

T.C.  
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA  
STRONGLY  $\theta$ -PRE-I SÜREKLİ FONKSİYONLAR

TUĞBA HAN ŞİMŞEKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA,2009

**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA**  
**STRONGLY  $\theta$ -PRE-1 SÜREKLİ FONKSİYONLAR**

**Tuğba Han ŞİMŞEKLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez 06.07.2009 aşağıdaki juri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL**  
**(Danışman)**

**Doç. Dr. Kemal AYDIN**  
**(Üye)**

**Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN**  
**(Üye)**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Öğretim Üyesi Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlik ve dikkatle takip ederek bana her açıdan destek olan ve yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL' e sonsuz teşekkürlerimi, saygılarımı ve sevgilerimi sunarım. Çalışmalarımda bilgi ve deneyimini benden esirgmeden yardım eden Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ' e ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür etmeyi borç bilirim.

**Tuğba Han ŞİMŞEKLER**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA STRONGLY $\theta$ -PRE-I SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tuğba Han ŞİMŞEKLER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2009, 58 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Doç. Dr. Kemal AYDIN

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde [20]'de verilen strongly  $\theta$ -pre-sürekliliği ayrıntılı bir şekilde ele aldık.

İkinci bölümde ideal topolojik uzay kavramını göz önüne alarak çalışmamızda kullanacağımız sonuçları aktardık. Ayrıca lokal fonksiyonun tanımını ve özelliklerini inceledik.

Üçüncü bölümde ise ideal topolojik uzaylarda strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyonları adını verdiğimiz yeni bir süreklilik çeşidini tanımladık ve bilinen diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırmasını yaparak yerini tespit ettik. Ayrıca ideal topolojik uzaylarda p-I-regüler uzay, pre-I- $T_2$ -uzay, pre-I-Urysohn uzay, p-I-kapalı

uzay, p-I-Lindelöf uzay, sayılabilir p-I-kapalı uzay gibi yeni kavramlar verdik. Bu kavramları kullanarak tanımladığımız yeni süreklilik çeşitinin özelliklerini inceledik ve yeni karakterizasyonlar elde ettik. Ayrıca konuyla ilgili örnekler bularak kavramların daha iyi anlaşılmasını sağladık.

**Anahtar Kelimeler:** Strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon, P-I-regüler uzay, Pre-I-T<sub>2</sub>-uzay, Pre-I-Urysohn uzay, P-I-kapalı uzay, P-I-Lindelöf uzay, Sayılabilir p-I-kapalı uzay

# **ABSTRACT**

**M.S.c Thesis**

## **Strongly $\theta$ -pre-I Continuous Functions**

**Tuğba Han ŞİMŞEKLER**

**Selçuk University**

**Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**Mathematic Brabch**

**Supervisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL**

**2009, 58 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL**

**Doç. Dr. Kemal AYDIN**

**Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN**

This study consists of three sections.

In first section we study strongly  $\theta$ -precontinuous functions which has defined in [20].

In second section we consider the concept of ideal topological space and we present some properties of it which we use in our study. Also, we give the definition of local function and investigate its properties.

In third section we define a new kind of continuity; called strongly  $\theta$ -pre-I continuous functions and compare it with the other kinds of known continuity and we obtain its place. Moreover we give new definitions in ideal topological spaces as p-I-regular space, pre-I- $T_2$ -space, pre-I-Urysohn space, p-I-closed space, p-I-Lindelöf space and countably p-I-closed space. By using these definitions we provide some

properties and new characterizations of strongly  $\theta$ -pre-I continuous functions. And also we give examples about the concept.

**Key Words:** Strongly  $\theta$ -pre-I continuous functions, P-I-regular space, Pre-I- $T_2$ -space, Pre-I-Urysohn space, P-I-closed space, P-I-Lindelof space, Countably p-I-closed space

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT .....	iv
İÇİNDEKİLER.....	vi
GÖSTERİMLER .....	vii
1. GİRİŞ .....	1
2. STRONGLY $\theta$ -PRE SÜREKLİ FONKSİYONLAR .....	2
2.1. Ön Bilgiler .....	2
2.2. Karakterizasyonlar .....	4
2.3. Bazı Özellikler .....	8
2.4. St. $\theta$ .p.c. Fonksiyonlar ve Ayırma Aksiyomları .....	13
2.5. Korunan Özellikler .....	16
2. İDEAL TOPOLOJİK UZAY .....	19
3.1. Temel Kavramlar .....	19
3.2. Lokal fonksiyon .....	22
4. STRONGLY $\theta$ -PRE-I SÜREKLİ FONKSİYONLAR .....	31
4.1. Ön Bilgiler.....	31
4.2. Tanım ve Karşılaştırmalar.....	36
4.3. Özellikler.....	44
4.4. Str. $\theta$ .pre.I.c. Fonksiyonlar ve Yeni Ayırma Aksiyomlarıyla İlişkisi.....	49
4.5. Str. $\theta$ .pre.I.c. Fonksiyonların Korunan Özellikleri.....	52
SONUÇ VE ÖNERİLER .....	55
KAYNAKLAR.....	56

## GÖSTERİMLER

$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
$A - B$	: A fark B
$A^t$	: A kümesinin tümleyeni
$\tau_A$	: $A \subset X$ olmak üzere $X$ kümesi üzerinde alt uzay topolojisi
$(X, \tau_A)$	: Alt topolojik uzay
$\phi$	: Boş küme
$A \subset B$	: B kümesi A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	: B kümesi A kümesini kapsamaz
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$X$	: Evrensel küme
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$P(X)$	: Güç kümesi
$\forall$	: Her
$(X, \tau, I)$	: Ideal topolojik uzay
$\tau$	: Topolojik yapı
$(X, \tau)$	: Topolojik uzay
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$I$	: $X$ kümesi üzerindeki herhangi bir ideal
$I_c$	: $X$ kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideali

- $I_f$  :  $X$  kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideali
- $G_{(x)}$  :  $(X, \tau)$  topolojik uzayındaki  $x$  noktasının açık komşuluklar ailesi
- $\mathcal{G}_{(x)}$  :  $(X, \tau)$  topolojik uzayındaki  $x$  noktasının komşuluklar ailesi
- $\tilde{A}$  :  $(X, \tau)$  topolojik uzayındaki  $A \subset X$  kümesinin yığılma noktaları kümesi
- $\text{yoğ}(A)$  :  $(X, \tau)$  topolojik uzayındaki  $A \subset X$  kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi

## 1.GİRİŞ

Lokal fonksiyon kavramı ilk defa 1933 yılında Kuratowski tarafından tanımlandı ve özellikleri incelendi [14]. 1945 yılında Vaidyanathaswamy [29] lokal fonksiyon kavramından yararlanarak yeni bir kapanış işlemi tanımladı ve bu işlemde faydalanarak ideal topolojik uzaylar oluşturdu ve bu topolojinin bir tabanını elde etti. 1964 yılında Hayashi kendi adını verdiği Hayashi uzayını tanımladı. Daha sonra Samuels [28] 1975 yılında idealleri değiştirerek lokal fonksiyonun bazı ideallerde genel topolojide bilinen kapanış noktası, yoğunlaşma noktası, yığılma noktası ve II.kategoriden nokta kavramlarıyla çakıştığını gösterdi. 1990 yılında Jankovic ve Hamlett [13] geçmişte yapılmış tüm bu çalışmalarını inceleyerek ideal topolojilerin temelini oluşturan kapsamlı bir çalışma yaptılar.

Biz bu çalışmada; 2001 yılında Noiri [20] tarafından tanımlanmış strongly  $\theta$ -pre süreklilik fonksiyonları ele aldık ve bu süreklilik çeşidini ideal topolojik uzaylara taşıyarak strongly  $\theta$ -pre-I süreklilik adını verdiğimiz yeni bir süreklilik çeşidi elde ettik. Elde ettiğimiz süreklilik çeşidini bilinen diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık ve daha kuvvetlisi ile daha zayıfını bularak yerini tespit ettik. Karşıt örneklerle de yeni tanımladığımız kavramın daha iyi anlaşılmasını hedefledik. Ayrıca yeni kavramların tanımını vererek strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliğinin bazı özelliklerini elde ettik.

Bu çalışmada  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ve  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı, üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır.  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \nu)$  topolojik uzayları kısaca  $X$  ve  $Y$  ile gösterilecektir.  $(X, \tau)$  veya  $(X, \tau, I)$  uzaylarından alınan herhangi bir  $A$  alt kümesinin içini ve kapanışını sırasıyla  $\text{int}(A)$  ve  $Cl(A)$  ile göstereceğiz. Ayrıca  $(X, \tau, I)$  uzayındaki herhangi bir  $A$  alt kümesinin lokal fonksiyonunu kısaca  $A^*$  olarak ve yıldız kapanışını da  $Cl^*(A)$  olarak göstereceğiz.

## 2. STRONGLY $\theta$ -PRE SÜREKLİ FONKSİYON

$A$  kümesi,  $(X, \tau)$  topolojik uzayının bir alt kümesi olmak üzere eğer  $A \subset \text{int}(cl(A))$  ise  $A$  kümesine **pre-açık** [16] ya da **nearly açık** [25] denir.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyon olmak üzere  $(Y, \nu)$  uzayının her açık  $V$  kümesi için  $f^{-1}(V)$  kümesi  $X$  uzayında pre-açık oluyorsa fonksiyona **pre süreklî fonksiyon** [16] denir. Pre-süreklilik kavramı Ptak [25] tarafından near-süreklilik, Frolik [9] ve Husain [11] tarafından almost-süreklilik olarak adlandırılmıştır. Jankovic [12] almost weak sürekliliği pre-sürekliliğin zayıf bir hali olarak tanımlamıştır. Popa ve Noiri [24] weak-pre-sürekliliği tanımlamış ve almost weak sürekliliğin weak pre-sürekliliğe denk olduğunu göstermişlerdir. Bu bölümde [20] de verilen, pre sürekliliğin daha kuvvetli bir çeşidi olan, strongly  $\theta$ -pre süreklî fonksiyonları ele alacağız.

### 2.1. Ön Bilgiler

$(X, \tau)$  topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun. Eğer  $A \subset \text{int}(Cl(A))$  ( $A \subset Cl(\text{int}(A))$ ) ise  $A$  kümesine **pre-açık** [16], (**semi-açık** [15]) denir. Pre-açık bir kümenin tümleyeni pre-kapalıdır.  $A$  kümesini içeren tüm pre-kapalı kümelerin kesişimi  $A$  kümesinin pre-kapanışı olarak adlandırılır ve  $pCl(A)$  ile gösterilir [8].  $A$  kümesinin pre-içi,  $A$  kümesinde kapsanan tüm pre-açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanır ve  $pInt(A)$  ile gösterilir.  $(X, \tau)$  uzayının tüm pre-açık kümelerinin ailesi  $PO(X)$  ile gösterilir.  $PO(X, x) = \{ U : x \in U \text{ ve } U \in PO(X) \}$  ile tanımlanır.  $(X, \tau)$  uzayının bir  $x$  noktasını içeren her  $U$  açık kümesi için,  $Cl(U) \cap A \neq \emptyset$  oluyorsa bu  $x$  noktasına  $A$  kümesinin  **$\theta$ -kapanış noktası** denir [30].  $A$  kümesinin bütün  $\theta$ -kapanış noktalarının kümesi  $A$  kümesinin  $\theta$ -kapanışı olarak adlandırılır ve  $Cl_\theta(A)$  ile gösterilir.  $A = Cl_\theta(A)$  ise küme  $\theta$ -kapalıdır [30].  $\theta$ -kapalı bir kümenin tümleyenine  $\theta$ -açık küme denir.  $(X, \tau)$  uzayının bir  $x$  noktasını alalım, bu noktayı içeren her pre-açık  $U$  kümesi için,  $pCl(U) \cap A \neq \emptyset$  oluyorsa  $x$  noktasına  $A$  kümesinin **pre-**

**$\theta$ -kapanış noktası** denir.  $A$  kümesinin bütün pre- $\theta$ -kapalı noktalarının kümesine  $A$  kümesinin pre- $\theta$ -kapanışı denir ve  $pCl_{\theta}(A)$  ile gösterilir.  $A = pCl_{\theta}(A)$  oluyorsa küme pre- $\theta$ -kapalıdır. Pre- $\theta$ -kapalı kümenin tümleyeni pre- $\theta$ -açık kümedir [22].

**Tanım 2.1.1.**  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon; her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(U) \subset V$  ( $f(U) \subset Cl(V)$ ) olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna **pre süreklili** [16] ya da **almost süreklili** [11] (**weakly pre-süreklili** [24] ya da **almost weakly süreklili** [12]) denir.

**Tanım 2.1.2.**  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon; her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(pCl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna **strongly  $\theta$ -pre-süreklili** ( st. $\theta$ .p.c. ) fonksiyon denir [20].

**Tanım 2.1.3.**  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon, her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(Cl(U)) \subset V$  olacak şekilde  $x$  noktasının açık bir  $U$  komşuluğu varsa  $f$  fonksiyonuna **strongly  $\theta$ -süreklili** fonksiyon [19] denir.

**Uyarı 2.1.1.** Strongly  $\theta$ -pre-süreklilik pre-süreklilikten daha kuvvetli ve strongly  $\theta$ -süreklilikten daha zayıftır. Strongly  $\theta$ -pre-süreklilik ve süreklilik aşağıdaki örneklerde de gösterildiği gibi birbirinden bağımsız kavramlardır [20]:

**Örnek 2.1.1.**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$  ve  $\sigma = \{\emptyset, X, \{c\}\}$  olsun.  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonunu  $f(a) = a$ ,  $f(b) = f(c) = c$  şeklinde tanımlayalım.  $f$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. dir fakat süreklili değildir.

**Örnek 2.1.2.**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ,  $\sigma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$  olsun.  $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$  uzayına tanımlı birim fonksiyonu süreklili fakat  $a$  noktasında st. $\theta$ .p.c. değildir

## 2.2. Karakterizasyon

**Teorem 2.2.1. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler denktir:

- (1)  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. dir;
- (2)  $Y$  uzayının her  $V$  açık kümesi için,  $f^{-1}(V)$  kümesi  $X$  uzayında pre-θ-açıktır;
- (3)  $Y$  uzayının her  $F$  kapalı kümesi için,  $f^{-1}(F)$  kümesi  $X$  uzayında pre-θ-kapalıdır;
- (4)  $X$  uzayının her  $A$  alt kümesi için,  $f(pCl_{\theta}(A)) \subset Cl(f(A))$  dir;
- (5)  $Y$  uzayının her  $B$  alt kümesi için,  $pCl_{\theta}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$  dir.

**İspat (1) $\Rightarrow$ (2) :**  $V$  kümesi  $Y$  uzayının bir açık kümesi olsun.  $x \in f^{-1}(V)$  alınsın.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan,  $f(pCl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Böylece;

$$x \in U \subset pCl(U) \subset f^{-1}(V)$$

dir. O halde  $f^{-1}(V)$  kümesi  $X$  uzayında pre-θ-açık küme olur.

**(2) $\Rightarrow$ (3) :** Tümleme işleminden sonuç açıktır.

**(3) $\Rightarrow$ (4) :**  $A$  kümesi  $X$  uzayının herhangi bir alt kümesi olsun.  $Cl(f(A))$  kümesi  $Y$  uzayında kapalı olduğundan, (3) ifadesi gereği,  $f^{-1}(Cl(f(A)))$  kümesi pre-θ-kapalıdır. O halde;

$$pCl_{\theta}(A) \subset pCl_{\theta}(f^{-1}(f(A))) \subset pCl_{\theta}(f^{-1}(Cl(f(A)))) = f^{-1}(Cl(f(A)))$$

dir. Buradan;  $f(pCl_{\theta}(A)) \subset Cl(f(A))$  olur.

**(4)  $\Rightarrow$  (5) :**  $B$  kümesi  $Y$  uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. (4) ifadesinden  $f(pCl_{\theta}(f^{-1}(B))) \subset Cl(f(f^{-1}(B)))$  dir ve böylece  $pCl_{\theta}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$  sonucu elde edilir.

**(5)  $\Rightarrow$  (1)**  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının herhangi bir açık komşuluğu olsun.  $Y - V$  kümesi  $Y$  uzayında kapalı olduğundan,

$$pCl_{\theta}(f^{-1}(Y-V)) \subset f^{-1}(Cl(Y-V)) = f^{-1}(Y-V)$$

olur. Buradan  $f^{-1}(Y-V)$  kümesi  $X$  uzayında pre- $\theta$ -kapalıdır. Tümlleme işlemine göre,  $f^{-1}(V)$  kümesi de  $x$  noktasını içeren bir pre- $\theta$ -açık küme olur. Pre- $\theta$ -açık küme tanımından,  $pCl(U) \subset f^{-1}(V)$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Her iki tarafın görüntüsü alındığında,  $f(pCl(U)) \subset V$  olur. Bu da  $f$  fonksiyonunun st. $\theta$ .p.c. fonksiyon olduğunu gösterir.

**Teorem 2.2.2. [20]**  $Y$  uzayı bir regular uzay olsun. Bir  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler denktir:

- (1)  $f$  fonksiyonu weakly pre-sürekli;
- (2)  $f$  fonksiyonu pre-sürekli;
- (3)  $f$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. dir.

**İspat (1)  $\Rightarrow$  (2) :**  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren bir açık kümesi olsun.  $Y$  uzayı regular uzay olduğundan,

$$f(x) \in W \subset Cl(W) \subset V$$

olacak şekilde bir  $W$  açık kümesi vardır.  $f$  fonksiyonu weakly-pre-sürekli olduğundan  $f(U) \subset Cl(W)$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan;  $f(U) \subset V$  sonucu çıkar.

**(2)  $\Rightarrow$  (3) :**  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren bir açık kümesi olsun.  $Y$  uzayı regular uzay olduğundan,

$$f(x) \in W \subset Cl(W) \subset V$$

olacak şekilde bir  $W$  açık kümesi vardır.  $f$  fonksiyonu pre-sürekli olduğundan dolayı  $f(U) \subset W$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Şimdi ise  $f(pCl(U)) \subset Cl(W)$  olduğu gösterilecektir.  $y \notin Cl(W)$  olsun. O halde  $G \cap W = \emptyset$  olacak şekilde  $y$  noktasının açık bir  $G$  komşuluğu vardır.  $f$  fonksiyonu pre-sürekli olduğundan,  $f^{-1}(G) \in PO(X)$  ve  $f^{-1}(G) \cap U = \emptyset$  ve  $f^{-1}(G) \cap pCl(U) = \emptyset$

ifadesi elde edilir. O halde,  $G \cap f(pCl(U)) = \emptyset$  olur. Böylece  $y \notin f(pCl(U))$  olur. Sonuç olarak,  $f(pCl(U)) \subset Cl(W) \subset V$  bulunur.

**(3)  $\Rightarrow$  (1) :** Uyarı 2.1.1.gereği açıktır.

**Tanım 2.2.1.** Bir  $X$  uzayı eğer  $F$  pre-kapalı (kapalı) kümesi ve  $x \in X - F$  noktası için,  $x \in U$  ve  $F \subset V$  olacak şekilde  $U$  ve  $V$  gibi iki ayrık pre-açık kümeye sahipse bu uzaya **pre-regular** [22] (**p-regular** [8] ) uzay denir.

**Teorem 2.2.3. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  sürekli fonksiyonunun st.θ.p.c. olması için gerek ve yeter şart  $X$  uzayının p-regular uzay olmasıdır.

**İspat**  $\Rightarrow$  :  $f : X \rightarrow X$  birim fonksiyon olsun. Hipotezden  $f$  sürekli ve st.θ.p.c. bir fonksiyondur.  $X$  uzayının herhangi bir  $U$  açık kümesi ve  $U$  kümesinin herhangi bir  $x$  noktası için,  $f(x) = x \in U$  dur ve  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan  $f(pCl(G)) \subset U$  olacak şekilde  $G \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan  $X$  uzayı p-regular uzay olur. ([8] Teorem 3.2).

$\Leftarrow$  :  $f : X \rightarrow X$  sürekli fonksiyon ve  $X$  uzayı p-regular uzay olsun. Herhangi bir  $x \in X$  noktası ve  $f(x)$  noktasının herhangi bir  $V$  açık komşuluğu için,  $f^{-1}(V)$  kümesi  $X$  uzayının  $x$  noktasını içeren bir açık kümesidir.  $X$  uzayı p-regular uzay olduğundan,  $x \in U \subset pCl(U) \subset f^{-1}(V)$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X)$  kümesi vardır ([8] Teorem 3.2). Buradan  $f(pCl(U)) \subset V$  olur. Böylece  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. dir.

St.θ.p.c. fonksiyon pre-sürekli, karşıtı ise genellikle doğru değildir. Ancak  $X$  uzayına pre-regularlık şartı eklendiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Teorem 2.2.4. [20]**  $X$  uzayı bir pre-regular uzay olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun st.θ.p.c. olması için gerek ve yeter şart  $f$  fonksiyonunun pre-sürekli olmasıdır.

**İspat.**  $\Leftarrow$  :  $f$  fonksiyonu pre-sürekli olsun.  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren bir açık kümesi olsun.  $f$  fonksiyonunun pre-

sürekliği gereği  $f^{-1}(V) \in PO(X, x)$  olur ve  $X$  uzayı pre-regular uzay olduğundan  $pCl(U) \subset f^{-1}(V)$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan  $f(pCl(U)) \subset V$  ifadesini elde ederiz. Böylece  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyondur.

$X$  uzayında her yoğun küme açıksa bu uzaya **submaximal uzay** [27] denir. [27] de “  $X$  uzayının submaximal olması için gerek ve yeter şart  $X$  uzayındaki her pre-açık kümenin açık olmasıdır” olduğu gösterilmiştir.

Strongly  $\theta$ -sürekli fonksiyon st.θ.p.c. dir, karşıtı ise genellikle doğru değildir. Ancak  $X$  uzayına submaximal şartı eklendiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Teorem 2.2.5.** [20]  $X$  uzayı submaximal uzay olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun st.θ.p.c. olması için gerek ve yeter şart  $f$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -sürekli olmasıdır.

**İspat.**  $\Leftarrow$  :  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olsun.  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren bir açık kümesi olsun.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. olduğundan  $f(pCl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır.  $X$  uzayı submaximal uzay olduğundan,  $U$  kümesi açıktır ve  $pCl(U) = Cl(U)$  eşitliği vardır. Buradan  $f(Cl(U)) \subset V$  olur. Bu sonuç  $f$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -sürekli olduğunu gösterir.

### 2.3. Bazı Özellikler

$f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $g : X \rightarrow X \times Y$  fonksiyonu da  $f$  fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. Bilinir ki;  $f$  fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart  $g$  fonksiyonunun sürekli olmasıdır. Fonksiyonun st.θ.p.c. olması durumunda sonuç aşağıdaki biçimdedir:

**Teorem 2.3.1. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $g : X \rightarrow X \times Y$  fonksiyonu da  $f$  fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1)  $g$  fonksiyonu st.θ.p.c. ise  $f$  fonksiyonu da st.θ.p.c. dir ve  $X$  uzayı p-regular uzaydır.
- (2)  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. ve  $X$  uzayı pre-regular uzay ise  $g$  fonksiyonu da st.θ.p.c. dir.

**İspat (1)**  $g$  fonksiyonu st.θ.p.c. olsun. Önce  $f$  fonksiyonunun st.θ.p.c. olduğu gösterilecektir.  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun. O halde  $X \times V$  kümesi  $X \times Y$  uzayının  $g(x)$  noktasını içeren bir açık kümesidir.  $g$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan,  $g(pCl(U)) \subset X \times V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan;  $f(pCl(U)) \subset V$  sonucu elde edilir. Bu sonuç ta  $f$  fonksiyonunun st.θ.p.c. fonksiyon olduğunu gösterir. Şimdi  $X$  uzayının p-regular olduğu gösterilecek.  $U$  kümesi  $X$  uzayının bir açık kümesi ve  $x \in U$  olsun.  $g(x) \in U \times Y$  ve  $U \times Y$  kümesi de  $X \times Y$  uzayında bir açık olduğundan,  $g(pCl(G)) \subset U \times Y$  olacak şekilde bir  $G \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan;  $x \in G \subset pCl(G) \subset U$  ifadesi elde edilir ve bu sonuç  $X$  uzayının p-regular olduğunu gösterir ([8] Teorem 3.2).

(2)  $x \in X$  noktası ve  $W$  kümesi  $X \times Y$  uzayının  $g(x)$  noktasını içeren bir açık kümesi olsun.  $g(x) = (x, f(x)) \in U_1 \times V \subset W$  olacak şekilde  $U_1 \subset X$  ve  $V \subset Y$  açık kümeleri vardır.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. olduğundan,  $f(pCl(U_2)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U_2 \in PO(X, x)$  kümesi vardır.  $U_1 \cap U_2 \in PO(X, x)$  ve  $X$  uzayı pre-

regular uzay olduğundan,  $x \in U \subset pCl(U) \subset U_1 \cap U_2$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır ([22] Lemma 4.2). Buradan

$$g(pCl(U)) \subset U_1 \times V \subset W$$

ifadesi elde edilir. Bu sonuç  $g$  fonksiyonunun st.θ.p.c. olduğunu gösterir.

**Sonuç 2.3.1.** [20]  $X$  uzayı pre-regular uzay olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonsiyonunun st.θ.p.c. olması için gerek ve yeter şart  $g : X \rightarrow X \times Y$  grafik fonksiyonunun st.θ.p.c. olmasıdır.

**Lemma 2.3.1.** [18]  $A$  ve  $X_0$  kümeleri  $X$  uzayının alt kümeleri olsun.

(1)  $A \in PO(X)$  ve  $X_0 \subset X$  kümesi semi-açık ise  $A \cap X_0 \in PO(X)$  dir.

(2)  $A \in PO(X_0)$  ve  $X_0 \in PO(X)$  ise  $A \in PO(X)$  dir.

**Lemma 2.3.2.** [7]  $A$  ve  $X_0$  kümeleri  $X$  uzayının  $A \subset X_0 \subset X$  olacak şekilde alt kümeleri olsun.  $pCl_{X_0}(A)$  simgesi  $A$  kümesinin  $X_0$  alt uzayında pre-kapanışını gösterebilir.

(1)  $X_0$  kümesi  $X$  uzayında semi-açık ise  $pCl_{X_0}(A) \subset pCl(A)$  dir.

(2)  $A \in PO(X_0)$  ve  $X_0 \in PO(X)$  ise  $pCl(A) \subset pCl_{X_0}(A)$  dir.

Sürekli bir fonksiyonun kısıtlanması da sürekli dir. Fonsiyonun st.θ.p.c. olması durumunda sonuç aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.3.2.** [20]  $f : X \rightarrow Y$  st.θ.p.c. fonsiyon ve  $X_0$  kümesi  $X$  uzayının semi- açık bir alt kümesi ise  $f / X_0 : X_0 \rightarrow Y$  kısıtlanmış fonsiyonu da st.θ.p.c. dir.

**İspat.** Herhangi bir  $x \in X_0$  noktası ve  $f(x)$  noktasının bir  $V$  açık komşuluğu için ,  $f$  fonsiyonu st.θ.p.c. fonsiyon olduğundan,  $f(pCl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır.  $U_0 = U \cap X_0$  alınır, Lemma 2.3.1. ve 2.3.2. gereği  $U_0 \in PO(X_0, x)$  ve  $pCl_{X_0}(U_0) \subset pCl(U_0)$  olur. Buradan

$$(f / X_0)(pCl_{X_0}(U_0)) = f(pCl_{X_0}(U_0)) \subset f(pCl(U_0)) \subset f(pCl(U)) \subset V$$

olur. Bu sonuç  $f / X_0$  kısıtlanmış fonksiyonunun st.θ.p.c. olduğunu gösterir.

**Teorem 2.3.3. [20]** Her  $x \in X$  ve  $X_0 \in PO(X, x)$  kümesi için,  $f / X_0 : X_0 \rightarrow Y$  kısıtlanmış fonksiyonu st.θ.p.c. ise  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu da st.θ.p.c. dir.

**İspat.**  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $X_0 \in PO(X, x)$  kümesi için,  $f / X_0 : X_0 \rightarrow Y$  kısıtlanmış fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan;  $(f / X_0)(pCl_{X_0}(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Lemma 2.3.1 ve 2.3.2 den  $U \in PO(X, x)$  ve  $pCl(U) \subset pCl_{X_0}(U)$  dur. Buradan

$$f(pCl(U)) = (f / X_0)(pCl(U)) \subset (f / X_0)(pCl_{X_0}(U)) \subset V$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç  $f$  fonksiyonunun st.θ.p.c. fonksiyon olduğunu gösterir.

St.θ.p.c. fonsiyonun ayrışımalarının bazı özelliklerini elde etmek için aşağıda bazı tanımlar verilmiştir.

**Tanım 2.3.1.**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu verilsin.

- (1) Her  $x \in X$  noktası ve her  $V \in PO(Y, f(x))$  kümesi için,  $f(U) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna pre-irresolute fonksiyon [26] denir.
- (2) Her  $U \in PO(X)$  kümesi için,  $f(U) \in PO(Y)$  ise  $f$  fonksiyonuna M-preaçık fonksiyon [17] denir.

**Lemma 2.3.3. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  pre-irresolute fonksiyon ve  $V$  kümesi  $Y$  uzayının pre-θ-açık kümesi ise  $f^{-1}(V)$  kümesi de  $X$  uzayında pre-θ-açık kümedir.

**İspat**  $x \in f^{-1}(V)$  olsun.  $f(x) \in W \subset pCl(W) \subset V$  olacak şekilde  $W \in PO(Y)$  kümesi vardır.  $f$  fonksiyonu pre-irresolute fonksiyon olduğundan,  $f^{-1}(W) \in PO(X)$  ve  $pCl(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(pCl(W))$  dir. Bu nedenle;

$$x \in f^{-1}(W) \subset pCl(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(V)$$

olur. Bu ise  $f^{-1}(V)$  kümesinin  $X$  uzayında pre- $\theta$ -açık küme olduğunu gösterir.

$f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow Z$  fonksiyonlar olsunlar. Eğer bu iki fonksiyon sürekli ise bileşkeleri de sürekli dir. Fonksiyonlar st. $\theta$ .p.c. olduğunda bileşkeleri bu özelliği sağlamaz. Ancak aşağıdaki özellikler vardır:

**Teorem 2.3.4. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Y \rightarrow Z$  fonksiyonlar olsunlar. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (1)  $f$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyon ve  $g$  fonksiyonu sürekli fonksiyon ise  $g \circ f : X \rightarrow Z$  bileşke fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyondur.
- (2)  $f$  fonksiyonu pre-irresolute fonksiyon ve  $g$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyon ise  $g \circ f$  bileşke fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyondur.
- (3)  $f : X \rightarrow Y$  M-pre-açık ve birebir fonksiyon ve  $g \circ f : X \rightarrow Z$  bileşke fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyon ise  $g$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyondur.

**İspat. (1)** Teorem 2.2.1 den açıktır.

(2) Teorem 2.2.1. ve Lemma 2.3.3. den çıkarılır.

(3)  $W$  kümesi  $Z$  uzayının herhangi bir açık kümesi olsun.  $g \circ f$  bileşke fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyon olduğundan  $(g \circ f)^{-1}(W)$  kümesi  $X$  uzayında pre- $\theta$ -açık kümedir.  $f$  fonksiyonu M-pre-açık ve birebir fonksiyon olduğundan  $f^{-1}$  fonksiyonu pre-irresolute fonksiyondur. Lemma 2.3.3. gereği ;

$$g^{-1}(W) = f((g \circ f)^{-1}(W))$$

fonksiyonu  $Y$  uzayında pre- $\theta$ -açık kümedir. Teorem 2.2.1. gereği  $g$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. fonksiyon olur.

$\{X_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  topolojik uzayların bir ailesi, her  $\alpha \in \Delta$  için  $A_\alpha$  ailesi  $X_\alpha$  uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun ve  $\Delta$  boştan farklı olmak üzere  $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  ailesi çarpım uzayını gösterebilir.

**Lemma 2.3.4. [8]**  $n$  pozitif bir tamsayı ve  $A = \Pi_{j=1}^n A_{\alpha_j} \times \Pi_{\alpha \neq \alpha_j} X_\alpha$  olsun.

(1)  $A \in PO(X)$  olması için gerek ve yeter şart  $\forall j = 1, 2, \dots, n$  için,  $A_{\alpha_j} \in PO(X_{\alpha_j})$  olmasıdır.

(2)  $pCl(\Pi_{\alpha \in \Delta} A_\alpha) \subset \Pi_{\alpha \in \Delta} pCl(A_\alpha)$  dir.

**Teorem 2.3.5. [20]** Her  $\alpha \in \Delta$  için,  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  fonksiyonu st.θ.p.c. ise her  $x = \{x_\alpha\}$  noktası için,  $f(\{x_\alpha\}) = \{f_\alpha(x_\alpha)\}$  ile tanımlanmış  $f : \Pi X_\alpha \rightarrow \Pi Y_\alpha$  çarpım fonksiyonu da st.θ.p.c. fonksiyondur.

**İspat.**  $x = \{x_\alpha\} \in \Pi X_\alpha$  noktası ve  $W$  kümesi  $\Pi Y_\alpha$  uzayının bir açık kümesi olsun. O halde;

$$f(x) = \{f_\alpha(x_\alpha)\} \in \Pi_{j=1}^n V_{\alpha_j} \times \Pi_{\alpha \neq \alpha_j} Y_\alpha \subset W$$

olacak şekilde  $Y_{\alpha_j}$  uzayının bir  $V_{\alpha_j}$  açık kümesi vardır. Her  $\alpha$  noktası için  $f_\alpha$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan  $j = 1, 2, \dots, n$  için,  $f_{\alpha_j}(pCl(U_{\alpha_j})) \subset V_{\alpha_j}$  olacak şekilde bir  $U_{\alpha_j} \in PO(X_{\alpha_j}, x_{\alpha_j})$  kümesi vardır. Şimdi  $U = \Pi_{j=1}^n U_{\alpha_j} \times \Pi_{\alpha \neq \alpha_j} X_\alpha$  alalım. Lemma 2.3.4. ten  $U \in PO(\Pi X_\alpha, x)$  olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f(pCl(U)) &\subset f\left(\Pi_{j=1}^n pCl(U_{\alpha_j}) \times \Pi_{\alpha \neq \alpha_j} X_\alpha\right) \\ &\subset \Pi_{j=1}^n f_{\alpha_j}\left(pCl(U_{\alpha_j})\right) \times \Pi_{\alpha \neq \alpha_j} Y_\alpha \\ &\subset \Pi_{j=1}^n V_{\alpha_j} \times \Pi_{\alpha \neq \alpha_j} Y_\alpha \subset W \end{aligned}$$

dir. Buradan  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyondur.

#### 2.4. St.θ.p.c. Fonksiyonlar ve Ayırma Aksiyomları

**Tanım 2.4.1.**  $X$  uzayının birbirinden farklı her  $x$  ve  $y$  nokta çifti için,  $U \cap V = \emptyset$  ( $pCl(U) \cap pCl(V) = \emptyset$ ) olacak şekilde  $U \in PO(X, x)$  ve  $V \in PO(X, y)$  kümeleri varsa  $X$  uzayına  $pre-T_2$  ( $pre-Uryshon$ ) uzay [21] denir.

$f : X \rightarrow Y$  sürekli, birebir fonksiyon ve  $Y$  uzayı Hausdorff uzayı ise  $X$  uzayı da Hausdorff uzayıdır. Fonksiyon st.θ.p.c. ise aşağıdaki durum vardır:

**Teorem 2.4.1. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu birebir ve st.θ.p.c. fonksiyon ve  $Y$  uzayı  $T_0$  (Hausdorff) uzayı ise  $X$  uzayı  $pre-T_2$  (pre-Urysohn) uzayıdır.

**İspat. (1)**  $x, y$  noktaları  $X$  uzayında farklı noktalar olsunlar.  $f$  birebir fonksiyon olduğundan  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı  $T_0$ -uzay olduğundan ya  $f(x)$  noktasının  $f(y)$  noktasını içermeyen bir  $V$  açık komşuluğu ya da  $f(y)$  noktasının  $f(x)$  noktasını içermeyen bir  $W$  açık komşuluğu vardır. Eğer birinci durum varsa  $f(pCl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır ve  $y \notin f(pCl(U))$  dur. Böylece  $X - pCl(U) \in PO(X, y)$  olur. İkinci durumda da aynı işlemler yapılarak benzer bir sonuç elde edilir. Bu sonuçtan da  $X$  uzayının  $pre-T_2$  uzayı olduğu anlaşılır.

**(2)**  $x, y$  noktaları  $X$  uzayında farklı noktalar olsunlar.  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı Hausdorff uzayı olduğundan sırasıyla  $f(x)$  noktasını ve  $f(y)$  noktasını içeren ayrık, açık  $V$  ve  $W$  kümeleri vardır.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan, sırasıyla  $x, y$  noktalarını içeren  $f(pCl(G)) \subset V$  ve  $f(pCl(H)) \subset W$  olacak şekilde pre-açık  $G$  ve  $H$  kümeleri vardır. Buradan;  $pCl(G) \cap pCl(H) = \emptyset$  olur. Bu sonuçta  $X$  uzayının pre-Urysohn olduğunu gösterir.

Biliyoruz ki;  $f : X \rightarrow Y$  sürekli fonksiyon ve  $Y$  uzayı Hausdorff uzay ise  $A = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$  alt kümesi  $X \times X$  uzayında kapalıdır. Fonksiyon st.θ.p.c. olduğunda ise durum aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.4.2. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  st.θ.p.c. fonksiyon ve  $Y$  uzayı Hausdorff ise  $A = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$  alt kümesi  $X \times X$  uzayında pre-θ-kapalıdır.

**İspat.**  $(x, y) \notin A$  olsun. O halde  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı Hausdorff uzay olduğundan,  $Y$  uzayında sırasıyla  $f(x)$  ve  $f(y)$  noktalarını içeren ayrık, açık  $V$  ve  $W$  kümeleri vardır.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan  $f(pCl(U)) \subset V$  ve  $f(pCl(G)) \subset W$  olacak şekilde  $U \in PO(X, x)$  ve  $G \in PO(X, y)$  kümeleri vardır.  $D = U \times G$  alınırsa ;

$$(x, y) \in D \in PO(X \times X, x, y) \text{ ve } pCl(U \times G) \cap A \subset [pCl(U) \times pCl(G)] \cap A = \emptyset$$

olur. Sonuç olarak  $A$  kümesi  $X \times X$  uzayında pre-θ-kapalıdır.

$f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu için,  $X \times Y$  uzayının  $\{(x, f(x)) : x \in X\}$  alt kümesi  $f$  fonksiyonunun grafiği olarak adlandırılır ve  $G(f)$  ile gösterilir. Her  $(x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  için,  $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$  olacak şekilde  $X$  ve  $Y$  uzayında  $x, y$  noktalarını içeren sırasıyla  $U, V$  açık kümeleri varsa  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun  $G(f)$  grafiğine kapalı grafik denir.

**Tanım 2.4.2. [20]** Her  $(x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  için,  $(pCl(U) \times V) \cap G(f) = \emptyset$  olacak şekilde  $U \in PO(X, x)$  ve  $Y$  uzayında  $y$  noktasını içeren bir  $V$  açık kümesi varsa,  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun  $G(f)$  grafiğine strongly pre-kapalı grafik denir.

**Lemma 2.4.1. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun  $G(f)$  grafiğinin  $X \times Y$  uzayında strongly pre-kapalı olması için gerek ve yeter şart her

$(x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  için,  $f(pCl(U)) \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $U \in PO(X, x)$  ve  $Y$  uzayında  $y$  noktasını içeren bir  $V$  açık kümesinin olmasıdır.

$f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu sürekli fonksiyon ve  $Y$  uzayı Hausdorff uzayı ise  $G(f)$  grafiğinin  $X \times Y$  uzayında kapalı olduğunu biliyoruz. Fonksiyon st.θ.p.c. fonksiyon olduğunda ise durum aşağıdaki gibidir.

**Teorem 2.4.3. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon ve  $Y$  uzayı Hausdorff uzayı ise  $G(f)$  grafiği  $X \times Y$  uzayında strongly pre-kapalıdır.

**İspat.**  $(x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  olsun. Buradan;  $f(x) \neq y$  dir.  $Y$  uzayı Hausdorff olduğundan  $Y$  uzayında sırasıyla  $f(x)$  ve  $f(y)$  noktalarını içeren ayrık, açık  $V$  ve  $W$  kümeleri vardır.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. fonksiyon olduğundan  $f(pCl(U)) \subset V$  olacak şekilde  $U \in PO(X, x)$  kümesi vardır. Bu nedenle  $f(pCl(U)) \cap W = \emptyset$  ve  $G(f)$  grafiği  $X \times Y$  uzayında strongly pre-kapalıdır.

## 2. 5. Korunan özellikler

### Tanım 2.5.1.

(1)  $X$  uzayının her pre-açık örtüsünün pre-kapanışlarının,  $X$  uzayını örten, sonlu ( sayılabilir ) bir alt örtüsü varsa uzaya **p-kapalı** [7] ( **p-Lindelöf**) **uzay** [20] denir.

(2)  $X$  uzayının her sayılabilir pre-açık örtüsünün pre kapanışlarının,  $X$  uzayını örten, sonlu bir alt örtüsü varsa uzaya **sayılabilir p-kapalı uzay** denir [20].

$K \subset X$  olsun.  $X$  uzayının pre-açık kümeleriyle örtülmüş  $K$  kümesinin her  $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  örtüsü için,  $K \subset \cup \{pCl(V_\alpha) : \alpha \in \Delta_*\}$  olacak şekilde  $\Delta$  ailesinin sonlu bir  $\Delta_*$  alt ailesi varsa  $K$  alt kümesine,  $X$  uzayına göre, **p-kapalıdır** [7] denir.

Biliniz ki;  $f : X \rightarrow Y$  sürekli fonksiyon ve  $X$  uzayı kompakt ise  $f(X)$  kümesi de  $Y$  uzayında kompakt bir kümedir. Yani kompaktlık süreklilikle korunan bir özelliktir. Fonksiyon st.θ.p.c. fonksiyon olduğunda ise durum aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.5.1. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  st.θ.p.c. fonksiyon ve  $K$  kümesi,  $X$  uzayına göre, p-kapalı ise  $f(K)$  kümesi de  $Y$  uzayının bir kompakt kümesidir.

**İspat.**  $f : X \rightarrow Y$  st.θ.p.c. fonksiyon ve  $K$  kümesi,  $X$  uzayına göre, p-kapalı olsun.  $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  ailesi  $f(K)$  kümesinin açık bir örtüsü olsun. Her  $x \in K$  noktası için,  $f(x) \in V_{\alpha(x)}$  olacak şekilde  $\alpha(x) \in \Delta$  noktası vardır.  $f$  fonksiyonu st.θ.p.c. olduğundan  $f(pCl(U_x)) \subset V_{\alpha(x)}$  olacak şekilde  $U_x \in PO(X, x)$  kümesi vardır.  $\{U_x : x \in K\}$  ailesi,  $K$  kümesinin,  $X$  uzayının pre-açık kümelerinden oluşmuş bir örtüsüdür ve böylece  $K \subset \cup_{x \in K_*} pCl(U_x)$  olacak şekilde  $K$  kümesinin sonlu bir  $K_*$  alt kümesi vardır. Bu sonuç  $f(K)$  kümesinin kompakt olduğunu gösterir.

**Sonuç 2.5.1. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  st.θ.p.c. ve örten fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1)  $X$  uzayı p-kapalı ise  $Y$  uzayı kompaktır.

- (2)  $X$  uzayı p-Lindelöf uzayı ise  $Y$  uzayı Lindelöf uzayıdır.  
 (3)  $X$  uzayı sayılabilir p-kapalı uzay ise  $Y$  uzayı sayılabilir kompaktır.

**Teorem 2.5.2. [20]**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun strongly pre-kapalı bir grafiği varsa  $X$  uzayına göre p-kapalı olan her  $K$  alt kümesi için  $f(K)$  kümesi de  $Y$  uzayında kapalıdır.

**İspat.**  $K$  kümesi,  $X$  uzayına göre, p-kapalı ve  $y \in Y - f(K)$  olsun. O halde her  $x \in K$  için,  $(x, y) \notin G(f)$  olur. Lemma 2.4.1. gereğince,  $f(pCl(U_x)) \cap V_x = \phi$  olacak şekilde  $U_x \in PO(X, x)$  kümesi ve  $Y$  uzayının  $y$  noktasını içeren açık bir  $V_x$  kümesi vardır.  $\{U_x : x \in K\}$  ailesi  $K$  kümesinin  $X$  uzayındaki pre-açık kümelerden oluşmuş bir örtüsüdür.  $K$  kümesi,  $X$  uzayına göre, p-kapalı olduğundan  $K \subset \bigcup_{x \in K_*} pCl(U_x)$  olacak şekilde  $K$  kümesinin sonlu bir  $K_*$  alt kümesi vardır.  $V = \{V_x : x \in K_*\}$  alınır;  $V$  kümesi  $y$  noktasının açık bir komşuluğu olur ve

$$f(K) \cap V \subset \left[ \bigcup_{x \in K_*} f(pCl(U_x)) \right] \cap V \subset \bigcup_{x \in K_*} \left[ f(pCl(U_x)) \cap V_x \right] = \phi$$

dır. Bu nedenle  $y \notin Cl(f(K))$  dir. Böylece  $f(K)$  kümesi  $Y$  uzayında kapalıdır.

**Teorem 2.5.3. [20]**  $X$  uzayı submaximal uzay olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun strongly pre-kapalı bir grafiği varsa  $Y$  uzayının her kompakt  $K$  kümesi için  $f^{-1}(K)$  kümesi  $X$  uzayında  $\theta$ -kapalıdır.

**İspat.**  $K$  kümesi  $Y$  uzayının kompakt bir kümesi ve  $x \notin f^{-1}(K)$  olsun. O halde her  $y \in K$  noktası için  $(x, y) \notin G(f)$  olur. Lemma 2.4.1. gereğince,  $f(pCl(U_y)) \cap V_y = \phi$  olacak şekilde  $U_y \in PO(X, x)$  kümesi ve  $Y$  uzayının  $y$  noktasını içeren açık bir  $V_y$  kümesi vardır.  $\{V_y : y \in K\}$  ailesi  $K$  kümesinin bir açık örtüsüdür ve  $K$  kümesi kompakt olduğundan,  $K \subset \bigcup_{y \in K_*} V_y$  olacak şekilde  $K$  kümesinin sonlu bir  $K_*$  alt kümesi vardır.  $X$  uzayı submaximal uzay olduğundan,  $X$  uzayındaki her  $U_y$  kümesi açıktır ve  $pCl(U_y) = Cl(U_y)$  dir.  $U = \bigcap_{y \in K_*} U_y$  alınır;  $U$  kümesi  $x$  noktasının açık bir komşuluğu olur ve

$$f(Cl(U)) \cap K \subset \cup_{y \in K_*} [f(Cl(U)) \cap V_y] \subset \cup_{y \in K_*} [f(pCl(U_y)) \cap V_y] = \phi$$

dır. Bu nedenle  $Cl(U) \cap f^{-1}(K) = \phi$  bulunur. Böylece  $x \notin Cl_\theta(f^{-1}(K))$  sonucu elde edilir. Bu sonuçta  $f^{-1}(K)$  kümesinin  $X$  uzayında  $\theta$ -kapalı olduğunu gösterir.

**Sonuç 2.5.2. [20]**  $X$  uzayı bir submaximal uzay ve  $Y$  uzayı kompakt Hausdorff uzayı olsun.  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir:

- (1)  $f$  fonksiyonu st. $\theta$ .p.c. dir;
- (2)  $G(f)$  grafiği  $X \times Y$  uzayında strongly pre-kapalıdır;
- (3)  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -süreklidir;
- (4)  $f$  fonksiyonu süreklidir;
- (5)  $f$  fonksiyonu pre-süreklidir;
- (6)  $f$  fonksiyonu weakly pre-süreklidir.

### 3. İDEAL TOPOLOJİK UZAY

Bu bölümü iki başlık altında inceleyeceğiz.

İlk bölümde ideal topolojik uzaylardaki temel tanımlar ve kavramları vereceğiz.

İkinci bölümde ise ideal topolojik uzaylarda çok kullandığımız lokal fonksiyon kavramının tanımı ve bu fonksiyondan faydalanarak elde edilen bazı özellikleri vereceğiz. Yine lokal fonksiyon yardımıyla Kuratowski kapanış işleminin tanımını ve bulunan özelliklerini vereceğiz. Bu sayede tezimizin son kısmında kullanacağımız kavramları bu bölümde ayrıntılı bir şekilde incelemiş olacağız

#### 3.1. Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.1 [14].** Boş olmayan bir  $X$  kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir  $I \subset P(X)$  ailesi verilsin. Eğer  $I$  ailesi,

(i) Her  $A, B \in I$  kümeleri için,  $A \cup B \in I$  (sonlu toplamsallık)

(ii) Her  $A \in I$  kümesi ve  $B \subseteq A$  alt kümesi için,  $B \in I$  (kalıtımsallık)

özelliklerini sağlarsa bu taktirde,  $I$  ailesine  $X$  kümesi üzerinde bir ideal denir.

**Tanım 3.1.2 [14].**  $P(X)$  kümesi,  $X$  kümesinin güç kümesi olmak üzere,  $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu,

(i)  $\alpha(\emptyset) = \emptyset$

(ii)  $A \in P(X) \Rightarrow A \subseteq \alpha(A)$

(iii)  $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

(iv)  $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartlarını sağlarsa bu taktirde,  $\alpha$  küme fonksiyonuna **Kuratowski kapanış işlemi** denir.  $K = \{A \in P(X) : A = \alpha(A)\}$  ailesine,  $X$  kümesi üzerindeki topolojiye göre **kapalılar ailesi** denir.

**Uyarı 3.1.1 [13].**  $P(X)$  kümesi,  $X$  kümesinin güç kümesi olmak üzere,  $d : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu,

$$(i) \quad d(\phi) = \phi$$

$$(ii) \quad A \subset d(A)$$

$$(iii) \quad d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$$

$$(iv) \quad d(d(A)) \subseteq d(A)$$

şartlarını sağlasın.

Bu taktirde,  $\alpha(A) = A \cup d(A)$  şeklinde tanımlanan  $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu,  $P(X)$  güç kümesi üzerinde bir Kuratowski kapanış işlemidir.

**İspat.** (i)  $\alpha(A) = A \cup d(A)$  ifadesinde  $A = \phi$  alırsak  $\alpha(\phi) = \phi \cup d(\phi)$  olur. Uyarı 3.1.1 (i) den,  $d(\phi) = \phi$  olup  $\alpha(\phi) = \phi$  bulunur.

(ii) Herhangi bir  $A \in P(X)$  alt kümesi için,  $\alpha$  küme fonksiyonu tanımından  $\alpha(A) = A \cup d(A)$  bağıntısı bulunur. Birleşim işlemi gereği,  $A \subset A \cup d(A) = \alpha(A)$  ifadesi elde edilir. Böylece  $A \subset \alpha(A)$  olur.

(iii) Herhangi bir  $A, B \in P(X)$  alt kümeleri için,  $\alpha$  küme fonksiyonu tanımı ve Uyarı 3.1.1 (ii) gereği,  
$$\alpha(A \cup B) = (A \cup B) \cup d(A \cup B) = (A \cup B) \cup (d(A) \cup d(B)) = (A \cup d(A)) \cup (B \cup d(B)) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$$

ifadesi bulunur. Böylece  $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$  sonucunu elde ederiz.

(iv) Herhangi bir  $A \in P(X)$  alt kümesi için,  $\alpha$  küme fonksiyonu tanımından  $\alpha(A) = A \cup d(A)$  olur. Buradan 3.1.1. (iii) ifadesi gereğince,

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A \cup d(A)) = \alpha(A) \cup \alpha(d(A)) = (A \cup d(A)) \cup (d(A) \cup d(d(A)))$$

bağıntısı bulunur. Uyarı 3.1.1 (iii) ifadesinden,  $d(d(A)) \subseteq d(A)$  olur. Böylece  $\alpha(\alpha(A)) = A \cup d(A) = \alpha(A)$  olduğu görülür.

Sonuç olarak,  $\alpha : P(X) \rightarrow P(X)$  küme fonksiyonu Tanım 3.1.2' de verilen Kuratowski kapanış işlemi şartlarını sağlar.

**Tanım 3.1.3 [5].**  $X$  kümesi üzerinde  $\varphi = \{\emptyset, X\}$  şeklinde tanımlanan  $\tau$  topolojisine **ayrık olmayan topoloji**,  $(X, \varphi)$  ikilisine de **ayrık olmayan uzay** denir.

**Tanım 3.1.4 [5].**  $X$  kümesi üzerinde tanımlanan  $P(X)$  topolojisine **ayrık topoloji**,  $(X, P(X))$  ikisine de **ayrık uzay** denir.

**Tanım 3.1.5 [14].**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subseteq X$  alt kümesi ve  $x \in X$  noktası verilsin. Her  $V \in \mathcal{U}_{(x)}$  komşuluğu için,  $A \cap V \neq \emptyset$  ise,  $x \in X$  noktasına  $A$  **kümesinin bir kapanış noktası** denir.

**Tanım 3.1.6 [14].**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subseteq X$  alt kümesi ve  $x \in X$  noktası verilsin. Her  $V \in \mathcal{U}_{(x)}$  komşuluğu için,  $A \cap V$  kümesinde sayılamayan sonsuz sayıda eleman varsa,  $x \in X$  noktasına  $A$  **kümesinin bir yoğunlaşma noktası** denir.

**Tanım 3.1.7 [14].**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subseteq X$  alt kümesi ve bir  $x \in X$  noktası verilsin. Her  $V \in \mathcal{U}_{(x)}$  komşuluğu için,  $A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$  ise,  $x \in X$  noktasına  $A$  **kümesinin bir yığılma noktası** denir.

### 3.2. Lokal Fonksiyon

**Tanım 3.2.1 [14].**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ve bir  $A \subseteq X$  alt kümesi verilsin.  $I$  ailesi  $X$  kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu taktirde,

$$A^*(I, \tau) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin I\}$$

**kümesine**  $A$  kümesinin  $I$  idealine ve  $\tau$  topolojisine bağlı **lokal fonksiyonu** denir.  $A^*(I, \tau)$  gösterimi için [13]' de gösterildiği gibi  $A^*(I)$  veya kısaca  $A^*$  sembolü kullanılır ve buna  $A$  kümesinin lokal fonksiyonu denir.

$X = \phi$  bir küme olmak üzere  $X$  kümesindeki en basit idealler minimal ideal ( $I = \phi$ ) ve maksimal ideal ( $I = P(X)$ ) olup  $A^*$  kümesi bu ideallere göre [13]' de aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$A^*(\{\phi\}, \tau) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin \phi\}$$

$$= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \neq \phi\}$$

$$= Cl(A)$$

Buradan,

$$A^*(\{\phi\}, \tau) = Cl(A)$$

sonucu elde edilir.

$$A^*(P(X), \tau) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin P(X)\} = \phi$$

Buradan,

$$A^*(P(X), \tau) = \emptyset$$

sonucu elde edilir.

$(X, \tau)$  uzayında  $I_f$  (sonlu alt kümeler ideali),  $I_c$  (sayılabilir alt kümeler ideali) idealleri için [13]' de  $A^*$  kümesi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} A^*(I_f, \tau) &= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \notin I_f\} \\ &= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \text{ kümesi sonsuz}\} \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(I_f, \tau) = \tilde{A}$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned} A^*(I_c, \tau) &= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \notin I_c\} \\ &= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \text{ kümesi sayılamaz}\} \\ &= \text{yoğ}(A) \end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(I_c, \tau) = \text{yoğ}(A)$$

sonucu elde edilir.

[28]' de,  $A$  kümesinin  $A^*(I, \tau)$  lokal fonksiyonunun,  $A$  kümesinin kapanış noktası, yığılma noktası ve kapanış noktasının bir genelleştirilmesi olduğu verilmiştir.

**Teorem 3.2.1 [13].**  $(X, \tau)$  uzayı,  $X$  kümesi üzerinde  $I_1, I_2$  idealleri ile birlikte verilen bir topolojik uzay ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Bu takdirde,

$$(a) \quad A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$$

$$(b) \quad I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow A^*(I_2) \subseteq A^*(I_1)$$

(c)  $A^* = Cl(A^*) \subseteq Cl(A)$  ( $A^*$  kümesi kapalı bir kümedir)

(d)  $(A^*)^* \subseteq A^*$

(e)  $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

(f)  $(A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$

(g)  $(A^* - B^*) = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$

(i)  $U \in \tau \Rightarrow U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$

(k)  $S \in I \Rightarrow (A \cup S)^* = A^* = (A - S)^*$

**İspat. (a)**  $x \in A^*$  noktası olsun. O halde Tanım 3.2.1 den her  $U \in G_{(x)}$  açık komşuluğu için,  $A \cap U \notin I$  dir.  $A \subset B$  ise,  $A \cap U \subset B \cap U$  olur. Eğer  $B \cap U \in I$  olsaydı  $I$  idealinin kalıtımsallık özelliğinden,  $A \cap U \in I$  olurdu. Bu da, bir çelişki yaratır. O halde her  $U \in G_{(x)}$  açık komşuluğu için,  $B \cap U \notin I$  dir. Buradan Tanım 3.2.1 gereği,  $x \in B^*$  olur. Böylece alt küme tanımı gereği  $A^* \subset B^*$  bağıntısı bulunur.

(b)  $I_1 \subseteq I_2$  ise  $I_2' \subseteq I_1'$  olur. ....(1)

$$A^*(I_2) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin I_2\}$$

$$A^*(I_2) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \in I_2'\} \dots\dots\dots (2)$$

(1), (2) ifadeleri ve Tanım 3.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} A^*(I_2) &= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \in I_1'\} \\ &= \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin I_1\} \\ &= A^*(I_1) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan,

$$A^*(I_2) \subseteq A^*(I_1)$$

olduğu görülür.

(c) Öncelikle  $A^* = Cl(A^*)$  eşitliğini gösterelim. Her  $A \subset X$  alt kümesi için,  $A \subset Cl(A)$  olduğunu biliyoruz. Bu sonuç  $A$  kümesinin lokal fonksiyonu içinde sağlanacağından;

$$A^* \subseteq Cl(A^*) \dots\dots\dots (3)$$

bağıntısını elde ederiz.  $A^*(\{\phi\}, \tau) = Cl(A)$ ,  $A^*(P(X), \tau) = \phi$  olduğu [13]' de gösterilmiştir. Teorem 3.2.1 (b) den görülür ki kümenin lokal fonksiyonu en büyük değerini  $I = \{\phi\}$  minimal ideali için, en küçük değerini de  $I = P(X)$  maksimal ideali için alır. O halde  $(X, \tau)$  uzayındaki her  $I$  ideali için  $\phi \subseteq I \subseteq P(X)$  ifadesi sağlandığından,

$$\phi \subseteq A^*(I, \tau) \subseteq Cl(A) \dots\dots\dots(4)$$

olur.

Şimdi de  $Cl(A^*) \subset A^*$  olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $x \in Cl(A^*)$  noktasını alalım. Varsayalım ki  $x \notin A^*$  olsun.  $Cl(A^*) = \bigcap \{ F \subset X : F \text{ kapalı küme ve } A^* \subset F \}$  ifadesinden ve  $x \in Cl(A^*)$  olduğundan  $A^* \subset F$  olan her  $F$  kapalı kümesi için,  $x \in F$  olur.  $A^* \subset F$  ve  $F$  kapalı küme ise  $X - F \subset X - A^*$  olup  $X - F$  açık kümedir. Buradan  $X - F \cap A^* = \phi$  bulunur.  $x \notin A^*$  ifadesinden  $x \in (X - A^*)$  elde edilir ve  $x \in F$  olduğundan  $F \cap (X - A^*) \neq \phi$  olur.

$X - F \cap A^* = \phi$  ve  $F \cap (X - A^*) \neq \phi$  olması  $F \subset A^*$  olduğunu gösterir. Bu ise bir çelişkidir. O halde,

$$Cl(A^*) \subset A^* \dots\dots\dots (5)$$

bulunur.

(3), (4) ve (5) ifadelerinden  $A^* = Cl(A^*) \subseteq Cl(A)$  bağıntısı elde edilir.

(d) Herhangi bir  $x \in (A^*(I))^*(I)$  noktasını alalım. Varsayalım ki  $x \notin A^*(I)$  olsun. Tanım 3.2.1 gereğince,  $x \in (A^*(I))^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)} \text{ için, } (U \cap A^*) \notin I\}$  olur. Her  $U \in G_{(x)}$  açık komşuluğu için,  $(U \cap A^*) \notin I$  ifadesi ve idealin kalıtımsallık özelliği gereğince,  $(U \cap A^*) \neq \emptyset$  olduğu bulunur. Kapanış noktası tanımından  $x \in Cl(A^*)$  elde edilir. (e) şıkkı gereğince,  $Cl(A^*) = A^*$  olması  $x \in A^*$  olduğunu gösterir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde  $x \in (A^*)^*$  noktası için,  $x \in A^*$  olduğundan  $(A^*)^* \subseteq A^*$  bağıntısı elde edilir.

(e) Tanım 3.2.1 gereğince A ve B kümelerinin lokal fonksiyonları,

$$A^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \notin I\} \dots\dots\dots (6)$$

$$B^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap B \notin I\} \dots\dots\dots (7)$$

olur.

(6) ve (7) ifadelerinde birleşim işlemi alırsak,

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U \cap A \notin I \quad \text{veya} \quad U \cap B \notin I\}$$

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [(U \cap A) \cup (U \cap B)] \notin I\}$$

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [U \cap (A \cup B)] \notin I\}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1'den,

$$A^*(I) \cup B^*(I) = (A \cup B)^*(I)$$

bulunur.

(f)  $(A \cap B)^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad [U \cap (A \cap B)] \notin I\}$

$$(A \cap B)^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, [(A \cap U) \cap (B \cap U)] \notin I\}$$

$$(A \cap B)^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, [(A \cap U) \notin I \text{ ve } (B \cap U) \notin I]\} \dots \dots \dots (8)$$

(8) ifadesi gereği,

$$(A \cap B)^*(I) \subseteq \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, (A \cap U) \notin I\} \dots \dots \dots (9)$$

$$(A \cap B)^*(I) \subseteq \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, (B \cap U) \notin I\} \dots \dots \dots (10)$$

elde edilir. (9) ve (10) ifadelerinin kesişimlerini alırsak,

$$(A \cap B)^*(I) \subseteq A^*(I) \cap B^*(I)$$

olduğu bulunur.

(g)  $A \cup B = (A - B) \cup B$  eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte (\*) işlemi uygulanırsa, Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup B)^* = [(A - B) \cup B]^* = (A - B)^* \cup B^*$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının  $B^{*t}$  kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$(A \cup B)^* \cap B^{*t} = [(A - B)^* \cup B^*] \cap B^{*t}$$

$$(A^* \cup B^*) \cap B^{*t} = [(A - B)^* \cup B^*] \cap B^{*t}$$

$$(A^* \cup B^{*t}) \cap (B^* \cap B^{*t}) = [(A - B)^* \cap B^{*t}] \cup (B^* \cap B^{*t})$$

olur.  $B^* \cap B^{*t} = \emptyset$  olduğundan,

$$A^* \cap B^{*t} = (A - B)^* \cap B^{*t}$$

eşitliği elde edilir. Fark işlemi tanımı gereği,  $A^* - B^* = (A - B)^* - B^*$  eşitliği yazılır.

Bu son eşitlikten

$$A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$$

bulunur.

(h) Herhangi bir  $x \in U \cap A^*$  noktasını alalım. Kesişim işlemi tanımından  $x \in U$  ve  $x \in A^*$  dır. Tanım 3.2.1 gereği her  $V \in G_{(x)}$  açık komşuluğu için,  $V \cap A \notin I$  olur.  $x \in U$  ve  $U \in \tau$  olduğundan komşuluk tanımı gereği  $U \in G_{(x)}$  olur. Bir noktanın komşuları kesişimi yine o noktanın komşuluğu olduğundan  $V \cap U \in G_{(x)}$  olur.  $x \in A^*$  olup,  $[(V \cap U) \cap A] = [V \cap (U \cap A)] \notin I$  ifadesi elde edilir. Tanım 3.2.1 gereği,  $x \in (U \cap A)^*$  bulunur.  $x \in U \cap A^*$  noktası için,  $x \in (U \cap A)^*$  olduğundan

$$U \cap A^* \subseteq (U \cap A)^* \dots\dots\dots (11)$$

bulunur. (11) ifadesinde her iki tarafın U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A^*)] \subseteq [U \cap (U \cap A)^*]$$

$$(U \cap A^*) \subseteq [U \cap (U \cap A)^*] \dots\dots\dots (12)$$

$U \cap A \subseteq A$  bağıntısı ve Teorem 3.2.1 (a) gereğince;

$$(U \cap A)^* \subseteq A^* \dots\dots\dots (13)$$

olur. (13) ifadesinin her iki tarafının U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A)^*] \subseteq U \cap A^* \dots\dots\dots (14)$$

bulunur. (12) ve (14) ifadelerinden,

$$U \cap A^* \subseteq U \cap (U \cap A)^* \dots\dots\dots (15)$$

eşitliği yazılır. O halde (11) ve (15) ifadeleri gereği,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$$

bulunur.

(k)  $A \cup S = (A - S) \cup S$  eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte her iki tarafın (\*) işlemi alınırsa,

$$(A \cup S)^* = [(A - S) \cup S]^*$$

olur. Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup S)^* = A^* \cup S^* = (A - S)^* \cup S^* \dots\dots\dots (16)$$

elde edilir. Tanım 3.2.1 ve  $S \in I$  olduğundan,

$S^* = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, (U \cap S) \in I\} = \emptyset$  olur. (16) ifadesinde  $S^* = \emptyset$  yazılırsa  $(A \cup S)^* = A^* = (A - S)^*$  elde edilir.

[13]' de, bir  $Cl^*$  işlemi tanımlanmış ve bu işlemin aslında bir Kuratowski kapanış işlemi olduğu aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

Lokal fonksiyon olarak tanımlanan  $(*) : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu Teorem 3.2.1'in (d) ve (e) şıkları ile,

$$\phi^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, (U \cap \phi) \notin I\}$$

$$\phi^*(I) = \{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \phi \notin I\}$$

bulunur. Bu ise,  $I$  ideal olduğundan kalıtımsallık özelliği gereği imkansızdır. Dolayısıyla  $\phi \in I$  olur. Dolayısıyla  $\phi^*(I) = \emptyset$  olup,  $(*) : P(X) \rightarrow P(X)$  lokal fonksiyonu, Uyarı 3.1.1 de verilen  $d : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu ile çakışır. Her  $A \subseteq X$  alt kümesi için,  $Cl^*(A) = A \cup A^*$  şeklinde tanımlanan  $Cl^* : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu Kuratowski Kapanış işlemidir.

[13] referansında ,  $X$  kümesindeki minimal ideal olan  $I = \{\emptyset\}$  ve maksimal ideal olan  $I = P(X)$  idealleri için,  $Cl^*(A)$  kümesi aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$I = \{\emptyset\}$  minimal ideali için,  $A^*(\{\emptyset\}) = Cl(A)$  olup bu ifade  $Cl^*(A) = A \cup A^*$  eşitliğinde yazılırsa  $Cl^*(A) = A \cup Cl(A)$  olur. Kapanış işleminin  $A \subset Cl(A)$  özelliğinden,  $Cl^*(A) = Cl(A)$  olur.

$I = P(X)$  maksimal ideali için,  $A^*(P(X)) = \emptyset$  olup  $Cl^*(A) = A \cup A^*$  eşitliğinde yazılırsa,  $Cl^*(A) = A$  olur.

$Cl^*$  fonksiyonu yardımıyla üretilen  $\tau^*$  topolojisi [13] de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

**Tanım 3.2.2 [14].**  $\tau$  topolojisi  $X$  kümesindeki ilk topoloji olmak üzere,  $Cl^*$  fonksiyonu tarafından üretilen topoloji  $\tau^*(I, \tau)$  ya da  $\tau^*(I)$  (kısaca  $\tau^*$ ) ile gösterilir. Bu topoloji,

$$\tau^*(I) = \{U \subseteq X : Cl^*(X - U) = X - U\}$$

şeklindedir.

$I = \{\emptyset\}$  minimal ideali için,  $\tau^*(I) = \tau$  elde edilir.  $I = P(X)$  maksimal ideali için,  $\tau^*(I) = P(X)$  olup  $X$  kümesi üzerindeki her  $I$  ideali için,  $\emptyset \subseteq I \subseteq P(X)$  olduğundan  $\tau \subseteq \tau^*(I) \subseteq P(X)$  bağıntısı Teorem 3.2.1'in (b) şikkından elde edilir.

#### 4. STRONGLY $\theta$ -PRE-I SÜREKLİ FONKSİYON

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda strongly  $\theta$ -pre-I süreklilik kavramını tanımladık ve bu süreklilik çeşidinin bazı karakterizasyonlarını verdik. Ayrıca daha önce tanımlanmış bazı süreklilik çeşitleriyle de karşılaştırmasını yaptık.

Pre-I-süreklilik kavramı ilk kez 1996 yılında Dontchev [6] tarafından tanımlandı. Bizim burada tanımladığımız strongly  $\theta$ -pre-I süreklilik kavramı pre-I-süreklilikten daha kuvvetli bir süreklilik çeşitidir. Amacımız bu sürekliliğin özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelemektir.

##### 4.1. Ön Bilgiler

$(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset X$  alt kümesi için,  $A \subset \text{Int}(Cl^*(A))$  ( $A \subset Cl^*(\text{Int}(A))$ ) ise;  $A$  kümesine **pre-I-açık küme** ([6] Dontchev) (**semi-I-açık** ([10] Hatır ve ark.)) denir.  $A$  kümesi pre-I-açık kümeysen  $X - A$  pre-I-kapalı kümedir. ([6] Dontchev).  $A$  kümesini kapsayan tüm pre-I-kapalı kümelerin kesişimine  $A$  kümesinin **pre-I-kapanışı** denir ve  $pI Cl(A)$  ile gösterilir ([32] Yüksel ve ark.).  $A$  kümesinin kapsadığı tüm pre-I-açık kümelerin birleşimine  $A$  kümesinin **pre-I-içi** denir ve  $pI \text{Int}(A)$  ile gösterilir.  $X$  uzayının bir  $x$  noktasını içeren tüm pre-I-açık kümelerin ailesi  $PIO(X, x)$  ile gösterilir.

**Tanım 4.1.1.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A \subset X$  olsun. Her  $x \in X$  noktası ve  $x$  noktasının her açık  $U$  komşuluğu için,  $Cl^*(U) \cap A \neq \emptyset$  ise  $x$  noktasına  $A$  kümesinin  **$\theta$ -I-kapanış noktası** denir.  $A$  kümesinin tüm  $\theta$ -I-kapanış noktalarının kümesine  $A$  kümesinin  **$\theta$ -I-kapanışı** denir ve  $Cl_{\theta I}(A)$  ile gösterilir.  $A$  kümesinin  $\theta$ -I-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart  $Cl_{\theta I}(A) = A$  olmasıdır.

**Tanım 4.1.2.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun. Her  $x \in X$  noktası ve her  $U \in PIO(X, x)$  kümesi için,  $U \cap A \neq \emptyset$  ise  $x$  noktasına  $A$  kümesinin **pre-I-kapanış noktası** denir.  $A$  kümesinin tüm pre-I-kapanış noktalarının kümesine

$A$  kümesinin **pre-I-kapanışı** denir ve  $pI Cl(A)$  ile gösterilir.  $A$  kümesi pre-I-kapalı kümeysse  $pI Cl(A) = A$  dir. Pre-I-kapalı kümenin tümleyeni ise pre-I-açıktır ([32], Yüksel ve ark.) .

**Tanım 4.1.3.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun. Her  $x \in X$  noktası ve her  $U \in PIO(X, x)$  kümesi için  $pI Cl(U) \cap A \neq \emptyset$  ise  $x$  noktasına  $A$  kümesinin **pre- $\theta$ -I-kapanış noktası** denir.  $A$  kümesinin tüm pre- $\theta$ -I-kapanış noktalarının kümesine  $A$  kümesinin **pre- $\theta$ -I-kapanışı** denir ve  $pI Cl_{\theta}(A)$  ile gösterilir.  $A = pI Cl_{\theta}(A)$  ise  $A$  kümesi pre- $\theta$ -I-kapalı kümedir ve tümleyeni pre- $\theta$ -I-açık kümedir ([4], Açıkgöz ve ark.) .

**Tanım 4.1.4.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(U) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi varsa fonksiyona **pre-I-sürekli** denir ([6], Dontchev).

**Tanım 4.1.5.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(Cl^*(U)) \subset V$  olacak şekilde  $x$  noktasının açık bir  $U$  komşuluğu varsa fonksiyona **strongly  $\theta$ -I-sürekli** foksiyon denir ([31], Yüksel ve ark.).

**Tanım 4.1.6.**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu, I)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(U) \subset Cl^*(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının açık bir  $U$  komşuluğu varsa fonksiyona **weakly I-sürekli** foksiyon denir ([1], Açıkgöz ve ark.).

**Tanım 4.1.7.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I_1)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(U) \subset Cl^*(V)$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi varsa bu **weakly I-pre sürekli** denir.

**Lemma 4.1.1.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayının **regular-I-uzay** olması için gerek ve yeter şart  $x$  noktasının her açık  $U$  komşuluğu için  $x \in V \subset Cl^*(V) \subset U$  olacak şekilde açık bir  $V$  komşuluğunun olmasıdır ([1], **Açık göz ve ark.**).

**Tanım 4.1.8.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa bu uzaya **Lindelöf Uzayı** denir ([35], **Genel Topoloji**).

**Lemma 4.1.2.**  $(X, \tau, I)$  bir ideal topolojik uzay ve  $U \subset X$  olsun.  $U$  kümesinin  $X$  uzayında pre- $\theta$ -I-açık küme olması için gerek ve yeter şart her  $x \in U$  noktası için,  $pI Cl(W) \subset U$  olacak şekilde  $x$  noktasının pre-I-açık bir  $W$  komşuluğunun olmasıdır.

**İspat.**  $\Rightarrow$ :  $x \in U$  olsun.  $U$  kümesi  $X$  uzayında pre- $\theta$ -I-açık küme olduğundan  $X - U$  kümesi pre- $\theta$ -I-kapalıdır. Buradan  $x \notin X - U$  ve  $x \notin pI Cl_\theta(X - U)$  dir. Tanım 4.1.3. gereği,  $pI Cl(W) \cap (X - U) = \emptyset$  olacak şekilde bir  $W \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Böylece  $pI Cl(W) \subset U$  olur.

$\Leftarrow$ : Varsayalım ki,  $U$  kümesi pre- $\theta$ -I-açık küme olmasın. O halde  $X - U$  kümesi pre- $\theta$ -I-kapalı küme değildir. Buradan; Tanım 4.1.3. gereği,  $pI Cl_\theta(X - U) \neq X - U$  olur. Böylece  $x \in pI Cl_\theta(X - U)$  ve  $x \notin X - U$  dir.  $x \in U$  olduğundan yeter şart gereği  $pI Cl(W) \subset U$  olacak şekilde  $x$  noktasının pre-I-açık bir  $W$  komşuluğu vardır. Böylece,

$$pI Cl(W) \cap (X - U) = \emptyset$$

olur ve buradan da,

$$x \notin pI Cl_\theta(X - U)$$

dir ve bu ise bir çelişkidir. O halde  $U$  kümesi pre- $\theta$ -I-açık bir kümedir.

**Lemma 4.1.3.** [34]  $(X, \tau, I)$  bir ideal topolojik uzay ve  $A, B \subset X$  olsun ve  $Int^*(A)$  sembolü  $A$  kümesinin  $\tau^*$  topolojisine göre içini göstere. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1)  $A \subset B$  ise  $Int^*(A) \subset Int^*(B)$ .
- (2)  $Int^*(A) \subset A$ .
- (3)  $Int(A) \subset Int^*(A)$ .
- (4) Eğer  $A$  kümesi  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında açık küme ise  $Int^*(A) = A$  dir.
- (5)  $Int^*(A \cap B) = Int^*(A) \cap Int^*(B)$ .
- (6)  $Int^*(A) \cup Int^*(B) \subset Int^*(A \cup B)$
- (7) Eğer  $F$  kümesi  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında kapalı bir küme ise  $Int^*(A \cup F) \subset Int^*(A) \cup F$  dir.

**Lemma 4.1.4.**  $(X, \tau, I)$  bir ideal topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun. O halde

$$p_1Cl(A) = A \cup Cl(int^*(A))$$

eşitliği vardır.

**İspat.**  $A \subset X$  alalım.

$$\begin{aligned} Cl(Int^*(A \cup Cl(Int^*(A)))) &\subset Cl(Int^*(A) \cup Cl(Int^*(A))) \\ &= Cl(Int^*(A)) \end{aligned}$$

dir. Buradan  $Cl(Int^*(A \cup Cl(Int^*(A)))) \subset A \cup Cl(Int^*(A))$  bağıntısını elde ederiz. Böylece  $A \cup Cl(Int^*(A))$  kümesi pre-I-kapalı bir kümedir.  $A \subset A \cup Cl(Int^*(A))$  olduğundan,

$$p_1Cl(A) \subset p_1Cl(A \cup Cl(Int^*(A))) = A \cup Cl(Int^*(A))$$

bağıntısını elde ederiz. Şimdi Lemma da verilen eşitliği göstermek için, yukarıda bulduğumuz bağıntının ters yönlüsünü elde etmeliyiz.  $A \subset p_1Cl(A)$  olduğunu biliyoruz. O halde;

$$Cl(Int^*(A)) \subset Cl(Int^*(p_1Cl(A))) \subset p_1Cl(A)$$

olur. Buradan,

$$A \cup Cl(Int^*(A)) \subset A \cup p_1Cl(A) = p_1Cl(A)$$

bağıntısını elde ederiz ki bu sonuç bize  $p_1Cl(A) = A \cup Cl(int^*(A))$  olduğunu

gösterir.

## 4.2. Tanım ve Karşılaştırmalar

**Tanım 4.2.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası ve  $Y$  uzayının  $f(x)$  noktasını içeren her  $V$  açık kümesi için,  $f(p_{\text{Cl}}(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna **strongly  $\theta$ -pre-I süreklili** fonksiyon denir. Kısaca str. $\theta$ .pre.I.c. fonksiyon olarak gösterilir.

**Uyarı 4.2.1.** Bir ideal topolojik uzaydaki her strongly  $\theta$ -süreklili fonksiyon strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir fakat karşıtı aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi doğru değildir.

### Örnek 4.2.1.

$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}, Y = \{b, c\}, \nu = \{\emptyset, Y, \{c\}\}, I = \{\emptyset, \{a\}\}$   
 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$   $f(a) = f(c) = b, f(b) = c$  şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir fakat strongly  $\theta$ -süreklili değildir.

**Uyarı 4.2.2.** Bir ideal topolojik uzaydaki her strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon pre-I süreklidir fakat karşıtı aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi doğru değildir.

Yani strongly  $\theta$ -pre-I süreklilik kavramı strongly  $\theta$ -süreklilik kavramından daha zayıf, pre-I-süreklilik dolayısıyla da pre süreklilik ve weakly I-pre süreklilik kavramlarından da daha kuvvetli bir süreklilik çeşididir.

### Örnek 4.2.2.

$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}\}, Y = \{b, c\}, \nu = \{\emptyset, Y, \{b\}\}, I = \{\emptyset, \{a\}\}$   
 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$   $f(a) = f(c) = c, f(b) = b$  şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu pre-I-süreklidir fakat strongly  $\theta$ -pre-I süreklili değildir.

**Uyarı 4.2.3.** Bir ideal topolojik uzaydaki her strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon strongly  $\theta$ -pre süreklidir fakat karşıtı aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi doğru değildir.

**Örnek 4.2.3.**

$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}, \nu = \{\emptyset, X, \{a, c\}\}, I = \{\emptyset, \{b\}\}$  ve  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (X, \nu)$  birim fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre süreklidir fakat strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği değildir

**Uyarı 4.2.4.** Bir ideal topolojik uzaydaki strongly  $\theta$ -pre-I süreklilik ve süreklilik kavramları tamamen birbirinden bağımsız kavramlardır:

**Örnek 4.2.4.** 4.2.1. Örnekte verilen fonksiyon strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir fakat sürekliliği değildir.

**Örnek 4.2.5.** 4.2.2. Örnekte verilen fonksiyon süreklidir fakat strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği değildir.

**Uyarı 4.2.5.** Bir ideal topolojik uzaydaki strongly  $\theta$ -I sürekliliği fonksiyon ve strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği kavramları tamamen birbirinden bağımsız kavramlardır:

**Örnek 4.2.6.**  $X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}, Y = \{a, c\}, \nu = \{\emptyset, Y, \{c\}\}, I = \{\emptyset, \{b\}\}$   $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$   $f(a) = f(c) = a, f(b) = c$  şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -I süreklidir fakat strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği değildir.

**Örnek 4.2.7.** 4.2.1. Örnekte verilen fonksiyon strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir fakat strongly  $\theta$ -I sürekliliği değildir.

**Uyarı 4.2.7.** Bir ideal topolojik uzaydaki weakly I sürekliliği fonksiyon ve strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği kavramları tamamen birbirinden bağımsız kavramlardır:

**Örnek 4.2.8.**  $X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{c\}\}, \nu = \{\emptyset, X, \{a\}\}, I = \{\emptyset, \{c\}\}$   $f : (X, \tau, I) \rightarrow (X, \nu, I)$   $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ , şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu weakly I-süreklidir fakat strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği değildir.

**Örnek 4.2.9.**  $X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}, \nu = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}, I = \{\emptyset, \{c\}\}$   
 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (X, \nu, I)$  birim fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir fakat weakly I- süreklidir değil.

**Teorem 4.2.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I)$  fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- (1)  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir;
- (2)  $Y$  uzayının her açık kümesinin ters görüntüsü pre- $\theta$ -I-açık kümedir;
- (3)  $Y$  uzayının her kapalı kümesinin ters görüntüsü pre- $\theta$ -I-kapalı kümedir;
- (4)  $X$  uzayının her  $A$  alt kümesi için,  $f(p\iota Cl_{\theta}(A)) \subset Cl(f(A))$ ;
- (5)  $Y$  uzayının her  $A$  alt kümesi için,  $p\iota Cl_{\theta}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(Cl(A))$ .

**İspat.** (1)  $\Rightarrow$  (2):  $V$  kümesi  $Y$  uzayının açık bir alt kümesi ve  $x \in f^{-1}(V)$  noktası olsun.  $f$  fonksiyonu str. $\theta$ .pre.I.c. olduğundan,  $f(p\iota Cl(U)) \subset V$  olacak şekilde  $x$  noktasının pre-I- $\theta$ -açık bir  $U$  komşuluğu vardır. Yani;

$$x \in U \subset p\iota Cl(U) \subset f^{-1}(V)$$

dir. O halde, Lemma 4.1.2. gereği,  $f^{-1}(V)$  kümesi pre- $\theta$ -I- $\theta$ -açık kümedir.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Tümlenme işleminden açıktır.

(3)  $\Rightarrow$  (4):  $A \subset X$  olsun.  $Cl(f(A))$  kümesi  $Y$  uzayının kapalı bir alt kümesidir. (3) ifadesinden  $f^{-1}(Cl(f(A)))$  kümesi pre- $\theta$ -I-kapalıdır. Böylece;

$$p\iota Cl_{\theta}(A) \subset p\iota Cl_{\theta}(f^{-1}(f(A))) \subset p\iota Cl_{\theta}(f^{-1}(Cl(f(A)))) = f^{-1}(Cl(f(A)))$$

olur. Buradan,

$$f(p\iota Cl_{\theta}(A)) \subset Cl(f(A))$$

ifadesini elde ederiz.

(4)  $\Rightarrow$  (5):  $B \subset Y$  olsun.(4) ifadesinden ;

$$f(p\iota Cl_{\theta}(f^{-1}(B))) \subset Cl(f(f^{-1}(B))) \subset Cl(B)$$

dır. Buradan,

$$p\iota Cl_{\theta}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$$

sonucunu elde ederiz.

(5)  $\Rightarrow$  (1):  $x \in X$  noktası ve  $f(x) \in V \in \mathcal{V}$  olsun.  $Y - V$  kümesi  $Y$  uzayında kapalı bir kümedir. (5) ifadesinden  $p\iota Cl_{\theta}(f^{-1}(Y - V)) \subset f^{-1}(Cl(Y - V)) = f^{-1}(Y - V)$  olur. Buradan  $f^{-1}(Y - V)$  kümesi pre- $\theta$ -I-kapalıdır. O halde  $f^{-1}(V)$  kümesi pre- $\theta$ -I-açıktır.

**Teorem 4.2.2.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  bir fonksiyon ve  $Y$  uzayı regular uzay olsun.  $f$  fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler denktir:

- (1)  $f$  fonksiyonu weakly I-pre süreklidir;
- (2)  $f$  fonksiyonu pre-I-süreklidir;
- (3)  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir.

**İspat.**  $x \in X$  noktası ve  $f(x) \in V \in \mathcal{V}$  kümesi olsun.  $Y$  uzayı regular uzay olduğundan,  $f(x) \in W \subset Cl(W) \subset V$  olacak şekilde  $W$  açık kümesi vardır.  $f$  fonksiyonu weakly pre-I-süreklili fonksiyon olduğundan,  $f(U) \subset Cl^*(W)$  olacak şekilde  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan,  $f(U) \subset V$  olur. Bu sonuç bize  $f$  fonksiyonunun pre-I-süreklili fonksiyon olduğunu gösterir.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $x \in X$  noktası ve  $f(x) \in V \in \mathcal{V}$  kümesi olsun.  $Y$  uzayı regular uzay olduğundan,  $f(x) \in W \subset Cl(W) \subset V$  olacak şekilde  $W$  açık kümesi vardır.  $f$  fonksiyonu pre-I-süreklili fonksiyon olduğundan  $f(U) \subset W$  olacak şekilde  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Şimdi  $f(p\iota Cl(U)) \subset Cl(W)$  olduğunu göstermeliyiz.  $y \notin Cl(W)$  olsun. Kapanış noktası tanımından,  $G \cap W = \emptyset$  olacak şekilde  $y$

noktasının açık bir  $G$  komşuluğu vardır.  $f$  fonksiyonu pre-I-sürekli olduğundan  $f^{-1}(G) \in PIO(X)$  ve  $f^{-1}(G) \cap U = \emptyset$  dir. Böylece  $f^{-1}(G) \cap p\text{Cl}(U) = \emptyset$  olur. O halde  $G \cap f(p\text{Cl}(U)) = \emptyset$  dir. Buradan,  $y \notin f(p\text{Cl}(U))$  olur ki bu da bize  $f(p\text{Cl}(U)) \subset Cl(W) \subset V$  olduğunu gösterir.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Uyarı 4.2.2. den açıktır.

**Sonuç 4.2.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I_1)$  bir fonksiyon ve  $Y$  uzayı regular-I-uzay ve  $I = \{\emptyset\}$  olsun.  $f$  fonksiyonu için aşağıdaki özellikler denktir:

- (1)  $f$  fonksiyonu weakly I-pre süreklidir;
- (2)  $f$  fonksiyonu pre-I-süreklidir;
- (3)  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklidir.

**Tanım 4.2.2.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay olsun.  $F \subset X$  kapalı kümesi ve  $x \notin F$  noktası için, ayrık, pre-I-açık  $U, V$  komşulukları varsa  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayına **p-I-regular uzay** denir.

**Lemma 4.2.1.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayının p-I-regüler uzay olması için gerek ve yeter şart her  $x \in X$  noktası ve  $x$  noktasının her açık  $U$  komşuluğu için,  $x \in W \subset p\text{Cl}(W) \subset U$  olacak şekilde  $W \in PIO(X, x)$  kümesinin olmasıdır.

**İspat.**  $\Rightarrow$ :  $x \in X$  noktası ve  $U$  kümesi de  $x$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $U$  kümesi açık küme olduğundan  $X - U$  kümesi kapalı ve  $x \notin X - U$  olur.  $(X, \tau, I)$  uzayı p-I-regular uzay olduğundan  $x \in W, X - U \subset V$  olacak şekilde ayrık, pre-I-açık  $W, V$  kümeleri vardır.

$$V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subset X - W \Rightarrow V = p\text{Int}(V) \subset p\text{Int}(X - W) = X - p\text{Cl}(W)$$

O halde,

$$p\text{Cl}(W) \subset X - V \subset U$$

dır. Buradan,  $pI(Cl(W)) \subset U$  sonucunu elde ederiz.

$\Leftarrow$ :  $F$  kapalı ve  $x \notin F$  alalım. O halde,  $X - F$  kümesi açık ve  $x \in X - F$  dir. Hipotezden,  $x \in V \subset pI(Cl(V)) \subset X - F$  olacak şekilde  $V \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan,  $F \subset X - pI(Cl(V))$  dir ve böylece  $X$  uzayı p-I-regular uzaydır.

**Teorem 4.2.3.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  sürekli fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart  $X$  uzayının p-I-regular uzay olmasıdır.

$\Rightarrow$ :  $f : X \rightarrow X$  fonksiyonu birim fonksiyon olsun.  $x \in X$  noktası ve  $U$  kümesi de  $x$  noktasının açık bir komşuluğu olsun. Bu durumda  $x = f(x) \in U$  olur ve  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon olduğundan  $f(pI(Cl(G))) \subset U$  olacak şekilde  $G \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan;  $x \in G \subset pI(Cl(G)) \subset U$  ifadesini elde ederiz. Böylece  $X$  uzayı p-I-regular uzaydır.

$\Leftarrow$ :  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu sürekli olduğundan  $x \in f^{-1}(V)$  ve  $f^{-1}(V) \in \tau$  dur.  $X$  uzayı p-I-regular uzay olduğundan,  $pI(Cl(U)) \subset f^{-1}(V)$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan,  $f(pI(Cl(U))) \subset V$  olur ki bu sonuçta bize  $f$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

**Tanım 4.2.3.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay olsun.  $F \subset X$  pre-I-kapalı kümesi ve  $x \notin F$  noktası için, ayrık, pre-I-açık  $U, V$  komşulukları varsa  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayına **pre-I-regular uzay** denir ( [4], Açıkgöz ve ark.).

**Lemma. 4.2.2.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayının pre-I-regular uzay olması için gerek ve yeter şart her  $x \in X$  noktası ve  $x$  noktasının her pre-I-açık  $U$  komşuluğu için  $x \in V \subset pI(Cl(V)) \subset U$  olacak şekilde  $V \in PIO(X, x)$  kümesinin olmasıdır ( [4], Açıkgöz ve ark.) .

**Teorem 4.2.4.**  $(X, \tau, I)$  uzayı pre-I-regüler uzay olsun.  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \upsilon)$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği için, gerek ve yeter şart  $f$  fonksiyonunun pre-I-sürekliliğidir.

**İspat.**  $\Rightarrow$ : Uyarı 4.2.2. den açıktır.

$\Leftarrow$ :  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu pre-I-sürekliliğinden  $f^{-1}(V) \in PIO(X, x)$  dir.  $X$  uzayı pre-I-regular uzay olduğundan  $p_iCl(U) \subset f^{-1}(V)$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan  $f(p_iCl(U)) \subset V$  olur ki bu sonuçta bize  $f$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliğini gösterir.

**Tanım 4.2.4.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay olsun.  $X$  uzayının her alt kümesi I-lokal kapalı küme ise  $(X, \tau, I)$  uzayına **I-submaximal uzay** denir ([32], Yüksel ve ark.) .

**Lemma 4.2.3.** [32]  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı I-submaximal uzay ise  $PIO(X) = \tau$  eşitliği vardır.

**Teorem 4.2.5.**  $(X, \tau, I)$  uzayı I-submaximal uzay olsun.  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \upsilon)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliğinden ise strongly  $\theta$ -I-sürekliliğindedir.

**İspat.**  $\Rightarrow$ :  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliğinden,  $f(p_iCl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır.  $(X, \tau, I)$  uzayı I-submaximal olduğundan  $U \in \tau$  dir ve

$$p_iCl(U) = U \cup Cl(int^*(U)) = U \cup Cl(U) = Cl(U)$$

olduğundan,  $f(Cl^*(U)) \subset f(Cl(U)) \subset V$  olur ki buradan  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -I-sürekliliğindedir.

**Teorem 4.2.6.**  $(X, \tau, I)$  uzayı I-submaximal uzay olsun.  
 $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili ise weak I süreklili fonksiyondur.

**İspat.** İspat açıktır.

### 4.3. Özellikler

**Teorem 4.3.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I_1)$  ve  $g : (X, \tau, I) \rightarrow X \times Y$  fonksiyonları verilsin.  $g(x) = (x, f(x))$  ile tanımlanmış ve  $f$  fonksiyonunun grafik fonksiyonu olsun.

(1)  $g$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon ise  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon ve  $X$  uzayı p-I-regular uzaydır.

(2)  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon ve  $X$  uzayı pre-I-regular uzay ise  $g$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyondur.

**İspat.** (1)  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun. O halde  $X \times V$  kümesi  $g(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olur.  $g$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili olduğundan  $g(p_I Cl(U)) \subset X \times V$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan,  $f(p_I Cl(U)) \subset V$  olur. Şimdi  $X$  uzayının p-I-regular olduğunu göstereyim.  $U$  kümesi  $x$  noktasının açık bir komşuluğu olsun. Bu durumda  $U \times Y$  kümesi  $g(x)$  noktasının açık bir komşuluğudur.  $g$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon olduğundan  $g(p_I Cl(W)) \subset U \times Y$  olacak şekilde bir  $W \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan,  $p_I Cl(W) \subset U$  olur ki bu da  $X$  uzayının p-I-regular uzay olduğunu gösterir.

(2)  $x \in X$  noktası ve  $W$  kümesi  $X \times Y$  uzayında  $g(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun. O halde;  $U \times V \subset W$  olacak şekilde  $x \in U, f(x) \in V$  açık kümeleri vardır.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon olduğundan,  $f(p_I Cl(G)) \subset V$  olacak şekilde bir  $G \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Buradan,  $U \cap G$  kümesi  $x$  noktasının pre-I-açık bir komşuluğu olur.  $X$  uzayı pre-I-regular uzay olduğundan  $x \in T \subset p_I Cl(T) \subset U \cap G$  olacak şekilde bir  $T \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. Böylece

$$g(p_I Cl(T)) \subset U \times f(p_I Cl(G)) \subset U \times V \subset W$$

olur ki bu da bize  $g$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyon olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.3.1.**  $(X, \tau, I)$  uzayı pre-I-regüler uzay olsun.  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği için gerek ve yeter şart  $g(x) = (x, f(x))$  ile tanımlanmış  $g : (X, \tau, I) \rightarrow X \times Y$  grafik fonksiyonunun strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliğidir.

**Teorem 4.3.2.** ([32], Yüksel ve ark.)  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A, X_0 \subset X$  olsun.

- (1)  $A \in PIO(X), X_0 \in SIO(X)$  ise  $A \cap X_0 \in PIO(X_0)$ .
- (2)  $A \in PIO(X_0)$  ve  $X_0 \in PIO(X)$  ise  $A \in PIO(X)$ .

**Teorem 4.3.3.** ([32], Yüksel ve ark.)  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset X_0 \subset X$  olsun ve  $pI_{X_0}Cl(A)$  sembolü  $A$  kümesinin  $X_0$  altuzayında pre-I-kapanışını gösterir.

- (1) Eğer  $X_0$  kümesi  $X$  uzayında semi-I-açık ise  $pI_{X_0}Cl(A) \subset pI_{X_0}Cl(A)$  dir.
- (2)  $A \in PIO(X_0)$  ve  $X_0 \in PIO(X)$  ise  $pI_{X_0}Cl(A) \subset pI_{X_0}Cl(A)$ .

**Teorem 4.3.4.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyon ve  $X_0 \subset X$  semi-I-açık bir küme ise  $f / X_0 : (X_0, \tau / X_0, I / X_0) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyondur.

**İspat.**  $x \in X_0$  noktası ve  $V$  kümesi  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyon olduğundan,  $f(pI_{X_0}Cl(U)) \subset V$  olacak şekilde bir  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır.  $U_0 = U \cap X_0$  olsun. Teorem 4.3.2 gereğince,  $U_0 \in PIO(X_0)$  ve Teorem 4.3.3 gereğince,

$$pI_{X_0}Cl(U_0) \subset pI_{X_0}Cl(U_0)$$

olur. O halde,

$$(f / X_0)(pI_{X_0}Cl(U_0)) = f(pI_{X_0}Cl(U_0)) \subset f(pI_{X_0}Cl(U)) \subset f(pI_{X_0}Cl(U)) \subset V$$

olur ki, bu da  $f / X_o$  kısıtlanmasının strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyon olduğunu gösterir.

**Teorem 4.3.5.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası için,  $X_o \in PIO(X, x)$  kümesi varsa ve  $f / X_o : (X_o, \tau / X_o, I / X_o) \rightarrow (Y, \nu)$  kısıtlanmış fonksiyonu strongly- $\theta$ -pre-I-sürekliliği ise  $f$  fonksiyonu da strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyondur.

**İspat.**  $x \in X$  noktası ve  $V$  kümesi de  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f / X_o$  kısıtlanmış fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyon olduğundan;

$$(f / X_o)(pI Cl_{X_o}(U)) = f(pI Cl_{X_o}(U)) \subset V$$

olacak şekilde  $U \in PIO(X_o, x)$  kümesi vardır. Teorem 4.3.3. gereği,

$$f(pI Cl(U)) \subset f(pI Cl_{X_o}(U)) \subset V$$

olur ki buradan  $f$  fonksiyonu, strongly  $\theta$ -pre-I sürekliliği fonksiyondur.

**Tanım 4.3.1. ([3], Açıkgöz ve ark.)**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyon olsun.  $Y$  uzayının her pre-I-açık kümesinin ters görüntüsü  $X$  uzayında pre-I-açık küme oluyorsa  $f$  fonksiyonuna pre-I-irresolute fonksiyon denir.

**Teorem 4.3.6.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I_1)$  fonksiyonu için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- (1)  $f$  fonksiyonu pre-I-irresolute fonksiyondur;
- (2)  $\forall A \subset Y$  için,  $f^{-1}(pI Int(A)) \subset pI Int(f^{-1}(A))$ ;
- (3)  $\forall A \subset Y$  için,  $pI Cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(pI Cl(A))$ .

**İspat. (1)  $\Rightarrow$  (2):**  $A \subset Y$  olsun.  $pI Int(A)$  kümesi pre-I-açık kümedir.  $f$  fonksiyonu pre-I-irresolute olduğundan,  $f^{-1}(pI Int(A))$  kümesi pre-I-açıktır. Buradan

$$f^{-1}(pI Int(A)) = pI Int(f^{-1}(pI Int(A))) \subset pI Int(f^{-1}(A))$$

olur.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $A \subset Y$  olsun.  $Y - A$  kümesini göz önüne alalım. (2) ifadesinden  $f^{-1}(p\text{Int}(Y - A)) \subset p\text{Int}(f^{-1}(Y - A))$  dır. [31] de  $p\text{Int}(Y - A) = Y - p\text{Cl}(A)$  ve  $p\text{Cl}(Y - A) = Y - p\text{Int}(A)$  olduğu gösterilmiştir. Bu ifadelerden faydalanarak;

$$\begin{aligned} f^{-1}(p\text{Int}(Y - A)) &= f^{-1}(Y - p\text{Cl}(A)) \\ &= X - f^{-1}(p\text{Cl}(A)) \\ &\subset p\text{Int}(f^{-1}(Y - A)) \\ &= p\text{Int}(X - f^{-1}(A)) \\ &= X - p\text{Cl}(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan da tümeleme işlemi yardımıyla

$$p\text{Cl}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(p\text{Cl}(A))$$

bağıntısını buluruz.

(3)  $\Rightarrow$  (1):  $F \subset Y$  pre-I-kapalı kümesi verilsin. (3) ifadesinden;

$$p\text{Cl}(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(p\text{Cl}(F)) = f^{-1}(F)$$

ifadesini elde ederiz. Böylece  $f$  fonksiyonu pre-I-irresolute fonksiyondur.

**Lemma 4.3.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I_1)$  fonksiyonu pre-I-irresolute ise  $Y$  uzayındaki her pre- $\theta$ -I-açık kümenin ters görüntüsü  $X$  uzayında pre- $\theta$ -I-açık kümedir.

**İspat.**  $f(x) \in V \subset Y$  pre- $\theta$ -I-açık küme ve  $x \in f^{-1}(V)$  olsun.  $V$  kümesi pre- $\theta$ -I-açık küme olduğundan,  $f(x) \in W \subset p\text{Cl}(W) \subset V$  olacak şekilde bir  $W \in PIO(Y)$  kümesi vardır.  $f$  fonksiyonu pre-I-irresolute fonksiyon olduğundan,  $f^{-1}(W) \in PIO(X)$  ve Teorem 4.3.6 gereğince,  $p\text{Cl}(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(p\text{Cl}(W))$  dır. Buradan;

$$x \in f^{-1}(W) \subset p\text{Cl}(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(p\text{Cl}(W)) \subset f^{-1}(V)$$

olur. O halde  $f^{-1}(V)$  kümesi pre- $\theta$ -I-açıktır.

**Teorem 4.3.7.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu, I_1)$  ve  $g : (Y, \nu, I_1) \rightarrow (Z, \varphi, I_2)$  fonksiyonları verilsin.

(1)  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli ve  $g$  fonksiyonu sürekli ise  $gof : (X, \tau, I) \rightarrow (Z, \varphi, I_2)$  bileşke fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli dir.

(2)  $f$  fonksiyonu pre-I-irresolute fonksiyon ve  $g$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon ise  $gof : (X, \tau, I) \rightarrow (Z, \varphi, I_2)$  bileşke fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyondur.

**İspat.** (1)  $V$  kümesi  $Z$  uzayında açık küme olsun.  $g$  fonksiyonu sürekli fonksiyon olduğundan,  $g^{-1}(V)$  kümesi  $Y$  uzayında açıktır.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon olduğundan,  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  kümesi  $X$  uzayında pre- $\theta$ -I- $\theta$  açık kümedir. O halde,  $gof$  bileşke fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyondur.

(2)  $V$  kümesi  $Z$  uzayında açık küme olsun.  $g$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli fonksiyon olduğundan,  $g^{-1}(V)$  kümesi  $Y$  uzayında pre- $\theta$ -I- $\theta$  açık kümedir.  $f$  fonksiyonu pre-I-irresolute fonksiyon olduğundan,  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  kümesi  $X$  uzayında pre- $\theta$ -I- $\theta$  açık kümedir. O halde,  $gof$  bileşke fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I sürekli dir.

#### 4.4. Str.θ.pre.I.c Fonksiyon ve Yeni Ayırma Aksiyomlarıyla İlişkisi

**Tanım 4.4.1.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay olsun.  $X$  uzayının birbirinden farklı her  $x, y$  nokta çifti için, sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içeren  $U, V$  ayrık ve pre-I-açık komşulukları varsa bu uzaya **pre-I-T<sub>2</sub>**- uzay denir.

**Tanım 4.4.2.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay olsun.  $X$  uzayının birbirinden farklı her  $x, y$  nokta çifti için,  $pI Cl(U) \cap pI Cl(V) = \emptyset$  olacak şekilde sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içeren  $U, V$  pre-I-açık komşulukları varsa bu uzaya **pre-I-Urysohn** uzay denir.

**Teorem 4.4.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \upsilon)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili ve birebir fonksiyon ve  $Y$  uzayı  $T_0$ -uzayı ise  $X$  uzayı pre-I-T<sub>2</sub>-uzayıdır.

**İspat.**  $x, y$  noktaları  $X$  uzayının birbirinden farklı iki noktası olsun.  $f$  fonksiyonu birebir fonksiyon olduğundan  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı  $T_0$ -uzay olduğundan  $f(x) \in U, f(y) \notin U$  veya  $f(y) \in V, f(x) \notin V$  olacak şekilde  $U, V$  açık komşulukları vardır. 1.durum varsa,  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I-süreklili fonksiyon olduğundan,  $f(pI Cl(W)) \subset U$  olacak şekilde  $W \in PIO(X, x)$  kümesi vardır.  $f(y) \notin f(pI Cl(W))$  olduğundan,  $y \notin pI Cl(W)$  olur. Buradan;  $X - pI Cl(W)$  kümesi  $y$  noktasının pre-I-açık bir komşuluğu olur. O halde;  $X$  uzayı pre-I-T<sub>2</sub>-uzayıdır. 2.durum varsa da benzer işlemleri yaparak aynı sonuca ulaşırız.

**Teorem 4.4.2.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \upsilon)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili ve birebir fonksiyon ve  $Y$  uzayı  $T_2$ -uzay ise  $X$  uzayı pre-I-Urysohn uzayıdır.

**İspat.**  $x, y$  noktaları  $X$  uzayının birbirinden farklı iki noktası olsun.  $f$  fonksiyonu birebir fonksiyon olduğundan,  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı  $T_2$ -uzay olduğundan, sırasıyla  $f(x), f(y)$  noktalarını içeren ayrık, açık  $U, V$  kümeleri vardır.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I-süreklili fonksiyon olduğundan,  $f(pI Cl(G)) \subset U$  olacak şekilde  $G \in PIO(X, x)$  kümesi ve  $f(pI Cl(H)) \subset V$  olacak şekilde  $H \in PIO(X, y)$  kümesi vardır. O halde  $f(pI Cl(G)) \cap f(pI Cl(H)) = \emptyset$  olur ki bu da  $X$  uzayının pre-I-Urysohn uzay olduğunu gösterir.

**Lemma 4.4.1.** ([33], Yüksel ve ark.)  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset X, B \subset Y$  olsun. O halde;  $Cl^*(A) \times Cl^*(B) \subset Cl^*(A \times B)$  dir.

**Lemma 4.4.2.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A \subset X, B \subset Y$  olsun. Eğer

**İspat.**  $A \times B \subset Int_X(Cl^*_X(A)) \times Int_Y(Cl^*_Y(B)) = Int_{X \times Y}(Cl^*_X(A) \times Cl^*_Y(B))$   
 $\subset Int_{X \times Y}(Cl^*_{X \times Y}(A \times B))$  olduğundan  $A \times B \in PIO(X \times Y)$  dir.

**Lemma 4.4.3.**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay ve  $A, B \subset X$  olsun. O halde;  $p_1Cl(A \times B) \subset p_1Cl(A) \times p_1Cl(B)$  dir.

**İspat.**  $(x, y) \in X \times X$  olsun ve  $(x, y) \in p_1Cl(A \times B)$  alalım. Pre-I-kapanış noktası tanımından;

$$\exists U \in PIO(X, x), V \in PIO(X, y) \ni (x, y) \in U \times V \in PIO(X \times X)$$

ve  $(A \cap U) \times (B \cap V) = (A \times B) \cap (U \times V) \neq \emptyset$  dir. Buradan,  $A \cap U \neq \emptyset$  ve  $B \cap V \neq \emptyset$  olur. Buradan,  $x \in p_1Cl(A)$  ve  $y \in p_1Cl(B)$  dir ve böylece  $(x, y) \in p_1Cl(A) \times p_1Cl(B)$  olur ki bu da bize  $p_1Cl(A \times B) \subset p_1Cl(A) \times p_1Cl(B)$  olduğunu gösterir.

**Teorem 4.4.3.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili ve  $Y$  uzayı  $T_2$ -uzay olsun.  $A = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$  kümesi  $X \times X$  uzayında pre- $\theta$ -I-kapalı kümedir.

**İspat.**  $(x, y) \notin A$  olsun. Bu durumda  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı  $T_2$ -uzay olduğundan,  $f(x), f(y)$  noktalarının sırasıyla  $V, W$  ayrık, açık komşulukları vardır.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon olduğundan,  $f(p_1Cl(U)) \subset V$  olacak şekilde  $U \in PIO(X, x)$  kümesi ve  $f(p_1Cl(G)) \subset W$  olacak şekilde  $G \in PIO(X, y)$  kümesi vardır. Lemma 4.4.2 gereğince,  $(x, y) \in U \times G \in PIO(X \times X)$  dir ve ayrıca,

$$(p_1Cl(U) \times p_1Cl(G)) \cap A = \emptyset$$

dir. Yani  $(p_1Cl(U) \times p_1Cl(G)) \subset (X \times X) - A$  dir. Lemma 4.4.3. gereğince,

$$p_1Cl(U \times G) \subset p_1Cl(U) \times p_1Cl(G)$$

olduğundan,  $(x, y) \in U \times G \subset p\text{Cl}(U \times G) \subset (X \times X) - A$  olur ki bu da bize  $(X \times X) - A$  kümesinin pre- $\theta$ -I-açık olduğunu gösterir. Tümlleme işleminden de  $A$  kümesinin pre- $\theta$ -I-kapalı olduğu görülür.

**Tanım 4.4.3.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyon ve  $G(f)$  grafiği  $f$  fonksiyonunun grafiği olsun. Her  $(x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  noktası için,  $(p\text{Cl}(U) \times V) \cap G(f) = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasının pre-I-açık bir komşuluğu ve  $y$  noktasının açık bir komşuluğu varsa  $G(f)$  grafiğine **strongly pre-I-kapalı** denir.

**Lemma 4.4.4.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonunun  $G(f)$  grafiğinin  $X \times Y$  uzayında strongly pre-I-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart  $\forall (x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  için,  $f(p\text{Cl}(U)) \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasının pre-I-açık bir komşuluğu ve  $y$  noktasının açık bir komşuluğunun olmasıdır.

**İspat.** Tanımın direkt sonucudur.

**Teorem 4.4.4.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili ve  $Y$  uzayı  $T_2$ -uzay ise  $G(f)$  grafiği  $X \times Y$  uzayında strongly pre-I-kapalıdır.

**İspat.**  $(x, y) \in (X \times Y) - G(f)$  olsun. Bu durumda  $f(x) \neq f(y)$  dir.  $Y$  uzayı  $T_2$ -uzay olduğundan,  $f(x), f(y)$  noktalarının sırasıyla  $V, W$  ayrık, açık komşulukları vardır.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon olduğundan  $f(p\text{Cl}(U)) \subset V$  olacak şekilde  $U \in PIO(X, x)$  kümesi vardır. O halde;  $f(p\text{Cl}(U)) \cap W = \emptyset$  olur. Böylece Lemma 4.4.4. gereğince,  $G(f)$  grafiği  $X \times Y$  uzayında strongly pre-I-kapalıdır.

#### 4.5. Str.θ.pre.I.c Fonksiyonların Korunan Özellikleri

**Tanım 4.5.1. (1)**  $X$  uzayının her pre-I-açık örtüsünün pre-I-kapanışlarının,  $X$  uzayını örten, sonlu ( sayılabilir ) bir alt örtüsü varsa uzaya **p-I-kapalı ( p-I-Lindelöf)** uzay denir.

**(2)**  $X$  uzayının her sayılabilir pre-I-açık örtüsünün pre-I-kapanışlarının,  $X$  uzayını örten, sonlu bir alt örtüsü varsa uzaya **sayılabilir p-I-kapalı** uzay denir.

**Teorem 4.5.1.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu örten, strongly  $\theta$ -pre-I süreklili fonksiyon ve  $X$  uzayı p-I-kapalı uzay ise  $Y$  uzayı kompakt uzaydır.

**İspat.**  $(A_i)_{i \in I}$  ailesi  $Y$  uzayının açık bir örtüsü olsun.  $x \in X$  noktası için,  $A_i$  kümesi de  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili olduğundan her  $i \in I$  için,  $f(pI Cl(U_i)) \subset A_i$  olacak şekilde bir  $U_i \in PIO(X, x)$  kümesi vardır.  $X$  uzayı p-I-kapalı olduğundan,

$$X = \bigcup_{i \in I} \{U_i : U_i \in PIO(X, x)\} \text{ iken } X = \bigcup_{i=1}^n pI Cl(U_i)$$

dir. Buradan  $Y = f(X) = \bigcup_{i=1}^n f(pI Cl(U_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$  dir ki bu da bize  $Y$  uzayının kompakt olduğunu gösterir.

**Teorem 4.5.2.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu örten ve strongly  $\theta$ -pre-I süreklili olsun. Eğer  $X$  uzayı p-I-Lindelöf ise  $Y$  uzayı Lindelöf uzaydır.

**İspat.**  $(A_i)_{i \in I}$  ailesi  $Y$  uzayının açık bir örtüsü olsun.  $x \in X$  noktası için,  $A_i$  kümesi de  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I süreklili olduğundan, her  $i \in I$  için,  $f(pI Cl(U_i)) \subset A_i$  olacak şekilde bir  $U_i \in PIO(X, x)$  kümesi vardır.  $X$  uzayı p-I-Lindelöf olduğundan;

$$X = \bigcup_{i \in I} \{U_i : U_i \in PIO(X, x)\} \text{ iken } X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} pI Cl(U_n)$$

dir. O halde;  $Y = f(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(pI Cl(U_n)) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  olur ki bu da bize  $Y$  uzayının Lindelöf uzay olduğunu gösterir.

**Teorem 4.5.3.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I-sürekli ve örten olsun. Eğer  $X$  uzayı sayılabilir p-I-kapalı ise  $Y$  uzayı sayılabilir kompaktır.

**İspat.**  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ailesi  $Y$  uzayının sayılabilir bir açık örtüsü olsun.  $x \in X$  noktası için  $A_n$  kümesi de  $f(x)$  noktasının açık bir komşuluğu olsun.  $f$  fonksiyonu strongly  $\theta$ -pre-I-sürekli olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $f(p_I Cl(U_n)) \subset A_n$  olacak şekilde bir  $U_n \in PIO(X, x)$  kümesi vardır.  $X$  uzayı sayılabilir p-I-kapalı olduğundan,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ iken } X = \bigcup_{i=1}^n p_I Cl(U_i)$$

dir. Buradan;  $Y = f(X) = \bigcup_{i=1}^n f(p_I Cl(U_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$  olur ki bu da bize  $Y$  uzayının sayılabilir kompakt olduğunu gösterir.

**Teorem 4.5.4.**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyon olsun.  $K \subset X$  kümesi p-I-kapalı ve  $G(f)$  grafiği  $X \times Y$  uzayında strongly pre-I-kapalı ise  $f(K)$  kümesi  $Y$  uzayında kapalıdır.

**İspat.**  $y \in Y - f(K)$  ve  $x \in K$  olsun. O halde,  $(x, y) \notin G(f)$  olur.  $G(f)$  grafiği strongly pre-I-kapalı olduğundan,  $f(p_I Cl(U_i)) \cap V_i = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasının pre-I-açık bir  $U_i$  komşuluğu ve  $y$  noktasının açık bir  $V_i$  komşuluğu vardır.  $V_i$  kümesi  $y$  noktasının açık komşuluğu olduğundan  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$  kümesi de  $y$  noktasının açık bir komşuluğu olur.  $K$  kümesi p-I-kapalı olduğundan,

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} \{U_i : U_i \in PIO(X, x)\} \text{ iken } K \subseteq \bigcup_{i=1}^n p_I Cl(U_i)$$

dir. Böylece;

$$f(K) \cap V \subset \bigcup_{i=1}^n f(p_I Cl(U_i)) \cap V \subset \bigcup_{i=1}^n (f(p_I Cl(U_i)) \cap V_i) = \emptyset$$

olur. Buradan;  $y \notin Cl(f(K))$  dir. O halde  $f(K)$  kümesi kapalıdır.

**Teorem 4.5.5.**  $(X, \tau, I)$  uzayı I-submaximal uzay olsun.  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu strongly pre-I-kapalı grafikliyse  $Y$  uzayındaki her kompakt  $K$  kümesi için,  $f^{-1}(K)$  kümesi  $\theta$ - kapalıdır.

**İspat.**  $x \in X$  noktası,  $K$  kümesi  $Y$  uzayının kompakt bir alt kümesi ve  $x \notin f^{-1}(K)$  olsun.  $y \in K$  noktası için,  $(x, y) \notin G_f$  olduğundan, Lemma 4.4.4. gereğince  $f(pI Cl(U_i)) \cap V_i = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U_i$  pre-I-açık komşuluğu ve  $y$  noktasının açık bir  $V_i$  komşuluğu vardır.  $\bigcup_{y \in K} V_y$  kümesi  $K$  kümesinin açık örtüsü olduğundan,  $\bigcup_{i=1}^n V_i$  kümesi  $K$  kümesinin sonlu bir örtüsüdür.

$X$  uzayı I-submaximal olduğundan;  $U_i$  kümesi açıktır ve  $pI Cl(U_i) = Cl(U_i)$  dir.

$U = \bigcap_{i=1}^n U_i$  alalım. Bu bilgilerden faydalanarak;

$$f(Cl(U)) \cap K \subset \bigcup_{i=1}^n [f(Cl(U)) \cap V_i] \subset \bigcup_{i=1}^n [f(Cl(U_i)) \cap V_i] = \emptyset$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan;  $Cl(U) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$  olduğunu görürüz. Yani;  $x \notin Cl_\theta(f^{-1}(K))$  olur ki bu da bize  $f^{-1}(K)$  kümesinin  $\theta$ -kapalı olduğunu gösterir.

## SONUÇ VE ÖNERİLER

$(X, \tau)$  topolojik uzayında tanımlanan strongly  $\theta$ -pre sürekli fonksiyonları ele aldık. Bu süreklilik çeşidini ideal topolojik uzaylarda tanımlayarak ideal topolojik uzay ve topolojik uzaylarda daha önceden tanımlanan süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık ve tanımladığımız bu süreklilik çeşidine ait birçok özellik ve karakterizasyon elde ettik.

İncelemiş olduğumuz bu süreklilik çeşidinden yola çıkılarak daha zayıfı tanımlanabilir ve yeni özellikler elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Açıkgöz A. , Noiri T. , Yüksel Ş. ,2004, A decomposition of continuity in ideal topological spaces, Acta. Math. Hungar. , Vol. 105(4) ,285-289.
- [2] Açıkgöz A. ,Yüksel Ş. , Noiri T. ,2005,  $\alpha$ -I-preirresolute functions and  $\beta$ -I-preirresolute functions , Bull. Malays. Math. Sci. Soc ,Vol .28(1) ,1-8.
- [3] Açıkgöz A. , Yüksel Ş. ,Gürsel E. ,2006, On a new type of continuous functions in ideal topological space , Journal of Indian Acad. Math. , Vol 28. , 427-438.
- [4] Açıkgöz A. , Yüksel Ş. ,Gürsel E. ,2006, On a new concept of functions in ideal topological spaces, Journal of the faculty of science, Vol 29. , 30-35.
- [5] Bourbaki N. ,1966, General Topology ,Part 1, Addison-Wesley ,Reading, Mass.
- [6] Dontchev J. , 1996, On pre-I-open sets and a decomposition of I- continuity, Banyan Math. , Vol. 2.
- [7] Dontchev J. , Ganster M. and Noiri T.,2000, On p-closed spaces, Internat. J. Math. Math. Sci. , Vol. 24, 203-212.
- [8] El-Deeb N. , Hasenein I.A. , Mashhour A.S. and Noiri T. ,1983, On p-regular spaces ,Bull.Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, Vol 27(75), 311-315.
- [9] Frolik Z, 1961 , Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings, Czechoslovak Math. J., Vol. 11(86) ,381-385.
- [10] Hatır E. and Noiri T., 2002, On decompositions of continuity via idealization, Acta Math. Hungar., 96, 341-349..
- [11] Husain T., 1966, Almost continuous mappings , Prace Mat., Vol. 10, 1-7.
- [12] Jankovic D. S. , 1985,  $\theta$ - regular spaces, Internat. J. Math. Math. Sci., Vol. 8 615-619.
- [13] Jankovic D. , Hamlett T.R. ,1990, New topologies from old via ideals, Amer.Math.Monthly.,Vol. 97, 295-310.
- [14] Kuratowski K., 1933, Topologie I, Warszawa.
- [15] Levine N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, Vol. 70 , 36-41.
- [16] Mashhour A. S. , Abd El-Monsef M. E. and El-Deeb S. N., 1982 , On

- precontinuous and weak pre continuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, Vol. 53, 47-53.
- [17] Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E. and Hasanein I. A., 1984, On pretopological spaces, Bull. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, Vol. 28(76), 39-45.
- [18] Mashhour A. S. , Hasanein I. A., and El-Deeb S.N. ,1982 , A note on semi continuity and pre continuity, Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 13 , 1119-1123.
- [19] Noiri T. ,1980, On  $\delta$ -continuous functions, J. Korean Math. Soc., Vol. 16, 161-166.
- [20] Noiri T. , 2001, Strongly- $\theta$ -Precontinuous Functions , Acta. Math. Hungar. , Vol. 90, 307-316.
- [21] Nour T. M. J. , 1989, Contributions to the Theory of Bitopological Spaces, Ph.D. Thesis, Univ. of Delhi .
- [22] Pal M. C. and Bhattacharya P. ,1966, Feeble and strong forms of preirresolute functions, Bull. Malaysian Math. Soc., Vol. 19 ,63-75.
- [23] Paul R. and Bhattacharya P. , 1992, Quasi-precontinuous functions, J. Indian Acad. Math., Vol. 14 , 115-126.
- [24] Popa V. and Noiri T. ,1992, Almost weakly continuous functions, Demonstratio Math. , Vol. 25, 241-251.
- [25] Ptak V. ,1958, Completeness and the open mapping theorem, Bull. Soc. Math. France, Vol. 86, 41-74.
- [26] Reilly I. L. and Vamanamurthy M. K. , 1985 , On  $\alpha$ -continuity in topological spaces, Acta Math. Hungar., Vol. 45, 27-32.
- [27] Reilly I. L. and Vamanamurthy M. K., 1990, On some questions concerning preopen sets, Kyungpook Math. J., Vol. 30 , 87-93.
- [28] Samuels P. ,1975, A topology formed from a given topology and ideal, J.London.Math. Hungar.Soc.(2), Vol. 10, 409-416.
- [29] Vaidyanathaswamy R., 1960, Set topology, Chelsea Publishing Company, New York.
- [30] Velicko N.V. ,1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 78 , 103-118.
- [31] Yüksel Ş. , Açığöz A. ,Noiri T. ,2005, On  $\delta$ -I-Continuous functions, Turk J Math.Tubitak,39-51
- [32] Yüksel Ş. , Açığöz A., Gürsel E. , 2007, On a new type of continuous

functions in ideal topological spaces, The Journal of the Indian Academy of Mathematics, Vol. 28 ,427-438.

- [33] Yüksel Ş. , Kocaman A.H. , Açıkgöz A. ,2007, On  $\alpha$ -I-irresolute functions, Far East J.Math.Sci.(FJMS) ,Vol. 26(3), 673-684.
- [34] Yüksel Ş. , Açıkgöz A., Gürsel E. , 2007, On  $\beta$ -I-Regular Sets, Far East J. Math. Sci.(FJMS) ,Vol. 25(2), 353-366
- [35] Yüksel Ş. ,2008, Genel Topoloji