



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KONVANSİYONEL KOZMOLOJİNİN TETRAD
TEOREMLERİ ve ZAR-EVREN KOZMOLOJİSİNDEKİ
BENZERLERİ**

Değer SOFUOĞLU
Fizik Anabilim Dalı
Matematiksel Fizik Programı

Danışman
Prof.Dr. Haşim MUTUŞ

Haziran, 2008

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KONVANSİYONEL KOZMOLOJİNİN TETRAD
TEOREMLERİ ve ZAR-EVREN KOZMOLOJİSİNDEKİ
BENZERLERİ**

Değer SOFUOĞLU
Fizik Anabilim Dalı
Matematiksel Fizik Programı

Danışman
Prof.Dr. Haşim MUTUŞ

Haziran, 2008

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca ve tez çalışmalarım sırasında gösterdiği her türlü yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr. Haşim MUTUŞ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı Prof.Dr. Şehsuvar ZEBİTAY ile Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerine yardım ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Haziran, 2008

Değer SOFUOĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ ..	v
SEMBOL VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	ix
SUMMARY.....	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. ZAR-EVREN MODELLERİ	4
2.2. KAYMASIZ MÜKEMMEL AKIŞKAN TEOREMİ	6
3. MALZEME VE YÖNTEM	9
3.1. N-BOYUTLU UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİ: TANIMLAR VE KAVRAMLAR	9
3.1.1. İzdüşürme Tansörleri.....	9
3.1.2. Hiperyüzey ve İndüklenmiş Metrik.....	11
3.1.3. İçsel Kovaryant Türev.....	16
3.1.4. Dışsal Eğrilik.....	18
3.1.5. Gauss-Codazzi Denklemleri.....	20
3.1.6. Weyl Tansörü.....	23
3.2. ZAR ÜZERİNDE EFEKTİF EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ.....	24
3.2.1. Zar Üzerinde İndüklenmiş Efektif Einstein Alan Denklemleri.....	24
3.3. RÖLATİVİST KOZMOLOJİNİN EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ.....	30

3.3.1.Uzay-zamanın Kovaryant 1+3 Ayrışımı.....	30
3.3.2. Enerji-Momentum Tansörü.....	31
3.3.3. Akışkanın Kinematik Değişkenleri.....	34
3.3.4. Kovaryant Evrim ve Bağ Denklemleri.....	36
4. BULGULAR	39
4.1. ZAR ÜZERİNDE KOZMOLOJİK EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ.....	39
4.1.1. Zar Üzerinde Efektif Toplam Enerji	39
4.1.2. Zarda Evrim ve Bağ Denklemleri.....	44
4.2. KAYMASIZ MÜKEMMEL AKIŞKAN.....	47
4.2.1.Zar Üzerinde Kaymasız Mükemmel Akışkan ve Pür Coulombsu Bulk Etkisi İçin Evrim ve Bağ Denklemleri.....	49
4.2.2. İvmesiz Durum.....	51
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	62
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	68

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	: Genişleme ve kaymanın geometrik gösterimi.....	36
-----------	--	----

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1	: Kaymasız mükemmel akışkan ile ilgili çalışmalar.....	8
Tablo 3.1	: γ değerlerine göre akışkanın sınıflandırılması.....	33

SEMBOL VE KISALTMA LİSTESİ

M_N	: N-Boyutlu Manifold
Σ	: Hiperyüzey
M_{Pl}	: 4-boyutlu Planck Kütlesi
M_{temel}	: Yüksek Boyutlu Temel Planck Kütlesi
U_{ab}	: Paralel İzdüşürme Tansörü
h_{ab}	: Dik İzdüşürme Tansörü
g_{ab}	: Uzay-Zamanın Metriği
K_{ab}	: Dışsal eğrilik
${}^N R_{abcd}$	: N-boyutlu Riemann Eğrilik Tansörü
${}^N R_{ab}$	: N-boyutlu Ricci Tansörü
${}^N R$	: N-boyutlu Ricci Skaler Eğriliği
${}^N C_{abcd}$	: N-boyutlu Weyl Tansörü
E_{ab}	: Weyl Tansörünün Elektriksel Kısım
H_{ab}	: Weyl Tansörünün Magnetik Kısım
$\mathcal{E}_{ab}$	: 5-boyutlu Weyl Tansörünün Elektriksel Kısım
G_{ab}	: Einstein Tansörü
Λ	: Kozmolojik Sabit
T_{ab}	: Enerji-Momentum Tansörü
κ^2	: Kuplaj Sabiti
G	: Newton Gravitasyon Sabiti
c	: Işık Hızı
v_s	: Ses Hızı
$\mathbf{u}$	: 4-lü Hız Vektörü
$\dot{u}_a$	: İvme
μ	: Toplam Madde-Enerji Yoğunluğu
p	: Eşyönlü Basınç
q_a	: Momentum Yoğunluğu veya Enerji Akısı
π_{ab}	: Eşyönsüz Basınç Tansörü
θ_{ab}	: Genişleme Tansörü
θ	: Genişleme Skalari
σ_{ab}	: Kayma Tansörü
ω_{ab}	: Girdap Tansörü
ω_a	: Girdap (Dönme) Vektörü

σ	: Kayma Skaleri
ω	: Dönme Skaleri
λ	: Zar Gerilimi
S_{ab}	: Zarın Yüzey Gerilim Enerjisi
U	: Zarda Efektif Yerel Olmayan Enerji Yoğunluğu
Q_a	: Zarda Efektif Yerel Olmayan Enerji Akısı
P_{ab}	: Zarda Efektif Yerel Olmayan Eşyönsüz Basınç
$X_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(X_{ab} + X_{ba})$	: Simetrikleştirme
$X_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(X_{ab} - X_{ba})$	: Antisimetrikleştirme

GRT : Genel Rölativite Teorisi
ADD : Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali

ÖZET

KONVANSİYONEL KOZMOLOJİNİN TETRAD TEOREMLERİ VE ZAR-EVREN KOZMOLOJİSİNDEKİ BENZERLERİ

Konvansiyonel Kozmolojinin kovaryant kozmolojik evrim ve bağ denklemleri zar-evren kozmolojisinde göz önüne alındı. Senovilla, Sopuerta ve Szekeres'in yaklaşımı izlenerek bunlar; her kaymasız ve geodezik mükemmel akışkanın ya genişlemesiz ya da dönmesiz olduğunu ifade eden konvansiyonel kozmolojideki iddianın geçerliliğini zar-evren kozmolojisi çerçevesinde de araştırmak için kullanıldı. Zar üzerinde efektif Einstein alan denklemlerinin kapanmasını önleyen bulkın serbest gravitasyon etkisini gösteren 5-boyutlu Weyl tansörünün elektriksel kısmının varlığından dolayı analiz karmaşık ve sonuçsuz olmaktadır. Buna karşılık eğer analiz tamamen pür bir Coulombsu durum ile kısıtlanırsa ivmesiz bir mükemmel akışkan için teoremin bu yeni kozmolojide de geçerli olduğu açık bir biçimde gösterildi. Basınç ve efektif toplam basınç sabit olduğunda sonuç bulkdaki serbest gravitasyon alanından kaynaklanan zar üzerindeki efektif enerji yoğunluğundan bağımsız olmaktadır. Değişken basınçlar halinde ise teorem, söz konusu efektif enerji yoğunluğu pozitif tanımlı olmadığı sürece geçerli olmaktadır.

SUMMARY

TETRAD THEOREMS OF THE CONVENTIONAL COSMOLOGY AND THEIR ANALOGUES IN BRANE-WORLD COSMOLOGY

Covariant cosmological evolutions and constraints equations of the conventional cosmology are considered in brane-world cosmology. Following the approach of Senovilla, Sopuerta and Szekeres they are used to investigate in the framework of the brane-world cosmology the validity of the conjecture of the conventional cosmology stating that every shear-free and geodesic perfect fluid must be either expansion-free or rotation-free. Due to the presence of the electrical part of the 5-dimensional Weyl tensor representing the free gravitational effect of the bulk making the effective Einstein Field Equations on the brane not closed, the analysis is complicated and inconclusive. Instead, when the analysis is restricted to a purely Coulomb-like case, it is shown explicitly that, for a perfect fluid with vanishing acceleration the theorem holds equivalently in this new cosmology too. When the pressure and the effective total pressure are constants the result is independent of the effective energy density on the brane arising from the free gravitational field in the bulk. The theorem is valid in the case of variable pressures unless the aforesaid effective energy density is positive-definite.

1. GİRİŞ

Einstein Alan Denklemlerinin dörtten daha büyük boyutlu uzay-zamanlarda ele alınması 1920'lerin başlarında Kaluza ve Klein'in çalışmalarıyla başlamıştır. Elektromagnetizma ile gravitasyonu birleştirme girişimi olarak ileri sürülen teorilerinin getirdiği ekstra boyut kavramı 1980'lerin başlarında yeniden canlandırılmış ve gravitasyonun Kuantum Mekaniği ile birleştirilmesi girişimlerinde ve özellikle Sicim teorisi ile M-teori için vazgeçilmez bir unsur olmuştur. Bu çalışmalar, gravitasyonun, düşük enerjilerde efektif olarak dört boyutlu olan yüksek boyutlu bir teorinin limiti olduğu düşüncesine sevketmiştir. Bu çalışmaların ortak yönünü ise, içinde yaşadığımız fiziksel dört boyutlu uzay-zaman ile gözlemsel ve deneysel tutarlılığın koşulu olarak, ekstra boyut ya da boyutlara getirilen sıkıştırma (kompaktlaştırma) mekanizması oluşturmaktadır. Ancak, Sicim teorisindeki yakın zamandaki gelişmeler bazı ekstra boyutların son derece küçük olmadıkları yönünde bir takım sonuçlar vermiştir. Sicim teorisinin bu sonuçlarından ve de M-teoriden esinlenen zar-evren denilen modeller, ekstra boyutların içinde yaşadığımız dört boyutlu evreni nasıl etkilediğini tasvir eden basit ama akla yatkın bir yaklaşım sunmuşlardır. Buna göre, Parçacık Fiziğinin Standart Modelindeki temel etkileşimleri tasvir eden alanlar 3-zar denilen bir 1+3-boyutlu hiperyüzeye hapsedilmiş iken gravitasyon alanı bulk denilen (1+3+d) boyutlarda yayılabilmektedir ve üstelik ekstra boyutların küçük ve hatta çok küçük (kompakt) olması da gerekmemektedir. Bu sınıf modeller içinde en basitini oluşturan $d=1$ hali için, 1998'de Randall ve Sundrum tarafından gösterilmiştir ki beşinci boyut evrenin büyüklüğü mertebesinde de olabilmektedir.

Evrenimizin, bulk diye anılan yüksek boyutlu bir uzay-zamana yatırılmış topolojik bir "arıza" olarak tasavvuru, kozmolojik evrim açısından, Konvansiyonel (Standart) Kozmoloji'dekilerden farklı bir takım özelliklerin ortaya çıkmasına olanak tanımaktadır. Nitekim zar üzerinde elde edilen efektif Einstein Alan Denklemlerinde fazladan iki terim ortaya çıkmaktadır. Birincisi, zarın enerji momentum tansöründe kuvadratik bir düzeltme terimi bulunmakta; ikincisi ise, beş boyutlu bulk'ın Weyl tansörünün elektriksel kısmı diye anılan bir terim, bulk'ın etkisi olarak alan

denklemlerine girmektedir. Öte yandan, bulk ile zar arasında bir enerji alışverişi olanağı bulunması da kozmolojik evrim bakımından yeni olabilirlikler sunacak bir mekanizma olarak görülmektedir. Bu bakımdan, 4-boyutlu Konvansiyonel Kozmoloji'nin pek çok meselesini zar-evren modelleri çerçevesinde yeniden ele almak yakın zamanların başlıca uğraşlarından biri olmuştur.

Tez'imiz açısından bizim ilgi alanımız şu kapsamda olacaktır: Çok iyi bilindiği üzere, 4-boyutlu uzay-zamanda yazılmış Einstein alan denklemlerine dayanan Konvansiyonel ya da Standart Kozmoloji'de tekillik, eşyönlüleşme, Kayma, Kararlılık, vb... konularda teorem ya da iddia olarak nitelendirilen birtakım sonuçlar bulunmaktadır: Tekillik Teoremleri, Birkoff teoremi, "Kozmik No Hair" teoremi, vb... Biz bu Tez'de, bunlar arasından yalnızca "Kaymasız (shearfree) Akışkan Teoremi" denilenle ilgileneceğiz. Bu teorem (veya iddia); evrendeki madde ve enerji içeriği bir akışkan gibi tasavvur edildiğinde, eğer akışkan kaymasız ise bu takdirde birtakım varsayımlar sağlandığında, ya girdabının (akışkanın dönme hareketi) ya da genişlemesinin sıfır olacağını söylemektedir. Bu teorem, konvansiyonel kozmolojide çeşitli varsayımlar altında pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Buna karşılık, söz konusu mesele bildiğimiz kadarıyla literatürde zar-evren modelleri çerçevesinde ele alınmamıştır. Biz bu Tez'de, Senovilla, Sopuerta ve Szekeres'in konvansiyonel kozmolojide izledikleri kovaryant yaklaşımın bir benzerini zar-evren modellerinde gerçekleştirerek söz konusu teoremin geçerliliğini ivmesiz mükemmel akışkan ve özel bulk etkisi gibi bir takım kısıtlamalar altında araştıracağız. Bunun için, zar-evren modellerinde kullanılan başlıca iki yaklaşımdan biri olan zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein denklemlerinden yola çıkacağız ve de konvansiyonel kozmolojinin zar-evrene genelleştirilmiş kovaryant evrim ve bağ denklemlerini kullanacağız.

Çalışma planımız şöyle olacaktır: Genel Kısımlar Bölümü'nde, zar-evren modeli kavramının ortaya çıkışının tarihçesini kısaca özetledikten sonra Konvansiyonel Kozmolojide Kaymasız akışkan için gerçekleştirilen çalışmaları tanıtıyoruz. Malzeme ve Yöntem Bölümü'nde önce Tez'in anlaşılmasına yardımcı olacak temel bazı geometrik büyüklükler ile kavramları veriyoruz. İşin içine giren Kozmolojik kavramlar ile zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein denklemlerinin kısa bir çıkartılışından sonra evrim ve bağ denklemlerinin dayandığı 1+3 kovaryant ayrışma ilişkin bilgileri bu

bölümde sunuyoruz. Bulgular Bölümü'nde Standart Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerinin zar-evren modeli için alacağı şekilleri tesis ediyoruz. Daha sonra da denklemleri kaymasız ve ivmesiz mükemmel akışkan haline özelleştirerek ve de bulkın etkisi için Pür Coulombsu Durum varsayarak girdap ile genişleme arasındaki ilişkiyi araştırıyoruz. Sonuç Bölümü'nde ise, yapılanların kısa bir tartışmasını sunuyoruz.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. ZAR-EVREN MODELLERİ

1921 ve 1926'da Kaluza ve Klein, elektromagnetizma ile gravitasyonu bir birleştirme girişimi olarak, ekstra uzaysal boyutun yeteri kadar küçük yarıçaplı bir çember üzerinde tıkızlaştırıldığı (kompaktlaştırıldığı) beş boyutlu bir uzay zaman teorisi ileri sürmüşlerdir [1,2]. Her ne kadar teorileri başarısız kalmış olsa da, ekstra boyut düşüncesi çekiciliğini sürdürmüş ve özellikle 1980 sonraları, Kaluza-Klein tipi denilen bu türlü yüksek boyutlu teoriler yoğun ilgi alanı oluşturmuşlardır. Yakın zamanlarda ağırlık kazanan düşünce, hem Kuvantum Mekanikini hem de gravitasyonu tutarlı bir biçimde kapsayacak bir teorinin ancak dörtten daha büyük boyutlu bir uzay-zamanın göz önüne alınmasıyla mümkün olabileceği yönünde olmuştur. Bu amaçla ileri sürülen Süpersicim teorileri, her iki disiplinin tutarlılığının ancak on boyutta sağlanabileceğini söylemektedir. İçinde yaşadığımız dört boyuta ise, ekstra uzaysal boyutlar Planck ölçeği mertebesinde boyutlara sahip bir manifolda tıkızlaştırıldığı takdirde inilebilmektedir.

Bir başka yaklaşımı ise, çok yakın zamanlarda Horava ve Witten tarafından ileri sürülen ve M-teori olarak adlandırılan teori oluşturmaktadır [3,4]. Bu teori, birtakım limit durumlarda bilinen beş sicim teorisine ya da süpergraviteye indirgenmektedir. Horava ve Witten, $E_8 \times E_8$ heterotik sicim teorisinin kuvvetli kuplaj limitine karşılık gelen düşük enerjideki efektif teoriyi tasvirinde, onbirinci boyutun Z_2 ayna simetrisine sahip bir orbifold üzerinde tıkızlaştığı onbir boyutlu supergravite elde edilebileceğini göstermiştir. Orbifold bir aralık olup sabit olan iki ucu, yani uzay-zamanın sınırları, ayar gruplarının (E_8) etkidiği 10-boyutlu düzlemler tanımlamaktadır. Böyle bir tasavvur şu üç tip uzaysal boyutu ortaya çıkarmaktadır: Orbifold boyutu, alışık olduğumuz uzaysal boyutlar ve altı tane de Kaluza-Klein anlamında tıkızlaştırılabilen boyutlar.

Witten, daha sonra, altı boyutun üzerinde tıkızlaştığı Calabi-Yau manifoldunun büyüklüğünün söz konusu iki sınır düzlem arasındaki açıklıktan çok daha küçük (Plancksal uzunluklarda) olabileceğini ileri sürmüştür[5]. Başka bir deyişle, orbifold boyutu söz konusu altı ekstra boyuttan daha büyük olabilmektedir. Böyle bir durum, sonuçta, iki tane sınır 3-boyut (ki biri bizim evrenimiz olabilir) ve bir de “büyük” ekstra boyut olmak üzere beş boyutlu bir uzay-zaman görüntüsü vermektedir. Bu sınır düzlemlerine “zar” adı verilmektedir. Aslında zar kavramı 80’li yıllarda fenomenolojik çerçevede ortaya çıkmış ve sicim teorilerinin yakın gelişmeleriyle yeniden ele alınmıştır. Genel anlamıyla zar-evren, bulk denilen yüksek boyutlu bir uzay-zamana daldırılmış üç boyutlu (+zaman) bir hiperyüzeydir. Standart Modelin parçacıkları zara hapsolmuş iken yalnızca gravitasyon ve muhtemel başka tuhaf madde alanları (süpersicim dilaton alanı gibi) bulkta yayılabilmektedir.

Bu üç boyutlu zar kavramı, parçacık fiziğinde hiyerarşi problemine bir çözüm getirmek üzere tamamen fenomenolojik çerçevede Arkani-Hamed, Dimopoulos ve Dvali (ADD) tarafından da kullanılmıştır[6]. Bu amaçla son derece basit bir modelden yola çıkmışlardır. (4+d)- boyutlu bir düz uzay-zaman göz önüne alıp d ekstra boyutları da basitlik amacıyla R yarıçaplı bir simit üzerinde tıkızlaştırmışlardır. Gravitasyonun yalnızca ekstra d boyutlarda yayıldığını varsayarak sonuçta, R den daha büyük uzaklıklarda, (4+d)-boyutlu gravitasyonun efektif olarak bildiğimiz 4-boyutlu gravitasyon gibi davrandığını bulmuşlardır. Newton Kanunu’nun deneysel olarak milimetrenin onda biri uzaklıklarda geçerliliğinin saptandığı göz önüne alınacak olursa, bu sonuç R nin ve dolayısıyla da ekstra boyutların milimetrenin kesri mertebesinde olabileceği anlamına gelmektedir. Öte yandan ADD, yüksek boyutlu temel Planck kütlesi M_{temel} ile dört-boyutlu Planck kütlesi M_{Pl} arasında

$$M_{Pl}^2 = M_{temel}^{2+d} R^d$$

bağıntısını bulmakta ve buradan hareketle de zayıf etkileşme ölçeği olan 100 GeV ile Planck ölçeği olan 10^{19} GeV arasındaki muazzam uyumsuzluğu gidermek üzere ekstra boyutlu uzayın hacminin yeteri kadar büyük alınması teklifinde bulunmaktadır. Bunun gerçekleşmesi ise ekstra boyutların birden fazla olmasını gerektirmektedir.

2.2. KAYMASIZ MÜKEMMEL AKIŞKAN TEOREMİ

Literatürde $\mu + p \equiv 0$ koşuluna uyan $p = p(\mu)$ barotropik hal denklemleri kaymasız bir akışkanın, birtakım ek varsayımlar sağlandığında, ya girdabının sıfır ya da genişlemesinin sıfır olduğunu bildiren epey çalışma bulunmaktadır. Bu yönde ilk sonuç, Gödel tarafından uzayca homojen modellerden olan Bianchi-tip IX kozmolojik modeli çerçevesinde toz ($p = 0$) hali için verilmiştir[7]. Bu sonuç daha sonra Ellis tarafından yine toz için ama herhangi bir uzay-zaman simetrisine sahip olması gerekmeyen tüm modellere genelleştirilmiştir[8]. Bir başka doğrultuda genelleştirme de tüm uzayca homojen uzay-zamanları göz önüne almak ama bu sefer, çok özel hal denklemleri varsaymak yoluyla olmuştur. Bu kapsamda Schücking $p = 0$ modellerini[9], Banerji de $p = (\gamma - 1)\mu$ lineer barotropik hal denkleminde $1 < \gamma \neq \frac{10}{9}$ halini göz önüne almışlardır[10]. King ve Ellis μ ve p değişkenlerine yalnızca $\mu + p > 0$ kısıtlaması getirilmiş olsa bile sonuçların değişmediğini göstermişlerdir[11]. Daha sonra White ve Collins, sonuçların uzayca homojen uzay-zamanlar için, daha genel bir koşul olan $\mu + p \neq 0$ koşulu altında da geçerli olduğunu göstermiştir[12]. Yine Treciokas ve Ellis, hal denklemi $p = \frac{1}{3}\mu$ olan kaymasız radyasyon modeli için ya girdabın ya da dönmenin sıfır olması gerektiğini ispatlamışlardır[13]. Kaymasız durumda ya girdabın ya da dönmenin sıfır olduğu, başka özel varsayımlar için de gösterilmiştir. White ve Collins, ivmenin girdaba paralel olması ve Collins de Weyl tansörünün magnetik kısmının sıfır olması durumlarında aynı özelliği bulmuşlardır[14]. Bu alandaki çalışmaları başkaları da izlemiştir (Bkz. [12] ve kaynakları). Tüm bu çalışmalar söz konusu iddianın doğru olabileceği yolunda bir kanaat oluşturmuştur, yani: Rölativistik Kozmoloji’de, $\mu + p \neq 0$ olacak şekilde $p = p(\mu)$ hal denklemine uyan kaymasız bir mükemmel akışkanın ya girdabı sıfırdır ya da genişlemesi. Bu iddianın koşullarını sağlayan ekzakt çözümlerin bu iddiayı doğruladıkları bilinmekle birlikte, bu iddianın yanlış olduğunu gösteren herhangi bir çözüme şimdiye kadar rastlanmamıştır. Bununla birlikte, şuna işaret etmekte yarar vardır. Yukarıdaki sonuçların hepsi ya özel bir tetrad ya da bir koordinat sistemi kullanılarak ispatlanmıştır. Dolayısıyla sonuçların temelinde yatan öğeleri kısmen maskeler bir durum yaratmaktadır. Bunu gidermek için, çok yakın bir

zamanda Senovilla, Sopuerta ve Szekeres, en genel yaklaşım olan Kovaryant Formülasyonu kullanarak, söz konusu iddiayı ivmenin sıfır olduğu ve de ivmenin girdaba paralel olduğu iki durum için ispatlamaya çalışmışlardır[15].

Bu konudaki çalışmalar bunun dışında da farklı koşullar kabul edilerek ve değişik yöntemler kullanılarak devam etmiştir. Carminati[16] null(ışık cinsinden) tetrad ile, Lang ve Collins[17] $\theta = \theta(\mu)$ hali için ortonormal tetrad ile, Carminati ve Cyganowski[18,19,20] null tetrad ile, Coley[21] killing vektör alanının hıza paralel olması hali için $(\xi^a \parallel u^a)$, Sopuerta[22] $\theta = \theta(\mu)$ durumu için, Van der Bergh[23] $\mu + 3p = \text{sabit}$, $\mu - 9p = \text{sabit}$ durumları için ve Cyganowski ve Carminati[24] $E_{ab} = 0$ hali için bu ispatı yapmışlardır. Bütün bu çalışmalar tarihsel sırayla Chrobok'inkine benzer şekilde[25] Tablo 2.1 de toplu halde gösterilmiştir.

Biz de bu Tezde, söz konusu iddiayı Senovilla, Sopuerta ve Szekeres'in yöntemini izleyerek, zar-evren modelleri çerçevesinde Kovaryant formülasyon ile ele alacağız.

Tablo 2.1: Kaymasız mükemmel akışkan ile ilgili çalışmalar[25]

Yazar	Yıl	Akışkanın Özelliği	Yöntem
Gödel [7]	1950	$p = 0$	Koordinat
Schücking [9]	1957	$p = 0$	Koordinat
Ellis [8]	1967	$p = 0$	Ortonormal tetrad
Banerji [10]	1968	$p = (\gamma - 1)\mu$, $1 < \gamma \neq \frac{10}{9}$	Koordinat
Treciokas ve Ellis [13]	1971	$p = \frac{1}{3}\mu$	Koordinat
King ve Ellis [11]	1973	$\mu + p > 0$	Ortonormal tetrad
White ve Collins [12]	1984	$\mu + p \neq 0$	Ortonormal tetrad
Collins [14]	1984	$H_{ab} = 0$	Ortonormal tetrad
Carminati [16]	1987	Petrov Tip-N	Işık cinsinden(null) tetrad
Lang ve Collins [17]	1988	$\theta = \theta(\mu)$	Ortonormal tetrad
Carminati [18]	1990	Petrov Tip III	Işık cinsinden(null) tetrad
Coley [21]	1991	$\xi^a \parallel u^a$	Koordinat
Carminati ve Cyganowski[19]	1996	Petrov Tip III	Işık cinsinden(null) tetrad
Senovilla, Sopena, Szekeres [15]	1997	$\dot{u}_a = 0$, $\dot{u}_a \parallel \omega_a$	Kovaryant
Carminati ve Cyganowski[20]	1997	Petrov Tip III	Işık cinsinden(null) tetrad
Sopena [22]	1998	$\theta = \theta(\omega)$	Kovaryant
Van den Bergh [23]	1999	$\mu + 3p = \text{sabit}$, $\mu - 9p = \text{sabit}$	Ortonormal tetrad
Cyganowski ve Carminati [24]	2000	$E_{ab} = 0$	Işık cinsinden(null) tetrad
Chorobok[25]	2004	$\dot{u}_a \perp \omega_a$ durumu $p = (\gamma - 1)\mu$ için özel γ değerleri $H_{ab} \neq 0$ durumu	Kovaryant

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. N-BOYUTLU UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİ: TANIMLAR VE KAVRAMLAR

3.1.1. İzdüşürme Tansörleri

Genel olarak N-boyutlu bir M_N manifoldu göz önüne alınsın ve bunun metriği $\mathbf{g}$ ile gösterilsin[26]. Her ne kadar yazılacak ifadeler koordinat-bağımsız (kovaryant) olacaklarsa da, başlangıç için geçici olarak bir koordinat sistemi seçmek iyi olacaktır. $\{x^a, a = 0, 1, 2, \dots\}$ ile keyfi bir yerel koordinat sistemi gösterilsin. Bu sistemde metriğin bileşenleri g_{ab} ile gösterilecek ve imzasının da Lorentzsel, yani $(-1, +1, +1, +1, \dots)$ olduğu varsayılacaktır. Bu kabule göre $\mathbf{n}$ gibi bir vektör

$$n^a n_a = \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{ise zamansal} \\ +1 & \text{ise uzaysal} \end{cases} \quad (3.1)$$

biçiminde normlanıp adlandırılacaktır. ε parametresi ifadelerin genelliğini bozmamak üzere, özel durumlar dışında, ifadelerde tutulacaktır.

Şimdilik $\mathbf{n}$ ye özel bir geometrik ya da fiziksel anlam bağlamayıp seçilmiş ayrıcalıklı bir vektör gözüyle bakılsın. Bu takdirde $M_N(\mathbf{g}, \mathbf{n})$ manifoldunda keyfi bir $\mathbf{V}$ vektörü; biri $\mathbf{n}$ ye paralel; diğeri de $\mathbf{n}$ ye dik olmak üzere

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{//} + \mathbf{V}_{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad V^a = V_{//}^a + V_{\perp}^a \quad (3.2)$$

biçiminde iki bileşene ayrıştırılabilir. Eğer ayrıcalıklı $\mathbf{n}$ den hareketle

$$U^a_b = \varepsilon n^a n_b \quad \text{ve} \quad h^a_b = \delta^a_b - \varepsilon n^a n_b \quad (3.3)$$

bağıntılarıyla iki tansör tanımlanırsa, (3.2) nin

$$V^a = U^a_b V^b + h^a_b V^b \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edilebileceği kolaylıkla görülebilir. U^a_b (veya U_{ab} , U^{ab}) ile h^a_b (veya h_{ab} , h^{ab}) tansörlerine izdüşürme tansörleri denilmekte olup, birincisi bir vektörü $\mathbf{n}$ ye paralel; ikincisi de $\mathbf{n}$ ye dik olarak izdüşürür. $h^a_b V^b$ ye dik izdüşürülmüş uzaysal (eğer $\mathbf{n}$ zamansal ise) kısım denir. Tanımlarından bu tansörlerin

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_{ba} & h_{ab} &= h_{ba} \\ U^a_a &= +1 & h^a_a &= N-1 \\ U^a_b n^b &= n^a & h^a_b n^b &= 0 \\ U^a_c U^c_b &= U^a_b & h^a_c h^c_b &= h^a_b \\ U^a_c U^b_d &= U^a_d U^b_c & h^a_c h^b_d &= h^a_d h^b_c \end{aligned} \quad (3.5)$$

bağıntılarını sağladıkları kolayca gösterilebilir.

Yukarıdaki yaklaşım, birinci mertebeden bir $T_a \in M_N$ tansörünün

$$T_a = A n_a + B_b \quad , \quad \text{öyle ki} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{n} \quad , \quad \text{yani,} \quad B_a n^a = 0 \quad (3.6)$$

biçiminde indirgenemez parçalanışına dayanmaktadır.

Şimdi benzer biçimde bir $T_{ab} \in M_N$ tansörünün

$$T_{ab} = A n_a n_b + B_a n_b + C_b n_a + D_{ab} \quad (3.7)$$

indirgenemez parçalanışı göz önüne alınsın, öyle ki,

$$B_a n^a = 0, \quad C_a n^a = 0, \quad D_{ab} n^b = D_{ab} n^a = 0 \quad (3.8)$$

olsun. (3.7) nin

$$T_{ab} = -U^c_a U^d_b T_{cd} + U^c_a T_{cb} + U^c_b T_{ac} + h^c_a h^d_b T_{cd} \quad (3.9)$$

biçiminde yazılabileceğini görmek kolaydır. Son terim olan $h_a^c h_b^d T_{cd}$, T_{ab} nin dik izdüşürülmüş uzaysal kısmı (eğer $\mathbf{n}$ zamansal ise) olarak anılır.

Şimdi, önemli bir uygulama olarak, $T_{ab} \equiv \nabla_a n_b$ kovaryant türevin ayrışımı göz önüne alınsın. (3.1) den hareketle elde edilebilecek

$$n^a \nabla_c n_a \equiv 0 \quad (3.10a)$$

$$n^c \nabla_c n_a \equiv \alpha_a \quad \Rightarrow \quad n^a \alpha_a = 0 \quad (\alpha_a \text{ ivme olup uzaysaldır.}) \quad (3.10b)$$

bağıntıları (3.9) da kullanılırsa

$$\nabla_a n_b = \varepsilon n_a \alpha_b + h_a^c h_b^d \nabla_c n_d \quad (3.11)$$

ayrışımı elde edilir. Son terim olan

$$D_a n_b \equiv h_a^c h_b^d \nabla_c n_d \quad (3.12)$$

ifadesine: N-boyuttaki kovaryant türevin izdüşürülmüş uzaysal kısmı (eğer $\mathbf{n}$ zamansal ise) denir ve dolayısıyla,

$$D_a n_b = \nabla_a n_b - \varepsilon n_a \alpha_b \quad (3.13)$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Yukarıda göz önüne alınan ayrıcalıklı $\mathbf{n}$ vektörüne herhangi bir geometrik ya da fiziksel anlam bağlanmamıştı. Geometri kapsamında, $\mathbf{n}$, M_N ’deki (N-1)-boyutlu hiperyüzeylerin birim normali olarak düşünülecektir. Kozmoloji kapsamında da, bir 4-lü vektör olarak, bir gözlemcinin hızını ya da bir akışkanın akış hızını gösterecektir. Bu takdirde ayrıcalıklı $\mathbf{n}$ vektörü $\mathbf{u}$ sembolüyle gösterilecektir.

3.1.2. Hiperyüzey ve İndüklenmiş Metrik

M_N ye yatırılmış (N-1)-boyutlu bir Σ hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve $\mathbf{n}$ de bunun birim normali olsun. Eğer $\mathbf{n}$ zaman cinsinden ise, Σ ya uzaysal; $\mathbf{n}$ uzay cinsinden ise Σ

ya zamansal hiperyüzey denir. M_N deki koordinatlar $\{x^a, a=0,1,\dots,N-1\}$ ve Σ yüzeyinin içsel (intrensek) koordinatları $\{y^\nu, \nu=0,1,\dots,N-2\}$ olmak üzere Σ hiperyüzeyi

$$\Phi(x^a) = \text{Sabit} \quad (3.14)$$

kapalı denklemleriyle, ya da

$$x^a = x^a(y^\nu) \quad (3.15)$$

parametrik denklemleriyle tanımlanabilir. (3.15) denklemlerine Σ nın M_N ye yatırılma denklemleri de denir. (3.14) ten $d\Phi = \partial_a \Phi dx^a = 0$ yazılabileceğinden, buradan $\partial_a \Phi \perp \Sigma$ olduğu ve dolayısıyla birim normalin

$$n_a = \frac{\partial_a \Phi}{|g^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi|^{1/2}} \quad (3.16)$$

biçiminde tanımlanabileceği görülebilir. Eğer n^a artan Φ yönünde olduğunda $n^a \partial_a \Phi > 0$ alınırsa, n nin normlanması

$$n^a n_a = \varepsilon \quad (3.17)$$

biçiminde olur.

Şimdi, Σ yüzeyinin M_N ye yatırılmasını tasvir eden (3.15) teki parametrik denklemlerinden yazılabilecek

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} = \frac{\partial x^a}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (3.18)$$

bağıntısı

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \equiv \partial_a \equiv e_a, \quad \frac{\partial}{\partial y^\nu} \equiv \partial_\nu \equiv e_\nu \quad \text{ve} \quad \frac{\partial x^a}{\partial y^\nu} \equiv e_\nu^a \quad (3.19)$$

tanımları kullanılarak

$$\mathbf{e}_\nu = e_\nu^a \mathbf{e}_a \quad (3.20)$$

biçiminde ifade edilebilir. $\mathbf{e}_a$, M_N deki koordinatsal taban vektörlerini (N adet); $\mathbf{e}_\nu$ de Σ daki koordinatsal taban vektörlerini (N-1 adet) göstermektedir. e_ν^a fonksiyonları ise Σ nın ν üncü taban vektörünün, M_N nin $\mathbf{e}_a$ taban vektörleri cinsinden lineer kombinezonundaki a ıncı bileşenini göstermektedir. (3.15) kullanılarak

$$e_\nu^a n_a = 0 \quad (3.21)$$

olduğu görülebilir. Bu bağıntı, $\mathbf{e}_\nu$ taban vektörlerinin $\mathbf{n}$ normaline dik olduğunu ve dolayısıyla da Σ nın teğet uzayında olduklarını söylemektedir.

Yukarıdaki yaklaşıma alternatif olarak, Σ üzerinde bir dy^ν yer değiştirmesi göz önüne alınırsa, buna M_N de karşılık gelen yerdeğiştirme, (3.15) ten

$$dx^a = \frac{\partial x^a}{\partial y^\nu} dy^\nu \quad (3.22)$$

olur.

$$dx^a \equiv \mathbf{e}^a \equiv \boldsymbol{\omega}^a, \quad dy^\nu \equiv \mathbf{e}^\nu \equiv \boldsymbol{\omega}^\nu \quad (3.23)$$

tanımları yapılırsa, (3.22) bağıntısı

$$\boldsymbol{\omega}^a = e^a_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu \quad (3.24)$$

biçiminde ifade edilebilir. $\boldsymbol{\omega}^a$ ler M_N deki koordinatsal taban 1-formlarını (N adet); $\boldsymbol{\omega}^\nu$ ler de Σ daki koordinatsal taban 1-formlarını (N-1 adet) göstermektedir. (3.24) ten, e^a_ν fonksiyonlarına, M_N deki a ıncı taban 1-formunun, Σ daki $\boldsymbol{\omega}^\nu$ 1-form tabanındaki bileşenleri gözüyle bakılabileceğini söylemektedir.

$dx^a \equiv \omega^a$, bir M_N vektörüdür (1-formudur) ve Σ -invarianttır, yani, eğer y^ν koordinatları değişirse ($y \rightarrow \bar{y}$) bileşenleri değişmez. Benzer şekilde, $dy^\nu \equiv \omega^\nu$ bir Σ vektörüdür (1-formudur) ve M_N -invarianttır, yani x^a koordinatları değişirse ($x \rightarrow \bar{x}$) ω^ν ler değişmez. Başka bir deyişle; M_N deki koordinat dönüşümü altında e_ν^a bir kontravaryant M_N vektörüdür. Σ daki koordinat dönüşümü altında e^a_ν kovaryant bir Σ vektörüdür.

Σ daki sonsuz küçük yerdeğişirmeler M_N de ifade edildiğinde:

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \quad (3.25)$$

ve Σ da ifade edildiğinde ise

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(y)dy^\mu dy^\nu \quad (3.26)$$

olacaktır. (3.22) kullanılarak, bunlardan

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b g_{ab} \quad (3.27)$$

elde edilir. $g_{\mu\nu}$ ye y koordinatlarında ya da $\{e_\mu\}$ koordinat tabanında Σ üzerinde indüklenmiş metrik denir ve çoğu kere

$$g_{\mu\nu} \equiv {}^{N-1}g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

yazılışlarıyla gösterilir. M_N deki $x \rightarrow \bar{x}$ dönüşümleri altında $g_{\mu\nu}$ bir skaler; Σ daki $y \rightarrow \bar{y}$ dönüşümleri altında ise bir 2. mertebeden kovaryant tansör olduğundan, $g_{\mu\nu}$ ye bir (N-1)-tansör denir.

(3.27) ifadesi, (N-1)-boyutlu Σ hiperyüzeyinin ${}^{N-1}g_{\mu\nu}$ metriğini, N-boyutlu M_N nin g_{ab} metriğinden hareketle, Σ nın y^ν içsel (intrensek) koordinatları cinsinden ifade etmektedir. Tersine ${}^{N-1}g_{\mu\nu}$ verildiğinde, M_N nin g_{ab} metriği

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b + \varepsilon n_a n_b \quad (3.29)$$

ifadesiyle bulunur. Bunu göstermek için (3.27) ifadesinin sol tarafının

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\lambda\sigma} \delta^\lambda_\mu \delta^\sigma_\nu \\ &= g_{\lambda\sigma} (e^\lambda_a e^\mu_a) (e^\sigma_b e^\nu_b) \\ &= g_{\lambda\sigma} (e^\lambda_a e^\sigma_b) (e^\mu_a e^\nu_b) \end{aligned}$$

yazılabileceği göz önüne alınırsa, (3.27) ifadesi

$$(g_{ab} - g_{\lambda\sigma} (e^\lambda_a e^\sigma_b)) e^\mu_a e^\nu_b = 0$$

olur. Buradan, $X_{ab} e^\mu_a e^\nu_b = 0$ olmak üzere

$$g_{ab} - g_{\lambda\sigma} e^\lambda_a e^\sigma_b = X_{ab}$$

veya

$$g_{ab} = g_{\lambda\sigma} e^\lambda_a e^\sigma_b + X_{ab}$$

elde edilir. $X_{ab} = \varepsilon n_a n_b$ alınarak (3.29) bağıntısı elde edilir. (3.29) un sağ tarafındaki ilk terim için

$$^{(N-1)}g_{ab} \equiv h_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b \quad (3.30)$$

yazılsın. Bu büyüklük yalnızca Σ üzerinde tanımlıdır ve (3.21) nedeniyle $^{(N-1)}g_{ab} n^a = 0$ olduğundan tamamen Σ ya teğettir. (3.30) tanımını kullanılarak (3.29)

$$^{(N-1)}g_{ab} \equiv h_{ab} = g_{ab} - \varepsilon n_a n_b \quad (3.31)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadenin (3.3) ile karşılaştırılmasından, $^{(N-1)}g_{ab} \equiv h_{ab}$ nin $\mathbf{n}$ ye dik olduğu, yani, Σ hiperyüzeyi üzerine dik izdüşüren bir izdüşürme tansörü rolünü oynadığı görülmektedir.

O halde, mesela $T^{ab} \in M_N$ gibi herhangi bir uzay-zaman tansörü göz önüne alındığında, (3.31) aracılığıyla bu

$$T^{cd} = h^c_a h^d_b T^{ab} \quad (3.32)$$

biçiminde izdüşürülebilir. İzdüşüm T^{cd} ,

$$T^{cd} n_c = T^{cd} n_d = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \perp \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \in \Sigma \quad (3.33)$$

özellikliğini taşır, yani bir teğet tansör alanıdır. Bu izdüşüm tansörden hareketle de

$$T^{\mu\nu} = e^\mu_c e^\nu_d T^{cd} \quad \Leftrightarrow \quad T^{ab} = e^a_\mu e^b_\nu T^{\mu\nu} \quad (3.34)$$

aracılığıyla buna bağlanan $T^{\mu\nu}$ (N-1)-tansörü (yani $x \rightarrow \bar{x}$ altında skaler gibi; $y \rightarrow \bar{y}$ altında da tansör gibi dönüşen) elde edilir. (3.34) bağıntısı bir T^{ab} teğet tansör ile bunun eşdeğeri $T^{\mu\nu}$ (N-1)-tansörü arasında birinden diğerine geçişi ifade etmektedir. Nasıl ki uzay-zaman tansörlerinin indisleri g_{ab} ve g^{ab} ile indirilip kaldırılmaktadır, (N-1)-tansörlerin indisleri de $g_{\mu\nu}$ ve $g^{\mu\nu}$ ile indirilip kaldırılmaktadır. Burada, $g_{\mu\nu}$, (3.27) ve (3.28) de tanımlandığı gibidir ve $g^{\mu\nu}$ nün de tanımı

$$g^{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_b g^{ab} \quad (3.35)$$

ve

$$g^{\mu\nu} \equiv {}^{(N-1)}g^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} \quad (3.36)$$

dir. O halde, mesela

$$T^{\mu\nu} = h^\mu_\rho h^\nu_\lambda T^{\rho\lambda}$$

dır.

3.1.3. İçsel Kovaryant Türev

Bir V uzay-zaman vektörünün $\nabla_a V_b$ uzay-zaman kovaryant türevinin, önceki paragrafta söz edildiği gibi, ya da (3.12) de yazıldığı gibi, Σ üzerine izdüşürülmesi

$$D_c V_d = h^a_c h^b_d \nabla_a V_b \quad (3.37)$$

biçimindedir. $D_c V_d$ ye içsel (intrensek) türev denilmekte olup bu bir teğet tansör alanıdır, zira $(D_c V_d) n^c = (D_c V_d) n^d = 0$ dır. (3.37) den hareketle de

$$D_\mu V_\nu = e_\mu^c e_\nu^d D_c V_d \quad (3.38)$$

elde edilir. Şimdi acaba, $D_\mu V_\nu$ niçin bir kovaryant türevdir ve de nasıl hesaplanabilir? (3.37), (3.38) e taşınır ve (3.31) ve (3.21) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_\mu V_\nu &= e_\mu^c e_\nu^d h^a_c h^b_d \nabla_a V_b \\ &= e_\mu^c e_\nu^d (\delta^a_c - \varepsilon n^a n_c) (\delta^b_d - \varepsilon n^b n_d) \nabla_a V_b \\ &= (e_\mu^c e_\nu^d \delta^a_c \delta^b_d - \varepsilon e_\mu^c e_\nu^d \delta^a_c n^b n_d - \varepsilon e_\mu^c e_\nu^d \delta^b_d n^a n_c + e_\mu^c e_\nu^d n^a n_c n^b n_d) \nabla_a V_b \\ &= e_\mu^a e_\nu^b \nabla_a V_b \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir. Burada $\nabla_a V_b$ nin uzay-zaman kovaryant türev olduğu unutulmamalıdır. Bunun

$$\nabla_a V_b = \frac{\partial V_b}{\partial x^a} - \Gamma^c_{ab} V_c \quad (3.40)$$

ifadesi (3.39) a yerleştirilip, gerekli düzenlemeler yapılır ve

$$e_\mu^a (\nabla_a e_\nu^b) e^\lambda_b = -e_\mu^a e_\nu^b \nabla_a e^\lambda_b \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (3.41)$$

denilirse

$$D_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda \quad (3.42)$$

elde edilir. O halde içsel kovaryant türev de, tıpkı uzay-zaman türevi gibi hesaplanmaktadır. Yukarıdaki hesaplar herhangi bir mertebeden tansörlere genelleştirilebilir. Mesela 2. mertebeden bir T_{ab} için

$$D_\mu T_{\nu\lambda} = e_\mu^a e_\nu^b e_\lambda^c \nabla_a T_{bc} \quad (3.43)$$

dır. Özel olarak $T_{\nu\lambda} \equiv h_{\nu\lambda}$ alınırsa

$$D_\mu h_{\nu\lambda} = 0 \quad (3.44)$$

bulunur ki, bu, D_μ nün bir kovaryant türev olduğunu gösterir.

3.1.4. Dışsal Eğrilik

Yukarıdaki ifadelerde $V_b \equiv n_b$ alınırsa,

$$K_{cd} \equiv D_c n_d = h^a_c h^b_d \nabla_a n_b \quad (3.45)$$

ve

$$K_{\mu\nu} \equiv D_\mu n_\nu = e_\mu^c e_\nu^d D_c n_d \quad (3.46a)$$

$$= e_\mu^a e_\nu^b \nabla_a n_b \quad (3.46b)$$

$$= e_\mu^c e_\nu^d K_{cd} \quad (3.46c)$$

bulunur. $K_{\mu\nu}$ ye dışsal(ekstresek) eğrilik ya da Σ hiperyüzeyinin ikinci temel formu denir. K_{ab} , M_N uzay zaman koordinatlarında; $K_{\mu\nu}$ ise Σ yüzeyinin içsel koordinatlarında ifade edilmiştir.

$$K_{cd} n^c = K_{cd} n^d = 0 \quad (3.47)$$

olduğundan, K_{cd} bir teğet vektördür ve dolayısıyla $K_{\mu\nu}$ bir (N-1)-tansör olur.

K_{ab} veya $K_{\mu\nu}$ simetrik bir tansördür, yani

$$K_{ab} = K_{ba} \quad , \quad K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu} \quad (3.48)$$

Bunu göstermek için (3.16) bağıntısı $\beta \equiv |g^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi|^{1/2}$ olmak üzere

$$n_a = \beta \partial_a \Phi = \beta \nabla_a \Phi$$

biçiminde yazılabileceği göz önüne alınır ve bu da (3.45) te kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_{cd} &= h^a_c h^b_d \nabla_a (\beta \partial_b \Phi) \\
&= h^a_c h^b_d [\nabla_a \beta \nabla_b \Phi + \beta \nabla_a (\nabla_b \Phi)] \\
&= h^b_c h^a_d [\nabla_b \beta \nabla_a \Phi + \beta \nabla_b (\nabla_a \Phi)]
\end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$K_{dc} = h^a_d h^b_c [\nabla_a \beta \nabla_b \Phi + \beta \nabla_a (\nabla_b \Phi)]$$

yazılabileceğinden taraf tarafa çıkartma ile

$$K_{cd} - K_{dc} = h^a_d h^b_c [\nabla_b \beta \nabla_a \Phi - \nabla_a \beta \nabla_b \Phi + \beta [\nabla_b (\nabla_a \Phi) - \nabla_a (\nabla_b \Phi)]]$$

bulunur. Burulma sıfır ise, parantez içindeki terim sıfır olur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
K_{cd} - K_{dc} &= h^a_d h^b_c (\partial_b \beta \partial_a \Phi - \partial_a \beta \partial_b \Phi) \\
&= 2h^a_d h^b_c \partial_{[b} \beta \partial_{a]} \Phi \equiv 0
\end{aligned}$$

yani

$$K_{cd} = K_{dc}$$

olur. $K_{\mu\nu}$ dışsal eğrilik tansörünün izine skaler dışsal eğrilik denir ve şu bağıntılarla ifade edilir:

$$\begin{aligned}
K &\equiv K^\mu{}_\mu = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \\
&= h^{\mu\nu} D_\mu n_\nu = D_\mu n^\mu \quad (D_\sigma h^{\mu\nu} \equiv 0 \text{ olduğu için}) \\
&= e_\mu^a e^{\mu b} \nabla_a n_b \\
&= g^{ab} \nabla_a n_b \\
&= \nabla_a n^a
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Son bir nokta olarak, dışsal eğrilik cinsinden (3.11) bağıntısının

$$\nabla_a n_b = \varepsilon n_a \alpha_b + K_{ab} \tag{3.50}$$

biçiminde yazılabileceğini kaydetmek gerekir.

3.1.5. Gauss-Codazzi Denklemleri

Yukarıda (3.31) bağıntısıyla tanımlanmış $h_{ab} \equiv {}^{(N-1)}g_{ab}$ dik izdüşürme tansörünün, verilmiş bir M_N uzay-zaman tansörünü, (N-1)-boyutlu Σ hiperyüzeyi üzerine izdüşürdüğü ve dolayısıyla elde edilen izdüşüm tansörünün Σ nın teğet uzayına ait olduğu gösterilmişti. Öte yandan, Σ ya, M_N deki eğrilmesinin bir ölçüsü olarak bir K_{ab} dışsal (ekstresek) eğrilik bağlanmaktaydı. Şimdi, bu iki uzayın içsel (intrensek) eğriliklerine ve bunlar arasındaki ilişkiye değinilecektir.

Bilindiği üzere, M_N nin içsel R_{abcd} eğriliği bir $X \in M_N$ vektörü için, bunun ard arda ∇ kovaryant türevlerinin yerdeğiştirici (komütatif) olmamalarının sonucu olup

$$\nabla_a \nabla_b X_c - \nabla_b \nabla_a X_c = {}^N R_{abcd} X^d \quad (3.51)$$

özdeşliğiyle tanımlanır. ${}^N R_{abcd}$ ye N-boyutlu uzay zamanın Riemann eğrilik tansörü denir. Σ nın ${}^{N-1}R_{abcd}$ ile gösterilecek içsel eğriliği de, benzer şekilde, X_c bir teğet vektör (yani $X_a n^a = 0$ bağıntısını sağlayan vektör) olmak üzere, izdüşümsel kovaryant türevlerin yerdeğiştiricilikten sapması olarak

$$D_a D_b X_c - D_b D_a X_c = {}^{N-1}R_{abcd} X^d \quad (3.52)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bu iki içsel eğrilik birbirlerine Gauss Denklemi denilen

$${}^{N-1}R_{abcd} = h^p_a h^q_b h^r_c h^s_d {}^N R_{pqrs} + \varepsilon (K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{bc}) \quad (3.53)$$

bağıntıları ile bağlıdırlar. Bunu gösterelim:

İzdüşümsel kovaryant türevin (3.42) deki tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} D_a D_b X_c &= D_a (D_b X_c) \\ &= h^p_a h^q_b h^r_c \nabla_p (D_q X_r) \\ &= h^p_a h^q_b h^r_c \nabla_p (h^s_q h^t_r \nabla_s X_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h^p{}_a h^q{}_b h^r{}_c \left[\left(\nabla_p h^s{}_q \right) h^t{}_r + h^s{}_q \left(\nabla_p h^t{}_r \right) \right] \nabla_s X_t \\
&\quad + h^p{}_a h^q{}_b h^r{}_c h^s{}_q h^t{}_r \nabla_p \nabla_s X_t
\end{aligned} \tag{3.54}$$

yazalım.

$$\begin{aligned}
\nabla_p h^s{}_q &= \nabla_p \left(\delta^s{}_q - \varepsilon n^s n_q \right) \\
&= -\varepsilon \left(\nabla_p n^s \right) n_q - \varepsilon n^s \nabla_p n_q
\end{aligned}$$

ve $\nabla_p h^t{}_r$ için de yazılacak benzer ifade (3.54) e taşınıp (3.5) teki özellikler de kullanılırsa, gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\begin{aligned}
D_a D_b X_c &= -\varepsilon h^p{}_a h^q{}_b h^t{}_c n^s \nabla_p n_q \nabla_s X_t \\
&\quad - \varepsilon h^p{}_a h^r{}_c h^s{}_b n^t \nabla_p n_r \nabla_s X_t \\
&\quad + h^p{}_a h^s{}_b h^t{}_c \nabla_p \nabla_s X_t
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, X in bir teğet vektör olması nedeniyle

$$n^t \nabla_s X_t = \nabla_s \left(n^t X_t \right) - X^t \nabla_s n_t = -X^t \nabla_s n_t$$

dir. Bu yukarıdaki ifadeye yerleştirilir ve X^t için de $X^t = h^t{}_u X^u$ yazılırsa ve de (3.46) daki dışsal eğrilik tanımı kullanılırsa gerekli düzenlemeler sonucunda

$$D_a D_b X_c = -\varepsilon K_{ab} h^t{}_c n^s \nabla_s X_t + \varepsilon K_{ac} K_{bu} X^u + h^p{}_a h^s{}_b h^t{}_c \nabla_p \nabla_s X_t \tag{3.55}$$

bulunur. a ve b nin değiş tokuş edilmesiyle bulunacak ifade (3.55) ten çıkarılırsa

$$\left(D_a D_b - D_b D_a \right) X_c = \varepsilon \left(K_{ac} K_{bu} - K_{bc} K_{au} \right) X^u + h^p{}_a h^s{}_b h^t{}_c \left(\nabla_p \nabla_s - \nabla_s \nabla_p \right) X_t$$

olur. Eşitliğin sağ yanındaki X_t vektörü Σ nın teğet uzayına ait olduğu gibi aynı zamanda M_N nin de teğet uzayına aittir. Dolayısıyla (3.51) ve (3.52) tanımları kullanılarak

$${}^{(N-1)}R_{abcd} X^d = \varepsilon \left(K_{ac} K_{bu} - K_{bc} K_{au} \right) X^u + h^p{}_a h^s{}_b h^t{}_c {}^N R_{pstu} X^u$$

olur ve $X^u = h^u_d X^d$ yazarak da (3.53) denkleminde varılır.

Şimdi, her iki uzayın Ricci Tansörleri arasındaki bağıntı ile bunların izleri olan Ricci Skaler Eğrilikler arasındaki bağıntıyı bulalım.

$${}^N R_{ab} \equiv {}^N g^{mn} {}^N R_{manb} = {}^N R^n_{anb}, \quad {}^N R = R^a_a \quad (3.56a)$$

$${}^{(N-1)} R_{ab} \equiv {}^{(N-1)} g^{mn} {}^{(N-1)} R_{manb} = {}^{N-1} R^n_{anb}, \quad {}^{(N-1)} R = {}^{(N-1)} R^a_a \quad (3.56b)$$

tanımları kullanılarak ve $h^{ab} = g^{ab} - \varepsilon n^a n^b$ olduğuna dikkat edilerek, (3.51) den $a = c$ büzmesiyle

$${}^{(N-1)} R_{bd} = h^q_b h^s_d {}^N R_{qs} - \varepsilon n^p h^q_b n^r h^s_d {}^N R_{pqrs} + \varepsilon (K_{bd} - K_{bc} K^c_d) \quad (3.57)$$

elde edilir. Tekrar, $b = d$ büzmesi yapılırsa, gerekli düzenlemelerden sonra

$${}^{(N-1)} R = {}^N R - 2\varepsilon n^q n^s {}^N R_{qs} + \varepsilon (K^2 - K_{bd} K^{bd}) \quad (3.58)$$

bulunur. Şimdi (3.51) de, $\mathbf{X}$ vektörünü özel olarak Σ hiperyüzeyin $\mathbf{n}$ normali olarak alınırsa, indisler yeniden adlandırılarak

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) n_c = h^p_a h^q_b h^r_c {}^N R_{pqrs} n^s$$

eşitliğinin sol yanındaki ilk terim açılırsa

$$\begin{aligned} h^p_a h^q_b h^r_c \nabla_p (\nabla_q n_r) &= h^p_a h^q_b h^r_c \nabla_p (K_{qr} + \varepsilon n_q \alpha_r) \\ &= h^p_a h^q_b h^r_c \nabla_p K_{qr} + \varepsilon h^p_a h^q_b h^r_c (\nabla_p n_q) \alpha_r \\ &\quad + \varepsilon h^p_a h^q_b h^r_c n_q (\nabla_p \alpha_r) \end{aligned} \quad (3.59)$$

bulunur. (3.5) ve (3.37) kullanılarak bunun

$$h^p_a h^q_b h^r_c \nabla_p \nabla_q n_r = D_a K_{bc} + \varepsilon K_{ab} \alpha_c \quad (3.60)$$

biçiminde yazılabileceğini görmek kolaydır. $p \leftrightarrow q$ değiş-tokuşu yapılır ve taraf tarafa çıkartılırsa, sonuçta

$$D_a K_{bc} - D_b K_{ac} = h^p{}_a h^q{}_b h^r{}_c {}^N R_{pqrs} n^s \quad (3.61)$$

ve $b = c$ büzmesiyle de

$$D_a K - D_b K^b{}_a = -h^p{}_a {}^N R_{ps} n^s \quad (3.62)$$

elde edilir. (3.61) ve (3.62) ye Codazzi Denklemleri denir.

3.1.6. Weyl Tansörü

R_{ab} ve R , R_{abcd} Riemann-Eğrilik Tansörü'nün iz kısımlarını oluşturmaktadır. R_{abcd} yi yalnızca bunlar cinsinden ifade etmek mümkün olmayıp, bir de C_{abcd} ile gösterilen izsiz kısmına gerek bulunmaktadır. C_{abcd} ye Weyl Tansörü denilmekte olup

$$\begin{aligned} {}^N R_{abcd} = {}^N C_{abcd} + \frac{2}{N-2} [{}^N R_{a[c} g_{d]b} - {}^N R_{b[c} g_{d]a}] \\ - \frac{2}{(N-1)(N-2)} {}^N R g_{a[c} g_{d]b} \end{aligned} \quad (3.63)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bu tansör, R_{abcd} nin simetri özelliklerinin tümünü sağlar ve ayrıca da tüm indislere göre izsiz olma özelliğini taşır.

$$R_{abcd} = R_{[ab][cd]} = R_{cdab} \quad C_{abcd} = C_{[ab][cd]} = C_{cdab} \quad (3.64a)$$

$$R_{a[bcd]} = 0 \text{ (Birinci Bianchi Özdeşliği)} \quad C_{a[bcd]} = 0 \quad (3.64b)$$

$$C^a{}_{bac} = 0 \text{ ve } C^{ab}{}_{ab} = 0 \quad (3.64c)$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 \text{ (İkinci Bianchi Özdeşliği)} \quad \nabla_{[a} C_{bc]de} = 0 \quad (3.64d)$$

Verilmiş bir n ayrıcalıklı vektör alanına göre, Weyl tansörü, “elektiriksel kısım” ve “magnetik kısım” olarak adlandırılan ve sırasıyla E_{ab} ve H_{ab} ile gösterilen iki bileşene ayrıştırılabilir.

$$E_{ab} = u^e u^f C_{aebf}, \quad H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{ae}{}^{gh} C_{bfg h} u^e u^f \quad (3.65)$$

Bunların:

$$E_{ab} = E_{(ab)} \quad H_{ab} = H_{(ab)} \quad (\text{simetrik}) \quad (3.66a)$$

$$E^a_a = 0 \quad H^a_a = 0 \quad (\text{izsiz}) \quad (3.66b)$$

$$E_{ab}n^b = 0 \quad H_{ab}n^b = 0 \quad (\mathbf{n} \text{ ye dik}) \quad (3.66c)$$

özelliklerini taşıdıkları kolayca gösterilebilir.

3.2. ZAR ÜZERİNDE EFEKTİF EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ

3.2.1. Zar Üzerinde İndüklenmiş Efektif Einstein Alan Denklemleri

4-boyutlu uzay-zamanda Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi'nin (kısaca GRT) alan denklemleri

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (3.67)$$

dir. Burada; G_{ab} : Einstein tansörü, R_{ab} : Ricci tansörü, $R \equiv R^a_a$: Ricci eğrilik skaleri, Λ : kozmolojik sabit ve T_{ab} : enerji-momentum tansörüdür. κ^2 ise 4-boyutlu kuplaj sabiti olup, 4-boyutlu Newton gravitasyon sabiti G cinsinden $\kappa^2 = 8\pi G / c^4$ dir. Şimdi bulk olarak anılan 5-boyutlu bir uzay-zamana yatırılmış (1+3)-boyutlu bir hiperyüzey (3-zar) göz önüne alınsın. Bu Bölüm'de büyük Latin harfleriyle (A,B,...=0,1,2,3,4) Bulka ait büyüklükler; küçük Latin harfleriyle (a,b,...=0,1,2,3) zara ait olanlar gösterilecektir. Ayrıca, sembollere eşlik ettirilecek 5 ve 4 rakamlarıyla da sırasıyla bulka ve zara aitlik kastedilecektir.

4-boyutlu standart Einstein Alan Denklemlerinin 5-boyuta genelleştirilmesi

$${}^5G_{ab} = {}^5R_{ab} - \frac{1}{2} {}^5g_{ab} {}^5R = -\Lambda_5 {}^5g_{ab} + \kappa_5^2 {}^5T_{ab} \quad (3.68)$$

olup, burada: ${}^5g_{ab}$, ${}^5G_{ab}$ ve Λ_5 sırasıyla, 5-boyutlu bulk uzay-zamanının metriği, Einstein tansörü ve kozmolojik sabitidir. κ_5 , 5-boyutlu kuplaj sabiti olup 5-boyutlu Newton Gravitasyon Sabiti G_5 e ve 5-boyutlu temel Planck kütlesi M_5 e

$$\kappa_5^2 = 8\pi G_5 = \frac{8\pi}{M_5^2} \quad (3.69)$$

bağıntısı uyarınca bağlıdır. ${}^5T_{ab}$ toplam enerji-momentumu göstermekte olup

$${}^5T_{ab} = \delta(x) \left(T_{ab}^{Zar} - \lambda g_{ab} \right) + T_{ab}^{Bulk} \quad (3.70)$$

dır. Burada, T_{ab}^{Bulk} , bulkteki muhtemel bir madde-enerji varlığını; T_{ab}^{Zar} zar üzerinde yerleşik enerji-momentumu ve λ da zardaki gerilimi göstermektedir. 4-boyutlu Konvansiyonel gravitasyonun zar üzerinde geçerliliğini sağlamak üzere λ nın pozitif alınması gerekmektedir.

$$n^a n_a = \varepsilon = +1 \quad (3.71)$$

bağıntısını sağlayan uzay cinsinden birim normal zar üzerinde ,

$${}^4g_{ab} \equiv g_{ab} = h_{ab} = {}^5g_{ab} - n_a n_b \quad (3.72)$$

metriğini indükler.

h_{ab} aynı zamanda normale dik izdüşürme tansörü olup §3.1 de anlatıldığı tarzda Bulkın geometrik ve dinamik büyüklüklerini zarın bir noktasının teğet uzayına izdüşürmeyi sağlar.

(3.70) bağıntısında zarın enerji-momentumunun Dirac δ -distribüsyonu biçiminde ifade edilmesi, zarın $x^4 = \chi = Sabit \equiv 0$ bulk koordinat değerinde bulunduğu anlamına gelmektedir. Buna göre, zara bağlı bir gözlemci için, zar hareketsiz fakat bulk hareketli olmaktadır. Shiromizu ve diğ. [27] bu yaklaşımdan hareketle, izdüşürme mekanizması aracılığıyla, Gauss-Codazzi denklemlerini, Israel bağdaştırma koşullarını ve de Z_2 ayna simetrisi varsayımını kullanarak zarıf bir geometrik metodla boş bir bulk ($T_{ab}^{Bulk} = 0$) için zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein alan denklemlerini tesis etmişlerdir. Bu iş için başlangıç noktası olarak (3.53) ile verilen Gauss denkleminin 5-boyutlu ifadesini göz önüne alalım:

$${}^4R^a_{bcd} = h^a_p h^q_b h^r_c h^s_d {}^5R^p_{qrs} + K^a_c K_{bd} - K^a_d K_{bc} \quad (3.73)$$

Bu denklemde a ve c indisleri üzerinden büzme işlemi yapılır ve indisler düzenlenirse

$${}^4R_{ab} = {}^5R_{qs} h_a^q h_b^s - {}^5R_{qrs}^p n_p^r h_a^q h_b^s + KK_{ab} - K_b^c K_{ac} \quad (3.74)$$

elde edilir. Bir kez daha büzme işlemiyle

$${}^4R = {}^5R - 2 {}^5R_{qs} n^q n^s + K^2 - K^{qs} K_{qs} \quad (3.75)$$

elde edilir. Buradan

$${}^4G_{ab} = {}^4R_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} {}^4R \quad (3.76)$$

4-boyutlu alan denklemlerinde R ve R_{ab} ifadeleri yerine koyulursa

$$\begin{aligned} {}^4G_{ab} = & \left[{}^5R_{qs} - \frac{1}{2} g_{qs} {}^5R \right] h_a^q h_b^s - {}^5R_{qrs}^p n_p^r h_a^q h_b^s + {}^5R_{qs} n^q n^s h_{ab} \\ & + KK_{ab} - K_b^c K_{ac} - \frac{1}{2} g_{qs} h_{ab} (K^2 - K^{ac} K_{ac}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

denklemini elde edilir. Burada her bir terimi tek tek hesaplamak için

$${}^5R_{pq} - \frac{1}{2} g_{pq} {}^5R = \kappa_5^2 T_{pq} \quad (3.78)$$

5-boyutlu Einstein Alan denklemlerini gözönüne alalım. Bu denklemin bir kez büzülmesi

$${}^5R = -\frac{2}{3} \kappa_5^2 T \quad (3.79)$$

eşitliğini verir. (3.78) den (3.77) denkleminin ilk teriminin

$$\left[{}^5R_{qs} - \frac{1}{2} g_{qs} {}^5R \right] h_a^q h_b^s = \kappa_5^2 T_{qs} h_a^q h_b^s \quad (3.80)$$

olduğu açıkça görülmektedir. 3. terim (3.78) ve (3.79) denklemleri kullanılarak hesaplanırsa

$${}^5R_{qs}n^qn^sh_{ab} = \kappa_5^2 T_{qs}n^qn^sh_{ab} - \frac{1}{3}\kappa_5^2 h_{ab}T \quad (3.81)$$

olur. Şimdi 2. terim için (3.63) ile verilen Weyl tansörünün 5-boyutlu (N=5) ifadesi kullanılarak

$${}^5R^p_{qrs}n^rn^ph^q{}_ah^s{}_b = \frac{1}{3} {}^5R_{sq}h_a{}^qh_b{}^s + \frac{1}{3}h_{ab}{}^5R_{rp}n^rn^p - \frac{1}{12}h_{ab}{}^5R + {}^5\mathcal{E}_{ab} \quad (3.82)$$

elde edilir ve elde edilen bu denklem (3.78) ile düzenlenirse

$${}^5R^p_{qrs}n^rn^ph^q{}_ah^s{}_b = \frac{1}{3} h_a{}^qh_b{}^s\kappa_5^2 T_{sq} + \frac{1}{3}h_{ab}n^pn^r\kappa_5^2 T_{rp} - \frac{1}{6}\kappa_5^2 h_{ab}T + {}^5\mathcal{E}_{ab} \quad (3.83)$$

elde edilir. Burada ${}^5\mathcal{E}_{ab}$, 5-boyutlu Weyl Tansörünün elektrik kısmı olarak adlandırılır ve §3.1.6 da anlatıldığı gibi

$$E_{ab} = C_{abcd}n^cn^d, \quad E_{[ab]} = 0, \quad E^a{}_a = 0, \quad E_{ab}n^a = 0 \quad (3.84)$$

ifadelerinden hareketle

$$\mathcal{E}_{ab} = h_a{}^qh_b{}^sE_{qs} \quad (3.85)$$

bağıntısıyla tanımlanmış, bulkın Weyl tansörünün zar üzerine izdüşümünün zar koordinatlarında ifade edilmiş şekli olan simetrik tansördür. Bu tansör, bulkteki serbest gravitasyon alanının yerel olmayan etkisini yansıtmaktadır.

Şimdi bulunan bütün ifadeler (3.77) denkleminde yerine yazılırsa, sonuçta

$$\begin{aligned} {}^4G_{ab} = & \frac{2\kappa_5^2}{3} \left[T_{qs}h_a{}^qh_b{}^s + \left(T_{qs}n^qn^s - \frac{1}{4}T \right) h_{ab} \right] \\ & + KK_{ab} - K_a{}^sK_{bs} - \frac{1}{2}h_{ab} \left(K^2 - K^{pq}K_{pq} \right) - {}^5\mathcal{E}_{ab} \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir.

Zar Evren Modellerinde Bağdaştırma Koşulları

Israel, bir uzay zamana daldırılmış ince bir kabuk örneğinde olduğu gibi, bir alt uzay durumundaki bir hiperyüzeyi aşan metriğin kendisinin sürekli olduğunu, fakat, ilk

türevlerinde süreksizlikler oluştuğunu göstermiştir[28]. Bu da dışsal eğrilikte bir sıçramaya yol açmaktadır. Söz konusu olan zar örneğinde ise S_{ab} ile zarın yüzey gerilim enerjisi gösterilmek üzere, Israel'in bağdaştırma koşulları

$$S_{ab} = -\frac{1}{\kappa_s^2} [K_{ab} - Kh_{ab}] \quad (3.87)$$

biçiminde ifade edilir. Başka bir deyişle, bağdaştırma koşulları zar enerji momentumunu ekstrensek eğrilik cinsinden belirler. Burada $[]$ sembolü ile bir X tansörü için

$$[X] = X^+ - X^- \quad (3.88)$$

değer farkları kastedilmektedir. O halde Israel'in bağdaştırma koşulu

$$[K_{ab}] = -\kappa_s^2 \left(S_{ab} - \frac{1}{3} Sh_{ab} \right) \quad (3.89)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Eğer bir X tansörü için

$$X^+ = -X^- \quad (3.90)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{Z}_2$ ayna simetrisi kabul edilirse ekstrinsik eğrilik

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \kappa_s^2 \left(S_{ab} - \frac{1}{3} Sh_{ab} \right) \quad (3.91)$$

olur. Zar evren tasarımı uyarınca, zar üzerindeki enerji-momentumun bir kısmının bilinen madde-enerjisi, bir kısmının da boşluk enerjisi olduğu varsayılır. τ_{ab} bilinen madde enerjisini ve λ zarın gerilimini göstermek üzere

$$T_{ab}^{zar} \equiv S_{ab} = \tau_{ab} - \lambda h_{ab} \quad (3.92)$$

dır. Aslında zar üzerinde madde-enerji distribüsyon yapısında olduğundan, zarın $\chi = 0$ koordinatında olduğu varsayılırsa

$$S_{ab} = (\tau_{ab} - \lambda h_{ab}) \delta(\chi) \quad (3.93)$$

olur. Burada τ_{ab}

$$\tau_{ab} = \frac{1}{12} T^c_c T_{ab} - \frac{1}{4} T_{ac} T^c_b + \frac{1}{24} g_{ab} [3T_{cd} T^{cd} - (T^c_c)^2]$$

ile verilir ve

$$\tau_{ab} n^b = 0 \quad (3.94)$$

özelliğine sahiptir. Zar üzerinde indüklenmiş alan denklemlerinde $T_{ab} = T_{ab}^{zar}$ olduğundan (3.86) denkleminde $T_{ab} = S_{ab}$ ve K_{ab} ifadesi yerine yazılırsa, indüklenmiş alan denklemleri

$$\begin{aligned} {}^4G_{ab} = & -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(\Lambda_5 + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \lambda^2 \right) h_{ab} + \frac{1}{6} \kappa_5^4 \lambda \tau_{ab} \\ & + \kappa_5^4 \left(-\frac{1}{4} \tau_a^s \tau_{bs} + \frac{1}{12} \tau \tau_{ab} + \frac{1}{8} \tau^{pq} \tau_{pq} h_{ab} - \frac{1}{24} \tau^2 h_{ab} \right) - {}^5\mathcal{E}_{ab} \end{aligned} \quad (3.95)$$

şeklinde τ_{ab} ve λ cinsinden bulunur.

$$\frac{1}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \lambda^2 \right) = \Lambda_4 \quad (3.96)$$

$$\frac{\kappa_5^4 \lambda}{6} = \kappa_5^2 \equiv 8\pi G_4 \quad (3.97)$$

$$\kappa_5^2 \left(-\frac{1}{4} \tau_a^s \tau_{bs} + \frac{1}{12} \tau \tau_{ab} + \frac{1}{8} \tau^{pq} \tau_{pq} h_{ab} - \frac{1}{24} \tau^2 h_{ab} \right) = T_{ab} \quad (3.98)$$

denilirse,

$${}^4G_{ab} = -\Lambda_4 h_{ab} + \kappa_5^4 \tau_{ab} + \kappa_5^2 T_{ab} - {}^5\mathcal{E}_{ab} \quad (3.99)$$

zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein alan denklemleri elde edilir. Burada κ_4 , Λ_4 , G_4 sırasıyla; dört boyutlu uzay zamanın gravitasyon sabiti, efektif kozmolojik sabit ve

efektif Newton kütleçekim sabiti olup bulktaki temel κ_5 ve Λ_5 sabitleri cinsinden verilmiştir.

3.3. RÖLATİVİST KOZMOLOJİNİN EVRİM ve BAĞ DENKLEMLERİ

3.3.1. Uzak-zamanın Kovaryant 1+3 Ayrışımı

Yöntem, M_4 uzay-zamanında $\mathbf{u}$ ile gösterilecek ayrıcalıklı bir zamansal vektörün varlığı varsayımına dayanır. Kozmolojik kapsamda, evrenin T_{ab} enerji-momentumuna sahip bir akışkan ile dolu olduğu tasavvur edilir ve bu $\mathbf{u}$ vektörü de akışkanın akışını tasvir eden 4-lü hız vektörü ya da onunla birlikte hareket eden (eş-hareketli) gözlemcinin 4-lü hız vektörü olabileceği gibi her hangi bir gözlemcinin de 4-lü hız vektörü olabilir. Kovaryant sözcüğü burada “gözlemciden bağımsız” anlamını taşımaktadır. Zamansal olması nedeniyle normlanması

$$u^a u_a = \varepsilon = -1 \quad (3.100)$$

olarak alınan $\mathbf{u}$ vektörü yeni bir yapı olarak ortaya çıkan $V_4(\mathbf{g}, \mathbf{u})$ manifoldu üzerinde, önceki alt bölümde sözü edildiği gibi

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad (3.101a)$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.101b)$$

izdüşüm tansörlerini tanımlar. Bunlardan U_{ab} , geometrik ve dinamik büyüklükleri $\mathbf{u}$ ya paralel; h_{ab} de $\mathbf{u}$ ya dik izdüşürür. Başka bir deyişle, bunlar aracılığıyla söz konusu büyüklüklerin gözlemcinin anlık durgunluk uzayında ifadelerinin neler olacağı belirlenmiş olur. Gözlemcinin anlık durgunluk uzayları daima bir hiperyüzey (3-boyutlu) oluşturmazlar. Bunun böyle olması için $\mathbf{u}$ nun yani akışkanın dönmesiz(girdapsız) olması gerektiği gösterilebilir. Bu takdirde $\mathbf{u}$ vektörü ile hiperyüzeyin $\mathbf{n}$ normalı çakışmış olur ve h_{ab} de hiperyüzey üzerine indüklenmiş metriği gösterir. Yöntem (N=4 için):

- (3.51) ile verilen Ricci özdeşliğini;

- Girdapsız durum için (3.52) ve (3.53) ile verilen Gauss denklemini;
- (3.64) ile verilen İkinci Bianchi özdeşliğinin iki kere büzülmesinden elde edilen

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 \Rightarrow \nabla_a R^a_b = \frac{1}{2} \nabla_a R \Rightarrow \nabla_a T^{ab} = 0$$

korunum denklemini;

- (3.63) ile tanımlanan Weyl tansöründen hareketle elde edilebilecek

$$\nabla_a C^a_{bcd} = \nabla_{[c} R_{d]b} + \frac{1}{6} g_{b[c} \nabla_{d]} R \Rightarrow \nabla_a C^a_{bcd} = \nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T$$

denklemlerini göz önüne alıp bunların U_{ab} ve h_{ab} ile mümkün tüm izdüşümlerini gerçekleştirmeye dayanır. (3.67) deki Einstein denklemleri ise, R_{ab} ile R yi T_{ab} ve T cinsinden ifade eden cebirsel denklemler olarak işin içine girer. Daha fazla bilgi ve ayrıntılar için [26] ya bakılabilir. Bu denklemleri listelemeden önce aşağıda akışkanın dinamik ve kinematik büyüklükleri hakkında gerekli bir takım bilgiler vermek yerinde olacaktır.

3.3.2. Enerji-Momentum Tansörü

Bir akışkanın, $\mathbf{u}$ 4-lü hızıyla hareket eden bir gözlemciye göre enerji-momentum tansörünün ifadesi

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2q_{(a} u_{b)} + \pi_{ab} \quad (3.102)$$

olup burada:

μ : madde-enerji yoğunluğu

p : eşyönlü basınç

q_a : momentum yoğunluğu veya enerji akısı

π_{ab} : eşyönsüz basınç tansörü

dür. π_{ab} ve q_a tansörleri uzaysal olup

$$q_a u^a = 0 \quad , \quad \pi_{ab} = \pi_{ba} \quad , \quad \pi_{ab} u^a = 0 \quad , \quad \pi^a_a = 0 \quad (3.103)$$

özelliklerini taşırlar. Bu dört dinamik büyüklük

$$\mu = u^a u^b T_{ab} \quad (3.104a)$$

$$p = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \quad (3.104b)$$

$$q_a = -h_a^b u^c T_{bc} \quad (3.104c)$$

$$\pi_{ab} = (h_a^c h_b^d - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T_{cd} \quad (3.104d)$$

bağıntılarıyla tanımlanır.

T_{ab} enerji-momentum tansörü

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (3.105)$$

korunum kanununa uyar. Bir akışkan için (3.102) en genel enerji-momentum tansörü ifadesidir. Akışkanın fiziğini bu dört değişken arasındaki birtakım bağıntılar belirler ve bunlar “hal denklemi” olarak anılırlar. Çok özel olarak

$$q_a = 0 \quad , \quad \pi_{ab} = 0 \quad (3.106)$$

haline Mükemmel Akışkan denir. Bu takdirde

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \quad (3.107)$$

olur. Bunun da $p = 0$ haline Basıncsız Akışkan (ya da Toz veya Soğuk Karanlık Madde) denir. Mükemmel akışkanın hal denklemi olarak

$$p = p(\mu) \quad (3.108)$$

biçimindeki bir bağıntıya barotropik hal denklemi ve bunun da

$$p = (\gamma - 1)\mu \quad (\gamma = \text{sabit} \quad , \quad 0 \leq \gamma \leq 2) \quad (3.109)$$

lineer biçimine lineer barotropik hal denklemi denir. Kozmoloji uygulamalarında en çok kullanılan hal denklemi budur. γ parametresinin sınırlarını nedensellik koşulları belirler. ($v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)^{1/2}_{\text{sabit entropi}}$ ses hızı olmak üzere $-c \leq v_s \leq +c$ olmalıdır.) γ değerlerine göre akışkanın sınıflandırılması Tablo 3.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1: γ değerlerine göre akışkanın sınıflandırılması

γ değerleri	Akışkanın cinsi
$0 \leq \gamma < 1$	Negatif basınç durumu
$\gamma = 0$	Üstel şişmeli model
$0 < \gamma < 2/3$	Kuvvet kanunlu şişmeli model
$\gamma = 2/3$	Kozmik sicim durumu
$1 \leq \gamma < 2$	Fiziksel durum, yani, negatif olmayan basınç
$\gamma = 1$	Basıncsız akışkan (toz) durumu
$\gamma = 4/3$	Radyasyon akışkanı (rölativist gaz) durumu
$\gamma = 2$	Katı akışkan durumu

Akışkanın fizikselliğini tanımlayan hal denklemlerine ek olarak akla yatkın fiziksellik için bir de enerji koşulları denilen bir takım kısıtlamalar bulunmaktadır. Bunlar, her $u_a u^a \leq 0$ için:

- zayıf enerji koşulu : $T_{ab} u^a u^b \geq 0 \Rightarrow \mu \geq 0$ (enerji yoğunluğunun pozitif definit olmasını ifade eder.)
- egemen enerji koşulu : $|T_{ab} u^a| \leq 0$ (yerel enerji akısı vektörünün uzay cinsinden olmamasını, yani, enerjinin ışık hızından daha büyük hızlarla iletilememesini ifade eder.)
- kuvvetli enerji koşulu : $T_{ab} u^a u^b \geq -\frac{1}{2} T^a_a \Rightarrow \mu + 3p \geq 0$

3.3.3. Akışkanın Kinematik Değişkenleri

$\nabla_a u_b$ kovaryant türevin, **u**-kongrüansına göre 1+3 ayrışımı §3.1.3 te değinildiği üzere

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + D_a u_b \quad (3.110)$$

dir. Burada

$$\dot{u}_b \equiv u^c \nabla_c u_b \quad (3.111)$$

olup akışkanın ivmesidir. $u^c \nabla_c$ operatörü, zamansal u^a vektörü doğrultusunda kovaryant türev olup “ $\cdot$ ” ile gösterilecektir:

$$u^c \nabla_c f \equiv \dot{f} \quad (3.112a)$$

$$u^c \nabla_c T_b \equiv \dot{T}_b \quad (3.112b)$$

Öte yandan, D_a sembolü ise (bazen ${}^3\nabla_a$ ile de gösterilir) gözlemcinin anlık durgunluk uzayına dik izdüşürülmüş uzaysal kovaryant türevi göstermekte olup bir skaler, bir vektör, vb... için

$$D_a f = h^c_a \nabla_c f \quad (3.112c)$$

$$D_a T_b = h^d_b h^c_a \nabla_c T_d \quad (3.112d)$$

$$D_a T^{b\dots}_{c\dots} = h^b_e \dots h^f_c \dots h^g_a \nabla_g T^{e\dots}_{f\dots} \quad (3.112e)$$

dir.

$D_a u_b$ uzaysal kısım, simetrik ve antisimetrik kısımlarının toplamı olarak

$$D_a u_b = \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad , \quad \theta_{ab} = \theta_{ba} \quad , \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad (3.113)$$

yazılabilir ve θ_{ab} de, izsiz simetrik ve iz kısımlarının toplamı olarak

$$\theta_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} h_{ab} \theta \quad (3.114)$$

alınırsa, $\nabla_a u_b$:

$$\begin{aligned}\nabla_a u_b &= -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \\ &= -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} h_{ab} \theta + \omega_{ab}\end{aligned}\quad (3.115)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$u^a \dot{u}_a = 0 \quad (3.116a)$$

$$\theta_{ab} = \theta_{ba} \quad , \quad \theta_{ab} u^b = 0 \quad , \quad \theta^a_a \equiv \theta \quad (3.116b)$$

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad , \quad \omega_{ab} u^b = 0 \quad , \quad \omega^a_a = 0 \quad (3.116c)$$

özelliklerini taşır ve şöyle adlandırılırlar:

θ_{ab} : genişleme (hızı) tansörü

θ : genişleme (hızı) skaleri

σ_{ab} : kayma (hızı) tansörü

ω_{ab} : girdap (hızı) tansörü

ω_{ab} antisimetrik olduğundan buna

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abcd} u^d \omega^{bc} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = \eta_{abcd} \omega^c u^d \quad (3.117)$$

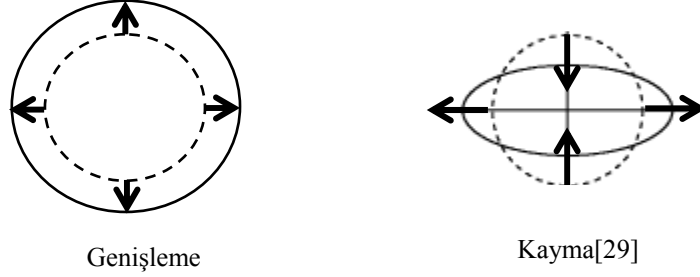
bağıntısıyla bir vektör (girdap ya da dönme vektörü olarak anılır) bağlanabilir. Öte yandan

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} \quad \text{ve} \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} = \omega_a \omega^a \quad (3.118)$$

gibi iki skaler daha tanımlanabilir. Tanımlarından

$$\sigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ab} = 0 \quad \text{ve} \quad \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^a = 0 \quad (3.119)$$

olduğu görülmektedir. σ ve ω ya sırasıyla kayma ve dönme skalerleri denir. Geometrik olarak, genişleme şekil bozulmaksızın hacimdeki artmayı gösterir. Kayma ise hacim değişmeksizin şekildeki değişikliği gösterir. Buna göre Şekil 3.1 de gösterildiği gibi bir küre genişleme sonucunda yine bir küreye; kayma sonucunda ise bir elipsoyide dönüşecektir.



Şekil 3.1. Genişleme ve kaymanın geometrik gösterimi

3.3.4. Kovaryant Evrim ve Bağ Denklemleri

Uzay-zamanın kovaryant ayrışımı sonucunda: θ , $\dot{u}_a$, ω_a , σ_{ab} kinematik büyüklükler ile E_{ab} ve H_{ab} serbest gravitasyon alanları ve de μ , q_a ve π_{ab} dinamik değişkenler için evrim (veya yayılım) ve bağ denklemleri denilen şu aşağıdaki denklemler elde edilmektedir:

EVİRİM DENKLEMLERİ:

Genelleştirilmiş Raychaudhuri Denklemi (Genişleme Yayılımı):

$$\dot{\theta} - \nabla_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.120)$$

Kayma Yayılımı:

$$\begin{aligned} h^c_a h^d_b \dot{\sigma}_{cd} - h^c_a h^d_b \nabla_{(c} \dot{u}_{d)} + \frac{1}{3}(\nabla_c \dot{u}^c) h_{ab} &= \dot{u}_a \dot{u}_b - \omega_a \omega_b - \sigma_{ac} \sigma^c_b \\ &\quad - \frac{2}{3}\theta \sigma_{ab} + \frac{1}{3}(2\sigma^2 + \omega^2) h_{ab} \\ &\quad - \left(E_{ab} - \frac{1}{2}\pi_{ab} \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

Girdap Yayılım Denklemleri:

$$h^c{}_a h^d{}_b \dot{\omega}_{cd} - h^c{}_{[a} h^d{}_{b]} \nabla_c \dot{u}_d + \sigma^c{}_a \omega_{cb} - \sigma^c{}_b \omega_{ca} + \frac{2}{3} \theta \omega_{ab} = 0 \quad (3.122a)$$

veya

$$\dot{\omega}_{ab} + (u_a \omega_{bc} - u_b \omega_{ac}) \dot{u}^c - h^c{}_{[a} h^d{}_{b]} \nabla_c \dot{u}_d + \sigma^c{}_a \omega_{cb} - \sigma^c{}_b \omega_{ca} + \frac{2}{3} \theta \omega_{ab} = 0 \quad (3.122b)$$

veya

$$h^a{}_b \dot{\omega}^b - \frac{1}{2} \eta^{abcd} (\nabla_b \dot{u}_c) u_d = \sigma^a{}_b \omega^b - \frac{2}{3} \theta \omega^a \quad (3.122c)$$

Madde Korunum Denklemleri:

$$\dot{\mu} + \nabla_a q^a = -(\mu + p) \theta - q^a \dot{u}_a - \pi^{ab} \sigma_{ab} \quad (3.123)$$

Momentum Korunum Denklemleri:

$$h^a{}_b \dot{q}^b + h^a{}_b \nabla^b p + h^a{}_b \nabla_c \pi^{bc} = -(\mu + p) \dot{u}^a - \sigma^a{}_b q^b - \frac{4}{3} \theta q^a + \omega^a{}_b q^b \quad (3.124)$$

Gravito-elektrik Yayılımı (Maxwell-Weyl E-nokta Denklemleri):

$$\begin{aligned} h^g{}_{(a} h^h{}_{b)} \left(\dot{E}_{gh} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{gh} \right) - h^g{}_{(a} \eta_{b)cde} (\nabla^c H^d{}_g) u^e + \frac{1}{2} h^g{}_{(a} h^h{}_{b)} \nabla_h q_g - \frac{1}{6} h_{ab} \nabla_c q^c \\ = -\frac{1}{2} (\mu + p) \sigma_{ab} - q_{(a} \dot{u}_{b)} - \frac{1}{2} \pi_{c(a} \sigma^c{}_{b)} - \frac{1}{6} \theta \pi_{ab} \\ + \frac{1}{2} \pi_{c(a} \eta^c{}_{b)ef} \omega^e u^f + \frac{1}{6} h_{ab} (q^c \dot{u}_c + \pi^{cd} \sigma_{cd}) - \theta E_{ab} \\ - h_{ab} E_{ef} \sigma^{ef} + 3 E_{c(a} \sigma^c{}_{b)} + E_{c(a} \eta^c{}_{b)ef} \omega^e u^f \\ - 2 H^c{}_{(a} \eta_{b)cef} \dot{u}^e u^f \end{aligned} \quad (3.125)$$

Gravito-magnetik Yayılımı (Maxwell-Weyl H-nokta Denklemi) :

$$\begin{aligned}
& h^g_{(a} h^h_{b)} \dot{H}_{gh} + h^g_{(a} \eta_{b)cde} \left(\nabla^c E^d_g \right) u^e - \frac{1}{2} h^g_{(a} h^h_{b)} \eta_{gde} \left(\nabla^c \pi^d_h \right) u^e \\
& = -\theta H_{ab} + 3H_{c(a} \sigma^c_{b)} - H_{cd} \sigma^{cd} h_{ab} + H_{c(a} \omega^c_{b)} \\
& + 2E^c_{(a} \eta_{b)cde} \dot{u}^d u^e + \frac{1}{2} \sigma^c_{(a} \eta_{b)cde} q^d u^e \\
& - \frac{1}{2} q^c \omega_c h_{ab} + \frac{3}{2} \omega_{(a} q_{b)}
\end{aligned} \tag{3.126}$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

Kayma Bağ Koşulu:

$$h^c_a h^d_b \nabla_d \sigma^b_c - \frac{2}{3} h^b_a \nabla_b \theta + h^c_a \nabla_b \omega^b_c + \omega_{ab} \dot{u}^b = -q_a \tag{3.127}$$

Gravito-magnetik Bağ Koşulu:

$$h^c_{(a} h^d_{b)} \eta_{cefg} \left(\nabla^e \sigma^f_d \right) u^g - h^c_{(a} h^d_{b)} \nabla_c \omega_d - \left(h^c_d \nabla_c \omega^d \right) h_{ab} = H_{ab} + 2\omega_{(a} \dot{u}_{b)} \tag{3.128}$$

Girdap Bağ Koşulu:

$$\nabla_a \omega^a = 2\dot{u}_a \omega^a \tag{3.129}$$

Gravito-elektrik Diverjans (Maxwell-Weyl div-E Denklemi):

$$\begin{aligned}
& \nabla_c E^c_a + \frac{1}{2} h^c_a \nabla_b \pi^b_c - \frac{1}{3} \nabla_a \mu = E_{ac} \dot{u}^c + E^b_c \sigma^c_b u_a + 3H^c_a \omega_c \\
& + \eta_{abcd} \sigma^{be} H^c_e u^d + \frac{1}{3} \dot{\mu} u_a + \frac{1}{3} \pi^c_a \dot{u}_c \\
& + \frac{1}{2} \sigma^c_a q_c - \frac{1}{3} \theta q_a - \frac{3}{2} \eta_{abcd} \omega^b u^d q^c
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Gravito-magnetik Diverjans (Maxwell-Weyl div-H Denklemi):

$$\begin{aligned}
& \nabla_c H^c_a + \frac{1}{2} \eta_{abcd} \nabla^b q^c u^d = -(\mu + p) \omega_a - 3 \left(E^c_a - \frac{1}{6} \pi^c_a \right) \omega_c \\
& - \eta_{abcd} \sigma^{be} \left(E^c_e + \frac{1}{2} \pi^c_e \right) u^d + H_{bc} \sigma^{bc} u_a + H_{ac} \dot{u}^c
\end{aligned} \tag{3.131}$$

4.BULGULAR

4.1. ZAR ÜZERİNDE KOZMOLOJİK EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ

4.1.1. Zar Üzerinde Efektif Toplam Enerji

(3.99) ile verildiği üzere zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein alan denklemleri

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \kappa_5^4 \tau_{ab} - \varepsilon_{ab} \quad (4.1)$$

idi. (Büyükliklere “4” sembolünü artık eşlik ettirmiyoruz.) Burada κ^2 , 4-boyutlu uzay zamanın kuplaj sabiti olup, 4-boyutlu uzay zamanın G Newton gravitasyon sabitine

$$\kappa^4 = 8\pi G \quad (c=1 \text{ için}) \quad (4.2)$$

bağıntısıyla bağlı ve Λ da, 4-boyutlu efektif kozmolojik sabit olup, zar gerilimi

$$\lambda = 6 \frac{\kappa^2}{\kappa_5^4} \quad (4.3)$$

ile gösterilmek üzere

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\Lambda_5 + \kappa^2 \lambda) \quad (4.4)$$

bağıntısıyla tanımlı idi. (4.1) denklemleri, Bulk’ın madde-enerji içermesi durumunu göz önüne almamaktadır ($T_{ab}^{Bulk} \equiv 0$ alınmıştır). Bu durumda 4-boyutlu konvansiyonel Einstein denklemlerine bulkten kaynaklanan yalnızca iki türlü katkı bulunmaktadır. Birincisi: zarın madde-enerjisini yansıtan T_{ab} yerel madde-enerji tansörüne kuvadratik bir düzeltme terimi olarak simetrik bir

$$\tau_{ab} = \frac{1}{12} T^c{}_c T_{ab} - \frac{1}{4} T_{ac} T^c{}_b + \frac{1}{24} g_{ab} \left[3 T_{cd} T^{cd} - (T^c{}_c)^2 \right] \quad (4.5)$$

τ_{ab} tansörü eklenmektedir. İkincisi ise, ε_{ab} simetrik tansörüdür. Bu tansör, bulktaki serbest gravitasyon alanının yerel olmayan etkisini yansıtmaktadır. Bu tansörün varlığından dolayı (4.1) denklemleri kapalı değildir. Bu bilinmezliğin giderilmesi için, ya bulk Einstein denklemleri çözülüp ε_{ab} belirlenmelidir, ya da ε_{ab} hakkında birtakım amaca uygun (ad hoc) varsayımlarda bulunmak gerekmektedir, ki biz de ileride böyle yapacağız.

Şimdi, (4.1) denklemlerini

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab} + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^2} \tau_{ab} - \frac{1}{\kappa^2} \varepsilon_{ab} \right) \quad (4.6)$$

biçiminde yazalım. Eğer

$$T_{ab}^{top} = T_{ab} + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^2} \tau_{ab} - \frac{1}{\kappa^2} \varepsilon_{ab} \quad (4.7)$$

ile bir T_{ab}^{top} toplam enerji momentum tansörü tanımlanırsa efektif Einstein denklemleri alışılmış standart

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{top} \quad (4.8)$$

biçimine kavuşmuş olur.

Mükemmel olmayan bir akışkanın enerji momentumunu gösteren

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2 q_{(a} u_{b)} + \pi_{ab} \quad (4.9)$$

için, (4.5) ifadesinden

$$\begin{aligned} \tau_{ab} = \frac{1}{12} \Big\{ & (\mu^2 - \frac{3}{2} \pi_{cd} \pi^{cd}) u_a u_b + (\mu^2 + 2\mu p - 3q_c q^c + \frac{3}{2} \pi_{cd} \pi^{cd}) h_{ab} \\ & + 2\mu (q_a u_b + q_b u_a) - (\mu + 3p) \pi_{ab} \\ & + 3q_a q_b - 3\pi^c{}_b q_c u_a - 3\pi_a{}^c q_c u_b - 3\pi_{ac} \pi^c{}_b \Big\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Öte yandan, ε_{ab} simetrik tansörü de zar gözlemcisi u_a ya göre

$$\varepsilon_{ab} = -\left(\frac{\kappa_5}{\kappa}\right)^4 \left[U u_a u_b + P h_{ab} + 2Q_{(a} u_{b)} + P_{ab} \right] \quad (4.11)$$

biçiminde indirgenemez ayrışım olarak yazılsın. Burada

$$u_a u^a = -1, \quad h_{ab} u^b = 0, \quad Q_a u^a = 0, \quad P_{ab} u^a = 0, \quad P^a_a = 0 \quad (4.12)$$

dır. ε_{ab} nin simetri özelliğini göz önüne alarak bu

$$\varepsilon_{ab} = -\left(\frac{\kappa_5}{\kappa}\right)^4 \left[U \left(u_a u_b + \frac{1}{3} h_{ab} \right) + 2Q_{(a} u_{b)} + P_{ab} \right] \quad (4.13)$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre:

U : zar üzerinde efektif yerel olmayan enerji yoğunluğu (Weyl enerji yoğunluğu)

Q_a : zar üzerinde efektif yerel olmayan enerji akısı (Weyl enerji akısı, Weyl momentum yoğunluğu)

P_{ab} : zar üzerinde efektif yerel olmayan eşyönsüz basınç (Eşyönsüz Weyl basıncı).

olarak anılırlar. Parantez içindeki çarpan, U yu enerji boyutunda kılmak için yazılmıştır.

Şimdi, zar gözlemcisi u^a ya göre T_{ab}^{top} ın da

$$T_{ab}^{top} = \mu^{top} u_a u_b + p^{top} h_{ab} + 2q_{(a}^{top} u_{b)} + \pi_{ab}^{top} \quad (4.14)$$

biçiminde indirgenemez ayrışımını göz önüne alalım. Burada

$$u_a u^a = -1, \quad h_{ab} u^b = 0, \quad q_a^{top} u^a = 0, \quad \pi_{ab}^{top} u^a = \pi_{ab}^{top} u^b = 0, \quad (\pi^{top})^a_a = 0 \quad (4.15)$$

olup:

μ^{top} : toplam efektif enerji yoğunluğu

p^{top} : toplam efektif eşyönlü basınç

q_a^{top} : toplam efektif enerji akısı

π_{ab}^{top} : toplam efektif eşyönsüz basınç

olarak anılır ve

$$\mu^{top} = T_{ab}^{top} u^a u^b \quad (4.16a)$$

$$p^{top} = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{top} \quad (4.16b)$$

$$q_a^{top} = -h^b_a T_{bc}^{top} u^c \quad (4.16c)$$

$$\pi_{ab}^{top} = \left(h^c_a h^d_b - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab} \right) T_{cd}^{top} \quad (4.16d)$$

biçiminde tanımlanırlar.

Şimdi, (4.7) ifadesine (4.9), (4.10) ve (4.13) taşınırsa, (4.16) denklemlerinden

$$\mu^{top} = \mu + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^6} \left[\frac{\kappa^4}{24} (2\mu^2 - 3\pi^{ab} \pi_{ab}) + U \right] \quad (4.17a)$$

$$p^{top} = p + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^6} \left[\frac{\kappa^4}{24} (2\mu^2 + 4p\mu + \pi^{ab} \pi_{ab} - 4q_a q^a) + \frac{1}{3} U \right] \quad (4.17b)$$

$$q_a^{top} = q_a + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^6} \left[\frac{\kappa^4}{24} (4\mu q_a - 6\pi_{ab} q^b) + Q_a \right] \quad (4.17c)$$

$$\pi_{ab}^{top} = \pi_{ab} + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^6} \left[\frac{\kappa^4}{12} [-(\mu + 3p)\pi_{ab} - 3\pi_{c<a}\pi_{b>}^c + 3q_{<a}q_{b>}] + P_{ab} \right] \quad (4.17d)$$

elde edilir. Ya da, (4.3) kullanılarak bu ifadeler

$$\mu^{top} = \mu + \frac{1}{4\lambda} (2\mu^2 - 3\pi_{ab} \pi^{ab}) + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} U \quad (4.18a)$$

$$p^{top} = p + \frac{1}{4\lambda} (2\mu^2 + 4\mu p + \pi_{ab}\pi^{ab} - 4q_a q^a) + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} U \quad (4.18b)$$

$$q_a^{top} = q_a + \frac{1}{4\lambda} (4\mu q_a - \pi_{ab} q^b) + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} Q_a \quad (4.18c)$$

$$\pi_{ab}^{top} = \pi_{ab} + \frac{1}{2\lambda} [-(\mu + 3p)\pi_{ab} + 3\pi_{c<a}\pi_{b>}^c + q_{<a}q_{b>}] + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} P_{ab} \quad (4.18d)$$

biçiminde amacımıza yarayacak bir biçime getirilebilir. Bu ifadelerin $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ limitinde 4-boyutlu GRT'nin sonuçlarını verdiği kolayca görülmektedir. (4.17) veya (4.18) bağıntıları, zarın madde-enerji içeriği bir mükemmel akışkanınki gibi olsa bile bulkın katkıları nedeniyle madde-enerjinin bir mükemmel olmayan akışkanınki gibi davrandığını göstermektedir.

Bulkta bir madde-enerji olmaması halinde (yani $T_{ab}^{Bulk} = 0$ için), zarın T_{ab} enerji-momentum tansörü

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (4.19)$$

korunum denklemini uyar. Bu bir yerel korunum denklemi olup, zar ile bulk arasında bir enerji alışverişi olmadığını ifade eder. Öte yandan, zar üzerinde büzülmüş Bianchi özdeşliklerinden de ($\nabla^a G_{ab} = 0$) toplam enerji-momentumun

$$\nabla^a T_{ab}^{top} = 0 \quad (4.20)$$

korunum denklemini yol açtığı gösterilebilir. Bu ise, (4.7) ve (4.19) dan dolayı

$$\nabla^a \mathcal{E}_{ab} = \kappa_5^4 \nabla^a \tau_{ab} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \tau_{ab} \quad (4.21)$$

denklemini yol açar ki, buna “yerel olmayan korunum denklemi” gözüyle bakmak gerekir.

4.1.2. Zarda Evrim ve Bağ Denklemleri

Zar üzerinde indüklenen efektif Einstein denklemleri (4.8) deki gibi yazılabileceğinden, θ , ω_{ab} , ... gibi kinematik ve dinamik değişkenlerin uyduğu evrim ve bağ denklemleri yapısal olarak § 3.2.5 te yazıldığı gibidir. Ancak, bunlardaki μ , p , q_a ve π_{ab} dinamik değişkenleri yerine (4.16) ile tanımlanan μ^{top} , p^{top} , q_a^{top} ve π_{ab}^{top} yerleştirilmelidir. Ve birim sistemini uyuşturmak için de bunların κ^2 ile çarpımları yazılmalıdır. Ayrıca da denklemlere (4.20) den gelen iki denklem daha eklemek gerekmektedir. O halde, bütün bu uyarlamalar yapıldığında sonuçta şu denklemlere varılır:

EVRİM DENKLEMLERİ:

Genelleştirilmiş Raychaudhuri Denklemi (Genişleme Yayılımı):

$$\dot{\theta} - \nabla_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 (\mu^{top} + 3p^{top}) + \Lambda \quad (4.22)$$

Kayma Yayılımı:

$$\begin{aligned} h^c_a h^d_b \dot{\sigma}_{cd} - h^c_a h^d_b \nabla_{(c} \dot{u}_{d)} + \frac{1}{3} (\nabla_c \dot{u}^c) h_{ab} &= \dot{u}_a \dot{u}_b - \omega_a \omega_b - \sigma_{ac} \sigma^c_b \\ &\quad - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \frac{1}{3} (2\sigma^2 + \omega^2) h_{ab} \\ &\quad - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \kappa^2 \pi_{ab}^{top} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Girdap Yayılım Denklemi:

$$h^c_a h^d_b \dot{\omega}_{cd} - h^c_{[a} h^d_{b]} \nabla_c \dot{u}_d + \sigma^c_a \omega_{cb} - \sigma^c_b \omega_{ca} + \frac{2}{3} \theta \omega_{ab} = 0 \quad (4.24a)$$

veya

$$\dot{\omega}_{ab} + (u_a \omega_{bc} - u_b \omega_{ac}) \dot{u}^c - h^c_{[a} h^d_{b]} \nabla_c \dot{u}_d + \sigma^c_a \omega_{cb} - \sigma^c_b \omega_{ca} + \frac{2}{3} \theta \omega_{ab} = 0 \quad (4.24b)$$

veya

$$h^a{}_b \dot{\omega}^b - \frac{1}{2} \eta^{abcd} (\nabla_b \dot{u}_c) u_d = \sigma^a{}_b \omega^b - \frac{2}{3} \theta \omega^a \quad (4.24c)$$

Yerel Madde Korunum Denklemi:

$$\dot{\mu} + \nabla_a q^a = - \left[(\mu + p) \theta - q^a \dot{u}_a - \pi^{ab} \sigma_{ab} \right] \quad (4.25)$$

Yerel Momentum Korunum Denklemi:

$$h^a{}_b \dot{q}^b + h^a{}_b \nabla^b p + h^a{}_b \nabla_c \pi^{bc} = - (\mu + p) \dot{u}^a - \sigma^a{}_b q^b - \frac{4}{3} \theta q^a + \omega^a{}_b q^b \quad (4.26)$$

Yerel Olmayan Madde Korunum Denklemi:

$$\dot{\mu}^{top} + \nabla_a (q^{top})^a = - \left[(\mu^{top} + p^{top}) \theta - (q^{top})^a \dot{u}_a - (\pi^{top})^{ab} \sigma_{ab} \right] \quad (4.27)$$

Yerel Olmayan Momentum Korunum Denklemi:

$$\begin{aligned} h^a{}_b (\dot{q}^{top})^b + h^a{}_b \nabla^b p^{top} + h^a{}_b \nabla_c (\pi^{top})^{bc} = & - (\mu^{top} + p^{top}) \dot{u}^a - \sigma^a{}_b (q^{top})^b \\ & - \frac{4}{3} \theta (q^{top})^a + \omega^a{}_b (q^{top})^b \end{aligned} \quad (4.28)$$

Gravito-elektrik Yayılımı (Maxwell-Weyl E-nokta Denklemi):

$$\begin{aligned} h^g{}_{(a} h^h{}_{b)} \left(\dot{E}_{gh} + \frac{\kappa^2}{2} \dot{\pi}_{gh}^{top} \right) - h^g{}_{(a} \eta_{b)cde} (\nabla^c H^d{}_g) u^e \\ + \frac{\kappa^2}{2} h^g{}_{(a} h^h{}_{b)} \nabla_h q_g^{top} - \frac{\kappa^2}{6} h_{ab} \nabla_c (q^{top})^c \\ = - \frac{\kappa^2}{2} (\mu^{top} + p^{top}) \sigma_{ab} - \kappa^2 q_{(a}^{top} \dot{u}_{b)} - \frac{\kappa^2}{2} \pi_{c(a}^{top} \sigma_{b)}^c \\ - \frac{\kappa^2}{6} \theta \pi_{ab}^{top} + \frac{\kappa^2}{2} \pi_{c(a}^{top} \eta_{b)ef}^c \omega^e u^f \\ + \frac{\kappa^2}{6} h_{ab} \left((q^{top})^c \dot{u}_c + (\pi^{top})^{cd} \sigma_{cd} \right) \\ - \theta E_{ab} - h_{ab} E_{ef} \sigma^{ef} + 3 E_{c(a} \sigma_{b)}^c + E_{c(a} \eta_{b)ef}^c \omega^e u^f \\ - 2 H^c{}_{(a} \eta_{b)cef} \dot{u}^e u^f \end{aligned} \quad (4.29)$$

Gravito-magnetik Yayılımı (Maxwell-Weyl H-nokta Denklemi) :

$$\begin{aligned}
& h^g_{(a} h^h_{b)} \dot{H}_{gh} + h^g_{(a} \eta_{b)cde} \left(\nabla^c E^d_g \right) u^e - \frac{\kappa^2}{2} h^g_{(a} h^h_{b)} \eta_{gde} \left(\nabla^c \left(\pi^{top} \right)^d_h \right) u^e \\
& = -\theta H_{ab} + 3H_{c(a} \sigma^c_{b)} - H_{cd} \sigma^{cd} h_{ab} + H_{c(a} \omega^c_{b)} \\
& + 2E^c_{(a} \eta_{b)cde} \dot{u}^d u^e + \frac{\kappa^2}{2} \sigma^c_{(a} \eta_{b)cde} \left(q^{top} \right)^d u^e \\
& - \frac{\kappa^2}{2} \left(q^{top} \right)^c \omega_c h_{ab} + \frac{3\kappa^2}{2} \omega_{(a} q^{top}_{b)}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

Kayma Bağ Koşulu:

$$h^c_a h^d_b \nabla_d \sigma^b_c - \frac{2}{3} h^b_a \nabla_b \theta + h^c_a \nabla_b \omega^b_c + \omega_{ab} \dot{u}^b = -\kappa^2 q^{top}_a \tag{4.31a}$$

veya

$$h^c_a h^d_b \nabla_d \sigma^b_c - \frac{2}{3} h^b_a \nabla_b \theta + \eta_{abcd} \left(\nabla^b \omega^c \right) u^d = -2\eta_{abcd} \dot{u}^b \omega^c u^d - \kappa^2 q^{top}_a \tag{4.31b}$$

Gravito-magnetik Bağ Koşulu:

$$h^c_{(a} h^d_{b)} \eta_{cefg} \left(\nabla^e \sigma^f_d \right) u^g - h^c_{(a} h^d_{b)} \nabla_c \omega_d - \left(h^c_d \nabla_c \omega^d \right) h_{ab} = H_{ab} + 2\omega_{(a} \dot{u}_{b)} \tag{4.32}$$

Girdap Bağ Koşulu:

$$\nabla_a \omega^a = 2\dot{u}_a \omega^a \tag{4.33}$$

Gravito-elektrik Diverjans (Maxwell-Weyl div-E Denklemi):

$$\begin{aligned}
& \nabla_c E^c_a + \frac{\kappa^2}{2} h^c_a \nabla_b \left(\pi^{top} \right)^b_c - \frac{\kappa^2}{3} \nabla_a \mu^{top} = E_{ac} \dot{u}^c + E^b_c \sigma^c_b u_a + 3H^c_a \omega_c \\
& + \eta_{abcd} \sigma^{be} H^c_e u^d + \frac{\kappa^2}{3} \dot{\mu}^{top} u_a + \frac{\kappa^2}{3} \left(\pi^{top} \right)^c_a \dot{u}_c \\
& + \frac{\kappa^2}{2} \sigma^c_a q^{top}_c - \frac{\kappa^2}{3} \theta q^{top}_a - \frac{3\kappa^2}{2} \eta_{abcd} \omega^b u^d \left(q^{top} \right)^c
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Gravito-magnetik Diverjans (Maxwell-Weyl div-H Denklemi):

$$\begin{aligned}
\nabla_c H^c_a + \frac{\kappa^2}{2} \eta_{abcd} \nabla^b (q^{top})^c u^d = & -\kappa^2 (\mu^{top} + p^{top}) \omega_a \\
& - 3 \left(E^c_a - \frac{\kappa^2}{6} (\pi^{top})^c_a \right) \omega_c \\
& - \eta_{abcd} \sigma^{be} \left(E^c_e + \frac{\kappa^2}{2} (\pi^{top})^c_e \right) u^d \\
& + H_{bc} \sigma^{bc} u_a + H_{ac} \dot{u}^c
\end{aligned} \tag{4.35}$$

4.2. KAYMASIZ MÜKEMMEL AKIŞKAN

Yukarıdaki denklemler, zar üzerinde yazılabilecek en genel evrim ve bağ denklemleridir ($T_{ab}^{bulk} = 0$ varsayımı altında). Şimdi bunları

$$\sigma_{ab} = 0 \tag{4.36}$$

ile tanımlı kaymasız akışkan ve

$$q_a = 0 \quad , \quad \pi_{ab} = 0 \tag{4.37}$$

ile tanımlı mükemmel akışkan haline indirgeyeceğiz. Ancak bundan önce şu noktaya dikkat çekmek gerekecektir. §4.1 de söylenildiği üzere bulkun yerel olmayan etkisini gösteren ε_{ab} terimi yüzünden zar üzerinde indüklenmiş efektif Einstein denklemleri kapalı değildir. Bu terim hakkında literatürde sıkça yapılan varsayımlardan biri $\varepsilon_{ab} = 0$ almaktır[31]. Ancak biz, bulkın da muhtemel bir etkisini araştırmak için bu terimi sıfırlamayacağız, ama

$$Q_a = 0 = P_{ab} \Rightarrow \varepsilon_{ab} = - \left(\frac{\kappa_5}{\kappa} \right)^4 U u_a u_b \tag{4.38}$$

varsayacağız. Bu durum Roy Maartens tarafından “tamamen Coulombsu (Coulomb-benzeri) durum” olarak adlandırılmaktadır[30]. Bu takdirde, (4.17) bağıntıları, (4.37) ile (4.38) kısıtlamaları altında

$$\mu^{top} = \mu + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^6} \left(\frac{\kappa^4}{12} \mu^2 + U \right) \quad (4.39a)$$

$$p^{top} = p + \frac{\kappa_5^4}{\kappa^6} \left[\frac{\kappa^4}{12} (\mu^2 + 2p\mu) + \frac{1}{3} U \right] \quad (4.39b)$$

$$q_a^{top} = 0 = \pi_{ab}^{top} \quad (4.39c)$$

ya da (4.18) deki gibi yazılışla

$$\mu^{top} = \mu + \frac{1}{2\lambda} \mu^2 + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} U \quad (4.40a)$$

$$p^{top} = p + \frac{1}{2\lambda} (\mu^2 + 2\mu p) + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} U \quad (4.40b)$$

$$q_a^{top} = 0 = \pi_{ab}^{top} \quad (4.40c)$$

bağıntılarına indirgenir. Görüldüğü üzere, (4.38) varsayımı, efektif enerji momentum tansörünün bir mükemmel akışkanınki gibi olmasını sağlamaktadır. (4.36 – 4.37) varsayımları altında, yerel olmayan Madde Korunum denklemi $\nabla^a T_{ab}^{top} = 0$ dan elde edilmiş (4.27) ve (4.28) denklemleri (4.25) ve (4.26) nın da kullanımıyla

$$\dot{U} + \frac{4}{3} \theta U = 0 \quad (4.41)$$

$$4U\dot{u}_a + h_a^b \nabla_b U + \frac{1}{2} \kappa^4 (\mu + p) h_a^b \nabla_b \mu = 0 \quad (4.42)$$

denklemlerine indirgenir. O halde bu üç varsayım için indirgenmiş denklemleri tekrar topluca gösterelim.

4.2.1. Zar Üzerinde Kaymasız Mükemmel Akışkan ve Pür Coulombsu Bulk Etkisi İçin Evrim ve Bağ Denklemleri

EVİRİM DENKLEMLERİ:

Genelleştirilmiş Raychaudhuri Denklemi (Genişleme Yayılımı):

$$\dot{\theta} - \nabla_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 (\mu^{top} + 3p^{top}) + \Lambda \quad (4.43)$$

Kayma Yayılımı:

$$-h^c{}_a h^d{}_b \nabla_{(c} \dot{u}_{d)} + \frac{1}{3} (\nabla_c \dot{u}^c) h_{ab} = \dot{u}_a \dot{u}_b - \omega_a \omega_b + \frac{1}{3} \omega^2 h_{ab} - E_{ab} \quad (4.44)$$

Girdap Yayılım Denklemi:

$$h^c{}_a h^d{}_b \dot{\omega}_{cd} - h^c{}_{[a} h^d{}_{b]} \nabla_c \dot{u}_d + \frac{2}{3} \theta \omega_{ab} = 0 \quad (4.45a)$$

veya

$$\dot{\omega}_{ab} + (u_a \omega_{bc} - u_b \omega_{ac}) \dot{u}^c - h^c{}_{[a} h^d{}_{b]} \nabla_c \dot{u}_d + \frac{2}{3} \theta \omega_{ab} = 0 \quad (4.45b)$$

veya

$$h^a{}_b \dot{\omega}^b - \frac{1}{2} \eta^{abcd} (\nabla_b \dot{u}_c) u_d = -\frac{2}{3} \theta \omega^a \quad (4.45c)$$

Yerel Madde Korunum Denklemi:

$$\dot{\mu} = -(\mu + p)\theta \quad (4.46)$$

Yerel Momentum Korunum Denklemi:

$$h^a{}_b \nabla^b p = -(\mu + p) \dot{u}^a \quad (4.47)$$

Yerel Olmayan Madde Korunum Denklemi:

$$\dot{\mu}^{top} = -(\mu^{top} + p^{top})\theta \quad (4.48)$$

Yerel Olmayan Momentum Korunum Denklemi:

$$h^a{}_b \nabla^b p^{top} = -(\mu^{top} + p^{top}) \dot{u}^a \quad (4.49)$$

Gravito-elektrik Yayılımı (Maxwell-Weyl E-nokta Denklemi):

$$h^g{}_{(a} h^h{}_{b)} \dot{E}_{gh} - h^g{}_{(a} \eta_{b)cde} (\nabla^c H^d{}_g) u^e = -\theta E_{ab} + E_{c(a} \eta^c{}_{b)ef} \omega^e u^f - 2H^c{}_{(a} \eta_{b)cde} \dot{u}^e u^f \quad (4.50)$$

Gravito-magnetik Yayılımı (Maxwell-Weyl H-nokta Denklemi):

$$h^g{}_{(a} h^h{}_{b)} \dot{H}_{gh} + h^g{}_{(a} \eta_{b)cde} (\nabla^c E^d{}_g) u^e = -\theta H_{ab} + H_{c(a} \omega^c{}_{b)} + 2E^c{}_{(a} \eta_{b)cde} \dot{u}^d u^e \quad (4.51)$$

BAĞ DENKLEMLERİ:

Kayma Bağ Koşulu:

$$-\frac{2}{3} h^b{}_a \nabla_b \theta + h^c{}_a \nabla_b \omega^b{}_c + \omega_{ab} \dot{u}^b = 0 \quad (4.52a)$$

veya

$$-\frac{2}{3} h^b{}_a \nabla_b \theta + \eta_{abcd} (\nabla^b \omega^c) u^d = -2\eta_{abcd} \dot{u}^b \omega^c u^d \quad (4.52b)$$

Gravito-magnetik Bağ Koşulu:

$$-h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} \nabla_c \omega_d - (h^c{}_d \nabla_c \omega^d) h_{ab} = H_{ab} + 2\omega_{(a} \dot{u}_{b)} \quad (4.53)$$

Girdap Bağ Koşulu:

$$\nabla_a \omega^a = 2\dot{u}_a \omega^a \quad (4.54)$$

Gravito-elektrik Diverjans (Maxwell-Weyl div-E Denklemi):

$$\nabla_c E^c{}_a - \frac{\kappa^2}{3} \nabla_a \mu^{top} = E_{ac} \dot{u}^c + 3H^c{}_a \omega_c + \frac{\kappa^2}{3} \dot{\mu}^{top} u_a \quad (4.55)$$

Gravito-magnetik Diverjans (Maxwell-Weyl div-H Denklemi):

$$\nabla_c H^c_a = -\kappa^2 (\mu^{top} + p^{top}) \omega_a - 3E^c_a \omega_c + H_{ac} \dot{u}^c \quad (4.56)$$

4.2.2. İvmesiz durum ($\dot{u}^a = 0$)

Şimdi, Konvansiyonel (Standart) Kozmolojinin:

Her kaymasız ve geodezik(ivmesiz) mükemmel akışkan ya genişlemesizdir ya da dönmesizdir; yani, $\sigma_{ab} = 0$, $\dot{u}_a = 0 \Rightarrow \omega\theta = 0$

biçiminde ifade olunan Teoreminin (iddiasının), zar-evren Kozmolojisinde de geçerli olup olmayacağını araştıracağız. Bunun için yukarıdaki evrim ve bağ denklemlerini

$$\dot{u}_a = 0 \quad (4.57)$$

haline özelleştiriyoruz ve aşağıda yalnızca ispat için gerekli olanlarını yazıyoruz.

EVİRİM DENKLEMLERİ:

Genelleştirilmiş Raychaudhuri Denklemi (Genişleme Yayılımı):

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 (\mu^{top} + 3p^{top}) + \Lambda \quad (4.58)$$

Girdap Yayılım Denklemi:

$$h^c_a h^d_b \dot{\omega}_{cd} + \frac{2}{3}\theta\omega_{ab} = 0 \quad (4.59a)$$

veya

$$\dot{\omega}_{ab} + \frac{2}{3}\theta\omega_{ab} = 0 \Leftrightarrow \dot{\omega}_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} \Leftrightarrow \dot{\omega} = -\frac{2}{3}\theta\omega \quad (4.59b)$$

veya

$$h^a_b \dot{\omega}^b = -\frac{2}{3}\theta\omega^a \Leftrightarrow \dot{\omega}^a = -\frac{2}{3}\theta\omega^a \quad (4.59c)$$

Yerel Madde Korunum Denklemi:

$$\dot{\mu} = -(\mu + p)\theta \quad (4.60)$$

Yerel Momentum Korunum Denklemi:

$$h^a{}_b \nabla^b p = 0 \quad (4.61)$$

Yerel Olmayan Madde Korunum Denklemi:

$$\dot{\mu}^{top} = -(\mu^{top} + p^{top})\theta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{U} + \frac{4}{3}\theta U = 0 \quad (4.62)$$

Yerel Olmayan Momentum Korunum Denklemi:

$$h^a{}_b \nabla^b p^{top} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_a{}^b \nabla_b U + \frac{1}{2}\kappa^4(\mu + p)h_a{}^b \nabla_b \mu = 0 \quad (4.63)$$

BAĞ DENKLEMLERİ:**Kayma Bağ Koşulu:**

$$-\frac{2}{3}h^b{}_a \nabla_b \theta + h^c{}_a \nabla_b \omega_c{}^b = 0 \quad (4.64)$$

Girdap Bağ Koşulu:

$$\nabla_a \omega^a = 0 \quad (4.65)$$

Şimdi teoremin ispatına geçmeden önce hesapların ayrıntılarını yansıtabilmeyi kolaylaştırmak için kullanılan bağıntı ve özdeşlikleri, bazılarını tekrarlıyor da olsak, aşağıda topluca verelim.

- (3.115) teki

$$\nabla_a u_b = -\dot{u}_a u_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab} \quad (4.66)$$

bağıntısıyla tanımlanan ω_{ab} girdap tansörü ve buna bağlanan ω^a girdap (dönme) vektörü şu özellikleri taşır:

$$\omega_{ab} = h_{[a}^c h_{b]}^d \nabla_c u_d, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}, \quad \omega_{ab} u^b = 0, \quad \omega_a^a \omega_a^a = 0 \quad (4.67)$$

$$\omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abcd} \omega_{bc} u_d \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abcd} \omega^c u^d \quad (4.68)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{ab} \omega_{ab} = \omega^a \omega_a \quad (4.69)$$

$$\omega_{ab} = 0 \Leftrightarrow \omega^a = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \quad (4.70)$$

$$\omega_{ab} \omega^a = \omega_{ab} \omega^b = 0 \quad (4.71)$$

$$\omega_a^c \omega_c^b = \omega_a \omega^b - h_a^b \omega^2 \quad (4.72)$$

$$\omega_a^c \omega_c^d \omega_d^b = -\omega^2 \omega_a^b \quad (4.73)$$

$$\omega_{ab} \nabla_c \omega^{bc} = -\omega^2 \dot{u}_a + (\dot{u}^b \omega_b) \omega_a + h_a^b \omega^c \nabla_c \omega_b - h_a^b \omega^c \nabla_b \omega_c \quad (4.74)$$

$$\omega_{ab} = 0 \Leftrightarrow \exists f \text{ ve } g \text{ fonksiyonları} \mid u_a = g \nabla_a f \Leftrightarrow u_{[a} \nabla_b u_{c]} = 0 \quad (4.75)$$

(4.59) dan

$$\dot{\omega}_{ab} = -\frac{2}{3} \theta \omega_{ab} \Leftrightarrow \dot{\omega}^a = -\frac{2}{3} \theta \omega^a \Leftrightarrow \dot{\omega} = -\frac{2}{3} \theta \omega \quad (4.76)$$

Bunlara ek olarak bir de şu özdeşliklere gereksinim bulunmaktadır:

- Keyfi bir f skaleri için $\dot{u}_a = 0$ olduğunda

$$(h_a^b \nabla_b f) \dot{=} h_a^b \nabla_b \dot{f} - \frac{1}{3} \theta h_a^c \nabla_c f - \omega_a^c \nabla_c f \quad (4.77)$$

dir.

• Bir f skaler fonksiyonu, bir V_a vektörü ve bir V_{ab} 2-tansörü için Ricci Özdeşlikleri aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = 0 \quad (\text{Burulmasız uzay için}) \quad (4.78)$$

$$\nabla_a \nabla_b V_c - \nabla_b \nabla_a V_c = R_{abcd} V^d \quad (4.79)$$

$$\nabla_a \nabla_b V_{cd} - \nabla_b \nabla_a V_{cd} = R^s_{dba} V_{cs} + R^s_{cba} V_{sd} \quad (4.80a)$$

veya

$$\nabla_a \nabla_b V_c^d - \nabla_b \nabla_a V_c^d = R^d_{sab} V_c^s - R^s_{cab} V_s^d \quad (4.80b)$$

özel olarak $b = d$ büzmesi için ve $V_c^d \equiv \omega_c^d$ için

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c^b - \nabla_b \nabla_a \omega_c^b = -R_{sa} \omega_c^s - R^s_{cab} \omega_s^b \quad (4.80c)$$

Şimdi yine sunumda kolaylık sağlamak üzere şu yardımcı teoremleri (lemmalar) önceden verelim:

Lemma 1. Eğer $h_a^b \nabla_b f = 0$ olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa, bu takdirde ya $f = \text{sabit}$ tir ya da dönme sıfırdır.

İspat: $h_a^b \nabla_b f = (\delta_a^b + u_a u^b) \nabla_b f = \nabla_a f + u_a \dot{f} = 0$

Burada iki olasılık vardır. Ya $\dot{f} = 0$ dır; bu takdirde $f = \text{sabittir}$. Ya da $\dot{f} \neq 0$ dır. Bu durumda $u_a = -\frac{1}{\dot{f}} \nabla_a f$ seçilebilir. (4.75) ten dolayı bu $\omega_{ab} = 0$ verir.

Lemma 2. Eğer bir mükemmel akışkan jeodezik ise (yani $\dot{u}_a = 0$ ise), bu takdirde ya $p = \text{sabit}$ ve $p^{top} = \text{sabit}$ tir, ya da dönme ya da genişleme sıfırdır.

İspat: (4.61) den dolayı $h_a^b \nabla_b p = 0$ dır. Lemma 1 den dolayı ya $p = \text{sabit}$ ya da $u_a = -\frac{1}{\dot{p}} \nabla_a p$ (α) seçilebileceğinden dönme sıfırdır. Öte yandan, (4.63) ten dolayı

$h_a^b \nabla_b p^{top} = 0$ olduğundan ya $p^{top} = \text{sabit}$, ya da $u_a = -\frac{1}{\dot{p}^{top}} \nabla_a p^{top}$ (β) dır.

Şimdi, ilk önce $p \neq \text{sabit}$, $p^{top} \neq \text{sabit}$ varsayalım. (α) ve (β) ile verilen u_a ların uyuşması için

$$-\frac{1}{\dot{p}} \nabla_a p = -\frac{1}{\dot{p}^{top}} \nabla_a p^{top}$$

yani

$$\dot{p}^{top} \nabla_a p = \dot{p} \nabla_a p^{top} \quad (4.81)$$

olmak zorundadır. (4.40b) den, (4.60) da kullanılarak

$$\dot{p}^{top} = \dot{p} + \frac{1}{\lambda} \left[-(\mu + p)^2 \theta + \mu \dot{p} \right] - \frac{8\theta}{3\kappa^4 \lambda} U \quad (4.82)$$

ve

$$\nabla_a p^{top} = \nabla_a p + \frac{1}{\lambda} (\mu \nabla_a \mu + \mu \nabla_a p + p \nabla_a \mu) + \frac{2}{\kappa^4 \lambda} \nabla_a U \quad (4.83)$$

bulunur. Öte yandan (4.63) açılırsa, (4.60) ve (4.62) de kullanılarak

$$\nabla_a U - \frac{4}{3} \theta U + \frac{1}{2} \kappa^4 (\mu + p) \nabla_a \mu - \frac{1}{2} \kappa^4 (\mu + p)^2 \theta = 0 \quad (4.84)$$

bulunur. Buradan $\nabla_a U$ çekilip (4.83) e yerleştirilir ve (4.82) ile birlikte hepsi (4.81) e taşınıp düzenlenirse sonuçta

$$(\dot{p} + \nabla_a p) \left[\frac{8U}{3\kappa^4} + (\mu + p)^2 \right] \theta = 0 \quad (4.85)$$

bağıntısına ulaşılır. $\dot{p} \neq 0$ olduğundan ve köşeli parantez de $\dot{p} = \dot{p}^{top} = 0$ durumuna karşılık geldiğinden (bakınız aşağıdaki durum) buradan $\theta = 0$ olması gerektiği ortaya çıkar. Bu, (4.60) t

ii

Şimdi ispatın ikinci kısmını bir Lemma olarak ifade edelim.

Lemma 3. Eğer bir mükemmel akışkan jeodezik ise ya $\theta = 0 \Rightarrow \mu = \text{sabit}$, ya da

$$U = -\frac{3\kappa^4}{8}(\mu + p)^2 \leq 0 \text{ dir.}$$

İspat: Lemma 2 de, geriye kalan durum $\dot{p} = 0$ ve $\dot{p}^{top} = 0$ olasılıklarıdır. Eğer (4.40b) zamana göre türetilir ve $\dot{\mu}$ için (4.60) ve de $\dot{U}$ için (4.62) kullanılırsa

$$\left[(\mu + p)^2 + \frac{8U}{3\kappa^4} \right] \theta = 0 \quad (4.86)$$

bulunur. Buradan, ya $\theta = 0$ dır ki bu (4.60) dan $\mu = \text{sabit}$ verir; ya da

$$U = -\frac{3\kappa^4}{8}(\mu + p)^2 \leq 0 \quad (4.87)$$

dir.

Lemma 4. Eğer mükemmel akışkan jeodezik ve

$$\mu^{top} = (c_1 - 1)p^{top} + c_2\omega^2 \quad (4.88)$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 ($c_2 \neq 0$) sabitleri varsa, bu takdirde ya dönme ya da genişleme sıfırdır.

İspat: Lemma 2 den dolayı yalnızca $p^{top} = \text{sabit}$ durumunu incelemeliyiz. (4.86) nın zaman türevi alınır (4.59) kullanılırsa

$$\theta(c_1 p^{top} - \frac{c_2}{3}\omega^2) = 0$$

elde edilir. Bu durumda ya $\theta = 0$ ya da $c_1 p^{top} - \frac{c_2}{3} \omega^2 = 0$ dır. $\theta = 0$ ise ispat tamam olur. $c_1 p^{top} - \frac{c_2}{3} \omega^2 = 0$ durumunda ise $\omega = \text{sabit}$ olacağından türevi sıfır olur ve (4.59) dan dolayı daima $\theta\omega = 0$ olur.

Sonuç olarak, (4.2.2) deki Teoremin ispatı için yalnızca $p = \text{sabit}$, $p^{top} = \text{sabit}$ halini göz önüne almak ve bu hal için $\theta\omega = 0$ bağıntısının gerçekleşip gerçekleşmediğine bakmak gerekmektedir. Aşağıda bu iş için Senovilla ve diğ.[15] nin yöntemini zar-evren için yazılmış kozmolojik denklemlere uyguluyoruz.

İSPAT: İvmesiz durumda herhangi bir f fonksiyonu için

$$(h^{ab}\nabla_b f)^\cdot = h^{ab}\nabla_b \dot{f} + \omega^{ab}\nabla_b f - \frac{\theta}{3} h^{ab}\nabla_b f \quad (4.89)$$

ifadesi yazılabilir. (4.64) denkleminin zaman evrimi alınır, ilk terimin türevinden gelecek olan $(h_a^b \nabla_b \theta)^\cdot$ ifadesi için (4.69) ve buradaki $\dot{\theta}$ için de (4.58) Raychaudhuri denklemi kullanır, ikinci terimin türevini hesaplamak için ise $\dot{u}^a = 0$ hali için (4.72) ve (4.74) denklemleri kullanılarak

$$2\kappa^2 h_a^b \nabla_b \mu^{top} - 13 h_a^b \omega^c \nabla_b \omega_c - 3 h_a^b \omega^c \nabla_c \omega_b = 0 \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.64) denklemi ω_{ac} ile büzülürse ivmesiz durum için (4.74) özdeşliği kullanılarak

$$3 h_a^b \omega^c \nabla_c \omega_b = 3 h_a^b \omega^c \nabla_b \omega_c - 2 \omega_a^b \nabla_b \theta \quad (4.91)$$

elde edilir. Bu ifade (4.90) a yerleştirilirse, (4.90) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\kappa^2 h_a^b \nabla_b \mu^{top} - 8 \omega h_a^b \nabla_b \omega + \omega_a^b \nabla_b \theta = 0 \quad (4.92)$$

Bu son denklem ω^{ca} ile büzülerek

$$\kappa^2 \omega_a^b \nabla_b \mu^{top} - 8 \omega \omega_a^b \nabla_b \omega - \omega_a^c \omega_c^b \nabla_b \theta = 0 \quad (4.93)$$

elde edilir.

Şimdi (4.92) in zamansal evrimini göz önüne alalım. Buradaki her terimin zamana göre türevi tek tek hesaplandığında karşılaşılabilecek olan $\dot{\omega}_{ab}$ ve $\dot{\omega}$ için (4.76), $\dot{\theta}$ için (4.58) ve $\dot{\mu}^{top}$ için (4.60) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -\frac{4\kappa^2}{3}\theta h_a^b \nabla_b \mu^{top} + \left(-\kappa^2 \mu^{top} - \kappa^2 p^{top} + \frac{16}{3}\omega^2 \right) h_a^b \nabla_b \theta \\ & -\frac{\kappa^2}{2}\omega_a^b \nabla_b \mu^{top} + \frac{40}{3}\theta \omega h_a^b \nabla_b \omega \\ & + 4\omega \omega_a^b \nabla_b \omega + \frac{5}{3}\theta \omega_a^b \nabla_b \theta + \omega_a^b \omega_b^c \nabla_c \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.94)$$

elde edilir. Öte yandan (4.92) den $\omega \omega_a^b \nabla_b \omega$ ifadesi çekilip burada yerine yazılırsa (4.77) ifadesi

$$\frac{\theta}{3} \left(-4\kappa^2 h_a^b \nabla_b \mu^{top} + 40\omega h_a^b \nabla_b \omega + 5\omega_a^b \nabla_b \theta \right) + \frac{1}{2}\omega_a^b \omega_b^c \nabla_c \theta = 0 \quad (4.95)$$

biçiminde yazılabilir. Burada parantez içindeki ikinci terim için (4.93) denklemi kullanılırsa

$$(\kappa^2 \mu^{top} + \kappa^2 p^{top} - \frac{16}{3}\omega^2) h_a^b \nabla_b \theta = \frac{1}{2}\omega_a^c \omega_c^b \nabla_b \theta + \frac{\theta}{3}\kappa^2 h_a^b \nabla_b \mu^{top} \quad (4.96)$$

elde edilir. Tekrar bu eşitliğin de zamana göre türevini alalım. Bir önceki adımdaki gibi ilk terimin türevinden gelecek olan $\dot{\omega}_{ab}$ ve $\dot{\omega}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\mu}^{top}$ ifadeleri için sırasıyla (4.76), (4.58) ve (4.62) denklemleri, $(h_a^b \nabla_b \theta)$ için (4.77) ve $\omega h_a^b \nabla_b \omega$ için de (4.92) ifadeleri kullanılır ve terimler tek tek hesaplanırsa sonuçta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\kappa^2 \mu^{top} + \kappa^2 p^{top} - \frac{16}{3}\omega^2) \omega_a^b \nabla_b \theta + \theta \left[\frac{112}{9}\omega^2 - \frac{5\kappa^2}{3}(\mu^{top} + p^{top}) \right] h_a^b \nabla_b \theta \\ & + \left(\frac{5}{9}\theta^2 - \frac{2}{3}\omega^2 + \kappa^4 \frac{\mu^{top} + 3p^{top}}{6} \right) h_a^b \nabla_b \mu^{top} + \frac{7}{6}\theta \omega_a^c \omega_c^b \nabla_b \theta \\ & - \frac{1}{4}\omega_a^d \omega_d^c \omega_c^b \nabla_b \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

denkleminde ulaşılır. (4.97) denklemini θ ile çarpıp terimleri düzenleyerek (4.92) de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} \left(\kappa^2 \mu^{top} + \kappa^2 p^{top} - \frac{16}{3} \omega^2 \right) \omega_a^b \nabla_b \theta - \frac{\theta}{4} \omega_a^d \omega_d^c \omega_c^b \nabla_b \theta \\ & + \left(\frac{\theta^2}{3} + \omega^2 - \kappa^2 \frac{\mu^{top} + 3p^{top}}{4} \right) \omega_a^c \omega_c^b \nabla_b \theta \\ & + \left[\frac{32}{9} \theta^2 \omega^2 + (\kappa^2 \mu^{top} + \kappa^2 p^{top} - \frac{16}{3} \omega^2) (\kappa^2 \frac{\mu^{top} + 3p^{top}}{2} - 2\omega^2) \right] h_a^b \nabla_b \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu son eşitlik ω^a ile kontrakte edilirse

$$\left[\frac{32}{9} \theta^2 \omega^2 + \left(\kappa^2 \mu^{top} + \kappa^2 p^{top} - \frac{16}{3} \omega^2 \right) \left(\kappa^2 \frac{\mu^{top} + 3p^{top}}{2} - 2\omega^2 \right) \right] \omega^b \nabla_b \theta = 0 \quad (4.99)$$

ilişkisi elde edilir. Burada kolayca görüldüğü gibi $\omega^b \nabla_b \theta = 0$ ya da $\omega^b \nabla_b \theta \neq 0$ şeklinde iki olasılık vardır.

1) $\omega^b \nabla_b \theta \neq 0$ ise, bu takdirde

$$\frac{32}{9} \theta^2 \omega^2 + \left(\kappa^2 \mu^{top} + \kappa^2 p^{top} - \frac{16}{3} \omega^2 \right) \left(\kappa^2 \frac{\mu^{top} + 3p^{top}}{2} - 2\omega^2 \right) = 0 \quad (4.100)$$

Bu denklemin zamana göre türevi de, her bir terimden gelen türev ifadeleri için yine (4.76), (4.58) ve (4.60) denklemleri kullanılarak

$$\left[\frac{64}{9} \omega^4 - 2\kappa^2 \mu^{top} \omega^2 - \frac{38\kappa^2}{3} p^{top} \omega^2 + \kappa^4 p^{top} (\mu^{top} + p^{top}) \right] \theta = 0 \quad (4.101)$$

elde edilir. Buradan ya $\theta = 0$ dır. Bu durumda $\theta \omega = 0$ olacağından ispat tamamlanmış olur, ya da

$$\frac{64}{9} \omega^4 - 2\kappa^2 \mu^{top} \omega^2 - \frac{38\kappa^2}{3} p^{top} \omega^2 + \kappa^4 p^{top} (\mu^{top} + p^{top}) = 0 \quad (4.102)$$

olur. Bu (4.102) ilişkisinin bir kere daha türevi alınarak,

$$-\frac{512}{27}\omega^4 - \frac{14}{3}\kappa^2\mu^{top}\omega^2 - \frac{170\kappa^2}{9}\kappa^2p^{top}\omega^2 - \kappa^4p^{top}(\mu^{top} + p^{top}) = 0 \quad (4.103)$$

denkleminde ulaşılır. Bu denklemde son terim (4.102) den çekilip yerine yazılırsa sonuçta

$$\left[\left(\frac{14}{3}\kappa^2 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \mu^{top} + \left(\frac{170\kappa^2}{9} - \frac{38}{3\kappa^2} \right) p^{top} - \frac{64}{27\kappa^2} \left(\frac{3}{\kappa^2} - 8 \right) \omega^2 \right] \omega^2 = 0 \quad (4.104)$$

denklemini verir. Bu son denklemde ya $\omega = 0$ dır, ki bu durumda ispat tamamlanır, ya da parantez içindeki terim sıfırdır. Bu durumda da Lemma 4'ten dolayı $\theta\omega = 0$ olur. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

2) $\omega^b\nabla_b\theta = 0$ ise; bu durum için (4.96) denklemi (4.72) ile birlikte

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} (29\omega^2 - 6\kappa^2(\mu^{top} + p^{top})) \omega_a^b \nabla_b \theta = \\ & = \left[\frac{58}{3} \theta^2 \omega^2 + \left(2\omega^2 - \kappa^2 \frac{\mu^{top} + 3p^{top}}{2} \right) (29\omega^2 - 6\kappa^2(\mu^{top} + p^{top})) \right] h_a^b \nabla_b \theta \end{aligned} \quad (4.105)$$

eřitliđine yol açar. Buradaki $\omega_a^b \nabla_b \theta$ ile $h_a^b \nabla_b \theta$ vektörleri birbirlerine diktir. Bu durumda (4.68) de kullanılarak elde edilebilecek

$$\omega_a^b \nabla_b \theta = \omega_{ac} h^{cb} \nabla_b \theta = \eta_{acde} \omega^d u^e h^{cb} \nabla_b \theta \quad (4.106)$$

denkleminde dolaylı, (4.103) denkleminin sol tarafının sıfır olması gerektiği sonucu çıkar. Bu durumda 3 olasılık söz konusudur:

(a) $\theta = 0$ olur, ki bu durumda teorem ispatlanır.

(b) Parantez içindeki terim sıfırdır. Bu durumda teorem Lemma 4'e indirgenir ve ispatı tamamlanmış olur.

(c) $\omega_a{}^b \nabla_b \theta = 0$ olur. Bu durumda ya $h_a{}^b \nabla_b \theta = 0$ ya da $\omega^b = 0$ olur. Eğer $\omega^b = 0$ ise bu takdirde $\omega = 0$ dır ve teorem kanıtlanmış olur. $h_a{}^b \nabla_b \theta = 0$ ise (4.92) ve (4.90) denklemlerinden dolayı

$$\kappa^2 h_a{}^b \nabla_b \mu^{top} = h_a{}^b \nabla_b \omega = 0 \quad (4.107)$$

olur. Bu durumda $\omega = \text{sabit}$ olur ve Lemma 1 e göre $f = \omega$ alınırsa, $\theta \omega = 0$ olur. Teorem bu durumda da sağlanır.

Böylelikle verilen teoremin ispatı tamamlanmış olur. Yani, Konvansiyonel kozmolojinin “Her jeodezik kaymasız mükemmel akışkan için ya genişleme ya da dönme sıfırdır.” şeklindeki teoremi, pür Coulombsu durum kısıtlaması altında, zar evren kozmolojisiinde de geçerlidir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Konvansiyonel Kozmolojide kaymasız bir akışkan için ya genişlemenin ya da girdabın sıfır olduğunu söyleyen iddiayı zar-evren modelleri çerçevesinde ele aldık. Konvansiyonel Kozmolojide bu konu pek çok basitleştirici varsayım altında incelenmiştir (Bakınız Tablo 2.1). Dolayısıyla biz de, matematiksel güçlüklerle karşılaşmamak için bu yönde hareket ettik. Varsayımlardan birincisini, akışkanın mükemmel akışkan olarak alınması; ikincisini de jeodezik (ivmesiz) alınması; oluşturmaktadır. Bu iki varsayım altında evrim ve bağ denklemleri büyük ölçüde sadeleşmektedir. Bu basitleştirici varsayımlara rağmen incelememiz kovaryant kozmolojik denklemler ile iş görülmesi bakımından literatürde yapılan pek çok çalışmaya kıyasla daha genel bir çerçevede gerçekleştirilmiştir. Zira tetrad formalizmi ya da metrik yaklaşım çok özel yöntemler olup bazen bazı özellikleri maskeleyebilmektedirler. Öte yandan, zar-evren modelleri konusunda ise çalışmamız şu iki basitleştirici varsayıma dayandırılmıştır: birincisi Bulk'ın enerji-momentum tansörünü sıfır almaktır. Bu çok büyük bir matematiksel sadeleşmeye yol açmaktadır ki, zaten literatürde de bu tansör kullanımıyla ilgili çalışmalar yok denecek kadar azdır. İkinci varsayım ise, bulkteki serbest gravitasyon alanını gösteren Weyl tansörünün zar üzerinde indüklenmiş elektriksel kısmı hakkında yapılan varsayımdır. Aslında bu büyüklük için bir varsayımda bulunmak bir zorunluluktur. Zira zar üzerinde indüklenmiş alan denklemleri bu terimden dolayı kapalı değildir. Bu terim, önce, 5-boyutlu bulk için yazılmış Einstein alan denklemlerinin çözümünden hareketle belirlenmiş olmalıdır. Ancak bu iş, yine de pek çok varsayım gerektiren bir uğraş olup karmaşık ve hatta çözümsüzdür. Bu konuda genel olarak yapılan, bu ε_{ab} terimi hakkında bir takım varsayımlarda bulunmaktır. Çok kaba çalışma varsayımı olarak bu terimin sıfır alındığı pek çok çalışma bulunmaktadır. Ancak biz, bu terimi sıfırlamak yerine (4.38) ile gösterilen kısıtlamayı tercih ettik ve serbest gravitasyon alanlarının enerji yoğunluğunun, kaymasız ve ivmesiz mükemmel akışkanın genişleme ve girdap özelliklerine muhtemel etkisini görmek istedik. (4.38) deki seçim bize efektif toplam

enerji momentum tansörünün (4.39) veya (4.40) ta görüldüğü üzere bir mükemmel akışkanınki gibi olmasını sağladı ki bu, matematiksel bakımdan çok büyük bir kolaylık getirmiştir.

Çalışmamızda sonuç olarak: $p = \text{sabit}$ ve $p^{top} = \text{sabit}$ durumu için, U enerjisi ne olursa olsun kaymasız ve ivmesiz mükemmel bir akışkan için ya genişlemesinin ya da girdabının sıfır olduğu sonucunun zar-evren modellerinde de geçerliliğini koruduğunu gösterdik. Buna karşılık $p \neq \text{sabit}$ ve $p^{top} \neq \text{sabit}$ durumunda ise aynı özelliğin geçerli olması için U nun (4.87) ile verildiği üzere

$$U = -\frac{3\kappa^4}{8}(\mu + p)^2 \leq 0$$

biçiminde negatif veya sıfır olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Her ne kadar negatif bir enerji yoğunluğu; zayıf, kuvvetli ve egemen enerji koşullarını ihlal ediyorsa da negatif enerji kavramı uzun zamandan beri bilinen bir kavramdır[32]. Bu kavram kuantum alanlar teorisinde yer bulduğu gibi zar-evren senaryolarında da yer bulmaktadır[33,34,35]; dolayısıyla da bu beklenmeyen bir sonuç değildir.

KAYNAKLAR

- [1]. KALUZA, T., 1921, Zum Unitatsproblem der Physik, Sitzungsber Preuss Akad. Wiss., *Math. Phys. Kl*, 966-972.
- [2]. KLEIN, O., 1926, Quantentheorie und Funfdimensionale Relativitatstheorie, *Zeits. Phys.*, 37, 895-906.
- [3]. HORAVA P., WITTEN, E., 1996, Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions, *Nucl. Phys. B*, 460-506.
- [4]. HORAVA P., WITTEN, E., 1996, Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. *Nucl. Phys. B*, 475-94.
- [5]. WITTEN, E., 1996, Strong Coupling Expansion Of Calabi-Yau Compactification, *Nucl. Phys.B*, 471, 135-158.
- [6]. ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S., DVALI, G., 1998, The Hierarchy Problem and New Dimensionals at a Milimeter, *Phys. Letter B*, 429, 263-272.
- [7]. GÖDEL, K., 1950, Rotating Universes in General Relativity Theory. *Proc. Int. Cong. Math.*, 1, 175 .
- [8]. ELLIS, G.F.R., 1967, Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity, *J.Math.Phys.*, 8, 1171-1180.
- [9]. SCHUCKING, E., 1957, Homogene Scherungsfreie Weltmodelle in Der Relativistischen Kosmologie Die, *Naturwiss.*, 19, 507.

- [10]. BANERJI, S., 1968, Homogeneous Cosmological Models Without Shear, *Prog. Theor. Phys.*, 39, 365-371.
- [11]. KING, A.R., ELLIS, G.F.R., 1973, Tilted Homogeneous Cosmological Models, *Commun. Math. Phys.*, 31, 209-220.
- [12]. WHITE, A.J., COLLINS, C.B., 1984, A Class of Shear-free Perfect Fluids in General Relativity I, *Journal of Math. Phys.* 25-332.
- [13]. TRECIOKAS, R., ELLIS, G.F.R., 1971, *Commun. Math. Phys.*, The Shear Dynamics, 23, 1-17.
- [14]. COLLINS, C. B., 1984, Shear-free Perfect Fluids With Zero Magnetic Weyl Tensor, *J. Math. Phys.* 25, 995-1000.
- [15]. SENOVILLA, J.M.M., SPUERTA, C.F., SZEKERES, P., 1997, *Theorems on Shear Free Perfect Fluids with Their Newtonian Analogues*, <http://xxx.lanl.gov>, e-print: gr-qc/9702035.
- [16]. CARMINATI, J., 1987, Shear-Free Perfect Fluids in General Relativity. I. Petrov Type N Weyltensor, *J. Math. Phys.* 28, 1848-1853.
- [17]. LANG, J. M., COLLINS, C. B., 1988, Observationally Homogeneous Shear-Free Perfect Fluids, *Gen. Rel. Grav.* 20, 683-710.
- [18]. CARMINATI, J., 1990, Shear-Free Perfect Fluids in General Relativity. II. Aligned, Petrov Type III Spacetimes, *J. Math. Phys.* 31, 2434-2440.
- [19]. CARMINATI, J., CYGANOWSKI, S., 1996, Shear-Free Perfect Fluids in General Relativity III: Petrov Type III Spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 13, 805-817.

- [20]. CARMINATI, J., CYGANOWSKI, S., 1997, Shear-free Perfect Fluids in General Relativity IV. Petrov Type III Spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 14, 1167-1181.
- [21]. COLEY, A.A., 1991, Fluid Spacetimes Admitting a Conformal Killing Vector Parallel to the Velocity Vector, *Class. Quantum Grav.* 8, 955-968.
- [22]. SOPUERTA, C.F., 1998, Covariant Study of a Conjecture on Shear-Free Barotropic Perfect Fluids, *Class. Quantum Grav.* 15, 1043-1062.
- [23]. VAN DEN BERGH, N., 1999, The Shear-Free Perfect Fluid Conjecture, *Class. Quantum Grav.* 16, 117-129.
- [24]. CYGANOWSKI, S., CARMINATI, J., 2000, Shear-Free Perfect Fluids in General Relativity: Gravito-Magnetic Spacetimes, *Gen. Relativ. Grav.* 32, 221-233.
- [25]. CHROBOK, T., 2004, Scherungsfreie Fluide in der Allgemeinen Relativitätstheorie, Doktorarbeit, Technischen Universität Berlin, Berlin.
- [26]. COLLINS, C.B., WAINWRIGHT, J., 1983, Exact Spatially Inhomogeneous Cosmologies, *Phys. Rev. D* 27, 1209.
- [27]. SHIROMIZU, T., MAEDA, K.I., SASAKI, M., 2000, *The Einstein Equation on the 3-Brane World*, <http://xxx.lanl.gov>, e-print: gr-qc/9910076.
- [28]. ISRAEL, W., 1966, Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity, *Nuovo Cimento* 44B, 1-14.
- [29]. POISSON, E., 2002, *An Advanced Course in General Relativity*, University of Guelph.
- [30]. MAARTENS, R., 2004, *Brane World Gravity*, <http://xxx.lanl.gov>, e-print: gr-qc/0312059.

- [31]. MAARTENS, R., 2000, Cosmological Dynamics on the Brane, *Phys. Rev. D* **62**, 084023.
- [32]. EPSTEIN, H., GLASER, V., JAFFE, A., 1965, Nonpositivity of the Energy Density in Quantized Field Theories, *Nuovo Cimento*, *Vol.36, N.3.*, 1016-1022.
- [33]. VOLLIK, D., N., 2000, *Negative Energies on the Brane*, <http://xxx.lanl.gov>, e-print: hep-th/0004064.
- [34]. SASAKI, M., SHIROMIZU, T., MAEDA, K.I., 2000, Gravity, Stability, and Energy Conservation on the Randall-Sundrum Brane World, *Phys. Rev. D* **62**, 024008.
- [35]. DADHICH, N., MAARTENS, R., PAPADOPOULOS, P., REZANIA, V., 2000, Black Holes on the Brane, *Phys. Lett. B* **487**, 1-6.

ÖZGEÇMİŞ

15.11.1983 tarihinde Giresun’da doğdum. İlk öğrenimimi 1994 yılında Uğur Erkey İlköğretim Okulu’nda (Şişli,İstanbul), orta öğrenimimi 1997 yılında Süleyman Çelebi İlköğretim Okulu’nda (Şişli,İstanbul), lise öğrenimimi 2000 yılında Dr. Sadık Ahmet Lisesi’nde (Kağıthane, İstanbul) tamamladım. 2000-2004 yılları arasında, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü’nde (Vezneciler, İstanbul) üniversite öğrenimi tamamladım ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programı’nda yüksek lisans öğrenimime başladım.

6 Haziran – 6 Temmuz 2005 tarihlerinde Feza Gürsey Enstitüsü’nde (Çengelköy, İstanbul) yapılan Research School on Cosmology başlıklı yaz okuluna, 9 – 13 Temmuz 2007 tarihlerinde Koç Üniversitesi’nde (Sarıyer, İstanbul) yapılan İstanbul 2007: Strings, Branes and Cosmology başlıklı konferansa, 21 - 27 Ağustos 2007 tarihlerinde Karaburun’da yapılan Düzensiz Sistemler: Teori ve Uygulamalar Çalışma Grubu VII. Ulusal Sempozyumu’na (İzmir) ve 31 Mayıs 2008 tarihinde İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri’nde (Sarıyer, İstanbul) yapılan III. İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu’na (düzenleme komitesi) katıldım.