

**TIMELIKE VEYA SPACELIKE
İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ
ÜZERİNE
MUSTAFA BİLİCİ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TIMELIKE VEYA SPACELIKE İNVLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ
ÜZERİNE

MUSTAFA BİLİCİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof.Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

SAMSUN-2009

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 27 / 02 /2009 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Üye: Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

Üye: Doç. Dr. İsmail AYDEMİR

Üye: Doç. Dr. Emin KASAP

Üye: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğu onaylarım.

..... / / 2009

Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TIMELIKE VEYA SPACELIKE İNVLÜT-EVOLÜT EĞRİ ÇİFTLERİ ÜZERİNE

ÖZ

Bu çalışma temelde dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Genel bilgiler bölümünde ise Lorentz uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Yöntem bölümünde involüt-evolüt eğri çifti, E^3 ve IL^3 de Darboux vektörleri ve bir eğrinin küresel gösterge eğrilerinin geodezik eğriliklerinden bahsedildi.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde IL^3 Lorentz uzayında nonnull eğrilerin involütleri için eğrilik ve burulmalar, Frenet vektörleri, Frenet vektörlerinin S_1^2 birim Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerindeki küresel gösterge eğrilerinin yay uzunlukları, ayrıca IL^3 , S_1^2 veya H_0^2 a göre geodezik eğrilikleri ve Darboux vektörlerinden bahsedilerek bazı ilginç sonuçlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Lorentz uzayı, Nonnull eğri, İnvölüt-evolüt eğri çifti, Küresel gösterge eğrileri

ON THE TIMELIKE OR SPACELIKE INVOLUTE-EVOLUTE CURVE COUPLES

ABSTRACT

This study consist of four basic chapters. In introduction, it is discussed aim of the study and why this study is taken into consideration. In general information part, basic concepts about Lorentz space has been examined.

In material and method part, involute-evolute curve couple, Darboux vectors and the geodesic curvatures of the spherical indicatrices of a given curve in E^3 and IL^3 have been presented.

The four chapter is the orijinal part of this study. In this chapter, curvatures and torsions for the involutes of nonnull curves, Frenet vectors, arc lenghts of the spherical indicatrices on the Lorentz sphere S_1^2 or hyperbolic sphere H_0^2 , in addition to this geodesic curvatures with respect to IL^3 , S_1^2 or H_0^2 and Frenet instantaneous rotation vectors have been investigated and some new interesting results have been found.

Key Words: Lorentz space, Nonnull curve, Involute-evolute curve couple, Spherical indicator curves

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni her aşamada yönlendiren bilgi ve tecrübeleriyle yardımlarını esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın **Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN**'a tüm içtenliğimle en derin saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa BİLİCİ

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Lorentz Uzayı.....	3
2.2. Yarı-Riemann Manifoldları.....	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	12
3.1. E^3 Öklid Uzayında İnvolut-Evolüt Eğri Çifti.....	12
3.2. E^3 Öklid Uzayında Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri ve Pol Eğrileri.....	14
3.3. IL^3 Lorentz Uzayında Bir Nonnull Eğrinin Küresel Göstergeleri ve Yay Uzunlukları.....	18
3.4. Bir Nonnull Eğrinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri.....	24
3.5. Bir Nonnull Eğrinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 a göre Geodezik Eğrilikleri.....	29
4. BULGULAR.....	33
4.1. IL^3 Lorentz Uzayında I. Tipten İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri.....	33
4.2. IL^3 Lorentz Uzayında İnvolut Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Yay Uzunlukları.....	38
4.3. İnvolut Eğrisinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri.....	39
4.4. İnvolut Eğrisinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 a göre Geodezik Eğrilikleri.....	46
4.5. IL^3 Lorentz Uzayında İnvolut-Evolüt Eğri Çiftlerinin Darboux Vektörleri ve Sabit Pol Eğrileri İçin Bazı Karakterizasyonlar	50
4.6. IL^3 Lorentz Uzayında II. Tipten İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri.....	53
4.7. IL^3 Lorentz Uzayında III. Tipten İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri.....	56
5. TARTIŞMA	62
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	63
7. KAYNAKLAR.....	64
8. ÖZGEÇMİŞ.....	66

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

D : Levi-Civita konneksiyonu

$\overline{D}$: S_1^2 deki konneksiyon

$\overline{\overline{D}}$: H_0^2 daki konneksiyon

E^3 : 3- boyutlu Öklid uzayı

g : Lorentz metriği

H_0^{n-1} : (n-1)-boyutlu hiperbolik uzay

H_0^2 : Hiperbolik birim küre

k_g : Bir eğrinin bir noktasına karşılık gelen IL^3 deki geodezik eğriliği

IL^n : n-boyutlu Lorentz uzayı

(M_2, M_1) : İnvolut-evolut eğri çifti

$\| \cdot \|_{IL}$: norm

(P) : Sabit pol eğrisi

(P^*) : Hareketli pol eğrisi

IR_v^n : Yarı-Öklidyen uzay

IR_1^n : Minkowski n-uzay

S_1^n : n-boyutlu Lorentz hiperküresi

S_1^2 : Birim Lorentz küresi

S : Hiperyüzeyin şekil operatörü

W : Darboux vektörü

γ_g : Bir eğrinin bir noktasına karşılık gelen S_1^2 (veya H_0^2) deki geodezik eğriliği

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. İnvolut-evolüt eğri çifti	sayfa 12
Şekil 3.2. Darboux vektörü	sayfa 14
Şekil 3.3. Bir eğrinin S^2 deki Küresel Gösterge Eğrilerinin Temsili	sayfa 17
Şekil 3.4. Bir Future Pointing Timelike Eğrinin Teğetler Göstergesi	sayfa 18
Şekil 3.5. Bir Future Pointing Timelike Eğrinin Binormaller Göstergesi	sayfa 19
Şekil 4.1. (β_1, α_1) İnvolut-evolüt eğri çifti	sayfa 37
Şekil 4.2. (β_2, α_2) İnvolut-evolüt eğri çifti	sayfa 57

1. GİRİŞ

Bu tezin amacı E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında iyi bilinen involüt-evolüt eğri çiftleri ile ilgili kavramların IL^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıklarından hareket ederek yeni açılımlara ulaşmaktır.

M_1 ve M_2 aynı aralık üzerinde tanımlı iki regüler eğri olarak verilsin. Şayet $\beta(s) \in M_2$ noktası M_1 eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet doğrusu üzerinde yatıyorsa ayrıca M_1 ve M_2 nin $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarındaki teğetleri birbirine dikse M_2 eğrisine M_1 in **involütü** denir. Bu durumda M_1 eğrisine de M_2 nin **evolütü** denir. Kabul edelim ki M_1 birim hızlı bir eğri olsun. Eğer M_2 eğrisi M_1 in involütü ise

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)T(s) \quad c = \text{sabit} \quad T = \alpha'$$

dır. Bu çalışma boyunca M_1 eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$, M_2 eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere involüt-evolüt eğri çiftleri (M_2, M_1) ikilisi ile temsil edilecektir.

Millman ve Parker (1977) ve Hacısalihoğlu (1983), klasik diferensiyel geometride bu konu ile ilgili iyi bilinen temel teorem ve problemlere açıklık getirmişlerdir. Fenchel (1951)'e göre eğri üzerindeki bir $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken T, N, B vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux vektörü** adı verilir ve

$$W = \tau T + \kappa B = N \wedge N'$$

şeklinde ifade edilir. Burada κ ve τ , sırasıyla, eğrinin eğrilik ve burulmasıdır.

Öklidyen anlamda bir eğrinin küresel göstergeleri için yay uzunlukları, E^3 e göre geodezik eğrilikleri ve Gauss denkleminde faydalanarak S^2 birim küresine göre geodezik eğrilikleri hesaplanmıştır (Fenchel, 1951), (Çalışkan, 1980). Bu çalışmalar ışığında E^3 Öklid uzayında verilen bir eğrinin küresel göstergeleri için yapılan hesaplamalar bu eğrinin involütü içinde gerçekleştirilmiştir (Bilici, 1999). Bu kapsamda involüt-evolüt eğrilerinin Frenet çatıları arasındaki bağıntılar evolüt eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki açı θ olmak üzere farklı bir

yaklaşım ile elde edilmiş ve eğri çiftine ait bazı karakterizasyonlar bulunmuştur (Çalışkan ve Bilici, 2002). Eğrilerin Frenet çatıları arasındaki bu açısal ilişkiye bağlı olarak involüt eğrisinin küresel göstergeleri için yay uzunlukları, E^3 ve S^2 ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanmıştır (Bilici ve Çalışkan, 2001).

Lorentz uzayında ışıksız olmayan (nonnull) eğriler, zamansı (timelike) eğri ve uzaysı (spacelike) eğri olmak üzere ikiye ayrılırlar. Bu çalışmadaki hareket noktamız nonnull eğrilerin involütleridir. Bir timelike eğriyi ele aldığımızda involütü kesinlikle spacelike olmalıdır. Bir spacelike eğri aldığımızda ise involütü timelike veya spacelike olabilir. Bu durumda nonnull eğrilerin involütleri için üç durum söz konusu olacaktır. Dolayısıyla esas eğri ve involütünün karakterleri, sırasıyla, **timelike-spacelike**, **spacelike-timelike** ve **spacelike-spacelike** olmalıdır. Öncelikle elde ettiğimiz bu kombinasyonları I. tip, II. tip ve III. tip olarak adlandırıp, her bir durum için eğri çiftlerinin eğrilik ve burulmaları, W Darboux vektörünün timelike veya spacelike olması durumuna göre Frenet çatıları arasındaki bağıntılara yer verildi. İkinci olarak bunların küresel göstergelerinin yay uzunlukları, IL^3 3-boyutlu Lorentz uzayı, S_1^2 birim Lorentz küresi ve H_0^2 hiperbolik birim küresine göre geodezik eğrilikleri hesaplanarak bazı yeni açılımlara ulaşıldı.

2. GENEL BİLGİLER:

2.1. Lorentz Uzayı

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için;

$$(i) \quad g(u, v) = g(v, u),$$

$$(ii) \quad g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$$

$$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde **simetrik bilinear form** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2: V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna **pozitif tanımlı**,

(ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna **negatif tanımlı**,

(iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) \geq 0$ ise g simetrik bilinear formuna **yarı-pozitif tanımlı**,

(iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) \leq 0$ ise g simetrik bilinear formuna **yarı-negatif tanımlı**,

(v) $\forall v \in V$ için $g(v, w) = 0 \Rightarrow w = 0$ ise g simetrik bilinear formuna **non-dejeneredir** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3: V bir reel vektör uzayı

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü simetrik, bilinear ve non-dejenerer ise g ye V üzerinde bir **skalar çarpım**, bu durumda V vektör uzayına da **skalar çarpım uzayı** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4: V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$; V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

$$g_w : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilinear formunun **indeksi** denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

g skalar çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.5: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v=1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.6: $\mathbb{R}^n$; n -boyutlu, standart reel vektör uzayı olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow g(X, Y) = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

fonksiyonu bir skalar çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde **Lorentz metriği** denir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.7: $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte $\{\mathbb{R}^n, g\}$ ikilisine n -boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca **Lorentz uzayı** denir ve IL^n ile gösterilir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.8: IL^n , n -boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. Bir $X \in IL^n$ vektörü için;

- (i) $g(X, X) > 0$ veya $X = 0$ ise X e **uzaysı (spacelike)** vektör,
- (ii) $g(X, X) < 0$ ise X e **zamansı (timelike)** vektör,
- (iii) $g(X, X) = 0$ ise X e **ışıksı (lightlike veya null)** vektör denir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.9: IL^n , n -boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. Bir $X \in IL^n$ vektörünün normu

$$\|X\|_{IL} = \sqrt{|g(X, X)|}$$

ile tanımlanır (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.10: $e = (1, 0, \dots, 0, 0)$ olmak üzere $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in IL^n$ timelike vektörünün **future pointing (past pointing)** olması için gerekli ve yeterli koşul $g(X, e) < 0$ ($g(X, e) > 0$) olmasıdır (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.11: $X, Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere; $g(X, X) = 0$ ise, bu durumda X ve Y vektörlerine ortogonal vektörler denir ve $X \perp Y$ şeklinde gösterilir (O’neill, 1983).

Teorem 2.1.1: $X, Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere; $g(X, Y) = 0$ olsun. Eğer X timelike vektör ise, bu durumda Y spacelike vektördür (Ratcliffe, 1994).

Teorem 2.1.2: IL^n , n -boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X \in IL^n$ olsun. Bu durumda,

- (i) $\|X\|_{IL} > 0$,

(ii) $\|X\|_{\mathbb{L}} = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür.

(iii) X bir timelike vektör ise $\|X\|_{\mathbb{L}}^2 = -g(X, X)$ dir.

(iv) X bir spacelike vektör ise $\|X\|_{\mathbb{L}}^2 = g(X, X)$ dir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.12: $\mathbb{L}^n$, n -boyutlu bir Lorentz uzayı, $M \subset \mathbb{L}^n$ bir eğri olsun. M eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

(i) $g(T, T) > 0$ ise M eğrisine **uzaysı (spacelike) eğri**,

(ii) $g(T, T) < 0$ ise M eğrisine **zamansı (timelike) eğri**,

(iii) $g(T, T) = 0$ ise M eğrisine **ışık (lightlike veya null) eğri** denir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.13: $\mathbb{L}^n$, n -boyutlu bir Lorentz uzayı ve $M \subset \mathbb{L}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu,

$$s_{\alpha} = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

dir (O’neill, 1983).

Tanım 2.1.14: $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu bir Lorentz uzayı ve $M \subset \mathbb{L}^3$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere Frenet vektörleri ile türev vektörleri arasındaki ilişki ve Darboux vektörleri aşağıdaki gibidir:

(i) α , $\mathbb{L}^3$ Lorentz uzayında bir timelike eğri olsun.

Bu durumda α nın Frenet vektör alanları; T timelike vektör alanı, N ve B spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektörler alanları için

$$T \times N = -B, \quad N \times B = T, \quad B \times T = -N,$$

yazılabilir. Burada “ $\times$ ” Lorentz anlamındaki vektörel çarpımdır. Buna göre Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde (Woestijne, 1990). Bu durumda Darboux vektörü de

$$W = \tau T - \kappa B$$

dir (Uğurlu, 1997).

(ii) α , IL^3 Lorentz uzayında spacelike binormalli bir spacelike eğri olsun.

α eğrisinin vektör alanları; T spacelike vektör alanı, N timelike vektör alanı ve B de spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektörler alanları için

$$T \times N = -B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = N,$$

Buna göre Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklindedir (Woestijne, 1990). Bu durumda Darboux vektörü de

$$W = -\tau T + \kappa B$$

dir (Uğurlu, 1997).

(iii) α , IL^3 Lorentz uzayında timelike binormalli bir spacelike eğri olsun.

α eğrisinin vektör alanları; T ve N spacelike vektör alanları, B de timelike vektör alanıdır. Bu vektörler alanları için

$$T \times N = B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = -N,$$

Bu durumda Frenet denklemleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklindedir (Woestijne, 1990). Buna göre Darboux vektörü ise

$$W = \tau T - \kappa B$$

dir (Uğurlu, 1997).

Teorem 2.1.3:

i) $X, Y \in IL^n$ pozitif(negatif) timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$g(X, Y) \leq \|X\| \|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y nin lineer bağımlı olmasıdır. X ve Y pozitif(negatif) timelike vektörler ise

$$g(X, Y) = \|X\| \|Y\| \cosh \varphi, \quad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir.

ii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$|g(X, Y)| \leq \|X\| \|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Eğer X ve Y nin gerdiği düzlem spacelike ise

$$g(X, Y) = \|X\| \|Y\| \cos \varphi, \quad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ sayısı vardır. Bu açığa X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian spacelike açı** denir.

iii) $X, Y \in \mathbb{IL}^n$ spacelike vektörler olsunlar. Eğer X ve Y nin gerdiği düzlem timelike ise

$$|g(X, Y)| > \|X\| \|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda

$$|g(X, Y)| = \|X\| \|Y\| \cosh \varphi, \quad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu açığa X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir.

iv) $X \in \mathbb{IL}^n$ spacelike ve $Y \in \mathbb{IL}^n$ pozitif timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$|g(X, Y)| = \|X\| \|Y\| \sinh \varphi, \quad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.1.15: $\mathbb{IL}^n$, n -boyutlu bir Lorentz uzayı ve $M \subset \mathbb{IL}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. M eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve U da sabit bir birim vektör olmak üzere, $\forall s \in I$ için T ile U arasındaki açı sabit ise $M \subset \mathbb{IL}^n$ eğrisine bir **eğilim çizgisi**(helis) denir (Ekmekçi, 1991).

Tanım 2.1.16: $\mathbb{IL}^3$, 3-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. $M \subset \mathbb{IL}^3$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen, $\alpha(s) \in M$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla, κ ve τ olan bir eğri olsun.

M bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \forall s \in I$ için $\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$

dir (Ekmekçi, 1991).

Tanım 2.1.17: $\mathbb{IL}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör X ve Y olsun. $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$(x_3 y_2 - x_2 y_3, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

vektörüne X ve Y nin vektörel çarpımı(dış çarpımı) denir. $X \times Y$ veya $X \wedge Y$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \text{ ise} \\ 0, i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Buna göre

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = -e_1, \quad e_3 \times e_1 = -e_2$$

dir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Eğer saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilirse,

$$e_1 \times e_2 = -e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$$

olur. Bu durumda

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.4: IL^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında üç vektör $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda

- (i) $g(X \times Y, Z) = -\det(X, Y, Z)$,
- (ii) $(X \times Y) \times Z = -g(X, Z)Y + g(Y, Z)X$,
- (iii) $g(X \times Y, X) = 0$ ve $g(X \times Y, Y) = 0$,
- (iv) $g(X \times Y, X \times Y) = -g(X, X)g(Y, Y) + (g(X, Y))^2$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.1.5: IL^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör X ve Y olsun. Bu takdirde

- (i) X ve Y spacelike vektör ise $X \times Y$ bir timelike vektördür.
- (ii) X ve Y timelike vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.
- (iii) X spacelike ve Y timelike vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.
- (iv) X ve Y null vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.
- (v) X timelike ve Y null vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.
- (vi) X spacelike ve Y null vektör olmak üzere $g(X, Y) = 0$ ise $X \times Y$ bir null vektör, vektördür. Eğer $g(X, Y) \neq 0$ ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

2.2. Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde simetrik non-dejenere ve sabit indeksli bir

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonuna bir **metrik tensör** denir (O'Neill, 1983).

Diğer bir deyişle M manifoldunun her p noktasındaki $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerinde

$$g_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

metrik tensörünü alabiliriz.

Tanım 2.2.2: $\mathbb{R}^n$, n - boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^n$ ve

$$X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y_p = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in T_p(\mathbb{R}^n) \text{ için}$$

$$g(X_p, Y_p) = -\sum_{i=1}^v x_i y_i + \sum_{i=v+1}^n x_i y_i$$

eşitliğiyle verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı-Öklidyen uzay** denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3: $\mathbb{R}_v^n$ yarı- Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı- Öklidyen uzayına **Minkowski n-uzay** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4: M bir diferensiyellenebilir manifold g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olsun. (M, g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir ve kısaca M ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M bir yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6: M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7: M bir Lorentz manifoldu ve $\bar{M}$ de M nin bir Lorentz altmanifoldu olsun. M üzerindeki konneksiyon D olmak üzere,

$$\bar{D} : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

fonksiyonuna $\bar{M}$ Lorentz alt manifoldu üzerine **indirgenmiş konneksiyon** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8: $\bar{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun. Her $X, Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$\bar{D}_X Y = \tan D_X Y$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ fonksiyonu $\bar{M}$ üzerinde bir **Levi-Civita konneksiyonu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.9: $\bar{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} \Pi : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\rightarrow \chi(\bar{M})^\perp \\ (X, Y) &\rightarrow \Pi(X, Y) = \text{nor} D_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona $\bar{M}$ nin **ikinci temel form tensörü** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.10: n -boyutlu bir M Lorentz manifoldunun $(n-1)$ -boyutlu bir $\bar{M}$ Lorentz altmanifolduna M nin **Lorentz hiperyüzeyi** denir.

Tanım 2.2.11: M nin bir Lorentz hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $X, Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$g(S(X), Y) = g(\Pi(X, Y), N)$$

şeklinde tanımlı S ye $\bar{M}$ nin N den elde edilen **şekil operatörü** denir.

Diğer bir ifade ile, S şekil operatörü $\bar{M}$ nin her p noktasında

$$S_p : T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(\bar{M})$$

bir lineer dönüşümdür (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.1: M nin bir Lorentz hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve S , $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $X \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(X) = -D_X N$$

dir ve ayrıca S şekil operatörü self-adjointdir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.12: M bir Lorentz manifoldu, $\bar{M}$ de M nin Lorentz hiperyüzeyi olsun. $\bar{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S , M üzerindeki konneksiyon D ve $\bar{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{D}$ olmak üzere, her $X, Y \in \chi(\bar{M})$ için **Gauss Denklemi:**

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \varepsilon g(S(X), Y) N$$

şeklindedir. Burada $\varepsilon = g(N, N)$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13: M nin bir Lorentz hiperyüzeyi $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S ve $\alpha : I \rightarrow \bar{M}$ eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere

$$g(S(T), T) = 0$$

ise α eğrisine **asimptotik çizgi** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.14: M nin bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. M üzerindeki konneksiyon D ve $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\overline{D}$ olsun. $\alpha:I \rightarrow \overline{M}$ eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere

$$\overline{D}_T T = 0$$

ise α eğrisine $\overline{M}$ üzerinde **geodezik eğri**,

$$D_T T = 0$$

ise α eğrisine M üzerinde **geodezik eğri** denir.

Tanım 2.2.15: $\mathbb{R}_1^n$, Minkowski n -uzayında

$$S_1^{n-1}(r) = \left\{ X \in \mathbb{R}_1^n \mid g(X, X) = r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit} \right\}$$

ile tanımlanan hiperkuadratiğe **(n-1)-boyutlu Lorentz hiperküresi** veya kısaca **(n-1) Lorentz hiperküresi** denir.

$n=3$ için

$$S_1^2(r) = \left\{ X \in \mathbb{R}_1^3 \mid g(X, X) = r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit} \right\}$$

nokta cümlesine **r-yarıçaplı Lorentz küresi** denir.

$$H_0^{n-1}(r) = \left\{ X \in \mathbb{R}_1^n \mid g(X, X) = -r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit} \right\}$$

ile tanımlanan hiperkuadratiğe **(n-1)-boyutlu hiperbolik uzay** denir.

$n=3$ için

$$H_0^2(r) = \left\{ X \in \mathbb{R}_1^3 \mid g(X, X) = -r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit} \right\}$$

nokta cümlesine de **r-yarıçaplı hiperbolik küre** denir.

Tanım 2.2.16: $M \subset \mathbb{IL}^3$ bir birim hızlı eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki birim teğet vektörü T olmak üzere

$$k_g = \|D_T T\| \quad (2.4)$$

ifadesine, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen $\mathbb{IL}^3$ deki **geodezik eğriliği**, $\overline{D}$,

S_1^2 in ve $\overline{D}$, H_0^2 in Gauss anlamında kovaryant türev operatörleri olmak üzere,

$$\gamma_g = \|\overline{D}_T T\| \quad \left(\gamma_g = \|\overline{D}_T T\| \right)$$

(2.5)

ifadesine de M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen S_1^2 (veya H_0^2) deki **geodezik eğriliği** denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. E^3 Öklid Uzayında İnvolut-Evolüt Eğri Çifti

Tanım 3.1.1: $M_1, M_2 \subset E^3$ iki eğri olsun. M_1 ve M_2 , sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M_1 ve M_2 nin Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere

$$\langle T, T^* \rangle = 0$$

ise M_2 ye M_1 in **involutü**, M_1 e de M_2 nin **evolütü** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

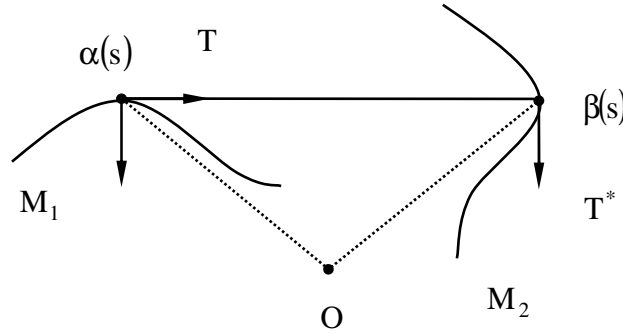
Teorem 3.1.1: $M_1, M_2 \subset E^3$ eğrileri (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin.

Eğer M_2 , M_1 in involütü ise

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|, \forall s \in I, c = \text{sbt.}$$

dır (Hacısalıhoğlu, 1983).

İspat:



Şekil 3.1

İnvolut-evolüt eğri çifti

Şekil 3.1 yardımı ile M_2 nin denklemi M_1 e bağlı olarak yazılabilir;

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s), \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

M_1 in parametresi s ve M_2 nin parametresi s^* olmak üzere (3.1) bağıntısının s ye göre türevi alınır,

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} T + \lambda \kappa N \quad (3.2)$$

ve

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = T^* \frac{ds^*}{ds}$$

olur. Bu iki bağıntıdan

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')T + \lambda \kappa N \quad (3.3)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{ds^*}{ds} < T^*, T > = 1 + \lambda'$$

bulunur. M_2 nin M_1 in involütü olduğu gözönüne alınırsa $< T^*, T > = 0$ olduğundan

$$1 + \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = c - s, c = \text{sbt.}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\beta(s) - \alpha(s)\|$$

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\lambda T\|$$

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|, c \in \mathbb{R}$$

dir.

Teorem 3.1.2: $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğrileri (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 nin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. M_1 ve M_2 nin eğrilik ve burulmaları κ, τ ve κ^*, τ^* ise

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2 (c-s)^2}, \quad \tau^* = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{(c-s) \kappa (\kappa^2 + \tau^2)}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 3.1.3: $M_1, M_2 \subset E^3$ involüt-evolüt eğri çifti, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki açı θ olmak üzere $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır (Bilici, 1999).

3.2. E^3 Öklid Uzayında Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri ve Pol Eğrileri

Tanım 3.2.1: M , E^3 Öklid uzayında bir eğri olsun. M eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. T, N, B Frenet vektörlerinin başlangıç noktaları eğriyi çizerken uç noktalarının cümlesinin S^2 birim küresi üzerinde meydana getirdiği eğrilere, sırasıyla, M eğrisinin **teğetler göstergesi** (birinci küresel göstergesi), **asli normaller göstergesi** (ikinci küresel göstergesi), **binormaller göstergesi** (üçüncü küresel göstergesi) denir ve $(T), (N), (B)$ ile gösterilir (Çalışkan, 1980), (Hacısalıhoğlu, 1983).

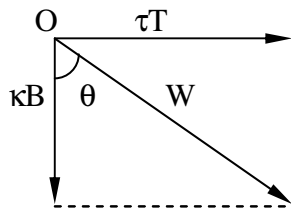
Tanım 3.2.2: Bir M eğrisinin üzerindeki bir $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken T, N, B vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux eksen** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux vektörü** adı verilir ve

$$W = \tau T + \kappa B = N \wedge N'$$

şeklinde ifade edilir. B ile W arasındaki açı θ ile gösterilirse,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cos \theta \\ \tau = \|W\| \sin \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

olacağı açıktır. (Şekil 3.2)



Şekil 3.2
Darboux vektörü

W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ise

$$\|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olmak üzere

$$C = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B$$

olur. Bu son denklem (3.4) denklemi ile birlikte kullanılırsa,

$$C = \sin \theta T + \cos \theta B \quad (3.5)$$

olduğu görülür (Fenchel, 1951).

Tanım 3.2.3: O merkezli sabit bir küre S^2 ve hareketli bir küre S^{*2} olsun. $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının hareketinden bahsedecek olduğumuzdan $\{O; T, N, B\}$ sistemi, S^{*2} küresini temsil etsin. S^2 sabit küresini de $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal koordinat sistemi temsil etsin. Bu durumda, S^{*2} nin S^2 ye göre bir parametrelili küresel hareketi, M eğrisinin verilmesi ile belli olur. Bu hareket; A has ortogonal bir matris olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile tanımlanır veya

$$X' = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad X = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

alınırsa,

$$X' = AX \Rightarrow X = A^T X'$$

olur. Burada, 3×3 tipindeki A has ortogonal matrisinin elemanları t zaman parametresinin sürekli ve diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Şu halde S^{*2} nin S^2 ye göre 1-parametrelili küresel hareketi A = A(t) matrisi ile belirlenir ve **1- parametrelili küresel hareket** adını alır ve kısaca S^{*2}/S^2 ile gösterilir.

Burada t zaman parametresi M eğrisinin s yay parametresinin bir fonksiyonudur.

Tanım 3.2.4: S^{*2}/S^2 hareketinin her t anında, S^{*2} de sabit bir P^* noktası, S^2 de sabit bir P noktası vardır, öyle ki, bu noktalara, sırasıyla, **hareketli pol** ve **sabit pol noktaları** denir.

Tanım 3.2.5: $X' = AX$ dönüşümündeki A matrisi t zaman parametresinin $A(t + 2\pi) = A(t)$ şeklinde bir periyodik fonksiyonu ise S^{*2}/S^2 hareketine **1-parametrelili kapalı küresel hareket** adı verilir.

Tanım 3.2.6: M eğrisinin çizilebilmesi için gerekli olan S^{*2}/S^2 hareketi boyunca, P^* ve P noktalarının ait oldukları küreler üzerindeki geometrik yerlerine, sırasıyla,

hareketli pol eğrisi ve **sabit pol eğrisi** adları verilir. Bu eğriler (P^*) ve (P) ile gösterilir. Hareket kapalı ise (P^*) ve (P) eğrileri de kapalı olurlar.

(P^*) ve (P) eğrileri arasında şu ilgi vardır:

- i) (P^*) ve (P) eğrileri her t anında birbirlerine teğettirler.
- ii) (P^*) ve (P) eğrilerinin yay uzunlukları birbirine eşittir.

Bu iki bağıntı, (P^*) hareketli pol eğrisi (P) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır şeklinde ifade edilebilir.

(P) sabit pol eğrisi $C=C(s)$ ile verilen (C) eğrisi olmak üzere, (P^*) hareketli pol eğrisi T ve B vektörleri ile belirtilen büyük dairedir.

Sonuç 3.2.1: $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının hareketi, (P^*) büyük dairesinin C sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasından ibarettir.

Tanım 3.2.7: Bir eğrinin teğetlerine dik olan bir yörüngeye o eğrinin bir **involütü** denir.

Buna göre şu teorem verilebilir:

Teorem 3.2.1: E^3 Öklid uzayında bir M eğrisinin (T) teğetler göstergesi ve (B) binormaller göstergesi, (C) sabit pol eğrisinin iki tane küresel involütüdür.

İspat: (C) sabit pol eğrisi W vektörü yönündeki birim vektör ile verildiğinden (C) nin teğeti için (3.5) denkleminde

$$\frac{dC}{ds} = C' = (\sin \theta)' T + (\cos \theta)' B + \sin \theta \kappa N - \cos \theta \tau N$$

yazılabilir. (3.4) denklemi ve bu son denklemden

$$\frac{dC}{ds} = C' = (\sin \theta)' T + (\cos \theta)' B$$

bulunur. Diğer yandan (T) ve (B) göstergelerinin teğetleri, sırasıyla,

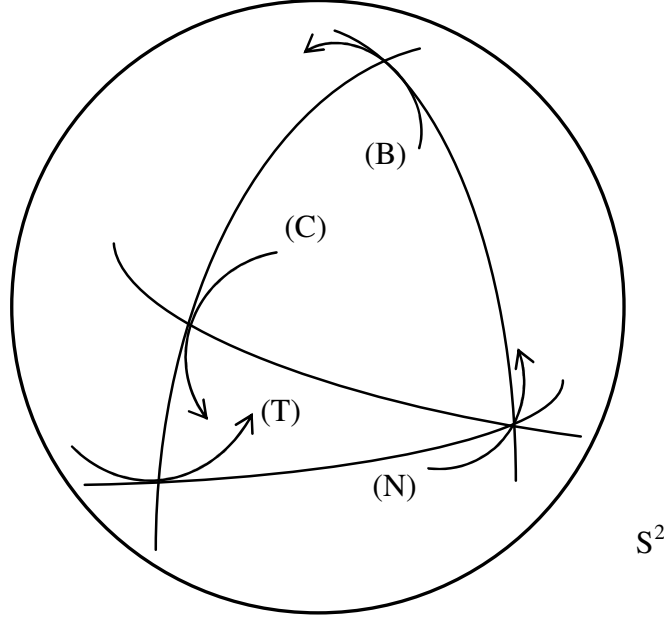
$$\frac{dT}{ds} = T' = \kappa N \quad \text{ve} \quad \frac{dB}{ds} = B' = -\tau N$$

olduğundan,

$$\left\langle \frac{dC}{ds}, \frac{dT}{ds} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle \frac{dC}{ds}, \frac{dB}{ds} \right\rangle = 0$$

olur. Böylece (T) ve (B) ; (C) nin birer küresel involütüdür.

E^3 Öklid uzayında bir M eğrisinin (T) teğetler göstergesini, (N) asli normaller göstergesini, (B) binormaller göstergesini ve (C) sabit pol eğrisini bir küre yüzeyi üzerinde gösterebiliriz (Çalışkan, 1980), (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 3.3

Bir eğrinin S^2 deki Küresel Gösterge Eğrilerinin Temsili

E^3 Öklid uzayında bir M eğrisinin (T), (N), (B) ve (C) küresel göstergelerinin yay uzunlukları, E^3 ve S^2 deki geodezik eğriliklerinin ifadeleri aşağıda verilmiştir.

M eğrisinin küresel göstergelerinin E^3 e göre yay uzunlukları:

$$s_T = \int_0^s \kappa ds, \quad s_N = \int_0^s \|W\| ds, \quad s_B = \int_0^s \tau ds, \quad s_C = \int_0^s \theta' ds = \theta(s) - \theta(0),$$

M eğrisinin küresel göstergelerinin E^3 e göre geodezik eğrilikleri:

$$\kappa_T = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \kappa_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}, \quad \kappa_B = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \kappa_C = \sqrt{1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2},$$

ve M eğrisinin küresel göstergelerinin S^2 ye göre geodezik eğrilikleri:

$$\gamma_T = \tan \theta, \quad \gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|}, \quad \gamma_B = \cot \theta, \quad \gamma_C = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

şeklindedir (Fenchel, 1951), (Çalışkan, 1980).

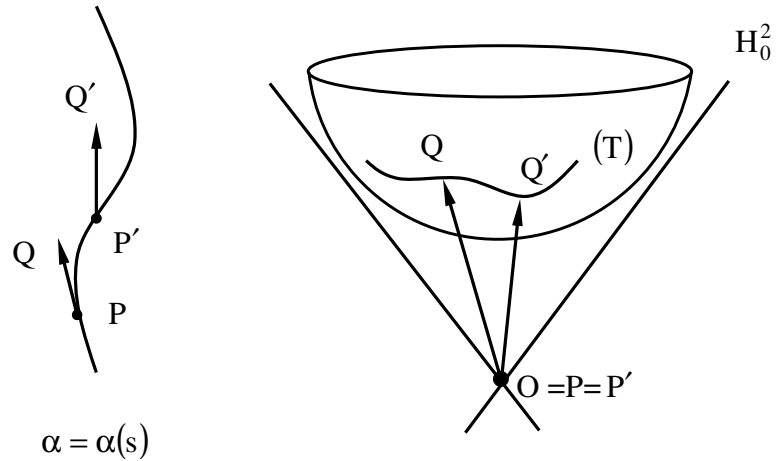
3.3. IL^3 Lorentz Uzayında Bir Nonnull Eğrinin Küresel Göstergeleri ve Yay Uzunlukları:

E^3 Öklid uzayında bir eğrinin Frenet 3-ayaklısının birim vektörleri için küresel göstergeler S^2 birim küresi üzerinde oluşurlar.

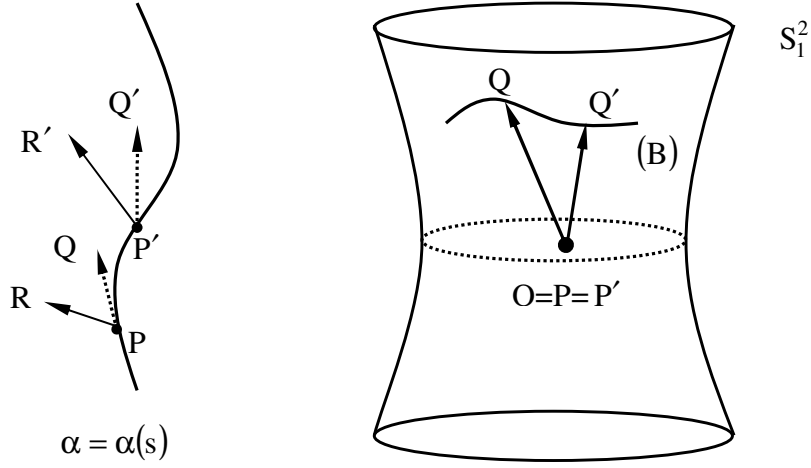
IL^3 Lorentz uzayında bir spacelike veya timelike eğrinin küresel göstereleri ise S_1^2 birim Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerinde bulunurlar.

Tanım 3.3.1: M eğrisi IL^3 Lorentz uzayında bir nonnull eğri olsun. M eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. T, N, B Frenet vektörlerinin başlangıç noktaları eğriyi çizirken uç noktalarının cümlesinin S_1^2 birim Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerinde meydana getirdiği eğrilere, sırasıyla, M eğrisinin **teğetler göstergesi** (birinci küresel göstergesi), **asli normaller göstergesi** (ikinci küresel göstergesi), **binormaller göstergesi** (üçüncü küresel göstergesi) denir ve sırasıyla $(T), (N), (B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2: IL^3 Lorentz uzayında bir M eğrisinin teğetleri future pointing ise M eğrisine **future pointing timelike eğri**, past pointing ise **past pointing timelike eğri** denir.



Şekil 3.4
Bir Future Pointing Timelike Eğrinin Teğetler Göstergesi



Şekil 3.5

Bir Future Pointing Timelike Eğrinin Binormaller Göstergesi

Tanım 3.3.3: S_1^2 ve S_1^{*2} , sırasıyla, O merkezli sabit ve hareketli Lorentz küreleri olsunlar. $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının hareketinden bahsedecek olduğumuzdan $\{O; T, N, B\}$ sistemi S_1^{*2} küresini temsil etsin. S_1^2 sabit küresini de $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal koordinat sistemi olarak alalım. Bu durumda, S_1^{*2} in S_1^2 e göre 1-parametrelili hareketi, M eğrisinin verilmesi ile belli olur. Bu hareket; A Lorentzian anlamda has ortogonal bir matris olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile tanımlanır veya

$$X' = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad X = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

dersek,

$$X' = AX \Rightarrow X = A^T X'$$

bulunur. Burada, 3×3 tipindeki A matrisinin elemanları t zaman parametresinin sürekli ve diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Şu halde S_1^{*2} nin S_1^2 e göre 1-parametrelili küresel hareketi $A = A(t)$ matrisi ile belirlenir ve **1- parametrelili Lorentzian küresel hareket** adını alır ve kısaca S_1^{*2}/S_1^2 ile gösterilir.

Burada t zaman parametresi M eğrisinin s yay parametresinin bir fonksiyonudur.

Tanım 3.3.4: S_1^{*2}/S_1^2 hareketinin her t anında, S_1^{*2} de sabit bir P^* , S_1^2 de sabit bir P noktası vardır, öyle ki, bu noktalara, sırasıyla, **hareketli pol** ve **sabit pol noktaları** denir.

Tanım 3.3.5: $X' = AX$ dönüşümündeki A matrisi t zaman parametresinin $A(t + 2\pi) = A(t)$ şeklinde bir periyodik fonksiyonu ise S_1^{*2}/S_1^2 hareketine **1-parametrelili kapalı Lorentzian küresel hareket** adı verilir.

Tanım 3.3.6: M eğrisinin çizilebilmesi için gerekli olan S_1^{*2}/S_1^2 hareketi boyunca, P^* ve P noktalarının ait oldukları küreler üzerindeki geometrik yerlerine, sırasıyla, **hareketli pol eğrisi** ve **sabit pol eğrisi** adları verilir. Bu eğriler (P^*) ve (P) ile gösterilir. Hareket kapalı ise (P^*) ve (P) eğrileri de kapalı olurlar.

(P^*) ve (P) eğrileri arasında şu ilgi vardır:

- i) (P^*) ve (P) eğrileri her t anında birbirlerine teğettirler.
- ii) (P^*) ve (P) eğrilerinin yay uzunlukları birbirine eşittir.

Bu iki bağıntı, (P^*) hareketli pol eğrisi (P) sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır şeklinde ifade edilebilir.

(P) sabit pol eğrisi $C=C(s)$ ile verilen (C) eğrisi olmak üzere, (P^*) hareketli pol eğrisi T ve B vektörleri ile belirtilen Lorentz birim çemberidir.

Sonuç 3.3.1: $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının hareketi, (P^*) Lorentz çemberinin C sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasından ibarettir.

Tanım 3.3.7 (Timelike ve Spacelike Eğrilerin Sabit Pol Eğrileri):

1. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı bir timelike eğri olsun. Eğrinin her noktasında bir $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı vardır. M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki eğriliği κ , burulması da τ olsun. Buna göre T timelike vektör alanı, N ve B spacelike vektör alanlarıdır. Bu durumda M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Darboux vektörü,

$$W = \tau T - \kappa B, \quad \|W\|_{\mathbb{L}} = \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|} \quad (3.6)$$

dir. Bundan sonra kısalığın hatırı için $(\| \cdot \|_{\mathbb{L}} = \| \cdot \|)$ gösterimi kullanılacaktır.

a) Eğer W spacelike ise ($|\kappa| > |\tau|$ ise) $-B$ ile W arasındaki Lorentzian timelike açı θ olmak üzere Teorem 2.1.3 den

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \theta \\ \tau = \|W\| \sinh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = g(W, W) = \kappa^2 - \tau^2 \quad (3.7)$$

ve W yönündeki birim vektör

$$C = \sinh \theta T - \cosh \theta B \quad (3.8)$$

şeklindedir.

b) Eğer W timelike ise ($|\kappa| < |\tau|$ ise)

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh \theta \\ \tau = \|W\| \cosh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = -g(W, W) = -(\kappa^2 - \tau^2) \quad (3.9)$$

ve W yönündeki birim vektör

$$C = \cosh \theta T - \sinh \theta B \quad (3.10)$$

olur.

2. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı spacelike binormalli bir spacelike eğri olsun. M eğrisinin vektör alanları; T spacelike vektör alanı, N timelike vektör alanı ve B de spacelike vektör alanı olsunlar. Bu durumda M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Darboux vektörü

$$W = -\tau T + \kappa B, \quad \|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad (3.11)$$

dir. Burada $g(W, W) = \tau^2 + \kappa^2 > 0$ olduğundan W bir spacelike vektördür. B ile W arasındaki Lorentzian spacelike açı θ olmak üzere

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cos \theta \\ \tau = \|W\| \sin \theta \end{cases} \quad (3.12)$$

olur. W vektörü yönündeki birim vektör ise

$$C = -\sin \theta T + \cos \theta B \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir.

3. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı timelike binormalli bir spacelike eğri olsun. M eğrisinin vektör alanları; T ve N spacelike vektör alanları, B de timelike vektör alanı olsunlar. Bu durumda M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Darboux vektörü

$$W = \tau T - \kappa B, \quad \|W\| = \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|} \quad (3.14)$$

dir.

a) Eğer W spacelike ise ($|\tau| > |\kappa|$ ise)

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh \theta \\ \tau = \|W\| \cosh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = g(W, W) = \tau^2 - \kappa^2 \quad (3.15)$$

ve W yönündeki birim vektör

$$C = \cosh \theta T - \sinh \theta B \quad (3.16)$$

şeklindedir.

b) Eğer W timelike ise ($|\tau| < |\kappa|$ ise)

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \theta \\ \tau = \|W\| \sinh \theta \end{cases}, \quad \|W\|^2 = -g(W, W) = -(\tau^2 - \kappa^2) \quad (3.17)$$

ve W yönündeki birim vektör

$$C = \sinh \theta T - \cosh \theta B \quad (3.18)$$

olur.

IL^3 Lorentz uzayında bir timelike veya spacelike eğrinin involütü için aşağıdaki tanımı ifade edebiliriz.

Tanım 3.3.8: IL^3 Lorentz uzayında bir timelike eğrinin teğetlerine dik olan spacelike veya timelike binormalli bir spacelike eğriye, spacelike binormalli bir spacelike eğrinin teğetlerine dik olan bir timelike eğriye ve son olarak timelike binormalli bir spacelike eğrinin teğetlerine dik olan spacelike veya timelike binormalli bir spacelike eğriye, her bir durum için verilen eğrinin bir **involütü** denir.

Buna göre aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz:

Teorem 3.3.1: IL^3 Lorentz uzayında bir timelike M eğrisinin (T) spacelike teğetler göstergesi ve (B) spacelike binormaller göstergesi, (C) sabit timelike (spacelike) pol eğrisinin iki tane küresel involütüdür.

İspat: (C) sabit timelike pol eğrisi W Darboux vektörü yönündeki birim vektör ile verildiğinden (3.8) denkleminde (C) nin teğeti

$$\frac{dC}{ds} = C' = (\sinh \theta)' T - (\cosh \theta)' B + \sinh \theta \kappa N - \cosh \theta \tau N$$

yazılabilir. (3.7) denkleminde faydalanarak

$$\frac{dC}{ds} = C' = (\sinh \theta)' T - (\cosh \theta)' B$$

bulunur. Diğer taraftan (T) ve (B) göstergelerinin teğetleri, sırasıyla,

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N$$

ve

$$\frac{dB}{ds} = \tau N$$

olduğundan,

$$g\left(\frac{dC}{ds}, \frac{dT}{ds}\right) = 0 \text{ ve } g\left(\frac{dC}{ds}, \frac{dB}{ds}\right) = 0$$

olur. Böylece (T) ve (B); (C) nin birer küresel involütüdür.

(C) sabit timelike pol eğrisi için benzer ispat (3.9) ve (3.10) dan yapılabilir.

Teorem 3.3.2: IL^3 Lorentz uzayında spacelike binormalı bir spacelike M eğrisinin (T) timelike teğetler göstergesi ve (B) timelike binormaller göstergesi, (C) sabit spacelike pol eğrisinin iki tane küresel involütüdür.

Teorem 3.3.3: IL^3 Lorentz uzayında timelike binormalı bir spacelike M eğrisinin (T) spacelike teğetler göstergesi ve (B) spacelike binormaller göstergesi, (C) sabit timelike (spacelike) pol eğrisinin iki tane küresel involütüdür.

Şimdi (T), (N), (B) ve (C) eğrilerinin yay uzunluklarını hesaplayalım.

M_1 eğrisi IL^3 de birim hızlı bir timelike eğri olsun. Bu durumda,

(T) için yay uzunluğu s_T ile gösterilirse, Tanım 2.1.13 ve (2.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$s_T = \int_0^s \left\| \frac{dT}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|\kappa N\| ds ,$$

$$s_T = \int_0^s |\kappa| ds \tag{3.19}$$

bulunur.

(N) için yay uzunluğu s_N ile gösterilirse,

$$s_N = \int_0^s \left\| \frac{dN}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|\kappa T - \tau B\| ds ,$$

$$s_N = \int_0^s \sqrt{-\kappa^2 + \tau^2} ds ,$$

$$s_N = \int_0^s \|W\| ds , \quad (3.20)$$

(B) için yay uzunluğu s_B ile gösterilirse,

$$s_B = \int_0^s \left\| \frac{dB}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|\tau N\| ds ,$$

$$s_B = \int_0^s |\tau| ds , \quad (3.21)$$

(C) için yay uzunluğu s_C ile gösterilirse,

$$s_C = \int_0^s \left\| \frac{dC}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|\theta' \cosh \theta - \theta' \sinh \theta B\| ds ,$$

$$s_C = \int_0^s \theta' ds = \theta(s) - \theta(0) \quad (3.22)$$

olarak bulunur. M_1 eğrisi IL^3 de birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda (2.2) ve (2.3) Frenet denklemleri ve Tanım 2.1.13 kullanılarak yay uzunlukları için yapılan hesaplamalar aynı sonuçları vermektedir.

3.4. Bir Nonnull Eğrinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri:

(T) için IL^3 e göre geodezik eğrilik k_T ile gösterilirse , (T) nin parametresi s_T ve birim teğet vektörü t_T olmak üzere,

$$k_T = \|D_{t_T} t_T\| \quad (3.23)$$

dir.

I. durum: α eğrisi birim hızlı bir timelike eğri olsun. α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü T olmak üzere, (T) nin denklemi

$$\alpha_t = T$$

dir. Bu son denklemde her iki tarafın s_T parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\alpha_t}{ds_T} = \frac{d\alpha_t}{ds} \frac{ds}{ds_T} ,$$

$$t_T = \kappa N \frac{ds}{ds_T}$$

elde edilir. Her iki tarafın normu alınarak,

$$1 = \kappa \frac{ds}{ds_T}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa}, \quad (3.24)$$

$$t_T = N$$

elde edilir. Buradan da

$$D_{t_T} t_T = \frac{dt_T}{ds_T} = \frac{dt_T}{ds} \frac{ds}{ds_T},$$

$$D_{t_T} t_T = \frac{dN}{ds} \frac{ds}{ds_T}$$

dir. (2.1) ve (3.24) denklemlerinden

$$D_{t_T} t_T = T - \frac{\tau}{\kappa} B \quad (3.25)$$

olur. (3.23) denklemi göz önüne alınarak,

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2} \right|} \quad (3.26)$$

olarak bulunur. Eğer W spacelike ise (3.7) denkleminde

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \tanh^2 \theta \right|} = \frac{1}{\cosh \theta}$$

dır. Eğer W timelike ise (3.9) denkleminde

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \coth^2 \theta \right|} = \frac{1}{\sinh \theta}$$

olur.

(N) için IL^3 e göre geodezik eğrilik k_N ile gösterilirse, (N) nin parametresi s_N ve birim teğet vektörü t_N olmak üzere,

$$k_N = \|D_{t_N} t_N\| \quad (3.27)$$

dir. (N) nin denklemi

$$\alpha_N = N$$

dir. Buradan

$$t_N = (\kappa T - \tau B) \frac{ds}{ds_N}$$

bulunur. Her iki tarafın normu alınır

$$\frac{ds}{ds_N} = \frac{1}{\|W\|}, \quad (3.28)$$

$$t_N = \frac{\kappa}{\|W\|} T - \frac{\tau}{\|W\|} B$$

olur. Eğer W spacelike ise (3.7) denkleminde

$$t_N = \cosh \theta T - \sinh \theta B, \quad (3.29)$$

$$D_{t_N} t_N = (\theta' \sinh \theta T + \|W\| N - \theta' \cosh \theta B) \frac{1}{\|W\|} \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.27) denkleminde,

$$k_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\theta'^2 + \|W\|^2|} \quad (3.31)$$

olduğu görülür. Eğer W timelike ise (3.9) denkleminde

$$k_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|-\theta'^2 + \|W\|^2|}.$$

(B) için IL^3 e göre geodezik eğrilik k_B ile gösterilirse, (B) nin parametresi s_B ve birim teğet vektörü t_B olmak üzere,

$$k_B = \|D_{t_B} t_B\| \quad (3.32)$$

dir. (B) nin denklemi

$$\alpha_B = B$$

dir. Bu son denklemde her iki tarafın s_B parametresine göre türevi alınır,

$$t_B = \tau N \frac{ds}{ds_B}$$

olur. Buradan norma geçilirse,

$$\frac{ds}{ds_B} = \frac{1}{|\tau|}, \quad (3.33)$$

$$t_B = \mp N$$

olur. Pozitif yönlendirme seçilerek,

$$t_B = N \quad (3.34)$$

alınabilir. Buradan

$$D_{t_B} t_B = (\kappa T - \tau B) \frac{1}{\tau} = \frac{\kappa}{\tau} T - B \quad (3.35)$$

dir. (3.32) ve (3.7) denklemlerinden W spacelike ise

$$k_B = \sqrt{\left|1 - \frac{\kappa^2}{\tau^2}\right|} = \sqrt{|1 - \cot^2 \theta|} = \sqrt{\left|\frac{-1}{\sinh^2 \theta}\right|},$$

$$k_B = \frac{1}{\sinh \theta} \quad (3.36)$$

bulunur. Eğer W timelike ise (3.9) denkleminde

$$k_B = \frac{1}{\cosh \theta}$$

olur.

(C) için $\mathbb{IL}^3$ e göre geodezik eğrilik k_C ile gösterilirse, (C) nin parametresi s_C ve birim teğet vektörü t_C olmak üzere, W spacelike iken, $C = \sinh \theta T - \cosh \theta B$ olduğu düşünülürse,

$$t_C = \cosh \theta T - \sinh \theta B,$$

$$D_{t_C} t_C = \sinh \theta T + \frac{\|W\|}{\theta'} N - \cosh \theta B$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$k_C = \|D_{t_C} t_C\| = \sqrt{\left|1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

olur. Eğer W timelike ise $C = \cosh \theta T - \sinh \theta B$ dir. Buradan

$$k_C = \|D_{t_C} t_C\| = \sqrt{\left|-1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

olduğu görülür.

II. durum: α eğrisi birim hızlı spacelike binormalli bir spacelike eğri olsun. Bu durumda T ve B spacelike vektör alanları, N de timelike vektör alanıdır. O halde (T), (N), (B) ve (C) eğrilerinin $\mathbb{IL}^3$ e göre geodezik eğrilikleri (2.4) denklemi kullanılarak,

$$k_T = \|D_{t_T} t_T\| = \frac{1}{\cos \theta},$$

$$k_N = \|D_{t_N} t_N\| = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\theta'^2 - \|W\|^2|},$$

$$k_B = \|D_{t_B} t_B\| = \frac{1}{\sin \theta},$$

$$k_C = \|D_{t_C} t_C\| = \sqrt{\left|1 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

şeklinde bulunur.

III. durum α eğrisi birim hızlı timelike binormalı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda T ve N spacelike vektör alanları, B de timelike vektör alanıdır. O halde (2.4) denklemi dikkate alınarak (T), (N), (B) ve (C) eğrilerinin IL^3 e göre geodezik eğrilikleri için W vektörünün karakterine göre iki durum söz konusu olacaktır.

Eğer W spacelike ise;

$$k_T = \|D_{t_T} t_T\| = \frac{1}{\sinh \theta},$$

$$k_N = \|D_{t_N} t_N\| = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\theta'^2 + \|W\|^2|},$$

$$k_B = \|D_{t_B} t_B\| = \frac{1}{\cosh \theta},$$

$$k_C = \|D_{t_C} t_C\| = \sqrt{\left|1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

dir.

Eğer W timelike ise;

$$k_T = \|D_{t_T} t_T\| = \frac{1}{\cosh \theta},$$

$$k_N = \|D_{t_N} t_N\| = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\theta'^2 - \|W\|^2|},$$

$$k_B = \|D_{t_B} t_B\| = \frac{1}{\sinh \theta},$$

$$k_C = \|D_{t_C} t_C\| = \sqrt{\left|-1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

olduğu görülür.

3.5. Nonnull Bir Eğrinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 a göre

Geodezik Eğrilikleri:

S_1^2 (Lorentz küresi) veya H_0^2 ye göre $(T), (N), (B)$ eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için IL^3 deki konneksiyon D olduğuna göre S_1^2 deki konneksiyon $\bar{D}$ ve H_0^2 daki konneksiyon $\bar{\bar{D}}$ ise, S_1^2 ve H_0^2 ın birim normal vektör alanı ξ olmak üzere

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \varepsilon g(S(X), Y)\xi, \quad \varepsilon = g(\xi, \xi)$$

$$D_X Y = \bar{\bar{D}}_X Y + \varepsilon g(S(X), Y)\xi, \quad \varepsilon = g(\xi, \xi)$$

Gauss denklemlerinden yararlanacağız. Burada S , S_1^2 ve H_0^2 ın in şekil operatörü olup

$$S = I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

I. durum: α eğrisi birim hızlı bir timelike eğri olsun.

(T) teğetler göstergesi için H_0^2 daki geodezik eğriliği γ_T ile gösterilirse,

$$\gamma_T = \|\bar{\bar{D}}_{t_T} t_T\| \quad (3.37)$$

dir. Gauss denkleminde

$$D_{t_T} t_T = \bar{\bar{D}}_{t_T} t_T + \varepsilon g(S(t_T), t_T)\xi, \quad \xi = T$$

dir. Burada

$$\varepsilon = g(T, T) = -1, \quad S(t_T) = -t_T \text{ ve } g(S(t_T), t_T) = -1$$

dir. Böylece

$$\bar{\bar{D}}_{t_T} t_T = D_{t_T} t_T - T$$

yazılabilir. (3.25) denkleminde ile bu son eşitlik birleştirilirse,

$$\bar{\bar{D}}_{t_T} t_T = T - \frac{\tau}{\kappa} B - T,$$

$$\bar{\bar{D}}_{t_T} t_T = -\frac{\tau}{\kappa} B$$

bulunur. (3.37) denkleminde ve W spacelike ise (3.7) denkleminde

$$\gamma_T = \tanh \theta \quad (3.38)$$

dir. Eğer W timelike ise (3.9) denkleminde

$$\gamma_T = \coth \theta$$

olur.

(N) asli normaller göstergesi için S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_N ile gösterilirse,

$$\gamma_N = \|\bar{D}_{t_N} t_N\| \quad (3.39)$$

dir. Gauss denkleminde

$$D_{t_N} t_N = \bar{D}_{t_N} t_N + \varepsilon g(S(t_N), t_N) \xi, \quad \xi = N$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(N, N) = +1, \quad S(t_N) = -t_N \text{ ve } g(S(t_N), t_N) = +1$$

dir. Buradan

$$\bar{D}_{t_N} t_N = D_{t_N} t_N - N$$

olur. (3.30) ifadesi bu son eşitlikte kullanılırsa,

$$\bar{D}_{t_N} t_N = (\theta' \sinh \theta T + \|W\| N - \theta' \cosh \theta B) \frac{1}{\|W\|} - N,$$

$$\bar{D}_{t_N} t_N = \frac{\theta'}{\|W\|} (\sinh \theta T - \cosh \theta B)$$

elde edilir. (3.39) denkleminde W spacelike ise

$$\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|} \quad (3.40)$$

dir. Eğer W timelike ise

$$\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|}$$

olarak bulunur.

(B) asli normaller göstergesi için S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_B ile gösterilirse,

$$\gamma_B = \|\bar{D}_{t_B} t_B\| \quad (3.41)$$

dir. Gauss denkleminde

$$D_{t_B} t_B = \bar{D}_{t_B} t_B + \varepsilon g(S(t_B), t_B) \xi, \quad \xi = B$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(B, B) = +1, \quad S(t_B) = -t_B \text{ ve } g(S(t_B), t_B) = -1$$

dir. Buradan

$$\bar{D}_{t_B} t_B = D_{t_B} t_B + B$$

olur. (3.35) denklemini bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\overline{D}_{t_B} t_B = \frac{\kappa}{\tau} T - B + B,$$

$$\overline{D}_{t_B} t_B = \frac{\kappa}{\tau} T$$

bulunur. (3.41) denkleminde W spacelike ise

$$\gamma_B = \coth \theta \quad (3.42)$$

dir. Eğer W timelike ise

$$\gamma_B = \tanh \theta$$

olarak elde edilir. Aynı yol takip edilerek, W spacelike ise $C = \sinh \theta T - \cosh \theta B$ ve

$$\gamma_C = \|\overline{D}_{t_C} t_C\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

dir. Eğer W timelike ise $C = \cosh \theta T - \sinh \theta B$ dir. Buradan

$$\gamma_C = \|\overline{D}_{t_C} t_C\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

şeklindedir.

II. durum: α eğrisi birim hızlı spacelike binormalli bir spacelike eğri olsun. Bu durumda T ve B spacelike vektör alanları, N de timelike vektör alanıdır. O halde (T), (N), (B) ve (C) eğrilerinin S_1^2 veya H_0^2 a göre geodezik eğrilikleri (2.4) denklemini kullanılarak,

$$\gamma_T = \|\overline{D}_{t_T} t_T\| = \tan \theta,$$

$$\gamma_N = \|\overline{D}_{t_N} t_N\| = \frac{\theta'}{\|W\|},$$

$$\gamma_B = \|\overline{D}_{t_B} t_B\| = \cot \theta,$$

$$\gamma_C = \|\overline{D}_{t_C} t_C\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

olur.

III. durum: T ve N spacelike vektör alanları, B timelike alındığında

W spacelike ise;

$$\gamma_T = \|\overline{D}_{t_T} t_T\| = \coth \theta,$$

$$\gamma_N = \left\| \overline{D}_{t_N} t_N \right\| = \frac{\theta'}{\|W\|},$$

$$\gamma_B = \left\| \overline{\overline{D}}_{t_B} t_B \right\| = \tanh \theta,$$

$$\gamma_C = \left\| \overline{D}_{t_C} t_C \right\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

dir.

Eğer W timelike ise;

$$\gamma_T = \left\| \overline{D}_{t_T} t_T \right\| = \tanh \theta,$$

$$\gamma_N = \left\| \overline{D}_{t_N} t_N \right\| = \frac{\theta'}{\|W\|},$$

$$\gamma_B = \left\| \overline{\overline{D}}_{t_B} t_B \right\| = \coth \theta,$$

$$\gamma_C = \left\| \overline{D}_{t_C} t_C \right\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

olduğu görülür.

4. BULGULAR

4.1. IL^3 Lorentz Uzayında I. tipten İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Tanım 4.1.1 (İnvolüt - Evolüt) : $M_1, M_2 \subset IL^3$ iki eğri olsun. M_1 ve M_2 ,sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M_1 ve M_2 nin Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere

$$g(T, T^*) = 0 \quad (4.1)$$

ise M_2 ye M_1 in **involütü** denir. Bu durumda M_1 e de M_2 nin **evolütü** denir.

Bu çalışmada bir involüt-evolüt eğri çifti (M_2, M_1) ikilisi ile gösterilecektir. Çalışma boyunca M_1 ve M_2 eğrileri ışıksı olmayan (nonnull) eğriler olarak alınacaktır. Çalışmamızın esasını teşkil edecek olan ve ileride, sırasıyla, ele alacağımız I. tip, II. tip ve III. tip olarak kategorize ettiğimiz involüt-evolüt eğri çiftlerinin hepsi için geçerli olan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.1.1: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. (M_2, M_1) involüt-evolüt eğri çiftinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_{IL}(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|, \quad c = \text{sbt.}, \quad \forall s \in I$$

dır.

Tanım 4.1.2: M_1, IL^3 de birim hızlı bir timelike eğri olsun. Bu durumda M_2 spacelike olmalıdır. M_1 eğrisinin Frenet vektör alanları; T timelike vektör alanı, N ve B spacelike vektör alanlarıdır. M_2 eğrisinin Frenet vektör alanları;

a) T^* ve N^* spacelike vektör alanları, B^* timelike vektör alanıdır,

b) T^* ve B^* spacelike vektör alanları, N^* timelike vektör alanıdır.

Bu durumda

$$\begin{aligned} g(T, T) &= -1 & g(T^*, T^*) &= +1 \\ g(N, N) &= +1 & g(N^*, N^*) &= +1 = \epsilon_0 \\ g(B, B) &= +1 & g(B^*, B^*) &= +1 = \epsilon_0 \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (4.2)$$

dir. Bu halde (M_2, M_1) ikilisine **I. tipten involüt-evolüt eğri çifti** adı verilecektir.

Teorem 4.1.2: $M_1, M_2 \subset \mathbb{IL}^3$ eğrileri (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$, $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve M_1 in eğriliği κ ve M_2 nin eğriliği κ^* olmak üzere, (M_2, M_1) bir I. tipten involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\kappa^{*2} = \frac{\varepsilon_0(\tau^2 - \kappa^2)}{(c-s)^2 \kappa^2}, \quad \varepsilon_0 = \begin{cases} -1, & N^* \text{ timelike ise} \\ +1, & N^* \text{ spacelike ise} \end{cases}$$

dır.

İspat: M_2, M_1 in involütü olduğundan

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s), \quad \lambda = (c-s), \quad \alpha' = T. \quad (c = \text{sabit})$$

yazılabilir. M_1 in yay parametresi s ve M_2 nin yay parametresi s^* olmak üzere iki tarafın da s parametresine göre türevi alınır ve Frenet formüllerinden $T' = \kappa N$ olduğu dikkate alınır,

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = T^* \frac{ds^*}{ds} = (c-s)\kappa N \quad (4.3)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = (c-s)\kappa \quad (4.4)$$

dır. O halde

$$T^* = N$$

elde edilir. Buradan türev alınır,

$$\frac{dT^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{dN}{ds} = \kappa T - \tau B$$

$$\kappa^* N^* = (\kappa T - \tau B) \frac{ds}{ds^*}$$

olur. Bu son eşitlikten her iki tarafı kendisi ile iç çarparsak,

$$\kappa^{*2} g(N^*, N^*) = \left\{ \kappa^2 g(T, T) + \tau^2 g(B, B) \right\} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 \quad (4.5)$$

bulunur. (4.2), (4.4) denklemleri (4.5) denklemi ile birleştirilirse,

$$\kappa^{*2} \varepsilon_0 = (-\kappa^2 + \tau^2) \frac{1}{(c-s)^2 \kappa^2}$$

olduğu görülür ve buradan

$$\kappa^{*2} = \frac{\varepsilon_0(\tau^2 - \kappa^2)}{(c-s)^2 \kappa^2}$$

denklemini elde edilir.

Teorem 4.1.3: $M_1, M_2 \subset \mathbb{IL}^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$, $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve M_1 in burulması τ ve M_2 nin burulması τ^* olmak üzere, (M_2, M_1) bir I. tipten involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\tau^* = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{|c-s|\kappa|\kappa^2 - \tau^2|}.$$

İspat: (4.3) denklemden

$$\beta' = \lambda\kappa N$$

dir. Buradan

$$\beta'' = \lambda\kappa^2 T + (\lambda\kappa' - \kappa)N - \lambda\kappa\tau B,$$

$$\beta''' = (-2\kappa^2 + 3\lambda\kappa\kappa')T + (\lambda\kappa^3 - 2\kappa' + \lambda\kappa'' - \lambda\kappa\tau^2)N + (-2\lambda\kappa'\tau + 2\kappa\tau - \lambda\kappa\tau')B$$

ve

$$\beta' \times \beta'' = -\lambda^2 \kappa^2 \tau T + \lambda^2 \kappa^3 B \quad (4.6)$$

olur. Böylece

$$\|\beta' \times \beta''\|^2 = |g(\beta' \times \beta'', \beta' \times \beta'')| = |\lambda|^4 |\kappa|^4 |\kappa^2 - \tau^2| \quad (4.7)$$

$$\det(\beta', \beta'', \beta''') = \lambda^3 \kappa^3 (\kappa\tau' - \kappa'\tau) \quad (4.8)$$

bulunur. $\tau^* = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \times \beta''\|^2}$ olduğundan, (4.7) ve (4.8) denklemlerinden

$$\tau^* = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{|c-s|\kappa|\kappa^2 - \tau^2|}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.4: $M_1, M_2 \subset \mathbb{IL}^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. M_1 eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı θ olmak üzere (M_2, M_1) I. tipten involüt-evolüt eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

W spacelike ise;

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

W timelike ise;

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & -\cosh \theta \\ -\cosh \theta & 0 & \sinh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

bağıntıları vardır.

İspat: (4.3) denkleminde

$$\beta' = \lambda \kappa N$$

ve

$$\|\beta'\| = |\lambda \kappa|$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $T^* = \frac{\beta'}{\|\beta'\|}$ eşitliğinden $T^* = \mp N$ elde edilir. Pozitif

yönlendirme seçilerek,

$$T^* = N \quad (4.11)$$

alabiliriz. $\beta' = \lambda \kappa N$ denkleminde

$$\beta'' = \lambda \kappa^2 T + (\lambda \kappa' - \kappa) N + \lambda \kappa \tau B,$$

$$\beta' \times \beta'' = \lambda^2 \kappa^2 (-\tau T + \kappa B)$$

ve norm tanımı kullanılarak

$$\|\beta' \times \beta''\| = \lambda^2 \kappa^2 \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|},$$

bulunur. W vektörünün tanımından

$$\|\beta' \times \beta''\| = \lambda^2 \kappa^2 \|W\|$$

elde edilir. Buradan $B^* = \frac{\beta' \times \beta''}{\|\beta' \times \beta''\|}$ ifadesini kullanarak

$$B^* = -\frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B \quad (4.12)$$

olur. W spacelike olduğunda (3.7) denklemi ve (4.12) denkleminde,

$$B^* = -\sinh \theta T + \cosh \theta B \quad (4.13)$$

elde edilir. $N^* = B^* \times T^*$ olduğundan

$$N^* = -\cosh \theta T + \sinh \theta B \quad (4.14)$$

dir. (4.11), (4.13) ve (4.14) denklemleri matris formunda ifade edilirse (4.9) denklemi elde edilir.

W timelike olduğunda (3.9) ve (4.12) denklemleri birlikte değerlendirilerek,

$$B^* = -\cosh \theta T + \sinh \theta B \quad (4.15)$$

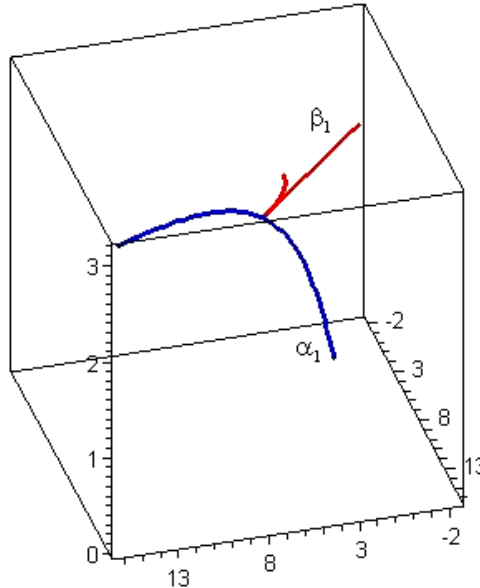
şeklinde bulunur. $N^* = -(B^* \times T^*)$ olduğundan

$$N^* = \sinh \theta T - \cosh \theta B \quad (4.16)$$

dir. (4.11), (4.15) ve (4.16) denklemleri matris formunda ifade edilirse (4.10) denklemi elde edilir.

ÖRNEK 4.1: $\alpha_1(\theta) = (\sqrt{2} \sinh \theta, \sqrt{2} \cosh \theta, \theta)$ birim hızlı timelike eğrisi verilsin. α_1 eğrisi timelike olduğundan involütü kesinlikle spacelike olmalıdır. Bu durumda α_1 eğrisinin involütü,

$\beta_1(\theta) = (\sqrt{2} \sinh \theta + (c - \theta)\sqrt{2} \cosh \theta, \sqrt{2} \cosh \theta + (c - \theta)\sqrt{2} \sinh \theta, c)$, $c \in \mathbb{R}$, spacelike eğrisidir. Özel olarak $c=2$ ve $0 \leq \theta \leq \pi$ için (β_1, α_1) involüt-evolüt eğri çiftini Mapple 11 programı yardımı ile aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.1
 (β_1, α_1) İnvölüt-evolüt eğri çifti

4.2. IL^3 Lorentz Uzayında İnvölüt Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Yay Uzunlukları:

Çalışmamızın bu bölümünde M_2 involüt eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere $(T^*), (N^*), (B^*)$ küresel gösterge eğrilerinin yay uzunlukları hesaplanacaktır.

(T^*) için yay uzunluğu s_{T^*} ile gösterilirse,

$$s_{T^*} = \int_0^s \left\| \frac{dT^*}{ds} \right\| ds^*$$

dir. $\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{dT^*}{ds} \frac{ds}{ds^*}$ bağıntısı yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$s_{T^*} = \int_0^s \left\| \frac{dT^*}{ds} \right\| ds$$

dir. (4.9) eşitliğinden $T^* = N$ ve (2.1) denkleminde $N' = \kappa T - \tau B$ olduğundan

$$s_{T^*} = \int_0^s \|N'\| ds = \int_0^s \sqrt{-\kappa^2 + \tau^2} ds = \int_0^s \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} ds,$$

$$s_{T^*} = \int_0^s \|W\| ds \quad (4.17)$$

bulunur. Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.1: M_2 involüt eğrisinin (T^*) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu için,

$$s_{T^*} = s_N$$

yazılabilir.

(N^*) için yay uzunluğu s_{N^*} ile gösterilirse,

$$s_{N^*} = \int_0^s \left\| \frac{dN^*}{ds} \right\| ds$$

olur. (4.9) bağıntısından $N^* = -\cosh \theta T + \sinh \theta B$ olduğu dikkate alınırsa,

$$s_{N^*} = \int_0^s \left\| (-\cosh \theta T + \sinh \theta B)' \right\| ds,$$

$$s_{N^*} = \int_0^s \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2} ds \quad (4.18)$$

bulunur. Burada W spacelike vektördür. Eğer W timelike ise (4.10) dan

$N^* = \sinh \theta T - \cosh \theta B$ olur. Bu durumda

$$s_{N^*} = \int_0^s \sqrt{-\theta'^2 + \|W\|^2} ds \quad (4.19)$$

olur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.2: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (N^*) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu için,

$$s_{N^*} = s_N$$

olduğu açıktır.

(B^*) için yay uzunluğu s_{B^*} ile gösterilirse,

$$s_{B^*} = \int_0^s \left\| \frac{dB^*}{ds} \right\| ds$$

dir. (4.9) dan $B^* = -\sinh \theta T + \cosh \theta B$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$s_{B^*} = \int_0^s \left\| (-\sinh \theta T + \cosh \theta B)' \right\| ds$$

$$s_{B^*} = \int_0^s |\theta'| ds \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada, W spacelike vektördür. W timelike ise (4.10) dan

$B^* = -\cosh \theta T + \sinh \theta B$ olur. Bu durumda da

$$s_{B^*} = \int_0^s |\theta'| ds$$

olarak bulunur. Buradan da aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.3: M_2 involüt eğrisinin (B^*) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu için,

$$s_{B^*} = s_C$$

olduğu söylenebilir.

4.3. İnvölüt Eğrisinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri:

(T^*) için IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{T^*} ile gösterilirse, (T^*) ın parametresi

s_{T^*} ve birim teğet vektörü t_{T^*} olmak üzere,

$$k_{T^*} = \|D_{t_{T^*}} t_{T^*}\| \quad (4.21)$$

dır.

β involüt eğrisinin yay parametresi s^* ve birim teğet vektörü T^* olmak üzere (T^*) in denklemi

$$\beta_{T^*} = T^* \quad (4.22)$$

dır. (4.22) ifadesinde her iki tarafın s_{T^*} parametresine göre türevi alınır,

$$\frac{d\beta_{T^*}}{ds_{T^*}} = \frac{dT^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds_{T^*}}, \quad (4.23)$$

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{dT^*}{ds} \frac{ds}{ds^*}$$

olur. Bu son ifade (4.23) de yerine yazılır ve $T^* = N$ olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_{T^*}}{ds_{T^*}} &= \frac{dN}{ds} \frac{ds}{ds_{T^*}} \\ t_{T^*} &= (\kappa T - \tau B) \frac{ds}{ds_{T^*}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

bulunur. Buradan

$$1 = \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|} \frac{ds}{ds_{T^*}}$$

olur. (3.6) denklemi kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{T^*}} = \frac{1}{\|W\|} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.25) bağıntısı (4.24) de yerine yazılırsa,

$$t_{T^*} = (\kappa T - \tau B) \frac{1}{\|W\|}$$

dir. (3.7) bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$t_{T^*} = \cosh \theta T - \sinh \theta B \quad (4.26)$$

elde edilir. Buradan da

$$D_{t_{T^*}} t_{T^*} = \frac{dt_{T^*}}{ds_{T^*}} = \frac{dt_{T^*}}{ds} \frac{ds}{ds_{T^*}},$$

$$D_{t_{T^*}} t_{T^*} = (\theta' \sinh \theta T - \theta' \cosh \theta B + \kappa \cosh \theta N - \tau \sinh \theta N) \frac{ds}{ds_{T^*}}$$

bulunur. Bu son ifade (3.7) ve (4.25) denklemleri ile birlikte kullanılırsa,

$$D_{t_{T^*}} t_{T^*} = (\theta' \sinh \theta T + \|W\|N - \theta' \cosh \theta B) \frac{1}{\|W\|} \quad (4.27)$$

bulunur. W spacelike ise (4.21) denklemi kullanılarak

$$k_{T^*} = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\theta'^2 + \|W\|^2|} \quad (4.28)$$

elde edilir. W spacelike iken $k_T = \frac{1}{\cosh \theta}$ olduğundan

$$\theta = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{k_T} \right)$$

ve

$$\theta' = - \frac{k_T'}{k_T \sqrt{1 - k_T^2}} \quad (4.29)$$

olur. (4.29) bağıntısı (4.28) de yerine yazılırsa k_T ve k_{T^*} arasında

$$k_{T^*} = \sqrt{\left| 1 + \frac{k_T'^2}{k_T^2 (1 - k_T^2) \|W\|^2} \right|} \quad (4.30)$$

bağıntısı vardır. W timelike ise (4.21) denklemi kullanılarak

$$k_{T^*} = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\|W\|^2 - \theta'^2|},$$

W timelike iken $k_T = \frac{1}{\sinh \theta}$ olduğundan k_T ve k_{T^*} arasında

$$k_{T^*} = \sqrt{\left| 1 - \frac{k_T'^2}{k_T^2 (1 + k_T^2) \|W\|^2} \right|}$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 4.3.1: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (T^*) küresel gösterge eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği

$$k_{T^*} = 1$$

dir.

(N^*) için IL^3 e göre geodezik eğrilik k_{N^*} ile gösterilirse, (N^*) in parametresi s_{N^*} ve birim teğet vektörü t_{N^*} olmak üzere,

$$k_{N^*} = \|D_{t_{N^*}} t_{N^*}\| \quad (4.31)$$

(N^*) in denklemi

$$\beta_{N^*} = N^*$$

dır. Buradan türev alınırsa,

$$\frac{d\beta_{N^*}}{ds_{N^*}} = \frac{dN^*}{ds} \frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur. Teorem 4.1.4 den W spacelike iken $N^* = -\cosh \theta T + \sinh \theta B$ olduğundan,

$$t_{N^*} = (-\theta' \sinh \theta T - \kappa \cosh \theta N + \tau \sinh \theta N + \theta' \cosh \theta B) \frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur. (3.7) denklemi bu son bağıntısında yerine yazılırsa,

$$t_{N^*} = (-\theta' \sinh \theta T - \|W\|N + \theta' \cosh \theta B) \frac{ds}{ds_{N^*}} \quad (4.32)$$

ve iki tarafın normu alınırsa,

$$\frac{ds}{ds_{N^*}} = \frac{1}{\sqrt{|\theta'^2 + \|W\|^2|}}$$

bulunur. Burada (3.31) kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{N^*}} = \frac{1}{\|W\|k_N} \quad (4.33)$$

olur. (4.33) denklemi (4.32) denkleminde yerine yazılırsa,

$$t_{N^*} = -\frac{\theta'}{\|W\|k_N} \sinh \theta T - \frac{1}{k_N} N + \frac{\theta'}{\|W\|k_N} \cosh \theta B$$

elde edilir. (3.40) denkleminde $\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|}$ olduğu düşünülürse, $\sigma = \frac{\gamma_N}{k_N}$ alınarak

$$t_{N^*} = -\sigma \sinh \theta T - \frac{1}{k_N} N + \sigma \cosh \theta B \quad (4.34)$$

elde edilir. Buradan

$$D_{t_{N^*}} t_{N^*} = \frac{dt_{N^*}}{ds_{N^*}} = \frac{dt_{N^*}}{ds} \frac{ds}{ds_{N^*}}$$

ve

$$D_{t_{N^*}} t_{N^*} = \left[\left(-\sigma' \sinh \theta - \theta' \sigma \cosh \theta - \frac{\kappa}{k_N} \right) T + \left(\frac{k_N'}{k_N^2} \right) N + \left(\sigma' \cosh \theta + \theta' \sigma \sinh \theta + \frac{\tau}{k_N} \right) B \right] \frac{1}{\|W\| k_N} \quad (4.35)$$

elde edilir. Buradan norma geçerse,

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\| k_N} \sqrt{\sigma'^2 - \theta'^2 \sigma^2 - 2 \frac{\|W\| \theta' \sigma}{k_N} - \frac{\kappa^2 - \tau^2}{k_N^2} + \frac{k_N'^2}{k_N^4}},$$

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\| k_N} \sqrt{\sigma'^2 - \left(\theta' \sigma + \frac{\|W\|}{k_N} \right)^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}} \quad (4.36)$$

olur. W timelike iken Teorem 4.1.4 den $N^* = \sinh \theta T - \cosh \theta B$ olduğundan

$$t_{N^*} = \sigma \cosh \theta T - \frac{1}{k_N} N - \sigma \sinh \theta B, \quad (4.37)$$

$$D_{t_{N^*}} t_{N^*} = \left[\left(\sigma' \cosh \theta + \theta' \sigma \sinh \theta - \frac{\kappa}{k_N} \right) T + \left(\frac{k_N'}{k_N^2} \right) N + \left(\frac{\tau}{k_N} - \sigma' \sinh \theta - \theta' \sigma \cosh \theta \right) B \right] \frac{1}{\|W\| k_N}$$

şeklinde bulunur. Bu son denklem ve (4.31) denklemi birlikte kullanılarak

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\| k_N} \sqrt{-\sigma'^2 + \left(\theta' \sigma - \frac{\|W\|}{k_N} \right)^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.2: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (N^*) küresel gösterge eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği

$$k_{N^*} = 1$$

dir.

İspat: M_1 evolüt eğrisi bir helis olsun. Tanım 2.1.16 dan $\theta' = 0$ dır. $\theta' = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$k_N = 1 \quad \text{ve} \quad \sigma = 0$$

elde edilir. Bu neticeler k_{N^*} ın denklemi ile birleştirilirse,

$$k_{N^*} = 1$$

olduğu görülür.

(B^*) IL^3 e göre geodezik eğrilik k_{B^*} ile gösterilirse, (B^*) ın parametresi s_{B^*} ve birim teğet vektörü t_{B^*} olmak üzere,

$$k_{B^*} = \|D_{t_{B^*}} t_{B^*}\| \quad (4.38)$$

dır. (B^*) ın denklemi

$$\beta_{B^*} = B^*$$

olduğundan

$$\frac{d\beta_{B^*}}{ds_{B^*}} = \frac{dB^*}{ds} \frac{ds}{ds_{B^*}}$$

dir. Teorem 4.1.4 den W spacelike iken $B^* = -\sinh \theta T + \cosh \theta B$ olup,

$$t_{B^*} = (-\theta' \cosh \theta T - \kappa \sinh \theta N + \tau \cosh \theta N + \theta' \sinh \theta B) \frac{ds}{ds_{B^*}} \quad (4.39)$$

dir. (3.7) denklemi (4.39) da yerine yazılırsa,

$$t_{B^*} = (-\theta' \cosh \theta T + \theta' \sinh \theta B) \frac{ds}{ds_{B^*}} \quad (4.40)$$

olur. Norm alınırsa,

$$\frac{ds}{ds_{B^*}} = \frac{1}{\theta'} \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.41) denklemi (4.40) da yerine yazılırsa,

$$t_{B^*} = -\cosh \theta T + \sinh \theta B \quad (4.42)$$

olur. Buradan

$$D_{t_{B^*}} t_{B^*} = \frac{dt_{B^*}}{ds_{B^*}} = \frac{dt_{B^*}}{ds} \frac{ds}{ds_{B^*}},$$

$$D_{t_{B^*}} t_{B^*} = (-\theta' \sinh \theta T - \kappa \cosh \theta N + \tau \sinh \theta N + \theta' \cosh \theta B) \frac{ds}{ds_{B^*}}$$

olur. Burada (3.7) ve (4.41) ifadeleri kullanılarak

$$D_{t_{B^*}} t_{B^*} = -\sinh \theta T - \frac{\|W\|}{\theta'} N + \cosh \theta B \quad (4.43)$$

bulunur ve buradan da

$$k_{B^*} = \sqrt{\left| 1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2 \right|} \quad (4.44)$$

elde edilir. (3.36) denkleminde $k_B = \frac{1}{\sinh \theta}$ olduğundan

$$\theta = \sinh^{-1} \left(\frac{1}{k_B} \right)$$

ve

$$\theta' = -\frac{k_B'}{k_B \sqrt{k_B^2 + 1}} \quad (4.45)$$

olur. (4.45) ile (4.44) birleştirilirse,

$$k_{B^*} = \sqrt{\left| 1 + \frac{\|W\|^2 k_B^2 (k_B^2 + 1)}{k_B'^2} \right|} \quad (4.46)$$

ifadesi elde edilir. W timelike ise (4.38) denklemi kullanılarak

$$k_{B^*} = \sqrt{\left| \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2 - 1 \right|},$$

W timelike iken $k_B = \frac{1}{\cosh \theta}$ olduğundan k_B ve k_{B^*} arasında

$$k_{B^*} = \sqrt{\left| \frac{\|W\|^2 k_B^2 (1 - k_B^2)}{k_B'^2} - 1 \right|}$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 4.3.3: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (B^*) küresel gösterge eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliğinin tanımsız olduğunu söyleyebiliriz.

4.4. İnvolut Eğrisinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 a göre Geodezik

Eğrilikleri:

S_1^2 veya H_0^2 a göre $(T^*), (N^*), (B^*)$ eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için yine S_1^2 ve H_0^2 daki konneksiyonlara geçip Gauss denklemlerinden yararlanacağız.

(T^*) için S_1^2 e göre geodezik eğrilik γ_{T^*} ile gösterilirse,

$$\gamma_{T^*} = \left\| \bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*} \right\| \quad (4.47)$$

dir. Gauss denkleminde

$$D_{t_{T^*}} t_{T^*} = \bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*} + \varepsilon g(S(t_{T^*}), t_{T^*}) T^*$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(T^*, T^*) = +1, \quad S(t_{T^*}) = -t_{T^*} \text{ ve } g(S(t_{T^*}), t_{T^*}) = +1$$

dir. Buradan

$$\bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*} = D_{t_{T^*}} t_{T^*} - T^* \quad (4.48)$$

bulunur. (4.48) denklemi (4.27) denklemi ile birleştirilirse,

$$\bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*} = \frac{\theta'}{\|W\|} \sinh \theta T + N - \frac{\theta'}{\|W\|} \cosh \theta B - T^*$$

ve burada (4.9) dan $T^* = N$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*} = \frac{\theta'}{\|W\|} \sinh \theta T - \frac{\theta'}{\|W\|} \cosh \theta B \quad (4.49)$$

elde edilir. (4.47) denklemi kullanılarak,

$$\gamma_{T^*} = \frac{\theta'}{\|W\|} \quad (4.50)$$

olur. (3.38) den $\gamma_T = \tanh \theta$ olduğundan

$$\theta = \tanh^{-1} \gamma_T$$

ve

$$\theta' = \frac{\gamma_T'}{1 - \gamma_T^2} \quad (4.51)$$

elde edilir. (4.51) denklemi (4.50) de yerine yazılırsa,

$$\gamma_{T^*} = \frac{1}{\|W\|} \left(\frac{\gamma_T'}{1 - \gamma_T^2} \right) \quad (4.52)$$

bağıntısı elde edilir. Eğer W timelike ise (4.47) denklemi kullanılarak aynı sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.4.1: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (T^*) küresel gösterge eğrisinin S_1^2 e göre geodezik eğriliği

$$\gamma_{T^*} = 0$$

dır.

(N^*) için H_0^2 a göre geodezik eğrilik γ_{N^*} ile gösterilirse,

$$\gamma_{N^*} = \|\bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*}\| \quad (4.53)$$

dir. Gauss denkleminde

$$D_{t_{N^*}} t_{N^*} = \bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} + \varepsilon g(S(t_{N^*}), t_{N^*}) N^*, \left(t_{N^*} = -\sigma \sinh \theta T - \frac{1}{k_N} N + \sigma \cosh \theta B \right)$$

dir. Burada

$$\varepsilon = g(N^*, N^*) = -1, \quad S(t_{N^*}) = -t_{N^*} \text{ ve } g(S(t_{N^*}), t_{N^*}) = -1$$

olur. Böylece

$$\bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} = D_{t_{N^*}} t_{N^*} - N^* \quad (4.54)$$

yazılabilir. (4.35) denklemi (4.54) ile birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} = & \left[(-\sigma' \sinh \theta - \theta' \sigma \cosh \theta - \frac{\kappa}{k_N}) T + (\frac{k'_N}{k_N^2}) N \right. \\ & \left. + (\sigma' \cosh \theta + \theta' \sigma \sinh \theta + \frac{\tau}{k_N}) B \right] \frac{1}{\|W\| k_N} - N^* \end{aligned} \quad (4.55)$$

ve Teorem 4.1.4 den W spacelike iken $N^* = -\cosh \theta T + \sinh \theta B$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} = & \left[(-\sigma' \sinh \theta - \theta' \sigma \cosh \theta - \frac{\kappa}{k_N} + \|W\| k_N \cosh \theta) T + (\frac{k'_N}{k_N^2}) N \right. \\ & \left. + (\sigma' \cosh \theta + \theta' \sigma \sinh \theta + \frac{\tau}{k_N} - \|W\| k_N \sinh \theta) B \right] \frac{1}{\|W\| k_N} \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.53) denkleminde

$$\gamma_{N^*} = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{\left| \sigma'^2 - \left[\frac{\|W\|}{k_N} + (\theta'\sigma - \|W\|k_N) \right]^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4} \right|} \quad (4.57)$$

elde edilir. (3.40) ile verilen $\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|}$ bağıntısı (4.57) ile birleştirilirse,

$$\gamma_{N^*} = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{\left| \sigma'^2 - \left[\frac{\|W\|}{k_N} (1 + \gamma_N^2 - k_N^2) \right]^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4} \right|} \quad (4.58)$$

bağıntısı elde edilir. Eğer W timelike ise (N^*) küresel gösterge eğrisinin geodezik eğriliğini S_1^2 e göre hesaplamalıyız. Gauss denkleminde

$$D_{t_{N^*}} t_{N^*} = \bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} + \varepsilon g(S(t_{N^*}), t_{N^*}) N^*, \quad \left(t_{N^*} = \sigma \cosh \theta T - \frac{1}{k_N} N - \sigma \sinh \theta B \right)$$

dir. Burada

$$\varepsilon = g(N^*, N^*) = +1, \quad S(t_{N^*}) = -t_{N^*} \text{ ve } g(S(t_{N^*}), t_{N^*}) = \mp 1 = \varepsilon_1$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} &= D_{t_{N^*}} t_{N^*} + \varepsilon_1 N^*, \quad (N^* = \sinh \theta T - \cosh \theta B) \\ \bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} &= \left[(\sigma' \cosh \theta + \theta' \sigma \sinh \theta - \frac{\kappa}{k_N} + \varepsilon_1 \|W\| k_N \sinh \theta) T + \left(\frac{k_N'}{k_N^2} \right) N \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tau}{k_N} - \sigma' \sinh \theta - \theta' \sigma \cosh \theta - \varepsilon_1 \|W\| k_N \cosh \theta \right) B \right] \frac{1}{\|W\| k_N} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan norma geçilirse,

$$\gamma_{N^*} = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{\left| -\sigma'^2 + \left[\frac{\|W\|}{k_N} - (\theta'\sigma - \varepsilon_1 \|W\| k_N) \right]^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4} \right|}$$

elde edilir. Bu son bağıntı $\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|}$ bağıntısı ile birleştirilirse,

$$\gamma_{N^*} = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{\left| -\sigma'^2 + \left[\frac{\|W\|}{k_N} (1 - \gamma_N^2 - \varepsilon_1 k_N^2) \right]^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4} \right|}$$

bağıntısı elde edilir.

Sonuç 4.4.2: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (N^*) küresel gösterge eğrisinin S_1^2 ve H_0^2 a göre geodezik eğriliği

$$\gamma_{N^*} = 0$$

dir.

(B^*) için S_1^2 ye göre geodezik eğrilik γ_{B^*} ile gösterilirse,

$$\gamma_{B^*} = \left\| \overline{D}_{t_{B^*}} t_{B^*} \right\| \quad (4.59)$$

dir. Gauss denkleminde

$$D_{t_{B^*}} t_{B^*} = \overline{D}_{t_{B^*}} t_{B^*} + \varepsilon g(S(t_{B^*}), t_{B^*}) B^*$$

dir. Burada

$$\varepsilon = g(B^*, B^*) = +1, \quad S(t_{B^*}) = -t_{B^*} \text{ ve } g(S(t_{B^*}), t_{B^*}) = +1$$

olduğundan

$$\overline{D}_{t_{B^*}} t_{B^*} = D_{t_{B^*}} t_{B^*} - B^* \quad (4.60)$$

yazılabilir. (4.43) denklemi bu son denklem ile birleştirilirse,

$$\overline{D}_{t_{B^*}} t_{B^*} = -\sinh \theta T - \frac{\|W\|}{\theta'} N + \cosh \theta B - B^*$$

ve (4.9) dan W spacelike iken $B^* = -\sinh \theta T + \cosh \theta B$ olduğundan,

$$\overline{D}_{t_{B^*}} t_{B^*} = -\frac{\|W\|}{\theta'} N \quad (4.61)$$

elde edilir. (4.59) denkleminde,

$$\gamma_{B^*} = \frac{\|W\|}{\theta'} \quad (4.62)$$

olduğu görülür. (3.42) denkleminde $\gamma_B = \coth \theta$ olduğundan

$$\theta = \coth^{-1} \gamma_B$$

ve

$$\theta' = -\frac{\gamma_B'}{1 - \gamma_B^2} \quad (4.63)$$

elde edilir. (4.63) bağıntısı (4.62) de yerine yazılırsa,

$$\gamma_{B^*} = \frac{\|W\|(1 - \gamma_B^2)}{\gamma_B'} \quad (4.64)$$

bulunur. Eğer W timelike ise (4.94) denklemi kullanılarak aynı sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.4.3: Eğer M_1 evolüt eğrisi bir helis ise M_2 involüt eğrisinin (B^*) küresel gösterge eğrisinin S_1^2 ve H_0^2 a göre geodezik eğriliğinin tanımsız olduğunu söyleyebiliriz.

4.5. IL^3 Lorentz Uzayında İnvölüt-Evolüt Eğri Çiftlerinin Darboux Vektörleri ve Sabit Pol Eğrileri İçin Bazı Karakterizasyonlar:

Teorem 4.5.1: (M_2, M_1) I. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin Darboux vektörleri, sırasıyla, W ve W^* olmak üzere, W ile W^* arasında W spacelike ise;

$$i) W^* = \frac{1}{|\lambda|\kappa}(-\theta'N - W),$$

W timelike ise;

$$ii) W^* = \frac{1}{|\lambda|\kappa}(-\theta'N + W)$$

bağıntıları vardır. Burada $\lambda = c - s$ ($c = \text{sabit}$) dir.

İspat: i) M_1 eğrisinin Frenet vektör alanlarından T timelike vektör alanı, N ve B spacelike vektör alanlarıdır. W spacelike ise M_2 involüt eğrisinin Frenet vektör alanlarından T^* ve B^* spacelike vektör alanları, N^* da timelike vektör alanıdır. Bu durumda M_2 eğrisinin Darboux vektörü (3.11) denkleminde,

$$W^* = -\tau^*T^* + \kappa^*B^*$$

şeklindedir. Teorem 4.1.3, Teorem 4.1.2 ve (4.9) bağıntısından

$$W^* = -\frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{|c-s|\kappa|\tau^2 - \kappa^2|}N + \frac{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}}{|c-s|\kappa}(-\sinh \theta T + \cosh \theta B),$$

$$W^* = -\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{|c-s|\kappa|\tau^2 - \kappa^2|}N + \frac{\|W\|}{|c-s|\kappa}(-\sinh \theta T + \cosh \theta B)$$

yazılabilir. Bu son eşitlik ve (3.7) denklemi birlikte değerlendirilirse,

$$W^* = -\frac{\theta'}{|c-s|\kappa}N + \frac{1}{|c-s|\kappa}(-\tau T + \kappa B)$$

olur. (3.6) denkleminde $W = \tau T - \kappa B$ olduğu düşünülürse, $\lambda = c - s$ ($c = \text{sabit}$) alınarak, W ve W^* vektörleri arasında,

$$W^* = \frac{1}{|\lambda|\kappa}(-\theta'N - W) \quad (4.65)$$

bağıntısı bulunur.

ii) Eğer W timelike ise;

M_1 eğrisinin Frenet vektör alanlarından T timelike, N ve B spacelike vektör alanları iken W timelike alındığında M_2 eğrisinin Frenet vektör alanları T^* ve N^* spacelike, B^* timelike vektör alanlarıdır. Bu durumda M_2 eğrisinin Darboux vektörü (3.14) denkleminde

$$W^* = \tau^* T^* - \kappa^* B^*$$

şeklindedir. Teorem 4.1.3, Teorem 4.1.2 ve (4.10) bağıntısından W ve W^* arasında,

$$W^* = \frac{1}{|\lambda|\kappa}(-\theta'N + W), \quad \lambda = c - s \quad (c = \text{sabit}) \quad (4.66)$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 4.5.2: (M_2, M_1) I. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin W ve W^* Darboux vektörleri yönündeki birim vektörleri, sırasıyla, C ve C^* olmak üzere, C ile C^* arasında

W spacelike ise;

$$\text{i) } C^* = -\frac{1}{k_N}C - \sigma N, \quad (4.67)$$

W timelike ise;

$$\text{ii) } C^* = \frac{1}{k_N}C - \sigma N \quad (4.68)$$

bağıntıları vardır. Burada $\sigma = \frac{\gamma_N}{k_N}$ dir.

İspat: i) W^* vektörü yönündeki birim vektör,

$$C^* = \frac{W^*}{\|W^*\|}$$

dir. (4.65) denklemi bu son bağıntı ile birlikte değerlendirilirse,

$$C^* = \frac{-\theta'N - W}{\sqrt{|\theta'^2 + \kappa^2 - \tau^2|}},$$

$$C^* = \frac{-\theta'N - W}{\sqrt{|\theta'^2 + \|W\|^2|}}$$

yazılabilir. (3.31) denkleminde $k_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{|\theta'^2 + \|W\|^2|}$ olduğu düşünülürse,

$$C^* = \frac{-\theta'N - W}{\|W\|k_N}$$

elde edilir. $\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|}$ olduğundan $\sigma = \frac{\gamma_N}{k_N}$ gösterimi kullanılarak C ve C^* arasında

$$C^* = -\frac{1}{k_N}C - \sigma N$$

bağıntısı bulunur.

ii) Benzer şekilde (4.66) denklemi $C^* = \frac{W^*}{\|W^*\|}$ denkleminde yerine yazılırsa (4.68)

denklemi elde edilir.

Sonuç 4.5.1: (M_2, M_1) I. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. (C^*) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu s_{C^*} ile gösterilirse,

W spacelike ise; Tanım 2.1.13 ve (4.67) denkleminde,

$$s_{C^*} = \int_0^s \left\| \frac{dC^*}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|C^{*'}\| ds,$$

$$s_{C^*} = \int_0^s \sqrt{\left| \frac{k_N'^2}{k_N^4} + \sigma'^2 \right|} ds \quad (4.69)$$

W timelike ise; Tanım 2.1.13 ve (4.68) denkleminde,

$$s_{C^*} = \int_0^s \sqrt{\left| -\frac{k_N'^2}{k_N^4} + \sigma'^2 \right|} ds \quad (4.70)$$

bulunur.

Sonuç 4.5.2: (M_2, M_1) I. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. Eğer M_1 eğrisi bir helis ise (4.67) ve (4.68) denklemlerinden

$$C^* = \mp C$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda (C) ve (C^*) in geodezik eğrilikleri arasında

$$k_C = k_{C^*} \text{ ve } \gamma_C = \gamma_{C^*}$$

bağıntıları vardır.

4.6. IL^3 Lorentz Uzayında II. tipten İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri

Tanım 4.6.1: M_1 bir spacelike eğri iken M_2 bir timelike eğri olsun. Buna göre M_1 eğrisinin Frenet vektör alanları; T ve B spacelike vektör alanları, N timelike vektör alanıdır. M_2 eğrisinin Frenet vektör alanları; T^* timelike vektör alanı, N^* ve B^* spacelike vektör alanlarıdır.

Bu durumda

$$\begin{aligned} g(T, T) &= +1 & g(T^*, T^*) &= -1 \\ g(N, N) &= -1 & g(N^*, N^*) &= +1 \\ g(B, B) &= +1 & g(B^*, B^*) &= +1 \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (4.71)$$

dır. Bu halde (M_2, M_1) ikilisine **II. tipten involüt-evolüt eğri çifti** adı verilecektir.

Teorem 4.6.1: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$, $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve M_1 in eğriliği κ ve M_2 nin eğriliği κ^* olmak üzere, (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c-s)^2 \kappa^2} \quad (\text{Bükcü ve Karacan, 2007}).$$

Teorem 4.6.2: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve M_1 in burulması τ ve M_2 nin burulması τ^* olmak üzere, (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\tau^* = \frac{\kappa' \tau - \kappa \tau'}{|c-s| \kappa (\tau^2 + \kappa^2)} \quad (\text{Bükcü ve Karacan, 2007}).$$

Teorem 4.6.3: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-

ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. M_1 eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian spacelike açı θ olmak üzere (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

bağıntısı vardır.

II. tip için s_{T^*} , s_{N^*} , s_{B^*} yay uzunlukları:

$$\begin{aligned} s_{T^*} &= \int_0^s \|W\| ds, \\ s_{N^*} &= \int_0^s \|(\cos \theta T + \sin \theta B)'\| ds = \int_0^s \sqrt{\theta'^2 - \|W\|^2} ds, \\ s_{B^*} &= \int_0^s \|(-\sin \theta T + \cos \theta B)'\| ds = \int_0^s |\theta'| ds \end{aligned}$$

olarak bulunur.

II. tip için IL^3 e göre geodezik eğrilikler:

$$\begin{aligned} k_{T^*} &= \|D_{t_{T^*}} t_{T^*}\| = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{\theta'^2 - \|W\|^2}, \\ k_{N^*} &= \|D_{t_{N^*}} t_{N^*}\| = \frac{1}{\|W\| k_N} \sqrt{\sigma'^2 - \left(\theta' \sigma - \frac{\|W\|}{k_N}\right)^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}}, \\ k_{B^*} &= \|D_{t_{B^*}} t_{B^*}\| = \sqrt{1 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2} \end{aligned}$$

bulunur.

II. tip için S_1^2 veya H_0^2 a göre geodezik eğrilikler:

$$\begin{aligned} \gamma_{T^*} &= \|\bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*}\| = \frac{\theta'}{\|W\|}, \\ \gamma_{N^*} &= \|\bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*}\| = \frac{1}{\|W\| k_N} \sqrt{\sigma'^2 + \left[\frac{\|W\|}{k_N} + (\|W\| k_N - \theta' \sigma)\right]^2 - \frac{k_N'^2}{k_N^4}}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{B^*} = \left\| \overline{D}_{t_{N^*}} t_{N^*} \right\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.6.4: (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin Darboux vektörleri, sırasıyla, W ve W^* olmak üzere, W ile W^* arasında

$$W^* = \frac{1}{|\lambda|\kappa} (-\theta'N + W) \quad (4.73)$$

bağıntısı vardır.

Teorem 4.6.5: (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin W ve W^* Darboux vektörleri yönündeki birim vektörleri, sırasıyla, C ve C^* olmak üzere, C ile C^* arasında

$$C^* = \frac{1}{k_N} C - \sigma N \quad (4.74)$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 4.6.1: (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. (C^*) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu s_{C^*} ile gösterilirse,

$$s_{C^*} = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{k_N'}{k_N^2} \right)^2 + \left(\frac{2\theta'}{k_N} \right)^2 - \sigma'^2} ds \quad (4.75)$$

dir.

Sonuç 4.6.2: (M_2, M_1) II. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. Eğer M_1 eğrisi bir helis ise (4.74) denkleminde

$$C^* = \mp C$$

elde edilir. Bu durumda (C) ile (C^*) ın geodezik eğrilikleri arasında

$$k_C = k_{C^*} \text{ ve } \gamma_C = \gamma_{C^*}$$

bağıntıları vardır.

4.7. IL^3 Lorentz Uzayında III. tipten İvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Tanım 4.7.1: M_1 bir spacelike eğri iken M_2 de bir spacelike eğri olsun. Buna göre M_1 eğrisinin Frenet vektör alanları; T ve N spacelike vektör alanları, B timelike vektör alanıdır. M_2 eğrisinin Frenet vektör alanları;

- a) T^* ve B^* spacelike vektör alanları, N^* timelike vektör alanıdır.
- b) T^* ve N^* spacelike vektör alanı, B^* timelike vektör alanıdır.

Bu durumda

$$\begin{aligned} g(T, T) &= +1 & g(T^*, T^*) &= +1 \\ g(N, N) &= +1 & g(N^*, N^*) &= -1 = \varepsilon_0 \\ g(B, B) &= -1 & g(B^*, B^*) &= -1 = \varepsilon_0 \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (4.76)$$

dir. Bu halde (M_2, M_1) ikilisine **III. tipten involüt-evolüt eğri çifti** adı verilecektir.

Teorem 4.7.1: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve M_1 in eğriliği κ ve M_2 nin eğriliği κ^* olmak üzere (M_2, M_1) III. tipten involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\kappa^{*2} = \frac{\varepsilon_0(\kappa^2 - \tau^2)}{(c-s)^2 \kappa^2}$$

dır.

Teorem 4.7.2: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$, $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve M_1 in burulması τ ve M_2 nin burulması τ^* olmak üzere (M_2, M_1) bir III. tipten involüt-evolüt eğri çifti ise

$$\tau^* = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{|c-s|\kappa|\tau^2 - \kappa^2|}$$

dır.

Teorem 4.7.3: $M_1, M_2 \subset IL^3$ eğrileri, sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M_1 ve M_2 eğrilerinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. M_1 eğrisinin B binormal vektörü

ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı θ olmak üzere (M_2, M_1) III. tipten involüt-evolüt eğri çiftinin Frenet çatıları arasında

W spacelike ise;

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & -\cosh \theta \\ -\cosh \theta & 0 & \sinh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

W timelike ise;

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \theta & 0 & \sinh \theta \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

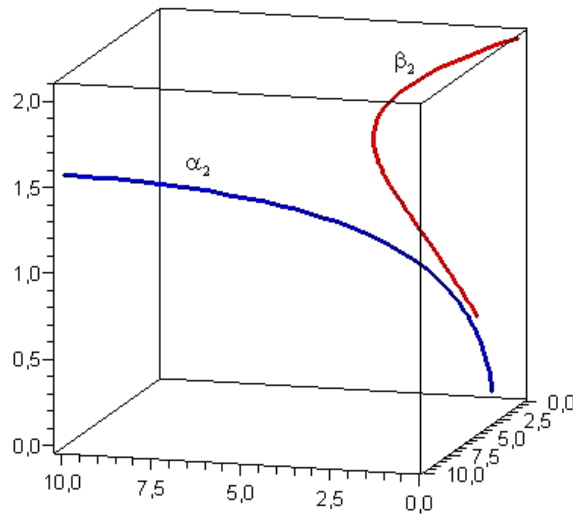
bağıntıları vardır.

ÖRNEK 4.2: $\alpha_2(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh \theta, \frac{\theta}{2} \right)$ birim hızlı spacelike eğrisinin involütü

timelike veya spacelike olmalıdır. α_2 eğrisinin involütü

$$\beta_2(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} [\cosh \theta + (c - \theta) \sinh \theta], \frac{\sqrt{3}}{2} [\sinh \theta + (c - \theta) \cosh \theta], \frac{\theta + 1}{2} \right), \quad c \in \mathbb{R} \text{ dir ve } \beta_2$$

eğrisi bir spacelike eğridir. Yine özel olarak $c=2$ alınarak, $\theta \in [0, \pi]$ aralığında (β_2, α_2) involüt-evolüt eğri çifti için Mapple 11 programı yardımı ile aşağıdaki çizimi gerçekleştirebiliriz.



Şekil 4.2
 (β_2, α_2) Invölüt-evölüt eğri çifti

III.tip tip için s_{T^*} , s_{N^*} , s_{B^*} yay uzunlukları:

W spacelike ise;

$$s_{T^*} = \int_0^S \|W\| ds,$$

$$s_{N^*} = \int_0^S \left\| (\sinh \theta T - \cosh \theta B)' \right\| ds = \int_0^S \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2} ds,$$

$$s_{B^*} = \int_0^S \left\| (-\cosh \theta T + \sinh \theta B)' \right\| ds = \int_0^S |\theta'| ds$$

olur.

Eğer W timelike ise;

$$s_{T^*} = \int_0^S \|W\| ds,$$

$$s_{N^*} = \int_0^S \left\| (-\cosh \theta T + \sinh \theta B)' \right\| ds = \int_0^S \sqrt{-\theta'^2 + \|W\|^2} ds,$$

$$s_{B^*} = \int_0^S \left\| (-\sinh \theta T + \cosh \theta B)' \right\| ds = \int_0^S |\theta'| ds$$

şeklinde bulunur.

III.tip için IL^3 e göre geodezik eğrilikler:

W spacelike ise;

$$k_{T^*} = \left\| D_{t_{T^*}} t_{T^*} \right\| = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2},$$

$$k_{N^*} = \left\| D_{t_{N^*}} t_{N^*} \right\| = \frac{1}{\|W\| k_N} \sqrt{\sigma'^2 - \left(\theta' \sigma + \frac{\|W\|}{k_N} \right)^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}},$$

$$k_{B^*} = \left\| D_{t_{B^*}} t_{B^*} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2}$$

olarak elde edilir.

Eğer W timelike ise;

$$k_{T^*} = \|D_{t_{T^*}} t_{T^*}\| = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{-\theta'^2 + \|W\|^2},$$

$$k_{N^*} = \|D_{t_{N^*}} t_{N^*}\| = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{-\sigma'^2 - \left(\theta'\sigma - \frac{\|W\|}{k_N}\right)^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}},$$

$$k_{B^*} = \|D_{t_{B^*}} t_{B^*}\| = \sqrt{\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - 1}$$

olarak bulunur.

III.tip için S_1^2 veya H_0^2 a göre geodezik eğrilikler:

W spacelike ise;

$$\gamma_{T^*} = \|\bar{D}_{t_{T^*}} t_{T^*}\| = \frac{\theta'}{\|W\|},$$

$$\gamma_{N^*} = \|\bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*}\| = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{\sigma'^2 - \left[\frac{\|W\|}{k_N} + (\|W\|k_N + \theta'\sigma)\right]^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}},$$

$$\gamma_{B^*} = \|\bar{D}_{t_{B^*}} t_{B^*}\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

olduğu görülür.

Eğer W timelike ise;

$$\gamma_{T^*} = \|\bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*}\| = \frac{\theta'}{\|W\|},$$

$$\gamma_{N^*} = \|\bar{D}_{t_{N^*}} t_{N^*}\| = \frac{1}{\|W\|k_N} \sqrt{-\sigma'^2 + \left[-\frac{\|W\|}{k_N} + (\|W\|k_N + \theta'\sigma)\right]^2 + \frac{k_N'^2}{k_N^4}},$$

$$\gamma_{B^*} = \|\bar{D}_{t_{B^*}} t_{B^*}\| = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

sonuçları elde edilir.

Teorem 4.7.4: (M_2, M_1) III. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin Darboux vektörleri, sırasıyla, W ve W^* olmak üzere, W ile W^* arasında W spacelike ise;

$$\text{i) } W^* = \frac{1}{|\lambda|k}(\theta'N - W), \quad (4.79)$$

W timelike ise;

$$\text{ii) } W^* = \frac{1}{|\lambda|k}(\theta'N + W) \quad (4.80)$$

bağıntıları vardır.

Teorem 4.7.5: (M_2, M_1) III. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. M_1 ve M_2 eğrilerinin W ve W^* Darboux vektörleri yönündeki birim vektörleri, sırasıyla, C ve C^* olmak üzere, C ile C^* arasında W spacelike ise;

$$\text{i) } C^* = -\frac{1}{k_N}C + \sigma N \quad (4.81)$$

W timelike ise;

$$\text{ii) } C^* = \frac{1}{k_N}C + \sigma N \quad (4.82)$$

bağıntıları vardır.

Sonuç 4.7.1: (M_2, M_1) III. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. (C^*) küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu s_{C^*} ile gösterilirse,

W spacelike ise;

$$s_{C^*} = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{k_N'}{k_N^2}\right)^2 - \left(\frac{2\theta'}{k_N}\right)^2 - \sigma'^2} ds, \quad (4.83)$$

W timelike ise;

$$s_{C^*} = \int_0^s \sqrt{\sigma'^2 - \left(\frac{k_N'}{k_N^2}\right)^2} ds \quad (4.84)$$

dir.

Sonuç 4.7.2: (M_2, M_1) III. tipten involüt-evolüt eğri çifti olsun. Eğer M_1 eğrisi bir helis ise (4.81) ve (4.82) denklemlerinden

$$C^* = \mp C$$

elde edilir. Bu durumda (C) ile (C^*) ın geodezik eğrilikleri arasında

$$k_C = k_{C^*} \text{ ve } \gamma_C = \gamma_{C^*}$$

bağıntıları vardır.

5. TARTIŞMA

Bir M_1 eğrisi ve onun involütü olan M_2 eğrisi ele alındığında (M_2, M_1) involüt-evolüt eğri çiftinden bahsedilebilir.

Bir timelike veya spacelike eğrinin involütü için üç durum sözkonusu olacaktır. Birinci olarak bir timelike eğrinin involütü bir spacelike eğri, ikinci olarak spacelike binormalli bir spacelike eğrinin involütü bir timelike eğri ve son olarak da timelike binormalli bir spacelike eğrinin involütü de timelike veya spacelike binormalli bir spacelike eğri olmalıdır. Bu üç durumdan ilki için (M_2, M_1) involüt-evolüt eğri çifti I. tip olarak adlandırıldı. Eğri çiftinin $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktaları arasındaki uzaklığın sabit olduğu, Frenet çatıları, eğrilik ve burulmaları, Darboux vektörleri ve Darboux vektörü yönündeki birim vektörleri arasındaki bağıtlar Zonguldak Karaelmas Üniversitesinde gerçekleştirilen IV. Ulusal Geometri Sempozyumunda bir bildiri olarak sunulmuştur (Bilici ve Çalışkan, 2006). Yapılan literatür araştırmasında II. tip olarak adlandırdığımız (M_2, M_1) involüt-evolüt eğri çifti için $\alpha(s) \in M_1$ ve $\beta(s) \in M_2$ noktaları arasındaki uzaklığın sabit olduğu, eğrilikleri arasındaki ilişkiler ve M_1 eğrisinin eğrilik ve burulmasına bağlı olarak Frenet çatıları arasındaki bağıntılar ifade edilmiştir (Bükcü ve Karacan, 2007). Bu çalışmada üçüncü durum için de benzer hesaplamalar yapılmış ancak üç durum içinde Frenet çatıları arasındaki bağıntılar, M_1 eğrisinin B binormal vektörü ve W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian timelike (spacelike) açı θ olmak üzere, açısal olarak ifade edildi. Bu açısal bağıntılar, küresel göstergelerin tanımlanmasıyla beraber eğri çifti ile ilgili hesaplamaların yapılmasında ve bazı önemli sonuçlara ulaşılmasında büyük kolaylıklar sağladı. Ayrıca üç durum için de eğri çiftlerine karşılık gelen Darboux vektörleri ve sabit pol eğrileri arasındaki bağıntılara yer verildi.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmadan çıkan sonuçlara Bulgular bölümünde yer verildi. İlk önce Lorentz uzayında (M_2, M_1) involüt-evolüt eğri çiftinin Frenet çatıları arasındaki bağıntılar, M_1 eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian timelike (spacelike) açı θ olmak üzere, farklı bir yaklaşımla hesaplandı ve eğri çiftine ait bazı bağıntılar elde edildi.

İkinci olarak çatılar arasındaki bu bağıntılar yardımı ile eğri çiftine ait geodezik eğrilikler karşılaştırılmış ve involüt eğrisi için tanımlanan küresel gösterge eğrilerinin geodezik eğrilikleri ile ilgili bazı orjinal sonuçlar ifade edildi.

Benzer çalışmalar, Frenet çatıları arasında belli bir bağıntı bulunan eğri çiftleri için farklı uzaylarda da yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

- Akutagawa, K., and Nishikawa, S. 1990.** The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space, Tōhoku Math., J. 42, 67-82.
- Bilici, M., 1999** İnvoüt-Evolüt Eğrilerinin Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 49s.
- Bilici, M. and Çalışkan, M., 2001.** On The Geodesic Curvatures of The Spherical Indicatrices of The Pair of Involute-Evolute Curves, Bulletin of Pure and Applied Sciences. Vol. 20E (No:2), P. 367-371.
- Bilici, M. and Çalışkan, M., 2006.** On The Involutives of Timelike Curves in $\mathbb{R}_1^3$, IV. International Geometry Symposium, Zonguldak Karaelmas University (17-21 July 2006).
- Birman, G.S. and Nomizu, K., 1984.** Trigonometry in Lorentzian Geometry, Am. Math. Mont., 91, 543-549.
- Bükcü, B. Karacan, M.K., 2007.** On the Involute and Evolute Curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 2, no. 5, 221-232.
- Bükcü, B. Karacan, M.K., 2007.** On the Involute and Evolute Curves of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space, Demonstratio Math. 40, no.3, 721-732.
- Çalışkan, M. 1980.** Kapalı Uzay Eğrilerinin Diferensiyel Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, İ.Ü. Temel Bilimler Fakültesi, Malatya, 45p.
- Çalışkan, M. and Bilici M., 2002.** Some Characterizations for The Pair of Involute-Evolute Curves in Euclidean Space E^3 , Bulletin of Pure and Applied Sciences. Vol. 21E (No:2), P. 289-294.
- Ekmekçi, N., 1991** Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 53s.
- Fenchel, W., 1951.** On The Differential Geometry of Closed Space Curves, Bull. Amer. Math. Soc. 57, 44-54.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983.** Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:2, Malatya, 894s.
- Millman, R.S., and Parker, G.D., 1977.** Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 265p.

- O’neill, B., 1983.** Semi Riemann Geometry, Academic Press, New York, London, 468p.
- Ratcliffe, J. G.,1994.** Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736p.
- Turgut, A., 1995.,** 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 96p.
- Uğurlu, H.H., 1997.** On The Geometry of Timelike Surfaces, Commun. Fac. Sci. Ank. Series A1 V.46,pp. 211-223.
- Woestijne, V.D.I. 1990** Minimal Surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Proc. Congres “Géométrie différentielle et applications” Avignon (30 May 1988), Word Scientific Publishing. Singapore. 344-369.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa BİLİCİ
Doğum Yeri : Çarşamba
Doğum Tarihi : 20.03.1974
Medeni Hali : Evli ve iki çocuk babasıdır.
Bildiği Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çarşamba Lisesi - 1992
Lisans : O.M.Ü Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği - 1996
Yüksek Lisans: O.M.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü - 1999

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Mardin Yeşilli Namık Kemal İlköğretim Okulu, Öğretmen - 1996
O.M.Ü Eğitim Fakültesi, Araştırma Görevlisi - 1997
Ondokuz Mayıs Üniversitesi Merzifon Meslek Yüksekokulu, Öğretim Görevlisi – 1999
Amasya Üniversitesi Merzifon Meslek Yüksekokulu, Öğretim Görevlisi – 2006

İletişim Bilgileri:

Amasya Üniversitesi Merzifon Meslek Yüksekokulu 05300 Merzifon/AMASYA
mustafa.bilici@amasya.edu.tr, mbilici@omu.edu.tr