mathbf{l}_R(0)$
- $u \in U(R)$ için, $R/Ru = R/R \cong (0) = \mathbf{l}_R(u)$

Önteorem 2.1.3 ([9, Lemma 1]) *Bir $a \in R$ için aşağıdakiler denktir:*

- (i) a sol morfik elemandır.
- (ii) $Ra = \mathbf{l}_R(b)$ ve $\mathbf{l}_R(a) = Rb$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.
- (iii) $Ra = \mathbf{l}_R(b)$ ve $\mathbf{l}_R(a) \cong Rb$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $a \in R$ sol morfik eleman olsun. Bu durum da $R/Ra \cong \mathbf{l}_R(a)$ dır ve bu izomorfizma $\alpha : R/Ra \rightarrow \mathbf{l}_R(a)$ olsun. $b = (1 + Ra)\alpha$ diyelim. α örten olduğundan, $Rb = \text{Im}(\alpha) = \mathbf{l}_R(a)$ dır. Öte yandan α homomorfizması 1-1 olduğundan $\mathbf{l}_R(b) = Ra$ dır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Kabul edelim ki $Ra = \mathbf{l}_R(b)$ ve $\mathbf{l}_R(a) \cong Rb$ olacak şekilde $b \in R$ var olsun. Bu durum da $R/Ra = R/\mathbf{l}_R(b) \cong Rb \cong \mathbf{l}_R(a)$ olup a morfiktir. ■

Örnek 2.1.4 Bir R halkasındaki her birim eleman ve eşüslü eleman bir sol morfik elemandır, yani $u \in U(R)$ ve $e^2 = e \in R$ sol morfik elemanlardır.

Kanıt. $b = be + b(1 - e)$ den $be = 0 \cong b = b(1 - e)$ ve $b(1 - e) = 0 \cong b = be$ olup $Re = \mathbf{l}_R(1 - e)$ ve $R(1 - e) = \mathbf{l}_R(e)$ çıkar. ■

Önteorem 2.1.5 ([9, Lemma 3]) R bir halka ve $u \in U(R)$ olsun. Eğer a bir sol morfik eleman ise au ve ua da sol morfik elemanlardır.

Kanıt. a bir sol morfik eleman olsun. Önteorem 2.1.3 den $Ra = \mathbf{1}_R(b)$ ve $\mathbf{1}_R(a) = Rb$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

ua sol morfikdir:

$$R(ua) = Ra = \mathbf{1}_R(b) = \mathbf{1}_R(bu^{-1})$$

ve

$$R(bu^{-1}) = \mathbf{1}_R(a)u^{-1} = \mathbf{1}_R(ua)$$

dır.

au sol morfikdir:

$$R(au) = \mathbf{1}_R(b)u = \mathbf{1}_R(u^{-1}b)$$

ve

$$R(u^{-1}b) = Rb = \mathbf{1}_R(a) = \mathbf{1}_R(au)$$

dur. ■

Şimdi birimli düzenli halkalar sınıfının morfik halka sınıfı ile ilişkilerini inceleyelim.

Tanım 2.1.6 R bir halka olsun. Eğer;

- bazı $b \in R$ ler için $a = aba$ oluyorsa $a \in R$ ye *düzenli eleman* adı verilir.
- bazı $u \in U(R)$ ler için $a = aua$ oluyorsa $a \in R$ ye *birimli düzenli eleman* adı verilir.

Eğer R halkasının her elemanı;

- düzenli eleman ise R ye *düzenli halka*,
 - birimli düzenli eleman ise R ye *birimli düzenli halka*
- adı verilir.

[9, Example 12] den, her $n \geq 2$ için Z_n hem sol hem sağ morfik halkadır. Dolayısıyla Z_4 bir morfik halkadır fakat birimli düzenli bir halka değildir.

Erlich'in [4] de bulunan ve iyi bilinen sonucunun bir yönünü ispatlayalım.

Teorem 2.1.7 *Her birimli düzenli halka hem sol hem de sağ morfik halkadır.*

Kanıt. R bir birimli düzenli halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $u \in U(R)$ için $a = au$ dır. Açıktır ki $(ua)^2 = ua$ dır. Yani ua bir eşüslü elemandır. $e = ua$ diyelim. $a = u^{-1}e$ olduğundan, Önteorem 2.1.5 den, a elemanı sol ve aynı zaman da sağ morfik elemandır. ■

Sonuç 2.1.8 *Birimli düzenli halkada, halkanın her elemanı bir birim ile bir eşüslü elemanın çarpımı olarak yazılabilir.*

Erlich'in [4] teoreminin diğer yönü şu şekilde ispatlanır.

Önerme 2.1.9 ([9, Proposition 5]) *Eğer $a \in R$ hem sol morfik hem de düzenli eleman ise a birimli düzenli bir elemandır .*

Kanıt. $a \in R$ hem sol morfik hem de düzenli bir eleman olsun. Yani $a = axa$ ve bir $b \in R$ için $Ra = \mathbf{1}_R(b)$ ve $Rb = \mathbf{1}_R(a)$ olsun. $u = xax + b$ dersek $aua = a(xax + b)a = axa = a$ dır. Şimdi $u \in U(R)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} a = axa &\Rightarrow a - axa = 0 \\ &\Rightarrow (1 - ax)a = 0 \\ &\Rightarrow 1 - ax \in \mathbf{1}_R(a) = Rb \end{aligned}$$

olduğundan, $1 - ax = yb$, $b \in R$ dir. $v = a + y(1 - xa)$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} vu &= (a + (y - yxa))(xax + b) \\ &= axax + \underbrace{ab}_0 + yxax - yx \underbrace{axa}_a x + yb - yx \underbrace{ab}_0 \\ &= ax + yb + yxax - yxax \\ &= ax + yb = 1 \end{aligned}$$

dir. Şimdi de $uv = 1$ olduğunu gösterelim. $uv - 1 \in \mathbf{1}_R(u)$ olduğundan $\mathbf{1}_R(u) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $ru = 0$ olsun, yani $ru = r(xax + b) = rxa + rb = 0$ dır. Bu ifadeyi sağdan a ile çarparsak, $rxax = 0$ elde ederiz, dolayısıyla $rb = 0$ olur. Böylece $r \in \mathbf{1}_R(b) = Ra$ olacaktır ki buradan $r = ta$, $t \in R$ diyelim. Artık $0 = rxa = taxa = ta = r$ elde ederiz. ■

Aşağıdaki önerme ile morfik halkaların temel özelliklerini tamamlayalım.

Önerme 2.1.10 ([9, Proposition 6]) *R nin bir a morfik elemanı için aşağıdakiler denktir.*

$$(i) \mathbf{l}_R(a) = 0$$

$$(ii) Ra = R$$

$$(iii) a \in U(R)$$

Kanıt. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ $a \in R$ alalım. a morfik olduğundan bir $b \in R$ için $\mathbf{l}_R(a) = Rb$ ve $\mathbf{l}_R(b) = Ra$ olacaktır.

$$\mathbf{l}_R(a) = 0 \Leftrightarrow Rb = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow R = \mathbf{l}_R(b) = Ra$$

dır.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ açıktır. ■

Eğer $ab = 1$ iken $ba = 1$ oluyorsa R halkasına *dik sonlu* halka adı verilir.

Sonuç 2.1.11 *Her sol morfik halka dik sonludur.*

Kanıt. R de $uv = 1$ olsun. Bu durumda $\mathbf{l}_R(u) = 0$ dır ve böylece, Önerme 2.1.10(iii) den, $u \in U(R)$ dir. Bu da bize $v = u^{-1}$ olmasını yani $vu = 1$ eşitliğini verir. ■

Bu bölümün bundan sonraki kısmında morfik halkaların matris halkaları cinsinden inşasını ele alacağız.

Teorem 2.1.12 ([5, Corollary 4.7]) *R birimli düzenli bir halka ve $e^2 = e \in R$ ise eRe de birimli düzenli bir halkadır.*

Şimdi Teorem 2.1.12 yi morfik halkalar için ispatlamaya çalışalım.

Önteorem 2.1.13 ([9, Lemma 14]) *R bir halka, $e^2 = e \in R$ ve $f = 1 - e$ olsun. eRe halkasının bir a elemanı için aşağıdakiler denktir.*

- (i) *a elemanı eRe nin bir sol morfik elemanıdır.*
- (ii) *fRf deki her b sol morfik elemanı için, $a + b$ elemanı R nin sol morfik elemanıdır.*
- (iii) *Her $b \in U(fRf)$ için, $a + b$ elemanı R nin sol morfik elemanıdır.*
- (iv) *$a + f$ elemanı R nin sol morfik elemanıdır.*
- (iii) *Bazı $b \in U(fRf)$ için, $a + b$ elemanı R nin sol morfik elemanıdır.*

Teorem 2.1.14 ([9, Theorem 15]) *R bir sol morfik halka ve $e^2 = e \in R$ ise eRe de sol morfik halkadır.*

Kanıt. $f = 1 - e$ diyelim. Eğer $a \in eRe$ ise, hipotezden, $a + f$ de bir sol morfik elemandır. Önteorem 2.1.13 ((ii) $\Rightarrow$ (i)) den a elemanı eRe nin bir sol morfik elemanıdır.

■

Teorem 2.1.14 ün sonucu olarak sol morfik olmanın bir Morita invaryant bir özellik olduğu düşünülebilir. Fakat Nicholson-Sánchez bunun doğru olmadığını bir örnekle ispatladı.

Örnek 2.1.15 F bir cisim ve $\overline{F} \neq F$ de bir alt cismi olsun. $\alpha : F \rightarrow \overline{F}$ da $x \rightarrow \overline{x}$ ile tanımlı bir izomorfizma olsun. R ile, her $x \in F$ için, $c^2 = 0$ ve $cx = \overline{x}c$ olacak şekilde $\{1, c\}$ tabanlı bir sol F -vektör uzayını gösterelim. ([9, Example 8]) den R bir sol morfik halkadır. Fakat, ([9, Example 16]) den, R üzerinde tanımlı 2×2 tipindeki matris halkası $M_2(R)$ bir sol morfik halka değildir.

R bir halka ve M de R üzerinde bir bimodül olsun. R ve M nin *aşıkak genişlemesi*

$$T(R, M) = \{(a, m) : a \in R, m \in M\}$$

bileşen bileşene toplama; $(a, m) + (a', m') = (a + a', m + m')$

bileşen bileşene çarpma; $(a, m)(b, n) = (ab, an + mb)$

işlemleri ile tanımlıdır.

Açıktır ki;

$$\bullet T(R, M) \text{ halkası } 2 \times 2 \text{ tipindeki } \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix} \text{ nin } \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in R, m \in M \right\}$$

alt halkasına izomorftur.

$$\bullet T(R, R) \cong R[x]/(x^2) \text{ dir.}$$

$\bullet \sigma : R \rightarrow R$ halka endomorfizması olmak üzere $R[x; \sigma]$ skew polinom halkasını için $R(\sigma)$ bir $R - R$ -bimodüldür (${}_R R(\sigma) = {}_R R$ ve, her $m \in R(\sigma) = R$ için, $m \circ r = \sigma(r)m$ ile tanımlı) ve $T(R, R(\sigma)) \cong R[x; \sigma]/x^2$ dir.

Örnek 2.1.16 Z_4 bir sol morfik halka iken, [2, Remark 10] den, $T(Z_4, Z_4)$ sol morfik halka değildir.

Örnek 2.1.17 $T(Z, Q/Z)$ sol morfik halkadır [2, Theorem 14].

Aşağıdaki teorem gösterir ki R halkasının sol morfik halka olması tam olarak $T(R, R)$ deki bazı elemanların sol morfik olması demektir.

Teorem 2.1.18 ([2, Theorem 19]) R halkasının bir a elemanı için aşağıdakiler denktir.

(i) a elemanı R nin bir sol morfik elemanıdır.

(ii) $(a, 0) \in T(R, R)$ elemanı $T(R, R)$ nin sol morfik elemanıdır.

(iii) $(a, a) \in T(R, R)$ elemanı $T(R, R)$ nin sol morfik elemanıdır.

Kanıt. (2) $\Leftrightarrow$ (3) $(1, -1) \in U(T(R, R))$ ve $(a, a)(1, -1) = (a, 0)$ olduğundan, sonuç Önteorem 2.1.5 den kolayca elde edilir.

(1) $\Rightarrow$ (2) $a \in R$ bir sol morfik eleman olsun. Bu durum da $\mathbf{l}_R(a) = Rb$ ve $\mathbf{l}_R(b) = Ra$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. $\mathbf{l}_R((a, 0)) = T(R, R)(b, 0)$ ve $\mathbf{l}_R((b, 0)) = T(R, R)(a, 0)$ dan $(a, 0) \in T(R, R)$ sol morfik elemanıdır.

(2) $\Rightarrow$ (1) de benzerdir. ■

Önerme 2.1.19 ([2, Proposition 20]) R bir halka olsun.

(i) Eğer $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ ise $(0, eu), (0, ue)$ elemanlarında $T(R, R)$ nin sol morfik elemanlarıdır.

(ii) Eğer $(0, a) \in T(R, R)$ elemanı $T(R, R)$ nin sol morfik elemanı ise a elemanı R nin bir sol morfik elemanıdır.

(iii) $\bar{2} \in Z_4$ elemanı sol morfik elemanıdır fakat $(0, \bar{2}) \in T(Z_4, Z_4)$ bir sol morfik eleman değildir.

Kanıt. (i) Kabul edelim ki $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ olsun. $S = T(R, R)$ diyelim. Açık ki $(u, 0) \in U(S)$ dir. $(1 - e, 1)(0, e) = (0, 0)$ ve $(0, e)(1 - e, 1) = (0, 0)$ olduklarından, $S(0, e) \subseteq \mathbf{1}_S((1 - e, 1))$ ve $S(1 - e, 1) \subseteq \mathbf{1}_S((0, e))$ kapsamaları elde edilir. $(1, 0) \in S$ birim eleman olduğundan, $S(0, e) = \mathbf{1}_S((1 - e, 1))$ ve $S(1 - e, 1) = \mathbf{1}_S((0, e))$ eşitliği elde edilir. Buda bize $(0, e)$ nin S nin bir sol morfik eleman olduğunu gösterir. Öte yandan, $(0, ue) = (u, 0)(0, e)$ ve $(0, eu) = (0, e)(u, 0)$ olarak yazılabileceklerinden, Öntorem 2.1.5 den, $(0, ue)$ ve $(0, eu)$ nun S de morfik elemanlardır.

(ii) $(0, a)$, S nin bir sol morfik elemanı olsun. Bu durumda $S(0, a) = \mathbf{1}_S((b, c))$ ve $S(b, c) = \mathbf{1}_S((0, a))$ olacak şekilde $(b, c) \in S$ vardır. Bu durumda $Ra = \mathbf{1}_R(b)$ ve $Rb = \mathbf{1}_R(a)$ dır.

(iii) $S = T(Z_4, Z_4)$ diyelim. $(0, \bar{2})$ nin S de bir sol morfik eleman olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(a, b) \in S$ olmak üzere $S(a, b) = \mathbf{1}_S((0, \bar{2}))$ dir. $= \mathbf{1}_S((0, \bar{2})) = T(2Z_4, Z_4)$ olduğundan, $a = \bar{2}$ olmalıdır. Öte yandan, $(0, \bar{2})(0, \bar{1}) = (0, \bar{0})$ yani $(0, \bar{1}) \in \mathbf{1}_S((0, \bar{2}))$ olduğundan, $(0, \bar{1}) = (c, d)(\bar{2}, b) = (\bar{2}c, \bar{2}d + cb)$ olacak şekilde $(c, d) \in S$ vardır. Böylece $\bar{2}c = 0$ ve $\bar{1} = \bar{2}d + cb$ dir. Bu da bize $\bar{2} = \bar{2}(\bar{2}d + cb) = 0$ olmasını verir ki bu bir çelişkidir. ■

Bu bölümü aşağıdaki sonuç ile bitirelim.

Sonuç 2.1.20 Eğer $T(R, R)$ bir sol morfik halka ise R de sol morfik halkadır.

3 $R[x]/(x^{n+1})$ ve $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ Morfik Halkalardır

Bu bölümde polinom ve skew polinom halkalar yardımı ile morfik halkaları karakterize edelim. Bu karakterizasyon ile, $R \subseteq R[x] \subseteq R[x; \sigma]$ hiyerarşisi var olduğundan, aslında morfik halkaların genişlemesi, örneğin aşıkır genişleme gibi, verilmektedir.

R bir sol morfik halka olsun. Her zaman $\mathbf{1}_R(x) = 0$ olacağından, $R[x]$ bir sol morfik halka olamaz. Fakat, açıktır ki eğer R sol morfik halkası bir bölüm halkası ise $R[x]$ bir sol morfik halkadır. Dolayısıyla $R[x]$ ya da $R[x; \sigma]$ halkalarını incelemek yerine $R[x]/(x^{n+1})$ ya da $R[x; \sigma]/(x^2)$ halkalarını incelemek anlamlı olacaktır. Bu halka yapılarını inceleyen yazarlar, morfik halkalar ile düzenli halkalar arasında yeni ilişkiler elde etmişlerdir. Şimdi bu ilişkileri inceleyelim. Bunun için önce aşağıdaki tanımı hatırlayalım.

Tanım 3.0.1 Her $a \in R$ için eğer $a \in a^2R$ ise R ye *güçlü düzenli* halka adı verilir.

Güçlü düzenli halkanın bazı özellikleri aşağıdadır.

Teorem 3.0.2 R güçlü düzenli halkadır ancak ve ancak R düzenli bir halkadır ve R deki her eşüslü eleman merkezidir.[5].

Teorem 3.0.3 Bir güçlü düzenli halkada her tek yönlü ideal bir iki yönlü idealdir.

Kanıt. R güçlü düzenli halka olsun. Her $a \in R$ için, $u \in U(R)$ ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere $a = ue$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} aR &= ueR \\ &= uRe && \text{Teorem 3.0.2 den} \\ &= Re \\ &= Rue = Ra \end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.1 $R[x]/(x^{n+1})$ Morfik Halkadır

Önce R halkasının güçlü düzenli bir halka olması durumunda $R[x; \sigma]/(x^2)$ halkasının morfikliğini inceleyelim.

Teorem 3.1.1 ([2, Theorem 1]) *R güçlü düzenli bir halka ve, her $e^2 = e \in R$ için, $\sigma(e) = e$ olacak şekilde $\sigma : R \rightarrow R$ bir halka endomorfizması olsun. Bu durumda $R[x; \sigma]/(x^2)$ halkası sol morfiktir.*

Kanıt. $S = R[x; \sigma]/(x^2)$ diyelim. Bu durumda $S = \{r + sx : r, s \in R, x^2 = 0\}$ ve, her $t \in R$ için, $xt = \sigma(t)x$ dir. S nin sol morfik halka olduğunu 4 adımla gösterelim:

1. Adım: Kabul edelim ki I , S nin bir sol ya da sağ ideali olsun. Eğer $r + sx \in I$ ise $r \in I$ ve $sx \in I$ dır:

$e^2 = e \in R$ olmak üzere, $Rr = Re$ dir ve böylece, bir $t \in R$ için, $r = t$ olsun. Eğer I sol ideal ise, $xe = \sigma(e)x = ex$ ve $x^2 = 0$ olduğu dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} e &= e^2 = (e - tsx)(e + tsx) \\ &= (e - tsx)(tr + tsx) \\ &= (e - tsx)t(r + sx) \in I \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu bize $r = t \in I$ olmasını verir. Böylece $sx \in I$ dır. I nin sağ ideal olması durumunda, ki bu durum da $rR = eR$ olduğundan, benzer olarak ispatlanır.

Artık $a + bx \in S$ alabiliriz ve bu elemanın S de sol morfik olduğunu gösterebiliriz. 1.adımdan dolayı, $Ra = Re$ alalım.

2. Adım: $S(a + bx) = S(e + gx)$ olacak şekilde $eg = ge = 0$ olan $g^2 = g \in R$ vardır: $bx = (bx)e + b(1 - e)x$ olduğundan ve 1.adımdan,

$$\begin{aligned} S(a + bx) &= Sa + Sbx \\ &= Se + Sbx \\ &= Se + Sb(1 - e)x \end{aligned}$$

dir. $b_1 = b(1 - e)$ dersek, $f^2 = f \in R$ olmak üzere $Rb_1 = Rf$ olarak alalım. Böylece $Sb_1 = Sf$ ve

$$\begin{aligned} Se + Sb(1 - e)x &= Se + Sb_1x \\ &= Se + Sfx \end{aligned}$$

olur. $fe = 0$ olduğundan, $g := (1 - e)f$ de bir eşüslü elemandır ve $ge = eg = 0$ dır.

Dahası, $fg = f(1 - e)f = f^2 = f$ olduğundan, $Rf = Rg$ elde ederiz. Böylece $Sf = Sg$ dir. Bu da bize

$$\begin{aligned} S(a + bx) &= Se + Sfx \\ &= Se + Sgx \\ &= S(e + gx) \end{aligned}$$

olmasını verir.

3.Adım: e ve g ler yukarıdaki 2.adımımızda elde ettiğimiz eşüslü elemanlar olmak üzere, $S(e + gx) = \mathbf{1}_S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x)$ dir.

$c + dx \in \mathbf{1}_S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x)$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0 &= (c + dx)[(1 - e)(1 - g) + (1 - e)x] \\ &= c(1 - e)(1 - g) + [c(1 - e) + d(1 - e)(1 - g)]x \end{aligned}$$

dir.

Böylece

$$c(1 - e)(1 - g) = 0 \quad (1)$$

$$c(1 - e) + d(1 - e)(1 - g) = 0 \quad (2)$$

elde ederiz. Bu (1) ve (2) denklemlerinden

$$c = ce, \quad cg = 0, \quad d(1 - e)(1 - g) = 0$$

ve böylece $d = de + dg$ bulunur. Şimdi $u = c + dg$ ve $v = d$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} (u + vx)(e + gx) &= ue + (ug + ve)x \\ &= (c + dg)e + [(c + dg)g + de]x \\ &= c + dx \end{aligned}$$

bulunur yani $c + dx \in S(e + gx)$ elde edilir. Diğer kapsama açıktır.

4.Adım: $\mathbf{1}_S(a + bx) = S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x)$ dir. b_1 ve f yukarıdaki 2.adımımızda elde ettiğimiz elemanlar olsunlar. $Ra = Re$ olduğundan $aR = eR$ ve böylece $aS = eS$ dir. 1.adımdan,

$$\begin{aligned} (a + bx)S &= aS + bxS = eS + bxS \\ &= eS + [e(bx) + b(1 - e)x]S \\ &= eS + b(1 - e)xS \\ &= eS + b_1xS = (e + b_1x)S \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece bizim

$$\mathbf{I}_S(e + b_1x) = S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x)$$

eşitliğini göstermemiz yeterli olacaktır.

$S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x) \subseteq \mathbf{I}_S(e + b_1x)$: Yukarıdaki 2.adımımızdan $b_1 = b_1f$ ve $f = fg$ olduğundan,

$$\begin{aligned} [(1 - e)(1 - g) + (1 - e)x](e + b_1x) &= (1 - e)(1 - g)b_1x \\ &= (1 - e)(1 - g)b_1fx \\ &= (1 - e)(1 - g)b_1fgx \\ &= (1 - e)(1 - g)gb_1fx = 0 \end{aligned}$$

dır.

$\mathbf{I}_S(e + b_1x) \subseteq S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x)$. Herhangi bir $r + sx \in \mathbf{I}_S(e + b_1x)$ için,

$$0 = (r + sx)(e + b_1)x = re + (rb_1 + se)x$$

dir. Böylece $re = 0$ ve $rb_1 + se = 0$ dir. $b_1 = b_1f = b_1fg$ olduğundan, $b_1g = b_1$ dir. Böylece $0 = (rb_1 + se)g = rb_1g = rb_1$ ve dolayısıyla $se = 0$ dir. $Rf = Rb_1 = b_1R$ olduğundan, bazı $t \in R$ için, $f = b_1t$ alabiliriz. Bu durumda

$$rg = r(1 - e)f = rf = rb_1t = 0$$

dir. Böylece $r = r(1 - e)(1 - g)$ ve $s = s(1 - e)$ olur. Dolayısıyla,

$$r + sx \in S(1 - e)(1 - g) + S(1 - e)x = S((1 - e)(1 - g) + (1 - e)x)$$

elde ederiz. ■

Sonuç 3.1.2 R güçlü düzenli bir halka ise $T(R, R)$ bir morfik halkadır.

Şimdi de R halkasının birimli düzenli bir halka olması durumunda $R[x; \sigma]/x^2$ halkasının morfikliğini inceleyelim.

Teorem 3.1.3 ([8, Theorem 2]) *R birimli düzenli bir halka ve, her $e^2 = e \in R$ için, $\sigma(e) = e$ olacak şekilde $\sigma : R \rightarrow R$ bir halka endomorfizması olsun. Bu durumda $R[x; \sigma]/(x^2)$ ve, her $n \geq 0$ için, $R[x]/(x^{n+1})$ sol morfik halkalardır.*

Kanıt. $S = R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ diyelim. Bu durumda $S = \{r_0 + r_1x + \cdots + r_nx^n : r_i \in R, x^{n+1} = 0, i = 0, 1, \dots, n\}$ ve, her $r \in R$ için, $xr = \sigma(r)x$ dir.

S nin sol morfik halka olduğunun ispatının yapısı aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Adım: İlk olarak Lee ve Zhou eğer $\alpha = r_0 + r_1x + \cdots + r_nx^n \in S$ bir sol morfik eleman ve $u, v \in U(S)$ ise göstermişlerdir ki $u\alpha v$ de bir sol morfik elemandır.

2. Adım: (**Ana Adım**) Her $\alpha \in S$ için e_i ler R de ortogonal eşüslü elemanlar ve

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0 \in R \\ e_i^2 &= e_i \in (1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_0)R(1 - e_0) \cdots (1 - e_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

olmak üzere $\gamma := u\alpha v = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ olacak şekilde $u, v \in U(S)$ birimlerinin varlığını ispatladılar.

3. Adım: α nın S de sol morfik bir eleman olduğunu göstermek için, 1. adımdan, γ nın S de sol morfik eleman olduğunu göstermek artık yeterli olacaktır. Bunun için de $S\gamma = \mathbf{l}_S(\beta)$ ve $\mathbf{l}_S(\gamma) = S\beta$ olacak şekilde $\beta \in S$ elemanını bulmak gereklidir. Bunun içinde en iyi adayımız,

$$\begin{aligned} b_0 &= (1 - e_0)(1 - e_1) \cdots (1 - e_{n-1})(1 - e_n) \\ b_1 &= (1 - e_0)(1 - e_1) \cdots (1 - e_{n-1}) \\ &\dots \\ b_n &= 1 - e_0 \end{aligned}$$

olmak üzere $\beta := b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ dir.

4. Adım: Son olarak ispatlamışlardır ki;

$$S\gamma = Re_0 + R(e_0 + e_1)x + \cdots + R(e_0 + e_1 + \cdots + e_n)x^n = \mathbf{l}_S(\beta)$$

ve

$$\mathbf{l}_S(\gamma) = Rb_0 + Rb_1x + \cdots + Rb_nx^n = S\beta$$

dir. ■

3.2 $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ Morfik Halkadır

Bu bölümün son konusu olarak da ilk defa tanımlanan ve Huang ve Chen tarafından literatüre kazandırılan $(R, I)[x]/(x^{n+1})$ halkasını ele alacağız ve onun bir sol morfik olduğunun ispatını inceleyeceğiz. I, R nin bir ideali olsun.

$$(R, I)[x]/(x^n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i : x^{n+1} = 0, a_0 \in R, a_i \in I, i = 1, \dots, n \right\}$$

bir halkadır. $n = 2$ olması durumunda S tam olarak $T(R, I)$ aşıkarak genişlemedir.

Şimdi de R halkasının birimli düzenli bir halka olması durumunda $(R, I)[x]/(x^n)$ halkasının morfikliğini inceleyelim.

Teorem 3.2.1 ([6, Theorem 2.2]) *R birimli düzenli bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Bu durumda $(R, I)[x]/(x^n)$ bir sol morfik halkadır.*

Kanıt. $S = (R, I)[x]/(x^n)$ diyelim.

S nin sol morfik halka olduğunun ispatının yapısı aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Adım: İlk olarak Huang ve Chen da Lee ve Zhou eğer $\alpha = r_0 + r_1x + \dots + r_nx^n \in S$ bir sol morfik eleman ve $u, v \in U(S)$ ise göstermişlerdir ki $u\alpha v$ de bir sol morfik elemandır.

2. Adım: (**Ana Adım**) Her $\alpha \in S$ için e_i ler R de ortogonal eşüslü elemanlar ve

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0 \in R \\ e_i^2 &= e_i \in (1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_0)I(1 - e_0) \cdots (1 - e_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

olmak üzere $\gamma := u\alpha v = e_0 + e_1x + \dots + e_nx^n$ olacak şekilde $u, v \in U(S)$ birimlerinin varlığını ispatladılar.

3. Adım: α nın S de sol morfik bir eleman olduğu göstermek için, 1. adımdan dolayı, γ nın S de sol morfik eleman olduğunu göstermek artık yeterli olacaktır. Bunun için de $S\gamma = \mathbf{l}_S(\beta)$ ve $\mathbf{l}_S(\gamma) = S\beta$ olacak şekilde $\beta \in S$ elemanını bulmak gereklidir. Bunun içinde en iyi adayımız,

$$\begin{aligned} b_0 &= (1 - e_0)(1 - e_1) \cdots (1 - e_{n-1})(1 - e_n) = 1 - e_0 - e_1 - \dots - e_n \\ &\dots \\ b_n &= 1 - e_0 \end{aligned}$$

olmak üzere $\beta := b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ dir.

4. Adım: Son olarak ispatlamışlardır ki;

$$S\gamma = Re_0 + I(e_0 + e_1)x + \cdots + I(e_0 + e_1 + \cdots + e_n)x^n = \mathbf{l}_S(\beta)$$

ve

$$\mathbf{l}_S(\gamma) = Rb_0 + Ib_1x + \cdots + Ib_nx^n = S\beta$$

dır. ■

4 $[R; I, \sigma, n]$ Morfik Halkadır

Bölüm 3.1 de $S = R[x]/(x^{n+1})$ nin skew polinom halkası olan $S = R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ halkası ile birimli düzenli bir halka ile morfik halka arasındaki ilişki incelenmiştir.

Bölüm 3.2 de ise $S = R[x]/(x^{n+1})$ nin yeni bir genellemesi olan $S = (R, I)[x]/(x^{n+1})$ halkası ile birimli düzenli bir halka ile morfik halka arasındaki ilişki incelenmiştir.

Biz de $S = (R, I)[x]/(x^{n+1})$ nin skew polinom halkası olarak $[R; I, \sigma, n]$ halkasını tanımladık ve $[R; I, \sigma, n]$ halkasının yardımı ile birimli düzenli bir halka ile morfik halka arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

4.1 $[R; I, \sigma, n]$ Halkası ve Özellikleri

R bir halka, I da R nin bir ideali ve, her $e^2 = e \in R$ için, $\sigma(e) = e$ olacak şekilde $\sigma : R \rightarrow R$ bir halka endomorfizması olsun. Bu durumda

$$[R; I, \sigma, n] := \left\{ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \frac{R[x; \sigma]}{(x^{n+1})} : a_i \in I, i = 1, \dots, n \right\}.$$

bir halkadır.

- $[R; I, \sigma, n]$ halkası $R[x; \sigma]/(x^{n+1})$ nin bir alt halkasıdır.
- $\sigma = 1_R$ olması durumunda $[R; I, \sigma, n] = (R, I)[x]/(x^{n+1})$ dir.

4.2 $[R; I, \sigma, n]$ Morfik Halkadır

Teorem 4.2.1 R birimli düzenli bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Herhangi bir $n \geq 0$ için, $[R; I, \sigma, n]$ halkası sol morfikdir.

Kanıt. $T := [R; I, \sigma, n]$ ve $\alpha = r_0 + r_1x + \dots + r_nx^n \in T$ olsun. Bu α elemanın T halkasında bir sol morfik eleman olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce, her $i = 1, \dots, n+1$ için,

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0 \in R \\ e_1^2 &= e_1 \in (1 - e_0)I(1 - e_0) \\ e_2^2 &= e_2 \in (1 - e_1)(1 - e_0)I(1 - e_0)(1 - e_1) \\ &\vdots \\ e_i^2 &= e_i \in (1 - e_{i-1}) \dots (1 - e_0)I(1 - e_0) \dots (1 - e_{i-1}) \end{aligned}$$

olacak şekilde T nin $\mu\alpha\nu = \alpha' := e_0 + e_1x + e_2x^2 + \dots + e_nx^n$ olan μ ve ν birimlerinin var olduğunu ispatlamalıyız.

R birimli düzenli bir halka olduğundan, R nin her elemanı bir birim ile bir eşüslü elemanın bir dik çarpımı olarak yazılabileceğinden, Sonuç 2.1.8 den, α yı R nin bir uygun birimi ile çarparsak ilk adım olarak

$$r_0 = e_0$$

elde ederiz, burada ki e_0 bir eşüslü elemandır. $1 - (1 - e_0)r_1x$ ve $1 - r_1x$ de T nin iki birim elemanı olacağından,

$$[1 - (1 - e_0)r_1x]\alpha(1 - r_1x) = e_0 + (1 - e_0)r_1(1 - e_0)x + \dots$$

elde ederiz. Böylece $r_1 \in (1 - e_0)I(1 - e_0)$ olarak kabul edebiliriz. Yine $1 - (1 - e_0)r_2x^2$ ve $1 - r_2x^2$ de T nin iki birim elemanı olacağından, bu kez

$$[1 - (1 - e_0)r_2x^2]\alpha(1 - r_2x^2) = e_0 + r_1x + (1 - e_0)r_2(1 - e_0)x + \dots$$

elde ederiz. Böylece $r_2 \in (1 - e_0)I(1 - e_0)$ olarak alabiliriz. Artık benzer adımlarla, her $i = 1, 2, \dots, n$ için;

$$\alpha = e_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n, \quad r_i \in (1 - e_0)I(1 - e_0)$$

şeklinde yazılabileceğini kabul edebiliriz.

Teorem 2.1.12 den, $(1-e_0)R(1-e_0)$ halkası da birimli düzenli bir halka olduğundan, $r_1 = ue_1$ olarak alabiliriz, burada $e_1^2 = e_1 \in (1-e_0)R(1-e_0)$ ve u da tersi v olan $(1-e_0)R(1-e_0)$ halkasının birimidir. Yine $r_1 \in (1-e_0)I(1-e_0)$ olmasından, $e_1 = vr_1 \in (1-e_0)I(1-e_0)$ dir. Artık $e_0 + v$ de tersi $e_0 + u$ olan R nin birimidir. Dolayısıyla $(e_0 + v)\alpha = e_0 + e_1x + vr_2x^2 + \cdots + vr_nx^n$ olduğundan,

$$\alpha = e_0 + e_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n$$

olarak yazabiliriz ki burada da $r_2 \in (1-e_1)(1-e_0)I(1-e_0)(1-e_1)$ ve $r_i \in (1-e_0)I(1-e_0)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) dir. Artık

$$[1 - (1 - e_1)r_2x]\alpha(1 - r_2x) = e_0 + e_1x + (1 - e_1)r_2(1 - e_1)x^2 + \cdots$$

dir. $1 - (1 - e_1)r_2x$ ve $1 - r_2x$ de T nin birimleri olduğundan,

$$\alpha = e_0 + e_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n$$

olarak yazabiliriz ki burada da $r_2 \in (1-e_1)(1-e_0)I(1-e_0)(1-e_1)$ ve $r_i \in (1-e_0)I(1-e_0)$ ($i = 3, 4, \dots, n$) dir. Bu işlemler tekrarlanırsa, her $i = 2, 3, \dots$ için,

$$\begin{aligned} \alpha &= e_0 + e_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n \\ e_0^2 &= e_0 \\ e_1^2 &= e_1 \in (1 - e_0)I(1 - e_0) \\ r_i &\in (1 - e_1)(1 - e_0)I(1 - e_0)(1 - e_1) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Tümevarım ilkesinden, $\alpha = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n$ elde edilir ki burada da

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_0 \in R \\ e_i^2 &= e_i \in (1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_0)I(1 - e_0) \cdots (1 - e_{i-1}) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} b_0 &= (1 - e_0)(1 - e_1) \cdots (1 - e_{n-1})(1 - e_n) \\ b_1 &= (1 - e_0)(1 - e_1) \cdots (1 - e_{n-1}) \\ &\vdots \\ b_i &= 1 - e_{n-i} \end{aligned}$$

olacak şekilde $\beta = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in T$ elemanını alalım. Artık ispatımızı tamamlamak için $T\alpha' = \mathbf{l}_T(\beta)$ ve $T\beta = \mathbf{l}_T(\alpha')$.

$$\begin{aligned} a_0 &= r_0e_0 + r_1e_1 + \cdots + r_ne_n \\ a_1 &= r_1e_0 + r_2e_1 + \cdots + r_ne_{n-1} \\ &\vdots \\ a_n &= r_ne_0 \end{aligned}$$

olacak şekilde $\gamma = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in T$ olsun. Bu durumda $\gamma\alpha' \in T\alpha'$, ve böylece

$$\begin{aligned} T\alpha' &= T(e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n) \\ &= \{r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n | r_0 \in Re_0, r_1 \in I(e_0 + e_1), \cdots, \\ &\quad r_n \in I(e_0 + e_1 + \cdots + e_n)\} \\ &= Re_0 + I(e_0 + e_1) + \cdots + I(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) \\ &= \mathbf{l}_T(\beta) \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer olarak ,

$$\begin{aligned} T\beta &= T[(1 - e_0 - e_1 - \cdots - e_n) + e_nx + \cdots + e_1x^n] \\ &= \{r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_nx^n | r_0 \in R(1 - e_0 - e_1 - \cdots - e_n), \\ &\quad r_1 \in I(1 - e_0 - e_1 - \cdots - e_{n-1}), \cdots, r_n \in I(1 - e_0)\} \\ &= R(1 - e_0 - e_1 - \cdots - e_n) + I(1 - e_0 - e_1 - \cdots - e_{n-1}) + \cdots + I(1 - e_0) \\ &= \mathbf{l}_T(\alpha') \end{aligned}$$

olacaktır. Bu da bize α' nin bir sol morfik eleman olmasını verir. Öntelem 2.1.3 den, α bir sol morfik elemandır. ■

4.3 $[R; I, \sigma, n]$ nin Matris Halkalarına Bir Uygulaması

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} : a_0 \in R, a_i \in I, i \geq 1 \right\}$$

matris halkası ile $[R; I, \sigma, n]$ halkasını tanımlayabileceğimizden, bu S matris halkasının bir sol morfik halka olduğunu gösterelim.

$e_0^2 = e_0 \in R$ ve, her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $e_i^2 = e_i \in (1 - e_{i-1}) \cdots (1 - e_0)I(1 - e_0) \cdots (1 - e_{i-1})$ olmak üzere

$$\alpha' = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ 0 & e_0 & e_1 & \cdots & e_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\alpha' \in S$ alalım. Böylece $\mu\alpha\nu = \alpha'$ dir. Öte yandan,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 - (e_0 + \cdots + e_n) & e_{n-1} & \cdots & e_1 \\ 0 & 1 - (e_0 + \cdots + e_n) & \cdots & e_2 \\ 0 & 0 & \cdots & e_3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - (e_0 + \cdots + e_n) \end{pmatrix},$$

olduğundan, $S\alpha' = \mathbf{1}_S(\beta)$ and $S\beta = \mathbf{1}_S(\alpha')$ olduğu görülür.

5 Kaynaklar

References

- [1] F.W. Anderson, and K.R. Fuller, Rings and categories of modules(second edition), Springer-Verlag, 1992.
- [2] J. Chen and Y. Zhou, Morhic rings as trivial extensions, *Glasgow Math. J.*, **47**(2005), 139-148.
- [3] Ş. Ecevit and M. Tamer Koşan, En extension of Morhic rings, *Bull. Korean Math. Soc.*, in press.
- [4] G. Ehrlich, Units and one-sided units in regular rings, *Trans. AMS*, **216**(1976), 81-90.
- [5] K. R. Goodearl, Von Neumann Regular Rings, Monographs and Studies in Mathematics, Pitman, Boston, Mass.London, 1979.
- [6] Q. Huang and J. Chen, Morhic properties of extension rings, *Algebra Colloquium*, in press.
- [7] T.K. Lee and Y. Zhou, Morhic rings and unit regular rings, *J. Pure. Appl. Algebra*, **210**(2007), 501-510.
- [8] T.K. Lee and Y. Zhou, A theorem on unit regular rings, *Canadian Math. Bull.* (in press).
- [9] W. K. Nicholson and E. Sánchez Campós, Rings with the dual of the isomorphism theorem, *J. Algebra*, **271**(2004), 391-406.