ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

PAINLEVÉ ANALİZİ VE BÄCKLUND DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

Arzu ÖĞÜN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

ÖZET

Doktora Tezi

PAINLEVÉ ANALİZİ VE BÄCKLUND DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA
LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

Arzu ÖĞÜN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Cevat KART

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde Painlevé analizinde temel yöntemler olan lineer olmayan diferensiyel denklemler için ARS algoritması, lineer olmayan kısmi türevli denklemler için de WTC algoritması verildi. Bäcklund dönüşümü, Schwarz türevi ve Lax çiftleri gibi bazı önemli kavramların Painlevé Analizi ile ilişkisi üzerinde duruldu ve bu kavramları irdeleyen örnekler incelendi.
Bu çalışmanın orijinal kısımları üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır.
Üçüncü bölümde lineer olmayan bazı önemli evrim denklemlerinin Painlevé Analizi ve Bäcklund dönüşümleri yardımıyla elde edilen bazı analitik çözümleri verilmiştir.
Dördüncü bölümde ise ele alınan değişken katsayılı Fisher ve Genelleştirilmiş Fisher denklemlerinin, kesik Painlevé açılımı yardımıyla, katsayılardaki bazı koşullar altında analitik bazı çözümleri elde edilmiştir.

Şubat 2008, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler : Evrim denklemleri, Painlevé analizi, WTC algoritması, Bäcklund dönüşümü, Schwarz türevi, Lax çiftleri, kesik Painlevé açılımı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ANALYSIS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY PAINLEVÉ ANALYSIS AND BÄCKLUND TRANSFORMATION

Arzu ÖĞÜN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Cevat KART

This thesis consists of four chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, ARS algorithm for nonlinear ordinary differential equations and WTC algorithm for nonlinear partial differential equations which are basic methods in the Painlevé analysis, are given. The relations between some important concepts such as Bäcklund transformation, Schwarzian derivative, Lax pairs and Painlevé analysis, are investigated and at the end of this chapter some examples which contain this relations are considered.
Original results are contained in the third and fourth chapters.
In the third chapter, some analytical solutions of some important nonlinear evolution equations are obtained by means of Painlevé analysis and Bäcklund transformation of these equations.
In the fourth chapter, we consider Fisher and generalized Fisher equations with variable coefficients. Using truncated Painlevé expansions of these equations, we obtained exact solutions of these equations with some constraints on coefficients.

February 2008, 55 pages

Key Words : Evolution equations, Painlevé analysis, WTC algorithm, Bäcklund transformation, Schwarzian derivative, Lax pairs, truncated Painlevé expansion.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve görevim süresince ilgisi ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cevat KART (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a ve maddi ve manevi her konuda yanımda olan, varlıklarıyla bana daima huzur veren canım annem ve ağabeyime teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Arzu ÖĞÜN

Ankara, Şubat 2008

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Tabiat olayları çoğunlukla lineer türden değildir. Bu tür olaylar çoğunlukla uygun başlangıç veya sınır koşulları ile birlikte lineer olmayan diferensiyel denklem ya da kısmi türevli denklem (ya da sistemleri) ile tanımlanırlar. Lineer olmayan denklemleri analitik olarak (kapalı form) çözebilmenin genel yöntemleri olmadığından, söz konusu denklemlerin incelenmesi oldukça zorluk arz etmektedir. Bununla beraber lineer olmayan denklemler çok zengin bir yapıya ve çözümlere sahiptir. Çeşitli açılardan bu denklemlere yaklaşarak, bu denklemlerin çözümlerine ilişkin bilgiler elde etmenin yolları aranmaktadır.

Lineer olmayan denklemlerin önemli bir sınıfı, ondokuzuncu asrın sonlarında yirminci asrın başlarında Paul Painlevé (1863-1933, Fransız) ve arkadaşları E. Picard, L. Fuchs, R. Fuchs, J. Chazy, B. Gambier, S. Kowalevski, R. Garnier tarafından ele alınmıştır. Bu matematikçiler sözü edilen denklem sınıfını, denklemlerin *aykırı (tekil) noktaları* açısından ele alarak incelediler (Ince 1956, Steeb and Euler 1988).

Verilen bir diferensiyel denkleme göre z-düzlemindeki noktaları iki sınıfa ayırmak mümkündür. Bu noktalar ya *adi noktalar* ya da *aykırı noktalar*` dır. Aykırı noktaların diferensiyel denklemler ile ilişkisi hakkında temel bilgiler bu konuda daha önce yapılan bir çalışmada verilmektedir (Yıldız 1998). Bir lineer diferensiyel denklem için aykırı nokta denildiğinde denklemin katsayılarının, lineer olmayan diferensiyel denklem için aykırı nokta denildiğinde denklemin çözümlerinin aykırı noktaları kastedilmektedir. Aykırı noktalar *sabit* ya da *hareketli* olabilir. Sabit aykırı noktalar, başlangıç ya da sınır koşullarından etkilenmezler ve lineer diferensiyel denklemlerin aykırı noktalarının tümü sabittir. Hareketli aykırı noktalar ise, lineer olmayan denklemler ile ilgilidir ve bu tür noktaların yerleri koşullara göre değişir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin aykırılıkları çoğunlukla hareketli olmak üzere sabit de olabilir. Aykırı noktalar; kaldırılabilir aykırı nokta, kutup, dallanma noktası (cebirsel, logaritmik) ve esas aykırı nokta olarak karşımıza çıkarlar.

Bir diferensiyel denklemin çözümü çeşitli türdeki aykırılıklara sahip olabilir. Kutup dışında herhangi bir aykırı nokta bir *kritik nokta* olarak adlandırılır. Bir kritik nokta, bir dallanma noktası veya esas aykırı nokta olabilir. Dallanma noktaları, sonlu sayıda dala (cebirsel dallanma) ya da sonsuz sayıda dala (logaritmik dallanma) sahip olabilir.

F, w ve w' ye göre rasyonel, z ye göre analitik bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F(z, w, w') \tag{1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. 1893 yılında E. Picard, Mittag-Leffler`e yazdığı bir mektupta şu soruyu soruyor: Acaba (1.1) biçimindeki hangi tür denklemlerin çözümleri hareketli aykırılıklar olarak sadece kutuplara sahiptir ya da başka bir anlatımla (1.1) biçimindeki hangi tür denklemlerin çözümleri sabit kritik noktalara sahiptir? Bu soruyu sordu ancak yaklaşımı pek olumlu değildi. Buna rağmen Painlevé ve arkadaşları yoğun şekilde bu problemin üzerine eğildiler. Yorucu ve hassas işlemlerden sonra hareketli aykırılıkları sadece kutuplar olan bir denklem sınıfı ortaya koydular (Ablowitz and Clarkson 1992).

Kısmi türevli denklem (KTD) ler için Painlevé özelliği ise ilk defa 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından ortaya konmuştur (Weiss *et al.* 1983). Bir KTD in Painlevé özelliğine sahip olması, onun genel çözümünün karakteristik olmayan hareketli dallanma aykırılıklarından bağımsız olmasıdır. Başka bir anlatımla bir KTD in Painlevé özelliğine sahip olması, KTD in çözümlerinin karakteristik olmayan hareketli aykırı manifold komşuluğunda tek değerli olmasıdır. Yine aynı çalışmada Painleve özelliğine sahip bazı önemli evrim denklemleri ile Bäcklund dönüşümleri, Schwarz türevi ve Lax çiftleri gibi çok önemli kavramlar arasındaki çarpıcı bağlar ortaya konmuştur (Weiss 1983, 1984, 1986).

Bu tezde Painlevé özelliğine sahip lineer olmayan bazı önemli evrim denklemleri incelenmiştir. Bu denklemlerin, denklemlere ilişkin Bäcklund dönüşümleri yardımıyla bazı analitik çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra değişken katsayılı Fisher ve Genelleştirilmiş Fisher denklemlerinin kesik Painlevé açılımları yardımıyla tam çözümleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, öncelikle diferensiyel denklemler için ARS ve kısmi türevli denklemler için de WTC algoritmaları verilecek ve daha sonra da Bäclund dönüşümü, Schwarz türevi ve Lax çiftleri gibi, kısmi türevli denklemlerin Painlevé özeliğine sahip olmasıyla doğrudan bağlantılı önemli kavramlara değinilecektir.

2.1 Diferensiyel Denklemler İçin ARS Algoritması

Tanım 2.1 Bir diferensiyel denklemin ya da diferensiyel denklem sisteminin çözümleri sadece sabit kritik noktalara sahip ise, bu durumda denklem ya da sistem *Painlevé özelliğine sahiptir* ya da *P-türündendir* denir.

Bu tanım 1978'de Ablowitz, Ramani ve Segur (ARS) tarafından verilmiştir.

Bir denklem ya da sistemin çözümü bulunarak, çözümlerin ayırt edici nitelikleri ortaya konabilir. Ancak bu çoğunlukla mümkün değildir. Çözüm hiç bulunamayabilir, bazen de bulunsa bile, o kadar karışık olabilir ki çözümlerin ayırt edici nitelikleri ortaya konamayabilir.

F fonksiyonu $w, w', w'',..., w^{(n-1)}$ e göre rasyonel, z ye göre analitik olmak üzere

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z, w, w',..., w^{(n-1)}) \tag{2.1.1}$$

ile belirtilen n-yinci basamaktan denklem için Ablowitz, Ramani, Segur tarafından 1980 yılında bir algoritma geliştirildi. *Algoritma* ile özel türde bir problemi çözmek için, standardize edilmiş herhangi bir yöntem kastedilmektedir. Bu yöntem ayrıca *aykırı (tekil) nokta analizi* ya da *Painlevé testi* adı ile de anılmaktadır (Ablowitz et al. 1978, 1980, Sachdev 1991). Sözü edilen algoritmada üç adım vardır:

a) Etkin Davranışı Bulmak

(2.1.1) denkleminin

$$w \sim \alpha(z - z_0)^p \tag{2.1.2}$$

şeklinde çözümünü arayalım. Burada z_0 keyfi olmak üzere $\mathrm{Re}(p) < 0$ olsun. p nin değerlerini belirlemek için (2.1.2), (2.1.1) denkleminde yerine konur. İki veya daha fazla terim arasında dengeleme yapılır. İncelemeler sırasında daha az etkin terimler ya da dengelemeye imkan vermeyen terimler ihmal edilir. p nin her bir seçimi için dengelenen terimlere *etkin terimler* denir. Genel olarak bu dengeleme sonucunda α katsayısı (birden çok olabilir) bulunabilir. Ancak ayrıcalıklı durumlarda α keyfi kalabilir. p nin olurlu seçimlerinden *herhangi birisi* kesir ise, denklem etkin davranış olarak p yinci basamaktan bir hareketli cebirsel dallanma gösterir. Böyle bir dallanma noktasının varlığı denklemin P-türünden olmadığını ifade eder.

Mümkün olan tüm p değerleri tamsayı ise, bu durumda her bir p için (2.1.2), hareketli kutbun delinmiş komşuluğunda geçerli Laurent serisinde ilk terimi gösteriyor olabilir. Bu durumda (2.1.1) in çözümü

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \qquad , \qquad 0 < |z - z_0| < R \qquad (2.1.3)$$

şeklindedir. Burada z_0 keyfi bir sabittir. (2.1.3) açılımında $\{a_j\}$ katsayılarının $(n-1)$ tanesi keyfi ise, bunlar z_0 da dahil olmak üzere verilen diferensiyel denklemin çözümüne ilişkin n tane integrasyon sabitleridir, bu durumda (2.1.3) delinmiş komşulukta denklemin genel (parametreli) çözümüdür. Katsayılarında keyfi a_j sabitlerinin bulunduğu kuvvetler *rezonanslar* adını alır.

b) Rezonansları Bulmak

Birinci adımda elde edilen her bir (p, α) için sadece etkin terimler alınarak orijinal diferensiyel denklem basitleştirilir ya da kesilmeye tabi tutulur. Basitleştirilmiş denklemde

$$w = \alpha(z - z_0)^p + \beta(z - z_0)^{p+r} \qquad (2.1.4)$$

ifadesi yerine konur ve β ya göre lineer terimler alınırsa,

$$Q(r)\beta(z - z_0)^q = 0 \qquad ; \qquad q \geq p + r - n \qquad (2.1.5)$$

elde edilir. $Q(r)$ polinomunun kökleri *rezonanslar*`ı belirtir. Burada belirtelim ki $Q(r) = 0$, düzgün aykırı nokta komşuluğunda bir lineer diferensiyel denklemin çözümlerinin bulunmasında kullanılan Frobenius yöntemindeki *indisel denklem*`e benzer bir nitelik göstermektedir. Köklerden biri her zaman -1 dir. Bu durum z_0 aykırı noktasının yerinin keyfiliğini yani hareketli olduğunu gösterir. Birinci adımda α keyfi ise, $r=0$ bir diğer köktür.

c) İntegrasyon Sabitlerini Bulmak

Birinci adımda elde edilen her bir (p,α) için $s \le n-1$ olmak üzere $Q(r)=0$ denkleminin pozitif tamsayı kökleri $r_1 \le r_2 \le ... \le r_s$ şeklinde olsun. Buna göre

$$w = \alpha(z-z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_s} a_j (z-z_0)^{p+j} \qquad (2.1.6)$$

ifadesini (2.1.1) denkleminin tümünde yerine koyalım. Analizin bu kısmı, (p,α) nın baskın terimlerin dengelenmesi sonucu elde edilmesi dışında, lineer diferensiyel denklemler için Frobenius yöntemine benzerdir. (2.1.6) nin ikinci yanındaki ikinci terim, $Q(r)=0$ denkleminin en büyük kökü r_s olmak üzere, r_s tane terim içerir. Lineer olmayan problemler için birkaç terim dışında işlem yapmak çoğunlukla zor olduğundan indirgeme bağıntısı genel olarak çok karışıktır.

Bu algoritmayı irdeleyen iki örnek ele alalım;

Örnek 2.1.1.

$$w'' = \frac{2ww'^2}{w^2-1} \qquad (2.1.7)$$

denklemini göz önüne alalım. (2.1.7) denkleminin düzenlenmesi sonucunda etkin terimler olarak $w^2 w''$ ve $-2ww'^2$ alınırsa (olurlu tek seçim) ve bu terimlerde (2.1.2) ifadesi yerine yazılırsa $p=-1$ ve $\alpha = keyfi$ olarak bulunur. Rezonansları bulmak için

$$w = \alpha(z-z_0)^{-1} + \beta(z-z_0)^{r-1}$$

şeklinde elde edilen bu ifade yine etkin terimlerde yerine yazılırsa ve bu ifadeden β ya göre lineer terimler alınırsa,

$$\beta\big[(r-1)(r-2)+4+4(r-1)-2\big](z-z_0)^{-5} = 0$$

bulunur ve buradan rezonansları belirten

$$r^2 + r = 0$$

denklemine varılır. Böylece rezonansların $r_1 = -1$ ve $r_2 = 0$ şeklinde olduğu görülür. Burada $r_1 = -1$ rezonansı z_0 ın keyfiliğine, $r_2 = 0$ rezonansı da α katsayısının keyfiliğine karşılık gelmektedir. Yani diferensiyel denklemin çözümü iki keyfi sabit (z_0 ve α) içermektedir. Böylece verilen diferensiyel denklem algoritmada belirtilen gereklilik koşullarını sağlamaktadır. Başka bir deyişle denklem Painlevé testini kabul eder. Gerçekten diferensiyel denklem kolayca integre edilebilirdir ve çözümü de

$$w = \tanh(Az + B)$$

şeklindedir. Burada A ve B integrasyon sabitleridir. Bu çözümün aykırılıkları hareketli basit kutuplardır. (Çözüm hareketli kritik noktalardan bağımsızdır.)

Bu incelemeden bilinmektedir ki algoritma birinci, ikinci ya da üçüncü adımda sona erebilir;

Örnek 2.1.2.

$$w'' - 10w^4 = 0 \tag{2.1.8}$$

denklemini göz önüne alalım. (2.1.8) denklemindeki bütün terimler dikkate alınırsa, $p = -\dfrac{2}{3}$ ve $\alpha = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$ şeklinde elde edilir. Buna göre (2.1.8) denklemi P-türünden değildir. (2.1.8) denkleminde

$$w = v^p \tag{2.1.9}$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{3}{5}vv'' = v'^2 - 9 \tag{2.1.10}$$

denklemi elde edilir. (2.1.10) denkleminin bir çözümünün kolayca bulunabilmesi için

$$v(z_0) = 0\ , \qquad v'(z_0) = \pm 3\ , \qquad \left(v''(z_0) = sonlu\right)$$

koşullarını yükleyelim. Bu koşullara göre denklemin çözümü $v = \pm 3(z - z_0)$ şeklinde elde edilir. Buna göre (2.1.8) denkleminin çözümü

$$w = 3^{-2/3}(z - z_0)^{-2/3}$$

şeklindedir. $z = z_0$ noktasının (2.1.8) denkleminin hareketli dallanma noktası olduğu açıkça görülmektedir. Sonuç olarak denklem P-türünden değildir.

Şunu da belirtelim ki, Painlevé testi, denklem ya da sistemi çözmeden ya da çözemeden, çözümlerin ayırt edici nitelikleri hakkında bilgi veren son derece önemli ve çağdaş bir yöntemdir. Ancak bu yöntem esas aykırılıkları karakterize etmez ve bu yüzden verilen bir diferensiyel denklemin P-türünde olması için sadece *gerek şartları* verir.

2.2 Kısmi Türevli Denklemler İçin WTC Algoritması

Kısmi türevli denklem (KTD) ler için Painlevé özelliği ilk defa 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından ortaya konmuştur. Bu inceleme tek değişkenli denklemler için verilen ARS algoritmasının ya da Painlevé ODE testinin KTD ler için genelleştirilmiş durumu olarak verilmektedir. Yukarıda sözü edilen yöntem *WTC algoritması* ya da *Painlevé PDE testi* adını alır ve bu yöntemde ifade edilen koşullar *gerek koşullar'* dır. KTD ler için Painlevé özelliği aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.2.1. Bir KTD in Painlevé özelliğine sahip olması, onun genel çözümünün karakteristik olmayan hareketli dallanma aykırılıklarından bağımsız olmasıdır. Başka bir anlatımla bir KTD in Painlevé özelliğine sahip olması, KTD in çözümlerinin karakteristik olmayan hareketli aykırı manifold komşuluğunda tek değerli olmasıdır. Yani karakteristik olmayan keyfi yüzeyler üzerinde KTD in genel çözümünün tek aykırılıklarının kutuplar olması halinde KTD Painlevé özelliğine sahiptir.

Hareketli aykırı manifold

$$\phi(z_1, z_2, ..., z_n) = 0 \qquad (2.2.1)$$

ile verilsin ve $u = u(z_1, z_2, ..., z_n)$ de KTD in bir çözümü olsun. Bu durumda

$$u = \phi^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \qquad (2.2.2)$$

olduğunu varsayalım. (2.2.2) açılımı *kutup benzeri Laurent serisi açılımı* ya da *Painlevé açılımı* olarak adlandırılır. Burada $u_0 \neq 0$, $\phi = \phi(z_1, z_2, ..., z_n)$ ve $u_j = u_j(z_1, z_2, ..., z_n)$

(2.2.1) manifoldu komşuluğunda $(z_1, z_2, ..., z_n)$ nin analitik fonksiyonlarıdır ve α bir tamsayıdır. Diferensiyel denklemlerdekine benzer bir tarzda algoritma aşağıdaki şekilde verilebilir:

1. Adım: Etkin Davranışın Bulunması

İncelemeye bu aşamada

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha} \tag{2.2.3}$$

ifadesinin KTD deki etkin terimlerde yerine konularak mümkün olan α ve u_0 değerlerinin belirlenmesi ile başlanır. Algoritmanın devam etmesi için α nın bir tamsayı olması gerekir. α ve u_0 değerleri belirlendikten sonra rezonansların bulunması için ikinci adıma geçilir.

2. Adım: Rezonansların Bulunması

Birinci adımdan elde edilen α ve u_0 değerleri kullanılarak KTD in etkin terimlerinde

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha} + u_j \phi^{\alpha+j} \tag{2.2.4}$$

yerine yazıldıktan sonra u_j için uygun bağıntılar elde edilerek $\phi^{\alpha+j-N}$ teriminin

$$\widetilde{Q}(j) = Q(j) u_j \tag{2.2.5}$$

şeklindeki katsayısından rezonansları belirleyen

$$Q(j) = 0 \tag{2.2.6}$$

denklemine varılır. Burada *N*, KTD in basamağıdır. $j = -1$, $Q(j) = 0$ denkleminin her zaman bir köküdür ve ϕ nin keyfi olmasına karşılık gelir. Hareketli kritik manifoldların olmaması için, –1 hariç diğer köklerin negatif olmayan tamsayılar olması gerekmektedir.

3. Adım: Keyfi Fonksiyonların Bulunması

İkinci adımda bulunan rezonansların en büyüğü j_s olsun. Bu durumda

$$u = \sum_{j=0}^{j_s} u_j \phi^{\alpha+j} \tag{2.2.7}$$

sonlu toplamı KTD de yerine konur ve $\phi^{\alpha+j-N}$ nin katsayısının bulunması ile

$$Q(j)u_j + R_j = 0 \tag{2.2.8}$$

elde edilir. Burada R_j, $k = 0,1,...,j-1$ olmak üzere ϕ ve u_k nın kısmi türevlerine göre bir polinomdur. j rezonansı için $Q(j) = 0$ olduğundan, R_j özdeş olarak sıfırsa (2.2.8) den u_j keyfidir. Eğer böyle değilse seriye $a_j + b_j \ln\phi$ şeklinde logaritmik terimler eklenmelidir. Ancak bu ekleme ile logaritmik aykırılıklar çözüm manifoldunda gözükecektir. Böylece $R_j = 0$ olması durumu çözümün j rezonansında hareketli kritik manifolddan bağımsız olması için bir koşuldur. Bu yolla genel çözümün hareketli kritik manifoldlardan bağımsız olup olmadığı kontrol edilebilir.

2.3 Bäcklund Dönüşümü

Bäcklund dönüşümleri 1880 lerde diferensiyel geometri ve diferensiyel denklemler teorileri arasındaki ilişkilerde kullanılması sonucunda ortaya konmuş ve *Bäcklund dönüşümü*, ilk kez A. V. Bäcklund tarafından

$$u_{xt} = \sin u$$

ile belirtilen sine-Gordon denklemi ile ilgili olarak ortaya çıkarılmıştır.

Bir Bäcklund dönüşümü, kısaca verilen bir denklemin çözümü ile ya aynı denklemin bir çözümü ya da başka bir denklemin çözümü arasında ilişki kuran bir denklemler sistemi olarak ifade edilebilir.

Şimdi Bäcklund dönüşümünün daha açık bir tanımını verelim:

Tanım 2.3.1. x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere, u ve v fonksiyonları için iki kısmi türevli denklemin

$$P(u) = 0 \qquad , \qquad Q(v) = 0 \tag{2.3.1}$$

şeklinde ifade edildiğini kabul edelim. Burada P ve Q genel olarak lineer olmayan operatörlerdir. $R_i = 0$, u ve v fonksiyonları arasında

$$R_i(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t, ..., x, t) = 0 \quad , \quad i = 1,2 \tag{2.3.2}$$

şeklindeki bağıntıların bir cümlesi olsun. Eğer $P(u) = 0$ olduğunda, v için (2.3.2) integre edilebilir ve elde edilen v, $Q(v) = 0$ denkleminin bir çözümü ise, bu durumda (2.3.2) ile verilen $R_i = 0$ bağıntısı bir *Bäcklund dönüşümü*'dür. Benzer ifade u için de geçerlidir. $P = Q$ ise, bu durumda u, v aynı denklemi sağlar ve $R_i = 0$ bir *auto-Bäcklund dönüşümü* adını alır. Burada integre edilebilir olma şu anlamdadır: v için, $v_x = f(x,t)$ ve $v_t = g(x,t)$ nin integre edilebilir olması $v_{xt} = v_{tx}$ olmasına eşdeğerdir; yani f ve g uyumludur (Drazin and Johnson 1996). (2.3.2) ile belirtilen Bäcklund dönüşümü, (2.3.1) ile verilen orijinal denklemlerden daha basit ise, bu durumda (2.3.1) denklemlerinin çözümlerine bu tür bir yaklaşım son derece yarar sağlamaktadır.

Örnek 2.3.1. Kompleks fonksiyonlar teorisinde

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x \tag{2.3.3}$$

ile verilen Cauchy-Riemann koşulları Laplace denklemini kendisine dönüştüren bir Bäcklund dönüşümüdür. Bunu görmek için (2.3.3) den u yok edilirse

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{2.3.4}$$

Laplace denklemi elde edilir. Benzer ifade u için de geçerlidir.

Örnek 2.3.2. Bäcklund 1880'deki çalışmasında

$$u_{xt} = \sin u \tag{2.3.5}$$

sine-Gordon denklemini kendisine dönüştüren

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)_x = a\sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \quad , \quad \left(\frac{u-v}{2}\right)_t = \frac{1}{a}\sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{2.3.6}$$

şeklindeki dönüşümü vermiştir. Burada $a \neq 0$ keyfi reel bir sabittir

2.4 Lax Çiftleri

Lineer olmayan kısmi türevli denklemler sınıfının çözülebileceği genel bir yöntem yoktur ve çözümler çoğunlukla özel yöntemlerle elde edilebilmektedir. 1967 yılında

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura verilen başlangıç koşulu için KdV denklemini Ters Saçılım Yöntemi (IST) ile çözerek önemli bir metod geliştirdiler. Daha sonra P. D. Lax, 1968 de KdV denklemini lineer denklemler yardımı ile çözmekle ters saçılım yöntemini daha genel bir çatı içerisine yerleştirmiştir ve bu çatı daha sonra diğer kısmi türevli denklemleri çözmede bir yöntem olarak tekniği genelleştirmenin yolunu açmıştır. Şimdi kısaca temel düşüncenin Lax'a ait olduğu bu yaklaşımı açıklayalım:

L, spektral problemin operatörü ve *M* de zaman evrim denkleminin operatörü olmak üzere aşağıda belirtilen *L* ve *M* operatörlerini göz önüne alalım:

$$Lv = \lambda v \tag{2.4.1}$$

$$v_t = Mv \tag{2.4.2}$$

(2.4.1) denkleminin her iki yanına $\frac{\partial}{\partial t}$ uygulanırsa

$$L_t v + Lv_t = \lambda_t v + \lambda v_t \tag{2.4.3}$$

bulunur. (2.4.3) eşitliğinde, (2.4.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_t v + LMv &= \lambda_t v + \lambda Mv \\ &= \lambda_t v + M\lambda v \\ &= \lambda_t v + MLv \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$[L_t + (LM - ML)]v = \lambda_t v \tag{2.4.4}$$

elde edilir. Buradan aşikar olmayan *v(x,t)* özfonksiyonlarının bulunması $\lambda_t = 0$ kabulü altında

$$L_t + [L, M] = 0 \tag{2.4.5}$$

olması ile eşdeğerdir. Burada $[L, M]$ gösterimi

$$[L, M] = LM - ML \tag{2.4.6}$$

anlamındadır. *L* ve *M* operatörlerinin uyumluluk koşulu olarak lineer olmayan bir kısmi türevli denklem ortaya çıkıyorsa, bu durumda (2.4.5) ile verilen bağıntı *Lax denklemi* ve aynı zamanda KTD nin *Lax gösterimi* adını alır. *L* ve *M* operatörleri de *Lax çifti* olarak adlandırılır (Ablowitz and Clarkson 1992).

Uygun seçilen (2.4.5) Lax denklemi, lineer olmayan bir evrim denklemini ifade eder. Örneğin,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \tag{2.4.7a}$$

$$M = (\gamma + u_x) - (4\lambda + 2u)\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.4.7b}$$

olarak alınırsa, bu durumda u

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.4.8}$$

ile verilen KdV denklemini ve *L, M* operatörleri de (2.4.5) denklemini sağlar. Buna göre KdV denklemi, (2.4.7a-b) ile verilen iki *lineer* operatörün uyumluluk koşuludur.

Lax, L verildiğinde (2.4.5) Lax denklemini sağlayan M operatörünün nasıl oluşturulacağını aşikar olmayacak şekilde göstermiştir. Bu yöntemde karşılaşılan iki temel zorluk vardır. Birincisi (2.4.1) ve (2.4.2) yi sağlayacak şekilde L operatörünün seçilmesi ve sonra da ona bağlı olarak M operatörünün bulunmasıdır. İkincisi ise verilen bir KTD için onun bir Lax gösterimine sahip olup olmadığının sistematik bir yönteminin olmamasıdır.

2.5 Schwarz Türevi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{2.5.1}$$

denkleminin bağımsız iki özel çözümü y_1 ve y_2 olsun. (2.5.1) denkleminin

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0 \tag{2.5.2}$$

şeklindeki kanonik formunu gözönüne alalım. Burada

$$I = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} \tag{2.5.3}$$

şeklindedir. (2.5.2) denkleminin bağımsız iki özel çözümü v_1 ve v_2 olmak üzere, bu çözümler arasında

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{2.5.4}$$

ilişkisi vardır. Çözümlerin bu oranını *s* ile gösterilirse,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{v_1}{v_2} = s \tag{2.5.5}$$

bu durumda *s* nin sağladığı diferensiyel denklem

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = 2I \tag{2.5.6}$$

şeklinde elde edilir. (2.5.6) denkleminin birinci yanında bulunan *s* nin *x* e göre diferensiyel katsayılar fonksiyonu *Schwarz türevi* olarak adlandırılır ve $\{s, x\}$ ile gösterilir (Forsyth 1951). Schwarz türevi

$$\{s, x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \left(\frac{s''}{s'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 \tag{2.5.7}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Schwarz türevinin bir çok önemli özelikleri vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmektedir:

i. $\left\{\frac{as+b}{cs+d}, x\right\} = \{s, x\}$, a, b, c, d *sabitlerdir.*

ii. $\{s, x\} = -\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \{x, s\}$

iii. $\left\{\frac{as+b}{cs+d}, \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right\} = \frac{(\gamma x+\delta)^4}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}\{s, x\}$, $ad - bc \neq 0$ *ve* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ dır.

iv. $\{s, x\} = \left\{\frac{ax+b}{cx+d}, x\right\} = 0$

Yukarıdaki özeliklerden ikisinin ispatını verelim:

İspat i.

$$w = \frac{as+b}{cs+d} \tag{2.5.8}$$

olsun. Buna göre

$$w' = \frac{ad-bc}{(cs+d)^2} s' \tag{2.5.9a}$$

$$w'' = \frac{ad-bc}{(cs+d)^2} s'' - \frac{2c(ad-bc)}{(cs+d)^3} s'^2 \tag{2.5.9b}$$

yazılabilir. (2.5.9a-b) ile verilen değerler kullanılarak (2.5.8) ifadesine ilişkin Schwarz türevi

$$\begin{aligned} \{w,x\} &= \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 \\ &= \left(\frac{s''}{s'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \{s,x\} \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

şeklinde elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

İspat iv. Bu özelliğin varlığının gösterilmesi $\{s,x\}=0$ ya da

$$\{s,x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = 0 \tag{2.5.11}$$

diferensiyel denkleminin çözümünün bulunmasına eşdeğerdir. (2.5.11) denkleminin her iki yanı $(s')^{-\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa,

$$(s')^{-\frac{3}{2}} s''' - \frac{3}{2}(s')^{\frac{-5}{2}}(s'')^2 = 0 \tag{2.5.12}$$

denklemine varılır. (2.5.12) total diferensiyel denklemdir ve bu denkleme ilişkin bir ara integral

$$A\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)^2 \tag{2.5.13}$$

şeklinde elde edilir. Burada A keyfi bir sabittir. (2.5.13) denklemi s bağımlı değişkenini içermemektedir. Buna göre

$$\frac{ds}{dx} = p \quad , \quad \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \tag{2.5.14}$$

konumu yardımıyla (2.5.13) denkleminin çözümü

$$p^{-\frac{1}{2}} = C_1 x + C_2 \qquad (2.5.15)$$

biçiminde ve buna bağlı olarak (2.5.11) denkleminin çözümü dört keyfi sabit içermek üzere

$$s = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (2.5.16)$$

şeklinde bulunur. Ancak (2.5.11) denklemi üçüncü basamaktan olduğundan, çözümün üç keyfi sabit kapsama kuralı geçerlidir. Elde edilen (2.5.16) çözümü, Schwarz türevinde kullanılırsa

$$\{s, x\} = \left\{ \frac{ax+b}{cx+d}, x \right\} \qquad (2.5.17)$$

yazılabilir. İlk özelik nedeniyle

$$\{s, x\} = \left\{ \frac{ax+b}{cx+d}, x \right\} = \{x, x\} = 0 \qquad (2.5.18)$$

olduğu görülebilir. Böylece ispat tamamlanır.

2.6 Verilen Kavramların Painlevé Analizi ile İlişkisi

Önceki kesimlerde verilen yöntem ve kavramlar, Painlevé analizi ile yakından ilişkilidir. Şimdi bunlar üzerinde duralım:

Kesim 2.4 de sözü edilen ters saçılım yöntemi, Painlevé analizinden bağımsız olarak gelişmiştir. Ancak daha sonraki yıllarda bu iki alan arasındaki ilişkiler ve özellikle Painlevé analizinin IST ile çözülebilen KTD leri karakterize eden özellikleri ortaya konmuştur. Ablowitz, Ramani ve Segur 1978 ve 1980 de yaptıkları çalışmalarda bu iki konu arasında önemli bir bağ teşkil eden aşağıdaki tahmini (*Painlevé tahmini*) yaptılar:

Bir IST ile çözülebilen lineer olmayan bir KTD den bir tam indirgeme yolu ile elde edilen her lineer olmayan diferensiyel denklem Painlevé özelliğine sahiptir. Başka bir anlatım ile*, lineer olmayan bir KTD den tam benzerlik indirgemesi ile elde edilen her* *lineer olmayan diferensiyel denklem P-türünde ise, bu durumda lineer olmayan KTD, IST ile çözülebilir.*

Bu tahmin ile KTD ler ve Painlevé analizi arasında önemli bir ilişki kurulmuş bulunmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi IST ile çözüm yöntemi ancak Lax'ın 1968 de yaptığı çalışma ile daha genel bir durum arz eder hale gelmiştir. Bu yöntemin esası da Lax çiftlerinin elde edilmesine dayanır ve bir KTD nin IST ile çözülmesindeki en ciddi adımlardan birisini teşkil eder. Verilen bir KTD nin IST ile çözülüp çözülemeyeceğine karar vermede ve eğer çözülebiliyorsa onun Lax çiftinin bulunmasında Painlevé analizi devreye girer. Yine aykırı manifold analizinin gözönüne alınması bizleri bu denklemlerin Schwarz türevi cinsinden ifade edilmesine götürür. Painlevé analizine sahip lineer olmayan KTD lerin geniş bir sınıfı Schwarz türevi cinsinden ifade edilmesi ile karakterize edilebilir (Weiss 1983, 1986). Verilen denklemin bu tür ifadesinden faydalanarak denkleme ilişkin Lax çiftinin elde edilmesi de mümkündür. Ayrıca IST ile Bäcklund dönüşümü arasında da yakın bir ilişki vardır: IST ile çözülebilen her evrim denklemi bir Bäcklund dönüşümüne sahiptir. Zaten IST de bir Bäcklund dönüşümüdür (Ablowitz and Segur 1985). Bir KTD Painlevé özelliğine sahip olduğunda onun Bäcklund dönüşümü, aykırı manifold analizinde kullanılan Painlevé açılımı sabit teriminde kesilerek kolayca elde edilebilir.

Görüldüğü üzere Painlevé analizi hem verilen bu araçların varlığının belirlenmesinde, hem bunlar yardımı ile KTD lerin ayırt edici niteliklerinin ortaya çıkarılmasında, hem de bu araçların elde edilmesinde önemli rol oynar.

Şimdi yukarıdaki bu bağları açıklayan örnekler verelim:

Örnek 2.6.1. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \tag{2.6.1}$$

şeklindeki KdV denklemini göz önüne alalım (Weiss 1983). Çözümün (2.2.2) şeklinde bir açılıma sahip olduğunu varsayalım.

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha}$$

ifadesi (2.6.1) KdV denkleminin etkin terimlerinde yerine yazılır ve dengeleme yapılırsa

$$\alpha = -2 \qquad , \qquad u_0 = -12\delta\phi_x^{\,2} \tag{2.6.2}$$

olarak bulunur. Rezonansları bulmak için (2.6.2) ile verilen değerler (2.2.4) de kullanılarak

$$u \sim u_0 \phi^{-2} + u_j \phi^{j-2}$$

şeklinde elde edilen bu ifade etkin terimlerde yerine yazılır. Gerekli işlemlerden sonra rezonansları belirleyen

$$Q(j) = (j+1)(j-4)(j-6) = 0$$

denklemine varılır. $j = -1$ rezonansı ϕ nin keyfiliğine karşılık gelir. Diğer keyfi fonksiyonları bulmak için,

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-2}$$

toplamı, (2.6.1) KdV denkleminde yerine yazıldıktan sonra elde edilen indirgeme bağıntısı kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$j = 0:\ u_0 = -12\delta\phi_x^{\,2} \tag{2.6.3a}$$

$$j = 1:\ u_1 = 12\delta\phi_{xx} \tag{2.6.3b}$$

$$j = 2:\ \phi_x\phi_t + u_2\phi_x^{\,2} + 4\sigma\phi_x\phi_{xxx} - 3\delta\phi_{xx}^{\,2} = 0 \tag{2.6.3c}$$

$$j = 3:\ \phi_{xt} + u_2\phi_{xx} - u_3\phi_x^{\,2} + \delta\phi_{xxxx} = 0 \tag{2.6.3d}$$

$$j = 4:\ (\phi_{xt} + u_2\phi_{xx} - u_3\phi_x^{\,2} + \delta\phi_{xxxx})_x = 0 \tag{2.6.3e}$$

$$\begin{aligned} j = 5:\ & u_{2,t} + u_2u_{2,x} + \delta u_{2,xxx} + u_3\phi_t + u_1u_{3,x} + u_3u_{1,x} + u_0u_{4,x} + u_{0,x}u_4 + \\ & u_0u_5\phi_x + u_1u_4\phi_x + u_2u_3\phi_x + \delta(3u_{3,xx}\phi_x + 6u_{4,x}\phi_x^{\,2} + 3u_{3,x}\phi_{xx} + \\ & 6u_5\phi_x^{\,2} + 6u_4\phi_x\phi_{xx} + u_3\phi_{xxx}) = 0 \end{aligned} \tag{2.6.3f}$$

$$\begin{aligned} j = 6:\ & [u_{2,t} + u_2u_{2,x} + \delta u_{2,xxx} + u_3\phi_t + u_1u_{3,x} + u_3u_{1,x} + u_0u_{4,x} + u_{0,x}u_4 + \\ & u_0u_5\phi_x + u_1u_4\phi_x + u_2u_3\phi_x + \delta(3u_{3,xx}\phi_x + 6u_{4,x}\phi_x^{\,2} + 3u_{3,x}\phi_{xx} + \\ & 6u_5\phi_x^{\,2} + 6u_4\phi_x\phi_{xx} + u_3\phi_{xxx})]_x = 0 \end{aligned} \tag{2.6.3g}$$

(2.6.3d) nedeni ile (2.6.3e) özdeş olarak sağlanır ve u_4 keyfi kalır. (2.6.3f) nedeni ile (2.6.3g) özdeş olarak sağlanır ve u_6 keyfi kalır. Böylece (2.6.1) KdV denkleminin (2.2.2) şeklindeki çözümü üç tane keyfi fonksiyon içermektedir. Buradan (2.6.1) KdV denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahiptir.

KdV Denklemi için Bäcklund Dönüşümü

$u_4 = u_6 = 0$ almak genelliği bozmaz. Bu durumda $u_3 = 0$ olması gerekliliği altında

$$u_j = 0 \qquad ; \qquad j \geq 3 \tag{2.6.4}$$

ve buna bağlı olarak

$$u_{2,t} + u_2 u_{2,x} + \delta u_{2,xxx} = 0 \tag{2.6.5}$$

olduğu görülebilir. (2.6.5) den u_2 nin (2.6.1) KdV denklemini sağladığı açıktır. Böylece (2.6.4) den dolayı (2.2.2) Painlevé açılımı

$$u = \phi^{-2}(u_0 + u_1\phi + u_2\phi^2) \tag{2.6.6}$$

şeklini alır. (2.6.3a,b,c) de elde edilen değerler (2.6.6) ifadesinde kullanılırsa, KdV denklemi için Bäcklund dönüşümü

$$u = 12\delta \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln \phi) + u_2 \tag{2.6.7}$$

biçiminde elde edilir.

KdV Denklemi için Schwarz Türevi:

Şimdi (2.6.3d) de $u_3 = 0$ alınırsa

$$\phi_{xt} + \phi_{xx} u_2 + \delta \phi_{xxxx} = 0 \tag{2.6.8}$$

eşitliğine varılır. (2.6.3c) ile (2.6.8) arasından u_2 yok edilirse

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\phi_t}{\phi_x} + \delta\{\phi; x\}\right] = 0 \tag{2.6.9}$$

bulunur ve buradan bir kez integral alınarak (2.6.1) KdV denkleminin Schwarz türevi cinsinden ifadesi

$$\frac{\phi_t}{\phi_x} + \delta\{\phi; x\} = \lambda \tag{2.6.10}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\{\phi, x\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)^2$$

dir.

KdV Denklemi için Lax Çiftleri:

Schwarz türevinin daha önce verilen özelikleri göz önünde tutularak $\phi = \frac{v_1}{v_2}$ alınabilir. v_1 ve v_2 Lax çiftlerini oluşturmada kullanacağımız lineer denklem sistemini sağlamak üzere, $\phi = \frac{v_1}{v_2}$ değeri (2.6.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\psi_t}{\theta_x} + \delta\left(\{\theta, x\} - 2\frac{v_{2,xx}}{v_2} + 2\frac{\theta_{xx}}{\theta_x}\frac{v_{2,x}}{v_2}\right) = \lambda \qquad (2.6.11)$$

bulunur. Burada kısalık açısından

$$\theta_x = v_2 v_{1,x} - v_1 v_{2,x} \qquad (2.6.12a)$$

$$\psi_t = v_2 v_{1,t} - v_1 v_{2,t} \qquad (2.6.12b)$$

gösterimi kullanılmıştır. v_1 ve v_2

$$v_{xx} = av \qquad (2.6.13a)$$

$$v_t = bv_x + cv \qquad (2.6.13b)$$

denklemlerini sağlıyorsa, bu durumda

$$\theta_{xx} = 0 \quad , \quad \psi_t = b\theta_x \qquad (2.6.14)$$

elde edilir. (2.6.14) ile verilen değerler (2.6.11) denkleminde yerine yazılır ve (2.6.13) için

$$\mathrm{v}_{\mathrm{xxt}} = \mathrm{v}_{\mathrm{txx}}$$

uyumluluk koşulu kullanılarak *a, b, c* katsayıları u_2 ye bağlı olarak bulunur. Buna göre (2.6.1) KdV denklemi için Lax çifti aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$v_{xx} = -\frac{1}{6\delta}(u_2 + \lambda)v \qquad (2.6.15a)$$

$$v_t = \left(-\frac{u_2}{3} + \frac{2}{3}\lambda\right)v_x + \frac{1}{6}u_{2,x}v \qquad (2.6.15b)$$

Burada u_2, KdV denkleminin bir çözümüdür.

Örnek 2.6.2. Burgers Denklemi

$$u_t + uu_x = \sigma u_{xx} \tag{2.6.16}$$

şeklindeki Burgers denklemini gözönüne alalım (Weiss 1983). Çözümün (2.2.2) şeklinde bir açılıma sahip olduğunu varsayalım.

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha}$$

ifadesini (2.6.16) Burgers denkleminin etkin terimlerinde (burada ikinci ve üçüncü terimlerdir) yerine yazılırsa

$$u_0 u_{o,x} \phi^{2\alpha} + \alpha u_0{}^2 \phi_x \phi^{2\alpha-1} = \sigma[u_{o,xx}\phi^{\alpha} + 2\alpha u_{0,x}\phi_x \phi^{\alpha-1} + \alpha u_0 \phi_{xx}\phi^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)u_0 \phi_x{}^2 \phi^{\alpha-2}]$$

elde edilir. Birinci yandaki birinci terim ile ikinci yandaki ikinci terim ya da birinci yandaki ikinci terim ile ikinci yandaki dördüncü terim dikkate alınarak dengeleme yapılırsa

$$\alpha = -1 \qquad , \qquad u_0 = -2\sigma\phi_x \tag{2.6.17}$$

olarak bulunur. Rezonansları bulmak için, (2.6.17) ile verilen değerler (2.2.4) de kullanılarak elde edilen

$$u \sim u_0 \phi^{-1} + u_j \phi^{j-1}$$

bu ifade etkin terimlerde yerine yazılır ve u_j ye göre lineer terimler gruplandırılırsa, ϕ^{j-3} terimlerinin katsayılarından

$$\sigma(j+1)(j-2)\phi_x{}^2 u_j = F(u_{j-1},\ldots,\phi_x,\phi_{xx},\ldots)$$

eşitliğine varılır. Buradan rezonansları belirleyen

$$Q(j) = (j+1)(j-2) = 0$$

denklemi elde edilir. $j=-1$ rezonansı ϕ nin keyfiliğine karşılık gelir. $j=2$ rezonansındaki keyfi fonksiyonu bulmak için şu şekilde hareket edilir:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-1} \tag{2.6.18}$$

toplamı (2.6.16) Burgers denkleminde yerine yazılarak indirgeme bağıntısı

$$u_{j-2,t} + (j-2)u_{j-1}\phi_t + \sum_{m=0}^{j} u_{j-m}[u_{m-1,x} + (m-1)u_m\phi_x] =$$
$$\sigma[u_{j-2,xx} + 2(j-2)u_{j-1,x}\phi_x + (j-2)u_{j-1}\phi_{xx} + (j-1)(j-2)u_j\phi_x{}^2] \tag{2.6.19}$$

şeklinde bulunur. (2.6.19) indirgeme bağıntısından

$$j=0:\ u_0 = -2\sigma\phi_x \tag{2.6.20a}$$

$$j=1:\ \phi_t + u_1\phi_x = \sigma\phi_{xx} \tag{2.6.20b}$$

$$j=2:\ (\phi_t + u_1\phi_x - \sigma\phi_{xx})_x = 0 \tag{2.6.20c}$$

yazılabilir. (2.6.20b) nedeni ile (2.6.20c) özdeş olarak sağlanır ve buradan u_2 keyfi kalır. (2.6.19) indirgeme bağıntısı kullanılarak, $j>2$ için u_j katsayıları u_0, u_1 ve u_2 cinsinden tek olarak belirlenebilir. Böylece (2.6.16) Burgers denkleminin (2.6.18) şeklindeki çözümü, ϕ ve u_2 şeklinde iki tane keyfi fonksiyon içermektedir. Buradan (2.6.16) Burgers denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahiptir.

Burgers Denklemi için Bäcklund Dönüşümü:

u_2 keyfi olduğu için, $u_2 = 0$ almak genelliği bozmaz. Bu durumda

$$u_j = 0 \quad , \quad j \geq 2 \tag{2.6.21a}$$

ve buna bağlı olarak

$$u_{1,t} + u_1 u_{1,x} = \sigma u_{1,xx} \tag{2.6.21b}$$

olduğu görülebilir. (2.6.21b) den u_1 in (2.6.16) Burgers denklemini sağladığı açıktır. Bu durumda (2.6.21a) dan dolayı (2.2.2) Painlevé açılımı

$$u = \phi^{-1}(u_0 + u_1\phi) \tag{2.6.22}$$

şeklini alır. (2.6.20a) ile verilen u_0 değeri (2.6.22) de kullanılırsa, Burgers denklemi için Bäcklund dönüşümü

$$u = -2\sigma\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi + u_1 \tag{2.6.23}$$

biçiminde elde edilir.

Burgers Denklemi için Schwarz Türevi:

(2.6.20b) ile (2.6.21b) arasından u_1 yok edilirse, (2.6.16) Burgers denkleminin Schwarz türevi cinsinden ifadesi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2-2\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)+\sigma^2\frac{\partial}{\partial x}\{\phi;x\}=0 \qquad (2.6.24)$$

şeklinde elde edilir.

Burgers Denklemi için Lax Çiftleri:

Bir önceki örnekte olduğu gibi $\phi=\frac{v_1}{v_2}$ değeri (2.6.24) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi_t}{\theta_x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{\psi_t}{\theta_x}\right)^2-2\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\psi_t}{\theta_x}\right)\\&+\sigma^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\{\theta;x\}-2\frac{v_{2,xx}}{v_2}+2\frac{\theta_{xx}}{\theta_x}\frac{v_{2,xx}}{v_2}\right)=0\end{aligned} \qquad (2.6.25)$$

eşitliğine varılır. Burada (2.6.12a-b) gösterimleri kullanılmıştır. v_1, v_2

$$v_{xx}=av \qquad (2.6.26a)$$

$$v_t=bv_x+cv \qquad (2.6.26b)$$

denklemlerini sağlamak üzere, (2.6.25) denklemi kullanılarak Örnek 2.6.1 de olduğu gibi benzer işlemler sonucu *a* ve *c* katsayıları *b* ye bağlı olarak belirlenir. Bu değerlerin (2.6.26a-b) de kullanılması ile Burgers denklemi için Lax çifti aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$v_{xx}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}b_x+\frac{1}{2}b^2\right)v \qquad (2.6.27a)$$

$$v_t=bv_x-\frac{1}{2}b_xv \qquad (2.6.27b)$$

Burada

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_x + \frac{1}{2} b^2 \qquad ; \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

şeklinde alınmıştır.

Örnek 2.6.3 Fisher Denklemi

Şimdi daha önce Fisher tarafından ele alınan

$$u_t = k^2 u_{xx} + au(1-u) \tag{2.6.28}$$

şeklindeki denklemi göz önüne alalım (Ugurlu and Kart 2003). (2.6.28) Fisher denkleminin çözümünün

$$u = \phi^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{2.6.29}$$

şeklinde bir açılıma sahip olduğunu varsayalım.

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha}$$

ifadesi, (2.6.28) Fisher denkleminin etkin terimlerinde (burada etkin terimler $k^2 u_{xx}$ ve $-au^2$ olarak alınmıştır) yerine yazılırsa

$$\alpha = -2 \qquad , \qquad u_0 = \frac{6k^2}{a} \phi_x^{\,2} \tag{2.6.30}$$

olarak bulunur. Rezonansları bulmak için

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha} + u_j \phi^{\alpha + j} \tag{2.6.31}$$

ifadesinde $\alpha = -2$ değeri kullanılarak elde edilen

$$u \sim u_0 \phi^{-2} + u_j \phi^{j-2} \tag{2.6.32}$$

ifadesi, etkin terimlerde yerine yazılırsa, gerekli işlemlerden sonra rezonansları belirleyen

$$Q(j) = (j+1)(j-6) = 0 \tag{2.6.33}$$

denklemi elde edilir. (2.6.33) eşitliğinden rezonanslar

$$j = -1 \qquad ve \qquad j = 6 \tag{2.6.34}$$

olarak bulunur.

$j = -1$ rezonansı ϕ nin keyfiliğine karşılık gelir. $j = 6$ rezonansına karşılık gelen keyfi fonksiyonu bulmak için şu şekilde hareket edilir:

$$u=\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^{j-2} \tag{2.6.35}$$

toplamı (2.6.28) Fisher denkleminde yerine yazılarak indirgeme bağıntısı $j\geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_{j-2,t}+(j-3)\phi_t u_{j-1}-k^2[\, u_{j-2,xx}+2(j-3)\phi_x u_{j-1,x}+(j-3)u_{j-1}\phi_{xx} \\ +(j-2)(j-3)u_j\phi_x^{\ 2}\,]-au_{j-2}+a\sum_{m=0}^{j}u_{j-m}u_m=0 \end{aligned} \tag{2.6.36}$$

şeklinde bulunur. (2.6.36) indirgeme bağıntısı kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$j=0:\ u_0=\frac{6k^2}{a}\phi_x^{\ 2} \tag{2.6.37a}$$

$$j=1:\ u_1=\frac{6}{5a}(\phi_t-5k^2\phi_{xx}) \tag{2.6.37b}$$

$$\begin{aligned} j=2:\ \frac{12k^2}{5}\phi_x\phi_{tx}+\frac{1}{25}\phi_t^{\ 2}-\frac{6k^2}{5}\phi_t\phi_{xx}+3k^4\phi_{xx}^{\ 2}-4k^4\phi_x\phi_{xxx} \\ -ak^2\phi_x^{\ 2}u_2=0 \end{aligned} \tag{2.6.37c}$$

$$\begin{aligned} j=3:\ \frac{6}{5}\phi_{tt}-\frac{36k^2}{5}\phi_{txx}+6k^4\phi_{xxxx}-\frac{6a}{5}\phi_t+6ak^2\phi_{xx} \\ +\frac{12a}{5}\left(\phi_t-5k^2\phi_{xx}\right)u_2+12ak^2\phi_x^{\ 2}u_3=0 \end{aligned} \tag{2.6.37d}$$

$$\begin{aligned} j=4:\ u_{2,t}+\phi_t u_3-k^2\left(u_{2,xx}+2\phi_x u_{3,x}+\phi_{xx}u_3+2\phi_x^{\ 2}u_4\right)-au_2 \\ +a\left(2u_0u_4+2u_1u_3+u_2^{\ 2}\right)=0 \end{aligned} \tag{2.6.37e}$$

$$\begin{aligned} j=5:\ u_{3,t}+2\phi_t u_4-k^2\left(u_{3,xx}+4\phi_x u_{4,x}+2\phi_{xx}u_4+6\phi_x^{\ 2}u_5\right)-au_3 \\ +2a\left(u_0u_5+u_1u_4+u_2u_3\right)=0 \end{aligned} \tag{2.6.37f}$$

$$\begin{aligned} j=6:\ u_{4,t}+3\phi_t u_5-k^2\left(u_{4,xx}+6\phi_x u_{5,x}+3\phi_{xx}u_5+12\phi_x^{\ 2}u_6\right)-au_4 \\ +a\left(2u_0u_6+2u_1u_5+2u_2u_4+u_3^{\ 2}\right)=0 \end{aligned} \tag{2.6.37g}$$

(2.6.37a,b,c,d) de verilen u_0,u_1,u_2,u_3 ifadeleri göz önünde bulundurularak u_4 ve u_5 in açık ifadeleri (2.6.37e) ve (2.6.37f) den elde edilebilir.Ancak söz konusu bu ifadeler oldukça uzun olduğu için burada verilmemiştir. (2.6.37g) nedeni ile u_6 fonksiyonu keyfi kalır. Böylece (2.6.28) Fisher denkleminin (2.6.29) şeklindeki çözümü iki tane keyfi fonksiyon içermektedir. Buradan (2.6.28) Fisher denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahiptir.

Fisher Denklemi için Bäcklund Dönüşümü

u_6 keyfi olduğu için $u_6 = 0$ almak genelliği bozmaz. (2.6.37e) den dolayı u_2, (2.6.28) Fisher denklemin sağlıyorsa, bu durumda $u_3 = 0$ olması gerekliliği altında

$$u_j = 0 \qquad ; \qquad j \geq 3 \tag{2.6.38}$$

elde edilir. (2.6.37e) eşitliğinden

$$u_{2,t} = k^2 u_{2,xx} + a u_2 (1 - u_2) \tag{2.6.39}$$

olduğu kolayca görülebilir. Buna göre (2.6.35) ile verilen açılım

$$u = \phi^{-2}\left(u_0 + u_1\phi + u_2\phi^2\right) \tag{2.6.40}$$

şeklini alır. (2.6.37a-b) ile verilen değerler (2.6.40) ifadesinde kullanılırsa

$$u = \frac{6k^2}{a}\frac{\phi_x{}^2}{\phi^2} + \frac{6}{5a}(\phi_t - 5k^2\phi_{xx})\frac{1}{\phi} + u_2 \tag{2.6.41}$$

bulunur. (2.6.41) ifadesi düzenlenirse (2.6.28) Fisher denklemi için Bäcklund dönüşümü

$$u = -\frac{6k^2}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi + \frac{6}{5a}\frac{\partial}{\partial t}\ln\phi + u_2 \tag{2.6.42}$$

biçiminde elde edilir.

Fisher Denklemi için Schwarz Türevi

(2.6.37d) eşitliğinde $u_3 = 0$ alınırsa

$$\frac{6}{5}\phi_{tt} - \frac{36k^2}{5}\phi_{txx} + 6k^4\phi_{xxxx} - \frac{6a}{5}\phi_t + 6ak^2\phi_{xx} + \frac{12a}{5}\left(\phi_t - 5k^2\phi_{xx}\right)u_2 = 0 \tag{2.6.43}$$

elde edilir. (2.6.37c) ve (2.6.43) arasından u_2 yok edilirse, Fisher denkleminin Schwarz türevi cinsinden ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$-5k^2 \frac{\partial}{\partial x}\{\phi;x\} + \frac{1}{25k^4}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^3 - \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right) + \frac{7}{5k^2}\frac{\phi_t}{\phi_x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)$$
$$+6\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right) + 2\frac{\phi_t}{\phi_x}\{\phi;x\} = 0 \qquad (2.6.44)$$

Burada

$$\{\phi;x\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)^2$$

ile tanımlı ϕ nin Schwarz türevidir. Schwarz türevi ve $\frac{\phi_t}{\phi_x}$ terimi

$$\psi = \frac{a\phi + b}{c\phi + d}$$

şeklinde tanımlı Moebius grubu altında invaryant olduğundan (2.6.44) ile verilen denklem de aynı dönüşüm altında invaryanttır.

Örnek 2.6.4 Genelleştirilmiş Fisher Denklemi

$$u_t = u_{xx} + u - u^k \qquad (2.6.45)$$

şeklinde verilen genelleştirilmiş Fisher denklemini gözönüne alalım (Ugurlu and Kart 2003). Benzer şekilde (2.6.45) genelleştirilmiş Fisher denkleminin çözümünün

$$u = \phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \qquad (2.6.46)$$

şeklinde bir açılıma sahip olduğunu varsayalım. WTC algoritmasının ilk adımını uygulamak için, (2.6.45) denkleminin etkin terimlerinde (burada u_{xx} ve $-u^k$ terimleri alınmıştır)

$$u \sim u_0 \phi^\alpha \qquad (2.6.47)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$u_{0,xx}\phi^\alpha + 2\alpha u_{0,x}\phi_x\phi^{\alpha-1} + \alpha u_0 \phi_{xx}\phi^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)u_0{\phi_x}^2\phi^{\alpha-2} - {u_0}^k\phi^{k\alpha} = 0 \qquad (2.6.48)$$

elde edilir. (2.6.48) eşitliğindeki dördüncü ve beşinci terimler dikkate alınarak dengeleme yapılırsa

$$\alpha = -\frac{2}{k-1} \qquad (2.6.49)$$

olarak bulunur. WTC algoritmasında α nın bir tam sayı olması gerekliliği altında aşağıdaki dört durum karşımıza çıkar:

i) $k=-1 \quad \Rightarrow \quad \alpha=1$

ii) $k=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=2$

iii) $k=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-2$

iv) $k=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1$

Şimdi her bir durumu tek tek inceleyelim:

i) $k=-1$ değeri için (2.6.45) denklemi

$$u_t = u_{xx} + u - u^{-1} \tag{2.6.50}$$

şeklini alır. (2.6.47) ile verilen ifade denklemde yerine yazılır ve mümkün olan dengelemeler yapılırsa ya u_0 belirlenemez ya da α nın tam sayı olmadığı durumlar karşımıza çıkar. Böylece algoritma ilk adımda sona erer. Dolayısıyla (2.6.50) denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahip değildir.

ii) $k=0$ değeri için (3.2.39) denklemi

$$u_t = u_{xx} + u - 1 \tag{2.6.51}$$

şeklini alır. Bu durumda ise –1 den farklı başka bir negatif rezonans değeri elde edildiği için algoritma ikinci adımda sona erer ve dolayısıyla (2.6.51) denklemi WTC anlamında Painlevé özelliğine sahip değildir.

iii) k=2 değeri için (2.6.45) denklemi, (2.6.28) ile verilen Fisher denkleminin $k=1, a=1$ olması özel durumudur. Birinci bölümde incelendiği üzere bu halde denklem WTC anlamında Painlevé özelliğine sahiptir.

iv) $k=3$ değeri için (2.6.45) denklemi

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \tag{2.6.52}$$

şeklini alır. (2.6.52) denkleminin çözümünün

$$u = \phi^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{2.6.53}$$

şeklinde bir açılıma sahip olduğunu varsayalım.

$$u \sim u_0 \phi^{\alpha} \tag{2.6.54}$$

ifadesini (2.6.52) denkleminin etkin terimlerinde (burada etkin terimler u_{xx} ve $-u^3$ olarak alınmıştır) yerine yazılırsa

$$\alpha = -1 \quad , \quad u_0 = \sqrt{2}\,\phi_x \tag{2.6.55}$$

olarak bulunur.

Rezonansları bulmak için (2.6.55) ile verilen değerler (2.2.4) de kullanılarak

$$u \sim u_0 \phi^{-1} + u_j \phi^{j-1} \tag{2.6.56}$$

şeklinde elde edilen bu ifade etkin terimlerde yerine yazılır. Gerekli işlemlerden sonra rezonansları belirleyen

$$Q(j) = (j+1)(j-4) = 0 \tag{2.6.57}$$

denklemi elde edilir. (2.6.57) eşitliğinden rezonanslar

$$j = -1 \quad ve \quad j = 4 \tag{2.6.58}$$

şeklinde bulunur. $j=-1$ rezonansı ϕ nin keyfiliğine karşılık gelir. $j=4$ rezonansına karşılık gelen keyfi fonksiyonu bulmak için şu şekilde hareket edilir:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-1} \tag{2.6.59}$$

toplamı (2.6.52) denkleminde yerine yazılarak indirgeme bağıntısı $j \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & u_{j-2,t}(j-2)u_{j-1}\phi_t - u_{j-2,xx} - 2(j-2)u_{j-1,x}\phi_x - (j-2)u_{j-1}\phi_{xx} \\ & -(j-1)(j-2)u_j\phi_x^{\,2} - u_{j-2} + \sum_{n=0}^{j}\sum_{m=0}^{n} u_{j-n}u_{n-m}u_m = 0 \end{aligned} \tag{2.6.60}$$

şeklinde bulunur. (2.6.60) indirgeme bağıntısı kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$j=0:\ u_0 = \sqrt{2}\,\phi_x \tag{2.6.61a}$$

$$j=1:\ u_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x} - 3\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right) \tag{2.6.61b}$$

$$j=2:\ \sqrt{2}\phi_{tx} - \sqrt{2}\phi_{xxx} - \sqrt{2}\phi_x + 3\sqrt{2}\phi_x u_1^{\,2} + 6\phi_x^{\,2}u_2 = 0 \tag{2.6.61c}$$

$$j=3:\ u_{1,t} + 3\phi_t u_2 - u_{1,xx} - 2\phi_x u_{2,x} - 7\phi_{xx}u_2 - u_1 + u_1^{\,3} + 4\phi_x^{\,2}u_3 = 0 \tag{2.6.61d}$$

$$j=4:\ u_{2,t} + 4\phi_t u_3 - 8\phi_{xx}u_3 - 4\phi_x u_{3,x} - u_{2,xx} - u_2 + 3\sqrt{2}\phi_x u_2^{\,2} + 3u_1^{\,2}u_2 = 0 \tag{2.6.61e}$$

u_0 ve u_1 in (2.6.61a-b) ile verilen ifadeleri göz önünde bulundurularak u_2 ve u_3 ün açık ifadeleri (2.6.61c-d) den elde edilebilir. (2.6.61e) nedeni ile u_4 fonksiyonu keyfi kalır. Böylece (2.6.52) denkleminin (2.6.53) şeklindeki çözümü iki tane keyfi fonksiyon içermektedir. Buradan (2.6.52) denklemi WTC anlamında Painlevé özeliğine sahiptir.

Genelleştirilmiş Fisher Denklemi İçin Bäcklund Dönüşümü

u_4 keyfi olduğu için $u_4 = 0$ almak genelliği bozmaz. (2.6.61d) den dolayı u_1 (2.6.52) denklemini sağlıyorsa, bu durumda $u_2 = 0$ olması gerekliliği altında

$$u_j = 0 \qquad ; \qquad j \geq 2 \tag{2.6.62}$$

elde edilir. (2.6.61d) eşitliğinden

$$u_{1,t} = u_{1,xx} + u_1 - u_1^{\,3} \tag{2.6.63}$$

olduğu kolayca görülebilir. Buna göre (2.6.53) ile verilen açılım

$$u = \phi^{-1}\left(u_0 + u_1\phi\right) \tag{2.6.64}$$

şeklini alır. (2.6.61a) ile verilen u_0 değeri (2.6.64) ifadesinde kullanılırsa

$$u = \sqrt{2}\,\frac{\phi_x}{\phi} + u_1 \tag{2.6.65}$$

bulunur. (2.6.65) ifadesi düzenlenirse (2.6.52) denklemi için Bäcklund dönüşümü

$$u = \sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi + u_1 \tag{2.6.66}$$

biçiminde elde edilir.

Genelleştirilmiş Fisher Denklemi İçin Schwarz Türevi

(2.6.61c) eşitliğinde $u_2 = 0$ alınırsa

$$\sqrt{2}\phi_{tx} - \sqrt{2}\phi_{xxx} - \sqrt{2}\phi_x + 3\sqrt{2}\phi_x u_1^{\,2} = 0 \tag{2.6.67}$$

elde edilir. (2.6.61b) ve (2.6.67) arasından u_1 yok edilirse, genelleştirilmiş Fisher denkleminin Schwarz türevi cinsinden ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right) + \{\phi; x\} + 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\phi_t}{\phi_x}\right)^2 = 0 \tag{2.6.68}$$

(2.6.68) denklemi Moebius grubu altında invaryanttır.

Yukarıda verilen örneklerde olduğu gibi benzer sonuçların elde edildiği matematik fiziğin önemli evrim denklemleri vardır. Modifiye KdV (mKdV) denklemi, Yüksek basamaktan KdV denklemi, Katomtsev-Petviasvili (KP) ya da iki boyutlu KdV denklemi, Bousinesq denklemi bunlara birer örnektir.

3. SABİT KATSAYILI BAZI EVRİM DENKLEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, daha önceki bölümde irdelenmiş olan Painlevé analizi ve Bäcklund dönüşümü arasındaki bağları ortaya koyan çarpıcı bazı sonuçlar verilecektir. Bazı önemli evrim denklemlerinin, Bäcklund dönüşümleri yardımıyla analitik çözümleri elde edilebilmiştir. Şimdi, sırasıyla bu çözümler üzerinde duralım.

3.1 Korteweg de-Vries Denkleminin Bir Analitik Çözümü

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \tag{3.1.1}$$

KdV denklemi için Painlevé açılımı u_2 sabit teriminde kesilirse Bäcklund dönüşümü;

$$u = \frac{u_0}{\phi^2} + \frac{u_1}{\phi} + u_2 \tag{3.1.2}$$

şeklinde elde edilir. Örnek (2.6.1) den

$u_0 = -12\delta\phi_x^{\ 2}$

$u_1 = 12\delta\phi_{xx}$

dir ve u_2 de KdV denkleminin bir çözümüdür. Şimdi özel olarak $u_2 = 0$ alınırsa (3.1.2) den

$$u(x,t) = 12\delta\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi} - \frac{\phi_x^{\ 2}}{\phi^2}\right) \tag{3.1.3}$$

elde edilir. (3.1.3) ifadesinin (3.1.1) KdV denkleminde yerine konmasıyla, ϕ nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\begin{cases} \phi_{xxt} + \delta\phi_{xxxxx} = 0 \\ \phi_t\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_{xt} - 2\delta\phi_{xx}\phi_{xxx} + 5\delta\phi_x\phi_{xxxx} = 0 \\ 2\phi_x^{\ 2}\phi_t - 6\delta\phi_x\phi_{xx}^{\ 2} + 8\delta\phi_x^{\ 2}\phi_{xxx} = 0 \end{cases}$$

(3.1.4)

denklem sistemine varılır. (3.1.4) de özel olarak

$$\phi(x,t) = 1 + e^{\alpha x + \beta t} \tag{3.1.5}$$

şeklinde çözüm aranırsa

$$\alpha = 0 \qquad \text{veya} \qquad \beta + \delta\alpha^3 = 0 \tag{3.1.6}$$

elde edilir. $\alpha = 0$ durumu (3.1.3) den $u(x,t) = 0$ çözümünü vereceğinden göz önüne alınmayacaktır. (3.1.6) da $\alpha = k$ olarak alınırsa $\beta = -\delta k^3$ olup

$$\phi(x,t) = 1 + e^{kx - k^3\delta t} \tag{3.1.7}$$

dir. (3.1.7), (3.1.3) de yerine yazılırsa

$$u(x,t) = 12\delta\left[\frac{k^2 e^{kx-k^3\delta t}}{1+e^{kx-k^3\delta t}} - \frac{k^2 e^{2(kx-k^3\delta t)}}{(1+e^{kx-k^3\delta t})^2}\right] \tag{3.1.8}$$

elde edilir. (3.1.8) ifadesinde gerekli düzenlemelerden sonra KdV denkleminin bir analitik çözümü

$$u(x,t) = 3\delta k^2 \sec h^2 \left(\frac{kx - k^3\delta t}{2}\right) \tag{3.1.9}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada k keyfi reel bir sabittir.

3.2 Burgers Denkleminin bir Analitik Çözüm Ailesi

Örnek 2.6.2 de

$$u_t + uu_x = \sigma u_{xx} \tag{3.2.1}$$

Burgers denklemi için Bäcklund dönüşümünün

$$u = -2\sigma \frac{\phi_x}{\phi} + u_1 \tag{3.2.2}$$

şeklinde olduğu gösterilmişti. Burada u_1, Burgers denkleminin bir çözümüdür. $u_1 = 0$ alınır ve

$$u = -2\sigma \frac{\phi_x}{\phi} \tag{3.2.3}$$

ifadesi (3.2.1) de yerine yazılırsa, ϕ nin kuvvetlerine göre katsayılar sıfıra eşitlenerek

$$\begin{cases} \phi_{xt} - \sigma\phi_{xxx} = 0 \\ \phi_t - \sigma\phi_{xx} = 0 \end{cases}$$

(3.2.4)

denklemleri elde edilir. Buna göre, (3.2.4) sisteminde $\phi = e^{\alpha x+\beta t}$ şeklinde çözüm aranırsa, $\phi_x \neq 0$ kabulü altında sistemin bir çözümü

$$\phi(x,t) = Ae^{kx+k^2\sigma t} + Be^{-kx+k^2\sigma t} + C \tag{3.2.5}$$

olarak elde edilir. Burada A, B, C integrasyon sabitleri, k da keyfi reel bir sabittir. (3.2.5) ifadesi (3.2.3) de yerine yazılırsa (3.2.1) Burgers denkleminin bir analitik çözüm ailesi

$$u(x,t) = -2\sigma k \frac{Ae^{kx+k^2\sigma t} - Be^{-kx+k^2\sigma t}}{Ae^{kx+k^2\sigma t} + Be^{-kx+k^2\sigma t} + C} \tag{3.2.6}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi özel olarak A=0 alınırsa;

$$u(x,t) = 2\sigma k \frac{Be^{-kx+k^2\sigma t}}{Be^{-kx+k^2\sigma t} + C} \tag{3.2.7}$$

dir. Burada $\frac{B}{C} = e^{2\gamma}$ olarak seçilirse;

$$u(x,t) = 2\sigma k \frac{e^{-kx+k^2\sigma t+2\gamma}}{e^{-kx+k^2\sigma t+2\gamma} + 1} \tag{3.2.8}$$

dir ve buradan da (3.2.1) Burgers denkleminin

$$u(x,t) = \sigma k \left[1 + \tanh\left(\frac{-kx + k^2\sigma t}{2} + \gamma \right) \right] \tag{3.2.9}$$

şeklinde dalga çözümü elde edilmiş olur. Burada $\gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{B}{C}$ şeklindedir. Benzer olarak $u_1 = \pm 1$ için de bir diğer çözüm ailesi elde edilebilir.

3.3 Fisher Denkleminin Bir Analitik Çözümü

$$u_t = k^2 u_{xx} + au(1-u) \tag{3.3.1}$$

Örnek (2.6.3) de (3.3.1) Fisher denklemi için Bäcklund dönüşümünün,

$$u = \frac{6k^2}{a}\frac{\phi_x^{\ 2}}{\phi^2} + \frac{6}{5a}\left(\frac{\phi_t}{\phi} - \frac{5k^2\phi_{xx}}{\phi} \right) + u_2 \tag{3.3.2}$$

şeklinde olduğu gösterilmişti. u_2, Fisher denkleminin bir çözümü olmak üzere $u_2 = 0$ alınır ve (3.3.2) ifadesi (3.3.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-\frac{36k^2}{5a}\phi_{xxt} + \frac{6}{5a}\phi_{tt} + \frac{6k^4}{a}\phi_{xxxx} + 6k^2\phi_{xx} - \frac{6}{5}\phi_t = 0$$

(3.3.3a)

$$\frac{72k^2}{5a}\phi_x\phi_{xt} + \frac{6}{25a}\phi_t^{\,2} - \frac{36k^2}{5a}\phi_t\phi_{xx} + \frac{18k^4}{a}\phi_{xx}^{\,2} - \frac{24k^4}{a}\phi_x\phi_{xxx} - 6k^2\phi_x^{\,2} = 0$$

(3.3.3b)

denklemleri elde edilir. KdV denklemindekine benzer olarak

$$\phi(x,t) = 1 + e^{\alpha x + \beta t} \qquad (3.3.4)$$

şeklinde çözüm aranırsa

$$-\frac{36k^2}{5a}\alpha^2\beta + \frac{6}{5a}\beta^2 + \frac{6k^4}{a}\alpha^4 + 6k^2\alpha^2 - \frac{6}{5}\beta = 0$$

(3.3.5a)

$$\frac{72k^2}{5a}\alpha^2\beta + \frac{6}{25a}\beta^2 - \frac{36k^2}{5a}\alpha^2\beta + \frac{18k^4}{a}\alpha^4 - \frac{24k^4}{a}\alpha^4 - 6k^2\alpha^2 = 0$$

(3.3.5b)

Burada α ve β daha sonra belirlenecek olan keyfi reel sabitlerdir. Gerekli düzenlemelerden sonra (3.3.5a) ifadesi aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$\left(\beta - 5k^2\alpha^2\right)\left(\beta - k^2\alpha^2 - a\right) = 0 \qquad (3.3.6)$$

(3.3.6) dan

$$\beta_1 = 5k^2\alpha^2 \qquad (3.3.7a)$$

$$\beta_2 = k^2\alpha^2 + a \qquad (3.3.7b)$$

dır. İlk olarak $\beta_1 = 5k^2\alpha^2$ (3.3.5b) de yerine yazılırsa

$$5k^2\alpha^2(6k^2\alpha^2 - a) = 0$$

elde edilir. $a > 0$ olmak üzere

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{6}}\frac{1}{k} \tag{3.3.8}$$

ve (3.3.7a) dan

$$\beta_1 = \frac{5a}{6} \tag{3.3.9}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan $\beta_2 = k^2\alpha^2 + a$ (3.3.5b) de yerine yazılarak

$$\left(6k^2\alpha^2 + a\right)\left(k^2\alpha^2 + a\right) = 0 \tag{3.3.10}$$

eşitliğine varılır. a<0 olmak üzere ilk çarpandan,

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-a}{6}}\frac{1}{k} \tag{3.3.11}$$

dir. Yine (3.3.11) in (3.3.7b) de yerine konmasıyla

$$\beta_2 = \frac{5a}{6} \tag{3.3.12}$$

olduğu kolayca görülebilir. (3.3.8)-(3.3.9) ve (3.3.11)-(3.3.12) ifadelerinin bir sonucu olarak kısaca

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{|a|}{6}}\frac{1}{k} \quad \text{ve} \quad \beta_{1,2} = \frac{5a}{6} \tag{3.3.13}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\phi(x,t) = 1 + e^{\pm\sqrt{\frac{|a|}{6}}\frac{1}{k}x + \frac{5a}{6}t} \tag{3.3.14}$$

dir ve (3.3.2) den $u(x,t)$,

$$u(x,t) = \frac{e^{2(\pm\sqrt{\frac{|a|}{6}}\frac{1}{k}x + \frac{5a}{6}t)}}{(1 + e^{\pm\sqrt{\frac{|a|}{6}}\frac{1}{k}x + \frac{5a}{6}t})^2}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki ifadenin düzenlenmesiyle Fisher denkleminin bir tam çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\left[1 + \tanh\left(\pm\sqrt{\frac{|a|}{6}}\frac{1}{2k}x + \frac{5a}{12}t\right)\right]^2 \tag{3.3.15}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Bunlara ek olarak (3.3.10) ifadesinde yine $a<0$ olmak üzere, ikinci çarpanın sıfıra eşitlenmesiyle

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{-a}}{k} \quad \text{ve} \quad \beta_{1,2} = 0 \tag{3.3.16}$$

olarak elde edilirler. Bu değerlerin (3.3.4) de ve sonrasında (3.3.4) ün de (3.3.2) de yerine konmasıyla Fisher denkleminin bir diğer çözümü

$$u(x,t) = 6\frac{e^{\pm\frac{\sqrt{-a}}{k}x}}{(1+e^{\pm\frac{\sqrt{-a}}{k}x})^2} \tag{3.3.17}$$

biçiminde elde edilir.

3.4 Genelleştirilmiş Fisher Denkleminin Bir Analitik Çözüm Ailesi

$$u_t = u_{xx} + u - u^k$$

Genelleştirilmiş Fisher denkleminin k=3 için Painlevé özeliğine sahip olduğu ve

$$u_t = u_{xx} + u - u^3 \tag{3.4.1}$$

denklemine ilişkin Bäcklund dönüşümünün

$$u(x,t) = \sqrt{2}\frac{\phi_x}{\phi} + u_1 \tag{3.4.2}$$

şeklinde olduğu daha önce yapılan bir çalışmada gösterilmişti (C. Kart, S. Yıldız Uğurlu). Burada u_1, (3.4.1) denkleminin bir çözümüdür. İlk olarak $u_1 = 0$ alınırsa,

$$u(x,t) = \sqrt{2}\frac{\phi_x}{\phi} \tag{3.4.3}$$

dir. Önceki bölümlerdekine benzer olarak (3.4.3) Bäcklund dönüşümü (3.4.1) genelleştirilmiş Fisher denkleminde yerine yazılır ve ϕ nin kuvvetlerine göre katsayılar düzenlenirse,

$$\phi_{xt} = \phi_{xxx} + \phi_x \tag{3.4.4a}$$

$$\phi_t = 3\phi_{xx} \tag{3.4.4b}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. $\phi(x,t) = e^{\alpha x+\beta t}$ şeklinde çözüm aranırsa, sistemin bir çözümü

$$\phi(x,t) = Ae^{\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2}t} + Be^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2}t} + C \qquad (3.4.5)$$

şeklinde elde edilir ve (3.4.5) in (3.4.3) de yerine yazılmasıyla (3.4.1) genelleştirilmiş Fisher denkleminin bir analitik çözüm ailesi;

$$u(x,t) = \frac{Ae^{\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2}t} - Be^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2}t}}{Ae^{\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2}t} + Be^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{2}t} + C} \qquad (3.4.6)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada A, B ve C integrasyon sabitleridir. Genelleştirilmiş Fisher denkleminin dalga tipi çözümlerini görebilmek için (3.4.6) da özel olarak B=0 alınırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{3}{4}t + \delta\right)\right] \qquad (3.4.7)$$

elde edilir. Burada $\delta = \frac{1}{2}\ln\frac{A}{C}$ dir. Diğer taraftan, $u_1 = \pm 1$ olarak alınırsa benzer işlemlerle (3.4.1) denkleminin bir başka analitik çözüm ailesi,

$$u(x,t) = \frac{Ae^{\sqrt{2}x} - C}{Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3}{2}t} + C} \qquad (3.4.8)$$

biçimindedir.

4. DEĞİŞKEN KATSAYILI BAZI EVRİM DENKLEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, öncelikle Burgers ve KdV denklemlerinin bazı değişken katsayılı formları ile ilgili olarak yapılan iki çalışma ele alınacaktır. Daha sonra bu çalışmalara paralel olarak ele alınan ve tezin orijinal sonuçlarını oluşturan, değişken katsayılı Fisher ve Genelleştirilmiş Fisher denklemlerinin analitik çözümleri elde edilecektir.

4.1 Değişken Katsayılı Bir Burgers Denklemi için Bäcklund Dönüşümü ve Analitik Çözümler

Bu bölümde öncelikle Burgers denklemi biraz daha genelleştirilerek, değişken katsayılı

$$u_t + b(t)uu_x + a(t)u_{xx} = 0 \tag{4.1.1}$$

şeklindeki denklem göz önüne alınacaktır (Hong 2000). Lineer olmayan b(t) ve saçılma terimi a(t) yi içeren genelleştirilmiş Burgers denklemi, çift katmanlı sığ akışkanda, bir uzun şok dalganın yayılmasını modelleyebilir. (4.1.1) denkleminin auto-Bäcklund dönüşümünü ve a(t) ile b(t) arasında bazı şartlarla, net soliton tipi çözümleri bulabilmek için kesik-Painlevé açılımı ve sembolik hesaplama metodu kullanılacaktır. Buna göre (2.2.2) Painlevé açılımı sabit terimde kesilir,

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{p} u_j \phi^{j-p} \tag{4.1.2}$$

ve (4.1.2) ifadesi, (4.1.1) denklemindeki en yüksek basamaktan türevli terim u_{xx} ile lineer olmayan uu_x teriminde yerine yazılıp dengeleme yapılırsa p=1 bulunur ve böylece

$$u(x,t) = \phi(x,t)^{-1} \sum_{j=o}^{1} u_j(x,t)\phi^j(x,t) \tag{4.1.3}$$

açılımı elde edilir. Buradan

$$u(x,t) = \frac{u_0(x,t) + u_1(x,t)\phi(x,t)}{\phi(x,t)} \tag{4.1.4}$$

Genel bir kabul olarak $\phi_x \neq 0$ alınacaktır, ancak a(t) ve b(t) model parametrelerine başlangıç olarak herhangi bir koşul yüklenmeyecektir. (4.1.2) ifadesi, (4.1.1) denkleminde yerine konduğunda ϕ nin kuvvetleri parantezinde katsayılar sıfıra eşitlenerek aşağıdaki Painlevé-Bäcklund (PB) denklemleri elde edilir;

$$\phi^{-3}:\ -b(t)u_0^{\ 2}\phi_x + 2a(t)u_0\phi_x^{\ 2} = 0 \tag{4.1.3a}$$

$$\phi^{-2}:\ b(t)u_0u_{0,x} - b(t)u_1u_0\phi_x - 2a(t)\phi_x u_{0,x} - a(t)u_0\phi_{xx} - u_0\phi_t = 0 \tag{4.1.3b}$$

$$\phi^{-1}:\ u_{0,t} + b(t)u_0u_{1,x} + b(t)u_1u_{0,x} + a(t)u_{0,xx} = 0 \tag{4.1.3c}$$

$$\phi^{0}:\ u_{1,t} + b(t)u_1u_{1,x} + a(t)u_{1,xx} = 0 \tag{4.1.3d}$$

(4.1.2) ve (4.1.3a-d) denklemleri, eğer $\phi(x,t), u_0(x,t)$ ve $u_1(x,t)$ ye göre çözülebilirlerse, bir auto-Bäcklund dönüşümü belirtirler. (4.1.3a) denklemi için iki çözüm söz konusudur;

$$u_0(x,t) = 2\frac{a(t)\phi_x}{b(t)} \text{ ya da } u_0(x,t) = 0 \tag{4.1.4}$$

Özdeş sıfır olmayan çözümün (4.1.3b) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$u_1(x,t) = -\frac{a(t)\phi_{xx} + \phi_t}{b(t)\phi_x} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. (4.1.3c) denkleminden, değişken a(t) ve b(t) katsayıları için

$$\phi_x\left[-b(t)\frac{d}{dt}a(t) + a(t)\frac{d}{dt}b(t)\right] = 0$$

yardımcı denklemi elde edilir. Buradan,

$$b(t) = c_1 a(t) \tag{4.1.6}$$

dir. Burada c_1 keyfi bir sabittir. Böylece (4.1.1) denkleminin bir tam analitik çözümler ailesi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u(x,t) = -\frac{a(t)\phi_{xx} + \phi_t}{b(t)\phi_x} + \left(2\frac{a(t)\phi_x}{b(t)}\right)\phi(x,t)^{-1} \tag{4.1.7}$$

(4.1.1) denklemi, $\phi(x,t)$ ve a(t) ye göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned} &2a^2(t)\phi_x^{\ 2}\phi_{txx} + a(t)\phi_x^{\ 2}\phi_{tt} - 4a^2(t)\phi_x\phi_{xx}\phi_{tx} - 2a(t)\phi_x\phi_t\phi_{tx} \\ &-\frac{d}{dt}a(t)\phi_x^{\ 2}\phi_t - 4a^3(t)\phi_x\phi_{xx}\phi_{xxx} + 3a^3(t)\phi_{xx}^{\ 3} + 4a^2(t)\phi_t\phi_{xx}^{\ 2} \\ &-2a^2(t)\phi_t\phi_x\phi_{xxx} + a(t)\phi_t^{\ 2}\phi_{xx} + a^3(t)\phi_x^{\ 2}\phi_{xxxx} = 0 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

elde edilir. (4.1.8) denkleminde

$$\phi(x,t) = 1 + e^{[A(t)+xB(t)]} \tag{4.1.9}$$

şeklinde çözüm aranır ve elde edilen denklem x in kuvvetlerine göre düzenlenirse;

$$x^1: \quad \frac{\frac{d}{dt}A(t)\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)} - \frac{d^2}{dt^2}A(t) + 2\frac{(\frac{dA}{dt})^2}{A(t)} = 0 \tag{4.1.10}$$

$$x^0: \quad \frac{\frac{d}{dt}B(t)\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)} - \frac{d^2}{dt^2}B(t) + 2\frac{\frac{d}{dt}B(t)\frac{d}{dt}A(t)}{A(t)} = 0 \tag{4.1.11}$$

denklemleri elde edilir. (4.1.10) denkleminde $A(t) = e^{\alpha_1 t}$ şeklinde bir çözüm aranırsa;

$$\alpha_1 \frac{d}{dt}a(t) + \alpha_1^{\,2}a(t) = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir ve buradan da

$$a(t) = c_2 e^{-\alpha_1 t} \tag{4.1.12}$$

olarak elde edilir. Yine (4.1.11) denkleminden de B(t);

$$B(t) = c_3 + c_4 e^{\alpha_1 t} \tag{4.1.13}$$

şeklinde elde edilir. Burada c_i ler sıfırdan farklı keyfi sabitlerdir. Sonuç olarak bütün bu terimlerin düzenlenmesiyle (4.1.1) denkleminin bir analitik çözümler ailesi;

$$\begin{aligned} u(x,t) = &-\frac{e^{\alpha_1 t}(c_2 + \alpha_1 x + c_4\alpha_1)}{c_2 c_1} \\ &+ 2\frac{e^{\left[\alpha_1 t + e^{\alpha_1 t}x + c_3 + c_4 e^{\alpha_1 t}\right]}}{c_1}(1 + e^{e^{\alpha_1 t}x + c_3 + c_4 e^{\alpha_1 t}})^{-1} \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Özel olarak kink-tipi solitonik çözümlerin varlığının büyük ölçüde α_1 in seçimine bağlı olduğu aşağıdaki limit değerlerinden görülmektedir;

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} u(x,0;\alpha_1) = \frac{e^{c_4+x+c_3-1}}{c_1(1+e^{c_4+x+c_3-1})} = c_1^{-1}\tanh\left[(c_4+x+c_3)/2\right]$$

$$\lim_{\alpha_1 \to \infty} u(x,0;\alpha_1) = \infty$$

Sonuç olarak, (4.1.1) denklemi, (4.1.9) da kabul edilen $\phi(x,t)$ için, $a(t), b(t) \approx e^{-\alpha_1 t}$ ve $\alpha_1 << 1$ koşulları altında kink tipi solitonik çözümlere sahiptir. Bu durumda (4.1.1) denklemi;

$$u_t + (1-\alpha_1 t)(c_1 c_2 u u_x + c_1 u_{xx}) = 0$$

şeklinde bir zayıf zaman bağımlı Burgers denklemine indirgenebilir.

4.2 Değişken Katsayılı Bir Kdv Denklemi İçin Auto-Bäcklund Dönüşümü ve Analitik Çözümler

Bu kısımda değişken katsayılı bir KdV denklemi, $f(t)$ ve $g(t)$ keyfi analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$u_t + f(t) u u_x + g(t) u_{xxx} = 0 \qquad (4.2.1)$$

biçiminde ele alınacaktır (Hong and Jung 1999). Bu denklemin dalga tipi çözümlerini bulabilmek için (2.2.2) Painlevé açılımı sabit terimde kesilir,

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{p} u_j \phi^{j-p} \qquad (4.2.2)$$

ve en yüksek basamaktan türevli terim u_{xxx} ile lineer olmayan uu_x terimi arasında dengeleme yapılırsa p=2 bulunur ve böylece

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x,t)^{-2} \sum_{j=o}^{2} u_j(x,t) \phi^j(x,t) \\ &= \frac{u_0(x,t) + u_1(x,t)\phi(x,t) + u_2(x,t)\phi^2(x,t)}{\phi^2(x,t)} \end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

açılımı elde edilir. Genel bir kabul olarak $\phi_x \neq 0$ alınacaktır. (4.2.3) açılımı (4.2.1) denkleminde yerine yazılır ve ϕ nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, Painlevé-Backlund (PB) denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\phi^{-5} : -2 f u_0{}^2 \phi_x - 24 g u_0 \phi_x{}^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = -12 g \phi_x{}^2 / f \qquad (4.2.4a)$$

$$\begin{aligned} \phi^{-4} : -6g\,\phi_x{}^3 u_1 + 18 g \phi_x{}^2 u_{0,x} + 18 g \phi_x \phi_{xx} u_0 - 3 f \phi_x u_0 u_1 + f u_0 u_{0,x} = 0 \\ \Rightarrow \quad u_1 = 12 g \phi_{xx} / f \end{aligned} \qquad (4.2.4b)$$

$$\phi^{-3} : \phi_x \phi_t + f \phi_x{}^2 u_2 + 4 g \phi_x \phi_{xxx} - 3 g \phi_{xx}{}^2 = 0 \qquad (4.2.4c)$$

$$\phi^{-2} : 2fg^2\phi_{xx}\phi_{xxx} - 5fg^2\phi_x\phi_{xxxx} - fg\phi_{xx}\phi_t - fg'\phi_x^{\ 2}$$
$$- 2fg\phi_x\phi_{xt} + f'g\phi_x^{\ 2} - f^2g\phi_x^{\ 2}u_{2,x} - 3f^2g\phi_x\phi_{xx} = 0 \qquad (4.2.4d)$$

$$\phi^{-1} : f^2g\phi_{xxx}u_2 + f^2g\phi_{xx}u_{2,x} - gf'\phi_{xx} + fg'\phi_{xx} + fg^2\phi_{xxxxx} + fg\phi_{xxt} = 0 \qquad (4.2.4e)$$

$$\phi^0 : u_{2,t} + fu_2u_{2,x} + gu_{2,xxx} = 0 \qquad (4.2.4f)$$

Bu sistem uyumluysa başka bir deyişle $\phi,\ u_0(x,t),\ u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ ye göre çözülebilirse bir auto-Backlund dönüşümü olarak ifade edilebilir. Soliton tipi çözümleri elde edebilmek için

$$\phi(x,t) = 1 + \exp[i\theta(x,t)] \qquad (4.2.5)$$

(4.2.4a-f) denklemlerinde yerine yazılır. Burada $\theta(x,t)$ kompleks değişkenli bir fonksiyondur. Buradan reel ve imajiner terimli katsayıların sıfıra eşitlenmesi sonucunda,

$$\phi^{-3} : \quad \theta(x,t)_{xx} = 0$$
$$\Rightarrow \theta(x,t) = F_1(t)x + F_2(t) \qquad (4.2.6)$$

olarak bulunur. Bundan sonraki adımda (4.2.6) PB denklemlerinde yerine yazılır ve x in katsayısı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki koşul elde edilir;

$$\phi^{-1} : \ F_1'(t) = 0$$

$$\Rightarrow F_1(t) = F_1 = sabit \qquad (4.2.7)$$

ϕ^{-1} ün reel teriminin sıfıra eşitlenmesiyle, $u_2(x,t)$ için aşağıdaki şekilde bir çözüm elde edilir;

$$\phi^{-1}\ \&\ reel : \quad gf^2u_{2,x} + g'f - gf' = 0$$

$$\Rightarrow u_2(x,t) = \frac{(gf' - g'f)x}{gf^2} + c_1 \qquad (4.2.8)$$

u_2 nin PB denklemlerinde yerine yazılmasıyla *f(t)* ve *g(t)* fonksiyonları için koşullar;

$$\phi^0\ \&\ reel : \ gf' - g'f = 0 \ \Rightarrow \ f(t) = c_2g(t) \qquad (4.2.9)$$

Son olarak ϕ^{-2} katsayısından $F_2(t)$;

$$-gF_1^{\ 5} + c_2gF_1^{\ 3} + F_2'F_1^{\ 2} = 0$$

$$F_2(t) = (F_1^3 - c_2 F_1)\int^t g(t')dt' + c_3 \tag{4.2.10}$$

biçiminde elde edilir. Bütün bu elde edilen ifadelerin düzenlenmesiyle (4.2.1) değişken katsayılı KdV denkleminin analitik çözümleri;

$$u(x,t) = -\frac{12F_1^2}{c_2}\operatorname{sec}h^2\left[i\theta(x,t)/2\right] + c_1$$

$$\theta(x,t) = F_1 x + (F_1^3 - c_2 F_1)\int^t g(t')dt' + c_3$$

biçiminde elde edilmiş olur. Burada c_1, c_2, c_3 ve F_1, kompleks sabitler ve $f(t) = c_2 g(t)$ dir. Son olarak, keyfi sabitlerin $F_1 = i$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = i$ şeklindeki seçimini göz önüne alalım. Özel olarak $g(t) = 1$ için sabit katsayılı KdV denkleminin bilinen soliton çözümü elde edilir ve $g(t) = \cos 2t$ için de elde edilen çözüm yalnız dalga (solitary wave) özeliğini sağlamaktadır. ($|x|$ sonsuza giderken $u(x,t)$ limiti sıfırdır.)

4.3 Değişken Katsayılı Genelleştirilmiş Bir Fisher Denkleminin Analitik Çözümleri

Bu bölümde, kesim 2 deki (2.6.52) genelleştirilmiş Fisher denklemi biraz daha genelleştirilerek,

$$u_t = a^2(t)u_{xx} + u - u^3 \tag{4.3.1}$$

şeklindeki değişken katsayılı genelleştirilmiş Fisher denklemi ele alınacaktır. Bu denklemin dalga tipi çözümlerini bulabilmek için , (2.2.2) Painlevé açılımı sabit terimde kesilir,

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{p} u_j \phi^{j-p} \tag{4.3.2}$$

ve en yüksek basamaktan türevli terim u_{xx} ile lineer olmayan u^3 terimi arasında dengeleme yapılırsa p=1 bulunur ve böylece

$$u(x,t)=\frac{u_0(x,t)}{\phi}+u_1 \qquad (4.3.3)$$

açılımı elde edilir. Genel bir kabul olarak $\phi_x \neq 0$ alınacaktır ve başlangıçta $a(t)$ katsayısına herhangi bir koşul yüklenmeyecektir. (4.3.3) açılımı (4.3.1) denkleminde yerine konduğunda

$$\frac{u_{0t}}{\phi}-\frac{u_0\phi_t}{\phi^2}+u_{1t}=a^2(t)\left[\frac{u_{0xx}}{\phi}-2\frac{u_{0x}\phi_x}{\phi^2}-\frac{u_0\phi_{xx}}{\phi^2}+2\frac{u_0\phi_x^{\ 2}}{\phi^3}+u_{1xx}\right]$$
$$+\frac{u_0}{\phi}+u_1-\frac{u_0^{\ 3}}{\phi^3}-3\frac{u_0^{\ 2}u_1}{\phi^2}-3\frac{u_0u_1^{\ 2}}{\phi}-u_1^{\ 3}$$

ifadesi elde edilir. Burada ϕ nin kuvvetleri parantezindeki katsayılar sıfıra eşitlenerek aşağıdaki Painlevé-Bäcklund denklemleri bulunur;

$$\phi^{-3}:\ -2a^2(t)u_0\phi_x^{\ 2}+u_0^{\ 3}=0 \qquad (4.3.4a)$$

$$\phi^{-2}:-u_0\phi_t+2a^2(t)u_{0x}\phi_x+a^2(t)u_0\phi_{xx}+3u_0^{\ 2}u_1=0 \qquad (4.3.4b)$$

$$\phi^{-1}:\ u_{0t}-a^2(t)u_{0xx}-u_0+3u_0u_1^{\ 2}=0 \qquad (4.3.4c)$$

$$\phi^{0}:\ u_{1t}-a^2(t)u_{1xx}-u_1+u_1^{\ 3}=0 \qquad (4.3.4.)$$

(4.3.4d) ifadesi u_1 in (4.3.1) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. (4.3.4a) dan

$$u_0(x,t)=\sqrt{2}a(t)\phi_x \qquad (4.3.5)$$

bulunur. (4.3.5) in, (4.3.4b) de yerine konmasıyla

$$-\sqrt{2}a(t)\phi_x\phi_t+3\sqrt{2}a^3(t)\phi_x\phi_{xx}+6a^2(t)\phi_x^{\ 2}u_1=0$$

dir ve buradan da u_1,

$$u_1=\frac{\sqrt{2}}{6a(t)}\frac{\phi_t}{\phi_x}-\frac{\sqrt{2}a(t)}{2}\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \qquad (4.3.6)$$

biçiminde elde edilir. (4.3.5) ve (4.3.6) da elde edilen u_0 ve u_1 ifadeleri (4.3.4c) de yerine yazılarak

$$\sqrt{2}a_t\phi_x+\sqrt{2}a\phi_{xt}-\sqrt{2}a^3\phi_{xxx}-\sqrt{2}a\phi_x+3\sqrt{2}a\phi_x\left[\frac{\sqrt{2}}{6a}\frac{\phi_t}{\phi_x}-\frac{\sqrt{2}a}{2}\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right]^2=0$$

denklemine varılır. Bu denklem de gerekli sadeleştirmelerden sonra,

$$6aa_t\phi_x^{\ 2}+6a^2\phi_x\phi_{xt}-6a^4\phi_x\phi_{xxx}-6a^2\phi_x^{\ 2}+\phi_t^{\ 2}-6a^2\phi_t\phi_{xx}+9a^4\phi_{xx}^{\ 2}=0 \qquad (4.3.7)$$

ifadesine dönüşür. Şimdi ilk olarak (4.3.7) de

$$\phi=1+e^{\alpha x+\beta t}$$

biçiminde çözüm aranırsa,

$$6\alpha^2aa_t+3\alpha^4a^4-6\alpha^2a^2+\beta^2=0 \qquad (4.3.8)$$

denklemine varılır. (4.3.8) denklemi, (4.3.7) nin $\phi=1+e^{\alpha x+\beta t}$ biçiminde bir çözüme sahip olabilmesi için a(t) katsayısının sağlaması gereken denklemdir ve burada $\alpha\neq 0$ ve β keyfi reel sabitlerdir.

$$a^2(t)=b(t) \qquad (4.3.9)$$

dönüşümüyle (4.3.8) denkleminden

$$3\alpha^2b'+3\alpha^4b^2-6\alpha^2b+\beta^2=0 \qquad (4.3.10)$$

Riccati denklemi elde edilir. Bu denklemde $b(t)=k$ (k sbt) şeklinde çözüm aranırsa;

$$3\alpha^4k^2-6\alpha^2k+\beta^2=0$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\begin{aligned}\Delta&=36\alpha^4-12\alpha^4\beta^2\\&=12\alpha^4(3-\beta^2)\end{aligned} \qquad (4.3.11)$$

dir.

(i) Kolaylık olması bakımından

$$\beta^2=3(1-\gamma^2) \qquad (4.3.12)$$

seçilir ve bu ifade (4.3.11) de yerine yazılırsa

$$\Delta=36\alpha^4\gamma^2$$

dir. (4.3.11) den reel köklerin gelebilmesi için $|\beta| < \sqrt{3}$ koşulu altında, ($0 < |\gamma| \leq 1$)

$$k_{1,2} = \frac{6\alpha^2 \pm 6\alpha^2\gamma}{6\alpha^4}$$

olup buradan (4.3.10) Riccati denkleminin iki özel çözümü

$$b_1(t) = \frac{1+\gamma}{\alpha^2} \text{ ve } b_2(t) = \frac{1-\gamma}{\alpha^2}$$

biçiminde elde edilirler. İki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü böylece

$$b(t) = \frac{1}{\alpha^2}\left(1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}\right)$$

biçiminde elde edilir. (4.3.9) dan

$$a(t) = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}} \tag{4.3.13}$$

şeklindedir. Buna göre (4.3.5) den

$$u_0 = \sqrt{2}a(t)\phi_x = \pm\sqrt{2}\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}}e^{\alpha x+\beta t} \tag{4.3.14}$$

ve (4.3.6) dan

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{2}}{6a(t)}\frac{\phi_t}{\phi_x} - \frac{\sqrt{2}a(t)}{2}\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}\beta}{6}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}}} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}} \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

olup (4.3.3) den (4.3.1),

$$u_t = \frac{1}{\alpha^2}\left(1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}\right)u_{xx} + u - u^3$$

denkleminin dalga tipi çözümleri,

$$u(x,t) = \pm\sqrt{2}\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}}\frac{e^{\alpha x+\beta t}}{1+e^{\alpha x+\beta t}} \pm \frac{\sqrt{2}\beta}{6}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}}} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\gamma\frac{e^{2\gamma t}+c}{e^{2\gamma t}-c}} \tag{4.3.16}$$

biçiminde elde edilirler. Burada $\beta^2 = 3(1-\gamma^2)$, $o < |\gamma| \le 1$, α, β, γ keyfi reel sabitler, c de integral sabitidir.

Özel olarak $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ c = 1$ seçilirse,

$$u_t = (1+\coth t)\,u_{xx} + u - u^3 \tag{4.3.17}$$

denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\coth t}\,\tanh\frac{x}{2} \tag{4.3.18}$$

biçimindedir.

Belirtelim ki (4.3.1) denkleminde $a^2(t) \equiv 1$ durumu bizi (3.4.1) genelleştirilmiş Fisher denklemine götürür. Dolayısıyla yukarıdaki işlemler $a^2(t) \equiv 1$ için hesaplanır ve özel olarak $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{3}{2}$ seçilirse (4.3.1) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{3}{4}t\right)\right]$$

biçiminde elde edilir ki bu çözüm de (3.4.7) de $\delta = 0$ durumuna karşılık gelmektedir.

(ii) (4.3.11) de $\beta = \pm\sqrt{3}$ olması durumunda $\Delta = 0$ dır ve bu durumda (4.3.10) Riccati denkleminin sabit çözümü, $b(t) = \frac{1}{\alpha^2}$ biçiminde elde edilir. Buna göre (4.3.10) denkleminin parametreli çözümü,

$$b(t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{t+c+1}{t+c} \tag{4.3.19}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\alpha \neq 0$ keyfi reel bir sabit ve c de integral sabitidir. Yine (4.3.9) dan

$$a(t) = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{t+c+1}{t+c}} \tag{4.3.20}$$

olarak elde edilir ve bu durumda da

$$u_t = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{t+c+1}{t+c}\right)u_{xx} + u - u^3 \tag{4.3.21}$$

denkleminin bir analitik çözüm ailesi,

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{t+c+1}{2(t+c)}}\tanh(\frac{\alpha x+\sqrt{3}t}{2}) \pm \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{t+c}{t+c+1}} \tag{4.3.22}$$

şeklinde elde edilir.

(iii) Son olarak $|\beta| > \sqrt{3}$ olması durumunda ise (4.3.10) Riccati denklemi kompleks özel çözümlere sahiptir. ($y' = p_0 + p_1 y + p_2 y^2$ Riccati diferensiyel denkleminin bir çözümü, $y_1 = \alpha + i\beta$ şeklinde ise denklemin genel çözümü $y = \alpha + \beta\tan(\int p_2 \beta dx + c)$ biçimindedir.) Buna göre (4.3.11) de $\delta \neq 0$ keyfi reel bir sabit olmak üzere, $3-\beta^2 = -3\delta^2$ olarak seçilirse $\Delta = -36\alpha^4\delta^2$ olup Riccati denkleminin bir özel çözümü

$$b_1 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha^2} i$$

olup buradan genel çözüm

$$b(t) = \frac{1}{\alpha^2}\left[1 + \delta\tan(-\delta t + c)\right]$$

biçiminde elde edilir. Buna göre

$$a(t) = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + \delta\tan(-\delta t + c)}$$

olup, burada, $\delta^2 = \frac{1}{3}\beta^2 - 1$, ve c, integral sabitidir. Böylece *a(t)* yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere (4.3.1) denkleminin bir tam dalga çözümleri ailesi

$$u(x,t) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\delta\tan(-\delta t + c)}\tanh(\frac{\alpha x + \beta t}{2}) \pm \frac{\sqrt{2}\beta}{6}\frac{1}{\sqrt{1 + \delta\tan(-\delta t + c)}}$$

biçiminde elde edilmiş olur.

4.4 Değişken Katsayılı Bir Fisher Denkleminin Analitik Çözümleri

Bu bölümde de Kesim 2 deki (2.6.28) Fisher denkleminin biraz daha geneli olan değişken katsayılı

$$u_t = b(t)u_{xx} + au(1-u) \tag{4.4.1}$$

Fisher denklemi ele alınacaktır. Yine önceki örnekte olduğu gibi bu denkleme ilişkin kesik Painlevé açılımı

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{p} u_j \phi^{j-p}$$

(4.4.1) denkleminde yerine konur ve u_{xx} ile u^2 terimleri arasında dengeleme yapılacak olursa, p=2 bulunur ve buradan (4.4.1) denkleminde

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\phi^2}+\frac{u_1}{\phi}+u_2 \tag{4.4.2}$$

şeklinde çözüm aranır. (4.4.1) denklemindeki terimler (4.4.2) den aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$u_t=\frac{u_{0t}}{\phi^2}-2\frac{u_0\phi_t}{\phi^3}+\frac{u_{1t}}{\phi}-\frac{u_1\phi_t}{\phi^2}+u_{2t}$$

$$u_{xx}=\frac{u_{0xx}}{\phi^2}-4\frac{u_{0x}\phi_x}{\phi^3}-2\frac{u_0\phi_{xx}}{\phi^3}+6\frac{u_0{\phi_x}^2}{\phi^4}+\frac{u_{1xx}}{\phi}-2\frac{u_{1x}\phi_x}{\phi^2}-\frac{u_1\phi_{xx}}{\phi^2}+2\frac{u_1{\phi_x}^2}{\phi^3}+u_{2xx}$$

$$u^2=\frac{{u_0}^2}{\phi^4}+\frac{{u_1}^2}{\phi}+{u_2}^2+2\frac{u_0u_1}{\phi}+2\frac{u_0u_2}{\phi}+2\frac{u_1u_2}{\phi}$$

ve bu terimler (4.4.1) denkleminde yerine yazılır ve ϕ nin kuvvetleri parantezindeki katsayılar sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki Painlevé-Bäcklund denklemleri elde edilir;

$$\phi^{-4}: -6b(t)u_0{\phi_x}^2+a{u_0}^2=0 \tag{4.4.3a}$$

$$\phi^{-3}: -2u_0\phi_t+4b(t)\phi_x u_{0x}+2b(t)u_0\phi_{xx}-2b(t)u_1{\phi_x}^2+2au_0u_1=0 \tag{4.4.3b}$$

$$\phi^{-2}: u_{0t}-u_1\phi_t-b(t)u_{0xx}+2b(t)u_{1x}\phi_x+b(t)u_1\phi_{xx}-au_0+a{u_1}^2+2au_0u_2=0 \tag{4.4.3c}$$

$$\phi^{-1}: u_{1t}-b(t)u_{1xx}-au_1+2au_1u_2=0 \tag{4.4.3d}$$

$$\phi^{0}: u_{2t}-b(t)u_{2xx}-au_2+a{u_2}^2=0 \tag{4.4.3e}$$

(4.4.3e) den u_2 nin (4.4.1) denkleminin bir çözümü olduğu açıktır. (4.4.3a) dan

$$u_0=\frac{6}{a}b(t){\phi_x}^2 \tag{4.4.4}$$

dir. (4.4.4) ve (4.4.3b) den

$$u_1=\frac{6}{5a}\phi_t-\frac{6}{a}b(t)\phi_{xx} \tag{4.4.5}$$

biçiminde elde edilir. Yukarıda elde edilen ifadelerin (4.4.3c) ve (4.4.3d) de yerlerine yazılmasıyla sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$(b_t - ab)\phi_x^{\;2} + \frac{12}{5}b\phi_x\phi_{xt} + \frac{1}{25}\phi_t^{\;2} - \frac{6}{5}b\phi_t\phi_{xx} + 3b^2\phi_{xx}^{\;2} - 4b^2\phi_x\phi_{xxx} + 2ab\phi_x^{\;2}u_2 = 0 \qquad (4.4.6)$$

$$\phi_{tt} - 5(b_t - ab)\phi_{xx} - 6b\phi_{xxt} + 5b^2\phi_{xxxx} - a\phi_t + 2a(\phi_t - 5b\phi_{xx})u_2 = 0 \qquad (4.4.7)$$

(4.4.6) ve (4.4.7) denklemleri arasından u_2 yok edilirse;

$$\begin{aligned}&\phi_x^{\;2}\phi_{tt} - 6b\phi_x^{\;2}\phi_{xxt} + 5b^2\phi_x^{\;2}\phi_{xxxx} - \frac{b_t}{b}\phi_x^{\;2}\phi_t - \frac{12}{5}\phi_t\phi_x\phi_{xt} - \frac{1}{25}\frac{1}{b}\phi_t^{\;3}\\ &+\frac{7}{5}\phi_t^{\;2}\phi_{xx} - 9b\phi_t\phi_{xx}^{\;2} + 4b\phi_t\phi_x\phi_{xxx} + 12b\phi_x\phi_{xx}\phi_{xt} + 15b^2\phi_{xx}^{\;3} - 20b^2\phi_x\phi_{xx}\phi_{xxx} = 0\end{aligned} \qquad (4.4.8)$$

denklemi elde edilir. (4.4.8) denkleminde

$$\phi(x,t) = 1 + e^{\alpha x + \beta t}$$

şeklinde çözüm aranırsa;

$$\alpha^2 b_t - \alpha^4 b^2 + \frac{1}{25}\beta^2 = 0 \qquad (4.4.9)$$

denklemi elde edilir. Bu Riccati denkleminde de b(t)=k (k, sbt) biçiminde çözüm aranacak olursa,

$$b_{1,2} = \pm\frac{\beta}{5\alpha^2}$$

şeklindeki özel çözümler elde edilir ve iki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin bir parametreli çözümü,

$$b(t) = \frac{\beta}{5\alpha^2}\frac{1 + c' e^{\frac{2}{5}\beta t}}{1 - c' e^{\frac{2}{5}\beta t}} = \frac{\beta}{5\alpha^2}\frac{1 + e^{\frac{2\beta}{5}t + 2c}}{1 - e^{\frac{2\beta}{5}t + 2c}} = -\frac{\beta}{5\alpha^2}\coth(\frac{\beta}{5}t + c) \qquad (4.4.10)$$

biçiminde elde edilir. Burada c, integral sabitidir. Şimdi sırasıyla u_o, u_1 ve u_2 yi belirleyelim;

$$\phi(x,t) = 1 + e^{\alpha x + \beta t} \text{ den } \phi_x = \alpha e^{\alpha x + \beta t}, \phi_t = \beta e^{\alpha x + \beta t},\ \phi_{xt} = \alpha\beta e^{\alpha x + \beta t} \ldots \qquad (4.4.11)$$

Gösterimlerde kolaylık olması açısından (4.4.10) da, $w = \frac{2\beta}{5}t + 2c$, (4.4.11) de de $z = \alpha x + \beta t$ olarak alınırsa

$$b=\frac{\beta}{5\alpha^2}\frac{1+e^w}{1-e^w} \text{ ve } b_t=\frac{4\beta^2}{25\alpha^2}\frac{e^w}{(1-e^w)^2} \tag{4.4.12}$$

biçiminde ifade edilebilir. İlk olarak (4.4.4) den

$$u_0=\frac{6\beta}{5a}(\frac{1+e^w}{1-e^w})e^{2z} \tag{4.4.13}$$

(4.4.5) den

$$u_1=\frac{6\beta}{5a}e^z-\frac{6\beta}{5a}(\frac{1+e^w}{1-e^w})e^z \tag{4.4.14}$$

(4.4.6) dan u_2 çekilirse;

$$u_2=-\frac{1}{2a}\frac{b_t}{b}-\frac{6}{5a}\frac{\phi_{xt}}{\phi_x}-\frac{1}{50ab}\frac{\phi_t^{\,2}}{\phi_x^{\,2}}+\frac{3}{5a}\frac{\phi_t\phi_{xx}}{\phi_x^{\,2}}-\frac{3}{2a}b\frac{\phi_{xx}^{\,2}}{\phi_x^{\,2}}+\frac{2}{a}b\frac{\phi_x\phi_{xxx}}{\phi_x^{\,2}}+\frac{1}{2}$$

dir. (4.4.11) ve (4.4.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}u_2&=-\frac{2\beta}{5a}(\frac{e^w}{1-e^{2w}})-\frac{6\beta}{5a}-\frac{\beta}{10a}(\frac{1-e^w}{1+e^w})+\frac{3\beta}{5a}-\frac{3\beta}{10a}(\frac{1+e^w}{1-e^w})+\frac{2\beta}{5a}(\frac{1+e^w}{1-e^w})+\frac{1}{2}\\&=-\frac{\beta}{10a}\left[\frac{4e^w}{1-e^{2w}}+\frac{1-e^w}{1+e^w}-\frac{1+e^w}{1-e^w}\right]-\frac{3\beta}{5a}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ve buradan

$$u_2=-\frac{3\beta}{5a}+\frac{1}{2} \tag{4.4.15}$$

biçiminde elde edilir. (Aynı sonuca (4.4.7) ifadesinden de ulaşılabilir). Şimdi (4.4.3e) den, başka bir ifadeyle u_2, (4.4.1) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$au_2(u_2-1)=0$$

$$a(-\frac{3\beta}{5a}+\frac{1}{2})(-\frac{3\beta}{5a}-\frac{1}{2})=0$$

ve buradan da

$$\beta=\pm\frac{5a}{6} \tag{4.4.16}$$

olması gerektiği görülebilir. Şimdi sırasıyla (4.4.13), (4.4.14) ve (4.4.15) de elde edilenler, (4.4.2) açılımında yerlerine yazılırlarsa;

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{u_0}{\phi^2} + \frac{u_1}{\phi} + u_2 \\
&= \frac{6\beta}{5a}\left(\frac{1+e^w}{1-e^w}\right)\left(\frac{e^z}{1+e^z}\right)^2 - \frac{6\beta}{5a}\left(\frac{1+e^w}{1-e^w}\right)\frac{e^z}{1+e^z} + \frac{6\beta}{5a}\frac{e^z}{1+e^z} - \frac{3\beta}{5a} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{6\beta}{5a}\left(\frac{1+e^w}{1-e^w}\right)\left(\frac{e^z}{1+e^z}\right)\left(\frac{e^z}{1+e^z} - 1\right) + \frac{6\beta}{5a}\frac{e^z}{1+e^z} - \frac{3\beta}{5a} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{6\beta}{5a}\left(\frac{1+e^w}{1-e^w}\right)\frac{e^z}{(1+e^z)^2} + \frac{6\beta}{5a}\frac{e^z}{1+e^z} - \frac{3\beta}{5a} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre,

$$b(t) = \mp\frac{a}{6\alpha^2}\coth\left(\pm\frac{a}{6}t + c\right)$$

biçiminde olmak üzere, (4.4.1) denkleminin dalga tipi çözümleri;

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\coth\left(\frac{a}{6}t + c\right)\sec h^2\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{5a}{12}t\right) + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\alpha}{2}x + \frac{5a}{12}t\right) + \frac{1}{2} \; ; \qquad \beta = \frac{5a}{6} \quad (4.4.17)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4}\coth\left(\frac{a}{6}t - c\right)\sec h^2\left(\frac{\alpha}{2}x - \frac{5a}{12}t\right) - \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\alpha}{2}x - \frac{5a}{12}t\right) + \frac{1}{2} \; ; \qquad \beta = -\frac{5a}{6} \quad (4.4.18)$$

şeklinde elde edilirler. Burada a, α keyfi reel sabitler, c de integral sabitidir.

Son olarak (4.4.1) denkleminde $b(t) = k^2$ alınması halinde bilinen (3.3.1) Fisher denklemi elde edilir. Buna göre (4.4.2) ifadesi, $b(t) = k^2$ ve (3.3.13) deki

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{|a|}{6}}\frac{1}{k} \; , \; \beta_{1,2} = \frac{5a}{6}$$

değerlerine göre düzenlenirse, (3.3.1) Fisher denkleminin önceki kesimdeki (3.3.15) biçimindeki çözümü yeniden elde edilir.

KAYNAKLAR

Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. 1992. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge University Press, 516 p., Cambridge.

Ablowitz, M. J., Ramani, A. and Segur, H. 1978. Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type. Lett. Nuovo Cimento, 23; 333-338.

Ablowitz, M. J., Ramani, A. and Segur, H. 1980. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type I. J. Math. Phys., 21; 715-721.

Ablowitz, M. J. and Segur, H. 1985. Solitons and the inverse scattering transform. SIAM, 425 p., Philadelphia.

Drazin P. G. and Johnson R. S. 1996. Solitons: an introduction. Cambridge texts in Applied Mathematics, C.U.P., 226 p., Cambridge.

Forsyth, A. R. 1951. A treatise on differential equations. Macmillan and Co., 583 p., London.

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M. 1967. Methot for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett., 19; 1095-1097.

Hille, E. 1976. Ordinary differential equations in the complex domain. John Wiley and Sons, 484 p., New York.

Hong, W. P. and Jung, Y. D. 1999. Auto-Bäcklund transformation and analytic solution for General variable-coefficient KdV equation. Physics Letters A, 257; 149-152.

Hong, W. P. 2000. On Bäcklund transformation for a generalized Burgers equation and solitonic solutions. Phys. Lett. A, 268; 81-84.

Ince, E. L. 1956. Ordinary differential equations. Dover Publications, Inc, 558 p., New York.

Lakshmanan, M. and Tamizhmani, K. M. 1987. Painlevé analysis and integrability aspects of nonlinear evolution equations. Solitons. Lakshmanan ed. Springer Verlag, 367 p., New York.

Lax, P. D. 1968. Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves. Comm. Pure. Appl. Math., 21; 467-490.

Sachdev, P. L. 1991. Nonlinear ordinary differential equations and their applications. Marcel Dekker, Inc., New York.

Sahadevan, R., Tamizhmani, K. M. and Lakshmanan, M. 1986. Painlevé analysis and integrability of coupled nonlinear Schrödinger equations. J. Phys. A: Math. Gen., 19;1783-1791.

Steeb, W. H. and Euler, N. 1988. Nonlinear evolution equations and Painlevé test. World Scientific Publishing Co., 333 p., Singapore.

Tian, B. and Gao, Y. T. 1995. Truncated Painlevé expansion and a wide-ranging type of generalized variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equations. Phys. Lett.A, 209; 297-304.

Uğurlu, S. Y. and Kart, C. 2003. The Painlevé property and Bäcklund transformation for Fisher's equation. Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl, 3; 297-303.

Yıldız, S. 1998. Polinom sınıfından diferensiyel denklemler ve Painlevé transandantları. A. Ü. Fen Bil. Ens. Yüksek Lisans tezi, Ankara.

Yıldız, S. 2003. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin Painlevé analizi ve integre edilebilme yöntemleri. A. Ü. Fen Bil. Ens. Doktora tezi, Ankara.

Weiss, J. 1983. The Painlevé property for partial differential equations II: Bäcklund transformation, Lax pairs and Schwarzian derivative. J. Math. Phys., 24(6); 1405-1414.

Weiss, J. 1984. On classes of integrable systems and the Painlevé property. J. Math. Phys., 25(1); 13-24.

Weiss, J. 1986. Bäcklund transformation and the Painlevé property. J. Math. Phys., 27(5); 1293-1304.

Weiss, J., Tabor, M. and Carnevale, G. 1983. The Painlevé property for partial differential equations. J. Math. Phys., 24(3); 522-526.

Zwillinger, D. 1997. Handbook of differential equations. Academic Press, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Arzu ÖĞÜN
Doğum Yeri	**:**	Antakya
Doğum Tarihi	**:**	07.04.1978
Medeni Hali	**:**	Bekar
Yabancı Dili	**:**	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	**:**	Antakya Lisesi (1994)
Lisans	**:**	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (1999)
Yüksek Lisans	**:**	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2002)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2001-...)

Yayınları

Öğün, A., Kart, C. 2007. Exact solutions of Fisher and generalized Fisher equations with variable coefficients. Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser., 4; 563-568.