

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**2-NORMLU LİNEER UZAYLARDA
DİKLİK VE TİPLERİ
ÜZERİNE**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HAMİYET MERKEPÇİ
TEMMUZ 2009**

**2-Normlu Lineer Uzaylarda Diklik
ve
Tipleri Üzerine**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ**

**Hamiyet MERKEPÇİ
Temmuz 2009**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : 2-Normlu Lineer Uzaylarda Diklik ve Tipleri Üzerine
Öğrencinin, Adı Soyadı : Hamiyet MERKEPÇİ
Tez Savunma Tarihi : 30.07.2009

Prof. Dr. Ramazan KOÇ
F.B.E Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyeleri

İmza

1. Prof. Dr. Adil KILIÇ.....
2. Doç. Dr. Metin BEDİR.....
3. Yrd. Doç. Dr. Sabri BİRLİK.....
4. Yrd. Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN.....
5. Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ.....

ÖZET

2-NORMLU LİNEER UZAYLARDA DİKLİK VE TİPLERİ ÜZERİNE

Hamiyet MERKEPÇİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Temmuz 2009 (97 sayfa)

Bu çalışmada, normlu lineer uzaylardaki diklik kavramı ve tipleri hakkında bazı bilgiler verilecek ve bu kavramlar 2-normlu lineer uzaylara genişletilerek ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir. 2-norm ile birlikte standart 2-iç çarpım uzayı tanımlayabildiğimizden diklik, 2-iç çarpım uzaylarında ele alınacaktır. Bununla birlikte n -normlu lineer uzaylar ve n -iç çarpım uzaylarında diklik kavramı gözden geçirilecektir. Ayrıca Gateaux türevi terimleri cinsinden 2-normlu lineer uzaylar ve 2-iç çarpım uzayları için diklik incelenecektir.

Aynı zamanda reel sayılar üzerinde tanımlanmış φ - fonksiyonu kullanılarak 2-normlu lineer uzaylar yeniden tanımlanmış ve φ -2-normlu lineer uzaylar adını almıştır. Buna göre matematikte bazı kavramları φ -2-normlu lineer uzaylarda tanımlamak mümkün olabilir. Bu çalışmada bazı diklik kavramları φ -2-normlu lineer uzaylarda incelenerek, elde edilen sonuçlar verilecektir.

Anahtar Kelimeler: 2-normlu lineer uzaylar, 2-iç çarpım uzayları, diklikler, φ -fonksiyonu, Gateaux türevleri, φ -2-normlu lineer uzaylar.

ABSTRACT

ON ORTHOGONALITY AND TYPES IN 2-NORMED LINEAR SPACES

Hamiyet MERKEPÇİ

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

July 2009 (pages 97)

In this study, the concept of orthogonality in normed linear space with some information about the types is extended to 2-normed linear spaces and the resulting will be investigated.

Since we can define 2-inner product with 2-norm, orthogonality will be discussed in 2-inner product spaces. However, orthogonality will be reviewed in n -normed linear spaces and n -inner product spaces. Also, orthogonality in linear 2-normed linear spaces and 2-inner product spaces will be investigated in terms of Gateaux derivatives.

Also, using φ -function which defined on real numbers, 2-normed linear spaces are redefined and called φ -2- normed linear spaces. However, some concepts of mathematics may be defined in φ -2- normed linear spaces. In this study, some concept of orthogonality will be investigated and obtained some results.

Key words: Linear 2-normed spaces, 2-inner product spaces, Types of orthogonalities, φ -function, Gateaux derivatives, Linear φ -2-normed spaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde zaman ayırarak bana yol gösteren, yapıcı öneri ve eleştirileriyle çalışmama katkı sağlayan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ'e saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışmada, benden desteklerini esirgemeyen anneme, babama, eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Amaç.....	1
----------------------------------	---

BÖLÜM 2

NORMLU LİNEER UZAYLAR İÇİN DİKLİK BAĞINTILARI

2.1. Genel Normlu Uzaylar için Diklik Bağıntıları ve Özellikleri.....	5
2.2. Dikliğin Teklik Tipleri	12
2.3. Dik Açığortaylar ve Diklik.....	15
2.3.1. Dik Açığortaylar Üzerine	15
2.3.2. Dik Açığortay Dikliği Üzerine.....	17
2.4. Diklik Tipleri.....	20
2.5. ε -Dikliği Üzerine.....	25
2.6. Banach Uzaylarında Genel Diklik	27
2.6.1. Ön Bilgiler.....	27
2.6.2. Temel Sonuçlar	28

BÖLÜM 3

2-NORMLU LİNEER UZAYLAR

3.1. Ön Bilgiler.....	32
3.2. 2-Normlu lineer Uzaylarda Dikliğe Bakış	37
3.3. 2-Boyutlu Durumlar Hakkında Sonuçlar	41
3.4. 2-Normlu lineer Uzaylarda b -Dikliği	42
3.4.1. Giriş.....	42
3.4.2. Temel Sonuçlar	43

3.5. 2-Normlu lineer Uzaylarda b -Genel Dikliği.....	49
3.5.1. Giriş.....	49
3.5.2. Temel Sonuçlar	49
3.6. 2-Normlu lineer Uzaylarda B-Dikliği	52
3.6.1. Temel Kavramlar ve B-Dikliğine göre Kesin konveks 2-Normlu Lineer Uzayların Özellikleri	52
3.7. 2-Normlu lineer Uzaylarda B-Dikliği ve Normlu Bölüm Uzaı Arasındaki Bağını	56
3.8. Bivektörlerin B-Dikliği	57
3.9. 2-Normlu Lineer Uzaylarda İkizkenar Dik Üçlüler	59
3.9.1. Giriş.....	59
3.9.2. İkizkenar Dik Üçlüler.....	59
3.10. n -Normlu Lineer Uzaylarda Diklik.....	70

BÖLÜM 4

φ -2-NORMLU LİNEER UZAYLARDA φ - b -GENEL DİKLİĞİ

4.1. Ön Bilgiler.....	72
4.2. Temel Sonuçlar	73

BÖLÜM 5

2-İÇ ÇARPIM UZAYLARINDA DİKLİK

5.1. Ön Bilgiler.....	76
5.2. n -İç Çarpım Uzaylarında Diklik.....	77
5.3. Gateaux Türevleri.....	80
5.3.1. Ön Bilgiler.....	81
5.4. Diklikler	86

BÖLÜM 6

SONUÇLAR.....	92
----------------------	-----------

KAYNAKLAR.....	93
-----------------------	-----------

Canım oğluma...

I. BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Amaç

C.R. Diminnie, E. Silverman tarafından verilen paralelkenarın alanı kavramını kullanarak, normlu lineer uzaylar için yeni bir diklik bağıntısı bulmuştur. Aynı zamanda bu bağıntı iç çarpım uzaylarının yeni özelliklerini elde etmek için kullanılmıştır. Bu konuda daha başka çalışmalar G. Birkhoff, Y. J. Cho, C. R. Diminnie, R. W. Freese, E. Z. Andalaft ve R. C. James tarafından yapılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, normlu lineer uzaylarda diklik kavramını tanımlayıp, diklik tiplerini inceleyerek bunları 2-normlu lineer uzaylara genişletmek ve kavramlar arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları irdelemektir.

Ayrıca bu çalışma, normlu lineer uzaylar ile 2-normlu lineer uzaylar arasındaki ilişkilerin en son sonuçlarını, 2-iç çarpım uzaylarını, 2-iç çarpım uzaylarında diklik kavramlarını, Gateaux türevleri cinsinden diklik ve ikizkenar dik üçlüler konularını içermektedir. Bu kavramların birçoğu C. R. Diminnie, G. Birkhoff, R. C. James, Carlos Benitez, Hendra Gunawan, Mashadi, S. Gemawati, I. Sihwaningrum, A. Khan, A. Siddiqui, R. W. Freese, Y. J. Cho gibi yazarların çalışmalarından yararlanarak ortaya konmuştur. Bu tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel kavramlar verilecek, ikinci bölümde, normlu uzaylarda diklik ve tipleri hakkında genel bilgiler verilecek, üçüncü bölümde, 2-normlu lineer uzaylarda diklik kavramı ayrıntılı olarak incelenecek, dördüncü bölümde, ϕ – fonksiyonu bazı diklik kavramlarına uygulanacak, beşinci bölümde, 2-iç çarpım uzaylarında Gateaux türevi terimleri cinsinden diklik işlenecektir. Sonuçlar bölümünde ise bu konulara dayanarak yapılan bir çalışma ve bundan elde edilen sonuçlar verilecektir.

Şimdi de tezde verilen teoremleri ve örnekleri daha iyi kavrayabilmek için matematikte önemli yeri olan bazı temel kavramların tanımlarını verelim.

Tanım 1.1.1: X , boş olmayan bir küme ve K , reel veya karmaşık sayılar cismi olsun. X içinde toplama denen, $t: X \times X \rightarrow X$, $t(x, y) = x + y$ dönüşümü ile X içinde sayı ile çarpma adı verilen, $\varsigma: K \times X \rightarrow X$, $\varsigma(\alpha, x) = \alpha x$ dönüşümü tanımlayalım. Eğer bu dönüşümler her $x, y, z \in X$ ile her $\alpha, \beta \in K$ için,

- (1) $x + y = y + x$,
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak biçimde bir $\theta \in X$ vardır,
- (4) $\forall x \in X$ için $x + x' = \theta$ olacak biçimde bir $x' \in X$ vardır,
- (5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- (6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- (7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
- (8) $Ix = x$

koşullarını sağlıyorsa, X kümesine K üzerinde bir lineer uzay adı verilir. Lineer uzay yerine vektör uzayı ifadesi de kullanılır.

Tanım 1.1.2: Bir X lineer uzayında alınan sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n$ öğeleri için $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$ olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ sayıları varsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ öğeleri lineer bağımlıdır denir. Yani; $x_1, x_2, \dots, x_n$ öğelerinin lineer bağımlı olmaları için gerek ve yeter koşul bunlardan birinin, geri kalanların lineer birleşimi olarak yazılabilmesidir. Eğer yukarıdaki bağıntı yalnız ve ancak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ olduğunda sağlanıyorsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ öğeleri lineer bağımsızdır.

Tanım 1.1.3: Sayı cisimleri aynı olan iki lineer uzay X ile Y ve $T: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

ya da buna eşdeğer olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ise T dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir.

Tanım 1.1.4: X , bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Aşağıdaki şartları sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm denir.

$$N1) \quad x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in K,$$

$$N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

üzerinde norm tanımlanan lineer uzaya normlu lineer uzay denir.

Tanım 1.1.5: X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bir $\phi: X \times X \rightarrow K$ şeklinde tanımlı $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle$ fonksiyoneli, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in K$ için,

$$I1) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$I2) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$I3) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,$$

$$I4) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

koşullarını sağlıyorsa $\phi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyoneline bir iç çarpım, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

Tanım 1.1.6: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n_0 \leq n \Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon)$ veya buna eşdeğer olarak $n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.7: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay ve bu uzay içinde bir dizi (x_n) olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n_0 \leq n, m \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.1.8: $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu lineer uzay, X uzayından Y içine bir dönüşüm f ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.1.9: Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinden alınan her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise bu normlu lineer uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.10: İç çarpım uzaylarında $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ eşitliği paralelkenar kuralı olarak bilinir.

Tanım 1.1.11: İç çarpım uzayı indirgendiği norma göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.12: L lineer uzay ve $K \subset L$ olsun. $\forall x, y \in K$ için,

$$A = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset K$$

oluyorsa K ya konveks denir.

Tanım 1.1.13: $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ve $\|x\| = \|x\| = 1$ olması $y = x$ olmasını gerektiriyor ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayına kesin konvektir denir.

Geometrik olarak kesin konveksliğin anlamı, eğer x ve y birim küreye ait ise x ve y nin orta noktaları olan $z = \frac{1}{2}(x + y)$ lerin küreye ait olmaması anlamındadır.

Normlu lineer uzaylardaki kesin konveksliğin aşağıda verilen özellikleri eşdeğerdir.

- 1) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, $x, y \neq 0 \Rightarrow y = \alpha x$ ($\alpha > 0$)
- 2) $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y \Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < 1$,
- 3) $(\cdot, \cdot)$, X üzerinde iç çarpım olsun. $(x, y) = \|x\|\|y\|$ ve $x \neq 0$ ise bazı $\alpha > 0$ için $y = \alpha x$ dir.
- 4) $(\cdot, \cdot)$, X üzerinde bir iç çarpım olsun. $\|y + x\| \leq \|y\|$ ve $(z, y) = 0$ ise $z = 0$ dır.

II. BÖLÜM

NORMLU LİNEER UZAYLAR İÇİN DİKLİK BAĞINTILARI

Normlu lineer uzaylar için diklik bağıntısı, E. Silverman tarafından verilen paralelkenarın alanı kullanılarak tanımlanmıştır. G. Birkhoff ve bazı araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir.

Özellikle de normun özelliklerini içeren tanımlar G. Birkhoff [1], R. C. James [2-4], tarafından verilmiştir. Bu özellikleri kullanarak iç çarpım uzaylarının karakterizasyonu belirlenmiştir.

Şimdi normlu lineer uzaylarda diklik ve özelliklerini ayrıntılı biçimde ele alalım.

2.1. Genel Normlu Uzaylar İçin Diklik Bağınıtları ve Özellikleri

$(X, \|\cdot\|)$ boyutu 1 den büyük normlu lineer uzay olsun. $(X, \|\cdot\|)$ bir iç çarpım uzayı ise en genel diklik tanımı

$x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart $\langle x, y \rangle = 0$ olması biçimindedir.

Buna ek olarak dikliğin aşağıdaki özellikleri belirtilebilir.

1. **Nondegeneracy:** $\lambda x \perp \mu x$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda x = 0$ ya da $\mu x = 0$ olmasıdır.
2. **Sadeleştirme:** Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $x \perp y$ ise $\lambda x \perp \lambda y$ dir.
3. **Süreklilik:** Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \rightarrow x$ ve $(y_n) \rightarrow y$ iken $x_n \perp y_n$ ise $x \perp y$ dir.
4. **Homojenlik:** $x \perp y$ ise $\lambda x \perp \mu y$ dir.
5. **Simetri:** $x \perp y$ ise $y \perp x$ dir.
6. **Toplamsallık:** $x \perp y$ ve $x \perp z$ ise $x \perp y + z$ dir.
7. $x, y \in X$ için $x \perp ax + y$ olacak biçimde a reel sayısı vardır.

Diklik bağıntılarını vermeden önce, kullanılmak üzere Silverman [5-7] tarafından yapılan çalışmayı verelim.

X üzerinde normları 1 e eşit ve küçük olan lineer fonksiyoneller kümesi F olsun. Bu durumda;

$$\|x, y\| = \sup \left\{ \left| \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} \right| : f, g \in F \right\} \quad (1)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\|x, y\|; 0, x, y, x+y$ noktalarından oluşan paralelkenarın alanı olarak düşünülebilir. Bu eşitlik F. Sullivan [8] tarafından normlu lineer uzayların konvekslik özelliklerini gözden geçirmek amacıyla kullanıldı.

Gahler [9] te, bu konuyu 2-norm adını verdiği daha genel bir kavramla çalışmıştır. 2-normun tanımı ve özellikleri tezimizin III. bölümünde yer almaktadır. Burada Gahler in çalıştığı 2-normun önemli bir sonucunu verelim:

$$(X, \|\cdot\|) \text{ iç çarpım uzayı ise } \|x, y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \quad (2)$$

dir. Bu bağıntıyı ve 2-normu göz önünde bulundurarak Diminnie ve Birkhoff dikliklerinin tanımlarını verelim [10].

Tanım 2.1.1: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olsun. Bu durumda

$\|x, y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ eşitliği sağlanıyorsa x, y ye Diminnie-diktir denir ve $x \perp y(D)$ biçiminde gösterilir.

$(X, \|\cdot\|)$ iç çarpım uzayı ise (2) bağıntısındaki $\langle x, y \rangle = 0$ alındığında bu denklem elde edilir.

Şimdi Birkhoff [1] tarafından yapılan diklik tanımını verelim.

Tanım 2.1.2: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olsun. Bu durumda her α reel sayısı için

$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa x, y ye Birkhoff-diktir denir ve $x \perp y(B)$ biçiminde gösterilir.

Ayrıca H, X in alt kümesi olsun. Her $y \in H$ için $x \perp y(B)$ oluyorsa $x \perp H(B)$ dir.

Şimdi Birkhoff dikliğini içeren iki yardımcı önerme verelim.

Yardımcı Önerme 2.1.1: $x \perp y(B)$ olmasını sağlayan $f(x) = \|x\|$ ve $f(y) = 0$ olacak biçimde $f \in F$ fonksiyoneli vardır.

Yardımcı Önerme 2.1.2: $x \perp y(B)$ olması için gerek ve yeter şart $\|x, y\| \geq \|x\| \cdot \|y\|$ olmasıdır.

Teorem 2.1.1: $x \perp bx + y(B)$ olması için gerek ve yeter şart $x \perp a_1x + y$ ve $x \perp a_2x + y$ olmak üzere $a_1 \leq b \leq a_2$ olacak biçimde a_1 ve a_2 sayılarının olmasıdır. Özellikle her $x, y \in X$ için $x \perp ax + y$ olacak biçimde a reel sayısı vardır.

İspat: $x = 0$ olduğunu kabul edelim. Her $y \in X$ için $0 \perp y$ olacağından sonuç aşîkardır. $x \neq 0$ ve $x \perp bx + y(B)$ olduğunu kabul edelim. Yardımcı önerme 2.1.2 den $\|x, y\| = \|x, bx + y\| \geq \|x\| \cdot \|bx + y\|$ elde edilir. $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|tx + y\| = \infty$ olmak üzere $\|tx + y\|$, t nin sürekli fonksiyonu olduğundan $a_1 \leq b \leq a_2$ olacak biçimde

$$\|x\| \cdot \|a_1x + y\| = \|x, y\| = \|x, a_1x + y\|$$

ve

$$\|x\| \cdot \|a_2x + y\| = \|x, y\| = \|x, a_2x + y\|$$

eşitliklerini sağlayan a_1 ve a_2 reel sayıları vardır.

Tanım 2.1.3: $x \neq 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $x \perp ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısı varsa diklik tektir.

Yardımcı Önerme 2.1.3: Diklik toplamsal ise tektir.

İspat: $x \neq 0$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. $x \perp a_1x + y$ ve $x \perp a_2x + y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda dikliğin toplamsallığı ve homojenliğinden $x \perp (a_1 - a_2)x$ olur. Dikliğin temel özelliklerini ve homojenliğini kullanarak $a_1 = a_2$ elde edilir.

$(X, \|\cdot\|)$ iç çarpım uzayı ise (2) bağıntısı, her $x, y \in X$ için $\|x, y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ olmasını gerektirir. Bu eşitsizlik boyutu 3 ve 3 ten büyük normlu lineer uzayların iç çarpım uzayı olduğunu ifade eder.

Aşağıdaki yardımcı önerme Diminnie ve Birkhoff dikliğinin eşdeğer olduğunu gösterir.

Yardımcı Önerme 2.1.4: Her $x, y \in X$ için $\|x, y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ise Diminnie dikliği ve Birkhoff dikliği eşdeğerdir.

İspat: $x, y \neq 0$ için $x \perp y(D)$ ve $x \perp y(B)$ olduğunu varsayalım. Eğer $x \perp y$ ise $\|x\| \cdot \|y\| \geq \|x, y\|$ olduğundan, her a reel sayısı için $\|x + ay\| \cdot \|y\| \geq \|x + ay, y\| = \|x, y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ yazılır ve buradan her $a \in \mathbb{R}$ için $\|x + ay\| \geq \|x\|$ elde edilir ki bu da $x \perp y(B)$ demektir.

Sonuç 2.1.1: x ve y normlu lineer uzayın herhangi iki elemanı olsun. Bu durumda $x \perp ax + y$ olacak biçimde bir a sayısı vardır. Aynı zamanda $x \perp ax + y$ olması için gerek ve yeter şart $|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$ olmasını sağlayan f lineer fonksiyonelinin olmasıdır. $a = -f(y)/f(x)$ alındığında $x \perp ax + y$ ise $|a| \leq \|y\|/\|x\|$ olur.

İspat: Dikliğin tanımından, $x \perp ax + y$ ise her k için $\|x + k(ax + y)\| \geq \|x\|$ yazılır. Burada $k = -1/a$ alınarak $\|x - 1/a(ax + y)\| \geq \|x\|$ yazılabilir ve buradan $\| -y/a \| \geq \|x\|$ elde edilir. Bu da $1/|a| \|y\| \geq \|x\|$ ve $|a| \leq \|y\|/\|x\|$ demektir.

Sıradan Öklid uzayında x ve y vektörleri için $x \perp ax + y$ olması için $a = -\cos \theta \|y\|/\|x\|$ alınır. Burada θ ; x vektörü ve y vektörü arasındaki açıdır. Bu durumda $k \neq 0$ ise $\|x + k(ax + y)\| > \|x\|$ elde edilir. Bununla birlikte; normlu lineer uzayın x ve y elemanları için, eğer uzay kesin konveks ise bu güçlü eşitsizliği sağlamak mümkündür.

Yardımcı Önerme 2.1.5: Diminnie dikliği tek ise Diminnie dikliği ve Birkhoff dikliği eşdeğerdir.

İspat: $x, y \neq 0$ ve $x \perp y$ olduğunu varsayalım. Sonuç 2.1.1 den $x \perp (ax + y)$ olacak biçimde reel a sayısı vardır. Diminnie dikliğinin tekliğinden ve yardımcı önerme 2.1.2. den $a = 0$ olur ve $x \perp y$ elde edilir. Tersine, $x \perp y$ ise yardımcı önerme 2.1.3 ten $a_1 \leq 0 \leq a_2$ olmak üzere $x \perp a_1x + y$ ve $x \perp a_2x + y$ olacak biçimde reel a_1 ve a_2 sayıları vardır. Diminnie dikliğinin tekliğinden $a_1 = a_2 = 0$ olur ve bu nedenle $x \perp y$ elde edilir.

James'e göre boyutu 3 ve 3 ten büyük uzaylarda B-dikliğinin simetrikliği iç çarpım uzaylarını tanımlar [4]. Bu ve yardımcı önerme 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5 i kullanılarak temel amaca ulaşılır.

Teorem 2.1.2: $(X, \|\cdot\|)$, boyutu 3 ve 3 ten büyük normlu uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $(X, \|\cdot\|)$ iç çarpım uzayıdır.
2. B-dikliği simetriktir.
3. B-dikliği ve diklik eşdeğerdir.
4. Her $x, y \in X$ için $\|x, y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
5. $\perp$, tektir.
6. $\perp$, toplamsaldır.

T , normlu lineer uzayında hiperdüzlem şöyle tanımlanır:

Tanım 2.1.3: [3] T nin lineer özalt uzayı tarafından içerilmeyen kapalı M lineer özalt uzayıdır veya böyle bir lineer M alt kümesinin $x + M$ kadar ötelenişidir.

Bu durumda şunu belirtebiliriz ki; normlu lineer uzayın herhangi bir x elemanı için x in dik olduğu $(x \perp H)$ orijinden geçen en az bir H hiperdüzlemi vardır. H nin tekliği, normun diferansiyellenebilir oluşu ve dikliğin toplamsal oluşu ile eşdeğerdir.

Aşağıdaki teorem bu konuda temel bir teoremdir.

Teorem 2.1.3: $f (\neq 0)$, T normlu lineer uzayı üzerinde lineer fonksiyonel olsun.

Bu durumda $x \perp H$ olması için gerek ve yeter şart $|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$ olacak şekilde bir f lineer fonksiyonelinin olmasıdır. Buradaki H , $f(h)=0$ olmasını sağlayan bütün h ların oluşturduğu hiperdüzlemdir.

L , T nin bir lineer alt kümesi olsun. $x \perp L$ olması için gerek ve yeter şart $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ ve $y \in L$ için $f(y)=0$ olacak biçimde f lineer fonksiyoneli olmasıdır. Buna göre $x \perp H$ ve $L \subset H$ elde edilir.

İspat: H , $f(h)=0$ olmasını sağlayan bütün h ların oluşturduğu hiperdüzlem olsun. $|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(h)=0$ olacağından $|f(x+h)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x+h\|$ olur ki buradan her $h \in H$ için $\|f\| \|x\| \leq \|f\| \|x+h\|$ elde edilir. Bu da $x \perp H$ demektir.

Tersine $x \perp H$ ve $|f(x)| = \rho \|x\|$ olduğunu varsayalım. $h \in H$ için $\|x\| \leq \|x+h\|$ dır. Bundan dolayı $|f(x+h)| = |f(x)| = \rho \|x\| \leq \rho \|x+h\|$ olur. H , orijinden geçen bir hiperdüzlem olduğundan $y \in T$ için $|f(y)| \leq \rho \|y\|$ yazılır. Yani $\rho = \|f\|$ ve $|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$ elde edilir.

Teorem 2.1.4: Normlu lineer uzayın herhangi bir elemanı orijinden geçen bazı hiper düzlemlere diktir. Buna rağmen orijinden geçen bir H hiper düzlemi için $x \perp H$ olacak biçimde x elemanının olması gerekmez. Bu sorun, verilen f lineer fonksiyoneli için $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ olmasını sağlayan x elemanı bulmakla eşdeğerdir.

Teorem 2.1.5: x ve y , normlu lineer uzayın sıfır olmayan iki elemanı olsun. Bu durumda $x \perp ax+y$ ve $y \perp by+x$ ise $|a.b| \leq 1$ dir. Eğer diklik simetrik ise $0 \leq a.b \leq 1$ olur.

İspat: Sonuç 2.1.1 den $|a| \leq \|y\|/\|x\|$ ve $|b| \leq \|x\|/\|y\|$ dir. Bu durumda $|a.b| \leq 1$ elde edilir. $y \perp by + x$ ise $k \in \mathbb{R}$ için $\|y + k(by + x)\| \geq \|y\|$ sağlanır. Bu durumda

$k = -\frac{1}{b}$ alınırsa $\left\|y - \frac{1}{b}(by + x)\right\| \geq \|y\|$ yazılır. Buradan $\left|\frac{1}{b}\right|\|x\| \geq \|y\|$ ve $|b| \leq \|x\|/\|y\|$ elde edilir. Buna göre $|a| \leq \|y\|/\|x\|$ ve $|b| \leq \|x\|/\|y\|$ bulunur. Buradan $|a| \leq \|y\|/\|x\|$ ve $|b| \leq \|x\|/\|y\|$ ise $|a| \cdot |b| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|y\|}$ olacağından $|a.b| \leq 1$ sonucuna varılır. Diklik

simetrik ve $x \perp ax + y$ ise $ax + y \perp x$ dir. Bu durumda her k_1 için $\|ax + y + k_1 x\| \geq \|ax + y\|$ sağlanır. $y \perp by + x$ ise her k_2 için $\|y + k_2(by + x)\| \geq \|y\|$ yazılır.

$k_1 = -a$ alınırsa $\|y\| \geq \|ax + y\|$ elde edilir.

$k_2 = \frac{a}{(1-ab)}$ alınırsa $\left\|y + \frac{a}{1-ab}(by + x)\right\| \geq \|y\|$ yazılır.

$$\left\|\frac{y - aby + aby + ax}{1-ab}\right\| \geq \|y\|$$

$$\left\|\frac{y + ax}{1-ab}\right\| \geq \|y\|$$

$$\|y + ax\| \geq |1-ab|\|y\|$$

$$\|y\| \geq |1-ab|\|y\|$$

bulunur ki bu da $|1-ab| \leq 1$ ve $ab \geq 0$ demektir.

Tanım 2.1.4: Soyut Öklid uzayları için,

$$x \perp y \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} \|nx + y\| - \|nx\| = 0 \text{ veya } N_+(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h} \right] = 0 \text{ dır.}$$

Yardımcı Önerme 2.1.6: x ve y normlu lineer uzayda iki eleman, $x \perp Ax + y$ ve $x \perp Bx + y$ olsun. a sayısı A ve B arasında ise $x \perp ax + y$ dir.

İspat: İstenileni göstermek için $A < B$ olduğunu varsayalım.

$x \perp Ax + y$ ise $\|x + k(Ax + y)\| \geq \|x\|$ ve $x \perp Bx + y$ ise $\|x + k(Bx + y)\| \geq \|x\|$ (her k için) yazılır. a sayısı $A \leq a \leq B$ olan herhangi bir sayı olsun.

$k \geq 0$ için,

$$\|x + k(ax + y)\| = \|[1 + k(a - A)]x + k(Ax + y)\| \geq \|[1 + k(a - A)]x\| \geq \|x\|$$

$k \leq 0$ için,

$$\|x + k(ax + y)\| = \|[1 + k(a - B)]x + k(Bx + y)\| \geq \|[1 + k(a - B)]x\| \geq \|x\|$$

yazılır. Bu durumda her k için $\|x + k(ax + y)\| \geq \|x\|$ elde edilir ki bu da $x \perp ax + y$ demektir.

2.2. Dikliğin Teklik Tipleri

x ve y normlu lineer uzayın herhangi iki elemanı olsun. Bu durumda $x \perp ax + y$ ve $by + x \perp x$ olacak biçimde a ve b sayıları vardır. Genelde bu sayılar tek değildir. Bunların tek oluşları, normun diferansiyellenebilir oluşu ve kesin konvekslik ile bağlantılıdır. Diklik simetrik değilse teklik kavramı aşağıdaki biçimleri alabilir.

Tanım 2.2.1: Herhangi bir $x(\neq 0)$ ve y elemanları için $x \perp ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısı varsa diklik sağdan tektir.

Tanım 2.2.2: Herhangi bir $x(\neq 0)$ ve y elemanları için $ax + y \perp x$ olacak biçimde tek bir a sayısı varsa diklik soldan tektir.

Diklik simetrik ise sağdan ve soldan tektir. Ayrıca, $x \perp ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısı var ise bütün $x(\neq 0)$ ve y elemanları için $N_+(x; y) = N_-(x; y)$ dir.

Tanım 2.2.3: T normlu lineer uzayında tanımlı f fonksiyonelinin x noktasında Gateaux diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart T nin her y elemanı için $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x + hy) - f(x)]/h$ olmasıdır. Eğer bu limit mevcutsa, x noktasında Gateaux diferansiyellenebilirdir denir ve $f(x; y)$ biçiminde yazılır.

Soyut Öklid uzayında, normun Gateaux diferansiyeli $N(x; y)$, sıfır olmayan bütün noktalarda vardır ve $(x, y)/\|x\|$ e eşittir. $x \perp y$ olduğunda $(x, y) = 0$ olur. Bu durumda, $x \perp ax + y \Leftrightarrow N(x; ax + y) = 0$ veya $N(x; y) = -a\|x\|$ dir.

Bu ifade normu Gateaux diferansiyellenebilir normlu lineer uzaylara genişletilebilir. Çünkü böyle uzaylarda $N_+(x; y) = N_-(x; y) = -a\|x\|$ dir.

Teorem 2.2.1: T normlu lineer uzay olsun. Bu durumda T nin normu her bir sıfır olmayan noktada Gateaux diferansiyeli meydana getirirse diklik sağdan tektir. Eğer x noktasında normun diferansiyeli $N(x; y)$ varsa bu durumda $N(x; y) = -a\|x\|$ olur ki buradaki a sayısı $x \perp ax + y$ olmasını sağlayan bir sayıdır.

$N(x; y)$, y nin lineer fonksiyonelidir. Eğer $N(x; y)$ var ise $x \perp y$ ve $x \perp z$ iken $x \perp y + z$ olur [11]. Aynı zamanda bunun tersi de doğrudur.

Teorem 2.2.2: Normlu lineer uzayda diklik sağdan tek veya norm her bir sıfır olmayan noktada Gateaux diferansiyellenebilir ise diklik toplamsaldır.

İspat: Diklik sağdan tek olduğunu varsayalım. $x \perp y$ ve $x \perp z$ ise y ve z $x \perp H$ olacak biçimde orijinden geçen bir H hiper düzleme aittir.

Eğer bütün y ler için $x \perp ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısı varsa H tektir.

Buna göre $y + z \in H$ ve $x \perp y + z$ elde edilir.

Tersine, $x \perp ax + y$, $x \perp bx + y$ ve dikliğin toplamsal olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \perp -(bx + y)$ yazılabilir. Toplamsallıktan $x \perp (a - b)x$ dir.

Bunun anlamı, $\|x + k(a - b)x\| \geq \|x\|$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır. Bu da bütün k lar için $a = b$ olmasıdır. Bu yüzden diklik toplamsal ise sağdan tektir.

Diklik toplamsal ise, norm sıfır olmayan bütün noktalarda Gateaux diferansiyellenebilirdir.

Eğer normlu lineer uzayda normun sıfır olmayan her bir noktasında $N(x; y)$ Gateaux diferansiyeli varsa $N(x; y)$, $x \perp H$ olacak biçimde tek bir H düzlemi oluşturur. Eğer $N(x; y)$ var ise, $N(x; y) + N(x; z) = N(x; y + z)$ yazılır ve buna göre $x \perp y$ ve $x \perp z$ için $x \perp y + z$ elde edilir.

x ve y normlu lineer uzayın herhangi iki elemanı olsun. Bu durumda herhangi bir h sayısı için $\|x + h(\alpha_h x + y)\| = \|x - h(\alpha_h x + y)\|$ olacak biçimde α_h sayısı vardır.

$\lim_{h \rightarrow 0} [\|x + h(\alpha x + y)\| - \|x - h(\alpha x + y)\|] / h = 0$ dır. Burada α sayısı, $x \perp \alpha x + y$ olacak biçimde bir a sayısının en büyük ve en küçük değeridir. Eğer diklik sağdan tek ve toplamsal ise normu sıfır olmayan noktalarda diferansiyellenebilir ise α sayısı $x \perp \alpha x + y$ için tektir ve $N(x; \alpha x + y) = 0$ dır.

Dikliğin sağdan tek olması için gerek ve yeter şart normun sıfır olmayan noktalarda Gateaux diferansiyellenebilir olmasıdır. Diklik simetrik olmadıkça soldan teklik bunu sağlamaz. Diklik soldan tek ise uzay kesin konvektir.

Teorem 2.2.3: T , normlu lineer uzayın kesin konveks olması için gerek ve yeter şart dikliğin soldan tek olmasıdır.

İspat: T , kesin konveks olmasın. Bu durumda $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ eşitliği ve herhangi bir t için $x \neq ty$ olacak biçimde x ve $y (\neq 0)$ elemanları vardır. Buna göre

$x + y = [(1-k)x + ky] + kx + (1-k)y$ ve $0 \leq k \leq 1$ için

$\|x + y\| \leq \|(1-k)x + ky\| + k\|x\| + (1-k)\|y\|$ elde edilir. $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ olduğundan $\|(1-k)x + ky\| \geq (1-k)\|x\| + k\|y\|$ yazılır. Fakat $\|(1-k)x + ky\| \leq (1-k)\|x\| + k\|y\|$ olduğundan $0 \leq k \leq 1$ için $\|(1-k)x + ky\| = (1-k)\|x\| + k\|y\|$ elde edilir.

$k = \|x\| / (\|x\| + \|y\|)$ alınırsa, $\|(\|y\|x + \|x\|y)\| = 2\|x\|\|y\|$ bulunur. Ayrıca

$x' = \|y\|x + \|x\|y$ ve $y' = \|y\|x - \|x\|y$ alınarak da $\|x' + y'\| = \|x' - y'\| = \|x\|$ elde edilir.

Bu yüzden $|a| \leq 1$ ise $\|x' + ay'\| = \|x'\|$ ve $|a| \geq 1$ ise $\|x' + ay'\| \geq \|x'\|$ olur. Buradan

$|a| \leq 1$ ise $x' + ay' \perp y$ olur. $y' = 0$ olduğundan $x = (\|x\|/\|y\|)y$ meydana gelir. Bu

bize, kesin konveks olmayan uzayda diklik soldan tek değildir, sonucunu verir.

Buna göre diklik soldan tek ise normlu lineer uzay kesin konvektir.

Birkhoff [1] a göre diklik simetrik ve tek ise boyutu 3 ve 3 ten büyük normlu lineer uzay soyut Öklid uzayıdır. Bu teorem aşağıdaki biçimde genişletilebilir.

Teorem 2.2.4: Boyutu 3 ve 3 ten büyük olan T normlu lineer uzay olsun. Bu durumda T nin soyut Öklid uzayı olması için aşağıdaki şartlardan her biri gerekli ve yeterlidir.

1. Birkhoff dikliği T de simetrik ve toplamsaldır.
2. T kesin konveks olduğunda diklik T de simetrik olur.

T , sürekli fonksiyonların C uzayının lineer alt kümesi olsun. Buna göre diklik için gerekli ve yeterli şart T nin sağdan tek olması ve herhangi f ve g elemanları için g/f nin $|f|$ yi maksimum yapan noktalarda aynı değere sahip olmasıdır. Bu ifade, $|f|$ yi maksimum yapan a sayıları için $g(a)=0$ olduğunu belirtir. Aynı zamanda $|f|$ yi maksimum yapan a sayıları için $g(a)=0$ ise $f \perp g$ dir.

2.3. DİK AÇIORTAYLAR ve DİKLİK

$(E, \|\cdot\|)$ reel normlu uzayda dik açıortayların herhangi bir doğru ile birleştirildiğini düşünelim. Bunu kullanarak iç çarpım uzaylarının bazı özelliklerini verelim. Reel düzlemdeki dik açıortayların özelliklerine dayanarak, $(E, \|\cdot\|)$ içinde yeni bir diklik bağıntısı tanımlayalım.

2.3.1. Dik Açıortaylar Üzerine

$(E, \|\cdot\|)$ boyutu 2 ve 2 den büyük reel normlu uzayda x ve y gibi lineer bağımsız vektörler verilsin. Buna göre $[x, y]$ doğru parçasının dik açıortayı $[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ biçiminde tanımlanabilir. Bu küme olarak $\left\{ \frac{x+y}{2} + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ şeklinde yazılır.

Burada $u \neq 0$, x ve y tarafından gerilen alt uzayın içinde bir vektördür ve $u \perp x-y$ dir. Bu durumda $u = \alpha x + \beta y$ olur. Norm iç çarpımdan meydana geldiğinde ve $u \perp x-y$ olduğunda $\langle u, x-y \rangle = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
\langle u, x-y \rangle = 0 \text{ ise } \langle u, x \rangle - \langle u, y \rangle &= 0 \\
\langle \alpha x + \beta y, x \rangle - \langle \alpha x + \beta y, y \rangle &= 0 \\
\alpha \langle x, x \rangle + \beta \langle y, x \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \beta \langle y, y \rangle &= 0 \\
\alpha \|x\|^2 + \beta \langle y, x \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \beta \|y\|^2 &= 0
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\alpha \|x\|^2 - \alpha \langle x, y \rangle &= \beta \|y\|^2 - \beta \langle y, x \rangle \\
\alpha (\|x\|^2 - \langle y, x \rangle) &= \beta (\|y\|^2 - \langle x, y \rangle)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $u = (\|y\|^2 - \langle x, y \rangle)x + (\|x\|^2 - \langle y, x \rangle)y$ dır.

Burada $\langle x, y \rangle$ yerine aşağıdaki eşitlik alınabilir.

$$\rho'_+(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} \text{ ve benzer biçimde } \rho'_-(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}$$

yazılabilir. Buna göre u vektörü tekrar düzenlendiğinde

$u = (\|y\|^2 - \rho'_+(x, y))x + (\|x\|^2 - \rho'_+(y, x))y$ elde edilir. Bu bilgilerle $[x, y]$ doğru parçasının dik açığıortayını tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
M(x, y) &= \left\{ \frac{x+y}{2} + \lambda u(x, y) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
u(x, y) &= (\|y\|^2 - \rho'_+(x, y))x + (\|x\|^2 - \rho'_+(y, x))y
\end{aligned} \tag{1}$$

Diğer taraftan $[x, y]$ doğru parçasının dik açığıortayı metrik tipinin bir kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$M^*(x, y) = \{ z \in E \mid z \in V(x, y), \|z-x\| = \|z-y\| \} \tag{2}$$

Genelde $M(x, y) \neq M^*(x, y)$ dır. Örneğin; $\mathbb{R}^2$ de taksi-kab normu ile birlikte her

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ yazılır.

Burada $x = (3, 1)$ ve $y = (1, 1)$ alınırsa,

$M(x, y) = \{(2, 1) + \lambda(-4, 4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ve $M^*(x, y) = \{(2, 1) + \mu(0, 1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ elde edilir. Bu kümelerin eşitliği iç çarpım uzayının karakteristik özelliğidir. Şimdi de $\rho'_+(x, y)$ ve $\rho'_-(x, y)$ fonksiyonlarıyla ilgili bazı temel kurallar verelim.

- I. $\rho'_\pm(x, x) = \|x\|^2$ ve $|\rho'_\pm(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$,
- II. $\alpha \geq 0$ için $\rho'_+(\alpha x, y) = \rho'_+(x, \alpha y) = \alpha \rho_+(x, y)$,
- III. $\alpha \leq 0$ için $\rho'_+(\alpha x, y) = \rho'_+(x, \alpha y) = \alpha \rho_-(x, y)$,
- IV. her α için $\rho'_+(x, \alpha x + y) = \rho'_+(x, y) + \alpha \|x\|^2$,
- V. her $x, y \in E$ için E iç çarpım uzayı ise $\rho'_+(x, y) = \rho'_+(y, x)$ dir.

Teorem 2.3.1.1: $(E, \|\cdot\|)$, boyutu 2 ve 2 den büyük reel normlu uzay olsun. Bu durumda $\|x\| = \|y\|$ olmak üzere her $x, y \in E$ için $M(x, y) = V(x + y)$ oluyorsa E iç çarpım uzayıdır.

İspat: $M(x, y)$, $x + y$ tarafından gerilen alt uzayıdır. $\|x\| = \|y\|$ olmak üzere her $x, y \in E$ için $u(x, y) \in V(x, y)$ ve $\|y\|^2 - \rho'_+(x, y) = \|x\|^2 - \rho'_+(y, x)$ elde edilir. Bu nedenle $\rho'_+(x, y) = \rho'_+(y, x)$ eşitliğinden ve ρ'_+ nün özelliğinden E nin iç çarpım uzayı olduğu söylenir.

2.3.2. Dik Açığortay Dikliği Üzerine

Geometrik olarak iç çarpım uzaylarında, sadece eşkenar dörtgenin kenarları tarafından belirlenen doğru parçalarının dik açığortayları onun köşegenleridir. İç çarpım uzaylarında x ve y vektörleri James dikliğine göre diktir. Eşkenar dörtgenin kenarları olarak $x + y$ ve $x - y$ alınırsa teorem 2.3.1.1 e göre $M(x + y, x - y) = V(x)$ elde edilir.

Bu özelliğe dayanarak yeni diklik bağıntısını tanımlayalım.

Tanım 2.3.2.1: [12] Boyutu 2 ve 2 den büyük $(E, \|\cdot\|)$ reel normlu uzayda dik açığortay dikliği

$$M(x + y, x - y) = V(x)$$

ve

$$\rho'_+(x+y, x) = \rho'_+(x-y, x)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $x \perp_M y$ biçiminde tanımlanır.

Örnek 2.3.2.1: $\mathbb{R}^2$ de taksi- kab normu ile birlikte her $x \neq 0$ için $(x, 0) \perp_M (y_1, y_2)$ olması için gerek ve yeter şart $y_1 = 0$ ve $xy_2 < 0$ olmasıdır.

Aşağıdaki yardımcı önerme bu diklik bağıntısının bazı temel özelliklerini içeriyor.

Yardımcı Önerme 2.3.2.1: Dik açıortay dikliği $(\perp_M)$, her $x, y \in E$ ve her $a, t \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlar.

- I. $x \perp_M 0$ ve $0 \perp_M x$ dir.
- II. $x \perp_M x$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.
- III. $x \perp_M tx$ olması için gerek ve yeter şart $tx = 0$ olmasıdır.
- IV. $x \perp_M y$ ise $ax \perp_M ay$ dir.
- V. $x \perp_M y$ ise $x \perp_M -y$ ve $-x \perp_M y$ dir.
- VI. $x \perp_M y$ ve $x, y \neq 0$ ise x ve y lineer bağımsızdır.
- VII. Norm iç çarpımdan elde edilirse $x \perp_M y$ bağıntısı $\langle x, y \rangle = 0$ genel dikliğine eşittir.

Yardımcı Önerme 2.3.2.2: $(E, \|\cdot\|)$, boyutu 2 ve 2 den büyük reel normlu uzay olsun. Bu durumda her $x, y \in E - \{0\}$ ve $i = 1, 2$ için $x + t_i y \perp_M x - t_i y$ olacak biçimde $t_1 > 0$ ve $t_2 < 0$ olan iki tek reel sayı vardır.

İspat: $t_0 > 0$ olsun. Bu durumda $x + t_0 y \perp_M x - t_0 y$ sağlanır.

Buna göre $\|y\|^2 t_0^2 + (\rho'_+(y, x) - \rho'_+(x, y))t_0 - \|x\|^2 = 0$ yazılır. Burada t_0 ,

ikinci dereceden denklemin pozitif köküdür. Bununla birlikte

$$\|y\|^2 t^2 + (\rho'_+(y, x) - \rho'_+(x, y))t - \|x\|^2 = 0$$

denkleminin iki reel kökü vardır. Bunlardan biri pozitif t_1 kökü, diğeri negatif t_2 köküdür.

Sonuç 2.3.2.1: $\rho'_+ = \rho'_-$ eşitliği sağlanıyorsa ve $\perp_M$ dikliği simetrik ise E iç çarpım uzayıdır.

İspat: Her $x, y \in E$ ve $t > 0$ için $x + t_y \perp_M x - t_y$ dir. Buna göre

$$\|y\|^2 t^2 + (\rho'_+(y, x) - \rho'_+(x, y))t - \|x\|^2 = 0 \text{ olur.} \quad (4)$$

Benzer biçimde $\perp_M$ dikliğinin simetrikliğinden

$x - t_y \perp_M x + t_y$ yazılır ve

$$\|y\|^2 t^2 - (\rho'_-(y, x) - \rho'_-(x, y))t - \|x\|^2 = 0 \text{ elde edilir.} \quad (5)$$

Bu durumda (4), (5) ve $\rho'_+ = \rho'_-$ eşitliğinden $\rho'_+(x, y) = \rho'_-(y, x)$ olur. Buradan da E nin iç çarpım uzayı olduğu sonucuna varılır.

Teorem 2.3.2.1: Bu teoreme göre aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- I. E , iç çarpım uzayıdır.
- II. Her $x, y \in E - \{0\}$ için $x \perp_M y$ ise

$$M(x, x+y) = \frac{y}{2} + V(x)$$

ve

$$M(y, x+y) = \frac{x}{2} + V(y) \text{ dir.} \quad (6)$$

- III. $\|u\| = \|v\| = 1$ olacak biçimde her $u, v \in E$ için $u + v \perp_M u - v$ dir. Buna göre eşkenar dörtgenin köşegenleri diktir denilebilir.

- IV. Her $x, y \in E - \{0\}$ ve $a \in \mathbb{R}$ ve $x + ay \perp_M x - ay$ ise (7)

$\|x\| = \|ay\|$ yazılır. Buna göre paralelkenarın köşegenleri dik ise eşkenar dörtgendir.

İspat: (II) şartının sağlandığını varsayalım. $x, y \in E - \{0\}$ için $x \perp_M y$ dir.

Bu durumda (6) dan,

$$M(x, x+y) = \frac{y}{2} + V(x) \text{ ve } M(y, x+y) = \frac{x}{2} + V(y) \text{ olur.}$$

$$\|y\|^2 = \rho'_+(x+y, y) \text{ den}$$

$$\|y\|^2 = \rho'_+(x+y, y) = \|x+y\|^2 - \rho'_-(x+y, x) \text{ yazılır. Buna göre}$$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|y\|^2 + \rho'_-(x+y, x) \\ &\leq \|y\|^2 + \rho'_+(x+y, x) \\ &= \|y\|^2 + \|x\|^2 \end{aligned} \tag{8}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, yardımcı önerme 2.3.2.1 in (V) inden

$$x \perp_M -y \text{ ve } \|x-y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|x\|^2 \tag{9}$$

yazılır. Sonuç olarak, (8) ve (9) dan $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ elde edilir. Bu nedenle E iç çarpım uzayıdır ([13],[14]).

Sonuç 2.3.2.2: Her $x, y \in E - \{0\}$ olmak üzere E nin iç çarpım uzayı olması için

$$\text{gerek ve yeter şart } x + \frac{\|x\|}{\|y\|}y \perp_M x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y \text{ olmasıdır.}$$

Bu kısımda da diklik tiplerini inceleyip tanıyalım.

2.4. Diklik Tipleri

Tanım 2.4.1: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere $x \perp y(D)$ olması için gerek ve yeter şart $\|x, y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ olmasıdır.

Tanım 2.4.2: $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere $x \perp y(B)$ olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ olmasıdır.

Normun en genel özellikleri ve 2-normun (N_2) ve (N_3) özelliklerine göre diklik simetrik ve homojendir. X , boyutu 3 ve 3 ten büyük normlu lineer uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. X bir iç çarpım uzayıdır.
2. Diminnie dikliği toplamsaldır.
3. Diminnie dikliği, Birkhoff dikliğine eşdeğerdir.

Yani X , normlu lineer uzay olmak üzere Birkhoff dikliği simetrik yada toplamsal ise X iç çarpım uzayıdır.

James, ikizkenar dikliğini şöyle tanımlar.

Tanım 2.4.3: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart $\|x + y\| = \|x - y\|$ olmasıdır.

Bu tanıma göre, $x \perp y$ iken $y \perp x$ ve her α reel sayısı için $\alpha x \perp \alpha y$ elde edilir.

Aynı zamanda her α reel sayısı için $x \perp y$ iken $x \perp \alpha y$ oluyorsa $(X, \|\cdot\|)$, bir iç çarpım uzayıdır. Yani X bir iç çarpım uzayı olduğunda James'in ikizkenar dikliği yukarıdaki homojenlik ve toplamsallık özelliğini sağlar.

Tanım 2.4.4: X normlu lineer uzay ve $x, y \in X$ olmak üzere

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

eşitliği sağlanıyorsa Pisagor dikliği meydana gelir. $x \perp y$ iken $y \perp x$ ve $\alpha x \perp \alpha y$ olur ki bu hipotez bize Pisagor dikliğinin simetrik ve homojen olması için X in bir iç çarpım uzayı olması gerektiğini söyler.

Tanım 2.4.5: Pisagor ve ikizkenar dikliğinin genelleştirilmiş haline α -dikliği denir.

Buna göre $x, y \in X$ olmak üzere,

$$x \perp y \Leftrightarrow (1 + \alpha^2) \|x + y\|^2 = \|x + \alpha y\|^2 + \|y + \alpha x\|^2 \text{ sağlanıyorsa } \alpha\text{-dikliği meydana}$$

gelir. $\alpha = 0$ olması halinde Pisagor dikliğine, $\alpha = -1$ olması halinde ikizkenar dikliğine dönüşür.

X normlu lineer uzay olmak üzere, $\alpha \neq -1$ için homojenlik ve toplamsallık özelliği X in iç çarpım uzayı olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.6: Pisagor ve ikizkenar dikliklerinin daha da genelleştirilmiş haline (α, β) -dikliği denir. Buna göre,

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x - y\|^2 + \|\alpha x - \beta y\|^2 = \|x - \beta y\|^2 + \|y - \alpha x\|^2$$

dir. Buna göre $(0, 0)$ noktası için pisagor dikliği, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$ noktaları için ikizkenar dikliği meydana gelir.

(α, β) -dikliğinin homojenliği, simetrikliği, sağdan ve soldan toplamsallığı genel biçimde tanımlanır. Özellikle (α, β) -dikliğinin soldan toplamsallığına göre her $x, y, z \in X$ için $x \perp z$ ve $y \perp z$ ise $x + y \perp z$ dir. Benzer biçimde (α, β) -dikliği sağdan toplamsaldır. Buna göre, her $x, y, z \in X$ için $x \perp y$ ve $x \perp z$ iken $x \perp y + z$ dir. Aynı zamanda $a, b \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in X$ için (α, β) -dikliği, $x \perp y \Rightarrow ax \perp by$ şartını sağlayarak homojendir.

Buna göre, reel sayılar üzerinde tanımlı X normlu lineer uzayı için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. (α, β) -dikliği homojendir.
2. (α, β) -dikliği simetrik ve soldan toplamsaldır.
3. (α, β) -dikliği simetrik ve sağdan toplamsaldır.
4. (α, β) -dikliği sağdan ve soldan toplamsaldır.
5. $(X, \|\cdot\|)$, iç çarpım uzayıdır.

Alan dikliği şöyle tanımlanır.

Tanım 2.4.7: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart ya $\|x\| \cdot \|y\| = 0$ olması ya da x ve y lineer bağımsız elemanlarının oluşturduğu doğruların, oluşturulan düzlemdeki birim küreyi dört eşit alana bölmesidir. Alan dikliğinin homojen olduğu söylenebilir.

Tanım 2.4.8: Carlsson dikliği daha genel bir diklik çeşididir. Buna göre

$m \geq 2$ ve $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_{k=1}^m a_k \|b_k x + c_k y\|^2 = 0$ olmasıdır. Burada

$$\sum_{k=1}^m a_k . b_k . c_k = 1 \text{ ve } \sum_{k=1}^m a_k . b_k^2 = \sum_{k=1}^m a_k . c_k^2 = 0 \text{ dır.}$$

Carlsson dikliği bazı durumlarda Pisagor ve İkizkenar dikliği gibi simetriktir.

Boussous dikliği öncekilerin hepsini içerir. Boussous kendi dikliğini şöyle tanımlar.

Tanım 2.4.9: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart

$$\int_{\Omega} \alpha(w) \|\beta(w)x + \gamma(w)y\|^2 \partial\mu(w) = 0$$

olmasıdır. Burada, (Ω, μ) pozitif ölçüm uzayı ve $\alpha, \beta, \gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μ -ölçülebilir fonksiyonlardır. $\alpha\beta^2$ ve $\alpha\gamma^2$ μ -integrallenebilirdir ve $\alpha(w) \neq 0$ μ h.h.y. dir. Buradan

$$\int_{\Omega} \alpha(w) \beta^2(w) \partial\mu(w) = \int_{\Omega} \alpha(w) \gamma^2(w) \partial\mu(w) = 0, \quad \int_{\Omega} \alpha(w) \beta(w) \gamma(w) \partial\mu(w) = 1$$

sağlanır.

Singer, dikliği şöyle tanımlar.

Tanım 2.4.10: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|x\| . \|y\| = 0 \text{ ya da } \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| \text{ olmasıdır. Buna göre, Singer dikliği}$$

simetrik ve homojendir.

X , normlu lineer uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler Singer dikliğine eşdeğerdir.

1. X , iç çarpım uzayıdır.
2. X in birim yuvar elemanları x, y olmak üzere $x \perp \alpha x + y$ ise $|\alpha| \leq 1$ dir.
3. X in birim yuvar elemanları x, y olmak üzere $x + y \perp x - y$ dir.

Singer dikliği sadece ikizkenar dikliği biçimine getirilebilir. Ayrıca Singer dikliği 2-boyutlu normlu lineer uzayda toplamsaldır.

Bazı yazarlar Roberts dikliğini şöyle yorumlar.

Tanım 2.4.11: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart

her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\|$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Yükseklik dikliği şöyle tanımlanır.

Tanım 2.4.12: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter koşul

$h_1(x, y) = y + \frac{\|y\|^2 - \rho_+(x, y)}{\|x - y\|^2(x - y)}$ olmasıdır. Burada $\rho_+(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x - ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}$ dir.

X , normlu lineer uzay olmak üzere, bu diklik için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. X , normlu lineer uzayı iç çarpım uzayıdır.
2. $\forall x, y \in X$ ve $\|x\| = \|y\| = 1$ için $h_1(x, y) + h_1(y, x) = x + y$
3. $\forall x, y \in X$ ve $\|x\| = \|y\| = 1$ için $h_1(x, y) = \frac{x + y}{2}$
4. $\forall x, y \in X$ ve $\|x\| = \|y\| = 1$ için $h_1(x, y) = h_1(y, x)$
5. $\forall x, y \in X$ için $x \perp y$ ise $x \perp -y$ dir.

Açıortay dikliği şöyledir.

Tanım 2.4.13: $x \perp y$ olması için gerek ve yeter şart $\rho_+(x + y, x) = \rho_+(x - y, x)$

olmasıdır. Burada $\rho_+(x, y)$, yükseklik dikliğinde olduğu gibidir. Açıortay dikliği aynı zamanda şu özellikleri sağlar:

- I. $x \perp y$ ise $\alpha x \perp \alpha y$ dir.
- II. $x \perp y$ ise $x \perp -y$ dir.
- III. $x \perp y$ ise $-x \perp y$ dir.

2.5. ε -dikliği üzerine

Bu kısımda ε -dikliği ile ilgili bazı tanım ve teoremler verelim [15].

Tanım 2.5.1: X , normlu lineer uzay ve $G \subset X$ olsun. $f \in X$ ve her $g \in G$ için $\|f - g_0\| \leq \|f - g\|$ oluyorsa $g_0 \in G$ noktası $f \in X$ için en iyi yaklaşımdır. Benzer biçimde $f \in X$ ve her $g \in G$ için $\|g_0 - g\| \leq \|f - g\|$ oluyorsa $g_0 \in G$ noktası $f \in X$ için en iyi yardımcı yaklaşımdır.

G içinde $f \in X$ in en iyi yaklaşıklarının kümesi $P_G(f)$ biçiminde gösterilir. Yine G içinde $f \in X$ in en iyi yardımcı yaklaşıklarının kümesi $R_G(f)$ biçiminde gösterilir.

X , normlu lineer uzay $G \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda her $g \in G$ için $\|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \varepsilon$ oluyorsa $g_0 \in G$, $f \in X$ için en iyi ε -yaklaşımdır.

Her $f \in X$ için, G içinde f nin en iyi ε -yaklaşıklarının kümesi $P_G(f, \varepsilon)$ biçiminde gösterilir.

Diğer bir deyişle; $P_G(f, \varepsilon) = \{g_0 \in G : \|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \varepsilon, \forall g \in G\}$ dir.

$P_G(f, \varepsilon)$, X in boş olmayan, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. Aynı zamanda G kapalı ise her $f \in X$ için $P_G(f, \varepsilon)$ kapalıdır.

Tanım 2.5.2: X , normlu lineer uzay, $G \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Buna göre $\|g_0 - g\| \leq \|f - g\| + \varepsilon$ oluyorsa $g_0 \in G$ noktası $f \in X$ için en iyi ε -yardımcı yaklaşımdır.

G içinde f nin en iyi ε -yardımcı yaklaşıklarının kümesi $R_G(f, \varepsilon)$ biçiminde gösterilir. Yani $R_G(f, \varepsilon) = \{g_0 \in G : \|g_0 - g\| \leq \|f - g\| + \varepsilon, \forall g \in G\}$ dir.

G konveks ise $R_G(f, \varepsilon)$ konvektir ve

her $f \in G$ için $P_G(f, \varepsilon) = R_G(f, \varepsilon) = B(f, \varepsilon) \cap G$ yazılır.

Burada $B(f, \varepsilon) = \{g \in X : \|f - g\| \leq \varepsilon\}$ dir. Aynı zamanda G kapalı ise her $f \in X$ için $R_G(f, \varepsilon)$ kapalıdır.

X , normlu lineer uzay ve $f, g \in X$ ise her α skaleri için $f \perp g$ olması için gerek ve yeter şart $\|f\| \leq \|f + \alpha g\|$ olmasıdır. Aynı zamanda G_1 ve G_2 , X in alt kümeleri olmak üzere her $g_1 \in G_1$ ve $g_2 \in G_2$ için $G_1 \perp G_2$ ise $g_1 \perp g_2$ dir.

Tanım 2.5.3: X , normlu lineer uzay $\varepsilon > 0$ ve $f, g \in X$ olsun. Her $|\alpha| \leq 1$ skaleri için $f \perp_\varepsilon g \Leftrightarrow \|f\| \leq \|f + \alpha g\| + \varepsilon$ sağlanıyorsa f, g ye ε -diktir denir.

G_1 ve G_2 , X in alt kümeleri olmak üzere her $g_1 \in G_1$ ve $g_2 \in G_2$ için $g_1 \perp_\varepsilon g_2$ ise $G_1 \perp_\varepsilon G_2$ dir.

Teorem 2.5.1: X , normlu lineer uzay $G \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $f \in X$ için $g_0 \in P_G(f, \varepsilon) \Leftrightarrow f - g_0 \perp_\varepsilon G$ ve $g_0 \in R_G(f, \varepsilon) \Leftrightarrow G \perp_\varepsilon f - g_0$ dir.

İspat: $g_0 \in P_G(f, \varepsilon)$ olduğunu varsayalım. Her $g \in G$ ve $|\alpha| \leq 1$ için $g' = g_0 - \alpha g$ alalım. $g_0 \in P_G(f, \varepsilon)$ ve $g' \in G$ olduğundan,

$$\|f - g_0\| \leq \|f - (g_0 - \alpha g)\| + \varepsilon \text{ olur ki buradan } f - g_0 \perp_\varepsilon G \text{ elde edilir.}$$

Tersine, $f - g_0 \perp_\varepsilon G$ olsun. Her $|\alpha| \leq 1$ ve $g' \in G$ için $\|f - g_0\| \leq \|f - g_0 + \alpha g'\| + \varepsilon$ yazılır. $g' = g - g_0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa her $g \in G$ için $\|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \varepsilon$ elde edilir. Bu yüzden $g_0 \in P_G(f, \varepsilon)$ olur.

Şimdi $g_0 \in R_G(f, \varepsilon)$ ve $g \in G$ olduğunu varsayalım. $|\alpha| \leq 1$ ve $\alpha \neq 0$ için $g' = g_0 - \frac{1}{\alpha}g$ alalım. $g_0 \in R_G(f, \varepsilon)$ olduğundan $\|g_0 - g'\| \leq \|f - g\| + \varepsilon$ yazılır.

Buradan $\left\| \frac{1}{\alpha} g \right\| \leq \left\| f - g_0 + \frac{1}{\alpha} g \right\| + \varepsilon$ veya

buna eşdeğer olarak $\|g\| \leq \|g + \alpha(f - g_0)\| + |\alpha|\varepsilon \leq \|g + \alpha(f - g_0)\| + \varepsilon$ yazılabilir. Bu nedenle $g \perp_{\varepsilon} f - g_0$ ve $G \perp_{\varepsilon} f - g_0$ elde edilir.

Teorem 2.5.2: X , normlu lineer uzay ve $G \subset X$ olsun. Bu durumda

- I. $\varepsilon > 0$, $f, g \in X$ ve $f \perp_{\varepsilon} g$ ise her $\delta \geq \varepsilon$ için $f \perp_{\delta} g$ dir.
- II. $f, g \in X$ ve $f \perp g$ ise her $\varepsilon > 0$ için $f \perp_{\varepsilon} g$ dir.
- III. $f \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $0 \perp_{\varepsilon} f$ ve $f \perp_{\varepsilon} 0$ dir.
- IV. $f \perp_{\varepsilon} g$ ve $|\beta| < 1$ ise $\beta f \perp_{\varepsilon} \beta g$ dir.
- V. $f \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\delta \geq \varepsilon$ ise bu durumda $g_0 \in P_G(f, \varepsilon) \Rightarrow g_0 \in P_G(f, \delta)$ ve $g_0 \in R_G(f, \varepsilon) \Rightarrow g_0 \in R_G(f, \delta)$ sağlanır.

2.6. Banach Uzaylarında Genel Diklik

Burada Banach uzaylarında genel dikliğin bazı özelliklerini tanımlatıp bunlarla ilgili sonuçlar elde edelim. Bu sonuçlar Hilbert uzaylarındaki sonuçlara benzerdir. Düzgün uzaylarda bu içerikle Birkhoff dikliği arasındaki bağıntıyı göz önünde bulunduralım.

2.6.1. Ön Bilgiler

B reel Banach uzayı, B^* bu uzayın eşlenik uzayı, $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|^*$ ise B ve B^* uzaylarının normları olsunlar. $J : B \rightarrow B^*$ eşlemesi $\langle Jx, x \rangle = \|Jx\|_* \|x\| = \|x\|^2$ eşitliği ile tanımlanır. Aynı zamanda J , birebir operatördür ve $J^{-1} = J^*$ dir. J^{-1} , J nin ters operatörüdür. $J^* : B^* \rightarrow B$, B^* da normalleştirilmiş dual eşlemedir. Bu yüzden $J^* J = I_B$ ve $J J^* = I_{B^*}$ dir.

Burada $I_B : B \rightarrow B$ ve $I_{B^*} : B^* \rightarrow B^*$ biçiminde tanımlanan operatörlerdir. Herhangi bir $x \in B$ için, $\phi = Jx$ ve dolayısıyla $x = J^* \phi$ olacak biçimde tek bir $\phi \in B^*$ vardır.

Birçok yazar dikliği farklı yollarla tanımlamıştır [1], [16–19].

Birkhoff'un tanımına göre, $x, y \in B$ olmak üzere her α skaleri için $x \perp^{BG} y$ olması için gerek ve yeter şart $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$ olmasıdır [20].

Şimdi Banach uzaylarında genel dikliğe bakalım.

Tanım 2.6.1.1: B reel Banach uzayı, $x, y \in B$ olsun. Bu durumda $\langle Jx, y \rangle = 0$ veya $\phi_x(x) = \|x\|^2$, $\|\phi_x\| = \|x\|$ ve $\phi(y) = 0$ olacak biçimde $\phi_x \in B^*$ varsa x, y ye genel diktir denir ve $x \perp^G y$ biçiminde gösterilir [20].

İlk olarak temel sonuçların ispatı için gerekli olan aşağıdaki yardımcı önermeyi verelim.

Yardımcı Önerme 2.6.1.1: B reel Banach uzayı, $x, y \in B$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [18].

1. $x \perp^{BG} y$.
2. X üzerinde, $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(x) = \|x\|$ ve $\Lambda(y) = 0$ olacak biçimde Λ lineer fonksiyoneli vardır.

2.6.2. Temel Sonuçlar

Bu bölümde Banach uzaylarında genel dikliğin bazı özellikleri ifade ve ispat edilecektir [21].

Teorem 2.6.2.1: B reel Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a) Her $x \in B$ ve her $\alpha > 0$ için, $\phi_{\alpha x} = \alpha \phi_x$ dir.
- b) Her $x, y \in B$ ve her $\alpha > 0$ için, $x \perp^G y$ ise $\alpha x \perp^G y$ dir.
- c) Her $x \in B$ için $x \perp^G x$ ise $x = 0$ dir.
- d) Her $x, y \in B$ için $x \perp^G y$ ve $x \neq 0$ ise $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$ dir.
- e) Her $x \in B$ için $0 \perp^G x$ ve $x \perp^G 0$ dir.

İspat: a) $x \in B$ ve $\alpha > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\phi_{\alpha x}(\alpha x) = \|\alpha x\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2$$

$$\phi_{\alpha x}(\alpha x) = \alpha^2 \phi_x(x)$$

$$\alpha \phi_{\alpha x}(x) = \alpha^2 \phi_x(x) \text{ yazılır. Buradan}$$

$$\phi_{\alpha x}(x) = \alpha \phi_x(x) \text{ elde edilir ki bu da } \phi_{\alpha x} = \alpha \phi_x \text{ demektir.}$$

b) $x, y \in B$, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ olduğunu kabul edelim.

$$\alpha^2 \|x\|^2 = \alpha^2 \|x + \beta y\|^2$$

$$\alpha^2 \|x\|^2 = \|\alpha(x + \beta y)\|^2$$

$$= \|\alpha x\|^2 + \|\alpha^2 y\|^2$$

$$= \|\alpha x\|^2$$

$$= \phi_x(\alpha x) \text{ elde edilir ki } \alpha x \perp^G y \text{ demektir.}$$

c) Her $x \in B$ için $x \perp^G x$ olması $\phi_x(x) = 0$ olması demektir. $\phi_x(x) = \|x\|^2$

olduğundan $\|x\|^2 = 0$ dır. Buradan da $x = 0$ elde edilir.

d) Her $x, y \in B$ için $x \perp^G y$ ve $x \neq 0$ ise $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$ dır. Bu durumda

$z \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ alalım. Buna göre, herhangi c_1 ve c_2 skalerleri için $z = c_1 x = c_2 y$

yazılır. $\phi_x(z) = 0$ olduğundan $\phi_x(c_1 x) = 0$ olmalıdır. $x \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ ve

$z = 0$ dır.

e) Aşıkardır.

Tanım 2.6.2.1: B , reel Banach uzayı olsun. $x \in B$ için $f(x) = \|x\|$ ve $\|f\| = 1$ olacak

biçimde sadece bir $f \in B^*$ varsa x elemanı normaldir.

Teorem 2.6.2.2: B , reel Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1) $x, y \in B$ için $x \perp^G y$ ise $x \perp^{BG} y$ dir.

2) $x(\neq 0) \in B$ normal eleman, $y \in B$ olmak üzere $x \perp^{BG} y$ ise $x \perp^G y$ dir.

İspat: a) $x, y \in B$ ve $x \perp^G y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \phi_x(x) = \phi_x(x + \alpha y) \\ &\leq \|\phi_x\| \|x + \alpha y\| = \|x\| \|x + \alpha y\|\end{aligned}$$

yazılır. Bu yüzden $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$ elde edilir ki $x \perp^{BG} y$ demektir.

b) Biliyoruz ki $x \perp^{BG} y$ ve $\alpha > 0$ ise $\alpha x \perp^{BG} y$ dir. Bu yüzden $X = \frac{x}{\|x\|} \perp^{BG} y$

yazabiliriz. x normal olduğundan, $\phi_x(X) = 1$, $\|\phi_x\| = 1$ ve $\phi_x(y) = 0$ olacak biçimde

tek bir $\phi_x \in B^*$ vardır. Teorem 2.6.2.1 den $\phi_x = \frac{1}{\|x\|} \phi_x$ dir. Bu yüzden $\phi_x(x) = \|x\|^2$,

$\|\phi_x\| = \|x\|$ ve $\phi(y) = 0$ olacak biçimde tek bir $\phi_x \in B^*$ vardır. Yani $x \perp^G y$ olur.

Her $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert uzayı düzgün uzaydır. Bu yüzden her $x \in H$ normaldir. Bu durumda şu sonuca varılır.

Sonuç 2.6.2.1: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ reel Hilbert uzayı, $x, y \in H$ olsun. $x \perp^G y$ ise $\langle x, y \rangle = 0$ dir.

Tanım 2.6.2.2: B , reel Banach uzayı olsun. $y \perp^G x$ ve $z \perp^G x$ ise $y + z \perp^G x$ oluyorsa genel diklik G -toplamsaldır.

Tanım 2.6.2.3: B reel Banach uzayı, $M \subset B$ ve $x \in B$ olsun. Bu durumda

$\phi_x(x) = \|x\|^2$, $\|\phi_x\| = \|x\|$ ve her $y \in M$ için $\phi(y) = 0$ olacak biçimde tek bir $\phi_x \in B^*$ varsa $x \perp^G M$ dir. $x - y_0 \perp^G M$ olmasını sağlayan $y_0 \in M$ elemanı $x \in B$ nin G -en iyi yaklaşım elemanıdır.

Sonuç 2.6.2.2: B , reel Banach uzayı, $x \in B$ olsun. $y_0 \in M$, $x \in B$ nin G -en iyi yaklaşım elemanı ise x in en iyi yaklaşığı y_0 dir.

Teorem 2.6.2.3: B , reel Banach uzayı $x \in B$ ve $M \subset B$ olsun. Genel diklik G -toplamsal ise $x - y_0 \perp^G M$ olmasını sağlayan tek bir $y_0 \in M$ vardır.

İspat: $y_1, y_2 \in M$ ve $i=1,2$ için $x-y_i \perp^G M$ olduğunu varsayalım. Bu yüzden her $y \in M$ ve $i=1,2$ için $x-y_i \perp^G y$ dir. Diklik G -toplamsal olduğundan $y_2 - y_1 = (x - y_1) - (x - y_2) \perp^G y$ yazılır. $y = y_1 - y_2$ alınırsa $y_1 - y_2 \perp^G y_1 - y_2$ elde edilir ki teorem 2.6.2.1 den $y_1 - y_2 = 0$ ve buradan da $y_1 = y_2$ olur.

III. BÖLÜM

2-NORMLU LİNEER UZAYLAR

2-normlu lineer uzaylar konusu ilk olarak Siegfried Gahler [22] tarafından ele alınmıştır. Daha sonra bu konu başka matematikçiler tarafından geniş bir şekilde çalışılmış ve geliştirilmiştir. Özellikle 1999-2003 yılları arasında, Zofia Lewandowska [23-25], yayınladığı makalelerle genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar konusunu incelemiştir.

Şimdi de tezde verilen teoremleri ve örnekleri daha iyi kavrayabilmek için 2-normlu lineer uzaylarla ilgili temel tanımları ve kavramları verelim.

3.1. Ön Bilgiler

İlk olarak, 2-normlu lineer uzayın tanımını verelim.

Tanım 3.1.1: X , boyutu 1 den büyük olan bir reel lineer uzay ve $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlarsa $\|\cdot, \cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde 2-norm ve $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ikilisine de 2-normlu lineer uzay denir.

$$2N1) \quad \|x, y\| = 0 \text{ ancak ve ancak } x \text{ ve } y \text{ lineer bağımlı,}$$

$$2N2) \quad \|x, y\| = \|y, x\|,$$

$$2N3) \quad \text{Her } \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|,$$

$$2N4) \quad \|x + y, z\| \leq \|x, y\| + \|y, z\|.$$

Normun boyutu ile ilgili olarak 2-normlu lineer uzay kavramı, 2-boyutlu normlu lineer uzay kavramına benzerdir. Fakat 2-normlu uzaylarla normlu uzaylar arasında dikkate değer bir ilişki yoktur. $(X, \|\cdot, \cdot\|)$, normlu uzayı ile X üzerinde herhangi bir 2-

norm oluşturmak mümkün değildir. Her normlu uzay yerel konveks topolojik uzaydır [26] .

Tanım 3.1.2:[27] X ve Y birer lineer uzay ve $\emptyset \neq D \subset X \times Y$ olsun. Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $D_x = \{y \in Y : (x, y) \in D\}$ ve $D^y = \{x \in X : (x, y) \in D\}$ kümeleri sırasıyla Y ve X in birer lineer alt uzayları olsunlar.

$$G2N1) \text{ Her } (x, y) \in D \text{ için } \|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\| = \|\alpha x, y\|$$

$$G2N2) \text{ Her } (x, y), (x, z) \in D \text{ için } \|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$$

$$G2N3) \text{ Her } (x, z), (y, z) \in D \text{ için } \|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$$

koşullarını sağlayan $\|.,.\| : D \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna D üzerinde genelleştirilmiş 2-norm, $(D, \|.,.\|)$ ikilisine de 2-normlu küme denir. Özel olarak $D = X \times Y$ alınırsa $(X \times Y, \|.,.\|)$ ikilisine genelleştirilmiş 2-normlu uzay denir.

Genelleştirilmiş 2-normlu uzaylar sınıfı, bilinen normlu uzaylar sınıfından daha geniştir. Her normlu uzaydan genelleştirilmiş 2-normlu bir uzay oluşturulabilir. Örneğin; $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(X, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay olsunlar. Bu durumda $\|x, y\| = \|x\|_1 \cdot \|x\|_2$ ifadesi $X \times Y$ üzerinde bir genelleştirilmiş 2-normdur. Ayrıca, A bir Banach cebiri ve her $a, b \in A$ için $\|a, b\| = \|ab\|$ olmak üzere $(A, \|.,.\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzaydır.

Tanım 3.1.3: X bir lineer uzay, $D \subseteq X \times X$ kümesi 2-normlu bir küme ve Y normlu uzay olsun. $f : D \rightarrow Y$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa f ye 2-lineer denir.

$$2L1) x_1, x_2, y_1, y_2 \in X \text{ ve } x_1, x_2 \in D^{y_1} \cap D^{y_2}$$

olmak üzere $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$ dir.

$$2L2) \text{ Her } \delta \text{ ve } \lambda \text{ sayıları ve } (x, y) \in D \text{ için } f(\delta x, \lambda y) = \delta \lambda f(x, y) \text{ dir.}$$

Ayrıca $\forall (x, y) \in D$ için $|f(x, y)| \leq M \|x, y\|$ olacak biçimde pozitif M sayısı varsa 2-lineer f fonksiyonuna sınırlıdır denir.

Tanım 3.1.4: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall y_1, y_2 \in Y$ için $f(x_1 + x_2, y) \leq f(x_1, y) + f(x_2, y)$ ve $f(x, y_1 + y_2) \leq f(x, y_1) + f(x, y_2)$ koşulları sağlanıyorsa f ye her bir değişkende alt toplamsal fonksiyon denir. Her $(x, y) \in X \times Y$ için $|f(x, y)| \leq M \|x, y\|$ olacak biçimde pozitif M sayısı varsa, f ye sınırlıdır denir.

Tanım 3.1.5: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay olsun. W_1 ve W_2 sırasıyla X ve Y nin alt uzayları olsunlar. Bu durumda, her $(x, y) \in X \times Y$ için $\|x - w_0, y - g_0\| = \inf_{(w, g) \in W_1 \times W_2} \{\|x - w, y - g\|\}$ olacak biçimde $(w_0, g_0) \in W_1 \times W_2$ varsa $W_1 \times W_2$ ye 2-proximal denir. Bu durumda (w_0, g_0) ikilisine (x, y) nin 2-en iyi yaklaşımı denir. (x, y) nin $W_1 \times W_2$ deki bütün 2-en iyi yaklaşımlarının kümesi $P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve $S \subset X \times Y$ olsun. Eğer δ_1 ve δ_2 sabitleri için $\|x + \delta_1 a, y + \delta_2 b\| \geq \|x, y\|$ koşulu sağlanıyorsa $(x, y) \in X \times Y$ elemanı $(a, b) \in X \times Y$ elemanına diktir denir ve $(x, y) \perp (a, b)$ biçiminde yazılır. Ayrıca $(x, y) \in X \times Y$, S nin her elemanına dik ise $(x, y) \perp S$ denir.

Teorem 3.1.1: $(X \times Y, \|\cdot, \cdot\|)$ genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve W_1, W_2 sırasıyla X ve Y nin alt uzayları olsunlar. $(x, y) \in X \times Y$ alalım. Bu durumda $(w_0, g_0) \in P_{W_1 \times W_2}^2(x, y)$ olması için gerek ve yeter koşul $(x - w_0, y - g_0) \perp W_1 \times W_2$ olmasıdır.

Tanım 3.1.7: sıfırdan farklı $a, b \in L$ için $V(a, b)$, L nin a ve b elemanları ile oluşturulmuş alt uzay olsun. $0 \neq c \in L$ için $L_c = L/V(c)$ bölüm uzayını

tanımlayalım. $a \in L$ için a_c ile a nın $V(c)$ ye göre denklik sınıfını gösterelim. Bu durumda L_c , sırasıyla toplama ve skalerle çarpma ile

$$a_c + b_c = (a + b)_c \text{ ve } \alpha a_c = (\alpha a)_c$$

şeklinde tanımlanan özelliklere göre lineer uzaydır. $a_c = b_c$ koşulunu sağlayan her $a, b \in L$ için 2-normun özelliklerinden

$$\|a, c\| - \|b, c\| \leq \|a - b, c\| = 0 \text{ ve buradan da } \|a, c\| = \|b, c\| \text{ elde edilir.}$$

$\|\cdot\|_c : L_c \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ile tanımlanan $\|a_c\| = \|a, c\|$, L_c üzerinde bir normdur.

Tanım 3.1.8: X , 2-normlu lineer uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $y \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 3.1.9: X , 2-normlu bir lineer uzay ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda y ve z lineer bağımsız olmak üzere $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\| = 0$ ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, z\| = 0$ olacak biçimde $y, z \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.10: X , 2-normlu lineer uzay olsun. Bu uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya 2-Banach uzayı denir.

Tanım 3.1.11: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ve $(Y, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü her $y \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx, Ty\| = 0$ oluyorsa, T dönüşümüne $x \in X$ noktasında 2-norma göre sürekli denir.

Tanım 3.1.12: B , 2-normlu lineer uzay, bunun bir bazı $\{e_1, e_2\}$ ve B de iki vektör $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ olmak üzere Gahler 2-normu, $\|a, b\| = |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1| \|e_1, e_2\|$ eşitliği ile tanımlamıştır. Burada $\|e_1, e_2\|$, normunun değeri en fazla 1 olan pozitif bir gerçekte sayıdır.

Diğer taraftan, gerçekte sayılar cismi üzerinde tanımlanan 2-normlu 2-boyutlu her uzayın Banach uzayı olduğu White [28] tarafından ispatlanmıştır.

Tanım 3.1.13: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay, $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$, sıfırdan farklı elemanlar ve $V(a_1, a_2, \dots, a_n) ; \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ile oluşturulan X in lineer alt uzayı olsun. $c \notin V(a, b)$ için $\|a, c\| = \|b, c\| = \frac{1}{2}\|a + b, c\| = 1$ olması $a = b$ olmasını gerektiriyorsa $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ uzayına kesin 2-konveks uzay denir.

Teorem 3.1.2: 2-normlu 2-boyutlu her Banach uzayı kesin konvektir.

İspat: 2-normlu lineer uzayda sıfırdan farklı iki vektör $a = a_1e_1 + a_2e_2$, $b = b_1e_1 + b_2e_2$ ve herhangi bir vektör $c = c_1e_1 + c_2e_2$ olsun. Gähler'in 2-norm tanımı kullanılırsa eşitliğin sol ve sağ tarafları sırasıyla

$$\begin{aligned}\|a + b, c\| &= |(a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1| \|e_1, e_2\| \\ &= |(a_1c_2 - c_1a_2) + (b_1c_2 - c_1b_2)| \|e_1, e_2\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|a, c\| + \|b, c\| &= |a_1c_2 - a_2c_1| \|e_1, e_2\| + |b_1c_2 - b_2c_1| \|e_1, e_2\| \\ &= (|a_1c_2 - a_2c_1| + |b_1c_2 - b_2c_1|) \|e_1, e_2\|\end{aligned}$$

biçimindedir. Vektörlerin bileşenleri gerçekte sayılar olduğundan mutlak değerlerin işareti de göz önüne alınırsa $\|a + b, c\| = \|a, c\| + \|b, c\|$ elde edilir. $\|a, c\| = \|b, c\|$ olmak üzere $\|a, c\| = 1$ alınarak $a = b$ bulunur. O halde uzay kesin konvektir.

Teorem 3.1.3: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzay ve $(Y, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin 2-konveks 2-normlu uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm, $f(x) = 0$ ve $\forall x, y \in X$ için $\|f(x) - f(z), f(y) - f(z)\| = \|x - z, y - z\|$ eşitliği ile f lineer, 1-1 dir. $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin 2-konvektir. Buna göre $(Y, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks ve $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ aynı zamanda kesin konvektir.

Tanım 3.1.14: L , boyutu 1 den büyük bir lineer uzay ve $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$, $L \times L \times L$ üzerinde tanımlı lineer fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa bu fonksiyona 2-iç çarpım denir.

1. $\langle a, a | b \rangle \geq 0$ ve $\langle a, a | b \rangle = 0 \Leftrightarrow a$ ve b lineer bağımlı,
2. $\langle a, a | b \rangle = \langle b, b | a \rangle$,
3. $\langle a, b | c \rangle = \langle b, a | c \rangle$,
4. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\langle \alpha a, b | c \rangle = \alpha \langle a, b | c \rangle$,
5. $\langle a + a', b | c \rangle = \langle a, b | c \rangle + \langle a', b | c \rangle$.

Bu durumda $(L, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ ikilisine de 2-iç çarpım uzayları denir.

Şimdi normlu uzaylarda var olan bazı diklik kavramlarının 2-normlu uzaylardaki durumunu inceleyip 2-normlu uzaylardaki diğer diklik kavramlarını, bunların özelliklerini, ilgili teoremleri ve elde edilen sonuçları verelim.

3.2. 2-Normlu Lineer Uzaylarda Dikliğe Bakış

2-normlu lineer uzaylar teorisi ilk olarak 1960 larda Gahler [22] tarafından bulunmuştur. O günden bu yana normlu uzaylar ile ilgili çeşitli kavramlar 2-normlu lineer uzaylara genişletilmiştir [23,29,30,31,32,33,34]. Bunlardan birisi de diklik kavramıdır. Bu bölümde 2-normlu lineer uzaylarda diklik ve tipleri ayrıntılı biçimde ele alınacaktır.

H. Mazaheri, H. R. Kamali ve Golestani Nezhad [35], [36], Ahmad Khan ve Ataullah Sıddıqui [33], Cho, Diminnie, Freese ve Andalaft [29], Gunawan, Kikianty, Mashadi, Gemawati, Sihwaningrum ve Nursupiamin [37], [38] bu konuda adları en çok geçen ve çalışmalarıyla konuya ışık tutan matematikçilerdir.

Khan ve Sıddıqui [33] de, $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzaylarda P-, I-, BJ-dikliklerini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 3.2.1: Her $z \neq 0$ için $\|x+y, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2$ eşitliği sağlanıyorsa x, y ye P-diktir denir ve $x \perp_p y$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.2.2: Her $z \neq 0$ için $\|x+y, z\| = \|x-y, z\|$ eşitliği sağlanıyorsa x, y ye I-diktir denir ve $x \perp_I y$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.2.3: Her $z \neq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x + \alpha y, z\| \geq \|x, z\|$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa x, y ye BJ-diktir denir ve $x \perp_{BJ} y$ biçiminde gösterilir.

Godini [39] da, yukarıdaki tanımlarda kullanılan “her $z \neq 0$ için” ibaresi “her $z \notin V\{x, y\}$ ” ibaresi ile değiştirilebileceğini belirtmiştir. Aksi takdirde, x in y ye P-, I-, BJ-dik olduğu x ve y gibi sıfır olmayan iki vektör yoktur. Bu kısımda bunun doğruluğu gösterilmeye çalışılacak ve P-, I-, BJ-diklikleri için bazı alternatifler verilecektir.

X , standart 2-normlu uzay ise diklik tanımı aynı zamanda genel diklik tanımına benzerdir. Buna göre standart durumu ele alalım.

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ standart 2-norm ile yazılabilen bir iç çarpım uzayı ise

$\|x, y\| = \left| \begin{matrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{matrix} \right|^{1/2}$ biçiminde gösterilir. Burada $\|x, y\|$; x ve y tarafından

gerilen paralelkenarın alanıdır. Buradaki determinant x ve y nin Gramian determinantıdır.

2-norm ile birlikte standart 2-iç çarpım uzayı

$\langle x, y | z \rangle = \left| \begin{matrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{matrix} \right|$ biçiminde tanımlanır. Buna göre $\|x, y\| = \langle x, x | y \rangle^{1/2}$ dir. Bu

eşitlik aşağıdaki koşulları sağlar.

1. Her $x, z \in X$ için $\langle x, x | z \rangle \geq 0$ dir. $\langle x, x | z \rangle = 0$ ise x ve z lineer bağımlıdır.

2. Her $x, y, z \in X$ için $\langle x, y|z \rangle = \langle y, x|z \rangle$ dir.
3. Her $x, y, z \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\langle \alpha x, y|z \rangle = \alpha \langle x, y|z \rangle$ dir.
4. Her $x_1, x_2, y, z \in X$ için $\langle x_1 + x_2, y|z \rangle = \langle x_1, y|z \rangle + \langle x_2, y|z \rangle$ dir.

Keyfi $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-iç çarpım uzaylarında $x \perp_P y$, $x \perp_I y$, $x \perp_{BJ} y$ diklikleri her $z \notin V\{x, y\}$ için $\langle x, y|z \rangle = 0$ şartı ile eşittir. Standart durumda $\langle x, y \rangle = 0$ olduğundan $\langle x, y|z \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\langle x, z \rangle = 0$ yada $\langle z, y \rangle = 0$ olmasıdır. Yani, $z \perp x$ yada $z \perp y$ demektir.

Bu şunu ifade eder: Genelde X in her $z \in V$ için $\langle x, y|z \rangle = 0$ olmasını sağlayan $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde V alt uzayı bulunabilir.

Bu gözlemlere dayanarak $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzaylarda P-, I-, BJ-dikliklerini aşağıdaki gibi yeniden tanımlayalım.

Tanım 3.2.4: Her $z \in V$ için $\|x + y, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_P y$ dir.

Tanım 3.2.5: Her $z \in V$ için $\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_I y$ dir.

Tanım 3.2.6: Her $z \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x + \alpha y, z\| \geq \|x, z\|$ eşitsizliğini sağlayan ve $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_{BJ} y$ dir.

Keyfi 2-iç çarpım uzaylarında diklik şartının, her $z \notin V\{x, y\}$ için $\langle x, y|z \rangle = 0$ olduğunu belirtmiştik. Cho ve Kim bunu kullanarak, boyutu 3 ve 3 ten büyük 2-iç çarpım uzaylarında iki vektörün G-dikliğini tanımlamışlardır.

Buna göre, her $z \in V$ için $\langle x, y|z \rangle = 0$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V)=1$ olacak biçimde X in V alt uzayı varsa $x \perp_G y$ dir. Ayrıca standart 2-normlu uzayda $x \perp y$ ise $\langle x, y \rangle = 0$ olduğundan $x \perp_G y$ dir. Çünkü

$$\begin{aligned} V^\perp &= \text{span}\{x\} \\ &= \text{span}\{y\} \text{ seçilirse her } z \in V \text{ için } \langle x, y|z \rangle = 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Aşağıdaki önerme tersinin de doğru olduğunu belirtir.

Önerme 3.2.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$, boyutu 3 ve 3 ten büyük standart 2-normlu uzay olsun. Bu durumda $x \perp_G y$ ise $x \perp y$ dir.

İspat: Sıfır olmayan x ve y için $x \not\perp y$ yani $\langle x, y \rangle \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \not\perp_G y$ olduğunu gösterelim.

V , X in $\text{codim}(V)=1$ şartını sağlayan bir alt uzayı olsun. Bu durumda $z \in V$ için $\langle x, y|z \rangle \neq 0$ olduğunu iddia edelim. Bu iddiamızın ispatı için birkaç durumu göz önünde bulunduralım.

Durum 1: x ve y lineer bağımlı yani $k \neq 0$ için $y = kx$ ise bu durumda

$$\langle x, y|z \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{vmatrix} \text{ eşitliğinde}$$

$\langle x, y \rangle = 0$ olduğundan $\langle x, y|z \rangle = \langle x, z \rangle \cdot \langle z, kx \rangle = k \|x, z\|^2$ yazılır. Buna göre $\text{codim}(V)=1$ ve $\dim(X) \geq 3$ olduğundan $z \in V - \text{span}\{x\}$ seçilebilir. Buradan $\|x, z\| > 0$ ve $\langle x, y|z \rangle \neq 0$ elde edilir.

Durum 2: x ve y lineer bağımsız yani $\|x, y\| > 0$ ise birkaç alt durumu göz önünde bulunduralım.

Durum 2a: $x \in V$ ve $y \in V$ ise $\langle x, y | z \rangle = -\|x, y\|^2 < 0$ olacak biçimde $z = x + y \in V$ seçilebilir.

Durum 2b: $x \in V$ ve $y \notin V$ ise $z \in V$ için $z \perp x$ olur.

Bu durumda $\langle x, y | z \rangle = \langle x, y \rangle \|z\|^2 \neq 0$ elde edilir.

Durum 2c: $x \notin V$ ve $y \notin V$ alındığında sıfır olmayan $z \in V$ seçilebilir. Bu durumda

$z \perp y$ olur. $\langle x, y | z \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{vmatrix} = \langle x, y \rangle \|z\|^2 \neq 0$ elde edilir.

Durum 2d: $x \notin V$ ve $y \notin V$ olmak üzere $v_x, v_y \in V$ ve $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $x = au + v_x$ ve $y = bu + v_y$ yazılır. Burada u , sıfır olmayan bir vektördür ve $u \perp v$ dir. Bu durumda $\langle x, y | z \rangle = ab\|x, y\|^2 \neq 0$ olmasını sağlayan $z = bx - ay = bv_x - av_y \in V$ elde edilir.

3.3. 2-Boyutlu Durumlar Hakkında Sonuçlar

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ standart 2-normlu uzay ve $\dim(X) = 2$ olsun (Cho ve Kım'ın G-dikliği burada uygulanmaz). $x, y \in X$ gibi sıfır olmayan iki vektör alalım.

Eğer x ve y lineer bağımlı yani $y = kx$ ($k \neq 0$) ise bu durumda

her $z \in X$ için $\langle x, y | z \rangle = k\|x, z\|^2$ elde edilir.

Eğer x ve y lineer bağımsız iseler $z = \alpha x + \beta y$ için $\langle x, y | z \rangle = -\alpha\beta\|x, y\|^2$ elde edilir. Bu durumda x ve y gibi sıfır olmayan vektörler için $y = kx$ ve $z = Ix$ ya da x ve y lineer bağımsız ise $z = \alpha x$ veya $z = \beta y$ olması durumunda $\langle x, y | z \rangle = 0$ dır.

G-dikliğine bağlı olarak birbirine G-dik olan sıfır olmayan x ve y vektörleri bulunabilir. Çünkü, $x // y$ olmasına rağmen her $z \in V$ için $\langle x, y | z \rangle = 0$ olacak biçimde X in 1 boyutlu V alt uzayı vardır.

Bu nedenle “birbirine dik olan sıfır olmayan iki vektör yoktur” ifadesinden “her vektör çifti diktir” ifadesine geçilebilir.

Bunun etrafında düşünüldüğünde x ve y lineer bağımlı ise her $z \in V$ için $\langle x, y | z \rangle = 0$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı vardır. Diğer taraftan x ve y lineer bağımsız ise bu durumda olan iki alt uzay vardır. Bu yüzden 2-boyutlu standart 2-normlu uzaylarda G-dikliğine tanımlarken $x \perp_G y$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in V_1 \cup V_2$ için $\langle x, y | z \rangle = 0$ olacak biçimde X in 1-boyutlu farklı V_1 ve V_2 alt uzayları olmasıdır denir. Öyleyse, sıfır olmayan birbirine paralel x ve y gibi iki vektörü G-dikliğine dâhil etmeyiz. Diğer bütün vektör çiftleri G-diktir.

Şimdi 2-normlu lineer uzaylarda b-dikliğini göz önünde bulundurup, bununla ilgili bazı sonuçlar verelim.

3.4. 2-Normlu Lineer Uzaylarda b -Dikliği

3.4.1. Giriş

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olmak üzere $0 \neq b \in X$ için X_b^* tanımlansın. $X_b^* : X \times \langle b \rangle$ üzerinde tanımlı bütün sınırlı bilinear 2-fonksiyonellerin Banach uzayıdır. $\langle b \rangle : X$ in b tarafından gerilen alt uzayıdır.

Tanım 3.4.1.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay ve $x, y \in X$ olsun. $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\|$ eşitsizliğini sağlayan $b \in X$ varsa x, y ye b -diktir denir ve $x \perp^b y$ biçiminde gösterilir.

W_1 ve W_2 , X in alt kümeleri olsunlar. Bu durumda $y_1 \in W_1$ ve $y_2 \in W_2$ için $y_1 \perp^b y_2$ ise $W_1 \perp^b W_2$ dir.

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay, $W \subset X$ in bir lineer alt uzayı ve $b \in X$ olsun. Bu durumda $x - w_0 \perp^b W$ ise $w_0 \in W$, her $x \in X$ için b -en iyi yaklaşıktır. W içinde x in en iyi yaklaşıklarının kümesi $P_W^b(x)$ biçiminde gösterilir.

Eğer $x \in X - (W + \langle b \rangle)$ ve $w_0 \in W$ için $w_0 \in P_W^b(x)$ oluyorsa W , b -proximaldir.

Aşağıdaki önerme, temel sonuçların ispatında önem taşımaktadır.

Önerme 3.4.1.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay, $W \subset X$, $b \in X$ ve $\langle b \rangle: X$ in b tarafından gerilen bir alt uzayı olsun. $x_0 \in X$ ise $\delta = \inf \{\|x_0 - w, b\| : w \in W\} > 0$ dır.

Bu durumda $F|_{W \times \langle b \rangle} = 0$, $F(x_0, b) = 1$ ve $\|F\| = \frac{1}{\delta}$ olacak biçimde $F : X \times \langle b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bilineer fonksiyoneli vardır.

3.4.2. Temel Sonuçlar

Bu bölümde 2-normlu lineer uzaylarda b -dikliğine ait bazı sonuçlar verilecektir.

X , 2-normlu lineer uzay olsun.

$F \subset X$ için $M_F^b = \{f \in X_b^* : \|f\| = 1, f(x, b) = \|x, b\|, \forall x \in F\}$ biçiminde bir küme tanımlansın.

Teorem 3.4.2.1: X 2-normlu lineer uzay, $b, y \in X$ ve $x \in X - (\langle b \rangle)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $x \perp^b y$.
2. $f(y, b) = 0$ olacak biçimde $f \in M_x^b$ vardır.

İspat: $2 \rightarrow 1$) Öncelikle $f(y, b) = 0$ olacak biçimde $f \in M_x^b$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\|x, b\| = f(x, b) = f(x + \alpha y, b) \leq \|f\| \|x + \alpha y, b\| = \|x + \alpha y, b\|$ yazılır. Bu da $x \perp^b y$ demektir.

$1 \rightarrow 2)$ $x \perp^b y$ ve $W = \langle y \rangle$: X in y tarafından gerilen alt uzayı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\inf \{ \|x - \alpha y, b\| : \alpha y \in W \} \geq \|x, b\| > 0$ olur. Önerme 3.4.1.1 den $g(y, b) = 0$, $g(x, b) = 1$ ve $\|g\| = \frac{1}{\delta}$ olacak biçimde $g \in X_b^*$ vardır. $f = \delta g$ alınırsa $f(y, b) = 0$, $f(x, b) = \|x, b\|$ ve $\|f\| = 1$ olur.

Sonuç 3.4.2.1: X 2-normlu lineer uzay, $W \subset X$, $b \in X$ ve $F \subset X - (W + \langle b \rangle)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $F \perp^b W$.
2. $f|_{W \times \langle b \rangle} = 0$ olacak biçimde $f \in M_F^b$ vardır.

Sonuç 3.4.2.2: X 2-normlu lineer uzay, W , X in lineer alt uzayı ve $b \in X - W$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $W \perp^b x$.
2. Her $g \in W$ için $f(x, b) = 0$ olacak biçimde $f \in M_g^b$ vardır.

X , 2-normlu lineer uzay $W \subset X$ ve $b \in X - W$ olsun.

Buna göre, $\tilde{W}_b = \{x \in X : W \perp^b x\}$ kümesi yazılır.

Teorem 3.4.2.2: X 2-normlu lineer uzay, $W \subset X$, $b \in X - W$ olsun. $\tilde{W}$ bir alt uzay ise bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $W \perp^b F$.
2. Her $w \in W$ için $f|_{F \times \langle b \rangle} = 0$ olacak biçimde $f \in M_w^b$ vardır.

İspat: $1 \rightarrow 2)$ her $w \in W$ için $w \perp^b \tilde{W}_b$ olduğundan $0 \in P_{\tilde{W}_b}^b(w)$ olur. Teorem 3.4.2.1 den $f|_{\tilde{W} \times \langle b \rangle} = 0$ olacak biçimde $f \in M_w^b$ vardır. $F \subset \tilde{W}_b$ olduğundan $f|_{F \times \langle b \rangle} = 0$ dir.

$2 \rightarrow 1)$ Her $w \in W$ için $f|_{F \times \langle b \rangle} = 0$ olacak biçimde $f \in M_w^b$ vardır. Her $w \in W$, her $x \in F$ ve her α için $\|w, b\| = f(w, b) = f(w + \alpha x, b) \leq \|f\| \|w + \alpha x, b\| = \|w + \alpha x, b\|$ yazılır. Bu yüzden $W \perp^b F$ elde edilir.

Örnek 3.4.2.1: $X = \mathbb{R}^3$, $W = \{(0, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ ve her $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X$ için $\|(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\| = \max\{|x_1 y_2 - x_2 y_1| + |x_1 y_3 - x_3 y_1| + |x_2 y_3 - x_3 y_2|\}$ olsun. Eğer, $x = (1, 0, 1)$ ve $b = (2, 2, 0)$ ise $x \perp^b W$ dir.

Şimdi de sonuçların ispatı için kullanılan Hahn-Banach teoremini ifade edelim.

Tanım 3.4.2.1: X bir vektör uzayı olmak üzere $P : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu alt lineer fonksiyondur ve aşağıdaki koşulları sağlar.

- a) Her $x, y \in X$ için $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$ dir.
- b) Her $x \in X$ ve $\alpha \geq 0$ için $P(\alpha x) = \alpha P(x)$ dir.

Yardımcı Önerme 3.4.2.1: P , X vektör uzayı üzerinde bir alt lineer dönüşüm ve M , X in alt uzayı olsun. f , M üzerinde lineer fonksiyonel ise her $x \in M$ için $f(x) \leq P(x)$ olur.

Bu durumda f , X in bütününde tanımlı g fonksiyoneline her $x \in X$ için $g(x) \leq P(x)$ biçiminde genişletilebilir.

Teorem 3.4.2.3: X , 2-normlu lineer uzay, $b \in X$ ve $x, y \in X - \langle b \rangle$ olsun. Bu durumda $x \perp^b ax + y$ olacak biçimde a sayısı vardır.

İspat: $M = \langle x \rangle$ ve $M \subset X$ olduğunu varsayalım. $f_b : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_b(\alpha x) = \alpha \|x, b\|$ ifadesini sağlasın. $P_b(x) = \|x, b\|$ alt lineer ve $f_b(z) \leq P_b(z)$ dir. Yardımcı önerme 3.4.2.1 den $\Lambda_b(x) = P_b(x)$ dir. Her $z \in X$ için $\Lambda_b(z) \leq \|z, b\|$ olacak biçimde $\Lambda_b : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli vardır. Bilineer 2-fonksiyonel tanımından $\|\Lambda_b\| = 1$ dir.

y için $a = -\frac{\Lambda_b(y)}{\Lambda_b(x)}$ biçiminde tanımlanırsa $\Lambda_b(ax + y) = 0$ ve $x \perp^b ax + y$ elde edilir.

Teorem 3.4.2.4: X 2-normlu lineer uzay, $b \in X$ ve $x, y \in X - \langle b \rangle$ olsun. Bu durumda $ax + y \perp^b x$ olacak biçimde a sayısı vardır.

İspat: Tanımdan, $ax + y \perp^b x$ olması için gerek ve yeter şart $\|ax + y + kx, b\| \geq \|ax + y, b\|$ olması ya da $\|ax + y\|, \|kx + y, b\|$ nin en küçük değerini almasıdır. $\|kx + y, b\|$, k içinde sürekli olduğundan minimum değerini almalıdır. Bu durumda $\|kx + y, b\|$ deki k nın mutlak minimum değeri a sayısıdır.

Tanım 3.4.2.2. X , 2-normlu lineer uzay olsun. Herhangi bir $x \neq 0$ ve her $b \in X$ için $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere $\Lambda_b(x) = \|x, b\|$ ve $\|\Lambda_b\| = 1$ olacak biçimde tek bir Λ_b lineer fonksiyoneli sayısı varsa X , 2-düzgündür.

Teorem 3.4.2.5: X , 2-normlu lineer uzay olsun. Her $x, y, b \in X$ için $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere $x \perp^b ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısı varsa X , 2-düzgündür.

İspat: X in 2-düzgün olduğunu varsayalım. Yani $x \in X$ ve $b \in X$ için $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere $\|f_b\| = 1$ ve $f_b(x) = \|x, b\|$ olacak biçimde tek bir f_b lineer fonksiyoneli vardır. $x, y \in X$ olmak üzere a, c sayıları için $x \perp^b ax + y$ ve $x \perp^b cx + y$ ise $f_b(x) = g_b(x) = \|x, b\|$ ve $\|f_b\| = \|g_b\| = 1$ olmasını sağlayan f_b ve g_b lineer fonksiyonları vardır. Buna göre $f_b(ax + y) = g_b(cx + y) = 0$ dir. $f_b = g_b$ olduğundan $a = c$ dir.

Tersine, her $x, y \in X$ için $x \perp^b ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısının var olduğunu kabul edelim. $x, b \in X$ için $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere $\|f_b\| = \|g_b\| = 1$ ve $f_b(x) = g_b(x) = \|x, b\|$ olacak biçimde f_b ve g_b lineer fonksiyonellerin olduğunu varsayalım. Bazı $y \in X$ ler için $f_b(y) \neq g_b(y)$ dir.

$a = -\frac{f_b(y)}{\|x, b\|}$ ve $c = -\frac{g_b(y)}{\|x, b\|}$ alınırsa teorem 3.4.2.3 den $x \perp^b ax + y$ ve

$x \perp^b cx + y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $x \perp^b ax + y$ olmasını sağlayan tek bir a sayısı vardır. Bu yüzden X , 2-düzgündür.

Tanım 3.4.2.3: X 2-normlu lineer uzay, $x, y, b \in X$ ve $\|x, b\| \neq 0$ olsun. Eğer $x \perp^b y$ ve $x \perp^b z$ iken $x \perp^b y + z$ oluyorsa diklik toplamsaldır.

Teorem 3.4.2.6: X 2-normlu lineer uzay, $b \in X$ ve $x, y \in X - \langle b \rangle$ olsun. Dikliğin toplamsal olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in X$ ve her $b \in X$ için $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere $x \perp^b ax + y$ olacak biçimde bir tek a sayısının var olmasıdır.

İspat: Her $x, y, b \in X$ için $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere $x \perp^b ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısının var olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.4.2.5 den X 2-düzgündür. Eğer $x \perp^b y$ ve $x \perp^b z$ ise $f_b(x) = \|x, b\|$ ve $\|f_b\| = 1$ olacak biçimde tek bir f_b lineer fonksiyoneli vardır.

$H_b = \{u \in X : f_b(u) = 0\}$ biçiminde bir hiper düzlem düşünelim.

H_b bir alt uzaydır. Buradan $y, z \in H_b$ olduğu açıktır. Bu yüzden $y + z \in H_b$ ve $x \perp^b y + z$ sağlanır.

Tersine, dikliğin toplamsal $x \perp^b ax + y$ ve $x \perp^b cx + y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $x \perp^b -(cx + y)$ olur ve toplamsallıktan $x \perp^b (a - c)x$ yazılır. Buradan, $\|x + k(a - c)x\| \geq \|x\|$ ifadesinin her k için doğru olması $a = c$ olması demektir.

Bu yüzden $x \perp^b ax + y$ olacak biçimde tek bir a sayısı vardır.

$(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda $X \times X$ üzerinde $\|x, y\| = \sqrt{\langle x, x | y \rangle}$ biçiminde 2-norm tanımlanabilir.

Teorem 3.4.2.7: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-iç çarpım uzayı, $b \in X$ ve $x, y \in X - \langle b \rangle$ olsun.

Bu durumda $x \perp^b y$ olması için gerek ve yeter şart $\langle x, y | b \rangle = 0$ olmasıdır.

İspat: $x \perp^b y$ ve $\langle x, y | b \rangle \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $\alpha = -\frac{\langle x, y | b \rangle}{\langle y, y | b \rangle}$

alınarak

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y, b\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y | b \rangle \\ &= \langle x, x + \alpha y | b \rangle + \alpha \langle x, x + \alpha y | b \rangle \\ &= \overline{\langle x + \alpha y, x | b \rangle} + \overline{\langle x + \alpha y, y | b \rangle} \\ &= \overline{\langle x, x | b \rangle} + \overline{\alpha \langle y, x | b \rangle} + \overline{\alpha \langle x, y | b \rangle} + \overline{\alpha \alpha \langle y, y | b \rangle} \\ &= \langle x, x | b \rangle + \overline{\alpha} \langle x, y | b \rangle + \alpha \overline{\langle x, y | b \rangle} + |\alpha|^2 \langle y, y | b \rangle \\ &= \|x, b\|^2 - \frac{|\langle x, y | b \rangle|^2}{\|y, b\|^2} \\ &< \|x, b\|^2 \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $x \not\perp^b y$ elde edilir.

Tersine, $\langle x, y | b \rangle = 0$ ise herhangi bir α sayısı için

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y, b\|^2 &= \langle x + \alpha y, x + \alpha y | b \rangle \\ &= \|x, b\|^2 + |\alpha|^2 \|y, b\|^2 \\ &\geq \|x, b\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $\|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\|$ demektir.

$(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-iç çarpım uzayı, $W \subset X$ ve $b \in X$ olsun. $W_b^\perp$ kümesi

$$W_b^\perp = \{x \in X : \langle x, g | b \rangle = 0, \forall g \in G\} \text{ biçiminde tanımlansın.}$$

Buna göre aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Sonuç 3.4.2.3: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-iç çarpım uzayı, $W \subset X$ ve $b \in X$ için $W_b^\perp = \widetilde{W}_b$ dir.

3.5. 2-Normlu Lineer Uzaylarda b -Genel Dikliği

Bu kısımda, 2-normlu lineer uzaylarda b -genel dikliğinin bazı özellikleri incelenip bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Bu sonuçlar 2-normlu lineer uzaylarda b -dikliğine benzerdir.

3.5.1. Giriş

İlk olarak 2-normlu lineer uzaylarda b -genel dikliğinin tanımını verelim.

Tanım 3.5.1.1: X , 2-normlu lineer uzay ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $\phi_x(x, b) = \|x, b\|^2$, $\|\phi_x\| = \|x, b\|$ ve $\phi(y, b) = 0$ olacak biçimde tek bir $\phi_x \in X_b^*$ varsa x , y ye b -genel diktir denir ve $x \perp_G^b y$ biçiminde gösterilir.

3.5.2. Temel Sonuçlar

Burada 2-normlu lineer uzaylarda b -genel dikliğinin bazı özelliklerini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.5.2.1: X 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a) Her $x \in X$ ve $\alpha > 0$ için $\phi_{\alpha x} = \alpha \phi_x$ dir.
- b) Her $x, y \in X$ ve $\alpha > 0$ için $x \perp_G^b y$ ise $\alpha x \perp_G^b y$ dir.
- c) Her $x \in X$ için $x \perp_G^b x$ ise $x = 0$ dir.
- d) Her $x, y \in X$ için $x \perp_G^b y$ ve $x \neq 0$ ise $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$ dir.
- e) Her $x \in X$ için $0 \perp_G^b x$ ve $x \perp_G^b 0$ dir.

İspat: a) $x \in X$ ve $\alpha > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\phi_{\alpha x}(\alpha x, b) = \|\alpha x, b\|^2 = \alpha^2 \|x, b\|^2$$

$$\phi_{\alpha x}(\alpha x, b) = \alpha^2 \phi_x(x, b)$$

$$\alpha \phi_{\alpha x}(x, b) = \alpha^2 \phi_x(x, b)$$

$$\phi_{\alpha x}(x, b) = \alpha \phi_x(x, b) \text{ elde edilir ki bu da } \phi_{\alpha x} = \alpha \phi_x \text{ demektir.}$$

b) $x, y \in B$, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\alpha^2 \|x, b\|^2 &= \alpha^2 \|x + \beta y, b\|^2 \\ &= \|\alpha(x + \beta y, b)\|^2 \\ &\leq \|\alpha x, b\|^2 + \|\alpha \beta y, b\|^2 \\ &= \|\alpha x, b\|^2 \\ &= \phi_x(\alpha x, b) \text{ elde edilir ki bu da } \alpha x \perp_G^b y \text{ demektir.}\end{aligned}$$

c) Her $x \in X$ için $x \perp_G^b x$ ise $\phi_x(x, b) = 0$ dır. $\phi_x(x, b) = \|x, b\|^2$ olduğundan $\|x, b\|^2 = 0$ ve dolayısıyla $x = 0$ dır.

d) $z \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ alalım. Bu durumda herhangi bir c_1 ve c_2 sayıları için $z = c_1 x = c_2 y$ yazılır. $\phi(z, b) = 0$ olduğundan $\phi(c_1 x, b) = 0$ olur. Bundan dolayı $x \neq 0$ için $c_1 = 0$ ve $z = 0$ olmalıdır.

e) Aşıkardır.

Tanım 3.5.2.1: X , 2-normlu lineer uzay olsun. $f(x) = \|x, b\|$ ve $\|f\| = 1$ olmasını sağlayan yalnız bir $f \in X_b^*$ varsa $x \in B$ elemanına 2-normaldir.

Teorem 3.5.2.2: X 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $x, y \in X$ olmak üzere $x \perp_G^b y$ ise $x \perp_{BG}^b y$ dir.

b) $x \neq 0 \in B$ 2-normal olmak üzere $y \in B$ ve $x \perp_{BG}^b y$ ise $x \perp_G^b y$ dir.

İspat: a) $x, y \in X$ ve $x \perp_G^b y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|x, b\|^2 &= \phi_x(x, b) = \phi_x(x + \alpha y, b) \\ &\leq \|\phi_x\| \cdot \|x + \alpha y, b\| = \|x, b\| \cdot \|x + \alpha y, b\|\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\|$ elde edilir ki bu da $x \perp_{BG}^b y$ demektir.

b) $x \perp_{BG}^b y$ ve $\alpha > 0$ ise bu durumda $\alpha x \perp_{BG}^b y$ dir. Bu yüzden $Z = \frac{x}{\|x\|} \perp_{BG}^b y$ yazılır. x normal olduğundan, $\phi_z(X) = 1$, $\|\phi_z\| = 1$ ve $\phi_z(y, b) = 0$ olacak biçimde tek bir $\phi_z \in X_b^*$ vardır. Teorem 3.5.2.1 den $\phi_z = \frac{1}{\|x\|} \phi_x$ yazılır. Buna göre, $\phi_x(x) = \|x, b\|^2$, $\|\phi_x\| = \|x, b\|$ ve $\phi(y, b) = 0$ olacak biçimde $\phi_x \in X_b^*$ vardır. Buradan $x \perp_G^b y$ olur.

Her $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-iç çarpım uzayı 2-düzgündür. Bu yüzden her $x \in X$ normaldir. Bundan dolayı aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.5.2.1: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle)$ 2-düzgün uzay ve $x, y, b \in X$ olmak üzere $x \perp_G^b y$ ise $\langle x, y | b \rangle = 0$ dır.

Tanım 3.5.2.2: X 2-normlu lineer uzay ve $b \in X$ olsun. $y \perp_G^b x$ ve $z \perp_G^b x$ iken $y + z \perp_G^b x$ oluyorsa b-genel dikliği b-G-toplamsaldır.

Tanım 3.5.2.3: X 2-normlu lineer uzay, $M \subset X$ ve $x, b \in X$ olsun. $\phi_x(x, b) = \|x, b\|^2$, $\|\phi_x\| = \|x, b\|$ ve her $y \in M$ için $\phi(y, b) = 0$ olacak biçimde tek bir $\phi_x \in X_b^*$ varsa $x \perp_G^b M$ dir. $x - y_0 \perp_G^b M$ ise bu durumda $y_0 \in M$, $x \in X$ in en iyi b-genel yaklaşım elemanıdır.

Sonuç 3.5.2.2: X , 2-normlu lineer uzay, $x, b \in X$ olsun. $y_0 \in M$, x in en iyi b-G-yaklaşım elemanı ise y_0 , x in en iyi b-yaklaşığıdır.

Teorem 3.5.2.3: X 2-normlu lineer uzay, $x, b \in X$ ve $M \subset X$ olsun. b-genel dikliği b-G-toplamsal ise $x - y_0 \perp_G^b M$ olacak biçimde tek bir $y_0 \in M$ vardır.

İspat: Her $i=1,2$ için $x-y_i \perp_G^b M$ olacak biçimde $y_1, y_2 \in M$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $y \in M$ ve $i=1,2$ için $x-y_i \perp_G^b y$ olur.

b-dikliği b-G- toplamsal olduğundan $y_2 - y_1 = (x - y_1) - (x - y_2) \perp_G^b y$ yazılır. $y = y_1 - y_2$ alındığında $y_1 - y_2 \perp_G^b y_1 - y_2$ elde edilir ki bu da $y_1 = y_2$ demektir.

3.6. 2-Normlu Lineer Uzaylarda B-Dikliği

Bu kısımda Khan ve Siddiqui tarafından verilen 2-normlu lineer uzaylarda B-dikliğini tanımlayıp, B-dikliğine göre kesin konveks 2-normlu lineer uzayların özelliklerini verelim. Aynı zamanda bölüm uzayları ve bivektör uzaylarında dikliği ele alalım.

3.6.1. Temel Kavramlar ve B-Dikliğine Göre Kesin Konveks 2-Normlu Uzayların Özellikleri

Burada, ilk olarak 2-normlu lineer uzaylarda kesin konvekslik ve ilgili bir teoremden bahsedelim.

Tanım 3.6.1.1: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. $a, b \neq 0$ ve $c \notin V(a, b)$ olmak üzere $\|a + b, c\| = \|a, c\| + \|b, c\|$ ve $\|a, c\| = \|b, c\| = 1$ olması $a = b$ olmasını gerektiriyorsa bu uzaya kesin konvektir denir.

Kesin konveks 2-normlu lineer uzayların aşağıdaki özellikleri Diminnie, Gahler ve White (1974) tarafından çalışılmıştır.

Teorem 3.6.1.1: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konvektir.
2. Sıfır olmayan her c için $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konvektir.

3. $\alpha > 0$ ve $c \notin V(a, b)$ için $\|a + b, c\| = \|a, c\| + \|b, c\|$ eşitliği sağlanıyorsa $b = \alpha a$ alınır.
4. $\|a - d, c\| = \alpha \|a - b, c\|$ ve $\|b - d, c\| = (1 - \alpha) \|a - b, c\|$ eşitliklerinde $\alpha \in (0, 1)$ için $c \notin V(a - d, b - d)$ olması $d = (1 - \alpha)a + \alpha b$ olmasını gerektirir.

Tanım 3.6.1.2: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzayda keyfi sıfır olmayan bir $c \in L$ için $\|a + b, c\| = \|a - b, c\|$ eşitliği sağlanıyorsa a elemanı $b \in L$ ye I-diktir.

Tanım 3.6.1.3: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzayda keyfi sıfır olmayan $c \in L$ için $\|a, c\|^2 + \|b, c\|^2 = \|a - b, c\|^2$ eşitliği sağlanıyorsa a elemanı $b \in L$ ye P-diktir.

Tanım 3.6.1.4: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzayda keyfi sıfır olmayan bir $c \in L$ ve her $k \in \mathbb{R}$ için $\|a + kb, c\| \geq \|a, c\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa $a, b \in L$ ye B-diktir.

Sonuçlar

1. 2-iç çarpım uzaylarında B-dikliği, I-dikliği ve P-dikliğine eşdeğerdir fakat keyfi 2-normlu lineer uzaylarda eşdeğer değildir.
2. $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olmak üzere a elemanı $b \in L$ ye B-dik ise her $\alpha \in \mathbb{R}$ için αa B-diktir αb dir.
3. $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olmak üzere $a, b \in L$ ye B-dik ise bu durumda b, a ya B-dik olmayabilir.
4. $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay ve $a, b, c \in L$ olmak üzere a, b ye B-dik ve a, c ye B-dik ise bu durumda $a, (b + c)$ ye B-diktir.

Tanım 3.6.1.5: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda $a (\neq 0)$ ve b elemanları için a nın $ma + b$ ye B-dik olduğu tek bir m sayısı varsa B-dikliği sağdan tektir.

Tanım 3.6.1.6: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda $a (\neq 0)$ ve b elemanları için $ma + b$ nin b ye B-dik olduğu tek bir m sayısı varsa B-dikliği soldan tektir.

Ayrıca, a nın b ye B-dik olması b nin a ya B-dik olmasını gerektiriyor ise B-dikliği sağdan ve soldan tektir.

Teorem 3.6.1.2: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzayın kesin konveks olması için gerekli ve yeterli koşul B-dikliğinin soldan tek olmasıdır.

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki yardımcı önermeyi verelim.

Yardımcı Önerme 3.6.1.1: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. $a, b \in L$ için $ma + b$ B-diktir a olacak biçimde bir m sayısı vardır. Bu m sayısı, $\|ka + b, c\|$ nin mutlak minimum olduğu k sayısının değeridir. Burada c , keyfi sıfır olmayan bir elemandır.

Eğer m , $Ma + b$ B-diktir a ve $Na + b$ B-diktir a olacak biçimde M ve N arasında ise $ma + b$ B-diktir a olur.

İspat: Tanımdan, $ma + b$ B-diktir a ise keyfi sıfır olmayan $c \in L$ ve her k için $\|(ma + b) + ka, c\| \geq \|ma + b, c\|$ dir. $\|ma + b, c\|$, $\|ka + b, c\|$ nin en küçük değeridir.

$\|ka + b, c\|$, k değişkeninin sürekli fonksiyonudur ve $f(k) = \|ka + b, c\|$ biçimindedir.

$$\begin{aligned} \text{Bu durumda, } |f(k_1) - f(k_2)| &= \|k_1a + b, c\| - \|k_2a + b, c\| \\ &\leq \|k_1a + b, c - c\| + \|k_2a + b - k_2a - b, c\| \\ &= |k_1 - k_2| \|a, c\| \end{aligned}$$

yazılır. Bu $|k_1 - k_2| \rightarrow 0$ ise $|f(k_1) - f(k_2)| \rightarrow 0$ olduğunu ifade eder. Bu yüzden $\|ka + b, c\|$ minimum değerine ulaşır.

$Ma + b$ B-dik a ve $Na + b$ B-dik a olduğunu varsayalım. $f(n) = \|a + nb, c\|$ fonksiyonu konvektir. Buna göre her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} f(\lambda n + (1 - \lambda)n') &= \|a + (\lambda n + (1 - \lambda)n')b, c\|, \lambda \in (0, 1) \\ &= \|a + \lambda nb + (1 - \lambda)n'b, c\| \\ &= \|\lambda a + \lambda nb + (1 - \lambda)a + (1 - \lambda)n'b, c\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\lambda a + \lambda nb, c\| + \|(1-\lambda)a + (1-\lambda)n'b, c\| \\
&= \lambda \|a + nb, c\| + (1-\lambda) \|a + n'b, c\| \\
&= \lambda f(n) + (1-\lambda) f(n')
\end{aligned}$$

yazılır. Bundan dolayı m , M ve N arasında ve a B-diktir $ma + b$ ise keyfi sıfır olmayan $c \in L$ için $\|ma + b, c\| = \|Ma + b, c\| = \|Na + b, c\|$ elde edilir.

Teorem 3.6.1.2 nin ispatı: L 2-normlu lineer uzayı kesin konveks olsun. Bu durumda $c \notin V(a, b)$ olmak üzere $f(n) = \|a + nb, c\|$ konvektir. Şimdi, $a + nb$ ve $a + mb$, b ye B-dik olsun. Bu durumda keyfi $0 \neq c \in L$ için $\|a + nb, c\| = \|a + mb, c\|$ olur. Bunlardan her biri minimum değerindedir. Yardımcı önerme 3.6.1.1 e göre $n \leq t \leq m$ için $\|a + tb, c\|$ sabittir. Bu yüzden kesin konveks 2-normlu lineer uzayda B-dikliği soldan tektir.

Tersine, L 2-normlu lineer uzayı kesin konveks olmasın. Bu durumda herhangi bir $\alpha > 0$ ve $c \notin V(a, b)$ için $\|a, c\| + \|b, c\| = \|a + b, c\|$ yazılır ve $a \neq \alpha b$ olur. Buna göre $0 \leq k \leq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|a + b, c\| &= \|(1-k)a + kb + ka + (1-k)b, c\| \\
&\leq \|(1-k)a + kb, c\| + k\|a, c\| + (1-k)\|b, c\|
\end{aligned}$$

olur. $\|a, c\| + \|b, c\| = \|a + b, c\|$ ve $c \notin V(a, b)$

olduğundan $\|a, c\| + \|b, c\| \leq \|(1-k)a + kb, c\| + k\|a, c\| + (1-k)\|b, c\|$ elde edilir. Bu bize, $\|(1-k)a + kb, c\| \geq (1-k)\|a, c\| + k\|b, c\|$ yi verir.

Fakat, $0 \leq k \leq 1$ için $\|(1-k)a + kb, c\| \leq (1-k)\|a, c\| + k\|b, c\|$ dir. Bundan dolayı $0 \leq k \leq 1$ ve $c \notin V(a, b)$ için $\|(1-k)a + kb, c\| = (1-k)\|a, c\| + k\|b, c\|$ olur.

$$k = \frac{\|a, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|} \text{ alınır} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
(1-k)\|a, c\| + k\|b, c\| &= \left(1 - \frac{\|a, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|}\right) \|a, c\| + \frac{\|a, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|} \|b, c\| \\
&= \frac{2\|a, c\|\|b, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|}
\end{aligned} \quad (2.2)$$

ve

$$\begin{aligned}\|(1-k)a + kb, c\| &= \left\| \left(\left(1 - \frac{\|a, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|} \right) a + \frac{\|a, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|} b \right), c \right\| \\ &= \frac{1}{\|a, c\| + \|b, c\|} \left(\|(\|b, c\| a + \|a, c\| b), c\| \right)\end{aligned}\quad (2.3)$$

bağıntıları bulunur.

$$(2.1), (2.2) \text{ ve } (2.3) \text{ bağıntılarından } \frac{2\|a, c\|\|b, c\|}{\|a, c\| + \|b, c\|} = \frac{1}{\|a, c\| + \|b, c\|} \|(\|b, c\| a + \|a, c\| b), c\|$$

veya $2\|a, c\|\|b, c\| = \|(\|b, c\| a + \|a, c\| b), c\|$ elde edilir.

$a' = \|b, c\| a + \|a, c\| b$ ve $b' = \|b, c\| a - \|a, c\| b$ alınırsa $\|a' + b', c\| = 2\|b, c\|\|a, c\|$ ve $\|a' - b', c\| = 2\|a, c\|\|b, c\|$ elde edilir. Bu nedenle $\|a' + b', c\| = \|a - b, c\| = \|a, c\|$ dir.

Bu yüzden her sıfır olmayan c için

$$|m| \leq 1 \text{ ise } \|a' + mb', c\| = \|a, c\|$$

ve

$$|m| \geq 1 \text{ ise } \|a' + mb', c\| \geq \|a, c\|$$

ifadeleri sağlanır. Bundan dolayı $a' + mb'$ B-dik b olur. $b' = 0$ olması $a = \frac{\|a, c\|}{\|b, c\|} b$

olmasını gerektirir.

2-normlu lineer uzaylarda B-dikliği soldan tek değilse kesin konveks değildir. Bundan dolayı 2-normlu lineer uzaylarda B-dikliği soldan tek ise uzay kesin konvektir.

3.7. 2-Normlu Lineer Uzaylarda B-dikliği ve Normlu Bölüm Uzayı Arasındaki Bağntı

$(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Herhangi bir sıfır olmayan $c \in L$ vektörü için, $V(c): L$ nin c tarafından gerilen alt uzayıdır. $L_c: L/V(c)$ bölüm uzayıdır ve lineerdir. L_c üzerindeki norm $\|\cdot\|_c$ biçiminde gösterilir ve $\|a_c\|_c = \|a, c\|$ eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 3.7.1: $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay ve L_c bölüm uzayı olsun. Keyfi sıfır olmayan $c \in L$ için a nın $b \in L$ ye B-dik olması için gerek ve yeter şart a_c nin $b_c \in L_c$ ye B-dik olmasıdır.

İspat: $a, b \in L$ ye B-dik olsun. Bu durumda her k reel sayısı ve keyfi sıfır olmayan $c \in L$ için $\|a + kb, c\| \geq \|a, c\|$ sağlanır. Bu da $\|(a + kb)_c\|_c \geq \|a_c\|_c$ veya $\|a_c + kb_c\|_c \geq \|a_c\|_c$ olması demektir. Bundan dolayı a_c B-diktir b_c yazılır.

Tersine, keyfi sıfır olmayan $c \in L$ için a_c B-dik b_c olsun. Bu durumda her k reel sayısı için $\|a_c + kb_c\|_c \geq \|a_c\|_c$ veya $\|(a + kb)_c\|_c \geq \|a_c\|_c$ sağlanır. Bu da $\|a_c + kb, c\| \geq \|a, c\|$ olması demektir. Bu yüzden a B-diktir b olur.

Sonuç 3.7.1: B-dikliği, $(L_c, \|\cdot, \cdot\|)$ bölüm uzayında soldan tek (sağdan tek) ise $(L, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu uzayda da soldan tek (sağdan tek) tir.

3.8. Bivektörlerin B-Dikliği

L boyutu 1 den büyük lineer uzay ise $B_L' : \sum_{i=1}^m a_i \times b_i$ ifadelerinin kümesi olsun.

Burada $i = 1, \dots, m$ olmak üzere a_i ve b_i L içinde birer vektördür.

$\sim : B_L'$ üzerindeki denklik bağıntısı olsun. Bu denklik bağıntısı $\sum_{i=1}^m a_i \times b_i \sim \sum_{i=1}^{m'} a_i' \times b_i'$ olarak tanımlanır.

$B_L, B_L' / \sim$ bölüm uzayı olsun. B_L nin elemanları L üzerinde bivektörler olarak adlandırılır. Bivektör $\sum_{i=1}^m a_i \times b_i$ gösterimine sahiptir. Aynı zamanda $b \left(\sum_{i=1}^m a_i \times b_i \right)$

biçiminde tanımlanır. Eğer bivektör $\sum_{i=1}^1 a_i \times b_i$ biçiminde ise buna basit bivektör

denir. L lineer uzayında boyutu 3 ve 3 den küçük olan her bivektör basit bivektör olarak ifade edilebilir.

B_L uzayı lineerdir. Buna göre aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. $b\left(\sum_{i=1}^m a_i \times b_i\right) + b\left(\sum_{i=1}^n a_{i+m} \times b_{i+m}\right) = b\left(\sum_{i=1}^{m+n} a_i \times b_i\right)$ dir.
2. Her $\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\beta b\left(\sum_{i=1}^m a_i \times b_i\right) = b\left(\sum_{i=1}^m a_i \times \beta b_i\right)$ dir.

B_L üzerindeki norm L üzerinde $\|a, b\| = \|b(a \times b)\|$ biçiminde 2-norm tanımlar. L üzerinde bütün bivektörler basit ise L nin boyutu 3 ve 3 den küçüktür. Bu durumda L üzerinde her 2-norm için B_L üzerinde norm vardır.

Teorem 3.8.1: L , boyutu 1 den büyük lineer uzay, $\|,\| : B_L$ üzerinde norm ve $\|,\| : L$ üzerinde 2-norm olsun. Bu durumda her $a, b \in L$ için $\|b(a \times b)\| = \|a, b\|$ sağlanır.

$a, b \in L$ ve keyfi sıfır olmayan c vektörü için $b(a \times c)$ B-diktir $b(b \times c)$ dir. Bu durumda a B-diktir b elde edilir.

İspat: $a, b \in L$ ve keyfi sıfır olmayan c vektörü için $b(a \times c)$ B-dik $b(b \times c)$ olsun.

Her k reel sayısı için

$$\|b(a \times c) + k(b(b \times c))\| \geq \|b(a \times c)\|$$

veya

$$\|b(a + kb) \times c\| \geq \|b(a \times c)\|$$

olması $\|a + kb, c\| \geq \|a, c\|$ olmasını gerektirir. Bunun anlamı a B-diktir b dir.

a B-dik b olsun. Bu durumda keyfi $0 \neq c \in L$ ve k reel sayısı için $\|a + kb, c\| \geq \|a, c\|$ olur. Buradan $\|b((a + kb) \times c)\| \geq \|b(a \times c)\|$ ya da $\|b(a \times c) + k(b(b \times c))\| \geq \|b(a \times c)\|$ elde edilir. Bu da keyfi $0 \neq c \in L$ için $b(a \times c)$ B-diktir $b(b \times c)$ demektir.

Şimdi de 2-normlu lineer uzaylarda ikizkenar dik üçlülerden bahsedelim.

3.9. 2-Normlu Lineer Uzaylarda İkizkenar Dik Üçlüler

İkizkenar dikliği R. C. James [2] tarafından tanımlanmıştır.

3.9.1.Giriş

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzaylarda (x, y, z) üçlüsü,

$$\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$$

$$\|x + z, y\| = \|x - z, y\|$$

$$\|y + z, x\| = \|y - z, x\|$$

eşitliklerini sağlıyorsa (x, y, z) üçlüsüne ikizkenar dik üçlü denir ve $I(x, y, z)$ biçiminde gösterilir.

Her a reel sayısı için $I(x, y, z)$ ifadesi $I(ax, y, z)$ oluyorsa $I(., ., .)$ üçlüsü homojendir.

$I(x_1, y, z)$ ve $I(x_2, y, z)$ ifadeleri $I(x_1 + x_2, y, z)$ oluyorsa $I(., ., .)$ toplamsaldır.

Kesin konveksliği göz önünde bulundurarak, X in boyutu 3 ve 3 den küçük her alt uzayı ikizkenar dik üçlü içerir. Eğer $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks ve $I(., ., .)$ ya homojen ya da toplamsal ise $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-iç çarpım uzayıdır.

3.9.2. İkizkenar Dik Üçlüler

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ reel normlu uzayda $\|x + y\| = \|x - y\|$ ise x ve y ikizkenar diktir. İkizkenar üçgenin kenarları $x + y$ ve $x - y$ den oluşmaktadır. İkizkenar tanımı bundan gelmektedir. İç çarpım uzaylarında bu, genel anlamdaki diklikle eşdeğerdir. Yani, x ve y nin iç çarpımı sıfırdır.

Bunları göz önünde bulundurarak 2-normlu uzaylar için paralel bir tanım aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 3.9.2.1: 2-normlu lineer uzayda,

$$\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$$

$$\|x + z, y\| = \|x - z, y\|$$

$$\|y + z, x\| = \|y - z, x\|$$

eşitlikleri sağlanıyorsa (x, y, z) üçlüsüne ikizkenar dik üçlü denir ve $I(x, y, z)$ biçiminde gösterilir. Eğer X in elemanları $x_1, \dots, x_n$ ise $[x_1, x_2, \dots, x_n]$; X in $\{x_1, \dots, x_n\}$ tarafından üretilen alt uzayı olur.

Aşağıda $I(.,.,.)$ bağıntısının bazı temel özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.9.2.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun.

1. Simetri: $I(x, y, z)$ var ise $\{x, y, z\}$ kümesinin herhangi p permutasyonları için $I(p(x), p(y), p(z))$ vardır.
2. $|a| = |b| = |c|$ olmak üzere $I(x, y, z)$ var ise $I(ax, by, cz)$ vardır.
3. $[x, y, z]$ sıfır yada 1 boyutlu ise $I(x, y, z)$ vardır.
4. Herhangi bir $x, y \in X$ için $I(x, y, 0)$ vardır.
5. $[x, y, z]$ 2-boyutlu olmak üzere x, y, z elemanlarından ikisi bağımsız üçüncüsü sıfır olursa $I(x, y, z)$ vardır.
6. Yoğunluk: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-iç çarpım uzayı ise $\langle x, y | z \rangle = \langle x, z | y \rangle = \langle y, z | x \rangle = 0$ olduğunda $I(x, y, z)$ vardır.

İspat: 1. ve 2. durumlar $I(.,.,.)$ tanımının direkt sonucudur. Aynı zamanda 3. ve 4. durumlar da 2-norm tanımından çıkarılabilir. 5. durumun yarısı 4. durumdan ve $[x, y, z]$ 2-boyutludur gerçeğinden çıkarılabilir. Diğer yarısının ispatı için y ve z nin bağımsız ve a, b reel sayıları için $x = ay + bz$ olduğunu varsayalım. $I(x, y, z)$ var ise 2-normun “her a reel sayısı için $\|x, ax + y\| = \|x, y\|$ ” özelliği kullanılarak $\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$ ifadesi $|1 + a|\|y, z\| = |1 - a|\|y, z\|$ biçiminde yazılabilir. Burada $\|y, z\| > 0$ olduğundan $a = 0$ olmalıdır.

Benzer biçimde $\|x+z, y\| = \|x-z, y\|$ olması $b=0$ olmasını gerektirir. Bundan dolayı $x=0$ dır.

Sonuç olarak 6.durum $\langle x, y|z \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y, z\|^2 - \|x-y, z\|^2)$ bağıntısından yararlanarak ispatlanabilir [40].

Sonraki temel sonucun ispatı için bazı ek bilgilere ve yardımcı önermelere ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.9.2.2: $x, y \neq 0$ ve $z \notin [x, y]$ için $\|x+y, z\| = \|x, z\| + \|y, z\|$ olması $a > 0$ için $y = ax$ olmasını gerektiriyor ise $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konvektir.

Her 2-iç çarpım uzayı kesin konvektir ifadesi [40] de ispatlanmıştır.

İlk yardımcı önermemiz tanım 3.9.2.2 nin direkt sonucudur.

Yardımcı Önerme 3.9.2.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks ve $\{x, y, z\}$ lineer bağımsız ise $\|x+y, z\| < \|x, z\| + \|y, z\|$ dir.

Yardımcı Önerme 3.9.2.2: $\{x, y, z\}$ bağımsız ve a_1, a_2 sayıları $a_1 < a_2$ şartını sağlayan reel sayılar olsunlar. Bu durumda

- 1) $a_1 < b < a_2$ olmak üzere $\|y+a_1x, z\| = \|y+a_2x, z\|$ ise $\|y+bx, z\| \leq \|y+a_1x, z\|$ dir.
- 2) $\|y+a_1x, z\| = \|y+a_2x, z\|$ için $a_1 < a_2 < b$
veya
 $b < a_1 < a_2$ ise $\|y+a_1x, z\| \leq \|y+bx, z\|$ dir.
- 3) $\|y+a_1x, z\| = \|y+a_2x, z\| = \min\{\|y+a'x, z\| : a' \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere $a_1 < b < a_2$ ise $\|y+bx, z\| = \min\{\|y+a'x, z\| : a' \in \mathbb{R}\}$ dir.
- 4) $a_1 < a_2 < a_3$ ve $\|y+a_1x, z\| = \|y+a_2x, z\| = \|y+a_3x, z\|$ ise her $a \in [a_1, a_3]$ için $\|y+ax, z\| = \min\{\|y+a'x, z\| : a' \in \mathbb{R}\}$ olur.

İspat:

1) $a_1 < b < a_2$ ise $b = ta_1 + (1-t)a_2$ olacak biçimde $t \in (0,1)$ sayısı vardır. Bu yüzden $\|y + bx, z\| = \|t(y + a_1x) + (1-t)(y + a_2x), z\|$

$$\leq t\|y + a_1x, z\| + (1-t)\|y + a_2x, z\| = \|y + a_1x, z\|$$

elde edilir.

2) $a_1 < a_2 < b$ ise $a_2 = ta_1 + (1-t)b$ olacak biçimde $t \in (0,1)$ sayısı vardır. Bu durumda birinci kısımda $\|y + a_1x, z\| = \|y + a_2x, z\|$

$$\leq t\|y + a_1x, z\| + (1-t)\|y + bx, z\|$$

olur ki bu da $\|y + a_1x, z\| \leq \|y + bx, z\|$ olmasını gerektirir. Geri kalanların ispatı benzerdir.

3) $\|y + a'x, z\|$, a' nün sürekli fonksiyonudur ve $a' \rightarrow \pm\infty$ iken $\|y + a'x, z\| \rightarrow \infty$ olur. Buradan $\|y + a'x, z\|$ $\mathbb{R}$ üzerinde minimum değerini alır. Bu sonuç durum 1 in sonucudur.

4) Durum 1 ve 2, $\|y + a'x, z\|$ nin minimum değerinin $\|y + a_1x, z\|$ olduğunu ifade eder. Bu sonuç durum 3 ten elde edilir.

Diğer bir yardımcı önerme [2] de belirtildiği üzere normlu uzaylar için benzer sonucun uyumudur.

Yardımcı Önerme 3.9.2.3: $\{r, s, t\}$ bağımsız bir küme ve

$u(a) = \|(a+1)s + r, t\| - \|(a-1)s + r, t\|$ ise $a \rightarrow \pm\infty$ iken $u(a) \rightarrow \pm 2\|s, t\|$ olur.

Bundan başka $a \geq 1 + 2\|r, t\|/\|s, t\|$ olduğunda $u(a) > 0$ ve $a \leq -(1 + 2\|r, t\|/\|s, t\|)$ ise $u(a) < 0$ dır.

İspat: $a > 1$ için $(a-1)/(a+1) + 2/(a+1) = 1$ olduğundan

$u(a) = \|(a-1)s + (a-1)/(a+1)r, t\| - \|(a-1)s + r, t\| + 2\|s + 1/(a+1)r, t\|$ biçiminde yazılır.

$\|(a-1)s + (a-1)/(a+1)r, t\| - \|(a-1)s + r, t\| \leq 2/(a+1)\|r, t\|$ olduğundan $a \rightarrow \infty$

iken $u(a) \rightarrow 2\|s, t\|$ olduğu aşıkardır.

Şimdi $a \geq 1 + 2\|r, t\|/\|s, t\|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda yukarıdaki adımların hepsi sağlanır. Ayrıca,

$$2\|s + 1/(a+1)r, t\| \geq 2\|s, t\| - 2/(a+1)\|r, t\| > 2\|s, t\| - (2/a)\|r, t\| > \|s, t\| \text{ iken}$$

$$\|(a-1)s + (a-1)/a + 1r, t\| - \|(a-1)s + r, t\| < (2/a)\|r, t\| < \|s, t\| \text{ elde edilir.}$$

Bu yüzden $a \geq 1 + 2\|r, t\|/\|s, t\|$ olduğunda $u(a) > 0$ dır.

Diğer temel sonucumuz kesin konveks uzaylarda Gram-Schmidt yönteminin ispatına imkân sunar. Kesin konvekslik yoksa bunun doğru olup olmadığı açık bir sorudur.

Teorem 3.9.2.2: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks olsun. Bu durumda $x, y, z \in X$ için $I(x, a'x + y, b'x + c'y + z)$ olacak biçimde a', b', c' reel sayıları vardır.

İspat: İspat oldukça uzun olduğundan bunu birçok küçük adımlarla anlatalım.

Adım 1: $\{x, y, z\}$ nin bağımlı olduğunu varsayalım. $px + qy + rz = 0$ olacak biçimde p, q, r sıfır olmayan reel sayıları vardır.

$r \neq 0$ ise $(p/r)x + (q/r)y + z = 0$ ve $I(x + y, (p/r)x + (q/r)y + z)$ dir.

$r = 0$ ise $px + qy = 0$ dır. Burada p ve q ikisi de sıfır değildir.

$q \neq 0$ ise $(p/q)x + y = 0$ ve bundan dolayı $I(x, (p/q)x + y, z)$ olur.

Sonuç olarak, $q = 0$ ise $p \neq 0$ ve $px = 0$ olması $x = 0$ olması demektir. Bu durumda $I(x, y, z)$ elde edilir.

Kalan adımlar için $\{x, y, z\}$ nin bağımsız olduğunu varsayalım.

Adım 2: Yardımcı önerme 3.9.2.3 den

$$c \rightarrow \pm\infty \text{ iken } (\|(c+1)y + z, x\| - \|(c-1)y + z, x\|) \rightarrow \pm 2\|y, x\| \text{ olduğu açıktır.}$$

Süreklilikten $\|(c'+1)y + z, x\| = \|(c'-1)y + z, x\|$ olacak biçimde c' reel sayısı vardır.

İspatın sonuna kadar $W = c'y + z$ ve $\{x, y, w\}$ bağımsız ve $\|y + w, x\| = \|y - w, x\|$ olsun.

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzayın kesin konveksliğinden

$2\|y, x\| < \|y + w, x\| + \|y - w, x\| = 2\|y - w, x\|$ ifadesi $\|x, y\| < \|x, y + w\|$ ve $\|x, y\| < \|x, y - w\|$ olduğunu ifade eder. Benzer adımlar $\|x, w\| < \|x, w - y\|$ ve $\|x, w\| < \|x, w + y\|$ olduğunu gösterir.

Adım 3: $f(a, b) = \|(b+1)x + w, ax + y\| - \|(b-1)x + w, ax + y\|$ ve
 $g(a, b) = \|(a+1)x + y, bx + w\| - \|(a-1)x + y, bx + w\|$

biçiminde tanımlansın. $h(e, d) = \|ex + y, dx + w\|$ ifadesini göz önünde bulunduralım.

$$\begin{aligned} \text{Bu durumda, } |h(e_1, d_1) - h(e_2, d_2)| &\leq |h(e_1, d_1) - h(e_1, d_2)| + |h(e_1, d_2) - h(e_2, d_2)| \\ &= \||e_1x + y, d_1x + w\| - \|e_1x + y, d_2x + w\|| \\ &\quad + \||e_1x + y, d_2x + w\| - \|e_2x + y, d_2x + w\|| \\ &\leq \|e_1x + y, (d_1 - d_2)x\| + \|(e_1 - e_2)x, d_2x + w\| \\ &= |e_1 - e_2|\|x, w\| + |d_1 - d_2|\|x, y\| \end{aligned}$$

dir. Buna göre h düzgün sürekli olduğundan f ve g de düzgün süreklidir.

Adım 4: f ve g ye yardımcı önerme 3.9.2.3 uygulanırsa

- A. $b \rightarrow \pm\infty$ iken $f(a, b) \rightarrow \pm 2\|x, ax + y\| = \pm 2\|x, y\|$ dir.
- B. $b \geq -(1 + (2/\|x, y\|))\|ax + y, w\|$ iken $f(a, b) > 0$ ve
 $b \leq -(1 + (2/\|x, y\|))\|ax + y, w\|$ iken $f(a, b) < 0$ dir.
- C. $a \rightarrow \pm\infty$ iken $g(a, b) \rightarrow \pm 2\|x, bx + w\| = \pm 2\|x, w\|$ dir.
- D. $a \geq 1 + (2/\|x, w\|)\|bx + w, y\|$ iken $g(a, b) > 0$ ve
 $a \leq 1 + (2/\|x, w\|)\|bx + w, y\|$ iken $g(a, b) < 0$ dir.

Sonuç olarak $Z = \{(a, b) : f(a, b) = 0\}$ ve $L(a) = \{(a, b) : b \in \mathbb{R}\}$ ise Z boş olmayan

kapalı bir küme olur ki her a reel sayısı için $Z \cap L(a) \neq \emptyset$ dir. Aynı zamanda

$b = \pm(1 + 2/\|x, y\|)\|ax + y, w\|$ sürekli eğrileri tarafından Z alttan ve üstten sınırlıdır.

Bundan sonraki iki adım Z nin ve $Z \cap L(a)$ nın özelliklerinden daha fazlasına yer verir.

Adım 5: 4.adımın sonundaki tanımlamamıza göre her $Z \cap L(a)$ kümesi boş olmayan kompakt kümedir. Aynı zamanda bu kümenin bağlantılı olduğunu gösterelim.

$b_1 < b_2$ olmak üzere $Z \cap L(a)$ nın elemanlarının (a, b_1) ve (a, b_2) olduğunu varsayalım. $b_1 - 1 < b_2 - 1$ ve $b_1 + 1 < b_2 + 1$ olduğundan

$$(i) \quad b_1 - 1 < b_1 + 1 \leq b_2 - 1 < b_2 + 1$$

ve

$$(ii) \quad b_1 - 1 < b_2 - 1 \leq b_1 + 1 < b_2 + 1$$

ifadelerini göz önünde bulundurmak gerekir.

(i) sağlanırsa yardımcı önerme 3.9.2.2 den

$$\begin{aligned} b_1 + 1 \leq b_2 - 1 \text{ ve } \|(b_1 - 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| \text{ şartları} \\ \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| \text{ eşitliğini ifade eder. Aynı zamanda} \\ b_1 + 1 \leq b_2 - 1 \text{ ve } \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_2 + 1)x + w, ax + y\| \text{ şartları da} \\ \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| \leq \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| \text{ eşitsizliğini ifade eder. Bu yüzden,} \\ \|(b_1 - 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| \\ &= \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| = \|(b_2 + 1)x + w, ax + y\| \end{aligned}$$

dir. Bu da yardımcı önerme 3.9.2.2 den

her $d \in [b_1 - 1, b_2 + 1]$ için $\|dx + w, ax + y\| = \min \{\|b'x + w, ax + y\| : b' \in \mathbb{R}\}$ demektir.

$b_1 < b < b_2$ ise $b_1 - 1 < b - 1 < b + 1 < b_2 + 1$ olması

$\|(b - 1)x + w, ax + y\| = \|(b + 1)x + w, ax + y\| = \min \{\|b'x + w, ax + y\| : b' \in \mathbb{R}\}$ olması demektir. Bu yüzden (a, b) , $Z \cap L(a)$ nın içindedir ve $Z \cap L(a)$ bağlantılıdır.

(ii) sağlanırsa $b_1 - 1 < b_2 - 1 < b_1 + 1$ ve

$$\begin{aligned} \|(b_1 - 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| \text{ olması yardımcı önerme 3.9.2.2 den} \\ \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| &\leq \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| \text{ demektir.} \end{aligned}$$

Benzer biçimde $b_2 - 1 < b_1 + 1 < b_2 + 1$ ve

$$\begin{aligned} \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_2 + 1)x + w, ax + y\| \text{ olması} \\ \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| &\leq \|(b_2 + 1)x + w, ax + y\| \text{ demektir. Bu durumda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(b_1 - 1)x + w, ax + y\| &= \|(b_2 - 1)x + w, ax + y\| \\ &= \|(b_1 + 1)x + w, ax + y\| = \|(b_2 + 1)x + w, ax + y\| \end{aligned}$$

elde edilir. İspat (i) deki gibi devam eder.

Her bir reel a sayısı için $Z \cap L(a)$ bağlantılı olsun. Bu durumda $b \rightarrow \pm\infty$ iken $f(a, b) \rightarrow \pm 2\|x, y\|$ olduğundan her $b \leq b_1$ için $f(a, b_1) < 0$ ise $f(a, b) < 0$ dır. Aynı zamanda her $b \geq b_2$ için $f(a, b_2) > 0$ ise $f(a, b) > 0$ olduğu görülür.

Adım 6: Bu adımda Z nin bağlantılı olduğunu gösterelim. Bunun için her bir $n \geq 1$ için $Z_n = Z \cap \{(a, b) : -n \leq a \leq n\}$ kümesinin bağlantılı olduğunu gösterilmesi gereklidir.

Bazı n ler için Z_n nin bağlantılı olmadığını varsayalım. Z_n nin $Z_n = A_1 \cup A_2$ olacak biçimde kapalı, boş olmayan, parçalı A_1 ve A_2 alt kümeleri vardır.

Z_n kompakt olduğundan A_1 ve A_2 de kompakt olmak zorundadır. p_1 yansıyan fonksiyon, $p_1(a, b) = a$ ise bu durumda $p_1(A_1)$ ve $p_1(A_2)$ $[-n, n]$ in boş olmayan kompakt alt kümeleridir. Aynı zamanda 4.adımdan $[-n, n] = p_1(A_1) \cup p_1(A_2)$ dir.

Bu durumda $[-n, n]$ in bağlantılı oluşu $p_1(A_1) \cup p_1(A_2) \neq \emptyset$ olması demektir.

$a', p_1(A_1)$ ve $p_1(A_2)$ nin ortak sayısı ise $A_1 \cap L(a')$ ve $A_2 \cap L(a')$ kümeleri $Z \cap L(a')$ nün parçalı, boş olmayan, kapalı alt kümeleridir. Buna göre

$$(A_1 \cap L(a')) \cup (A_2 \cap L(a')) = (A_1 \cup A_2) \cap L(a') = Z_n \cap L(a') = Z \cap L(a') \text{ sağlanır.}$$

Bu da 5. adımı bozar. Bu yüzden Z_n bağlantılıdır ve Z bağlantılı olmak zorundadır.

$$\begin{aligned} \text{Adım 7: } f(a, a) &= \|(a+1)x + w, ax + y\| - \|(a-1)x + w, ax + y\| \\ &= \|(a+1)x + w, (a+1)x + w - (ax + y)\| \\ &\quad - \|(a-1)x + w, ax + y - ((a-1)x + w)\| \\ &= \|(a+1)x + w, x + w - y\| - \|(a-1)x + w, x + y - w\| \\ &= \|(a+1)x + w, x + w - y\| - \|(a-1)x + w, x + w - y\| \\ &\quad + \|(a-1)x + w, x + w - y\| - \|(a-1)x + w, x + y - w\| \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

Yardımcı önerme 3.9.2.3. den

$$a \rightarrow \infty \text{ iken } (\|(a+1)x + w, x + w - y\| - \|(a-1)x + w, x + w - y\|) \rightarrow 2\|x, y - w\| \text{ dir.}$$

Aynı zamanda 2. adımın sonunda belirtildiği üzere

$$\begin{aligned} \left\| \left\| (a+1)x + w, x + w - y \right\| - \left\| (a-1)x + w, x + y - w \right\| \right\| &\leq 2 \left\| (a-1)x + w, x \right\| \\ &= 2 \left\| x, w \right\| < 2 \left\| x, y - w \right\| \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden $a \geq a_1$ iken $f(a, a) > 0$ olacak biçimde $a_1 > 0$ vardır. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} a \leq a_2 \text{ iken } f(a, -a) &> 0, \\ a \geq a_3 \text{ iken } f(a, -a) &< 0, \\ a \leq a_4 \text{ iken } f(a, a) &< 0 \text{ olacak biçimde } a_2 < 0, a_3 > 0 \text{ ve } a_4 < 0 \text{ reel} \end{aligned}$$

sayıları vardır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} b \geq b_1 \text{ iken } g(b, b) &> 0, \\ b \leq b_2 \text{ iken } g(-b, b) &< 0, \\ b \geq b_3 \text{ iken } g(-b, b) &> 0, \\ b \leq b_4 \text{ iken } g(b, b) &< 0 \end{aligned}$$

olacak biçimde $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, $b_3 > 0$ ve $b_4 < 0$ reel sayıları vardır.

Adım 8: 7.adımda ve 5. adımın sonunda belirtildiği üzere

$b \geq a \geq a_1$ ya da $b \geq -a \geq -a_2$ iken $f(a, b) > 0$ olur. Aynı zamanda 4. adımdan

$b \geq 1 + (2/\|x, y\|)\|ax + y, w\|$ iken $f(a, b) > 0$ dir. a nın fonksiyonu olarak

$b = 1 + (2/\|x, y\|)\|ax + y, w\|$ sürekli olduğundan $[a_2, a_1]$ aralığında sınırlıdır.

Bu yüzden $b \geq d$ ve $a_2 \leq a \leq a_1$ iken $f(a, b) > 0$ olacak biçimde $d > 0$ reel sayısı

vardır. Benzer bir tartışma k_2, k_3, k_4 pozitif reel sayılarının varlığında yapılır öyle ki

$$\begin{aligned} b \leq -k_2 \text{ ve } |a| \leq k_2 \text{ ya da } b \leq -|a| \leq -k_2 \text{ iken } f(a, b) &< 0, \\ a \geq k_3 \text{ ve } |b| \leq k_3 \text{ ya da } a \geq |b| \geq k_3 \text{ iken } g(a, b) &> 0 \text{ ve} \\ a \leq -k_4 \text{ ve } |b| \leq k_4 \text{ ya da } a \leq -|b| \leq -k_4 \text{ iken } g(a, b) &< 0 \text{ biçiminde yazılır.} \end{aligned}$$

$k = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ seçilirse bu durumda $k > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} b = k \text{ ve } |a| \leq k \text{ iken } f(a, b) &> 0 \\ b = -k \text{ ve } |a| \leq k \text{ iken } f(a, b) &< 0 \\ a = k \text{ ve } |b| \leq k \text{ iken } g(a, b) &> 0 \\ a = -k \text{ ve } |b| \leq k \text{ iken } g(a, b) &< 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$f(k, k) > 0$ ve $f(k, -k) < 0$ olduğundan $[-k, k]$ içinde $f(k, b_5) = 0$ olacak biçimde b_5 sayısı vardır ve $b_5 \in Z$ nin içindedir. Ayrıca, $|b_5| \leq k$ olduğundan $g(k, b_5) > 0$ dır.

Benzer biçimde $[-k, k]$ içinde $g(-k, b_6) < 0$ olacak biçimde b_6 sayısı vardır ve $(-k, b_6) \in Z$ nin içindedir. Z bağlantılı ve g sürekli olduğundan Z içinde $g(a', b') = 0$ olacak biçimde (a', b') noktası vardır. Bu durumda $(a', b') = g(a, b) = 0$ olur.

Adım 9: 2. adımda $w = c'y + z$ olduğu hatırlanacak olursa $u = a'x + y$ ve

$v = w + b'x = b'x + c'y + z$ alındığında

$$0 = \|(c' + 1)y + z, x\| - \|(c' - 1)y + z, x\| = \|v + u, x\| - \|v - u, x\|,$$

$$\begin{aligned} 0 = f(a', b') &= \|(b' + 1)x + w, a'x + y\| - \|(b' - 1)x + w, a'x + y\| \\ &= \|v + x, u\| - \|v - x, u\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 = g(a', b') &= \|(a' + 1)x + y, b'x + w\| - \|(a' - 1)x + y, b'x + w\| \\ &= \|u + x, v\| - \|u - x, v\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $I(x, u, v)$ vardır ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.9.2.3: $I(x, y, z)$ ifadesi her a reel sayısı için $I(ax, y, z)$ oluyorsa $I(., ., .)$ homojendir. Aynı zamanda $I(x_1, y, z)$ ve $I(x_2, y, z)$ ifadeleri $I(x_1 + x_2, y, z)$ oluyorsa $I(., ., .)$ toplamsaldır. $I(., ., .)$ nin simetrikliği ve homojenliği kullanılarak her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $I(ax, by, cz)$ vardır denilebilir.

Teorem 3.9.2.3: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks ve $I(., ., .)$ homojen ise $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-iç çarpım uzayıdır.

İspat: $\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$ olsun. Bu durumda

her $x, y, z \in X$ için $\|x + 2y, z\| = \|x - 2y, z\|$ yazılabilir. Buna göre aşağıdaki durumlar göz önünde bulundurulur.

Durum 1: x, y, z bağımsız ise $\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$ olduğundan teorem 3.9.2.2 nin ispatına göre $I(z, a'z + y, b'z + x)$ olacak biçimde a' ve b' reel sayıları vardır.

$I(.,.,.)$ nin homojenliğinden $I(z, 2(a'z + y), b'z + x)$ sağlanır. Bu yüzden

$\|2(a'z + y) + (b'z + x), z\| = \|2(a'z + y) - (b'z + x), z\|$ ifadesi yazılır. Bu eşitlik

$\|x + 2y, z\| = \|x - 2y, z\|$ eşitliğine indirgenir.

Durum 2: x, y, z bağımlı fakat y ve z bağımsız ise $x = d'y + e'z$ olacak biçimde d' ve e' reel sayıları vardır. $\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$ olduğundan

$\|(d' + 1)y + e'z, z\| = \|(d' - 1)y + e'z, z\|$ yada $|d' + 1|\|y, z\| = |d' - 1|\|y, z\|$ biçiminde

yazılır. $\|y, z\| > 0$ olduğundan $d' = 0$ olur. Buradan

$x = e'z$ ve $\|x + 2y, z\| = \|2y, z\| = \|x - 2y, z\|$ elde edilir.

Durum 3: y ve z bağımlı ise $\|x + 2y, z\| = \|x, z\| = \|x - 2y, z\|$ dir.

Teorem 3.9.2.4: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks ve $I(.,.,.)$ toplamsal ise bu durumda $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-iç çarpım uzayıdır.

İspat: $I(.,.,.)$ nin toplamsallığı, $I(.,.,.)$ nin homojenliğini ifade eder.

Bunun gösterilmesi gereklidir.

$I(.,.,.)$ nin toplamsal olduğunu varsayalım ve $I(x, y, z)$ sağlansın. Bu durumda her pozitif n katsayısı için $I(nx, y, z)$ de sağlanır. Ayrıca, teorem 3.9.2.1 den $I(0, y, z)$ ve $I(-x, y, z)$ ifadeleri de sağlanır. Bu yüzden bu, her n katsayısı için $I(nx, y, z)$ elde etmek için genişletilebilir. $I(.,.,.)$ nin simetrikliği kullanılarak her n, m, k katsayıları için $I(nx, my, kz)$ üçlüsünü elde etmek için bu yöntem tekrar edilebilir. Böylece her n, m, k katsayıları için $\|nx + my, z\| = \|nx - my, z\|$,

$$\|my + kz, x\| = \|my - kz, x\| \text{ ve}$$

$$\|nx + kz, y\| = \|nx - kz, y\|$$

yazılır. Bu, her r rasyonel sayısı için $\|rx + y, z\| = \|rx - y, z\|$

$$\|y + z, rx\| = \|y - z, rx\|$$

ve

$$\|rx + z, y\| = \|rx - z, y\|$$

olması demektir. Genel süreklilik yoluyla her a reel sayısı için $I(ax, y, z)$ meydana gelir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de 2-normlu uzaylarda var olan bazı diklik kavramlarının n -normlu lineer uzaylara nasıl taşındığına bakalım.

3.10. n -Normlu Lineer Uzaylarda Diklik

Matematikte birçok konuda olduğu gibi 2-normlu lineer uzaylarda diklik konusunu da n -boyuta taşımak mümkündür. Bu konuda Khan ve Siddiqui [33], Cho ve Kim [41], Godini [39] çeşitli çalışmalar yapmışlardır. n -normlu lineer uzayların tarihçesi hakkında [42] nolu kaynak bize bilgi verir.

İlk olarak n -normlu lineer uzayların tanımını verelim.

Tanım 3.10.1: $n \geq 2$ negatif olmayan bir tamsayı ve X , boyutu n ve n den büyük vektör uzayı olsun. X^n de tanımlı reel değerli $\|., \dots, .\|$ fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlarsa X üzerinde n -norm olarak adlandırılır.

- 1) $\|x_1, \dots, x_n\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_1, \dots, x_n$ lineer bağımlı olmasıdır.
- 2) $\|x_1, \dots, x_n\|$ permütasyon altında değişmez.
- 3) Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x_1, x_2, \dots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ dir.
- 4) $\|x + x', x_2, \dots, x_n\| \leq \|x, x_2, \dots, x_n\| + \|x', x_2, \dots, x_n\|$ dir.

Bu durumda $(X, \|., \dots, .\|)$ ikilisine de n -normlu lineer uzay adı verilir.

Burada, paralelkenar kuralı

$$\|x + y, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|x - y, x_2, \dots, x_n\|^2 = 2\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 + 2\|y, x_2, \dots, x_n\|^2$$

biçiminde yazılabilir.

Genelde $\|x_1, \dots, x_n\|$, X içinde $x_1, \dots, x_n$ tarafından üretilen n -boyutlu paralelyüzlünün hacmi olarak yorumlanır.

Şimdi n -normlu lineer uzaylarda P-,I-,BJ-dikliğini tanımlayalım.

Tanım 3.10.2: $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu lineer uzay olsun. $x, y \in X$ ve her $x_2, \dots, x_n \in V$ için $\|x + y, x_2, \dots, x_n\|^2 = \|x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|y, x_2, \dots, x_n\|^2$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V)=1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_P y$ dir.

Tanım 3.10.3: $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu lineer uzay olsun. $x, y \in X$ ve her $x_2, \dots, x_n \in V$ için $\|x + y, x_2, \dots, x_n\| = \|x - y, x_2, \dots, x_n\|$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V)=1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_I y$ dir.

Tanım 3.10.4: $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu lineer uzay olsun. $x, y \in X$ ve her $x_2, \dots, x_n \in V$ için $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|x + \alpha y, x_2, \dots, x_n\| \geq \|x, x_2, \dots, x_n\|$ eşitsizliğini sağlayan ve $\text{codim}(V)=1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_{BJ} y$ dir.

IV. BÖLÜM

φ -2-NORMLU LİNEER UZAYLARDA φ - b -GENEL DİKLİĞİ

Bu bölümde, Golet [43] tarafından verilen φ -fonksiyonu ve buna dayanarak yapılan φ -2-normlu lineer uzay tanımları verilip bu φ -fonksiyonu, Kamali ve Mazaheri [36] nin 2-normlu lineer uzaylarda çalıştığı b -genel dikliğine ve sonuçlarına uygulanacaktır. Buradan elde edilen yeni sonuçlar verilecektir.

4.1. Ön Bilgiler

İlk olarak φ fonksiyonu ve φ -2-normlu lineer uzay tanımını verelim.

Tanım 4.1.1: $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonu şu koşulları sağlar.

- 1) $\varphi(-t) = \varphi(t)$
- 2) $\varphi(1) = 1$
- 3) φ , kesin artan ve $(0, \infty)$ da sürekli
- 4) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha) = 0$ ve $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) = \infty$

Böyle fonksiyonlara örnek olarak; $\varphi(\alpha) = |\alpha|$, $\varphi(\alpha) = |\alpha|^p$ ($p \in \mathbb{R}^+$) ve

$\varphi(\alpha) = \frac{2\alpha^{2n}}{|\alpha|+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ fonksiyonları verilebilir.

Tanım 4.1.2: L , boyutu 1 den büyük $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı lineer uzay olsun.

$\|.,.\|: L \times L \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar.

- 1) $\|x, y\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır.
- 2) Her $x, y \in X$ için $\|x, y\| = \|y, x\|$ dir.
- 3) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x, y\| = |\varphi(\alpha)| \|x, y\|$ dir.
- 4) $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$ dir.

Bu $\|.,.\|$ fonksiyonuna φ -2-norm ve $(L, \|.,.\|)$ ikilisine de φ -2-normlu lineer uzay denir.

4.2. Temel Sonuçlar

Burada, φ -2-normlu lineer uzaylarda φ - b -genel dikliğini tanımlayıp bununla ilgili bazı sonuçları ifade ve ispat edelim.

Tanım 4.2.1. $(X, \|.,.\|)$ φ -2-normlu uzay ve $x, y \in X$ olsun. $\|x, b\| \neq 0$ olmak üzere her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x, b\| \leq \|x + \varphi(\alpha)y, b\|$ olacak biçimde $b \in X$ varsa x φ - b -diktir y denir ve $x \perp_{\varphi}^b y$ biçiminde gösterilir.

Teorem 4.2.1: X φ -2-normlu lineer uzay, $b, y \in X$ ve $x \in X - \langle b \rangle$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $x \perp_{\varphi}^b y$.
2. $f(y, b) = 0$, $f(x, b) = \|x, b\|$ ve $\|f\| = 1$ olacak biçimde $f \in X_b^*$ vardır.

İspat: İlk olarak, $f(y, b) = 0$ olacak biçimde $f \in X_b^*$ olduğunu varsayalım. Bu durumda; $\|x, b\| = f(x, b) = f(x + \varphi(\alpha)y, b) \leq \|f\| \cdot \|x + \varphi(\alpha)y, b\|$ biçiminde yazılır. Buradan $\|x, b\| \leq \|x + \varphi(\alpha)y, b\|$ elde edilir ki bu da $x \perp_{\varphi}^b y$ demektir.

Şimdi de $x \perp_{\varphi}^b y$ ve $W = \langle y \rangle$, X in y tarafından gerilen alt uzayı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\inf \{\|x - \varphi(\alpha)y, b\| : \varphi(\alpha)y \in W\} \geq \|x, b\| > 0$ yazılabilir.

Buradan $g(y, b) = 0$, $g(x, b) = 1$ ve $\|g\| = \frac{1}{\delta}$ olacak biçimde $g \in X_b^*$ vardır.
 $f = \delta g$ alınırsa $f(y, b) = 0$, $f(x, b) = \|x, b\|$ ve $\|f\| = 1$ elde edilir.

Tanım 4.2.2: X φ -2-normlu uzay ve $x, y, b \in X$ olsun.

$\phi_x(x, b) = \|x, b\|^2$, $\|\phi_x\| = \|x, b\|$ ve $\phi(y, b) = 0$ olacak biçimde $\phi_x \in X_b^*$ varsa x, y ye φ - b -genel diktir denir ve $x \perp_{\varphi_G}^b y$ biçiminde gösterilir.

Teorem 4.2.2: X , φ -2-normlu uzay olsun. $x, y \in X$ için $x \perp_G^b y$ ise $x \perp_{\varphi}^b y$ dir.

İspat: $x, y \in X$ ve $x \perp_G^b y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|x, b\|^2 &= \phi_x(x, b) = \phi_x(x + \varphi(\alpha)y, b) \\ &\leq \|\phi_x\| \cdot \|x + \varphi(\alpha)y, b\| \\ &= \|x, b\| \cdot \|x + \varphi(\alpha)y, b\| \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Buradan $\|x, b\| \leq \|x + \varphi(\alpha)y, b\|$ elde edilir ki bu da $x \perp_{\varphi}^b y$ demektir.

Teorem 4.2.3: X , φ -2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- a) Her $x \in X$ ve $\varphi(\alpha) > 0$ için, $\phi_{\varphi(\alpha)x} = \varphi(\alpha)\phi_x$ dir.
- b) Her $x, y \in X$ ve $\varphi(\alpha) > 0$ için, $x \perp_{\varphi_G}^b y$ ise $\varphi(\alpha)x \perp_{\varphi_G}^b y$ dir.
- c) Her $x \in X$ için, $x \perp_{\varphi_G}^b x$ ise $x = 0$ dir.
- d) Her $x, y \in X$ için $x \perp_{\varphi_G}^b y$ ve $x \neq 0$ ise $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$ dir.
- e) Her $x \in X$ için, $0 \perp_{\varphi_G}^b x$ ve $x \perp_{\varphi_G}^b 0$ dir.

İspat: a) $x \in X$ ve $\varphi(\alpha) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi_{\varphi(\alpha)x}(\varphi(\alpha)x, b) &= \|\varphi(\alpha)x, b\|^2 = \varphi^2(\alpha)\|x, b\|^2 \\ \phi_{\varphi(\alpha)x}(\varphi(\alpha)x, b) &= \varphi^2(\alpha)\phi_x(x, b) \\ \varphi(\alpha)\phi_{\varphi(\alpha)x}(x, b) &= \varphi^2(\alpha)\phi_x(x, b) \\ \phi_{\varphi(\alpha)x}(x, b) &= \varphi(\alpha)\phi_x(x, b) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Buradan $\phi_{\phi(\alpha)x} = \phi(\alpha)\phi_x$ elde edilir.

b) $x, y \in X$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $\phi(\alpha) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\phi^2(\alpha)\|x, b\|^2 &= \phi^2(\alpha)\|x + \beta y, b\|^2 \\ &= \|\phi(\alpha)(x + \beta y), b\|^2 \\ &= \|\phi(\alpha)x, b\|^2 + \|\phi(\alpha)\beta y, b\|^2 \\ &= \|\phi(\alpha)x, b\|^2\end{aligned}$$

sağlanır. Bu yüzden $\phi(\alpha)x \perp_{\phi_G}^b y$ dir.

c) Her $x \in X$ için $x \perp_{\phi_G}^b x$ ise $\phi_{\phi(\alpha)x}(\phi(\alpha)x, b) = 0$ ve

$\phi_{\phi(\alpha)x}(\phi(\alpha)x, b) = \|\phi(\alpha)x, b\|^2 = 0$ olduğundan $\phi(\alpha) > 0$ ve $b \in X$ için $x = 0$ dir.

d) $z \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ olsun. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi(\alpha) = 0$ olduğundan herhangi c_1 ve c_2 skaler sayıları

için x_n ve y_n dizileri seçelim. $z = c_1 x_n = c_2 y_n$ yazılabilir. $\phi_{\phi(\alpha)}(z, b) = 0$ olduğundan

$\phi_{\phi(\alpha)x}(\phi(c_1)x_n, b) = \|\phi(c_1)x_n, b\|^2 = \phi^2(c_1)\|x_n, b\|^2$ dir. $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n, b\| \not\rightarrow 0$ olur.

Bu yüzden $\phi(c_1) \rightarrow 0$ ve buradan $c_1 \rightarrow 0$ elde edilir.

e) Aşıkardır.

V. BÖLÜM

2-İÇ-ÇARPIM UZAYLARINDA DİKLİK

Bu bölümde Gateaux türevleri ve özellikleri tanımlanacak ve Gateaux türevleri cinsinden diklik anlatılacaktır. Aynı zamanda genelleştirilmiş 2-iç çarpım uzaylarının tanımı ve buna ait teoremi verilip 2- iç çarpım uzaylarındaki diklik kavramları n -iç çarpım uzaylarına taşınacaktır. Bu konularda Cho ve Kım [41], A. Misiak [42], H. Gunawan [44] ayrıntılı çalışmalar yapmışlardır.

5.1. Ön Bilgiler

2-iç çarpım uzaylarının tanımı daha önceki bölümde verilmiştir. O halde ilk olarak n -iç çarpım uzaylarının tanımını yapalım.

Tanım 5.1.1: X^{n+1} üzerinde tanımlı reel değerli $\langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde n -iç çarpım adını alır.

- 1) $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle \geq 0$; $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin lineer bağımlı olmasıdır.
- 2) Her $(1, \dots, n)$ in $(i_1, \dots, i_n)$ permutasyonu için $\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_1} | x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \rangle$ dir.
- 3) $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle y, x | x_2, \dots, x_n \rangle$ dir.
- 4) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\langle \alpha x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \alpha \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle$ dir.
- 5) $\langle x + x', y | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle + \langle x', y | x_2, \dots, x_n \rangle$ dir.

Bu durumda $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ ikilisine de n -iç çarpım uzayı denir.

$(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ n -iç çarpım uzayı ise

n -norm $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = \sqrt{\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle}$ biçiminde tanımlanır. Buna bağlı olarak polarizasyon eşitliği

$$4\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \|x + y, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x - y, x_2, \dots, x_n\|^2$$

şeklindedir.

Herhangi bir $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı standart n -iç çarpım uzayı ise

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, x_2 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

eşitliği yazılır ve n -norm $\|x_1, \dots, x_n\| = \sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)}$ biçiminde oluşturulur. Bu ifade aynı zamanda standart n -norm olarak da bilinir. Bu nedenle standart n -iç çarpım uzayı standart n -normlu uzaydır ve terside doğrudur.

Burada $\det(\langle x_i, x_j \rangle)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ in Gramian determinanti olarak bilinir.

5.2. n -İç Çarpım Uzaylarında Diklik

n -iç çarpım uzaylarında x ve y vektörleri arasındaki G-dikliği aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 5.2.1: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ boyutu $n+1$ veya daha büyük olan n -iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ ve her $x_2, \dots, x_n \in V$ için $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı varsa $x \perp_G y$ dir.

$(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ n -iç çarpım uzaylarında [39] ve [41] nolu kaynaklarda belirtildiği üzere x ve y arasında her $x_2, \dots, x_n \notin V\{x, y\}$ için $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ şartı ile G-dikliği tanımlayamayız.

Teorem 5.2.1: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ boyutu $n+1$ veya daha büyük standart n -iç çarpım uzayı olsun. Her $x_2, \dots, x_n \notin V\{x, y\}$ için $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ şartı sadece $x = 0$ veya $y = 0$ olduğunda sağlanır.

İspat: İspatı tersini varsayarak yapalım. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \neq 0$ olacak biçimde $x_2, \dots, x_n \notin V\{x, y\}$ vardır ifadesini gösterelim. Bunu yapmak için birkaç durumu göz önünde bulunduralım.

Durum 1: x ve y lineer bağımlı yani, $k \neq 0$ için $y = kx$ ise

$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = k \langle x, x | x_2, \dots, x_n \rangle = k \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^2$ dir. Şimdi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lineer bağımsız olacak biçimde $x_2, \dots, x_n \notin V\{x\}$ seçelim. Bu durumda $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = k \|x, x_2, \dots, x_n\|^2 \neq 0$ olur.

Durum 2: x ve y lineer bağımsız ise iki alt durumu göz önünde bulunduralım.

Durum 2a: $x \not\perp y$ veya $\langle x, y \rangle \neq 0$ ise $x_2, \dots, x_n \in \{x, y\}^\perp$ olacak biçimde ortonormal dizi seçilebilir. Böylece

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, y \rangle \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2 = \langle x, y \rangle \neq 0 \text{ olur.}$$

Durum 2b: $x \perp y$ veya $\langle x, y \rangle = 0$ ise bu durumda sıfır olmayan $x_2 = x + y + u \notin \text{span}\{x, y\}$ vektörü seçilebilir. Burada sıfır olmayan u vektörü $\text{span}\{x, y\}$ ye dik olan sabit vektördür. Sıfır olmayan $x_3, \dots, x_n \notin V\{x, y\}$ için $x_3 \perp V\{x, y\}$ ve $i = 1, \dots, n$ için $x_i \perp V\{x, y, x_3, \dots, x_{i-1}\}$ dir.

$$\text{Bu durumda } \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} 0 & \langle x, x_2 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ 0 & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_n, x_2 \rangle & 0 & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\langle x, x_2 \rangle \langle x_2, y \rangle \|x_3\|^2 \dots \|x_n\|^2 \\
&= -\|x\|^2 \|y\|^2 \|x_3\|^2 \dots \|x_n\|^2 \neq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle herhangi bir durumda $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle \neq 0$ olacak biçimde $x_2, \dots, x_n \notin V\{x, y\}$ bulunabilir. Buna göre ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.2: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ n -iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda P-, I-, BJ-diklikleri G-dikliği ile eşdeğerdir.

İspat: İspat, n -iç çarpım uzayının özelliklerinde görülebilir. Örneğin; $x \perp_{BJ} y$ olması $x \perp_G y$ olması demektir. Her $x_2, \dots, x_n \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$\|x + \alpha y, x_2, \dots, x_n\| \geq \|x, x_2, \dots, x_n\|$ eşitsizliğini sağlayan ve $\text{codim}(V)=1$ olacak biçimde X in V alt uzayını alalım. Şu an için $x_2, \dots, x_n \in V$ saptayalım. Bu durumda her iki tarafın karesi alınarak her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$2\alpha \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle + \alpha^2 \|y, x_2, \dots, x_n\|^2 \geq 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle^2 \leq 0$ ya da $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ olması demektir. Her $x_2, \dots, x_n$ için doğru olduğundan $x \perp_G y$ sonucuna varılır.

Teorem 5.2.3: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ n - iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a) $x \perp_G x$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.
- b) $x \perp_G y$ ise $y \perp_G x$ dir.
- c) Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $x \perp_G y$ ise $\alpha x \perp_G \beta y$ dir.

İspat: İspat, G-dikliğinin tanımından ve n -iç çarpımın özelliklerinden direkt olarak yapılabilir. Örneğin; sadece (a) yı ispat etmek için $x \perp_G x$ ve $x \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x_2, \dots, x_n \in V$ için $\langle x, x | x_2, \dots, x_n \rangle = \|x, x_2, \dots, x_n\|^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $\text{codim}(V)=1$ olacak biçimde X in bir V alt uzayı vardır. Fakat $\dim(V) \geq n$ olduğundan $\{x, x_2, \dots, x_n\}$ lineer bağımsız olacak biçimde

$x_2, \dots, x_n \in V$ seçilebilir. Bu durumda $\|x, x_2, \dots, x_n\| > 0$ olur ki bu bir çelişkidir.

Bir sonraki teoremdede, standart n -iç çarpım uzayında G -dikliğinin genel diklikle eşdeğer olduğu belirtilmiştir.

Teorem 5.2.4: $(X, \langle \cdot, \cdot | \cdot, \dots, \cdot \rangle)$ standart n -iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda $x \perp y$ ise $x \perp_G y$ dir.

İspat: Önce gerekli şartı ispatlayalım. $x \perp y$ olduğunu varsayalım, yani $\langle x, y \rangle = 0$ ve $x, y \neq 0$ olsun. Bu durumda $V = \{x\}^\perp$ seçebiliriz. Açıkça, $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde V , X in alt uzayıdır. Buna göre her $x_2, x_3, \dots, x_n \in V$ için $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = 0$ elde edilir. Alternatif olarak $V = \{y\}^\perp$ seçerek de aynı sonuca varılır. Bu $x \perp_G y$ olduğunu gösterir.

Yeterli şart için $x \not\perp_G y$ yani $\langle x, y \rangle \neq 0$ olduğunu varsayalım. Burada x ve y sıfır olmayan vektörlerdir. $x \not\perp_G y$ olduğunu göstermek için V , $\text{codim}(V) = 1$ olacak biçimde X in keyfi bir alt uzayı olsun.

$$\dim(V \cap \{x\}^\perp) \geq n-1 \text{ olduğundan her } i = 2, \dots, n \text{ için } \langle x, x_i \rangle = 0$$

olacak biçimde $x_2, \dots, x_n \in V$ ortonormal dizisi var olmak zorundadır. Bundan dolayı $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \langle x, y \rangle \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2 = \langle x, y \rangle \neq 0$ olur ve ispat tamamlanır.

5.3. Gateaux Türevleri

Bu kısımda 2-normların ve genelleştirilmiş 2-iç çarpımların Gateaux türevlerinin bazı özelliklerini verelim.

Daha sonra 2-normlu uzaylar için Gateaux türevleri ve diklik cinsinden kesin konveksliği tanımlayalım.

En sonda da 2-iç çarpım uzaylarının Gateaux türevleri ve diklikler cinsinden bazı özelliklerini elde edelim.

5.3.1. Ön bilgiler

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. $N_+(x, z)(y)$

fonksiyoneli $N_+(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$ biçiminde tanımlanır.

Bu ifadeye 2-normun y yönünde (x, z) de sağdan Gateaux türevi denir. Bu limit mevcutsa 2-norm sağdan diferansiyellenebilirdir.

Benzer metodla soldan Gateaux türevi $N_-(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$

biçiminde tanımlanır. Eğer $N_+(x, z)(y) = N_-(x, z)(y)$ ise 2-norm (x, z) de Gateaux

diferansiyellenebilirdir ve $N(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$ biçiminde yazılır.

$x, y, z \in X$ ve herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için $n\langle x, y | z \rangle(t) = \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$ eşitliği

tanımlanabilir. Bu durumda aşağıdaki yardımcı önerme elde edilir.

Yardımcı Önerme 5.3.1.1: [45] Herhangi bir $x, y \in X$ ve keyfi $z \in X$ sabitleri için

$n\langle x, y | z \rangle(t)$ fonksiyoneli t pozitif reel değişkeninde artandır ve

$N_+(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} n\langle x, y | z \rangle(t)$ mevcuttur.

İspat: $t' > t > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & n\langle x, y | z \rangle(t') - n\langle x, y | z \rangle(t) \\ & \geq \frac{t\|x + t'y, z\| - t\|x, z\| - \|tx + t'ty, z\| - (t' - t)\|x, z\| + t\|x, z\|}{t't} = 0 \end{aligned}$$

yazılır. Bu nedenle $t' > t > 0$ ise $n\langle x, y | z \rangle(t') \geq n\langle x, y | z \rangle(t)$ elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} n\langle x, y | z \rangle(t) &= \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t} \\ &\geq \|(x/t), z\| - \|y, z\| - \|(x/t), z\| = -\|y, z\| \text{ dir.} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $t_n \rightarrow 0$ olduğundan $\{t_n\}$ dizisi azalan bir dizidir. $n\langle x, y | z \rangle(t_n)$

reel sayıların sınırlı ve azalan dizisidir. Bu yüzden

$$N_+(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} n\langle x, y | z \rangle(t) \text{ mevcuttur.}$$

Aşağıda $N_+(.,.)(.)$ fonksiyonelinin bazı özellikleri sıralanmıştır.

Teorem 5.3.1.1: Her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- 1) $N_+(x, z)(y) \leq \|y, z\|$ dir.
- 2) $N_+(x, z)(y + y') \leq N_+(x, z)(y) + N_+(x, z)(y')$ dir.
- 3) $\alpha > 0$ için $N_+(\alpha x, z)(y) = N_+(x, z)(y)$ dir.
- 4) $\alpha \geq 0$ için $N_+(x, z)(\alpha y) = \alpha N_+(x, z)(y)$ dir.
- 5) $\alpha \geq 0$ için $N_+(x, z)(\alpha x) = \alpha \|x, z\|$ dir.

İspat: (1) $t > 0$ olsun.

$$\frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t} \leq \frac{\|x, z\| + t\|y, z\| - \|x, z\|}{t} = \|y, z\|$$

yazılır. Buradan

$$N_+(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t} \leq \|y, z\|$$

elde edilir.

(2)

$$\begin{aligned} & \frac{\|x + t(y + y'), z\| - \|x, z\|}{t} \\ & \leq \frac{\|(x/2) + ty, z\| - \frac{1}{2}\|x, z\|}{t} + \frac{\|(x/2) + ty', z\| - \frac{1}{2}\|x, z\|}{t} \\ & = \frac{\|x + 2ty, z\| - \|x, z\|}{2t} + \frac{\|x + 2ty', z\| - \|x, z\|}{2t} \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu eşitsizliğin her iki yanında limit alınırsa

$$N_+(x, z)(y + y') \leq N_+(x, z)(y) + N_+(x, z)(y')$$

elde edilir.

(3) $\alpha > 0$ için,

$$\begin{aligned} N_+(\alpha x, z)(y) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|\alpha x + ty, z\| - \|\alpha x, z\|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + (t/\alpha)y, z\| - \|x, z\|}{(t/\alpha)} \\ &= N_+(x, z)(y) \end{aligned}$$

dir.

(4) $\alpha > 0$ için,

$$\begin{aligned} N_+(x, z)(\alpha y) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \alpha ty, z\| - \|x, z\|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \{\|(x/\alpha) + ty, z\| - \|(x/\alpha), z\|\}}{t} \\ &= \alpha N_+((x/\alpha), z)(y) \\ &= \alpha N_+(x, z)(y) \end{aligned}$$

dir. $\alpha = 0$ için (3) kullanılarak

$$N_+(x, z)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x, z\| - \|x, z\|}{t} = 0 = 0 N_+(x, z)(y)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (5) \quad \alpha \geq 0 \text{ için } N_+(x, z)(\alpha x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \alpha tx, z\| - \|x, z\|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + \alpha tx, z\| - \|x, z\|}{t} + \alpha \|x, z\| - \alpha \|x, z\| \\ &= \alpha \|x, z\| \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

$n\langle x, y|z \rangle(t) = -n\langle -x, y|z \rangle(-t)$ olduğundan yardımcı önerme 5.3.1.1 den sabit

$x, y \in X$ ve keyfi $z \in X$ için $n\langle x, y|z \rangle(t)$ fonksiyoneli t negatif reel değişkeni için

artan fonksiyondur. $N_-(x, z)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^-} n\langle x, y|z \rangle(t)$ mevcuttur. Buradan

her $x, y, z \in X$ için $N_-(x, z)(y) = -N_+(-x, z)(y) = -N_+(x, z)(-y)$ sağlanır.

Sonuç 5.3.1.1: Her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- 1) $-\|y, z\| \leq N_-(x, z)(y)$.
- 2) $N_-(x, z)(y) + N_-(x, z)(y') \leq N_-(x, z)(y + y')$.
- 3) $\alpha < 0$ için $N_+(\alpha x, z)(y) = -N_-(x, z)(y)$.
- 4) $\alpha \leq 0$ için $N_+(x, z)(\alpha y) = \alpha N_-(x, z)(y)$.
- 5) $N_-(x, z)(y) \leq N_+(x, z)(y)$

İspat: Sadece $N_-(x, z)(y) \leq N_+(x, z)(y)$ olduğunu gösterelim.

$t > 0$ için $2\|x, z\| \leq \|x + ty, z\| + \|x - ty, z\|$ olduğunda
 $-\|x - ty, z\| + \|x, z\| \leq \|x + ty, z\| - \|x, z\|$ elde edilir.
 $t > 0$ olduğundan $\frac{\|x - ty, z\| - \|x, z\|}{-t} \leq \frac{\|x + ty, z\| - \|x, z\|}{t}$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.3.1.1 ve sonuç 5.3.1.1 kullanılarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 5.3.1.2: 2-normun y yönünde (x_0, z) de $N(x_0, z)(y)$ Gateaux türevi varsa aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- 1) $N(x_0, z)(y + y') = N(x_0, z)(y) + N(x_0, z)(y')$ dir.
- 2) $N(x_0, z)(\alpha y) = \alpha N(x_0, z)(y)$ dir.
- 3) Herhangi bir sıfır olmayan $\alpha \in \mathbb{R}$ için $N(\alpha x_0, z)(y) = \text{sgn}(\alpha) N(x_0, z)(y)$ dir.
- 4) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $N(x_0, z)(\alpha x_0) = \alpha \|x_0, z\|$ dir.
- 5) $|N(x_0, z)(y)| \leq \|y, z\|$ dir.

Sıfır olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ elemanları için $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ tarafından gerilen X in bir alt uzayıdır. Sıfır olmayan $z \in X$ için $X_z : X/V(z)$ bölüm uzayı olsun. Her $x \in X$ için $(x)_z$, $V(z)$ ye göre bir denklik sınıfı olarak tanımlanır.

X_z lineerdir. Çünkü $(x)_z + (y)_z = (x + y)_z$ ve $(\alpha x)_z = \alpha(x)_z$ sağlanır.

Herhangi bir $x, y \in X$ ve $(x)_z = (y)_z$ için $\|x, z\| - \|y, z\| \leq \|x - y, z\| = 0$ olduğundan

$\|x, z\| = \|y, z\|$ elde edilir. Bu yüzden X_z üzerindeki $\|\cdot\|_z$ fonksiyonu $\|(x)_z\|_z = \|x, z\|$ olarak tanımlanır ve X_z üzerinde iyi tanımlıdır [46].

Yardımcı Önerme 5.3.1.2: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Sıfır olmayan sabit bir $z \in X$ için $(X_z, \|\cdot\|_z)$ bölüm uzayı olsun. $\|\cdot\|_z$, $(x)_z$ de Gateaux diferansiyellenebilir ise 2-norm y yönünde (x, z) de Gateaux diferansiyellenebilir.

Tanım 5.3.1.1: $x \neq 0$ ve $z \notin V(x)$ için 2-norm, y yönünde (x, z) de Gateaux diferansiyellenebilir ise $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay düzgündür.

Buna göre $x = 0$ ve $z \neq 0$ veya $z \in V(x)$ olduğunda 2-norm y yönünde (x, z) de Gateaux diferansiyellenebilir olmayabilir. Aslında $x = 0$ ve $z \neq 0$ ise

$N_+(0, z)(y) = \|y, z\|$ ve $N_-(0, z)(y) = -\|y, z\|$ olduğundan 2-norm y yönünde (x, z) de Gateaux diferansiyellenebilir değildir. $z \in V(x)$ olduğunda da aynı sonuç geçerlidir.

Her $x \neq 0$ ve $z \notin V(x)$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay düzgün olur.

- 1) $N_+(x, z)(y + y') = N_+(x, z)(y) + N_+(x, z)(y')$.
- 2) $-N_+(x, z)(-y) = N_+(x, z)(y)$.

Herhangi bir $x, y, z \in X$ için y yönünde (x, z) de $\|x, z\|^2/2$ nin $\langle x, y | z \rangle$ Gateaux

$$\begin{aligned} \text{türevi vardır ve } \langle x, y | z \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty, z\|^2 - \|x, z\|^2}{2t} \\ &= \|x, z\| N_+(x, z)(y) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$ fonksiyonu 2-norma bağlı genelleştirilmiş 2-iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

Teorem 5.3.1.2: Genelleştirilmiş 2-iç çarpım uzayı $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- 1) $\|x, z\| = \langle x, x | z \rangle^{1/2}$ dir.
- 2) $|\langle x, y | z \rangle| \leq \|x, z\| \cdot \|y, z\|$ dir.
- 3) $\langle x, y + y' | z \rangle \leq \langle x, y | z \rangle + \langle x, y' | z \rangle$ dir.
- 4) Herhangi bir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için $\langle \alpha x, \beta y | z \rangle = \alpha \beta \langle x, y | z \rangle$ dir.
- 5) X , 2-iç çarpım uzayı ise $\langle x, y | z \rangle = (x, y | z)$ dir.

5.4. Diklikler

Burada diklik terimleri cinsinden 2-normlu uzaylar için kesin konveksliğin özelliklerini verelim.

Tanım 5.4.1 [46]: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda

$\|x, z\| = \|y, z\| = \|x + y, z\|/2 = 1$ ve $z \notin V(x, y)$ olması $x = y$ olmasını gerektiriyorsa bu uzaya kesin konveks denir.

Her 2-boyutlu 2-normlu lineer uzay ve her 2-iç çarpım uzayı kesin konvektir.

Tanım 5.4.2: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Her $z \notin V(x, y)$ için $\langle x, y | z \rangle = 0$ oluyorsa x elemanı y elemanına G-diktir. Burada $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle$ fonksiyonu genelleştirilmiş 2-iç çarpımdır.

$\langle x, y | z \rangle = \|x, z\| N_+(x, z)(y)$ olduğundan x ve z lineer bağımlı yada $N_+(x, z)(y) = 0$ ise $\langle x, y | z \rangle = 0$ dır.

B-dikliği ile ilgili bazı bilgiler aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.4.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun.

1) Her $x(\neq 0) \in X$, $y \in X$ ve $z \notin V(x, y)$ için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\|x + t(ax + y), z\| \geq \|x, z\|$ ve $\|(bx + y) + ty, z\| \geq \|bx + y, z\|$ olacak biçimde a ve b sayıları vardır.

2) Her $x(\neq 0) \in X$, $y \in X$ ve $z \notin V(x, y)$ için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\|(bx + y) + ty, z\| \geq \|bx + y, z\|$ olacak biçimde tek bir b reel sayısı varsa $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konvektir.

3) Her $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|x + ty, z\| \geq \|x, z\|$ olması için gerek ve yeter şart

$-N_+(x, z)(y) \leq 0 \leq N_+(x, z)(y)$ olmasıdır.

Teorem 5.4.2: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer düzgün uzay olsun. Lineer bağımsız $x, y \in X$ ve $z \notin V(x)$ için $\langle x, bx + y | z \rangle = 0$ olacak biçimde tek bir b reel sayısı vardır.

İspat: $b = -N_+(x, z)(y)/\|x, z\|$ alınırsa,

$$\begin{aligned} N_+(x, z)(bx + y) &= N_+(x, z)(bx) + N_+(x, z)(y) \\ &= b\|x, z\| + N_+(x, z)(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda G-dikliğinin tanımından ve b nin tekliğinden $\langle x, bx + y | z \rangle = 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4.3: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer düzgün uzay olsun. Bu durumda B-dikliği ve G-dikliği eşdeğerdir.

İspat: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ düzgün olduğundan her $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|x + ty, z\| \geq \|x, z\|$ olması için gerek ve yeter şart $N(x, z)(y) = 0$ olmasıdır. Bu nedenle B-dikliği ve G-dikliği eşdeğerdir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4.4: $\langle ax + y, x | z \rangle = 0$, $\langle bx + y, x | z \rangle = 0$ ve $z \notin V(x, y)$ olması $a = b$ olmasını gerektiriyorsa $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzayı kesin konvektir.

İspat: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks, $\langle ax + y, x | z \rangle = 0$, $\langle bx + y, x | z \rangle = 0$

ve $z \notin V(x, y)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda teorem 5.4.1 den

her $t \in \mathbb{R}$ için $\|(ax + y) + tx, z\| \geq \|ax + y, z\|$ ve $\|(bx + y) + tx, z\| \geq \|bx + y, z\|$ olması $a = b$ olmasını gerektirir.

Tersine, $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konveks olmasın. Bu durumda $w, y \in X$ ve $z \notin V(y, w)$ seçilirse $t \in [0, 1]$ için $\|w, z\| = \|y, z\| = \|tw + (1-t)y, z\| = 1$ elde edilir.

Herhangi bir $s \in [0,1]$ reel sayısı için

$$N_+(s(w-y)+y, z)(w-y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(s+t)w + (1-(s+t))y, z\| - \|sw + (1-s)y, z\|}{t} = 0$$

dır. Bu yüzden $x = w - y$ alınarak $s \in [0,1]$ için $\langle sx + y, x | z \rangle = 0$ olur ki $\langle bx + y, x | z \rangle = 0$ olmasını sağlayan b sayısının tekliği ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4.4 kullanılarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 5.4.5: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer düzgün uzay olsun. Bu durumda G-dikliği simetrik ise B-dikliği de simetriktir ve $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konvektir.

İspat: $x, y \in X$ lineer bağımsız elemanlar, $z \in V(x, y)$, $\langle ax + y, x | z \rangle = 0$ ve $\langle bx + y, x | z \rangle = 0$ olduğunu varsayalım. G-dikliği simetrik olduğundan $\langle x, ax + y | z \rangle = 0$ ve $\langle x, bx + y | z \rangle = 0$ olur.

bu nedenle $N_+(x, z)(ax + y) = 0 = N_+(x, z)(bx + y)$ elde edilir.

Böylece $a = b = -N_+(x, z)(y)/\|x, z\|$ sağlanır. Bu yüzden teorem 5.4.4 den $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ kesin konvektir. Bu da ispatı tamamlar.

Bu bilgilerle aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.4.1: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ düzgün ise aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $\|x, z\| = \|y, z\|$ olmak üzere $N_+(x, z)(y) = 0$ olması $N_+(y, z)(x) = 0$ olduğunu ifade eder.
2. Her t reel sayısı için $\|x, z\| = \|y, z\|$ olmak üzere $\|x + ty, z\| \geq \|x, z\|$ olması $\|y + tx, z\| \geq \|y, z\|$ olmasını gerektirir.

Sonuç 5.4.2: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

1. $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ düzgün uzaydır.

2. Her $x(\neq 0) \in X$, $y \in X$ ve $z \notin V(x, y)$ için $\langle x, ax + y | z \rangle = 0$ olacak biçimde tek bir a reel sayısı vardır.

Şimdi, $\|.,.\|$ 2-normun Gateaux diferansiyellenebilir oluşu ve diklik terimleri cinsinden 2-iç çarpım uzaylarının karakterizasyonunu verelim.

Teorem 5.4.6: $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu lineer düzgün uzayı için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- 1) $(X, \|.,.\|)$ 2-iç çarpım uzayıdır.
- 2) $\|x, z\| = \|y, z\|$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|nx + y, z\| - \|x + ny, z\|) = 0$ dır.
- 3) Her $x, y, z \in X$ için $\langle x, y | z \rangle = \langle y, x | z \rangle$ dir. Yani $\langle x, y | z \rangle$, x ve y içinde simetriktir.
- 4) Her $x, y, z \in X$ için $\langle x, y | z \rangle$ x içinde lineerdir.

İspat: $1 \rightarrow 2$): $(X, \|.,.\|)$ 2-iç çarpım uzayı ve $\|x, z\| = \|y, z\|$ olduğunu varsayalım.

[40] deki teorem 6 dan yararlanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|nx + y, z\| - \|x + ny, z\|) = 0$ yazabiliriz.

$2 \rightarrow 3$): $\|x, z\| = \|y, z\|$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} \langle x, y | z \rangle &= \|x, z\| N_+(x, z)(y) \\ &= \|x, z\| \lim_{n \rightarrow \infty} (\|nx + y, z\| - \|nx, z\|) \\ &= \|y, z\| \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x + ny, z\| - \|ny, z\|) \\ &= \langle y, x | z \rangle \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \|x, z\| \neq \|y, z\| \text{ olmak üzere } \| \|x, z\| y, z \| &= \| \|y, z\| x, z \| \text{ ve } \langle x, y | z \rangle = \|x, z\| N_+(x, z)(y) \\ &= N_+(\|y, z\| x, z)(\|x, z\| y) \\ &= N_+(\|x, z\| y, z)(\|y, z\| x) \\ &= \langle y, x | z \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

3 $\rightarrow$ 4): $\langle x, y | z \rangle$ y içinde lineer ve x ve y içinde simetrik olduğundan açıkça görülür.

4 $\rightarrow$ 1): $x, y, z \in X$ için $x + y \neq 0$ ve $z \notin V(x + y)$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle x + y, y | z \rangle &= \|x + y, z\| N_+(x + y, z)(y) \\ &= \|x + y, z\|^2 + \|x, z\| N_+(x, z)(-x) + \|y, z\| N_+(y, z)(-x) \\ &= \|x + y, z\|^2 - \|x, z\|^2 + \|N_+(y, z)(-x) \end{aligned} \quad (A)$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \langle x + y, y | z \rangle &= \langle x, y | z \rangle + \langle y, y | z \rangle \\ &= \|x, z\| N_+(x, z)(y) + \|y, z\|^2 \end{aligned} \quad (B)$$

dir. Böylece (A) ve (B) den

$$\|x + y, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 + \|x, z\| N_+(x, z)(y) - \|y, z\| N_+(y, z)(-x) \quad (C)$$

elde edilir.

Daha sonra (C) içinde y yerine $-y$ alınarak ve $x - y \neq 0$ ve $z \notin V(x - y)$ kabul edilirse

$$\|x - y, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 + \|x, z\| N_+(x, z)(-y) + \|y, z\| N_+(y, z)(-x). \quad (D)$$

yazılır.

Böylece (C) ve (D) toplanırsa

$$\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2(\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2) + \|x, z\|(N_+(x, z)(y) + N_+(x, z)(-y))$$

elde edilir.

$(X, \|\cdot, \cdot\|)$ düzgün ve bu nedenle $N_+(x, z)(y) + N_+(x, z)(-y) = 0$ olduğundan

$\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2(\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2)$ elde edilir. Diğer durumlarda olduğu gibi

paralelkenar kuralının da doğruluğu kolayca kanıtlanır. Bu yüzden $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-iç çarpım uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 5.4.3: $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-normlu lineer düzgün uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- 1) $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ 2-i çarpım uzayıdır.
- 2) Her $x, y, z \in X$ olmak üzere $z \neq 0$ için

$$\|x, z\| = \|y, z\| = 1 \text{ ise } N_+(x, z)(y) = N_+(y, z)(x) \text{ dir.}$$

2-i çarpım uzayında her $z \notin V(x, y)$ için B-dikliği ve G-dikliği $\langle x, y | z \rangle = 0$ şartına indirgenir. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4.7: $\langle x, y | z \rangle = \langle y, x | z \rangle$ eşitliği ile $\langle x, y | z \rangle$, genelleştirilmiş 2-iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda G-dikliği ve B-dikliği eşdeğerdir.

VI. BÖLÜM

SONUÇLAR

Gähler'in 1960 lı yıllarda yaptığı 2-norm ve 2-normlu uzay tanımı matematik biliminin gelişimine büyük katkı sağlamıştır. Bu tanım kullanılarak birçok konu ve kavram çeşitli araştırmacılar tarafından 2-normlu uzaylara genişletilmiştir.

Bu tezde, bu kavramlardan biri olan diklik ve tipleri araştırılıp 2-normlu ve 2-iç çarpım uzaylarındaki yansımaları ve elde edilen sonuçları incelendi. Ayrıca, bu uzaylarda Gateaux türevleri cinsinden diklikler ve özelliklerine de yer verildi.

Daha sonra bu konuda Golet'in vermiş olduğu φ – fonksiyonu ve φ – 2-normlu uzay tanımı kullanılarak bu tanımlar işlenen diklik kavramlarından biri üzerine uygulandı. Buradan elde edilen sonuçlar IV. Bölümde verildi.

KAYNAKLAR

- [1] Birkhoff, G., (1935), Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.* vol. **1** pp. 169-172.
- [2] James, R. C., (1945), Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.* **12** 291-302.
- [3] James, R. C., (1947), Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **61**, 265-292.
- [4] James, R. C., (1947), Inner products in normed linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 559-566.
- [5] Silverman, E., (1951), Definitions of area for surfaces in metric spaces, *Rivista Mat. Univ. Parma* **2**, 47-76.
- [6] Silverman E., (1951), An intrinsic property of Lebesgue area, *Rivista Mat. Univ. Parma* **2**, 195-201.
- [7] Silverman, (1952), Set functions associated with Lebesgue area, *Pacific J. Math.* 243-250.
- [8] Sullivan, F., (1979), A generalization of uniformly rotund Banach spaces, *Can. J. Math.* **31**, 628-636.
- [9] Gähler, S., (1969), Über 2-Banach Räume, *Math. Nachr.* **42**, 335-347.
- [10] Diminnie C. R., (1983), A new Orthogonality relation for normed linear Spaces, *Math. Nachr.* **114**, 197-203.

- [11] Mazur, S., (1933), Über schwache konvergenz in den Raumen (L^p) , *Studia Mathematica* vol. **4**, pp. 128-133.
- [12] Guijardo P., Tomas M. S., (1997), Perpendicular bisectors and orthogonality, *Arch. Math.* **69** 491-496.
- [13] Amir, D., (1986), *Characterizations of inner product spaces*, Basel-Boston-Berlin.
- [14] Benitez C., Rio del M., (1984), Characterization of inner product spaces through rectangle and square inequalities, *Rev. Roumaine Math. Oures Appl.* **29**, 543-546.
- [15] Vaezpour S., Hasani M., R., Mazaheri H., (2007), On the ε -best coapproximation, *International Mathematical Forum*, **2**, no. 53, 2599-2606.
- [16] Mazaheri F., Ghaini F. M. M., (2006), Quasi-orthogonality of the best approximant sets, *Nonlinear Analysis*, **65** no. 3, 534-537.
- [17] Mazaheri H., Modaress S. M., (2005), Some results concerning proximality and coproximality, *Nonlinear Analysis*, **62** no. 6, 1123-1126.
- [18] Mazaheri H., Vaezpour S. M., (2005), Orthogonality and ε – orthogonality in Banach spaces, Issue **1. 2**, 1-5.
- [19] Singer, I., (1970), *Best approximation in normal linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer, New York.
- [20] Alber, Ya. I., (1998), Generalized projections, decompositions, and the pythagoreantype theorem in Banach spaces, *Appl. Math. Lett.* Vol.**11**, 6, 115-121.
- [21] Shoja A., Mazaheri H., (2007), General orthogonality in Banach spaces, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. **1**, no. 12, 553-556.

- [22] Gähler, S., (1964), Lineare 2-normierte raume, *Math. Nachr.* , **28**, 1-43.
- [23] Lewandowska, Z., (1999), Linear operators on generalized 2-normed spaces, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, (N.S.) **42** (90), no. 4, 353-368.
- [24] Lewandowska Z., (2001), Generalized 2-normed spaces, *Stuspskie Prace Matematyczno Fizyczne*, **1**, 33-40.
- [25] Lewandowska, Z., (2003), On 2-normed sets, *Glas. Math. Ser. III*, no. **1**, 99-110.
- [26] Rudin, W., (1973), *Functional analysis*, McGraw-Hill, Newyork.
- [27] Açıkgöz, M., (2007) 2-Normlu ve 2-Banach uzaylarında kesin konvekslik ve kesin 2-konvekslik, *Fırat Üniv. Fen ve Müh. Bil. Dergisi* **19** (3), 293-299.
- [28] White, A., (1969), 2-Banach spaces, *Math. Nachr.*, **42**, 43-60.
- [29] Cho Y. J., Diminnie C.R., Gähler, S., Freese R. W., Andalafta E. Z., (1992), Isosceles orthogonal triple in linear 2-normed spaces, *Math. Nachr.*, **157** 225-234.
- [30] Franic, I., (1997), On the best coapproximation in linear 2-normed spaces, *Math. Japon.*, **46**, 147-150.
- [31] Freese R. W., Cho Y. J., (2001), *Geometry of linear 2-normed spaces*, Nova Science Publisher, Inc., Hauppauge, New-York.
- [32] Gunawan H., Mashadi, (2001), On finite-dimensional 2-normed spaces, *Soochow J. Math.*, **27**, 321-329.
- [33] Khan A., Siddiqui A., (1982), B-orthogonality in 2-normed space, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **74**, 216-222.

- [34] Lewandowska, Z., (2003), Banach-Steinhaus theorems for bounded linear operators with values in a generalized 2-normed space, *Glas. Mat. Ser. III*, **38** (58), 329-340.
- [35] Mazaheri H, Nezhad S.G., (2007), Some results on b-orthogonality in 2-normed linear spaces, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. **1**, no. 14, 681-687.
- [36] Kamali H. R., Mazaheri H., (2008), b-general orthogonality in 2-normed spaces, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. **2**, no. 16, 775-780.
- [37] Gunawan H., Mashadi, Gemawati S., Nursupiamin, Sihwaningrum, I., (2006), Orthogonality in 2-normed spaces revisited, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. ser. Mat.* **17**, 76-83.
- [38] Gunawan H., Kikianty E., Mashadi, S. Gemawati, Shwaningrum, I., (2006), Orthogonality in n -normed spaces, *Submitted to J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)*.
- [39] Godini, G., MR0743643 (85g:46028). MathScinet: Mathematical Reviews on the Web.
- [40] Diminnie C., Gahler S., White A., (1973), 2-inner product spaces, *Dem. Math.* **6** 525-536.
- [41] Cho Y. J., Kim S. S., (1983), Gateaux derivatives and 2-inner product spaces, *Glas. Mat. Ser. III* **27** (47), 197-203.
- [42] Misiak, A., (1989), n -inner product spaces, *Math. Nachr.* **140**, 299-319.
- [43] Golet, I., (2009), On generalized fuzzy normed spaces, *International Mathematical Forum*, **4**, no.25, 1237-1242.
- [44] Gunawan, H., (2002), On n -inner products, n -norms and the Cauchy-Schwarz inequality, *Sci. Math. Jpn.* **55**, 53-60.

[45] Kim S. S, Y. J. Cho., (1992), Gateaux derivatives and 2-Inner product spaces, *Glasnik Mat.* **27** (47), 271-282.

[46] Diminnie C., Gahler S., White A., (1974), Strictly convex linear 2-normed spaces, *Math. Nachr.* **59**, 319-324.