

DİKDÖRTGENSEL TASARIMLAR

Ebru KAYA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Aralık 2008

ANKARA

Ebru KAYA tarafından hazırlanan DİKDÖRTGENSEL TASARIMLAR adlı bu tezin Yüksek Lisan tezi olarak uygun olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Muhip ÖZKAN

.....

Biyometri ve Genetik Anabilim Dalı, A. Ü.

Tarih : 18/12/2008

Bu tez ile G. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tezin içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ebru KAYA

DİKDÖRTGENSEL TASARIMLAR**(Yüksek Lisans Tezi)****Ebru KAYA****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Aralık 2008****ÖZET**

Kombinatoriyel tasarım teorisi çeşitli özelliklere sahip alt setlerin bir ailesini çalışır. t-tasarımları kombinatoriyel tasarımlar sınıfına girer ve tasarım teorisinin en önemli yapılarıdır. Bu tasarımlar istatistiksel deneylerde yapı maliyetini minimum yapmada kullanılır. Dengeli tamamlanmamış blok (BIB) tasarımları, t-tasarımlarının özel bir sınıfıdır. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımı $t=2$ olan bir t-tasarımdır. Kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımı, dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarının özel bir durumudur. Dikdörtgensel tasarımlar, sırasıyla her bir işlem aynı satırdaki diğer $(n-1)$ işlemle birinci birlikteliği, aynı sütundaki diğer $(m-1)$ işlemle ikinci birlikteliği ve arta kalan $(n-1)(m-1)$ işlemle de üçüncü birlikteliği oluşturacak şekilde bir $m \times n$ dikdörtgende düzenlenen $v = mn$ işlemin dikdörtgensel birliktelik şemasını temel alan üç sınıflı PBIB tasarımıdır.

Bilim kodu : 205.1.066**Anahtar kelimeler : Dikdörtgensel tasarımlar, Dengeli tamamlanmamış blok (BIB) tasarımlar, Kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımlar****Sayfa adedi : 68****Tez yöneticisi : Prof. Dr. Hülya BAYRAK**

RECTANGULAR DESIGNS**(M. Sc. Thesis)****Ebru KAYA****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****December 2008****ABSTRACT**

Combinatorial design theory is the study of families of subsets with various prescribed regularity properties. t designs, which are the most important structures of the design theory, are classified into the combinatorial designs. These designs play a vital role in reducing the structural expenses of the statistical experiments. Balanced incomplete block (BIB) designs are the special part of the t designs. Balanced incomplete block designs are t designs with $t=2$. Partially balanced incomplete block (PBIB) designs are special cases of BIB designs. Rectangular designs are 3-associate PBIB designs based on a rectangular association scheme of $v = mn$ treatments arranged in an $m \times n$ rectangle such that, with respect to each treatment, the first associates are the other $n-1$ treatments of the same row, the second associates are the other $m-1$ treatments of the same column and the remaining $(m-1)(n-1)$ treatments are the third associates.

Science Code : 205.1.066**Key Words : Rectangular designs, Balanced incomplete block (BIB) designs, Partially balanced incomplete block (PBIB) designs****Page Number : 68****Adviser : Prof. Dr. Hülya BAYRAK**

TEŞEKKÜR

Yoğun çalışma temposuna rağmen benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Hülya BAYRAK' a ve her zaman yanımda olup destekleri ile beni cesaretlendiren aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ebru KAYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1.GİRİŞ.....	1
2. t-TASARIMI	6
2.1. t- Tasarımının Özellikleri.....	6
3. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI	8
3.1. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımların Koşulları ve Bazı Tanımlar	8
3.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımların İsabet Matrisleri.....	9
4. KISMİ DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI.....	11
4.1. Kısmi Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımlarının Koşulları ve Bazı Tanımları	11
5. DİKDÖRTGENSEL TASARIMLAR	14
5.1. Tanım.....	14
5.2. Tanım.....	18
5.3. Dikdörtgensel Tasarımlara İlişkin Bazı Teoremler	19
5.4. Dikdörtgensel Tasarımların Kuruluşları	24
5.4.1. Dikdörtgensel tasarımların kuruluşlarına ilişkin bazı teoremler	24
5.4.2. İç içe dengeli tamamlanmamış blok tasarımı kullanılarak dikdörtgensel tasarımların kuruluşu.....	38
5.4.3. Yeniden çözülebilir ve hemen hemen yeniden çözülebilir BIB tasarımı kullanılarak dikdörtgensel tasarımların kuruluşu.....	41

5.4.4. Yarı-düzenli gruplarına bölünebilir (GD) tasarımı kullanılarak dikdörtgensel tasarımların kuruluşu.....	44
5.4.5. Dikdörtgensel tasarımların kuruluşunda farklar metodunun kullanılması.....	46
5.4.6. Dik latin kare tam seti kullanılarak dikdörtgensel tasarım elde edilişi.....	47
5.4.7. İki faktörlü dengeli tasarımlar ile dikdörtgensel tasarımlar arasındaki ilişki.....	49
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ.....	57

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. (7, 3, 1)-BIB Tasarımı.....	10
Çizelge 5.1. İşlemler ve birliktelik sınıfları.....	22
Çizelge 5.2. (3, 2, 1)-BIB Tasarımı.....	25
Çizelge 5.3. (10, 2, 1)-BIB Tasarımı.....	25
Çizelge 5.4. Dikdörtgensel Tasarım.....	27
Çizelge 5.5. İşlemler ve birliktelik sınıfları.....	28
Çizelge 5.6. (4, 3, 2)-BIB Tasarımı.....	31
Çizelge 5.7. Latin Kare PBIB Tasarımı.....	32
Çizelge 5.8. YÇ (15, 3, 1)-BIB Tasarımı.....	42
Çizelge 5.9. Dikdörtgensel Tasarım.....	49
Çizelge 5.10. 4×2 Dengeli Tasarım.....	52

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 5.1. İşlemler ve birinci birliktelikleri	23
Şekil 5.2. İşlemler ve ikinci birliktelikleri	23
Şekil 5.3. İşlemler ve üçüncü birliktelikleri	23

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklama
BIB	Dengeli Tamamlanmamış Blok
PBIB	Kısmi Dengeli Tamamlanmamış Blok
GD	Gruplarına Bölünebilir
L_i	Latin Kare Tipi
OA	Ortogonal Dizim
BA	Dengeli Dizim
YÇ	Yeniden Çözülebilir

1. GİRİŞ

Kombinatorik, belirlenmiş kesin kurallara göre nesnelerin ayrılması ve düzenlenmesi problemleriyle ilgili matematiğin bir dalıdır. Kombinatoriyel düzen, verilen sonlu bir kümeden belirli özellikleri olan alt kümeler toplamının seçilmesinin bir yoludur. Bu problemlere ilişkin çok sayıda makale olmasına rağmen, 19-20. yüzyıllarda kombinatoriyel konfigürasyonların deney tasarımlarının istatistiksel teoride yararlı olduğu fark edilmiştir. Tasarımlar, zirai ve diğer alanlardaki deneyleri planlamada ve analiz etmede yararlıdır.

Bu tez çalışmasının amacına yönelik olarak yapılmış olan bazı araştırmaların özetleri aşağıda verilmiştir.

Tasarım teorisindeki önemli yapılardan biri olan t tasarımları, kombinatoriyel yapılardır. Gelişmiş bilgisayarlar olmasına rağmen birçok t -tasarımını oluşturmak zordur. Çünkü bütün kabul edilebilir parametreler için hala genel bir formül yoktur.

t -tasarımları 1969' dan beri askeri taktiklerde, bilgisayar çiplerinin tasarımlarında ve özellikle istatistikte (tıp ve ziraat uygulamalarında, kalite kontrolünde, ..vb.) sık kullanılmaktadır.

t -tasarımlarının önemli bir sınıfı dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarıdır (Balanced Incomplete Block Design-BIB Design).

1935 ve 1936 yıllarında Yates, blok genişliğinin optimal seçeneğini tartışmış ve BIB tasarımların arzu edilen özelliklerini göstermiştir. Ayrıca 1936 yılında Yates, bazı küçük BIB tasarımların oluşturulmasını göstermiştir [Street ve Street, 1987].

Fisher ve Yates 1938' de $v, b \leq 100$ ve $r, k \leq 10$ aralığı için BIB tasarımların parametrelerinin kombinasyonlarını ve onların çözümlerini listelemiştir. Bu liste,

1961 yılında Rao tarafından $r, k \leq 15$ alınarak ve 1962 yılında Sprott tarafından $r, k \leq 20$ alınarak genişletilmiş şekli ile verilmiştir [Raghavarao, 1971].

Bose, BIB tasarımlarının oluşturulmasının ilk sistematik metodunu vermiştir [Bose ve Nair, 1939].

Raghavarao, BIB tasarımın tanım ve özelliklerini vermiş, simetrik BIB tasarımların varlığını göstermiş ve yeniden çözülebilirliklerden bahsetmiştir. Ayrıca t-tasarımları için bazı eşitsizlikler sunmuş ve BIB tasarımların $v, b \leq 100$, $r, k \leq 15$ parametre aralığı için oluşturulma metotlarını listelemiştir [Raghavarao, 1971].

1942 yılında Bose, yeniden çözülebilir BIB tasarımları için eşitsizlikler vermiştir [Raghavarao, 1971].

BIB tasarımlar ve yeniden çözülebilir BIB tasarımlarla ilgili teoremler Hughes ve Piper tarafından verilmiştir [Hughes ve Piper, 1985].

Dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarda işlem çiftlerinin birlikte görünme sayısı λ tüm işlem çiftleri için aynıdır. Ancak BIB tasarımının özel bir durumu olan kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarında (Partially Balanced Incomplete Block Design-PBIB Design) λ tek olmamaktadır. Kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ilk olarak Bose ve Nair (1939) tarafından verilmiştir. PBIB tasarımlar için birliktelik yapılarına ilişkin cebirsel özellikler geniş bir şekilde Bose ve Mesner (1959)' de verilmiştir. Raghavarao (1971) geniş bir özetini vermiş ve geniş bir kaynak taraması yapmıştır. Bu tasarımlar dengeli tamamlanmamış blok tasarımların genelleştirilmiş halidir. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımları optimal tasarımlardır. m sınıflı PBIB bir ortaklık şeması belirtirken bunun tersi her zaman doğru değildir. Kageyama (1974), $\lambda_i = \lambda_j$ iken m sınıflı PBIB tasarımının m-1 sınıflı PBIB tasarımına dönüştüğünü göstermiştir.

Gruplarına bölünebilir (GD) tasarımlar, 2 sınıflı PBIB tasarımları içerisinde ilgili olduğu diğer kombinatoriyal yapılardan daha yalın ve basit olduğu için önemli bir alt sınıftır. GD tasarımlar için kombinatoriyal özellikler, kuruluş metotları ve var olma koşulları çalışmaları Bose ve Connor (1952) ile başlamıştır. Bu tasarımlar 1973 yılında Clatworthy tarafından tablo halinde verilmiştir. Yeni tasarımların bir listesini de Sinha (1991)' da bulmak mümkündür.

İstatistikte başvurulanan deney düzenleme yöntemlerinden biri de matematikte matris olarak bilinen ortogonal dizimlerdir. Ortogonal dizimler kendilerine uygun yapılardan başka bir yapıya geçişte kullanılır.

Bose ve Bush (1952), ortogonal dizimlere ilişkin teoriyi geliştirmişlerdir (Seiden, 1954). Ortogonal dizimlerin, ortogonal Latin karelerin doğal bir genelleştirmesi gibi düşünülebileceğini vurgulayarak, bazı deney tasarımlarının çeşitli problemlerinde faydalı olacağını açıklamışlardır.

Plackett ve Burman (1943-1946) tarafından düşünülen optimum çok faktörlü tasarımların aslında 2 kuvvetli ortogonal dizilimler olduğunu göstermişlerdir.

Dikdörtgensel tasarımlar, 1955'de Vartak tarafından 3-ortak sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımı olarak tanımlanmıştır.

Nair ve Rao, asimetric faktöriyel denemeler için dengeli karıştırılmış tasarımların kuruluşunda ortogonal dizilimleri kullanmıştır ki; bu denemeler iki faktör içeriyorsa; dikdörtgensel tasarımdır [Nair ve Rao, 1948].

Vartak, iki dengeli tamamlanmamış blok (BIB) tasarımını kullanarak, dikdörtgensel tasarım elde etmiştir [Vartak, 1955].

Rao, iki dengeli tamamlanmamış blok (BIB) tasarımını birleştirerek, dikdörtgensel tasarımlar elde etmiştir [Rao, 1956].

Aggarwal ve Singh, dikdörtgensel tasarımların kuruluşunda dengeli dizimleri kullanmışlardır [Aggarwal ve Singh, 1981].

Suen (1989); Raghavarao ve Aggarwal (1974), Nair (1980) ve Aggarwal (1983)' in çalışmalarından faydalanarak, farklar metodunu kullanmış ve dikdörtgensel tasarımlar elde etmiştir. Ek olarak, bu tasarımların, $m \times n$ boyutlu, tamamen karıştırılmış faktöriyel denemeler olarak kullanıldığında ; λ_3 'ün λ_1 ve λ_2 ' den büyük olması durumunda ana etkideki bilgi kaybının küçüleceğini söylemiştir.

Dikdörtgensel tasarımlar, dengelemenin yanı sıra ortogonalitesi de içeren faktöriyel denemeler için kullanışlıdır [Gupta ve Mukerjee, 1989].

Dikdörtgensel tasarımlar ayrıca dengeli dizimlerin ve ortogonal dizimlerin kuruluşunda da kullanılmıştır [Sinha ve ark. 2002].

Ayrıca dikdörtgensel tasarımlar, Bhagwandas ve Kageyama (1985), Suen (1989), Sinha (1991), Sinha ve ark. (1993, 1996, 1999), Kageyama ve Miao (1995) tarafından da çalışılmıştır.

Kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımları sınıfı içinde GD tasarım, ilgili olduğu diğer kombinatoriyel yapılardan (netler, affine düzlem ve ortogonal dizimler gibi) daha yalın olduğu için önemli bir alt sınıftır. $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$ ' e sahip GD tasarım E optimal özelliğinden dolayı daha önemlidir. Dikdörtgensel tasarımlar ise üç sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarının bir sınıfıdır ve GD tasarımların genelleştirilmiştir. Dikdörtgensel tasarımların optimal özelliği 2 satırlı ve hemen hemen eşit λ ' lara sahip olmasıdır. Bagchi, hemen hemen yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımını kullanarak dikdörtgensel tasarımlar elde etmiştir. Bu kuruluşta yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı kullanıldığında GD tasarım elde edileceğini söylemiştir. Bu kuruluşlardan elde edilen birçok tasarımında E optimal özelliğini sağladığını söylemiştir. Hatta bazı

tasarımların ikili sınıflardaki tip 1 optimal özelliğine sahip olduğunu söylemiştir [Bagchi, 2004].

Bu tez çalışmasında dikdörtgensel tasarımlar tanımlandı ve tasarımlara ait özellikler belirtildi. Çalışmada daha çok tasarımların kuruluş metotları üzerinde duruldu. Bu amaç doğrultusunda ilgili diğer tasarımlar tanımlandı. Dikdörtgensel tasarımların kuruluş metotlarına ilişkin teoremler verildi ve bunların daha anlaşılır olması için örneklendirildi.

2. t-TASARIMI

D, bir yapı ise, D' nin işlem (nokta=deneme) sayısı " ν " ve blok sayısı " b " ile gösterilir. Bir yapının işlemler kümesi ve bloklar kümesi boş olmamalıdır.

D, işlemleri $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ ve blokları $B_1, B_2, \dots, B_b$ ($\nu > 0, b > 0$) olarak indekslenmiş bir yapı olsun. D için $\nu \times b$ boyutlu " isabet matrisi " $A = (a_{ij})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_{ij} = 1 ; p_i \in B_j$$

$$a_{ij} = 0 ; p_i \notin B_j$$

Böylece D yapısı hakkındaki tüm bilgiler A matrisi ile ifade edilmiş olur.

D, $\nu > 0$ işlemleri olan bir yapı olsun. D' nin t işlemleri her alt kümesi, λ ortak blokları ile tam ilişkili olacak şekilde λ, t ($0 < \lambda$ ve $0 \leq t \leq \nu$) tam sayıları mevcutsa, D' ye bir t-yapısıdır denir. k blok genişliğine sahip düzgün bir t-yapısına " $t-(\nu, k, \lambda)$ yapısı" denir. Burada ν , işlemlerin sayısı ve λ, t işlemleri üzerindeki ortak blokların sayısıdır.

2.1. t- Tasarımının Özellikleri

$D=(X, A, I)$ isabet yapısı, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $t-(\nu, k, \lambda)$ tasarımı olarak adlandırılır.

i) $|X| = \nu$

ii) $B \in A$ için her blok k işlem ile ilişkilidir.

iii) Her farklı t işlem birlikte λ blok ile ilişkilidir (yani işlemlerin her t -alt kümesi λ blokta bulunuyorsa)

Negatif olmayan t, ν, k, λ, b, r tamsayıları “*tasarımın parametreleri*” olarak bilinir. r , “*tekrar sayısı*”dır ve bir işlemin görüldüğü blok sayısını belirtir.

t -tasarımlarının parametreleri birbirinden bağımsız değildir. D bir $t-(\nu, k, \lambda)$ tasarımı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$b = \lambda_0 = \lambda \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-t+1)}{k(k-1) \dots (k-t+1)}$$

Bu eşitlik şöyle de yazılabilir.

$$b = \lambda_0 = \lambda \binom{\nu}{t} / \binom{k}{t}$$

$$t > 0 \text{ ise } \quad bk = \nu r$$

$$t=2 \text{ ise } r(k-1) = \lambda_2(\nu-1)$$

dir [Assmus ve Key, 1993, Hughes ve Piper, 1985].

t -tasarımlarında t değeri değiştikçe özel isimlerle anılan ve kendilerine has özellikleri olan bir takım tasarımlara ulaşılır.

3. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI

3.1. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımların Koşulları ve Bazı Tanımlar

v, k ve λ $v > k \geq 2$ olacak şekilde pozitif tam sayı olsun. (X, A) çifti aşağıdaki koşulları sağlarsa “*Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları*” (v, k, λ) -BIB tasarımı olarak tanımlanır.

- i) v , işlemler olarak adlandırılan elemanların bir setidir
- ii) X in alt serilerinin koleksiyonu olan A , blok olarak adlandırılır
- iii) Her blok k işlem içerir
- iv) Farklı işlemlerin her çifti λ blokta bulunur
- v) Her işlem r blokta gözüktür, $r > 0$ [Hughes ve Piper, 1985].

Bu tasarımların adındaki tamamlanmamış ifadesi $v > k$ koşulunu göstermektedir. Burada, blok genişliği k işlemlerin toplam sayısından azdır. Böylece hiçbir blok işlemlerin tamamını içermez. Dengeli deyiimi, λ parametresinin değişmezliğini ifade eder. BIB tasarımı, $2-(v, k, \lambda)$ tasarımıdır. BIB tasarımları genellikle (v, b, r, k, λ) -tasarımları şeklinde ifade edilir.

BIB tasarımlarının varlığının iki temel koşulu aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

3.1. Teorem

Bir (v, k, λ) -BIB tasarımında her işlem kesinlikle

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

blokta gözüktür [Colbourn ve Dinitz, 1996].

3.2. Teorem

Bir (v, k, λ) -BIB tasarımı için blokların sayısı

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2 - v)}{k^2 - k}$$

ile verilir [Colbourn ve Dinitz, 1996].

Bazı parametre setleri ile BIB tasarımların mevcut olmadığı bu iki teoremle görünür. Çünkü b ve r tam sayı olmalıdır.

3.3 Teorem (Fisher eşitsizliği)

Bir (v, k, λ) -BIB tasarımının var olması için bir diğer önemli ve gerekli koşul Fisher eşitsizliğidir.

(v, b, r, k, λ) -BIB tasarımının varlığı için $b \geq v$ olmalıdır [Street ve Street, 1987].

Eğer BIB tasarımında $v = b$ ve $r = k$ elde edilirse BIB tasarımının simetrik olduğu söylenir. Simetrik BIB tasarımları her zaman (v, k, λ) -tasarımları gibi tanımlanır.

3.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımların İsabet Matrisleri

Verilen (v, b, r, k, λ) -tasarımı isabet matrisi olarak isimlendirilen $v \times b$ boyutlu matris ile gösterilir. Satırlar tasarımın işlemleri ile sütunlar da bloklar ile sınıflandırılmıştır. j . blokta i . işlem gözüküyor ise matrisin (i, j) . hücresine 1, gözüküyorsa 0 yazılır. İsabet matrisinin her bir satırı r tane 1'e, her bir bloğu k tane 1'e sahiptir ve ayrı satırların her çifti ortak olarak λ bloktadır.

(X, A) , bir (v, k, λ) -BIBD olsun. (X, A) 'nın $v \times b$ boyutlu isabet matrisi $M = (m_{ij})$ aşağıdaki kural ile tanımlanır.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in A_j \\ 0, & x_i \notin A_j \end{cases}$$

Örnek :

(7, 3, 1)-BIB tasarımı göz önüne alınsın.

Çizelge 3.1. (7, 3, 1)-BIB Tasarımı

İşlemler	Bloklar						
	1	2	3	4	5	6	7
1	X		X	X			
2	X					X	X
3	X	X			X		
4		X		X			X
5		X	X			X	
6			X		X		X
7				X	X	X	

Çizelgede “X” işareti konan hücrelerde gözlem var, diğer boş hücrelerde gözlem yok anlamındadır.

Çizelge 3.1’ den işlem ve blok sayısı v ve b ’ nin 7 olduğu, blok genişliği k ’ nin 3 ve tekrar sayısı r ’ nin de 3 olduğu kolayca görülür. İşlemlerin her çifti sadece bir blokta birlikte gözüktür. Böylece $\lambda = 1$ ’ dir. Bu tasarımın 7×7 boyutlu isabet matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. KİSMİ DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI

4.1. Kısmi Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımlarının Koşulları ve Bazı Tanımları

Dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarda işlem çiftlerinin birlikte görünme sayısı λ tüm çiftleri için aynıdır. Ancak kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımları durumunda λ tek olmamaktadır.

m tane farklı λ olması durumunda $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ PBIB tasarımı m – sınıflı olarak adlandırılır.

PBIB tasarımları, v işlemin b blokta verilen koşullarda düzenlenmesidir.

- i) v işlemin her biri r blokta gözüktür. Her bir blok k genişliktedir. İşlemler herhangi bir blokta 1 kez gözüktür.
- ii) v işleminin her bir çifti aşağıdaki gibi bir birliktelik yapısına sahiptir.
 - a) Herhangi iki işlem birinci veya ikinci birliktelik sınıfındandır.
 - b) Her bir işlem birinci birliktelikte n_1 elemana ikinci birliktelikte n_2 elemana sahiptir.
 - c) i . birliktelik sınıfında bulunan herhangi işlem çifti için birinci işlemin birinci birliktelik sınıfındaki ve ikinci işlemin birinci birliktelik sınıfındaki ortak elemanların sayısı P_{11}^i ($i=1,2$) dir.
- iii) i . birliktelik sınıfındaki işlemlerin herhangi iki çifti λ_i ($i=1,2$) blokta birlikte görünür.

Daima aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$P_{12}^1 = P_{21}^1 = n_1 - P_{11}^1 - 1, \quad P_{22}^1 = n_2 - n_1 + P_{11}^1 + 1$$

$$P_{12}^2 = P_{21}^2 = n_1 - P_{11}^2, \quad P_{22}^2 = n_2 - n_1 + P_{11}^2 - 1$$

$$bk = rv, \quad v = n_1 + n_2 + 1$$

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = r(k-1), \quad n_1 P_{11}^1 = n_2 P_{11}^2$$

$$n_1 P_{22}^1 = n_2 P_{12}^2$$

Burada $v, b, r, k, \lambda_i, n_i$ ($i=0, \dots, m$) sayıları birinci çeşit parametreler, P_{jk}^i ($i, j, k=0, 1, \dots, m$) sayıları ikinci çeşit parametrelerdir. $(2m+4)$ tane birinci çeşit, $m^2(m+1)/2$ tane ikinci çeşit parametre vardır [Bose ve Shimamoto, 1952].

m -sınıflı PBIB tasarımında parametreler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\sum_{i=0}^m n_i = v, \quad \sum_{i=0}^m P_{jk}^i = n_k, \quad P_{jk}^i = P_{kj}^i, \quad n_i P_{jk}^i = n_j P_{ik}^j = n_k P_{ij}^k, \quad n_0 = 1,$$

$$P_{ik}^j = \begin{cases} n_i & i=j \text{ ise} \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}, \quad \lambda_0 = r, \quad \sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk, \quad n_j n_k = \sum_{i=0}^m P_{jk}^i n_i$$

$m=2$ için 8 tane birinci çeşit, 6 tane ikinci çeşit parametre vardır.

$$P_{jk}^1 = \begin{bmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{bmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Tanım: Birliktelik şeması

Verilen $1,2,\dots,v$ işlemleri için m ortak sınıflı birliktelik şeması denilebilmesi için aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

- i) α ve β gibi iki işlemin ya birinci, ikinci, ... veya m . birliktelikleri ve bu ilişkileri simetriktir. α ve β i . birliktelikte ise $(\alpha, \beta) = i$ olarak gösterilir.
- ii) her bir α işlemi i . birliktelikte n_i 'ye sahiptir ve n_i sayısı α 'dan bağımsızdır.
- iii) eğer $(\alpha, \beta) = i$ ve aynı zamanlı olarak $(\alpha, \gamma) = j$ $(\beta, \gamma) = j'$ ise $P_{jj'}^i$ 'dir. Bu sayı α ve β 'dan bağımsızdır. İlaveten $P_{jj'}^i = P_{j'j}^i$ 'dir [Raghavarao ve Padgett, 2005].

$m=2$ için PBIB tasarımlar aşağıdaki şekilde gruplanmıştır.

- i) Gruplarına bölünebilir (GD) tasarım
- ii) Basit
- iii) Üçgensel
- iv) Latin kare tipi
- v) Döngüsel

$m=3$ için PBIB tasarımları ise şöyle gruplandırılabilir;

- i) Dikdörtgensel (3) PBIB Tasarımı
- ii) Kübik (3) PBIB Tasarımı
- iii) Genişletilmiş Üçgensel (3) PBIB Tasarımı
- iv) Genişletilmiş GD (3) PBIB Tasarımı

5. DİKDÖRTGENSEL TASARIMLAR

Dikdörtgensel tasarımlar, üç birliktelik sınıfına sahip kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımlarını temel alır. Dikdörtgensel tasarımlar yardımı ile tasarım teorisinde sıkça kullanılan diğer yapılar türetilir.

5.1. Tanım

Dikdörtgensel tasarımda $v = mn$ işlemin b blokta bulunuşunda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) her bir blok $k < v$ olmak üzere k farklı işlemleri içerir.
- ii) her bir işlem r blokta gözükmelidir.
- iii) mn işlem, m satır ve n sütunda bulunarak dikdörtgen oluşturur ve aynı satır/sütundaki herhangi iki işlem $\lambda_1(\lambda_2)$ bloklarında birlikte, aksi halde λ_3 blokta gözükür.

Tasarımın parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$v = mn, b, r, k, n_i, \lambda_i, p_{ju}^i \quad (i, j, u = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

Bu parametreler birbirinden bağımsız değildir, aralarında bazı ilişkiler vardır.

$$bk = vr, \quad \sum_{i=1}^3 n_i = v - 1, \quad \sum_{i=1}^3 n_i \lambda_i = r(k - 1) \quad (5.2)$$

$$p_{ju}^i = p_{uj}^i, \quad n_i p_{ju}^i = n_j p_{ju}^i = n_u p_{ij}^u$$

$$\sum_{u=1}^3 p_{ju}^i = n_j - \delta_{ij} \quad (i, j, u = 1, 2, 3)$$

Burada $i \neq j$ veya $i = j$ olma durumuna göre sırasıyla $\delta_{ij} = 0$ veya 1' dir.

$m, n \geq 2$ olmak üzere $v = mn$ işlem, $m \times n$ dikdörtgensel birliktelik şemasını aşağıdaki gibi oluşturur.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & & . & . & . & n \\
n+1 & n+2 & & . & . & . & 2n \\
. & . & & & & & . \\
. & . & & & & & . \\
. & . & & & & & . \\
(m-1)n+1 & (m-1)n+2 & & . & . & . & mn
\end{array} \tag{5.3}$$

Birinci birliktelik aynı satırdaki diğer $n_1 = n - 1$ işlemle, ikinci birliktelik aynı sütundaki diğer $n_2 = m - 1$ işlemle ve arta kalan $n_3 = (m - 1)(n - 1)$ işlemle de üçüncü birlikteliği oluşturur.

p_{ju}^i ($i=1, 2, 3$) matrisleri ise şöyledir;

$$\begin{aligned}
(p_{ju}^1) &= \begin{bmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & (m-1)(n-2) \end{bmatrix} \\
(p_{ju}^2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & n-1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ n-1 & 0 & (m-2)(n-1) \end{bmatrix} \\
(p_{ju}^3) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & n-2 \\ 1 & 0 & m-2 \\ n-2 & m-2 & (m-2)(n-2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ek olarak parametreler arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$p_{11}^1 = n_1 - 1 = n - 2, \quad p_{22}^2 = n_2 - 1 = m - 2, \quad n_3 = n_1 n_2 \tag{5.5}$$

$$r(k-1) = (n-1)\lambda_1 + (m-1)\lambda_2 + (n-1)(m-1)\lambda_3 \tag{5.6}$$

$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j$ ve $l \leq v$ olmak üzere dikdörtgensel tasarımın $v \times v$ boyutlu $B_i = (b_{jl}^i)$ birliktelik matrisi

$$b_{jl}^i = \begin{cases} 1, & j \text{ ve } l \text{ i. birliktelikler ise} \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Her işlemin 0. birlikteliği için $B_0 = I_v$ ' dir. δ_{ij} kronoker delta şöyle tanımlanır;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$

Böylece $P_{ij}^0 = n_i \delta_{ij}$ $P_{0h}^i = \delta_{ih}$ olur.

5.1. Yardımcı teorem

Bir m ortak sınıflı birliktelik şeması için birliktelik matrisleri $B_0, B_1, \dots, B_m$ olsun. Bu matrisler

$$\text{i) } \sum_{i=0}^m B_i = J_v$$

$$\text{ii) } B_i J_v = n_i J_v$$

$$\text{iii) } B_i B_j = \sum_{h=0}^m p_{ij}^h B_h$$

$$\text{iv) } \sum_u \sum_t p_{jh}^u p_{iu}^t B_t = B_i (B_j B_h) = (B_i B_j) B_h = \sum_u \sum_t p_{ij}^u p_{uh}^t B_t$$

eşitliklerini sağlar.

5.2. Yardımcı teorem.

N , bir m-PBIB tasarımının isabet matrisi ve $B_0, B_1, \dots, B_m$ ' de bu tasarımın birliktelik matrisleri olsun. Böylece

$$NN^T = rI + \sum_{u=1}^m \lambda_u B_u$$

$$J_{\nu}A = kJ_{\nu \times b}$$

dir.

Tanım: A serisi

$\nu = mn$ olmak üzere Eş. 5.2 koşuluna ek olarak Eş. 5.4- Eş.5.6 koşullarını sağlayan tasarımın serisi A serisi olarak adlandırılır. A serisine ait bir tasarım, $\nu = b$ ve buna bağlı olarak da $r = k$ koşulunu sağlıyorsa tasarım simetriktir denir.

A serisi, iki BIB tasarımının kronoker çarpımından elde edilen tüm üç birliktelik sınıfına sahip PBIB tasarımları içerir [Vartak, 1959].

5.1. Teorem (Dikdörtgensel birliktelik şemasının tekliği)

Eğer 3-PBIB N tasarımı Eş. 5.2 ve Eş. 5.5 koşullarını sağlıyor ve A serisine aitse işlemler için birliktelik şeması tektir denir ve bu şema dikdörtgenseldir [Vartak, 1959].

5.2. Teorem

A serisinin N tasarımının NN' matrisinin eigen değerleri ve bunların çarpanları aşağıdaki gibidir [Vartak, 1959].

$$\theta_0 = rk = r + (\nu_2 - 1)\lambda_1 + (\nu_1 - 1)\lambda_2 + (\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1)\lambda_3$$

$$\theta_1 = r - \lambda_1 + (\nu_1 - 1)(\lambda_2 - \lambda_3)$$

$$\theta_2 = r - \lambda_2 + (\nu_2 - 1)(\lambda_1 - \lambda_3)$$

$$\theta_3 = r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \nu_2 - 1 = n_1$$

$$\alpha_2 = \nu_1 - 1 = n_2$$

$$\alpha_3 = (\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1) = n_3$$

5.3. Teorem

A serisindeki bir tasarımın varlığı için

$$\theta_1 = r - \lambda_1 + (\nu_1 - 1)(\lambda_2 - \lambda_3) \geq 0$$

$$\theta_2 = r - \lambda_2 + (\nu_2 - 1)(\lambda_1 - \lambda_3) \geq 0$$

$$\theta_3 = r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 0$$

koşullarının sağlanması gereklidir [Vartak, 1959].

5.1. Örnek

A serisinden simetrik bir PBIB tasarımı alınsın. Tasarımın parametreleri

$$\nu = b = 24, r = k = 8, n_1 = 5, n_2 = 3, n_3 = 15, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$$

$$p_{ju}^1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}, p_{ju}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}, p_{ju}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Bu tasarımın NN' matrisinin eigen değerleri $\theta_0 = 64, \theta_1 = 22, \theta_2 = 16, \theta_3 = -2$ dir. $\theta_3 \leq 0$ olduğundan verilen PBIB tasarımı kurulamaz .

5.2. Tanım

Dikdörtgensel birliktelik şemasına sahip üç sınıflı PBIB tasarımına dikdörtgensel tasarım denir [Bagchi, 2004].

Eğer $m=2$ ise dikdörtgensel tasarım dengelidir. Dengeli dikdörtgensel tasarımda eğer,

(i) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 - 1$ ise *tip I*

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 - 2 = \lambda_3 - 1$ ise *tip 2* olarak tanımlanır [Bagchi, 2004].

Deney tasarımında matrislerin kronoker çarpımı ilk defa Vartak (1955) tarafından kullanılmıştır.

Tanım: Kronoker çarpım

Sırasıyla $m \times n$ ve $p \times q$ boyutlu $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{kl})$ matrisleri alınsın. Bu iki matrisin kronoker çarpımı aşağıdaki gibidir.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$A \otimes B$ matrisinin boyutu $mp \times nq$ 'dur.

5.3. Dikdörtgensel Tasarımlara İlişkin Bazı Teoremler

5.3. Yardımcı Teorem

Parametreleri $v, b, r, k, n_i, \lambda_i, p_{jk}^i$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, s$) ve isabet matrisi $N_{PBIB}^{(s)}$ olan s birliktelik sınıfına sahip bir PBIB tasarımı alınsın. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 'lerden tümü farklı değilse en az ikisinin eşit olduğu söylenir. $\lambda_1 = \lambda_2$ olduğu varsayılırsa bu durumda tasarımın birliktelik sınıfı s 'den $s-1$ 'e indirgenebilir.

5.4. Teorem

a) Biri s , diğeri t birliktelik sınıfına ait kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımının parametreleri sırasıyla aşağıdaki gibi olsun.

$$v_1, b_1, r_1, k_1, n_{1i_1}, \lambda_{1i_1}, p_{1j_1k_1}^{i_1} \quad ; \quad i_1, j_1, k_1 = 1, 2, \dots, s$$

$$\nu_2, b_2, r_2, k_2, n_{2i_2}, \lambda_{2i_2}, p_{2j_2k_2}^{i_2} \quad ; \quad i_2, j_2, k_2 = 1, 2, \dots, t$$

Bu iki PBIB tasarımının kronoker çarpımlarından elde edilen $N = N_{PBIB}^{(s)} \otimes N_{PBIB}^{(t)}$ en fazla $t + s + ts$ birliktelik sınıfına ait PBIB tasarımının isabet matrisi olur.

b) Yukarıda tanımlanan N eğer $t + s + ts$ tane farklı birliktelik yapısına sahipse;

i) $N_{PBIB}^{(s)}$ 'nin s birliktelik sınıfı ve $N_{PBIB}^{(t)}$ 'nin t birliktelik sınıfının tümü farklıdır,

ii) $\lambda_{1i_1} < r_1$, $\lambda_{2i_2} < r_2$ ve

iii) tüm $i_1 = 1, 2, \dots, s$ ve $i_2 = 1, 2, \dots, t$ için $r_1 \lambda_{2i_2} \neq r_2 \lambda_{1i_1}$ 'dir.

c) N 'in parametreleri ile $N_{PBIB}^{(s)}$ ve $N_{PBIB}^{(t)}$ parametreleri arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\nu' = \nu_1 \nu_2, \quad b' = b_1 b_2, \quad r' = r_1 r_2, \quad k' = k_1 k_2$$

$$n'_{i_2} = n_{2i_2}, \quad n'_{t+i_1} = n_{1i_1}, \quad n'_{t+i_1+i_2s} = n_{2i_2} n_{1i_1},$$

$$\lambda'_{i_2} = r_1 \lambda_{2i_2}, \quad \lambda'_{t+i_1} = r_2 \lambda_{1i_1}, \quad \lambda'_{t+i_1+i_2s} = \lambda_{2i_2} \lambda_{1i_1}$$

d) Yukarıda (b) şıkkındaki şartlar sağlanmadığında Yardımcı Teorem 5.3 uygulanabilir [Vartak, 1955].

5.1. Sonuç

a) Parametreleri aşağıdaki gibi olan iki tane dengeli tamamlanmamış blok (BIB)

tasarımın isabet matrisleri $N_{1(BIB)}$ ve $N_{2(BIB)}$ olsun.

$$\nu_1^*, b_1^*, r_1^*, k_1^*, \lambda_1^*$$

$$\nu_2^*, b_2^*, r_2^*, k_2^*, \lambda_2^*$$

İki dengeli tamamlanmamış blok (BIB) tasarımlarının kronoker çarpımları olan $N = N_{1(BIB)} \otimes N_{2(BIB)}$ en fazla üç-ortak sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımını verir.

b) Yukarıda tanımlanan N , tümü farklı üç-ortak sınıflı tasarım ise $r_1^* \lambda_2^* \neq r_2^* \lambda_1^*$ olmalıdır.

c) N^z in parametreleri aşağıdaki gibidir ($y, z=1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} v' &= v_1^* v_2^*, & b' &= b_1^* b_2^*, & r' &= r_1^* r_2^*, & k' &= k_1^* k_2^*, \\ n'_1 &= v_2^* - 1, & n'_2 &= v_1^* - 1, & n'_3 &= (v_1^* - 1)(v_2^* - 1), \\ \lambda'_1 &= r_1^* \lambda_2^*, & \lambda'_2 &= r_2^* \lambda_1^*, & \lambda'_3 &= \lambda_1^* \lambda_2^* \end{aligned}$$

$$p'_{yz}{}^1 = \begin{bmatrix} v_2^* - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1^* - 1 \\ 0 & v_1^* - 1 & (v_1^* - 1)(v_2^* - 2) \end{bmatrix}$$

$$p'_{yz}{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_2^* - 1 \\ 0 & v_1^* - 2 & 0 \\ v_2^* - 1 & 0 & (v_1^* - 2)(v_2^* - 1) \end{bmatrix}$$

$$p'_{yz}{}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & v_2^* - 2 \\ 1 & 0 & v_1^* - 2 \\ v_2^* - 2 & v_1^* - 2 & (v_1^* - 2)(v_2^* - 2) \end{bmatrix}$$

d) Yukarıda (b) şıkkındaki şartlar sağlanmadığında Yardımcı Teorem 5.3 uygulanabilir [Vartak, 1955].

5.2. Örnek

Parametreleri $\nu = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $n_1 = n_3 = 2$, $n_2 = 1$ olan bir dikdörtgensel tasarım alınsın. Tasarımın blokları $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$ şeklindedir. Bu tasarımın $\nu = 6$ işlemi 2×3 düzeninde yerleştirilir.

1 2 3

4 5 6

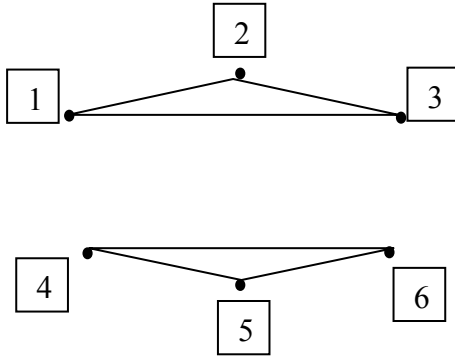
Düzen

Bu işlemlerden herhangi biri için; birinci birliktelik aynı satırdaki işlemlerle, ikinci birliktelik aynı sütundaki işlemlerle, üçüncü birliktelikte arta kalan işlemlerle oluşturulur. Bunlar Çizelge 5.1’ de görülmektedir.

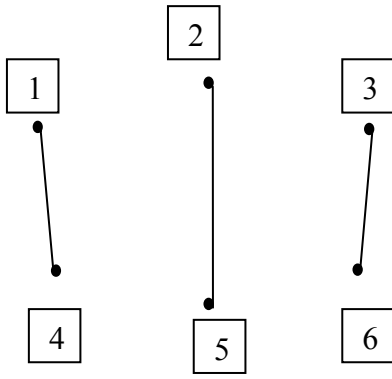
Çizelge 5.1. İşlemler ve birliktelik sınıfları

İşlemler	Birinci birliktelik	İkinci birliktelik	Üçüncü birliktelik
1	2, 3	4	5, 6
2	1, 3	5	4, 6
3	1, 2	6	4, 5
4	5, 6	1	2, 3
5	4, 6	2	1, 3
6	4, 5	3	1, 2

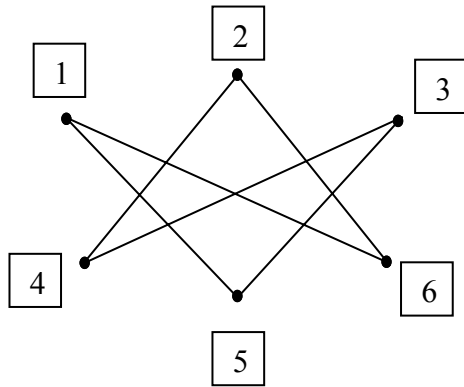
Bu birliktelik yapısını şekille gösterecek olursak;



Şekil 5.1. İşlemler ve birinci birliktelikler



Şekil 5.2. İşlemler ve ikinci birliktelikler



Şekil 5.3. İşlemler ve üçüncü birliktelikleri

Burada $\lambda_1 = \lambda_2$ olmasına rağmen birinci ve ikinci sınıfın birleştirilmediğine dikkat edilsin. Birleştirildiğini varsayarsak; 1, 2 ve 4. işlem için sırasıyla 1. birliktelik $\{2, 3,$

4}, {1, 3, 5} ve {1, 5, 6} olurdu. Böylece 1 ve 2 için birliktelik $p_{11}^1 = 1$ ancak 1 ve 4 için $p_{11}^1 = 0$ elde edilirdi.

Bu tasarımın isabet matrisi ve birliktelik matrisleri şöyledir;

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \end{bmatrix}$$

5.4. Dikdörtgensel Tasarımların Kuruluşları

5.4.1. Dikdörtgensel tasarımların kuruluşlarına ilişkin bazı teoremler

İki BIB tasarımın isabet matrislerinin kronoker çarpımları dikdörtgensel tasarımlar oluşturur.

5.3. Örnek

Parametreleri aşağıdaki gibi olan iki tane dengeli tamamlanmamış blok (BIB) tasarımı alınsın.

Birinci tasarım parametreleri $v_1^* = b_1^* = 3$, $r_1^* = k_1^* = 2$, $\lambda_1^* = 1$ olan Çizelge 5.2' de verilen tasarımıdır.

Çizelge 5.2. (3, 2, 1)-BIB tasarımı

İşlemler	Bloklar		
	1	2	3
1	X		X
2	X	X	
3		X	X

Bu tasarımın isabet matrisi

$$N_{1(BIB)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dir.}$$

İkinci tasarım parametreleri $\nu_2^* = 5$, $b_2^* = 10$, $r_2^* = 4$, $k_2^* = 2$, $\lambda_2^* = 1$ olan Çizelge 5.3' de verilen tasarımıdır.

Çizelge 5.3. (10, 2, 1)-BIB Tasarımı

İşlemler	Bloklar									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X			X		X			X	
2	X		X				X			X
3		X		X			X	X		
4		X			X	X				X
5			X		X			X	X	

Bu tasarımın isabet matrisi ise

$$N_{2(BIB)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dir.}$$

Çizelge 5.4. Dikdörtgensel Tasarım

işlem	Bloklar																													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	X			X		X			X												X			X		X			X	
2	X		X				X			X											X		X				X			X
3		X		X			X	X														X		X			X	X		
4		X			X	X				X												X			X	X				X
5			X		X			X	X														X		X			X	X	
6	X			X		X			X		X			X		X			X											
7	X		X				X			X	X		X				X			X										
8		X		X			X	X				X		X	X		X	X												
9		X			X	X				X		X			X	X				X										
10			X		X			X	X				X					X	X											
11											X			X		X			X		X			X		X			X	
12											X		X				X			X	X		X				X			X
13												X		X			X	X				X		X			X	X		
14												X			X	X				X		X			X	X				X
15													X		X			X	X				X		X			X	X	

Tasarımın parametreleri ise;

$v' = 15$, $b' = 30$, $r' = 8$, $k' = 4$, $\lambda'_1 = 2$, $\lambda'_2 = 4$, $\lambda'_3 = 1$ ' dir.

Çizelge 5.5' de iki işlem için birliktelik sınıfları verilmiştir. Buradan ikinci çeşit parametreler olan n_i ' ler söylenebilir ve ayrıca iki işlem içinde n_i ' lerin aynı olduğunu görülür.

Çizelge 5.5. İşlemler ve birliktelik sınıfları

İşlem	1	6
Birinci birliktelik	2, 3, 4, 5	7, 8, 9, 10
İkinci birliktelik	6, 11	1, 11
Üçüncü birliktelik	7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15	2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15

$n'_1 = 4$, $n'_2 = 2$, $n'_3 = 8$

5.5 Teorem

$$\nu' = m, b', r', k', \lambda' \quad (5.7)$$

Parametreleri Eş. 5.1' de verilen BIB tasarımından elde edilen dikdörtgensel tasarımın parametreleri aşağıdaki gibidir [Kageyama ve Sinha, 2003].

$$\nu = mn$$

$$b = \binom{n}{2} b'$$

$$r = (n-1)r' + \binom{n-1}{2} b'$$

$$k = 2k' + (n-2)\nu' \quad (5.8)$$

$$\lambda_1 = (2n-3)r' + \binom{n-2}{2} b'$$

$$\lambda_2 = (n-1)\lambda' + \binom{n-1}{2} b'$$

$$\lambda_3 = \lambda' + 2(n-2)r' + \binom{n-2}{2} b'$$

İspat:

Parametreleri Eş. 5.1 olan bir BIB tasarımının $m \times b'$ boyutlu isabet matrisi N alınsın

ve parametreleri $\nu'' = n, b'' = \binom{n}{2}, r'' = n-1, k'' = 2, \lambda'' = 1$ olan indirgenmemiş BIB

tasarımının $\nu'' \times b''$ boyutlu Q isabet matrisi alınsın. Elde edilen $mn \times \binom{n}{2} b'$ boyutlu

N^* isabet matrisi dikdörtgensel tasarımın isabet matrisidir.

$$N^* = Q \otimes N + (J_{n \times b''} - Q) \otimes J_{m \times b'}$$

5.6. Teorem

Parametreleri Eş. 5.7 olan BIB tasarımından elde edilen dikdörtgensel tasarımın parametreleri aşağıdaki gibi olur [Kageyama ve Sinha, 2003].

$$\begin{aligned}
 v &= mn \\
 b &= nb' \\
 r &= (n-1)r' \\
 k &= (n-1)k' \\
 \lambda_1 &= (n-2)r' \\
 \lambda_2 &= (n-1)\lambda' \\
 \lambda_3 &= (n-2)\lambda'
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

İspat:

Parametreleri Eş. 5.7 olan bir BIB tasarımının $m \times b'$ boyutlu isabet matrisi N alınsın. $mn \times nb'$ boyutlu N^* isabet matrisi dikdörtgensel tasarımın istenen parametrelerini verir.

$$N^* = (J_n - I_n) \otimes N$$

Teorem 5.6' da $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $m=n$ olduğunda tasarım Latin Kare PBIB tasarımı halini alır. $\lambda_2 = \lambda_3$ olduğunda ise bir GD tasarımı elde edilir [Clatworthy, 1973].

5.4. Örnek

Parametreleri $v' = m = b' = 4$, $r' = k' = 3$, $\lambda' = 2$ olan Çizelge 5.6' da verilen BIB tasarımını alınsın. $n=4$ olsun.

Çizelge 5.6. (4, 3, 2)-BIB Tasarımı

İşlemler	Bloklar			
	1	2	3	4
1	X		X	X
2	X	X		X
3	X	X	X	
4		X	X	X

Bu tasarımın isabet matrisi $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dir.

$$N^* = (J_n - I_n) \otimes N$$

$$N^* = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen N^* matrisini kullanarak tasarımı Çizelge 5.7' de gösterirsek;

Çizelge 5.7. Latin Kare PBIB Tasarımı

İşlemler	Bloklar															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1					X		X	X	X		X	X	X		X	X
2					X	X		X	X	X		X	X	X		X
3					X	X	X		X	X	X		X	X	X	
4						X	X	X		X	X	X		X	X	X
5	X		X	X					X		X	X	X		X	X
6	X	X		X					X	X		X	X	X		X
7	X	X	X						X	X	X		X	X	X	
8		X	X	X						X	X	X		X	X	X
9	X		X	X	X		X	X					X		X	X
10	X	X		X	X	X		X					X	X		X
11	X	X	X		X	X	X						X	X	X	
12		X	X	X		X	X	X						X	X	X
13	X		X	X	X		X	X	X		X	X				
14	X	X		X	X	X		X	X	X		X				
15	X	X	X		X	X	X		X	X	X					
16		X	X	X		X	X	X		X	X	X				

Çizelge 5.7' deki tasarımın parametreleri şöyledir;

$$v = mn = 16, b = 16, r = 9, k = 9, \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 4$$

$\lambda_1 = \lambda_2$ ve $m = n$ olduğundan tasarım Latin kare PBIB tasarımıdır.

Tanım: L_i Tipi Birliktelik Şeması

$v = s^2$ işlemi $s \times s$ karede düzenlenir ve bu kare düzende $(i - 2)$ MOLS üst üste gelir. İki işlem birinci birliktelikte ise aynı satırda veya sütunda gözükürler veya

herhangi $i-2$ Latin karedeki aynı harflerle gözükür. Diğer işlem çiftleri de ikinci birlikteliği oluşturur.

$$n_1 = i(s-1), \quad n_2 = (s-i+1)(s-1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} (i-1)(i-2)+s-2 & (s-i+1)(i-1) \\ (s-i+1)(i-1) & (s-i+1)(s-i) \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} i(i-1) & i(s-i) \\ i(s-i) & (s-i)(s-i-1)+s-2 \end{bmatrix}$$

NN' matrisinin farklı eigen değerleri vardır. Bu eigen değerler ve bunların çarpanları;

$$\theta_0 = rk, \quad \theta_1 = r + (s-i)\lambda_1 - (s-i+1)\lambda_2, \quad \theta_2 = r - i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = i(s-1), \quad \alpha_2 = (s-i+1)(s-1)$$

[Raghavarao ve Padgett, 2005].

5.7. Teorem

Parametreleri Eş. 5.7 olan BIB tasarımından elde edilen dikdörtgensel tasarımın parametreleri aşağıdaki gibi olur [Kageyama ve Sinha, 2003].

$$v = mn$$

$$b = nb'$$

$$r = (n-1)r' + b'$$

$$k = (n-1)k' + v' \tag{5.10}$$

$$\lambda_1 = nr'$$

$$\lambda_2 = (n-1)\lambda' + b'$$

$$\lambda_3 = (n-2)\lambda' + 2r'$$

İspat:

Parametreleri Eş. 5.7 olan bir BIB tasarımının $m \times b'$ boyutlu isabet matrisi N alınsın. $mn \times nb'$ boyutlu N^* isabet matrisi dikdörtgensel tasarımın istenen parametrelerini verir.

$$N^* = (J_n - I_n) \otimes N + I_n \otimes J_{m \times b'}$$

Teorem 5.7' de $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $m=n$ olduğunda Latin Kare PBIB tasarımı elde ederiz. $\lambda_2 = \lambda_3$ olduğunda ise GD tasarım elde ederiz [Clatworthy, 1973].

5.8. Teorem

Parametreleri Eş. 5.7 olan BIB tasarımından elde edilen dikdörtgensel tasarımın parametreleri aşağıdaki gibi olur [Kageyama ve Sinha, 2003].

$$v = mn$$

$$b = nb'$$

$$r = (n-2)r' + b'$$

$$k = (n-2)k' + v' \tag{5.11}$$

$$\lambda_1 = (n-2)r'$$

$$\lambda_2 = b' - 2r' + n\lambda'$$

$$\lambda_3 = (n-4)\lambda' + 2r'$$

İspat:

Parametreleri Eş. 5.7 olan bir BIB tasarımının $m \times b'$ boyutlu isabet matrisi N alınsın. $mn \times nb'$ boyutlu N^* isabet matrisi dikdörtgensel tasarımın istenen parametrelerini verir.

$$N^* = (J_n - I_n) \otimes N + I_n \otimes (J_{v' \times b'} - N)$$

Burada $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $m=n$ olduğunda Latin Kare PBIB tasarımı elde edilir. $\lambda_2 = \lambda_3$ olduğunda ise GD tasarım elde edilir [Clatworthy, 1973].

5.9. Teorem

Parametreleri ν, b, r, k, λ olan BIB tasarımının isabet matrisi N ; N' , N matrisinin transpozu ve 0 , $\nu \times b$ boyutlu sıfır matrisi olmak üzere

$$N^* = \begin{bmatrix} N & N' & 0_{\nu \times b} \\ N' & 0_{\nu \times b} & N \\ 0_{\nu \times b} & N & N' \end{bmatrix}$$

matrisi parametreleri $\nu^* = 3\nu$, $b^* = 3b$, $r^* = b$, $k^* = \nu$, $\lambda_1^* = b - 2(r - \lambda)$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = r - \lambda$ olan bir dikdörtgensel tasarımı verir [Bhagwandas ve Kageyama, 1985].

5.10. Teorem

Parametreleri ν, b, r, k, λ olan BIB tasarımının isabet matrisi N olmak üzere

$$N^* = \begin{bmatrix} J_{\nu \times b} & N & N \\ N & J_{\nu \times b} & N \\ N & N & J_{\nu \times b} \end{bmatrix}$$

matrisi parametreleri $\nu^* = 3\nu$, $b^* = 3b$, $r^* = b + 2r$, $k^* = \nu + 2k$, $\lambda_1^* = b + 2\lambda$, $\lambda_2^* = 3r$, $\lambda_3^* = 2r + \lambda$, $n_1^* = \nu - 1$, $n_2^* = 2$, $n_3^* = 2(\nu - 1)$ olan bir dikdörtgensel tasarım verir [Bhagwandas ve Kageyama, 1985].

Burada J , $\nu \times b$ boyutlu tüm elemanları 1 olan matrisidir.

5.11. Teorem

Parametreleri ν, b, r, k, λ olan BIB tasarımının isabet matrisi N olmak üzere

$$N^* = \begin{bmatrix} N' & N & N \\ N & N' & N \\ N & N & N' \end{bmatrix}$$

matrisi parametreleri $\nu^* = 3\nu$, $b^* = 3b$, $r^* = b + r$, $k^* = \nu + k$, $\lambda_1^* = b - 2r + 3\lambda$, $\lambda_2^* = r$, $\lambda_3^* = 2r - \lambda$, $n_1^* = \nu - 1$, $n_2^* = 2$, $n_3^* = 2(\nu - 1)$ olan bir dikdörtgensel tasarım verir [Bhagwandas ve Kageyama, 1985].

5.5. Örnek

İsabet matrisi aşağıdaki gibi olan $(7, 3, 1)$ -BIB tasarımını alalım.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu isabet matrisini kullanarak teorem 5.10' daki N^* matrisini yazarsak

$$N^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elde edilen bu tasarım dikdörtgensel tasarımıdır ve teorem 5.10' da ki parametreleri sağlamaktadır şöyle ki;

$$\nu^* = 21, b^* = 21, k^* = 13, r^* = 13,$$

$$\lambda_1^* = 9, \lambda_2^* = 9, \lambda_3^* = 7,$$

$$n_1^* = 6, n_2^* = 2, n_3^* = 12$$

dir.

5.4.2. İç içe dengeli tamamlanmamış blok tasarımı kullanılarak dikdörtgensel tasarımların kuruluşu

Tanım: İç içe dengeli tamamlanmamış blok tasarımı-iç içe BIB tasarımı

Parametreleri $\nu, b_1, r, k_1, b_2, k_2, \lambda_1, \lambda_2$ olan blok tasarımı iç içe BIB tasarımı olarak adlandırılır. Bu tasarım sırasıyla BIB tasarımı $(\nu, b_1, r, k_1, \lambda_1)$ ve BIB tasarımı $(\nu, b_2, r, k_2, \lambda_2)$ nın iç içe bloklar (süper blok) ve alt bloklar biçimidir (Preece, 1967; Morgan, 1996). b_2 alt bloklarının genişliği k_2 ve iç içe her bir b_1 süper bloğun genişliği de k_1 ' dir. Burada dikkat edilmesi gereken şey iç içe BIB tasarımındaki λ_1 ve λ_2 ' nin anlamının kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımından farklı olduğudur.

Bir BIB tasarımının her bir bloğu, her biri bir BIB tasarımı olacak şekilde eşit boyutlu alt bloklara bölünür. Örneğin 10 bloklu bir BIB tasarımı, 5 alt-bloklu yeni bir düzen verebilir.

İç içe BIB tasarımının parametreleri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır [Sinha ve Mitra, 1999].

$$\nu r = b_1 k_1 = b_2 k_2, (\nu - 1) \lambda_1 = (k_1 - 1) r, (\nu - 1) \lambda_2 = (k_2 - 1) r$$

5.12. Teorem

$$\nu' = m, r', k_1' = 2k_2', k_2', b_1', b_2', \lambda_1', \lambda_2' \quad (5.12)$$

Parametreleri yukarıda verilen iç içe BIB tasarımı, parametreleri

$$\begin{aligned} \nu &= 3m, & b &= 3b_2', & r &= 2r', & k &= 2k_2', \\ \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= 2\lambda_2', & \lambda_3 &= \lambda_1' - \lambda_2', \\ n_1 &= 2, & n_2 &= m-1, & n_3 &= 2(m-1) \end{aligned}$$

olan dikdörtgensel tasarımın varlığını gösterir [Kageyama ve Sinha, 2003].

$4t+1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere mod $(4t+1)$ ' e göre bir $(x^0, x^2, \dots, x^{4t-2}, x, x^3, \dots, x^{4t-1})$ initial (başlangıç) bloğu, parametreleri $v' = 4t+1$, $r' = 4t$, $k_1' = 4t$, $k_2' = 2t$, $b_1' = 4t+1$, $b_2' = 2(4t+1)$, $\lambda_1' = 4t-1$, $\lambda_2' = 2t-1$ olan bir iç içe BIB tasarımı verir. Burada x , $GF(4t+1)$ ' in ilkel elemanıdır [Sinha ve ark., 1993].

5.2. Sonuç

$4t+1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere parametreleri $v = 3(4t+1)$, $b = 6(4t+1)$, $r = 8t$, $k = 4t$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2(2t-1)$, $\lambda_3 = 2t$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4t$, $n_3 = 8t$, $m = 4t+1$, $n = 3$ olan bir dikdörtgensel tasarım vardır.

Benzer olarak $4t-1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere mod $(4t-1)$ ' e göre bir $(x^0, x^2, \dots, x^{4(t-1)}, x, x^3, \dots, x^{4t-3})$ initial bloğu, parametreleri $v' = 4t-1$, $r' = 2(2t-1)$, $k_1' = 2(2t-1)$, $k_2' = 2t-1$, $b_1' = 4t-1$, $b_2' = 2(4t-1)$, $\lambda_1' = 4t-3$, $\lambda_2' = 2(t-1)$ olan bir iç içe BIB tasarımı verir. Burada x , $GF(4t-1)$ ' in asal elemanıdır [Sinha ve ark., 1993].

5.3. Sonuç:

$4t-1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere parametreleri $v = 3(4t-1)$, $b = 6(4t-1)$, $r = 4(2t-1)$, $k = 2(2t-1)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4(t-1)$, $\lambda_3 = 2t-1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4t-2$, $n_3 = 4(2t-1)$, $m = 4t-1$, $n = 3$ olan bir dikdörtgensel tasarım vardır.

5.13. Teorem

Parametreleri Eş. 5.12 olan iç içe BIB tasarımı parametreleri

$$\begin{aligned}
\nu &= 3m, & b &= 6b_1', & r &= 2r' + 2b_1', & k &= 2k_2' + m, \\
\lambda_1 &= 2r', & \lambda_2 &= 2\lambda_2' + 2b_1', & \lambda_3 &= 2r' + \lambda_1' - \lambda_2', \\
n_1 &= 2, & n_2 &= m-1, & n_3 &= 2(m-1)
\end{aligned}$$

olan dikdörtgensel tasarımın varlığını gösterir [Kageyama ve Sinha, 2003].

5.4. Sonuç:

$4t+1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere parametreleri $\nu = 3(4t+1)$, $b = 6(4t+1)$, $r = 2(8t+1)$, $k = 8t+1$, $\lambda_1 = 8t$, $\lambda_2 = 12t$, $\lambda_3 = 10t$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4t$, $n_3 = 8t$, $m = 4t+1$, $n = 3$ olan bir dikdörtgensel tasarım vardır.

5.5. Sonuç:

$4t-1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere parametreleri $\nu = 3(4t-1)$, $b = 6(4t-1)$, $r = 2(8t-3)$, $k = 8t-3$, $\lambda_1 = 4(2t-1)$, $\lambda_2 = 6(2t-1)$, $\lambda_3 = 5(2t-1)$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4t-2$, $n_3 = 4(2t-1)$, $m = 4t-1$, $n = 3$ olan bir dikdörtgensel tasarım vardır.

5.14. Teorem

Parametreleri

$$\nu = pk + 1, r, b_1 = \nu, k_1 = pk, \lambda_1, b_2 = pb_1, k_2, \lambda_2$$

olan bir iç içe BIB tasarımının varlığı, $\lambda_1 - \lambda_2$ çift olmak üzere, parametreleri

$$i) \quad p = 3, \nu' = 3\nu, b' = 3b_1, r', k' = 3k, \lambda_1' = b_1 - 2r + \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2' = 0,$$

$$\lambda_3' = 1/2(\lambda_1 - \lambda_2), n = \nu, m = 3$$

$$ii) \quad p = 2, \nu' = 3\nu, b' = b, r' = r + 1, k' = \nu, \lambda_1' = \lambda_2, \lambda_2' = 0, \lambda_3' = 1/2(\lambda_1 - \lambda_2 + 2),$$

$$m=3, n=\nu$$

olan dikdörtgensel tasarımın varlığını gösterir [Sinha ve Mitra, 1999].

5.15. Teorem

Parametreleri

$$\nu' = 2k+1, r', b_1 = \nu', k_1 = 2k_2, \lambda_1, b_2 = 2b_1, k_2, \lambda_2$$

olan bir iç içe BIB tasarımının varlığı parametreleri

$$\nu = 2\nu', r = r', b = 2b', k_1' = 2(k_2 + 1), \lambda_1' = \lambda_2 + 2, \lambda_2' = 2, \lambda_3' = \lambda_1 - \lambda_2 + 2,$$

$$n = \nu, m = 2$$

olan dikdörtgensel tasarımın varlığını gösterir [Sinha ve Mitra, 1999]

5.5. Örnek:

0, 1, 2, 3, 4 işlemli ve (5, 5, 10, 4, 4, 2) parametrelili iç içe BIB tasarımı göz önüne alınsın. Burada her bir blok yuvarlak parantez içindedir ve bir blok içindeki alt bloklar düşey çubukla ayrılmıştır:

$$(1\ 4\ |\ 2\ 3)\ (2\ 0\ |\ 3\ 4)\ (3\ 1\ |\ 4\ 0)\ (4\ 2\ |\ 0\ 1)\ (0\ 3\ |\ 1\ 2)$$

Bu tasarımdan elde edilen dikdörtgensel tasarımın parametreleri $\nu = 10 = b, r = 4, k = 6, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, m = 2, n = 5$ dir.

5.4.3. Yeniden çözülebilir ve hemen hemen yeniden çözülebilir BIB tasarımı kullanılarak dikdörtgensel tasarımların kuruluşu

Yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı

(X, A) , bir (ν, k, λ) -BIB tasarımı olsun. (X, A) ' da bir paralel sınıf A' daki ayrık blokların alt setidir. A' nın r paralel sınıflarına parçalanması yeniden çözümlenme olarak adlandırılır.

Eğer A' 'nın en azından bir yeniden çözümlenmesi varsa (X, A) 'nın yeniden çözümlenebilir olduğu söylenebilir.

Bir paralel sınıf ν/k blok içerir. Ayrıca BIB tasarımlar yalnızca $\nu \equiv 0 \pmod k$ ise bir paralel sınıfa sahip olabilir.

Bütün çift ν ' ler yeniden çözülebilir (ν, k, λ) -BIB tasarımlarını oluşturur $((\nu, k, \lambda)$ -BIB tasarımı ν setinin bütün 2' li alt setlerini içerir).

Bir çözülebilir (ν, k, λ) -BIB tasarımının var olması için gerek ve yeter koşul, ν çift sayı ve $\nu \geq 4$ olmasıdır [Bagchi, 2004].

5.6. Örnek

Çizelge 5.8' de verilen tasarım $\nu=15, k=3, \lambda=1$ olan yeniden çözülebilir BIB tasarımıdır.

Çizelge 5.8. YÇ (15, 3, 1)-BIB tasarımı

1	2	3	1	4	5	1	6	7	1	8	9	1	10	11	1	12	13	1	14	15
4	8	12	2	8	10	2	9	11	2	12	1	2	13	14	2	4	6	2	5	7
5	10	14	3	13	15	3	12	14	3	5	6	3	4	7	3	9	10	3	8	11
6	11	13	6	9	14	4	10	15	4	11	14	5	9	12	5	11	15	4	9	13
7	9	15	7	11	12	5	8	13	7	10	13	6	8	15	7	8	14	6	10	12

Hemen hemen yeniden çözülebilir tasarım

$\varepsilon=0, +1$ veya -1 olsun. Bir BIB tasarımının blok setinin sınıflara bölüldüğü varsayalım. Her bir sınıf için, istisnai bir işlem vardır ki bu işlem, sınıfların $1+\varepsilon$ bloğunda gözükür ve diğer işlemler kesinlikle bir blokta gözükür. Böylece blok sınıflarına hemen hemen paralel ve tasarıma da ε tipi hemen hemen yeniden çözülebilir tasarım denir. Aşağıdaki yardımcı teorem bir hemen hemen yeniden çözülebilir BIB tasarımını kolayca kanıtlamaktadır.

Yardımcı teorem:

$\varepsilon=0, \pm 1$ olsun. Böylece bir ε tipi hemen hemen yeniden çözülebilir tasarım aşağıdaki koşulları sağlar

- i) $k, \nu + \varepsilon$ ' u böler
- ii) bir hemen hemen paralel sınıf $(\nu + \varepsilon)/k$ blok içerir
- iii) hemen hemen paralel sınıfların sayısı $\nu r/(\nu + \varepsilon)$ ' dur
- iv) eğer $\varepsilon = \pm 1$ ise her işlem $r/(\nu + \varepsilon)$ sınıfta kesinlikle bir defa gözükür.

Ortogonal Dizimler

$OA(N, m, s, t)$ bir ortogonal dizim göstermek üzere ortogonal dizim büyüklüğü N, m kısıtı, s düzeyi ve t kuvvetli ortogonal dizim s sembollerinin $m \times N$ boyutlu X matrisidir, öyle ki X ' in herhangi $t \times N$ alt matrisinin sütun vektörleri aynı dereceli sıklıkla görülür [Rao, 1947].

5.16. Teorem

Her bir hemen hemen paralel sınıfında q bloğu bulunan parametreleri ν, b, r, k, λ olan bir hemen hemen yeniden çözülebilir BIB tasarımı d ve $OA(q^2, m, q, 2)$ var ise parametreleri $\nu^* = m\nu, b^* = qb, r^* = qr, k^* = mk$, olan bir d^* tasarımı vardır.

- i) eğer $\varepsilon = 0$ ise d^* diğer parametreleri $\lambda_1 = q\lambda$ ve $\lambda_2 = r$ olan bir yarı düzenli GD tasarımıdır.
- ii) eğer $\varepsilon = \pm 1$ ise d^* diğer parametreleri $\lambda_1 = q\lambda, \lambda_2 = r + (1 + \varepsilon)r/(\nu + \varepsilon), \lambda_3 = r + \varepsilon r/(\nu + \varepsilon)$ olan m satırlı ve ν sütunlu bir dikdörtgensel tasarımıdır [Bagchi, 2004].

5.17. Teorem

- a) her t tamsayı ve $m \leq \phi(t)$ için; $2t+1$ sütunu ve m satırı bulunan parametreleri

$k=2m$, $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = 2t$, $\lambda_3 = 2t - 1$ olan bir dikdörtgensel tasarım vardır. $m=2$ ve $t=2$ olduğunda, bu tasarım 10 işlemi ve E-optimal özelliği bulunan bir tip 2 dengeli dikdörtgensel tasarımdır.

b) her t tamsayı ve $m \leq \phi(t)$ için; $3t+1$ sütunu ve m satırı bulunan parametreleri

$k=2m$, $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = 3t$, $\lambda_3 = 3t - 1$ olan bir dikdörtgensel tasarım vardır.

c) n asal katı ve q , $(n-1)$ ' in faktörü olduğu varsayılın ve $m = \phi(q)$ olsun.

Parametreleri $m, n, b = q^2 n$, $k = m(n-1)/q$, $r = q^2 k$, $\lambda_1 = r - q$, $\lambda_2 = r$,

$\lambda_3 = r - 1$ olan dikdörtgensel tasarım vardır.

Özellikle eğer n tek ise, $q=2$ ve $m=2$ alarak tip 2 dengeli dikdörtgensel tasarım elde edilir. $n \geq 5$ için $v \geq 10$ ' dur ve bundan dolayı E-optimal özelliğine sahiptir.

(d) n ' nin bir tek sayının katı olduğu varsayılın. $n \geq 5$ için tip 2 dengeli dikdörtgensel tasarım mevcuttur ve bu tasarım E-optimaldir. Bu tasarımın parametreleri $m=2, k=n+1, r=4k$, $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = r + 2$, $\lambda_3 = r + 1$ ' dir [Bagchi, 2004].

Buradaki $\phi(t)$, ortogonal dizimin (OA) maksimum kısıt sayısıdır.

5.4.4. Yarı-düzenli gruplarına bölünebilir (GD) tasarımı kullanılarak dikdörtgensel tasarımların kuruluşu

Tanım: Gruplarına Ayrılabilir (GD) Tasarım

Gruplarına ayrılabilir tasarım 2-ortak sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok (PBIB) tasarımının bir şeklidir [Clatworthy, 1973]. mn işlem seti n işlemin m grubu olarak ayrılabilir. Herhangi iki işlem eğer aynı gruba aitse λ_1 blokta birlikte gözükür, farklı bloklarda ise λ_2 blokta gözükür. GD tasarımı için üç sınıf dikkate alınır.

i) $r - \lambda_1 = 0$ ise tekil GD

ii) $r - \lambda_1 = 0$ $rk = v\lambda_2 = 0$ ise yarı-düzenli GD

iii) $r - \lambda_1 > 0$ $rk - v\lambda_2 > 0$ ise düzenli GD

5.18. Teorem

$4t - 1$ asal veya asal katı olmak üzere parametreleri

$$v = 8t, b = 16t, r = 8t, k = 4t, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4t \quad (5.13)$$

$$m = 4t, n = 2$$

ve $4t + 1$ asal veya asal katı olmak üzere parametreleri

$$v = 4(2t + 1), b = 8(2t + 1), r = 4(2t + 1), k = 2(2t + 1) \quad (5.14)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2(2t + 1), m = 2(2t + 1), n = 2$$

olan çözülebilir yarı-düzenli GD vardır [Mitra ve ark., 2002].

Teorem 5.18' de parametreleri Eş. 5.13 ve Eş 5.14 olan tasarımlara sırasıyla

i) $(1, 2, \dots, 4t)$ ve $(4t+1, 4t+2, \dots, 8t)$

ii) $(1, 2, \dots, 4(2t+1))$ ve $(4(2t+1)+1, \dots, 8(2t+1))$

blokları eklenirse aşağıdaki teoreme ulaşılır.

5.19. Teorem

$4t - 1$ asal veya asal katı olmak üzere parametreleri

$$v = 8t, b = 2(8t + 1), r = 8t + 1, k = 4t, \lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 4t + 1, \lambda_3 = 4t, m = 4t, n = 2$$

ve $4t + 1$ asal veya asal katı olmak üzere parametreleri

$$v = 4(2t + 1), b = 2(8t + 5), r = 8t + 5, k = 2(2t + 1), \lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 4t + 3, \lambda_3 = 2(2t + 1), m = 2(2t + 1), n = 2$$

olan yeniden çözülebilir dikdörtgensel tasarımlar vardır [Mitra ve ark., 2002].

5.4.5. Dikdörtgensel tasarımların kuruluşunda farklar metodunun kullanılması

M , m elemanlı bir modul olsun. M' nin her bir elemanı için tam olarak n işlem olsun ve işlemlerin yerine M' in u elemanları $u_1, u_2, \dots, u_n$ şeklinde gösterilsin. u_i , işlemin i . sınıfa ait olduğunu gösterir. İki işlem u_i ve v_j birinci birliktelikteler ise $u = v$ ve $i = j$ ' dir. İkinci birliktelikteler ise $u \neq v$ ve $i = j$ ' dir. Üçüncü birliktelikteler ise $u \neq v$ ve $i \neq j$ ' dir. İki işlemin farkı $u_i - v_j$, $d_{[i,j]}$ olarak tanımlanır ve $d = u - v$ ' dür. Eğer $i = j$ ise $d_{[i,j]}$ saf fark, $i \neq j$ ise karışık fark olarak adlandırılır.

5.20. Teorem

Eğer her biri k işlem içeren t tane başlangıç bloğu bulmak mümkünse öyle ki

- i) t initial bloklardaki gözükten kt işlem içinde her biri n sınıfa ait r işlem vardır
- ii) t initial bloklardan ortaya çıkan $tk(k-1)$ fark da her bir sıfır karışık fark λ_1 defa, her bir sıfır olmayan saf fark λ_2 defa ve her sıfır olmayan karışık fark λ_3 defa tekrarlanır.

$B_u = \{(v + u)_i / v_i \in B\}$ olacak şekilde her bir initial blok B için m tane blok oluşturabiliriz. tm bloktan parametreleri $v = mn$, $b = tm$, r, k , $n_1 = n - 1$, $n_2 = m - 1$, $n_3 = (n - 1)(m - 1)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ olan dikdörtgensel tasarım elde edilir [Raghavarao ve Aggarwal, 1974].

Teorem 5.20' yi kullanarak aşağıdaki dikdörtgensel tasarım elde edilir.

5.21. Teorem

s ve t tam sayı ve $st+1$ bir asal sayı veya asal katı olmak üzere parametreleri aşağıdaki gibi olan bir dikdörtgensel tasarım kurulabilir [Suen, 1989].

$$\begin{aligned} v &= (st+1)s, \quad b = s(st+1), \quad r=st, \quad k=st, \\ n_1 &= s-1, \quad n_2 = st, \quad n_3 = (s-1)st, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = t-1, \quad \lambda_3 = t. \end{aligned}$$

5.22. Teorem

Eğer t tam sayısı ise aşağıdaki iki dikdörtgensel tasarım kurulabilir [Suen, 1989].

- i) $v = 2(2t+1), b=2t(2t+1), r=3t, k=3,$
 $n_1 = 1, n_2 = 2t, n_3 = 2t, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2;$
- ii) $v = 4(2t+1), b=4t(2t+1), r=3t, k=3,$
 $n_1 = 3, n_2 = 2t, n_3 = 6t, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

5.4.6. Dik latin kare tam seti kullanılarak dikdörtgensel tasarım elde edilişi

Tanım: Dik Latin kare tam seti -MOLS

n mertebeden s tane Latin kare seti olsun, buna $L_1, \dots, L_s$ densin. Eğer $1 \leq i < j \leq s$ için L_i ve L_j dik ise, bu karelere dik Latin kare tam setleri denir. Dik Latin kare tam setlerine kısaca “MOLS” (mutually orthogonal Latin Squares) denir.

5.23. Teorem

Parametreleri $v = mn, b = n(n-1), r = n-1, s = m$ olan bir en küçük dikdörtgensel tasarım varsa ve m bir sabit olmak üzere $2 \leq m \leq n$ koşulunu sağlıyorsa ancak ve ancak $n-1$ ortogonal $m \times n$ latin dikdörtgenler seti vardır. Bir latin kareden son $n-$

$m+1$ satır(lar) kaldırılarak latin dikdörtgenler elde edilir. Ortogonal latin dikdörtgen tam setlerinin teorisi latin kareler ile paraleldir [Rempala ve ark., 2004].

5.6. Örnek

$T=\{a, b, c, d\}$ ve $n=4=2^2$ olsun. Böylece aşağıdaki gibi $n=4$ sıralı $n-1=3$ MOLS vardır.

a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
d	c	b	a	c	d	a	b	b	a	d	c
b	a	d	c	d	c	b	a	c	d	a	b
c	d	a	b	b	a	d	c	d	c	b	a

$m=4$ olduğu varsayalım. Birinci latin kare tam seti aşağıdaki gibi 1' den 16' ya kadar numaralandırılsın.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Böylece a işleminin birinci satırda karşılık geldiği “1” indeksi, ikinci satırda “8” indeksi, üçüncü satırda “10” indeksi ve dördüncü satırda “15” indeksi, $\{1, 8, 10, 15\}$ bloğunu verir. Benzer olarak b, c, d içinde aynı işlemleri yaparsak parametreleri $v = mn = 16$, $b = n(n-1) = 12$, $k = m = 4$, $r = 3$ olan aşağıdaki gibi gösterilen dikdörtgensel tasarımı elde ederiz. Sütunlar tasarımın bloklarını göstermektedir [Rempala ve ark., 2004].

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
8	7	6	5	7	8	5	6	6	5	8	7
10	9	12	11	12	11	10	9	11	12	9	10
15	16	13	14	14	13	16	15	16	15	14	13

Bu tasarımı daha kolay görebilmek için Çizelge 5.9’ da gösterirsek ;

Çizelge 5.9. Dikdörtgensel tasarım

İşlemler	Bloklar											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X				X				X			
2		X				X				X		
3			X				X				X	
4				X				X				X
5				X			X			X		
6			X					X	X			
7		X			X							X
8	X					X					X	
9		X						X			X	
10	X						X					X
11				X		X			X			
12			X		X					X		
13			X			X						X
14				X	X						X	
15	X							X		X		
16		X					X		X			

5.4.7. İki faktörlü dengeli tasarımlar ile dikdörtgensel tasarımlar arasındaki ilişki

Tamamlanmış blok tasarımında her blok işlem sayısı kadar parsele ayrılır ve her işlem bloklardaki parsele atanır. Çok fazla işlem kombinasyonu denemek istediğimizde faktöriyel denemeler kullanılır. Tamamlanmış blok tasarımı kullanmak arzu edilen bir durum değildir. Çünkü her blok aynı homojen verimlilikte olmayabilir. Bunun için genellikle faktöriyel denemelerde tamamlanmamış blok tasarımı kullanılır.

Dengeli faktöriyel tasarımlar eşit blok sayısına ve eşit tekrar sayısına sahip tamamlanmamış blok tasarımıdır. Bu tasarımlar, her bir ana etki ve etkileşimlerini elde etmek için kullanılır.

İki faktörlü dengeli tasarımlar Vartak (1959) tarafından dikdörtgensel birliktelik şemasına sahip PBIB tasarımı olarak tanımlanmıştır.

Tanım: İki faktörlü dengeli tasarım

Sırasıyla s_1 ve s_2 düzeylerindeki işlemlerin iki faktörü F_1 ve F_2 olsun. $s_1 s_2$ işlemi (x_1, x_2) gibi faktörlerin düzeylerini gösterebilir. Burada $x_i; 0, 1, \dots, s_{i-1}$ değerleri alan i . faktörün düzeyi ve iki işlem (x_1, x_2) ve (y_1, y_2) (α_1, α_2) . birlikteliktedirler. $\alpha_i = 0$ ise $x_i = y_i$ veya $\alpha_i = 1$ ise $x_i \neq y_i$ dir. (α_1, α_2) . birliktelikte iki işlem $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2}$ blokta birlikte gözükür.

Aşağıdaki iki durumda, bir dikdörtgensel tasarım iki sınıflı PBIB tasarıma indirgenebilir.

- i) $s_1 = s_2$ ve $\lambda_{01} = \lambda_{10}$ olduğunda, dikdörtgensel tasarım iki kısıtlı Latin Kare tipi tasarım veya L_2 tasarım halini alır.
- ii) $\lambda_{01} = \lambda_{11}$ veya $\lambda_{10} = \lambda_{11}$ olduğunda, dikdörtgensel tasarım GD tasarıma indirgenir.

Bu nedenle tüm L_2 tasarımlar ve GD tasarımlar iki faktörlü dengeli tasarımlardır.

İki faktörlü dengeli tasarımın isabet matrisi N ile gösterilsin. NN' ' nün eigen değerleri Vartak (1959) aşağıdaki gibi vermiştir.

$$\theta_{00} = rk$$

$$\theta_{10} = r + (s_2 - 1)\lambda_{01} - \lambda_{10} - (s_2 - 1)\lambda_{11}$$

$$\theta_{01} = r - \lambda_{01} + (s_1 - 1)\lambda_{10} - (s_1 - 1)\lambda_{11}$$

$$\theta_{11} = r - \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11}$$

Tasarımın C matrisi $rI - k^{-1}NN'$ 'nin eigen değeri $r - \theta_{\alpha_1\alpha_2}/k$ 'dır. Birinci faktörün ana etkideki etkinliği E_{10} , ikinci faktörün ana etkideki etkinliği E_{01} ve iki faktörün etkileşiminin etkinliğini E_{11} olarak elde edilmiştir.

$$E_{\alpha_1\alpha_2} = 1 - \theta_{\alpha_1\alpha_2} / rk$$

Bundan dolayı ana etkinin veya etkileşimlerin etkinliği 1 ise NN' 'nün eigen değeri 0' dır.

Tanım: Dengeli dizim

$BA(N, m, s, t)$ bir dengeli dizimi göstermek üzere N , t kuvvetli dengeli dizim büyüklüğünü, m kısıtları, s sembolleri ve $\lambda(x_1, \dots, x_t)$ 'lerde indisleri gösterir.

Aşağıdaki teorem dengeli dizimler ile iki faktörlü dengeli tasarımlar arasındaki ilişkiyi verir.

5.24. Teorem

Blok genişliği s_1 olan bir $s_1 \times s_2$ dengeli tasarımın da ancak ve ancak $\lambda_{01} = 0$ olursa F_1 'in ana etkilerinin etkinliği 1 olarak tahmin edilir. Bu tasarımın varlığı $BA(\lambda_{10}s_2 + \lambda_{11}s_2(s_2 - 1), s_1, s_2, 2; \lambda_{10}, \lambda_{11})$ 'nın varlığına eşittir.

5.7. Örnek

Teorem 5.24 kullanılarak $BA(6, 4, 2, 2; 1, 2)$ 'den parametreleri $b=6, k=4, r=3, \lambda_{10}=1, \lambda_{01}=0, \lambda_{11}=2$ olan bir 4×2 dengeli tasarımı kurulabilir. Birinci faktörün, ikinci faktörün ve etkileşimin ana etkideki etkinliği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E_{10} = \frac{(k-1)s_1}{k} \frac{\lambda_{10} + (s_2-1)\lambda_{11}}{(s_2-1)\lambda_{01} + (s_1-1)\lambda_{10} + (s_1-1)(s_2-1)\lambda_{11}}$$

$$E_{10} = \frac{(4-1)4}{4} \frac{1+(2-1)2}{(2-1)0+(4-1)1+(4-1)(2-1)2} = 1$$

$$E_{01} = \frac{(k-1)s_2}{k} \frac{\lambda_{01} + (s_1-1)\lambda_{11}}{(s_2-1)\lambda_{01} + (s_1-1)\lambda_{10} + (s_1-1)(s_2-1)\lambda_{11}}$$

$$E_{01} = \frac{(4-1)2}{4} \frac{0+(4-1)2}{(2-1)0+(4-1)1+(4-1)(2-1)2} = 1$$

$$E_{11} = 1 - \frac{r - \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11}}{rk} = 1 - \frac{3-0-1+2}{12} = \frac{2}{3}$$

Çizelge 5.10. 4×2 dengeli tasarımı

Bloklar	1	2	3	4	5	6
F_1 ' in düzeyleri	F_2 ' nin düzeyleri					
0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	1	0	0	1

Bu iki faktörlü dengeli tasarım bir dikdörtgensel tasarımıdır ve tasarımın parametreleri Sinha 'nın verdiği (2002) Çizelge 1' deki 3 numaralı tasarımın parametreleri ile aynıdır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında dikdörtgensel tasarımlar tanımlandı ve tasarımlara ait özellikler belirtildi. Çalışmada daha çok tasarımların kuruluş metotları üzerinde duruldu. Bu amaç doğrultusunda ilgili diğer tasarımlar tanımlandı. Dikdörtgensel tasarımların kuruluş metotlarına ilişkin teoremler verildi ve bunların daha anlaşılır olması için örneklendirildi.

Dikdörtgensel tasarımlar dikdörtgensel birliktelik şemasına sahip 3 sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarıdır. Bazı durumlarda dikdörtgensel tasarımlar 2 sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarına indirgenir. Bu özelliği nedeniyle tasarım teorisinde önemli bazı tasarımların türetilmesinde kullanılır.

Dikdörtgensel tasarımlar gibi kompleks yapıların özellikleri kullanılarak daha yalın tasarımlara dönüştürülmesi ve verilerin uygun hale getirilerek araştırmanın bu doğrultuda devam ettirilmesi önerilmektedir. Yapılan tez çalışmasının bu konuda çalışan araştırmacılar için temel olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Aggarwal, K. R., Singh, T. P., “Methods of construction of balanced arrays with application to factorial designs”, **Calcutta Statist. Assoc. Bull.**, 30: 89-93(1981).

Aggarwal, K. R., “A new class of asymmetrical factorial designs of type $q \times (2q+1)^m$ ”, **Utilitas Math.**, 24: 19-21(1983).

Assmus, E. F., Key, J. D., “Design and Their Codes”, **J. of Combinatorial Theory, Series A**, 76: 139-144 (1993).

Bagchi, S., “Construction of group divisible designs and rectangular designs from resolvable and almost resolvable balanced incomplete block designs”, **J. Statist. Plann. Inference**, 119: 401-410 (2004).

Bhagwandas Kageyama, S., “Patterned constructions of partially balanced incomplete blok designs”, **Commun. Statist. –Theor. Meth.**, 14: 1259-1267 (1985).

Bose, R. C., Bush, K. A., “Orthogonal Arrays of Strenght Two and Three”, **Ann. Math. Stat.**, 23: 508-524 (1952).

Bose, R. C., Mesner, D. M., “Linear associative algebra corresponding to association schemes of partially balanced designs”, **Ann. Math. Statist.**, 30: 21-38 (1959).

Bose, R. C., Nair, K. R., “Partially balanced incomplete block designs”, **Sankhya**, 4: 337-372 (1939).

Bose, R. C., Shimamoto, T., “Classification and Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Assosiate classes”, **J.Amer. Stat. Assn.**, 47: 151-184 (1952).

Bose, R. C., Connor W. S., “Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs”, **Ann. Math. Stat.**, 23: 367-383 (1952).

Clatworthy, W. H., “**Tables of Two-Associate-Classess Partially Balanced Designs**”, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 63, Washington, D.C. (1973).

Colbourn, C. J., Dinitz, J. H., “The CRC Handbook of Combinatorial Designs”, **CRC Press**, Boca, 419 (1996).

Gupta, S. Mukerjee, R. “A Calculus for Factorial Arrangements”, **Lecture Notes in Statistics**, Springer-Verlag, New York, 59, (1989).

Hughes, D. R., Piper, F. C., “Design Theory”, **Cambridge University Press**, Cambridge, 1-35 (1985).

Kageyama, S., "Reduction of associate classes for block designs and related combinatorial arrangement", **Hiroshima Math. J.**, 527-618 (1974).

Kageyama, S., Miao, Y., "Some methods of construction of rectangular PBIB designs", **Combin. Graph Theory 1**, 186-198 (1995).

Kageyama, S., Sinha, K., "Some patterned constructions of rectangular designs", **J. Japan Statist. Soc.**, 33(1): 137-144 (2003).

Mitra, R. K., Sinha K., Mandal N. K., Kageyama, S., "Constructions of Resolvable Group Divisible Designs and Related Designs", **Annals of Combinatorics**, 6: 173-179 (2002).

Morgan, J. P., "Nested Designs, Handbook of Statistics", **Elsevier Press**, New York, 13: 939-954 (1996).

Nair, K. R. and Rao C. R. "Confounding in asymmetrical factorial experiments", **J. Roy. Statist. Soc., Ser. B**, 10: 109-131 (1948).

Nair, C. R., "Construction of PBIB designs from families of difference sets", **J. Indian Soc. Agric. Statist.**, 32: 33-40 (1980).

Preece, D. A., "Nested balanced incomplete block designs", **Biometrika**, 43: 479-486 (1967).

Raghavarao, D., Aggarwal, K. R., "Some new series of PBIB designs and their applications", **Ann. Inst. Statist. Math.**, 26: 153-161 (1974).

Raghavarao, D., "Constructions Combinatorial Problems in Design of Experiments", **Dover Publications, Inc.**, New York, 1-2, 59-61 (1971).

Raghavarao, D., Padgett, L. V., "Block Designs Analysis, Combinatorics and Applications Series on Applied Mathematics", **World Scientific Publishing**, New York, 17: 124, 127-128 (2005)

Rao, C. R., "A general class of quasi-factorial and related designs", **Sankhya**, 17: 165-174 (1956).

Rempala, A. G., Srivastav, S., "Minimum variance rectangular designs for U-statistics", **J. of Statistical Planning and Inference**, 120: 103-118 (2004).

Suen, C., "Some rectangular designs constructed by the method of differences", **Journal of Statistical Planning and Inference**, 21: 273-276 (1989).

Seiden, E., "On the Problem of Construction of Orthogonal Arrays", **Ann. Math. Stat.**, 25: 151-156 (1954).

Suen, C. and Chakravarti I. M., "Efficient Two-Factor Balanced Designs", *J. R. Statist. Soc. B*, 48(1): 107-114 (1986).

Sinha, K., Singh, M. K., Kageyama, S. and Singh, R. S., "Some series of rectangular designs", *J. Statist. Plann. Inference*, 106: 39-46 (2002).

Sinha K., Mitra R. K., "Construction of nested balanced blok designs, rectangular designs and q-ary codes", *Annals of Combinatorics*, 3: 71-80 (1999).

Street, A. P. and Street, D. J., "Combinatorics of Experimental Design", *Clarendon Pres*, Oxford, 28-34, 237-243 (1987).

Sinha, K., "A construction of rectangular designs", *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 9: 199-200 (1991).

Sinha, K., Kageyama, S., Singh, M. K., "Construction of rectangular designs", *Statistics*, 25: 63-70 (1993).

Sinha, K., Mitra R. K., Saha, G. M., "Nested BIB designs, balanced bipartite block designs and rectangular designs", *Utilitas Math.*, 49: 216-222 (1996).

Vartak, M. N., "On application of Kronecker product of matrices to statistical designs", *Ann. Math. Statist.*, 26: 420-438 (1955).

Vartak, M. N., "The Non-Existence of Certain PBIB Designs", *University of Bombay*, 1051-1062 (1959).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KAYA, Ebru
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 16.10.1983 İstanbul
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (242) 814 39 12
 e-mail : ebrukaya10@hotmail.com

Eğitim Derece tarihi

Eğitim Birimi

Mezuniyet

Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2008
Lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2006
Lise	Yabancı Dil Ağırlıklı Kemer Lisesi	2001

Yabancı dil

İngilizce

Katıldığı sempozyumlar

1. Kaya, E., Bayrak, H., “Dikdörtgensel Tasarımlar”, (Poster sunumu), 5. İstatistik Öğrenci Kolokyum, Konya, Mayıs 2008.
2. Kaya, E., Bayrak, H., “Dikdörtgensel Tasarımlar”, VI. İstatistik Günleri Sempozyumu, Samsun, 28-30 Ağustos 2008 (basımda).

Hobiler

Doğa yürüyüşleri, sudoku