

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ PARAMETRELİ VLASOV ZEMİNİNE OTURAN HOMOJEN
İZOTROP PLAKLARIN, KARIŞIK SONLU ELEMANLAR
METODU İLE ANALİZİ**

726745

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Ahmet Anıl DİNDAR

(501991250)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 2 Ocak 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Ocak 2002

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ (İ.T.Ü.)

Doç. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU (Y.T.Ü.)

ŞUBAT 2002

126745

(Handwritten signatures)

**İC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
BİRDÜZMANTASYON MERKEZİ**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG'a ve yönlendirmelerinden yararlandığım Yrd. Doç. Dr. Mecit ÇELİK'e şükranlarımı sunarım.

Tüm çalışmalarım da daima yanımda olan babam Prof. Dr. Bilal DİNDAR, annem Zakire DİNDAR ve canım kardeşim Dinçer DİNDAR'a teşekkür ederim.

Aralık 2001

Ahmet Anıl DİNDAR



İÇİNDEKİLER

	No
KISALTMALAR	iv
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Plaklarda Analitik ve Sayısal Çalışmalar	1
2. KIRCHHOFF PLAK TEORİSİ	8
2.1. Giriş	8
2.2. Bünye Bağlılıkları	9
2.3. Operatör Yapıda Alan Denklemleri	12
3. İKİ PARAMETRELİ ZEMİN MODELİ	15
4. PLAK İLE ZEMİN MODELİ İÇİN FONKSİYONEL VE İZOPARAMETRİK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	24
4.1. Varyasyonel İşlemler	24
4.2. Kirchhoff Plağı İçin Fonksiyonel	25
4.3. Vlasov Zemin Modellemesi İçin Fonksiyonel	28
4.4. Dörtgen Sonlu Eleman	31
4.5. Ardışık Yaklaşım Yöntemiyle Sonlu Eleman Çözümü	33
5. SAYISAL ÖRNEKLER	
5.1. Tekil Yük Ve Düzgün Yayılı Yüklü Ve Sabit Elastisite Modüllü Zemin Ortamı İçin İki Parametrelili Hesap Yönteminin Doğrulanması	35
5.2. Tekil Yük Ve Düzgün Yayılı Yüklü Ve Doğrusal Elastisite Modüllü Zemin Ortamı İçin İki Parametrelili Hesap Yönteminin Doğrulanması	42
5.3. Zemin Elastisite Modülünün Doğrusal Ve Kuadratik Değişiyor Olması Halinde Zemin Parametrelerinin Hesabı	44
5.4. Yakınsaklık Çalışması	48
6. SONUÇLAR	53
KAYNAKLAR	56
EKLER	61
ÖZGEÇMİŞ	65

KISALTMALAR

SEM : Sonlu Elemanlar Metodu

SFM : Sonlu Farklar Metodu

KSEM: Karışık Sonlu Elemanlar Metodu



TABLO LİSTESİ

Tablo No	Açıklama	No
Tablo 5.1	: Tekil Yükleme Durumunda Zemin Parametreleri...	37
Tablo 5.2	: Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Parametreleri..	37
Tablo 5.3	: Tekil Yükleme Durumunda Zemin Parametrelerinin Çeşitli Yöntemlerin Sonuçları İle Karşılaştırılması ...	41
Tablo 5.4	: Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Parametrelerinin Çeşitli Yöntemlerin Sonuçları İle Karşılaştırılması.....	42
Tablo 5.5	: Zemin Elastisite Modülünün Zemin Derinliğince Doğrusal Değişken olması halinde elde edilen Zemin Parametreleri (Tekil Yükleme Durumu).....	43
Tablo 5.6	: Zemin Elastisite Modülünün Zemin Derinliğince Doğrusal Değişken olması halinde elde edilen Zemin Parametreleri (Yayılı Yükleme Durumu)....	43

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No	Açıklama	No
Şekil 1.1	: Winkler Tipi Zemin Modeli.....	4
Şekil 1.2	: Zemin ve Yapı Arasındaki Gerçek Etkileşim.....	4
Şekil 1.3	: Filonenko-Borodich Zemin Modeli.....	4
Şekil 1.4	: Zeminde Kayma Elemanlarının Gösterimi.....	5
Şekil 1.5	: Plak Ve Zemin Bölgesinden Oluşan Sistem.....	5
Şekil 2.1	: Plakta Kayma Şekil Değişimesinin İhmal Edilmesi Durumunda Eğilmeden Önceki ve Sonraki Hal.....	9
Şekil 2.2	: Plakta u , σ_m , σ_f , f Vektörlerinin Bileşenlerine Ait Pozitif Doğrultular.....	11
Şekil 3.1	: Zemin Bölgesi.....	15
Şekil 3.2	: $\phi(z)$ Fonksiyonun Değişimi.....	16
Şekil 3.3	: Zemin Kolon Elemanı.....	18
Şekil 3.4	: Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonel Değişimi..	21
Şekil 4.1	: İzoparametrik Dörtgen Eleman.....	32
Şekil 5.1	: Tekil Yükleme Durumunda $\frac{1}{4}$ lük Plak Ve Zemin Bölgeleri.....	36
Şekil 5.2	: Yayılı Yükleme Durumunda $\frac{1}{4}$ lük Plak Ve Zemin Bölgeleri.....	36
Şekil 5.3	: Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi.....	38
Şekil 5.4	: Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Kayma Parametresi (C_2) nin Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi.....	38
Şekil 5.5	: Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yüzeş Parametresi (γ) nin Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi.....	39
Şekil 5.6	: Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi.....	39
Şekil 5.7	: Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Kayma Parametresi (C_2) nin Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi.....	40
Şekil 5.8	: Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yüzeş Parametresi (γ) nin Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi.....	40
Şekil 5.9	: Düzgün Yayılı Yükleme ve Zemin Elastisite Modülü Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Değişimi.....	45

Şekil 5.10	:	Düzgün Yayılı Yükleme ve Zemin Elastisite Modülü Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Kayma Parametresi (C_2) in Değişimi.....	45
Şekil 5.11	:	Düzgün Yayılı Yükleme ve Zemin Elastisite Modülü Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yüzey Parametrelili (γ) nin Değişimi.....	46
Şekil 5.12	:	Tekil Yükleme ve Zemin Elastisite Modülü Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Değişimi.....	46
Şekil 5.13	:	Tekil Yükleme ve Zemin Elastisite Modülü Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Kayma Parametresi (C_2) nin Farklı Değişimi.....	47
Şekil 5.14	:	Tekil Yükleme ve Zemin Elastisite Modülü Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yüzey Parametrelili (γ)nin Değişimi.....	47
Şekil 5.15	:	Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonun Değişimi.	48
Şekil 5.16	:	Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Yakınsaması	49
Şekil 5.17	:	Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Kayma Parametresi (C_2) nin Yakınsaması.....	49
Şekil 5.18	:	Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yüzey Parametrelili (γ) nin Yakınsaması.....	50
Şekil 5.19	:	Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Yakınsaması.....	50
Şekil 5.20	:	Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Kayma Parametresi (C_2) nin Yakınsaması.....	51
Şekil 5.21	:	Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri Zemin Yüzey Parametrelili (γ) nin Yakınsaması.....	51

SEMBOL LİSTESİ

- i, j, \dots : Latin indisleri 1, 2, 3 değerlerini alır
 α, β, \dots : Grek indisleri 1, 2, 3 değerlerini alır
 ε_{ij} : Birim şekil değiştirme bileşenleri
 u_i : Yer değiştirmeler
 $\gamma_{\alpha\beta}$: Birim kayma açısı
 θ^i : Koordinatlar
 u, v, w : Yer değiştirmeler
 ε_* : Birim şekil değiştirme vektörünün kinematik karşılığı olan vektör
 $\varepsilon_{\alpha\beta}$: Kirchhoff birim şekil değiştirmeleri
 \mathbf{u} : Yer değiştirme vektörü
 $\mathbf{D}_m^k, \mathbf{D}_f^k$: Kinematik operatörler
 $E_{\alpha\beta}, G_{12}$: Elastisite Modülü ve kayma modülü
 ν : Poisson oranı
 \bar{E} : Elastisite matrisi
 E : Dönüştürülmüş elastisite matrisi
 \mathbf{C} : Elastisite matrisinin tersi, Kompliyans matrisi
 C_1 : Zemin yataklanma katsayısı
 C_2 : Zemin kayma katsayısı
 f : Yük vektörü
 σ_* : Kuvvet ve moment vektörü
 σ_f : Moment vektörü
 σ_m : Membran kuvvet vektörü
 P, N, Q : Normal kuvvetler ve düzlem içi kayma kuvveti
 K, M, T : Eğilme momentleri ve burulma momenti
 h : Plak kalınlığı
 \mathbf{D}^e : Denge operatörü
 $\mathbf{D}_m^e, \mathbf{D}_f^e$: Denge alt operatörleri
 \mathbf{D}_x : Kısmi türev operatörü $\partial(\dots)/\partial x$
 \mathbf{Q} : Operatör
 $I(\mathbf{v})$: Fonksiyonel
 $\delta(\dots)$: Varyasyon
 ξ, η : Kare elemanda yerel koordinat takımı
 ξ_i, η_i : Kare elemanda düğüm noktaları ± 1 in koordinat değerleri ($i=1, \dots, 4$)
 ϕ_i : Şekil fonksiyonları ($i=1, \dots, 4$)
 \mathbf{J} : Jakobyen

- $|\mathbf{J}|$: Jakobyen determinanti
 \mathbf{J}^{-1} : Jakobyenin tersi
 ϕ : Çökme mod fonksiyonu
 γ : Çökme parametresi
 μ, λ : Lamé sabitleri



İKİ PARAMETRELİ VLASOV ZEMİNİNE OTURAN HOMOJEN İZOTROP PLAKLARIN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada Kirchhoff plak elemanı ile iki parametrelili sonlu zemin eleman formülasyonu kullanılarak, Vlasov zemin modeli için bir algoritma oluşturulmuştur. Plak ve zemin bölgeleri için dört düğüm noktalı elemanlar kullanılmıştır. Dörtgen plak elemanlarda her bir düğüm noktasında bir çökme, iki eğilme momenti ve bir burulma momenti olmak üzere 16 serbestlik derecesi, zemin elemanlarda ise her düğüm noktasında sadece çökme olmak üzere 4 serbestlik derecesi tanımlanmıştır.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde elastik zemin üzerine oturan homojen izotrop plaklar hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Çeşitli zemin modelleri tanıtılmış ve zemin ile plak arasındaki etkileşimi en gerçekçi olarak ifade eden Vlasov zemini hakkında ön bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde analizi yapılacak olan Kirchhoff plakı hakkında açıklamalar yapılmıştır. İzotrop ve homojen malzeme özelliklerine göre Kirchhoff plak elemanları için bünye bağıntıları kullanılarak alan denklemleri açık halde yazılmıştır.

Üçüncü bölümde elastik zemin için tanımlama yapılmıştır. Zemin ortamı bünye bağıntılarında, Vlasov zemini özellikleri kullanılarak zemin karakteristik parametreleri, zemin yataklanma ve zemin kayma parametreleri ifadeleri oluşturulması açıklanmıştır. Elde edilen ifadelerde, zemin parametrelerinin zemin derinliği, zemin elastisite modülü ve yükleme durumuna bağımlı olduğu görülür. Zemin elastisite modülü'nün derinlik boyunca bir fonksiyon olarak tanımlanması halleri için zemin parametreleri ifadeleri yeniden oluşturulmuştur. zemin elastisite modülünün sabit ve doğrusaldeğişmesi hallerindeki zemin parametreleri ifadeleri literatürde bulunmaktadır. Bu çalışmada elastisite modülünün kuadratik değişmesi hali incelenmiş ve zemin parametreleri geliştirilmiştir.

Dördüncü bölümde plak ve zemin sonlu elemanlar için sonlu eleman formülasyonları varyasyonel işlemler yapılarak hesaplanmıştır. Homojen izotrop plak sonlu elemanların, bilineer şekil fonksiyonları kullanılarak oluşturulmuştur.

Beşinci bölümde ise, oluşturulan algoritmaya dayalı bilgisayar programı kullanılarak, literatürde var olan çeşitli mühendislik problemleri çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca kullanılan eleman ağı için bir de yakınsaklık çalışması yapılmıştır.

Çalışma sonucunda varılan sonuçlar son bölümde ele alınmıştır.

ANALYSIS OF HOMOGEN ISOTROPIC PLATES RESTING ON TWO PARAMETER ELASTIC VLASOV FOUNDATION BY USING MIXED FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

In this study, an algorithm was developed for Vlasov soil model by using Kirchhoff plate and two-parameter soil finite element formulation. Four nodes finite elements were used for plate and soil domains. Quadrangle plate element has 16 degree of freedom, which is one vertical displacement, two bending moments and one torsion moment at each node. But, quadrangle soil element has 4 degree of freedom, which is single vertical deflection at each node.

In the first of this six chapters study, it is briefly explained the studies about the plates resting on elastic foundations. Some soil models are introduced and Vlasov soil model that is describing the interaction between soil and plate more realistically is told.

In the second part, the Kirchhoff plate that is to be analyzed is explained. Domain equations for the Kirchhoff plate are written in open form by using structure equations.

The elastic foundation is defined in the third chapter. The soil bedding and shear parameters are formed for the Vlasov soil model based on the structure equations. It is shown that the soil parameters are dependent to the soil stratum depth, soil modulus of elasticity, Poisson ratio of the soil and the loading on plate. The soil parameters are reformed in case of the soil modulus of elasticity is defined as a function varying through the depth of the soil. Constant and linear varying soil modulus of elasticity functions are available in the literature. Here in this study, Quadratic varying soil modulus of elasticity is examined and the soil parameters are developed by this examination.

The formulations for the soil and plate finite elements are obtained by using variation operators in the fourth chapter. The homogen isotropic plate elements are formed by using bilinear shape functions.

In the fifth chapter, the computer program based on the algorithm developed in the study is used to solve some engineering problems available in the literature and the results are compared. As well, a convergence study is done for the element mesh used in the problems.

The conclusions of the study are provided in the last chapter.

1. GİRİŞ

1.1 PLAKLARDA ANALİTİK VE SAYISAL ÇALIŞMALAR

Yüzeysel taşıyıcı sistemler, dış etkiler altında, şekil değiştirerek denge konumuna gelirler. Bu sistemi çözebilmek için, onun konumunu belirleyen yer değiştirme bileşenleri serbest değişkenlere bağlı sürekli fonksiyonlarla ifade edilirler. Yer değiştirme alanını ifade eden bu fonksiyonların bulunması, genel olarak, sürekli ortamda diferansiyel denge denklemlerinin integre edilmesi ve integral sabitlerinin sınır şartlarını sağlayacak biçimde bulunmasını gerektirir.

Analitik yöntemlerle plaklar belli geometrik ve sınır koşulları altında incelenmiştir (Timoshenko-Krieger 1982). karışık geometriler ile sınır koşulları söz konusu olduğunda bu yöntemler yerini sayısal yöntemlere bırakmaktadır. Bu yöntemler içinde en yaygın kullanıma Sonlu Eleman Yöntemi ulaşmıştır. Yalnız hemen şunun altını çizmekte yarar vardır ki, sayısal çözümlerdeki genişleme de tamamen bilgisayar teknolojilerindeki gelişme ile doğru orantılıdır. 1960lardan başlayan süreç kendisini 21. yüzyılın başına giderek artan bir heyecanla taşımıştır. Sonlu elemanlar aslında bir üründür, başlangıcı değişim prensiplerine dayanır (Washizu, 1968). Katı cisimler mekaniğinde değişim prensiplerinin elemanlar arası süreklilik koşullarının gevşetilmesi ile sonlu elemanlar formüle edilebilir. Böylece yüzeysel taşıyıcı sürekli sistemleri, serbestlik sayısı sonlu sayıda olan ayrık alt bölgelere dönüştürüldükten sonra uygun bir biçimde bir denklem takımına varılmakta ve buradan da bilinmeyen serbestlikler çözülmektedir. İşte bu alt bölgelere de sonlu eleman denilmektedir.

Sonlu eleman yöntemleri, uygulanan değişik varyasyon ilkelerine bağlı olarak başlıca 1) Yer değiştirme türü elemanlar, 2) Karışık Elemanlar, diye gruplandırılabilir. Bunlardan birincisi 1960lardan itibaren en yaygın olarak kullanılanıdır. İkincisi ise 1970li yıllardan başlayarak hızlı bir gelişim göstermiştir. Karışık sonlu eleman formülasyonunda ise kullanılan varyasyon ilkelerine bağlı olmak üzere en yaygın üç yöntemden bahsedebiliriz.

Bunlar;

- 1) Hellinger-Reissner,
- 2) Hu-Washizu,
- 3) Gâteaux diferansiyelidir (Aköz ve diğ. 1991).

Sonlu eleman modellemesinde karışık sonlu elemanların, yer değiştirmelerin yanı sıra kuvvet ve moment türü büyüklükleri de eleman bilinmeyen olarak kullanabilmesi, yer değiştirme türü elemanların ciddi sorunlarından biri olan kilitlenmeye (locking effect) karşı korunumlu olması son yıllardaki tercih sebeplerinin başlıcasını oluşturur. Ayrıca karışık sonlu elemanlarda eleman en/boy oranı (aspect ratio) da bir sorun oluşturmamaktadır (Omurtag ve Aköz, 1992).

Sonlu eleman çözümlerde kullanılan teoriler, seçilen alan denklemini kabullerine bağlı olarak değişiklikler gösterir. Bunlar;

- 1). İnce yüzeysel taşıyıcılar için (Kirchhoff-Love hipotezi) Altman ve Neto (1998), Altman ve Venanci-Filho (1974). Omurtag ve diğ (1997).
- 2). Nispeten kalın yüzeysel taşıyıcılar için (Mindlin-Reissner hipotezi) Reissner (1945). Mindlin (1951). Singh ve Sadasiva (1988). Dawe ve Roufaeil (1982). Omurtag ve Aköz (1993).
- 3). Kalın yüzeysel taşıyıcılar için yüksek mertebe kayma teorisi Başar ve Omurtag (2000), diye sınıflandırılabilir.

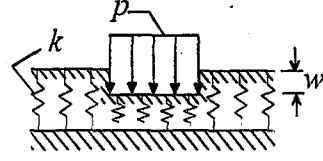
Sayısal çözüm metotları içerisinde, genelliği ve bilgisayar programcılığına olan yatkınlığı ile ön plana çıkan sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmış pek çok sayıdaki çalışma içinde örneğin Altman ve Neto (1989), Altman ve Venanci-Filho (1974), Lou Ji-Wei (1982), Martins ve Owen (1977), Singh ve Sadasiva (1988). Tabarrok ve diğ. (1974), Willer (1981) den bahsedilebilir. Bunun yanı sıra sonlu farklar, sonlu şerit metodu ile Azizian ve Dawe (1985), Benson ve Hinton (1976), Dawe ve Roufaeil (1982), Rayleigh-Ritz metodu Dawe ve Roufaeil (1982), Mizusawa(1980), seri çözümleri ile Tong Liyong ve diğ. (1992) ve son olarak taşıma matrisi ile de yapılan çalışmalar vardır. Gâteaux diferansiyeline dayalı karışık sonlu eleman formülasyonu bakımından silindirik kabuklarda Omurtag ve Aköz (1995), plaklarda Özçelikörs ve diğ.(1997) ve Omurtag-Kadıoğlu (1998) sayılabilir.

Yer değiştirme t¼r¼ elemanları aralarında ayrıca “sade” Martines ve Owen (1977), Eller (1990) ve “rafine” Tabarrok ve diğ. (1974), Withum(1966), Argyris ve diğ. (1968), Cowper ve diğ. (1969), Bultin ve Frod (1968) diye ayırımlara gidilmesinin altında yatan bir başka gerçek de daha az sayıda eleman ile daha hassas sonuçlara ulaşma isteğidir.

Gerçi “Bilinmeyen sayısında da bir tasarrufa gidilebiliyor mu?” cevaplanması gereken ayrı bir sorudur. M¼hendislik uygulamalarında hesabı istenen kuvvet ve moment b¼y¼kl¼klerin, deplasman t¼r¼ elemanlarda bir geri yerleştirme sonucu yer değiştirmelerden t¼retiliyor olması, sonuçların hassasiyeti ¼zerinde etkili olmaktadır. Halbuki, karışık sonlu eleman form¼lasyonunda yer değiştirmelerin yanı sıra kuvvetler ve momentler de elemanın bilinmeyenleri olmakta ve doğrudan hesaplanabilmektedir. B¼ylece karışık sonlu eleman modellemesi ile kuvvet ve moment t¼r¼ b¼y¼kl¼klerin daha hassas bulunması m¼mk¼n olabilmektedir.

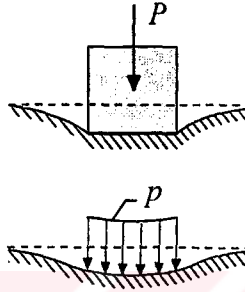
İnce y¼zeysel taşıyıcılar için geçerli olan Kirchhoff-Love hipotezi ile karışık sonlu eleman modellemesinde ¼nc¼ alışmalar Herrmann (1965a,b), Prager (1968) izotrop plakların statik analizini kapsamaktadır. Mindlin-Reissner teorisi ile nispeten kalın izotrop/ortotrop plakların karışık sonlu eleman modellemesi için Luo Ji-Wei (1982), Reddy (1993) den bahsedilebilir. Yalnız bu çalışmalar kapsamında geliştirilmiş elemanların hepsinde Hellinger-Reissner prensibi kullanılmıştır. Bu çalışmada fonksiyonelin geliştirilmesi aşamasında Gâteaux diferansiyelinden yararlanılmıştır. Kullanılan y¼ntemin, klasik varyasyon ilkeleri Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu dan farklılıkları ya da ¼st¼nl¼kleri Omurtag ve Aköz (1994) de bulunabilir.

Zemin yapı etkileşimi, m¼hendislik problemlerinde her zaman g¼ncellięini koruyan ilginç problemlerin başında yer almaktadır. Literat¼rde analitik y¼ntemlerin yanı sıra çeşitli sayısal öz¼m arayışlarına da rastlanmaktadır. Burada amaç, sayısal öz¼m tekniklerine uyarlanabilen, bilgisayar maliyeti d¼ř¼k ve olabildiğince gerçekçi sonuçlar veren y¼ntemlerin ortaya çıkarılmasıdır. En basit mekanik zemin modeli Winkler (1867) tarafından ¼nerilmiřtir. Burada p zemin basıncı ile w ¼kmesi arasındaki doğrusal ilişki $p(x, y) = kw(x, y)$ biçiminde tanımlanmış olup yataklanma katsayısı denilen k ile taşıyıcı elemanın altındaki elastik zemin bir çeşit yay gibi uyarlanmaktadır (Bakınız Şekil 1.1). Burada kullanılan tek zemin parametresi k dır. Şekil 1.1 de g¼r¼ld¼ę¼ gibi d¼zg¼n yayılı y¼kleme altında Winkler zemin modeli s¼rekli ortamı gerektiği gibi tanımlamakta yetersiz kalmaktadır.



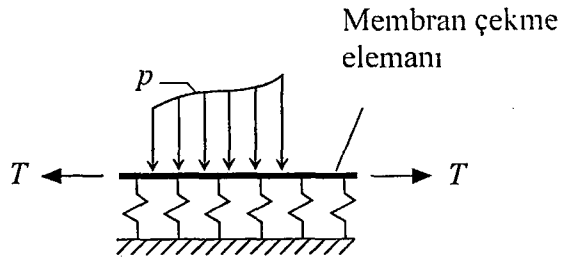
Şekil 1.1 Winkler Tipi Zemin Modeli

Gerçekte yapı ile zemin arasındaki etkileşim Şekil 1.2 de çizildiği gibi olmalıdır.



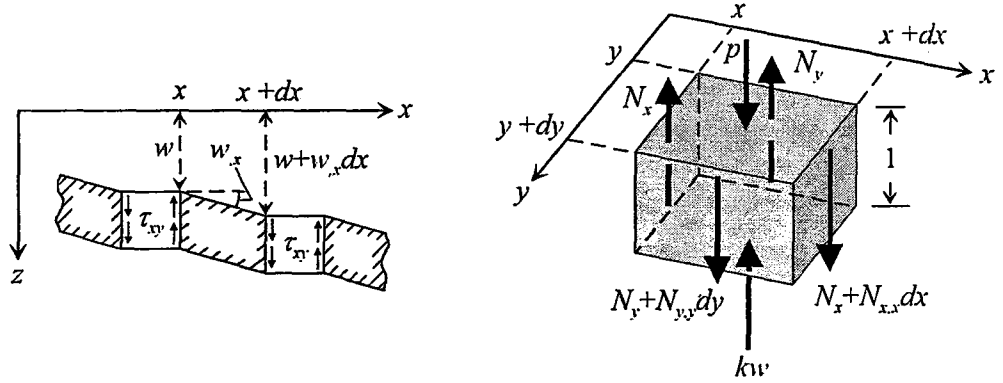
Şekil 1.2 Zemin Ve Yapı Arasındaki Gerçek Etkileşim

Bu sayede zeminin yarı sonsuz elastik ortam olduğunu düşünerek yapılan matematik formülasyonlar beraberinde bazen işlem kalabalıklığını da getirebilmektedir. Bu sorunu aşmak için iki parametrelili zemin modelleri geliştirilmiş, örneğin Filonenko-Borodich (1940) yay elemanlarının tepe noktalarında, aralarında belli oranda etkileşimi sağlamak üzere, sabit çekme kuvveti T yi taşıyan bir elastik membran önermiştir (Bakınız Şekil 1.3).



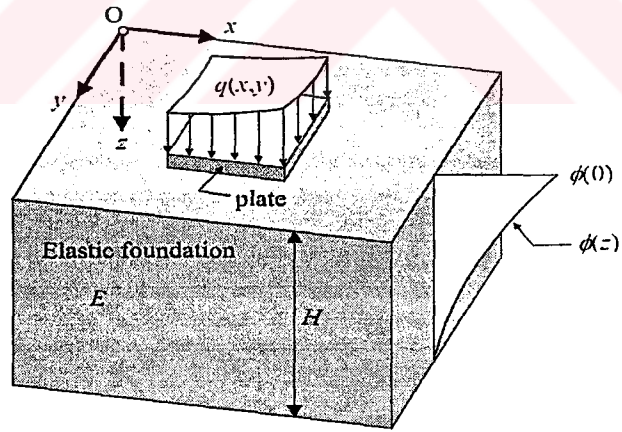
Şekil 1.3 Filonenko-Borodich Zemin Modeli

Bu düşünce ile düşey doğrultuda denge koşulu, çökme ve basınç ilişkisi $p = kw - TV^2w$ biçiminde yazılır. Bir başka iki parametrelili elastik zemin modeli de Pasternak (1954) tarafından önerilmiştir. O da yay elemanları arasında kayma etkileşiminin olduğu kabulüne dayanmaktadır (Bakınız Şekil 1.4).



Şekil 1.4 Zeminde Kayma Elemanlarının Gösterimi

Eğer bu kayma tabakası ihmal edilirse, özel bir durum olarak Winkler zemin modeli elde edilmektedir. Bir başka iki parametrelili zemin modeli de Vlasov (1949) ve Vlasov-Leont'ev (1966) tarafından önerilmiştir. Vlasov modelinde tanımlanan üçüncü bir parametre γ ile zeminde sıkıştırılabilen tabaka kalınlığı boyunca gerilme dağılımının belli kısıtlara göre kontrolü yapılmaktadır (Bakınız Şekil 1.5).



Şekil 1.5 Plak ve Zemin Bölgesinden Oluşan Sistem

Yukarıda anlatılanların ışığında görülmektedir ki; yüzeysel taşıyıcıların çözümünde iki parametrelili zemine ait elastik yataklanma ve kayma parametresi bir veri olarak kabul edilebildiği gibi (Pasternak 1954), daha gerçekçi çözümlere ulaşabilmek için bu değerlerin zemin karakteristikleri cinsinden aranması yoluna da gidilebilir (Vlasov 1949). Bu amaçla yapılan çalışmaların bir kısmında şekil fonksiyonları 3

derece polinom kabul edilmiş Karamanlidis ve Prakash (1988). bir kısmında ise kiriş diferansiyel denkleminin tam çözümünden şekil fonksiyonları elde edilmiştir. Razaqpur (1986), Razaqpur ve Shah (1991) , Ting ve Mockry (1984). Zhaohua ve Cook (1983). Bazı çalışmalarda ise zemine ait parametrelerin çeşitli yöntemlerle hesabı yoluna gidilmiştir. Bunlardan Nogami ve O'Neil (1985) de çökmelerin zemin derinliği boyunca belirli sayıda dağılım fonksiyonun ağırlıklı süperpozisyonu şeklinde öngörmüşlerdir. Bu çalışmada zemin çökme yüzeyinin süperpozisyonla bulunması gerekmektedir. Nogami ve Lam (1987) de sıkışabilir zemin bölgesi belirli sayıda kayma kirişi gibi çalışan tabakaya ayrılıp her tabaka deplasmanının derinlikle lineer değiştiği kabul edilerek zemin elastik karakteristiklerinden zemin yataklanma ve kayma parametrelerine geçilmiştir. Vallabhan-Das (1988) ardışık yaklaşım yöntemiyle çökme parametresini sayısal olarak elde edecek bir yöntem önermişler ve çubuklara uygulamışlardır.

Bu metotta varyasyonel hesap esasları kullanılarak zemine ait karakteristik büyüklükler yani yataklanma ve kayma parametreleri: zeminin Elastisite modülü, Poisson oranı, sıkışabilen tabaka kalınlığı ve yükleme şekline bağlı olarak hesaplanabilmektedir. Vallabhan- Das (1991) daha önce geliştirdikleri modeli (Vallabhan-Das.1988) zemin karakteristiklerinin derinlik zemin boyunca lineer değişmesi hali için genellemişlerdir.

Daha sonra Vallabhan ve diğ. (1991) de Vallabhan-Das (1988) deki çalışmalarını iki boyutlu temel sistemleri için genişletmişlerdir. Jones ve Xenophontos (1977) da zemin yataklanma ve kayma parametrelerini zemin yüzey parametresi (γ) ya bağlı olarak ifade etmişler ve tersine zemin yüzey parametresinin ise çökme yüzeyine bağlı olduğunu göstermişlerdir. Çelik (1998) ve Çelik-Saygun (1999) bu çözüm tarzını yer değiştirme türü Kirchhoff plak elemanlarına uyarlamışlardır.

Bu çalışmanın amacı, Omurtag ve diğ. (1997) de geliştirilmiş olan Kirchhoff plak karışık sonlu elemanı ile iki parametrelili zemin sonlu eleman formülasyonu (Çelik-Saygun,1999) Omurtag ve diğ.,1997) kullanılarak, Vlasov zemin modelinin, Vallabhan-Das (1988) da önerilen algoritma ile birleştirilmesidir. Plak karışık sonlu eleman dört düğüm noktalı olup her bir düğüm noktasında bir çökme, iki eğilme momenti ve bir burulma momenti bilinmeyenleridir. Zemin sonlu elemanları, plak sonlu elemanlarından ayrı olarak geliştirilmiş olup tek serbestlik derecelidir. Böylece plak kendisinden daha geniş bir zemin bölgesi içine yerleştirilebilmektedir.

Elemanlar dörtgen olup 2×2 Gauss Őemaları yardımıyla sayısal iterasyonla elde edilmiştir. SonuÇlar literatürde mevcut çalışmalar ile karŐılaŐtırılmıŐ ve mühendislik uygulamaları bakımından tatmin edici bir yakınsaklık saĐlanmıŐtır.



2. KIRCHHOFF PLAK TEORİSİ

2.1 GİRİŞ

Plaklar, kalınlıkları diğer iki boyutu yanında küçük, kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri düzlem ve taşıdığı yükler bu düzleme dik olan düzlemsel taşıyıcı elemanlardır. Bu durumda plak ortalama yüzeyi, plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanır.

Başlıca plak teorileri;

- 1). Reissner plağı : Kayma şekil değiştirmeleri sabit bir değer olarak hesaba katılır ve nispeten kalın plaklar için uygundur.
- 2). Kármán plağı : İnce plak teorisidir ve çökmeler plak kalınlığına göre bir merteye büyüktür.
- 3). Kirchhoff plağı : İnce plak teorisi olup, kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilir. Çökmeler kalınlık boyutu mertebesini aşmaz.

Bu çalışmada Kirchhoff plağı incelenecektir. Diğer plak teorilerinden burada sadece bahsedilmiştir. Ama istenirse geniş açıklama Timoshenko-Krieger (1982)de bulunabilir.

İnce plak teorisinde alan denklemleri için yapılan kabuller:

- 1) Malzeme doğrusal elastiktir,
- 2) Başlangıçta, orta düzleme dik ve düzlem olan kesitler eğilmeden sonra da ortalama yüzeye dik ve düzlem kalırlar ki bu kabul, çubuk teorisinde Bernoulli-Navier hipotezine karşı gelir,
- 3) Bünye bağıntılarında Hooke yasaları geçerlidir,
- 4) Kalınlık doğrultusunda kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmiştir yani plak ortalama yüzeyine dik doğrultuda normal gerilmeler ihmal edilebilecek mertebede küçüktür.(Timoshenko ve Krieger, 1982).
- 5) Plak kalınlığı yanında küçük olan yer değiştirmelerin, denge denklemi ve geometrik uygunluk şartlarını da ikinci mertebe etkileri ihmal edilebilir. Böylece süperpozisyon kuralı da geçerlidir.

2.2 BÜNYE BAĞINTILARI

Üç boyutlu elastisite teorisinde doğrusal kinematik bağıntı,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3) \quad (2.1)$$

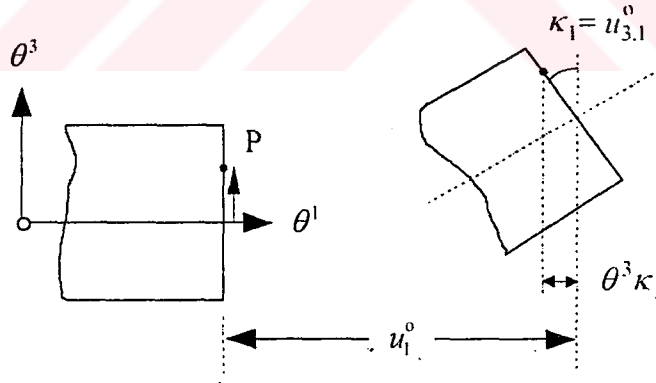
biçiminde yazılır. Yukarıdaki denklemi (2.1) bölümünde anlatılan Kirchhoff-Love teorisi kapsamında kullanılacak birim şekil değiştirmeler için açık yapıda yazarsak,

$$\varepsilon_* = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1,1} \\ \bar{u}_{2,2} \\ \bar{u}_{1,2} + \bar{u}_{2,1} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

elde edilir. Plak ortamındaki bir P noktasının şekil değiştirme sonucu oluşacak yeni konumunu plak ortalama yüzeyine ait u_i^o ($i=1,2,3$) yer değiştirmesi cinsinden,

$$\bar{u}_\alpha = u_\alpha^o - \theta^3 \kappa_\alpha \quad (\alpha = 1,2) \quad (2.3)$$

biçiminde yazmak mümkündür (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Plakta Kayma Şekil Değiştirmesinin İhmal Edilmesi Durumunda Eğilmeden Önceki Ve Sonraki Hal

Burada $\bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, $u_\alpha^o = u_\alpha^o(\theta^1, \theta^2)$, $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(\theta^1, \theta^2)$ ve $\kappa_\alpha = u_{3,\alpha}^o$ dir. Plak için kinematik bağıntıda $\bar{u}_1 = u_1 - z u_{3,x}$, $\bar{u}_2 = u_2 - z u_{3,y}$, $\bar{u}_3 = u_3$, $x = \theta^1$, $y = \theta^2$ ve $z = \theta^3$ yerleştirmesi ile,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,x} - z u_{3,xx} \\ u_{2,y} - z u_{3,yy} \\ u_{1,y} + u_{2,x} - 2z u_{3,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

elde edilir.

Bu bağıntı $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}$ ve $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ biçiminde tanımlanmış bir yer değiştirme alanı için uygundur. Kinematik operatör \mathbf{D}^k yardımıyla şekil değiştirme vektörünü

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{D}_m^k \mathbf{u}_\alpha + z \mathbf{D}_f^k \mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ z \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{Bmatrix}, \quad (2.6)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $\mathbf{u}_\alpha = \{u \ v\}^T$ ve $\mathbf{u}_3 = \{w\}$ olup, yukarıdaki bağıntının terimleri açık yapıda,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} u_{,x} & v_{,y} & (u_{,y} + v_{,x}) \end{Bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} -w_{,xx} & -w_{,yy} & -2w_{,xy} \end{Bmatrix}^T \quad (2.7)$$

dur. Hooke yasalarına göre gerilme-şekil değiştirme bağıntısı $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ nu,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

biçiminde yazılır. Homojen izotrop malzeme için (2.8) deki Elastisite bağıntısı,

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

olur. Burada E elastisite modülü, $G = E/[2(1+\nu)]$ kayma modülüdür. Şimdi (2.5)i (2.8) de yerleştirirsek

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} - z w_{,xx} \\ v_{,y} - z w_{,yy} \\ u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

bulunur. Daha sonra gerilme bileşenleri plak kalınlığı boyunca aşağıda belirtildiği gibi integre edilirse

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_{\alpha\beta} dz, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_{\alpha\beta} z dz \quad (\alpha, \beta = x, y) \quad (2.11)$$

kesit yüzeyindeki kuvvetler ve momentler hesaplanmış olunur. İstersek bu kuvvet ve moment vektörlerini

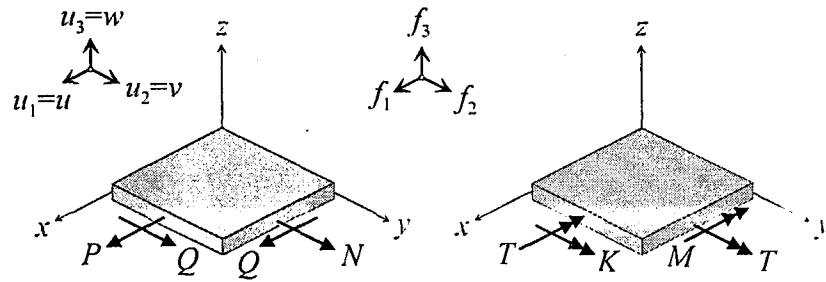
$$\boldsymbol{\sigma}_m = \begin{pmatrix} P \\ N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \begin{pmatrix} K \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.13)$$

biçiminde de yazmak mümkündür. Kuvvetlerin ve momentlerin pozitif doğrultuları Şekil (2.2)de görülmektedir. (2.12) ile (2.13) ifadelerinde \mathbf{E}_m ile \mathbf{E}_f , (2.9) dan

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_m &= h\mathbf{E} \\ \mathbf{E}_f &= \frac{1}{12} h^3 \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

dir.



Şekil 2.2 Plakta \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}_m$, $\boldsymbol{\sigma}_f$, \mathbf{f} vektörlerinin bileşenlerine ait pozitif doğrultular

Homojen izotrop malzemeler için (2.8) denklemi istenirse $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$ biçiminde de yazılabilir. Burada \mathbf{C} kompliyans matrisidir. İstenirse

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

biçiminde de yazılabilir.

Bu durumda yukarıdaki alt matrisler

$$\mathbf{C}_m = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_f = \frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

dır.

2.3 OPERATÖR YAPIDA ALAN DENKLEMLERİ

Plak için yer değiştirme alanı $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_\alpha \quad \mathbf{u}_3\}^T$ ($\alpha = 1,2$) biçiminde tanımlı olduğunda, plak alan denklemleri operatör yapıda

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{D}_m^e \boldsymbol{\sigma}_m - \mathbf{f}_m &= 0 \\ -\mathbf{D}_f^e \boldsymbol{\sigma}_f - \mathbf{f}_3 &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m - \mathbf{C}_m \boldsymbol{\sigma}_m &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f - \mathbf{C}_f \boldsymbol{\sigma}_f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

biçiminde yazılabilir. Burada \mathbf{D}^e denge operatörü, $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_\alpha \quad \mathbf{f}_3]$ yük vektörü ve plak için $\alpha = 1,2$ ya da $\alpha = x, y$ ve $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_z$ dir. Ayrıca yukarıda denge operatörünü

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m^e & \\ & \mathbf{D}_f^e \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

biçiminde de tanımlamak mümkündür ve burada denge operatörü alt matrisleri olan \mathbf{D}_m^e ve \mathbf{D}_f^e terimlerini açık formda yazmak daha tanımlayıcı olacaktır.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_m^e &= \begin{bmatrix} D_x & 0 & D_y \\ 0 & D_y & D_x \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_f^e &= \begin{bmatrix} (D_x)^2 & (D_y)^2 & (2D_x D_y) \end{bmatrix} = [D_x \quad D_y] \begin{bmatrix} D_x & 0 & D_y \\ 0 & D_y & D_x \end{bmatrix} = (\mathbf{D}_s^e)^T \mathbf{D}_m^e \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

dir. Yukarıdaki ifadelerde $D_x = \partial(\dots)/\partial x$ ve $D_y = \partial(\dots)/\partial y$ türev operatörleridir. Eğer \mathbf{D}^k kinematik operatörünü de tanımlamak istersek, o da,

$$\mathbf{D}_m^k = (\mathbf{D}_m^e)^T \text{ ve } \mathbf{D}_f^k = (\mathbf{D}_f^e)^T \quad (2.20)$$

olur. Bu durumda şekil değiştirmeler,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \mathbf{D}_m^k u_\alpha - z \mathbf{D}_f^k u_3 \quad (2.21)$$

biçiminde yazılır.

Eğer yer değiştirme alanını düzlem içi yer değiştirmeler u_α ($\alpha = x, y$) ihmal edilerek $\mathbf{u} = \mathbf{u}_3$ biçiminde tanımlanırsa, o zaman alan denklemleri

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{D}_f^e \boldsymbol{\sigma}_f - \mathbf{f}_3 &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f - \mathbf{C}_f \boldsymbol{\sigma}_f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

biçiminde yazılır. (2.17) ifadesinin açık yazılımı, $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_\alpha \quad \mathbf{u}_3\}^T$, $\mathbf{u}_\alpha = \{u \quad v\}^T$.

$\mathbf{u}_3 = \{w\}^T$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_m \quad \boldsymbol{\sigma}_f\}^T$, $\mathbf{f} = \{q_i\}$ için

$$\left. \begin{aligned} -P_{,x} - Q_{,y} - q_x &= 0 \\ -Q_{,x} - N_{,y} - q_y &= 0 \\ -K_{,xx} - M_{,yy} - 2T_{,xy} - q_z &= 0 \\ u_{,x} - \frac{1}{Eh}(P - \nu N) &= 0 \\ v_{,y} - \frac{1}{Eh}(N - \nu P) &= 0 \\ (u_{,y} + v_{,x}) - \frac{2(1+\nu)}{Eh}(Q) &= 0 \\ -w_{,xx} - \frac{12}{Eh^3}(K - \nu M) &= 0 \\ -w_{,yy} - \frac{12}{Eh^3}(M - \nu K) &= 0 \\ -2w_{,xy} - 2(1+\nu)\frac{12}{Eh^3}(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

dir. (2.22) ifadesinin açık yazılımı ise $\mathbf{u} = \mathbf{u}_3 = \{w\}$, $\sigma = \sigma_f = \{K \ M \ T\}^T$,
 $\mathbf{f}_3 = \{q_z\}^T$ için

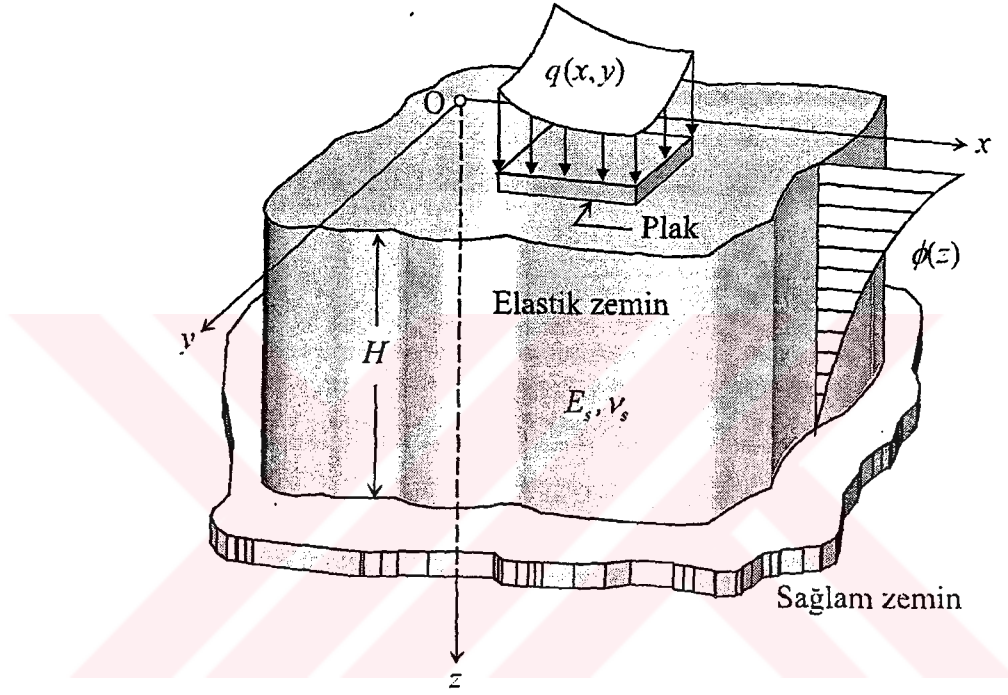
$$\left. \begin{aligned} -K_{,xx} - M_{,yy} - 2T_{,xy} - q_z &= 0 \\ -w_{,xx} - \frac{12}{Eh^3}(K - \nu M) &= 0 \\ -w_{,yy} - \frac{12}{Eh^3}(M - \nu K) &= 0 \\ -2w_{,xy} - 2(1 + \nu)\frac{12}{Eh^3}(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

olur.



3. İKİ PARAMETRELİ ZEMİN MODELİ

Üç boyutlu uzayda, sıkışabilir zemin tabakası kalınlığı H olan elastik bir zemin ortamı düşünelim. Bunun üstünde de Şekil (3.1) de görüldüğü gibi $z = 0$ da bir plak yerleştirilmiş olsun. Plakın üstüne de etki eden dış yük $q(x, y)$ dir.



Şekil 3.1 Zemin Bölgesi

Zemin ortamı için bünye bağıntısı.

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^T + 2\mu \varepsilon_{ij}^T \quad (3.1)$$

olup burada homojen ve izotrop zemin ortamı için λ ve μ = Lamé parametreleri (Timoshenko- Goodier, 1971) ve δ_{ij} = Kronicker deltasıdır. Lamé parametreleri, elastisite modülü E ile Poisson oranı ν cinsinden $\mu = G = E/[2(1+\nu)]$, $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ biçiminde yazılabilir.

Zemin ortamında yer değiştirmeler $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(x, y, z)$ biçiminde bir fonksiyondur. Burada $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3)$ olup $\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i(x, y, z)$ dir. Zemin yüzeyinde $z=0$ için (x, y)

düzleminde zeminin yatay yer deęiřtirmesi, pratik olarak dūřey yer deęiřtirmeleri yanında ihmal edilebilir. Bu durumda,

$$\bar{u}_1(x, y, z) = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{u}_2(x, y, z) = 0 \quad (3.3)$$

olur ve ayrıca dūřey yer deęiřtirme de Vlasov-Leont'ev (1966) nın kabulüne gōre,

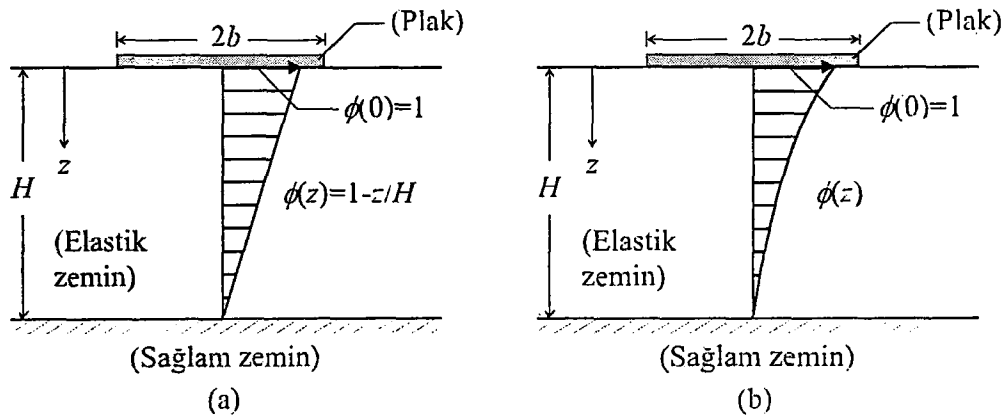
$$\bar{u}_3(x, y, z) = u_3(x, y)\phi(z) \quad (3.4)$$

biçiminde yazılır. Burada $u_3(x, y) = \bar{u}_3(x, y, 0)$ zemin yüzeyindeki dūřey yerdeğiştirmeleri tanımlamaktadır ve buna kısaca zemin çökme yüzeyi denir. Ayrıca $\phi(z)$ için sınır şartları (Bakınız Şekil 3.1)

$$\left. \begin{array}{l} \phi(z=0) = 1 \\ \phi(z=H) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

olmalıdır ve $\phi(z)$ ile $\bar{u}_3(x, y, z)$ nin zemin sıkışabilir zemin tabaka kalınlığı içindeki ($0 \leq z \leq H$) değişimi tanımlanmaktadır. $\phi(z)$ incelenen fiziki problemin yapısına uygun olacak biçimde, deney sonuçlarından da yararlanılarak tespit edilir.

Şekil 3.2 de sağlam zemine doğru biri doğrusal değişen, diğeri hızla sōntümlenen tarzda iki tane $\phi(z)$ fonksiyonu gōr÷lmektedir.



Şekil 3.2 $\phi(z)$ Fonksiyonun Değişimi

Plak açıklığına göre H nin küçük olması durumunda $\phi(z)$ nin doğrusal seçilmesinin uygun olabileceği Çelik (1998) de belirtilmiştir. Şimdi (3.2-3.4) kabulleri altında, kinematik bağıntılar (Timoshenko-Goodier, 1971)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x = \bar{u}_{1,x} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_y = \bar{u}_{2,y} &= 0 \\ \bar{\gamma}_{xy} = \bar{u}_{1,y} + \bar{u}_{2,x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_z = \bar{u}_{3,z} &= u_3(x, y) \phi_{,z}(z) \\ \bar{\gamma}_{xz} = \bar{u}_{2,z} + \bar{u}_{3,x} &= u_{3,x}(x, y) \phi(z) \\ \bar{\gamma}_{yz} = \bar{u}_{1,z} + \bar{u}_{3,y} &= u_{3,y}(x, y) \phi(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

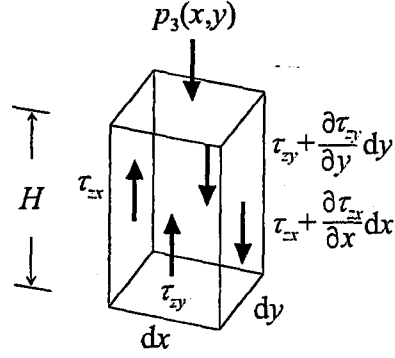
olur. (3.6) ile (3.7) nin (3.1) de yerleştirilmesi ile , gerilmeler,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= (\lambda + 2\mu) u_3(x, y) \phi_{,z}(z) \\ \bar{\tau}_{xz} &= \mu u_{3,x}(x, y) \phi(z) \\ \bar{\tau}_{yz} &= \mu u_{3,y}(x, y) \phi(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

biçiminde elde edilir. Yukarıdaki ifadedeki Lamé parametreleri

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) &= \frac{E_s(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \\ \mu = G_s &= \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

dir. Zemin ortamında H yüksekliğindeki bir zemin kolon elemanın hacmi $dV = H dx dy$ olur ve bunun üstündeki etkiler Şekil (3.3) de görüldüğü gibidir. Burada $p_3(x, y)$ zemin-plak arasındaki etkileşim sonucu oluşacak zemin tepkisini tanımlamaktadır. Ayrıca (3.8) den,



Şekil 3.3 Zemin kolon elemanı

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xz,x} &= \mu u_{3,xz} \phi \\ \bar{\tau}_{yz,y} &= \mu u_{3,yz} \phi \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

olur. Şimdi zemin kolonun çökme yüzeyinde birim çökme için, $u_3(x,y) = 1$ olur. O zaman (3.4) ten,

$$\bar{u}_3 = 1 \cdot \phi(z) \quad (3.11)$$

elde edilir. Bu durum için birim uzama oranı, (3.7a) dan,

$$\varepsilon_z^T = \phi_{,z} \quad (3.12)$$

olur.

(3.7) ve (3.8) gözetilerek zeminin potansiyel enerji ifadesi yazılırsa,

$$\begin{aligned} U_{ze\min} &= \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} dx dy dz \\ U_{ze\min} &= \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\lambda + 2\mu) u_3^2(\phi_{,z})^2 + \mu (\nabla u_3)^2 \phi^2] dx dy dz \end{aligned} \quad (3.13)$$

bulunur.

Dış kuvvetlerin potansiyel enerji ifadesi ise

$$V_{y\tilde{m}k} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_3 u_3 dx dy \quad (3.14)$$

dir.

Buna göre toplam potansiyel enerji ifadesi ise,

$$\begin{aligned}\Pi &= U_{ze \min} + V_{yük} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\lambda + 2\mu)u_3^2(\phi_{,z})^2 + \mu(\nabla u_3)^2 \phi^2] dx dy dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_3 u_3 dx dy\end{aligned}\quad (3.15)$$

dir.

Varyasyon prensipleri ve toplam potansiyel enerjinin minimize edilmesi ilkesi kullanılarak (3.15) ifadesinin u_3 ve ϕ ye göre varyasyonu alınabilir.

- u_3 e göre varyasyonu alındığında;

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [2(\lambda + 2\mu)u_3(\phi_{,z})^2] \delta u_3 dx dy dz - \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mu(\nabla u_3)^2 \phi^2] \delta u_3 dx dy dz \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_3 \delta u_3 dx dy + \int_0^H \mu \phi^2 \left(\frac{du_3}{dx} + \frac{du_3}{dy} \right) \delta u_3 dz = 0\end{aligned}\quad (3.16)$$

bulunur. Burada bazı katsayılar tanımlanırsa:

$$C_1 = \int_0^H (\lambda + 2\mu)(\phi_{,z})^2 dz = \int_0^H \frac{(1-\nu_s)E_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} (\phi_{,z})^2 dz\quad (3.17)$$

ve

$$2C_2 = \int_{z=0}^H \mu \phi^2 dz\quad (3.18)$$

iken,

$$\delta\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{C_1 u_3 - 2C_2 (\nabla u_3)^2 - p_3\} \delta u_3 dx dy + 2C_2 \left[\left(\frac{du_3}{dx} + \frac{du_3}{dy} \right) \delta u_3 \right]_{-\infty}^{\infty} = 0\quad (3.19)$$

ifadesine ulaşılır. Burada δu_3 ortak çarpanı sıfırdan farklı bir değer olduğu için denge denklemi ve sınır koşulları ifadeleri ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

Buna göre

$$C_1 u_3 - 2C_2 (\nabla u_3)^2 - p_3 = 0 \Rightarrow C_1 u_3 - 2C_2 (\nabla u_3)^2 = p_3\quad (3.20)$$

eşitliğine ulaşılmış olunur.

- ϕ e göre varyasyon alınırsa:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\lambda + 2\mu)u_3^2(\phi, \dots)] \delta\phi \, dx \, dy \, dz + \frac{1}{2} \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [2\mu(\nabla u_3)^2 \phi] \delta\phi \, dx \, dy \, dz \\ & + \int_0^H \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + 2\mu)u_3^2(\phi, \dots) \delta\phi \, dx \, dy \, dz = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

bulunur. Bazı katsayılar tanımlanırsa;

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + 2\mu)u_3^2 \, dx \, dy = \frac{E_s(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_3^2(x, y) \, dx \, dy \quad (3.22)$$

ve

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\nabla u_3)^2 \, dx \, dy = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(u_{3,x})^2 + (u_{3,y})^2] \, dx \, dy \quad (3.23)$$

iken

$$\delta\Pi = \int_0^H \{-m(\phi, \dots) + n\phi\} \delta\phi \, dz + m(\phi, \dots) \Big|_0^H \delta\phi = 0 \quad (3.24)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\delta\phi$ ortak çarpanı sıfırdan farklı bir değer olduğu için denge denklemi ve sınır koşulları ifadeleri ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

Buna göre

$$-m\phi_{\dots} + n\phi = 0 \quad (3.25)$$

eşitliğine ulaşılmış olunur.

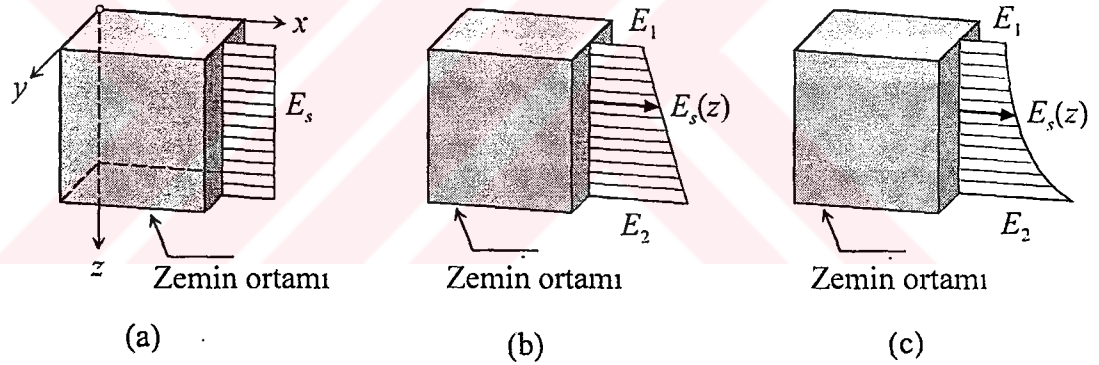
Zemin ortamında (3.5) deki sınır koşulları $\phi(z=0)=1$ ve $\phi(z=H)=0$ için (3.25) ifadesi çözümlürse,

$$\phi(z) = \frac{\text{Sinh}[\gamma(1 - \frac{z}{H})]}{\text{Sinh}\gamma} \quad (3.26)$$

ya da ,

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{n}{m} = \frac{(1-2\nu_s)}{2(1-\nu_s)} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(u_{3,x})^2 + (u_{3,y})^2] dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_3^2 dx dy} \quad (3.27)$$

bulunur. Burada boyutsuz bir sayı olan γ ya zemin yüzey parametresi denir. (3.26) ile (3.27) den görüldüğü gibi γ parametresi, z eksenini boyunca zemindeki yer değiştirmeleri tasvir etmekte kullanılır. Şimdi (3.26) daki $\phi(z)$ in (3.17) ile (3.18) da yerine yerleştirilmesi ve bu ifadelerdeki integrallerin alınması sonucu zemin parametreleri açık halde elde edilmiş olur. (3.17) ve (3.18) daki ν_s ve E_s zemine ait malzeme sabitleridir. Zemin ortamında, zemin elastisite modülü sabit ($E_s = \text{sabit}$) olabileceği gibi düşey z koordinatının da bir fonksiyonu olabilir ($E_s = E_s(z)$).



Şekil 3.4 Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonun Değişimi

Eğer zemin elastisite modülü $E_s = \text{sabit}$ ise (bakınız Şekil 3.3.a) zemin parametreleri C_1 ve C_2 , (3.17) ile (3.18) da (3.26) gözetilerek

$$C_1 = \frac{E_s(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \frac{\gamma \text{Sinh}[2\gamma] + 2\gamma}{4\text{Sinh}^2[\gamma]} \quad (3.28)$$

ve

$$2C_2 = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \frac{H \text{Sinh}[2\gamma] - 2\gamma}{\gamma 4\text{Sinh}^2[\gamma]} \quad (3.29)$$

biçiminde elde edilir.

Eğer zemin elastisite modülü E_s , derinlik boyunca doğrusal değişiklik gösteriyorsa; $E_1 = E_s(z)|_{z=0}$ zemin üst yüzeyinde ve $E_2 = E_s(z)|_{z=H}$ zemin alt yüzeyindeki elastisite modülü değerleri olmak üzere, elastisite modülü fonksiyonu;

$$E_s(z) = E_1 + (E_2 - E_1) \frac{z}{H} \quad (3.30)$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda zemin parametreleri, (3.26) ile (3.30) un (3.17) ve (3.18) da yerleştirilip, bu ifadelerin integrasyonu sonucu;

$$C_1 = \frac{(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \frac{1}{H} \frac{2E_1\gamma \sinh[2\gamma] + 2\gamma^2(E_1 + E_2) - (E_2 - E_1)(1 - \cosh[2\gamma])}{8\sinh^2[\gamma]} \quad (3.31)$$

ve

$$2C_2 = \frac{1}{(1+\nu_s)} \frac{H}{\gamma^2} \frac{2E_1\gamma \sinh[2\gamma] - 2\gamma^2(E_1 + E_2) - (E_2 - E_1)(1 - \cosh[2\gamma])}{16\sinh^2[\gamma]} \quad (3.32)$$

biçiminde elde edilir. Bu çalışmada literatürde mevcut çalışmalara ilave olarak zemin elastisite modülü E_s nin, derinlik boyunca kuadratik değişiklik göstermesi hali için elastisite modülü fonksiyonu;

$$E_s(z) = E_1 + (E_2 - E_1) \frac{z^2}{H^2} \quad (3.33)$$

biçiminde yazıldı.

Böylece (3.17) ve (3.18) deki zemin parametreleri (3.26) ve (3.33) gözetilerek;

$$C_1 = \frac{(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \frac{1}{H\gamma} \frac{3[E_2 + E_1(2\gamma^2 - 1)]\sinh[2\gamma] + [E_2(2\gamma^2 - 3) + E_1(3 + 4\gamma^2)]2\gamma}{24\sinh^2[\gamma]} \quad (3.34)$$

ve

$$2C_2 = \frac{1}{(1+\nu_s)} \frac{H}{\gamma^3} \frac{3[E_2 + E_1(2\gamma^2 - 1)]\sinh[2\gamma] - [E_2(2\gamma^2 + 3) + E_1(4\gamma^2 - 3)]2\gamma}{48\sinh^2[\gamma]} \quad (3.35)$$

biçiminde elde edilir. Zemin elastisite modülünün derinlik boyunca tanımına göre (3.28), (3.29), (3.31), (3.32), (3.34) ve (3.35) de verilmiş olan zemin parametrelerinin γ ya bağlı olduğu açıkça görülmektedir.



4. PLAK İLE ZEMİN MODELİ İÇİN FONKSİYONEL VE İZOPARAMETRİK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

4.1 VARYASYONEL İŞLEMLER

Lineer elastisite teorisinde genel bir sınır değer problemi, Ω bölgesi içinde $\mathbf{T}^* \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{f}$, Γ_σ sınırı üstünde $\mathbf{B}_\sigma \mathbf{y} = \mathbf{f}_\sigma$, Γ_ε sınırı üzerinde $\mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{y} = \mathbf{f}_\varepsilon$ biçiminde ifade edilebilir. Burada \mathbf{T} bir lineer düzgün operatör olup, Y gibi bir Hilbert uzayının Z gibi bir başka Hilbert uzayına görüntüsünü verir. Bağımlı değişken $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, Y Hilbert uzayının elemanı olup açık sınırlı bir bölge $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ içerisinde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarının fonksiyonudur. Kaynağı Z olan \mathbf{T}^* , \mathbf{T} nin eşoperatörü olup \mathbf{f} belli bir fonksiyondur. \mathbf{y} ve $\mathbf{T} \mathbf{y}$ nin \mathbf{B}_1 ve \mathbf{B}_2 sınır operatörleri ile görüntüleri $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_\varepsilon = \Gamma$ sınırında tanımlıdır ve \mathbf{f}_σ ile \mathbf{f}_ε ise sırasıyla Γ_σ ve Γ_ε sınırları üzerinde tanımlı fonksiyonlardır. Karışık formülasyondaki amaç, verilen problemi kanonik yapıda daha düşük mertebeden operatörlerle tanımlamaktır. Bu bölümde, varyasyonel prensiplerin (Gâteaux türevi) kanonik yapıdaki operatöre sistematik olarak uygulanması sonucu karışık sonlu eleman formülasyonuna uygun bir fonksiyonelin gerekli geometrik ve dinamik sınır koşullarını içerecek biçimde elde edilmesi anlatılacaktır. Genel anlamda alan denklemlerini operatör yapıda,

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (\Omega \text{ da geçerli}) \quad (4.1)$$

biçiminde yazmak mümkündür. Burada \mathbf{L} bir operatör, \mathbf{y} bilinmeyenler vektörü ve \mathbf{f} de yük vektörüdür. \mathbf{L} operatörünü alt operatörler cinsinden,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D}^c \\ \mathbf{D}^k & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde de yazmak mümkündür. Burada \mathbf{D}^c denge operatörü ve \mathbf{D}^k kinematik operatörü olup, aralarında $\mathbf{D}^k = (\mathbf{D}^c)^T$ biçiminde bir ilişki vardır. Ayrıca \mathbf{C} kompliyans matrisi ve \mathbf{A} etkileşim operatörüdür. İncelenecek problemin yapısına göre etkileşim operatörü $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{0}}$ da olabilir. Eğer (4.1) ifadesi potansiyel bir operatör (positive definite, self adjoint) ise,

$$[dL(y; \bar{y}), y^*] = [dL(y; y^*), \bar{y}] \quad (4.3)$$

özdeşliğini sağlamalıdır. Burada $dL(y; \bar{y})$ ile $dL(y; y^*)$, operatörün \bar{y} ve y^* doğrultusunda Gâteaux türevidir ve tanımı,

$$dL(y; \bar{y}) = \left. \frac{\partial L(y + \tau \bar{y})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad (4.4)$$

olup τ bir skalerdir (Oden-Reddy, 1976). (4.3) özdeşliğini sağlamak isterken yapılan matematik işlemler sonucu ortaya bazı sınır koşulu terimleri çıkar. O zaman bu potansiyel operatör koşulunu tam olarak sağlayan operatör sınır koşulları operatörü B yi de kapsayacak biçimde genişleterek yazmak istersek,

$$Q = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f \\ \hat{y} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

olur. Daha sonra bu Q operatörü kullanılarak, arzu edilen fonksiyonel,

$$I = \int_0^1 [Q(sy, y), y] ds \quad (4.6)$$

biçiminde elde edilir. (4.6) integrali alındıktan sonra ihtiyaca bağlı olarak bazı Green-Gauss teoremi uygulamaları yapılarak I fonksiyoneli biraz daha düzenlenebilir.

4.2 KIRCHHOFF PLAĞI İÇİN FONKSİYONEL

Serbest değişkenleri u_3 ve σ_f olarak seçilen Kirchhoff plağı için alan denklemleri,

2. Bölümde belirtildiği gibi,

$$\left. \begin{aligned} -D_f^e \sigma_f - f_3 &= 0 \\ \epsilon_f - C_f \sigma_f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

biçiminde yazılır. Burada f_3 yük vektörü, C_f kompliyans matrisi.

$\sigma_f = \{K \ M \ T\}^T$ moment vektörü, $\epsilon_f = -D_f^k u_3$, olup türev operatörü

$D_\alpha = \partial(\dots) / \partial \alpha$ ($\alpha = x, y$) tanımı yardımıyla kinematik ve denge operatörleri D^k ile

D^e nin açık yazılımları,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_f^e &= [(\mathbf{D}_x)^2 \quad (\mathbf{D}_y)^2 \quad 2\mathbf{D}_x\mathbf{D}_y] = [\mathbf{D}_x \quad \mathbf{D}_y] \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & 0 & \mathbf{D}_y \\ 0 & \mathbf{D}_y & \mathbf{D}_x \end{bmatrix} = \mathbf{D}_s^e \mathbf{D}_m^e \\ \mathbf{D}_m^k &= (\mathbf{D}_m^e)^T \\ \mathbf{D}_r^k &= (\mathbf{D}_s^e)^T \\ \mathbf{D}_f^k &= \mathbf{D}_f^k \mathbf{D}_r^k = (\mathbf{D}_f^e)^T \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

biçiminde verilebilir. Yukarıdaki tanımlardan $\mathbf{D}_f^e \boldsymbol{\sigma}_f = K_{,xx} + M_{,yy} + 2T_{,xy}$ olduğu görülür. Böylece (4.7) den hareketle plak için (4.2) den \mathbf{L}_p operatörü oluşturulabilir. Şimdi (4.3) koşulunun çalıştırılabilmesi için öncelikle \mathbf{L}_p operatörü için (4.4) deki Gâteaux türevinin $\bar{\mathbf{y}}$ ile \mathbf{y}^* için hesaplanmış olması gerekir. Bunlar,

$$\left. \begin{aligned} [d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] &= [-(\mathbf{D}_f^e \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f), \mathbf{u}_3^*] + [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_f, \boldsymbol{\sigma}_f^*] + [\mathbf{C}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\sigma}_f^*] \\ [d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] &= [-(\mathbf{D}_f^e \boldsymbol{\sigma}_f^*), \bar{\mathbf{u}}_3] + [\boldsymbol{\varepsilon}_f^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f] + [\mathbf{C}_f \boldsymbol{\sigma}_f^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f] \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

dır. Eğer (4.9a) ya Green-Gauss teoremi iki kez uygulanırsa,

$$\begin{aligned} [d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] &= [-\mathbf{D}_f^e \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \mathbf{u}_3^*] + [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_f, \boldsymbol{\sigma}_f^*] + [\mathbf{C}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\sigma}_f^*] \\ &= [-\mathbf{D}_f^e \boldsymbol{\sigma}_f^*, \bar{\mathbf{u}}_3] + [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\varepsilon}_f^*] + \mathbf{C}_f [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\sigma}_f^*] \\ &\quad - \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} - \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} + \langle \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\sigma}_f^* \rangle_{\Gamma} + \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \boldsymbol{\sigma}_s^* \rangle_{\Gamma} \\ &= [d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] - \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} - \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} + \langle \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\sigma}_f^* \rangle_{\Gamma} + \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \boldsymbol{\sigma}_s^* \rangle_{\Gamma} \\ &= [d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] + \langle \mathbf{B}_p \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^* \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}_m^e \boldsymbol{\sigma}_f = \{(K_{,xx} + T_{,yy}) (M_{,yy} + T_{,xx})\}^T$ dir. Şimdi potansiyel operatör koşulunun sağlatılabilmesi için (4.10) un (4.3) özdeşliğini sağlaması gerekir. Bu da sınır koşulu operatörü \mathbf{B}_p yardımıyla,

$$[d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] - \langle \mathbf{B}_p \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^* \rangle \equiv [d\mathbf{L}_p(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] \quad (4.11)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$-\langle \mathbf{B}_p \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^* \rangle = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} + \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f, \boldsymbol{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} - \langle \bar{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\sigma}_f^* \rangle_{\Gamma} - \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \boldsymbol{\sigma}_s^* \rangle_{\Gamma} \quad (4.12)$$

olur. Sınır $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_\varepsilon$ olduğuna göre, (4.12) deki sembolik gösterimin açık yazılımı,

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{\sigma}_s, \mathbf{u}_3^* \rangle_\Gamma &\Leftrightarrow \langle \sigma_s, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma + \langle \sigma_s, \hat{\mathbf{u}}_3 \rangle_\varepsilon \\ \langle \bar{\sigma}_f, \hat{\Omega}^* \rangle_\Gamma &\Leftrightarrow \langle \sigma_f, \Omega \rangle_\sigma + \langle \sigma_f, \hat{\Omega} \rangle_\varepsilon \\ -\langle \bar{\Omega}, \sigma_f^* \rangle_\Gamma &\Leftrightarrow -\langle \Omega, \hat{\sigma}_f \rangle_\sigma - \langle \Omega, \sigma_f \rangle_\varepsilon \\ -\langle \bar{\mathbf{u}}_3, \sigma_s^* \rangle_\Gamma &\Leftrightarrow -\langle \mathbf{u}_3, \hat{\sigma}_s \rangle_\sigma - \langle \mathbf{u}_3, \sigma_s \rangle_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

biçiminde olur. Buna göre (4.5) deki \mathbf{Q}_p operatörü içine yerleştirilerek (4.6) da kullanılacak olan sınır koşulu ifadesi, (4.13) yardımıyla,

$$\left. \begin{aligned} -\langle \mathbf{B}_p(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{y} \rangle &= \langle \sigma_s, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma + \langle \sigma_s, \hat{\mathbf{u}}_3 \rangle_\varepsilon + \langle \sigma_f, \Omega \rangle_\sigma + \langle \sigma_f, \hat{\Omega} \rangle_\varepsilon \\ &\quad - \langle \Omega, \hat{\sigma}_f \rangle_\sigma - \langle \Omega, \sigma_f \rangle_\varepsilon - \langle \mathbf{u}_3, \hat{\sigma}_s \rangle_\sigma - \langle \mathbf{u}_3, \sigma_s \rangle_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

biçiminde yazılır. Buna göre \mathbf{Q}_p operatörü (4.6) da yerleştirilirse,

$$I_p(\mathbf{y}) = \int_0^1 [\mathbf{L}_p(\mathbf{s}\mathbf{y}, \mathbf{f}), \mathbf{y}] ds + \int_0^1 \langle -\mathbf{B}_p(\mathbf{s}\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{y} \rangle ds \quad (4.15)$$

yazılır. Buradan plak fonksiyoneli,

$$I_p = -\frac{1}{2}[\mathbf{D}_f^e \sigma_f \cdot \mathbf{u}_3] + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_f, \sigma_f] - \frac{1}{2}[\mathbf{C}_f \sigma_f, \sigma_f] - [\mathbf{f}_3, \mathbf{u}_3] + \Gamma_{Q_p} \quad (4.16)$$

biçiminde elde edilir. Yukarıdaki ifadede Γ_{Q_p} potansiyel operatör koşulundan gelen sınır koşulu terimleri olup bunların sembolik yazılımı,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{Q_p} &= \frac{1}{2}[\langle \sigma_s, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma + \langle \sigma_f, \Omega \rangle_\sigma - \langle \Omega, \sigma_f \rangle_\varepsilon - \langle \mathbf{u}_3, \sigma_s \rangle_\varepsilon] \\ &\quad + [\langle \sigma_s, \hat{\mathbf{u}}_3 \rangle_\varepsilon + \langle \sigma_f, \hat{\Omega} \rangle_\varepsilon - \langle \Omega, \hat{\sigma}_f \rangle_\sigma - \langle \mathbf{u}_3, \hat{\sigma}_s \rangle_\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

dır. Şimdi (4.16) da eşitliğin sağındaki ilk iki terime Green-Gauss teoremi bir kez uygulanırsa, fonksiyonel,

$$I_p = -[\Omega, \sigma_s] - \frac{1}{2}[\mathbf{C}_f \sigma_f, \sigma_f] - [\mathbf{f}_3, \mathbf{u}_3] + \Gamma_p \quad (4.18)$$

elde edilir. Burada $\Gamma_p = \Gamma_{Q_p} + \Gamma_{I_p}$ toplam sınır koşulu ifadesi olup Γ_{I_p} fonksiyonel üstünde yapılan türev kaydırma işlemleri sonucu gelen sınır koşulu terimleridir. Γ_{I_p} nin sembolik yazılımı,

$$\Gamma_{I_p} = -\frac{1}{2}\langle \sigma_s, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma - \frac{1}{2}\langle \sigma_s, \mathbf{u}_3 \rangle_\varepsilon + \frac{1}{2}\langle \sigma_f, \Omega \rangle_\sigma + \frac{1}{2}\langle \sigma_f, \Omega \rangle_\varepsilon \quad (4.19)$$

biçimindedir.

O halde toplam sınır koşulu ifadesi.

$$\Gamma_p = \Gamma_{I_p} + \Gamma_{Q_p} = -\langle \sigma_s, (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) \rangle_\varepsilon + \langle \sigma_f, \hat{\Omega} \rangle_\varepsilon + \langle \Omega, (\sigma_f - \hat{\sigma}_f) \rangle_\sigma - \langle \mathbf{u}_3, \hat{\sigma}_s \rangle_\sigma \quad (4.20)$$

olur. Böylece (4.18) ile (4.20) den Kirchhoff plağı için fonksiyonel,

$$\left. \begin{aligned} I_p = & -[\Omega, \sigma_s] - \frac{1}{2} [C_f \sigma_f, \sigma_f] - [f_3, \mathbf{u}_3] \\ & - \langle \sigma_s, (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) \rangle_\varepsilon + \langle \sigma_f, \hat{\Omega} \rangle_\varepsilon + \langle \Omega, (\sigma_f - \hat{\sigma}_f) \rangle_\sigma - \langle \mathbf{u}_3, \hat{\sigma}_s \rangle_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

biçiminde bulunur. (4.20) de eşitliğin sağındaki ilk üç terim bölgeye ait olup son dört terim sınırlarda geçerlidir. Ayrıca yukarıdaki ifadelerde $\sigma_s = \mathbf{D}_m^c \sigma_f = \{(K_{,x} + T_{,y}) (M_{,y} + T_{,x})\}^T$, $-\Omega = \mathbf{D}_s \mathbf{u}_3$ ($\Omega = \{\Omega_x \ \Omega_y\}^T$, $\Omega_\alpha = -u_{3,\alpha}$, $\alpha = x, y$ dir. Buna ilave olarak (4.21) de sınır koşulları için kullanılan iç çarpımların integral yazılımları,

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma_s, (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) \rangle_\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{S}_s \sigma_s) (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) d\Gamma_\varepsilon \\ \langle \sigma_f, \hat{\Omega} \rangle_\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{S}_f \sigma_f)^T \hat{\Omega} d\Gamma_\varepsilon \\ \langle \Omega, (\sigma_f - \hat{\sigma}_f) \rangle_\sigma &= \int_{\Gamma_\sigma} \Omega^T (\mathbf{S}_m (\sigma_f - \hat{\sigma}_f)) d\Gamma_\sigma \\ \langle \mathbf{u}_3, \hat{\sigma}_s \rangle_\sigma &= \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{S}_s \hat{\sigma}_s) \mathbf{u}_3 d\Gamma_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

olup burada $\mathbf{S}_s = [1 \ 1]$ dir.

4.3 VLASOV ZEMİN MODELLEMESİ İÇİN FONKSİYONEL

Mekanik model için tepki-eğrilik ilişkisi, 3. Bölüm'de verildiği gibi,

$$\mathbf{p}_3 = (C_1 u_3 - 2C_2 \nabla^2 u_3) \mathbf{k} \quad (4.23)$$

dir. Yukarıdaki ifadede \mathbf{k} , z eksenini doğrultusundaki birim vektördür. Ayrıca $\nabla^2 = (\dots)_{,xx} + (\dots)_{,yy}$ olduğuna göre (4.23) istenirse $p_3 = C_1 u_3 - 2C_2 (u_{3,xx} + u_{3,yy})$ biçiminde de yazılabilir. Plak ile zeminin ara kesitinde ikisi arasındaki ortak etkileşim düşey denge koşulu $-\mathbf{D}_f^c \sigma_f - \mathbf{f}_3 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$ bağıntısını sağlamalıdır. Zemin modeli için (4.9) ilişkileri,

$$\left. \begin{aligned} [d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] &= [C_1 \bar{\mathbf{u}}_3, \mathbf{u}_3^*] - [2C_2 \bar{\mathbf{u}}_{3,xx}, \mathbf{u}_3^*] - [2C_2 \bar{\mathbf{u}}_{3,yy}, \mathbf{u}_3^*] \\ [d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] &= [C_1 \mathbf{u}_3^*, \bar{\mathbf{u}}_3] - [2C_2 \mathbf{u}_{3,xx}^*, \bar{\mathbf{u}}_3] - [2C_2 \mathbf{u}_{3,yy}^*, \bar{\mathbf{u}}_3] \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

olur. Eğer (4.24a) ya Green-Gauss teoremi iki kez uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
[d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] &= [C_1 \bar{\mathbf{u}}_3, \mathbf{u}_3^*] - [2C_2 \bar{\mathbf{u}}_{3,xx}, \mathbf{u}_3^*] - [2C_2 \bar{\mathbf{u}}_{3,yy}, \mathbf{u}_3^*] \\
&= C_1 [\mathbf{u}_3^*, \bar{\mathbf{u}}_3] - 2C_2 [\mathbf{u}_{3,xx}^*, \bar{\mathbf{u}}_3] - 2C_2 [\mathbf{u}_{3,yy}^*, \bar{\mathbf{u}}_3] \\
&\quad + 2C_2 \langle \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} - 2C_2 \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \mathbf{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} \\
&= [d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] + 2C_2 \langle \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} - 2C_2 \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \mathbf{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} \\
&= [d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] + \langle \mathbf{B}_F \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^* \rangle
\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Şimdi potansiyel operatör koşulunun sağlatılabilmesi için (4.25) in (4.3) özdeşliğini sağlaması gerekir. Bu da sınır koşulu operatörü \mathbf{B}_F yardımıyla,

$$[d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] - \langle \mathbf{B}_F \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^* \rangle \equiv [d\mathbf{L}_F(\mathbf{y}; \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] \tag{4.26}$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$-\langle \mathbf{B}_F \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^* \rangle = -2C_2 \langle \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} + 2C_2 \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \mathbf{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} \tag{4.27}$$

olur. Sınır $\Gamma = \Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_{\varepsilon}$ olduğuna göre, (4.27) deki sembolik gösterimin açık yazılımı,

$$\left. \begin{aligned}
-2C_2 \langle \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{u}_3^* \rangle_{\Gamma} &\Leftrightarrow -2C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{u}_3 \rangle_{\sigma} - 2C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \hat{\mathbf{u}}_3 \rangle_{\varepsilon} \\
2C_2 \langle \bar{\mathbf{u}}_3, \mathbf{\Omega}^* \rangle_{\Gamma} &\Leftrightarrow 2C_2 \langle \mathbf{u}_3, \hat{\mathbf{\Omega}} \rangle_{\sigma} + 2C_2 \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{\Omega} \rangle_{\varepsilon}
\end{aligned} \right\} \tag{4.28}$$

biçiminde olur. Buna göre (4.5) deki \mathbf{Q}_F operatörü içine yerleştirilerek (4.6) da kullanılacak olan sınır koşulu ifadesi, (4.28) yardımıyla,

$$-\langle \mathbf{B}_F(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{y} \rangle = -2C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{u}_3 \rangle_{\sigma} - 2C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \hat{\mathbf{u}}_3 \rangle_{\varepsilon} + 2C_2 \langle \mathbf{u}_3, \hat{\mathbf{\Omega}} \rangle_{\sigma} + 2C_2 \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{\Omega} \rangle_{\varepsilon} \tag{4.29}$$

biçiminde yazılır. Buna göre \mathbf{Q}_F operatörü (4.6) da yerleştirilirse,

$$I_F = \int_0^1 [\mathbf{L}_F(s\mathbf{y}), \mathbf{y}] ds + \int_0^1 \langle -\mathbf{B}_F(s\mathbf{y}; \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{y} \rangle ds \tag{4.30}$$

yazılır. Buradan zemin modeli için fonksiyonel,

$$I_F = \frac{1}{2} [C_1 \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3] - [C_2 \mathbf{u}_{3,xx}, \mathbf{u}_3] - [C_2 \mathbf{u}_{3,yy}, \mathbf{u}_3] + \Gamma_{Q_F} \tag{4.31}$$

biçiminde elde edilir.

Yukarıdaki ifadede Γ_{Q_F} potansiyel operatör koşulundan gelen sınır koşulu terimleri olup bunların sembolik yazılımı,

$$\Gamma_{Q_F} = [C_2 \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{\Omega} \rangle_\varepsilon - C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma] + [2C_2 \langle \mathbf{u}_3, \hat{\mathbf{\Omega}} \rangle_\sigma - 2C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \hat{\mathbf{u}}_3 \rangle_\varepsilon] \quad (4.32)$$

dır. Şimdi (4.31) de eşitliğin sağındaki ikinci ve üçüncü terimlere Green-Gauss teoremi bir kez uygulanırsa, fonksiyonel,

$$I_F = \frac{1}{2} [C_1 \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3] + [C_2 \mathbf{\Omega}_x, \mathbf{\Omega}_x] + [C_2 \mathbf{\Omega}_y, \mathbf{\Omega}_y] + \Gamma_{I_F} \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada $\Gamma_F = \Gamma_{Q_F} + \Gamma_{I_F}$ toplam sınır koşulu ifadesi olup Γ_{I_F} fonksiyonel üstünde yapılan türev kaydırma işlemleri sonucu gelen sınır koşulu terimleridir. Γ_{I_F} nin sembolik yazılımı,

$$\Gamma_{I_F} = C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma + C_2 \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{u}_3 \rangle_\varepsilon \quad (4.34)$$

dır. O halde toplam sınır koşulu ifadesi,

$$\Gamma_F = \Gamma_{I_F} + \Gamma_{Q_F} = \langle 2C_2 \mathbf{\Omega}, (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) \rangle_\varepsilon + \langle \mathbf{u}_3, 2C_2 \hat{\mathbf{\Omega}} \rangle_\sigma \quad (4.35)$$

biçimindedir. Böylece (4.33) ile (4.35) den Vlasov zemin modellemesi için fonksiyonel,

$$I_F = \frac{1}{2} [C_1 \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3] + [C_2 \mathbf{\Omega}_x, \mathbf{\Omega}_x] + [C_2 \mathbf{\Omega}_y, \mathbf{\Omega}_y] + \langle 2C_2 \mathbf{\Omega}, (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) \rangle_\varepsilon + \langle 2C_2 \hat{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma \quad (4.36)$$

biçiminde bulunur. Yukarıdaki ifadelerde $\mathbf{\Omega}_\alpha = -\mathbf{u}_{3,\alpha}$ $\alpha = x, y$ dir. Ayrıca (4.36) da sınır koşulları için kullanılan iç çarpımların integral yazılımları,

$$\begin{aligned} \langle 2C_2 \mathbf{\Omega}, (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) \rangle_\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{S}_s(2C_2 \mathbf{\Omega})) (\mathbf{u}_3 - \hat{\mathbf{u}}_3) d\Gamma_\varepsilon \\ \langle 2C_2 \hat{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{u}_3 \rangle_\sigma &= \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{S}_s(2C_2 \hat{\mathbf{\Omega}})) \mathbf{u}_3 d\Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (4.37)$$

dir.

4.4 DÖRTGEN SONLU ELEMANI

Bu çalışmada bilineer şekil fonksiyonlarına dayalı olarak bir izoparametrik plak elemanı geliştirilmiştir. Eleman dört köşe düğüm noktasına sahip olup (Şekil 4.1), anaç şekil fonksiyonu $\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$ dir. Burada ξ ve η koordinat dönüşümlerinin yapılmış olduğu kare elemana ait bağımsız koordinatlardır. x_g ve y_g düzlem elemanın ağırlık merkezini göstermektedir. Her düğüm noktası için yukarıda verilen anaç şekil fonksiyonunda o düğüm noktasına ait $\xi_i = \pm 1$ ve $\eta_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, 4$) koordinat değerleri verilerek dört adet şekil fonksiyonu türetilir. İzoparametrik sonlu eleman formülasyonu,

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^4 (u_3)_i \phi_i \\ w_{,x} &= \sum_{i=1}^4 (u_3)_{i,x} \phi_i \\ K &= \sum_{i=1}^4 K_i \phi_i \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

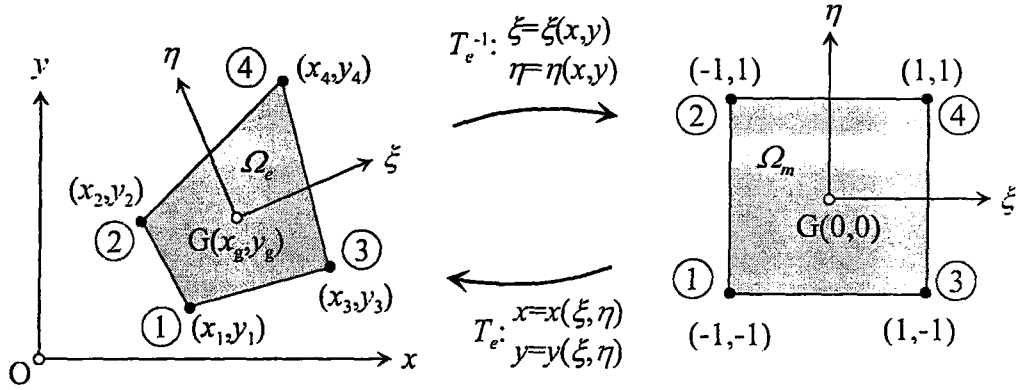
biçiminde tanımlanır (Zienkiewicz, 1971). Türevli büyüklükleri için. dx ve dy diferansiyelleri

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (4.39)$$

dir. Bunları matris formunda yazarsak,

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

elde edilir.



Şekil 4.1: İzoparametrik dörtgen eleman

Burada \mathbf{J} koordinat dönüşümünü verecek olan Jakobyen olup,

$$|\mathbf{J}| = \det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.41)$$

dır. Diferansiyel alan elemanı ise,

$$dA = dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.42)$$

olur. (4.40) den,

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.39) a benzer biçimde,

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

yazılabilir. Bu durumda (4.43) ve (4.44) nin eşitliğinden,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

elde edilir. Sonuçta şekil fonksiyonlarının türevleri,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

olur (Bathe, 1982).

4.5 ARDIŞIK YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ

Zemin parametreleri C_1 ile C_2 'nin hesabı için çökme mod fonksiyonu $\phi(z)$ bilinmelidir. $\phi(z)$ ise çökme parametresi γ ya bağlıdır (bakınız 3.26). (3.27) bağıntısından anlaşılacağı gibi, γ çökme yüzeyine bağlı olarak hesaplanabilir. Başlangıçta çökme yüzeyi belli olmadığı için, çözüme ardışık yaklaşımla ulaşılabacaktır. İlk adım olarak $^{(1)}\gamma$ ya bir değer verilecek ve buna ait $^{(1)}C_1$ ile $^{(1)}C_2$ (3.28, 3.32 ya da 3.34, 3.35) belirlenecektir. Bu değerler için yapılacak sonlu eleman çözümünden bir çökme yüzeyi $^{(1)}u_3$ belirlenir. Bu değerler kullanılarak bir sonraki adım için (3.27) den $^{(2)}\gamma$ hesaplanır. Yeni değere bağlı olarak zemin parametreleri $^{(2)}C_1$ ile $^{(2)}C_2$ belirlenir ve sonlu eleman çözümünde yeni bir çökme yüzeyi $^{(2)}u_3$ bulunur. Bu ardışık yaklaşım yönteminin sonlandırılması için γ parametresi kontrol edilmektedir. n inci adımda hesaplama $^{(n)}\gamma$, bir önceki $^{(n-1)}\gamma$ ile karşılaştırılır ve yeter derecede yakın olduğu zaman ardışık yaklaşım durdurulur. Başlangıçta belirlenen γ parametresi çok uygun olmasa da bu yaklaşımın oldukça hızlı olduğu çözülen örneklerde görülmüştür. Yükleme tipine (tekil ya da yayılı) bağlı olarak 5~8 adım içinde sonuç alınmaktadır. Bu çalışmada γ için kullanılan yakınsaklık değeri %0.1 seçilmiş ve ardışık yaklaşıma $^{(1)}\gamma=1$ ile başlanmıştır.

Sonlu eleman çözümünde, zemin ve plak elemanları ait oldukları bölgelere sırayla döşenmiştir ve sistem matrisi her iki grubun terimlerinden oluşacak biçimde kodlama tekniği ile oluşturulmuştur.



5. SAYISAL ÖRNEKLER

5.1 TEKİL YÜK VE DÜZGÜN YAYILI YÜKLÜ PLAK VE SABİT ELASTİSİTE MODÜLLÜ ZEMİN ORTAMI İÇİN İKİ PARAMETRELİ HESAP YÖNTEMİNİN DOĞRULANMASI

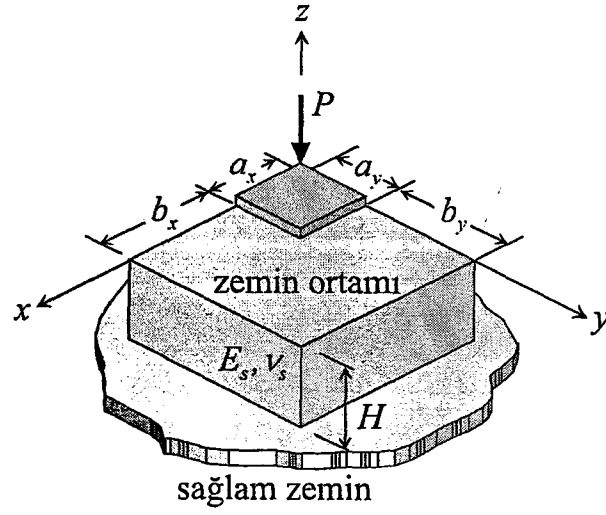
Bu bölümde, zemin ortamı elastisite modülünün H yüksekliği boyunca sabit ve doğrusal değişmesi durumları için literatürde mevcut çalışmalar ele alınmış ve bu çalışmada geliştirilen eleman modellemesiyle elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha sonra elastisite modülünün H yüksekliği boyunca kuadratik değişmesi durumu ele alınmıştır. En son örnek olarak, mevcut karışık sonlu elemanlar çalışmasının yakınsaması hakkında bir fikir verecek incelemeye de yer verilmiştir.

ÖRNEK 1:

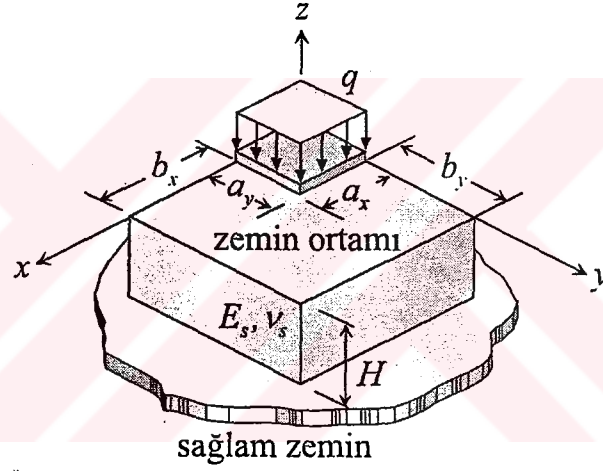
Burada Vallabhan ve diğ. (1991) de ve Çelik (1996) da incelenen iki problem ele alınmıştır ve problem çözüm sonrası bulunan zemin yataklanma (C_1), zemin kayma (C_2) ve zemin yüzey (γ) parametresi değerleri diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Plak geometrisi: x doğrultusunda $2a_x=9.144$ m, y doğrultusunda $2a_y=12.192$ m, kalınlığı 0.1524 m ve homojen izotrop plağın elastisite modülü $E=20685000$ kN/m², Poisson oranı $\nu=0.20$ dir. Zemin elastisite modülü E_s , zemin derinliğince sabit olacak biçimde 68950 kN/m², Poisson oranı $\nu_s=0.25$ tanımlamaları yapılmıştır. Zemin tabakası kalınlığı H sırası ile 3.048 m, 6.096 m, 9.144 m ve 15.24 m olacak biçimde dört farklı durum için çözümlenmeler yapılmıştır.

Plak yüklemesi tekil ve yayılı durumlar için ayrı ayrı yapılmıştır. Tekil yüklemelerde plağın simetri merkezinde düşey aşağı etkileyen $P = 133.34$ kN şiddetinde bir kuvvet ve yayılı yüklemelerde düzgün yayılı düşey aşağı yönde $q = 23.94$ kN/m² luk yüzeysel yük bulunmaktadır. Geometrinin ve yüklemelerin simetrik olmasından dolayı, çözümlerde sistemin $\frac{1}{4}$ lük parçası kullanılmıştır. Bu durumda plağın oturduğu zemin alanı olarak plak kenarlarından x doğrultusunda $b_x=9.144$ m, y doğrultusunda $b_y=9.144$ m mesafe içinde kalan bölge seçilmiştir.



Şekil 5.1 Tekil Yükleme Durumunda ¼ lük Plak Ve Zemin Bölgeleri



Şekil 5.2 Yayılı Yükleme Durumunda ¼ Lük Plak Ve Zemin Bölgeleri

Ele alınan 13.71624 m^2 lik ¼ lük bölgede, Karışık sonlu elemanlar modellemesinde 15×15 lük bir ağ kullanılarak toplam 225 adet eleman ile analiz yapılmıştır. Plak bölgesindeki elemanlarda her düğüm noktasında çökme (u_3), x ve y eksenleri etrafında eğilme momentleri (K ve M) ve x - y düzleminde burulma momenti (T) olmak üzere 4 bilinmeyen; zemin bölgesindeki elemanlarda ise her düğüm noktasında çökme (u_3) bilinmeyeni göz önüne alınarak toplam 527 bilinmeyen hesaplanmıştır.

Bu çalışmada anlatılan yöntem ve buna bağlı olarak geliştirilen program ile yapılan çözüm sonuçları ile, Vallabhan ve diğ. (1991) de ve Çelik (1996) da yer alan sonuçlar Tablo (5.1) ile Tablo (5.2) de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Tablo 5.1 Tekil Yükleme Durumunda Zemin Parametreleri

H		3,048 m	6,096 m	9,144 m	15,24 m
C_1 (kN/m ³)	Vallabhan ve diğ. (1991)	31610.54	23918,17	23376.2	23350.3
	Çelik (1996)	31898,08	24256,05	23737,98	23710.86
	Bu çalışma	31796,60	24069,80	23538.40	23502.50
C_2 (kN/m)	Vallabhan ve diğ. (1991)	9565,47	11959,06	12193,10	11205.06
	Çelik (1996)	9456,54	11789,91	12017,78	12030.33
	Bu çalışma	9498,20	11892,60	12119,80	12136.80
γ	Vallabhan ve diğ. (1991)	1,9018	3,4737	5,1669	8,6079
	Çelik (1996)	1,9478	3,5249	5,2434	8,7369
	Bu çalışma	1,9338	3,4952	5.1991	8.6579

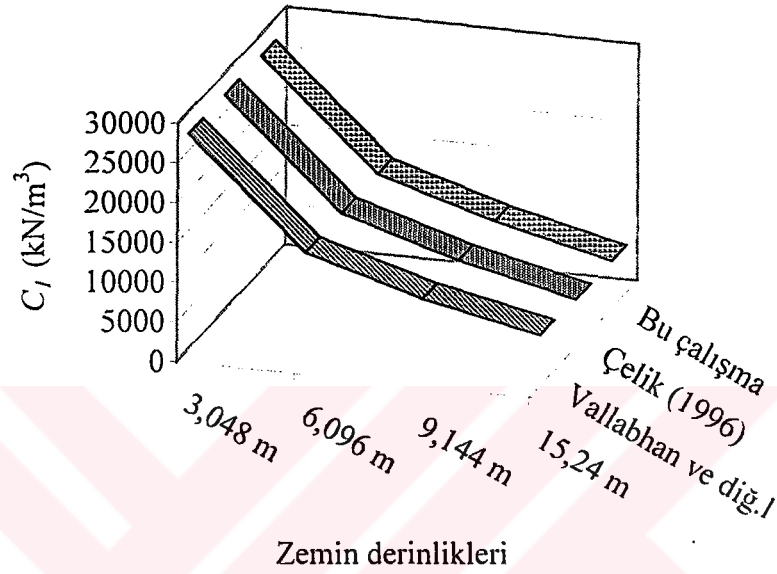
Tablo 5.2 Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Parametreleri

H		3,048 m	6,096 m	9.144 m	15.24 m
C_1 (kN/m ³)	Vallabhan ve diğ. (1991)	27192.24	13757,28	9430.36	6366.16
	Çelik (1996)	27206.59	13757,63	9377.96	5964.21
	Bu çalışma	27210,30	13755,60	9368.20	5949.10
C_2 (kN/m)	Vallabhan ve diğ. (1991)	13413,54	25141,05	34753.00	47366.78
	Çelik (1996)	13452,96	25205,43	35293.25	52332.23
	Bu çalışma	13408.50	25220.30	35387.30	52556.90
γ	Vallabhan ve diğ. (1991)	0,5766	0,9297	1,2644	1,9419
	Çelik (1996)	0,5813	0,9167	1.1962	1.6050
	Bu çalışma	0,5724	0,9194	1.2064	1.6193

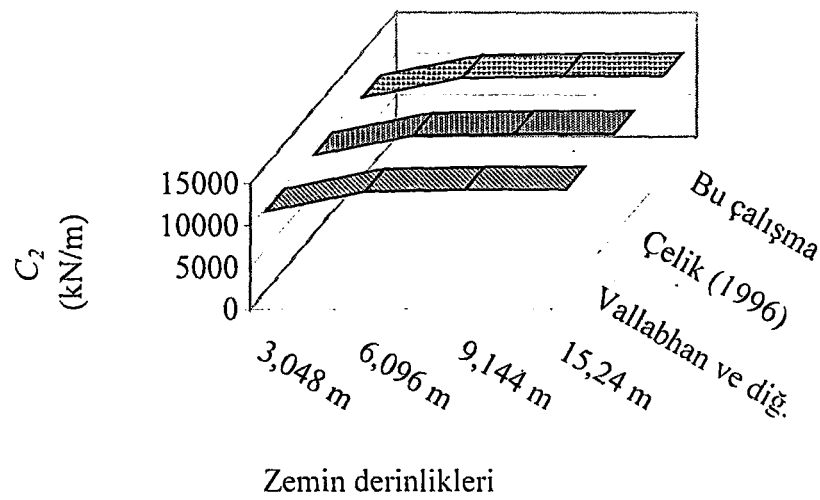
Bu çalışmada oluşturulan bilgisayar programı çözümleri Vallabhan ve diğ. (1991) ve Çelik (1996) çözümlerinin arasında değerler almaktadır (Bakınız Şekil 5.3-5.8). Zemin parametrelerinin (C_1 , C_2 ve γ), zemin derinliği (H) ve plak üzerindeki yükleme durumuna (P ve q) bağımlı olduğu Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 de görülmektedir. Karşılaştırma tablosundaki değerler incelendiğinde, zemin ve plak bölgelerinde, malzeme ve yükleme durumları değiştirilmeden, zemin tabakasının

kalınlığı arttırıldığında, zemin yataklanma parametresi (C_1) in azaldığı, buna karşın zemin kayma (C_2) ve yüzey parametresi (γ) nin arttığı sonucuna varılmıştır.

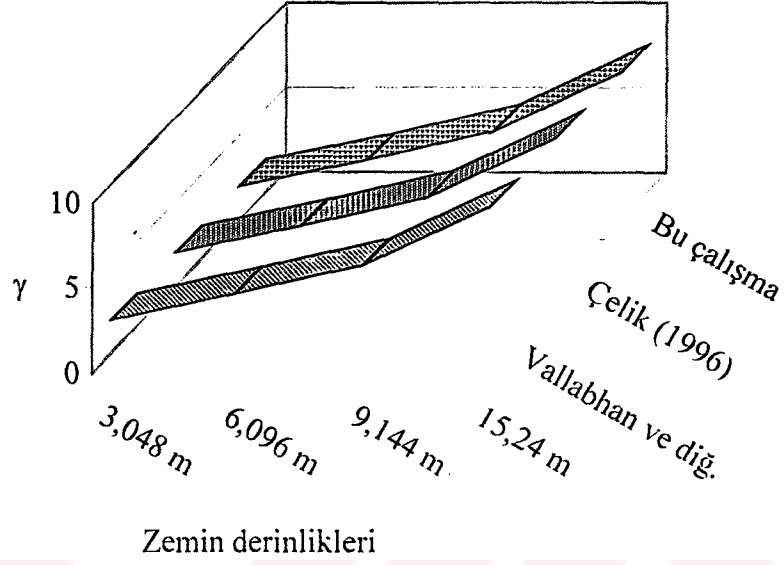
Zemin parametrelerinin (C_1, C_2 ve γ), tekil yükleme (P) durumunda farklı zemin derinlikleri için Vallabhan ve diğ. (1991), Çelik (1996) ve bu çalışmada aldıkları sonuçlara göre değişimleri Şekil 5.3, 5.4 ve 5.5 de verilmiştir.



Şekil 5.3 Tekil Yükleme Durumunda Zemin Yataklanma Parametresinin (C_1) Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi

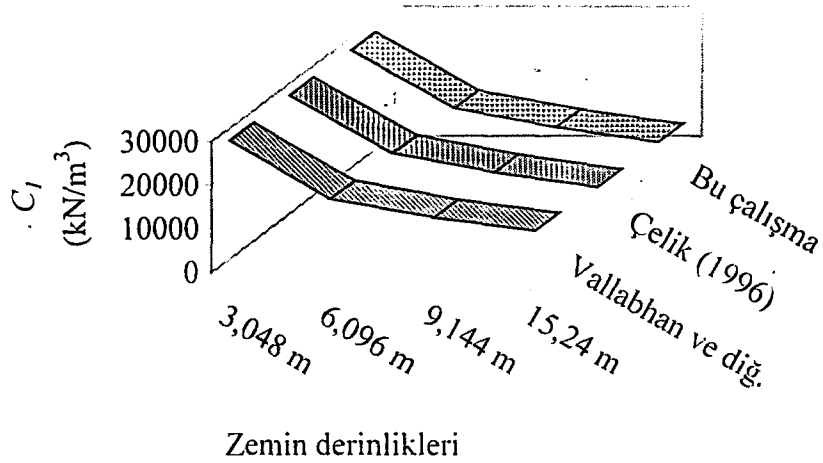


Şekil 5.4 Tekil Yükleme Durumunda Zemin Kayma Parametresinin (C_2) Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi

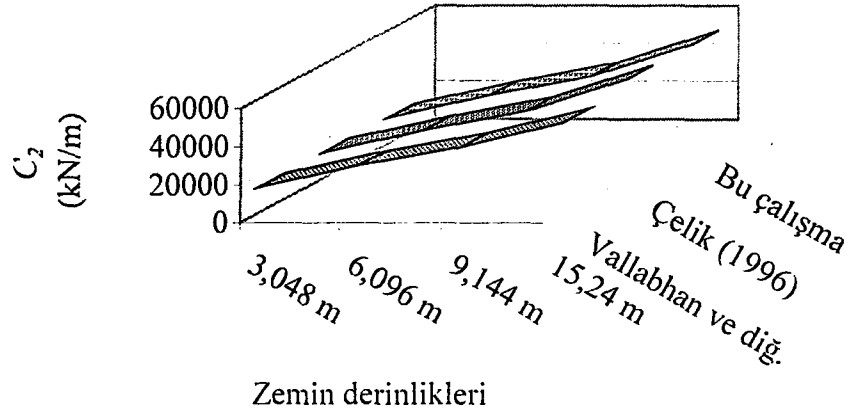


Şekil 5.5 Tekil Yükleme Durumunda Zemin Yüzey (γ) Parametresinin Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi

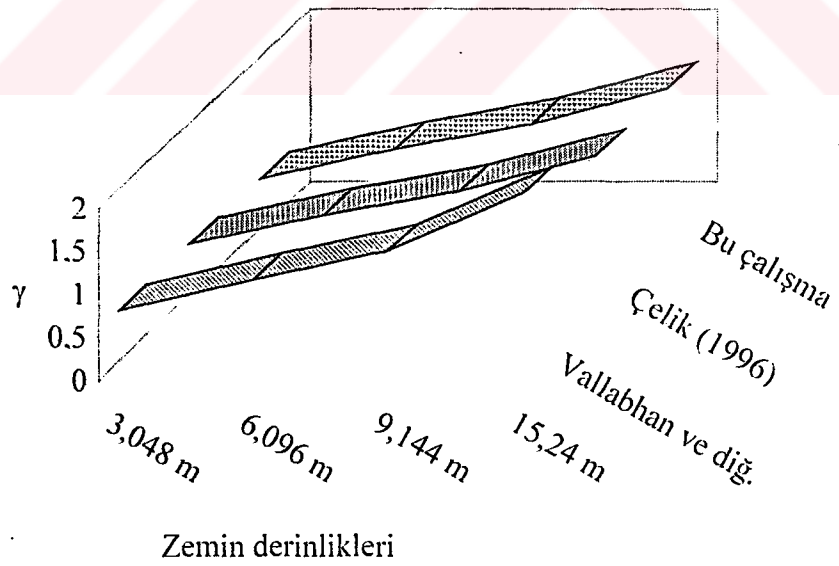
Zemin parametrelerinin (C_1 , C_2 ve γ), yayılı yükleme (q) durumunda farklı zemin derinlikleri için Vallabhan ve diğ. (1991), Çelik (1996) ve bu çalışmada aldıkları sonuçlara göre değişimleri Şekil 5.6, 5.7 ve 5.8 de verilmiştir.



Şekil 5.6 Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Yataklanma Parametresinin (C_1) Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi



Şekil 5.7 Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Kayma Parametresinin (C_2) Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi



Şekil 5.8 Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Yüzey Parametresinin (γ) Farklı Zemin Derinlikleri İçin Değişimi

ÖRNEK 2:

Straughan (1990) iki parametrelili zemine oturan izotrop plağın analizini sonlu farklar metodu (SFM) kullanarak yapmıştır. Daloğlu (1992) de bu analiz sonlu elemanlar metodu (SEM) kullanarak yapmıştır. Bu çalışmada ise karışık sonlu elemanlar metodundan (KSEM) yararlanılarak bulunacak sonuçlar yukarıda sayılan kaynaklarla karşılaştırılacaktır..

Plak geometrisi, x doğrultusunda $2a_x=9.144$ m, y doğrultusunda $2a_y=12.192$ m olup kalınlığı 0.1524 m dir. Homojen izotrop plağın elastisite modülü $E=20736000$ kN/m² ve Poisson oranı $\nu=0.20$ dir. Zemin bölgesi için; elastisite modülü, zemin derinliğince sabit olup değeri $E_s=6912$ kN/m², Poisson oranı $\nu_s=0.25$ dir. Sonlu zemin ortamında, zemin tabakası kalınlığı $H=6.096$ m dir. Bu çalışmada, plağın bulunduğu zemin bölgesi olarak plak kenarlarından x doğrultusunda $b_x=9.144$ ve y doğrultusunda $b_y=12.192$ m mesafe içinde kalan alan seçilmiştir.

Plak üzerinde iki tür yükleme yapılmıştır; plak simetri merkezine düşey aşağı etkiyen $P=133.34$ kN şiddetinde tekil yükleme ve plak üzerinde düzgün yayılı olan $q=24$ kN/m² şiddetinde yüzeysel yükleme.

Plak ve zemin bölgelerinin ve yüklemenin simetrik olması nedeniyle hesaplamalarda tüm sistem yerine ¼ lük parça dikkate alınmıştır (Bakınız Şekil 5.1 ve Şekil 5.2).

Bu çalışmada ¼ lük kısımda 15×15 lik bir eleman ağı geçirilmiştir. Plak bölgesinde 10×9 eleman kullanılmıştır. Karışık sonlu elemanlar kullanılarak oluşturulan model kullanılarak elde edilen sonuçlar Straughan (1990) ve Daloğlu (1992) deki sonuçlar ile karşılaştırılması Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 de yapılmıştır.

Tablo 5.3 Tekil Yükleme Durumunda Zemin Karakteristik Parametreleri Değerleri

	Straughan (1990) (SFM)	Daloğlu (1992) (SEM)	Bu Çalışma (KSEM)
C_1 (kN/m ³)	1557.10	1557,10	1563,70
C_2 (kN/m)	1954,43	1954,24	1956,40
γ	1,8401	1,84	1,8477

Tablo 5.4 Yayılı Yükleme Durumunda Zemin Karakteristik Parametreleri Değerleri

	Straughan (1990) (SFM)	Daloğlu (1992) (SEM)	Bu Çalışma (KSEM)
C_1 (kN/m ³)	1374,33	1373,19	1377,80
C_2 (kN/m)	2527,60	2536,80	2537,00
γ	0,9017	0,8845	0,9007

Bu çalışmada geliştirilen bilgisayar modeli çözümlerinin, literatürde bulunan sonlu farklar metodu (SFM) ve sonlu elemanlar metodu (SEM) ile yapılan çözümlerin oldukça yakın olduğu görülmektedir.

5.2 TEKİL YÜK VE DÜZGÜN YAYILI YÜKLÜ PLAK VE DOĞRUSAL DEĞİŞEN ELASTİSİTE MODÜLLÜ ZEMİN SİSTEMİ İÇİN İKİ PARAMETRE HESABININ DOĞRULANMASI

ÖRNEK 3:

Daloğlu (1992) de ele alınan problemde, plak bölgesi için yapılan tanımlama; x doğrultusunda $2a_x=9.144$ m, y doğrultusunda $2a_y=12.192$ m, kalınlığı 0.1524 m olan, elastisite modülü $E=20736000$ kN/m², Poisson oranı $\nu=0.20$ olan izotropik dikdörtgen olarak yapılmıştır. Plakın üzerine oturduğu sonlu zemin bölgesi için: Poisson oranı $\nu_s=0.25$ ve elastisite modülü ise zemin derinliğince lineer değişken varsayılarak, $E_{s-alt}/E_{s-üst}$ oranı 3, 5 ve 10 olacak şekilde, zemin üst tabakası için $E_s|_{z=0}=6912$ kN/m² kabul edilmiştir. Sonlu zemin bölgesi için plak kenarlarından x doğrultusunda $b_x=9.144$ ve y doğrultusunda $b_y=12.192$ m mesafe içinde kalan ve derinliği $H=9.144$ m olan bölge seçilmiştir.

Plak bölgesine etkiyen dış yükleme iki adettir. Bunlar plak simetri merkezine etkiyen $P=133.34$ kN luk tekil yük ve plak yüzeyinde $q=24$ kN/m² şiddetinde düzgün yayılı yüzeysel yüklemedir.

Plak-Zemin bölgesinin ve yüklemelerin simetrik olmasından dolayı hesaplamalarda tüm sistem yerine sistemin ¼ lük kısım dikkate alınmıştır (Bakınız Şekil 5.1 ve Şekil 5.2).

Karışık sonlu elemanlar modellemesi (KSEM) yaparken 15×15 lik eleman ağı kullanılmıştır. Plak bölgesi olarak 10×9 luk bir kısma yerleştirilirken, zemin bölgesi, plak bölgesinden daha geniş bir alanda yer almıştır (Bakınız Ek 1 ve 2).

Daloğlu(1992) ile burada hesaplanan sonuçların karşılaştırılmaları tekil yükleme durumunda Tablo 5.5 de, yayılı yükleme durumunda ise Tablo 5.6 da verilmiştir.

Tablo 5.5 Zemin Elastisite Modülünün Zemin Derinliğince Lineer Değişken olması halinde elde edilen Zemin Parametreleri (Tekil Yükleme Durumu)

$E_{s-alt} / E_{s-üst}$ oranları	Çalışmalar	C_1 (kN/m ³)	Fark (%)*	C_2 (kN/m)	Fark (%)*	γ	Fark (%)*
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 1$	Daloğlu (1992) (SEM)	1247.37	-0,06%	2330,03	-0,57%	2.5709	0,36%
	Bu çalışma	1248.1		2343,4		2.5617	
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 3$	Daloğlu (1992) (SEM)	1845.21	0,02%	2844,45	-0,99%	2.837	0,70%
	Bu çalışma	1844.9		2872.7		2.8172	
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 5$	Daloğlu (1992) (SEM)	2397.98	-0,01%	3287,06	-1,24%	3.0274	0,81%
	Bu çalışma	2398.3		3327,7		3.0028	
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 10$	Daloğlu (1992) (SEM)	3697.03	-0,10%	4210,7	-1,52%	3.3669	0,89%
	Bu çalışma	3700.6		4274,7		3.3371	

Tablo 5.6 Zemin Elastisite Modülünün Zemin Derinliğince Lineer Değişken olması halinde elde edilen Zemin Parametreleri (Yayılı Yükleme Durumu)

$E_{s-alt} / E_{s-üst}$ oranları	Çalışmalar	C_1 (kN/m ³)	Fark (%)	C_2 (kN/m)	Fark (%)*	γ	Fark (%)*
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 1$	Daloğlu (1992) (SEM)	937.17	-0,05%	3574,69	0,28%	1.1538	-1,90%
	Bu çalışma	937.6		3564,7		1.1757	
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 3$	Daloğlu (1992) (SEM)	1681.99	0,31%	5125,59	0,43%	1.2105	-1,90%
	Bu çalışma	1676.74		5103,7		1.2335	
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 5$	Daloğlu (1992) (SEM)	2413.23	0,47%	6670,17	0,51%	1.2364	-1,92%
	Bu çalışma	2401.8		6635,9		1.2601	
$E_{s-alt} / E_{s-üst} = 10$	Daloğlu (1992) (SEM)	4223.83	0,65%	10519,65	0,63%	1.2658	-1,95%
	Bu çalışma	4196.3		10452,9		1.2905	

Bu çalışmada oluşturulan bilgisayar programı kullanılarak bulunan sonuçların Daloğlu(1992) deki sonuçlara göre: tekil yüklemede: zemin yataklanma parametresi

* Fark (%)=(Daloğlu-Bu Çalışma)/Bu Çalışma

(C_1) %0.01 ile %0.10, zemin kayma parametresi (C_2) %1.52 ile %0.57, zemin yüzey parametresi (γ) %0.36 ile %0.89 arasında değişmektedir. Yayılı yükleme durumunda ise zemin yataklanma parametresi (C_1) %0.05 ile %0.65, zemin kayma parametresi (C_2) %0.28 ile %0.63, zemin yüzey parametresi (γ) %1.92 ile %1.95 arasında değişmektedir.

Zemin elastisite modülü, zemin derinliğince lineer değişken olması durumunda oranı arttıkça zemin parametrelerinin değerlerinin arttığı Tablo 5.3 ve 5.4 de görülmektedir. Zemin elastisite modülünün lineer değişim oranı arttıkça, zemin yataklanma parametresi (C_1) in artışının, zemin kayma parametresi (C_2) ye göre daha hızlı olduğu Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 de görülmektedir.

5.3 ZEMİN ELASTİSİTE MODÜLÜNÜN DOĞRUSAL VE KUADRATİK DEĞİŞİYOR OLMASI HALİNDE ZEMİN PARAMETRELERİNİN DEĞERLERİ

ÖRNEK 3:

Daloğlu (1992) de, sabit zemin derinlikleri için zemin elastisite modülünün doğrusal değişimi hali için zemin parametrelerinin durumu incelenmiştir. Bu örnekte ise, zemin elastisite modülünün doğrusal ve kuadratik fonksiyon olması durumunda zemin parametrelerinin değişimiyle alınacaktır.

İncelenen problemde plak geometrisi ve malzeme sabitleri Örnek 1 deki verilerle aynıdır. Ancak zemin için elastisite modülü ifadesi zemin derinliğince doğrusal ve kuadratik fonksiyonlar olarak seçilmiştir (Bakınız 3.30 ve 3.33). Buna göre zemin Elastisite Modülünün zemin üst yüzeyinde $E_s|_{z=0} = 6192 \text{ kN/m}^2$, zemin alt yüzeyinde $E_s|_{z=H} = 2 \times 6192 = 12384 \text{ kN/m}^2$ değerlerini aldığı kabul edilmiştir. Dört farklı zemin derinliği H için 3.048 m, 6.096 m, 9.144 m ve 15.24 m olması durumları için zemin parametreleri değerleri hesaplanmıştır.

Homojen izotrop plağa etkiyen dış yükleme iki adet olarak belirlenmiştir. Plağın simetri merkezine düşey aşağı etkiyen $P = 133.34 \text{ kN}$ luk tekil yükleme ve plak üzerinde düzgün yayılı düşey aşağı yönde $q = 23.94 \text{ kN/m}^2$ lik yüzeysel yükleme.

Yüklemelerin ve sistemin simetrik olmasından dolayı hesaplamalarda $\frac{1}{4}$ lük kısmı incelenmiştir (Bakınız Şekil 5.1 ve 5.2).

(C_1) %0.01 ile %0.10, zemin kayma parametresi (C_2) %1.52 ile %0.57, zemin yüzey parametresi (γ) %0.36 ile %0.89 arasında değişmektedir. Yayılı yükleme durumunda ise zemin yataklanma parametresi (C_1) %0.05 ile %0.65, zemin kayma parametresi (C_2) %0.28 ile %0.63, zemin yüzey parametresi (γ) %1.92 ile %1.95 arasında değişmektedir.

Zemin elastisite modülü, zemin derinliğince lineer değişken olması durumunda oranı arttıkça zemin parametrelerinin değerlerinin arttığı Tablo 5.3 ve 5.4 de görülmektedir. Zemin elastisite modülünün lineer değişim oranı arttıkça, zemin yataklanma parametresi (C_1) in artışının, zemin kayma parametresi (C_2) ye göre daha hızlı olduğu Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 de görülmektedir.

5.3 ZEMİN ELASTİSİTE MODÜLÜNÜN DOĞRUSAL VE KUADRATİK DEĞİŞİYOR OLMASI HALİNDE ZEMİN PARAMETRELERİNİN DEĞERLERİ

ÖRNEK 3:

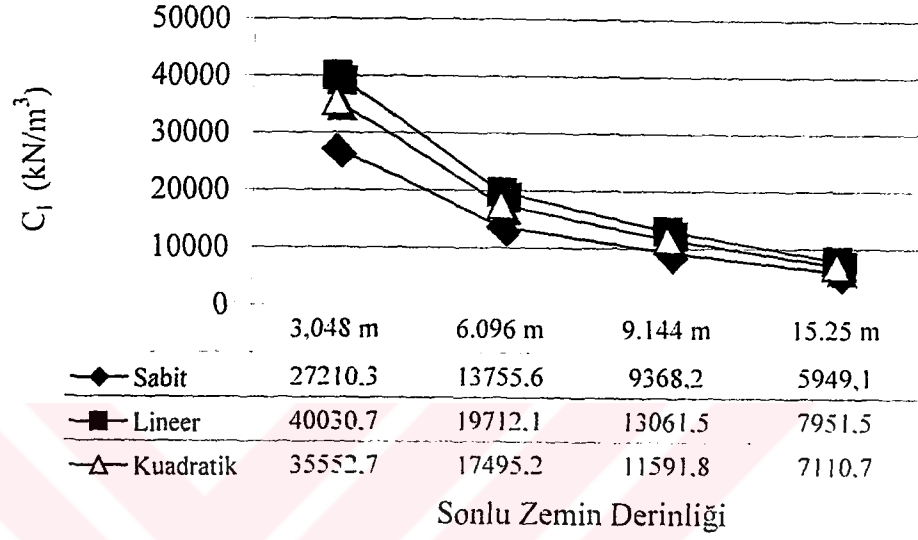
Daloğlu (1992) de, sabit zemin derinlikleri için zemin elastisite modülünün doğrusal değişimi hali için zemin parametrelerinin durumu incelenmiştir. Bu örnekte ise, zemin elastisite modülünün doğrusal ve kuadratik fonksiyon olması durumunda zemin parametrelerinin değişimieyle alınacaktır.

İncelenen problemde plak geometrisi ve malzeme sabitleri Örnek 1 deki verilerle aynıdır. Ancak zemin için elastisite modülü ifadesi zemin derinliğince doğrusal ve kuadratik fonksiyonlar olarak seçilmiştir (Bakınız 3.30 ve 3.33). Buna göre zemin Elastisite Modülünün zemin üst yüzeyinde $E_s|_{z=0} = 6192 \text{ kN/m}^2$, zemin alt yüzeyinde $E_s|_{z=H} = 2 \times 6192 = 12384 \text{ kN/m}^2$ değerlerini aldığı kabul edilmiştir. Dört farklı zemin derinliği H için 3.048 m, 6.096 m, 9.144 m ve 15.24 m olması durumları için zemin parametreleri değerleri hesaplanmıştır.

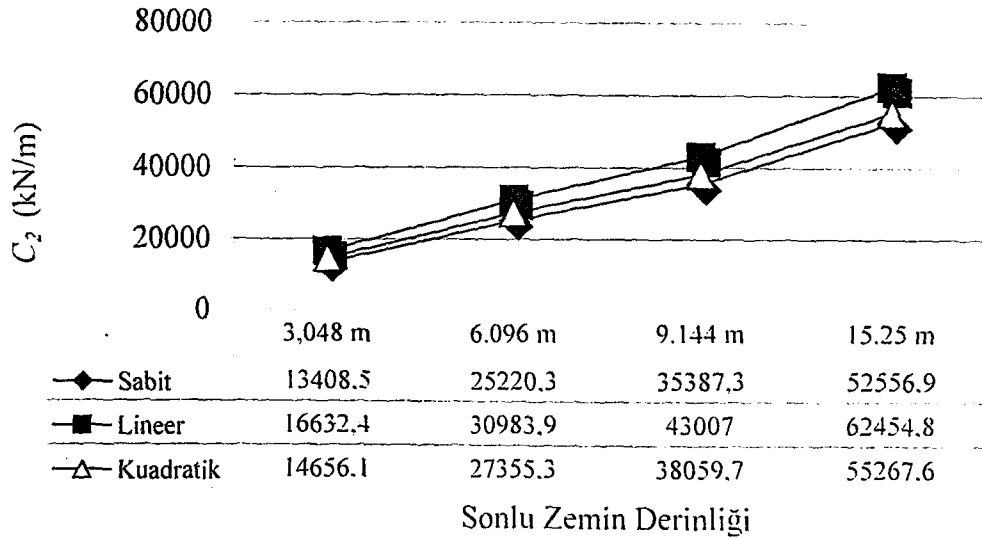
Homojen izotrop plağa etkiyen dış yükleme iki adet olarak belirlenmiştir. Plağın simetri merkezine düşey aşağı etkiyen $P = 133.34 \text{ kN}$ luk tekil yükleme ve plak üzerinde düzgün yayılı düşey aşağı yönde $q = 23.94 \text{ kN}$ luk yüzeysel yükleme.

Yüklemelerin ve sistemin simetrik olmasından dolayı hesaplamalarda $\frac{1}{4}$ lük kısmı incelenmiştir (Bakınız Şekil 5.1 ve 5.2).

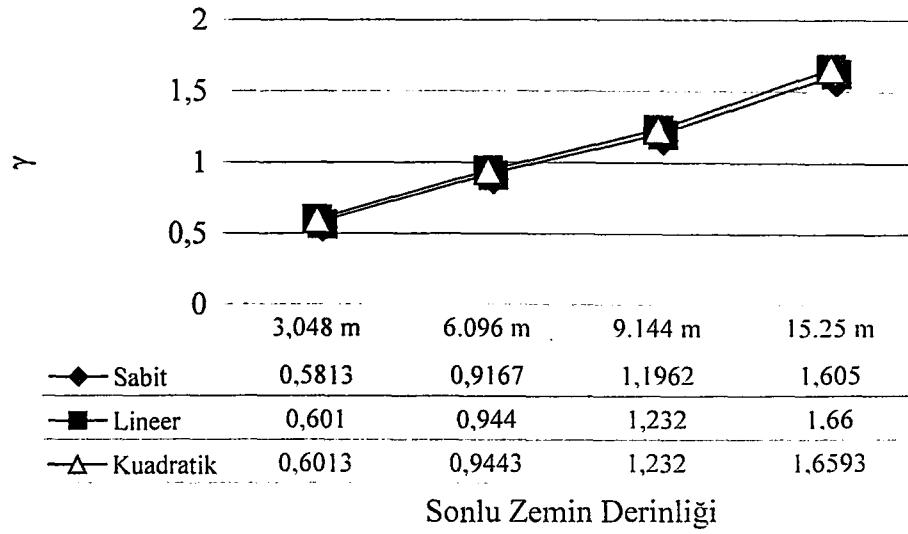
Zemin elastisite modülünün, zemin derinliğince sabit, doğrusal ve kuadratik değişiyor olması halleri için elde edilen zemin yataklanma (C_1), zemin kayma (C_2) ve zemin yüzey (γ) parametrelerinin farklı zemin derinlikleri (H_1) için tekil yükleme (P) durumunda aldıkları değerler Şekil 5.9, 5.10 ve 5.11 de verilmiştir.



Şekil 5.9 Düzgün Yayılı Yükleme ve Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) Değişimi

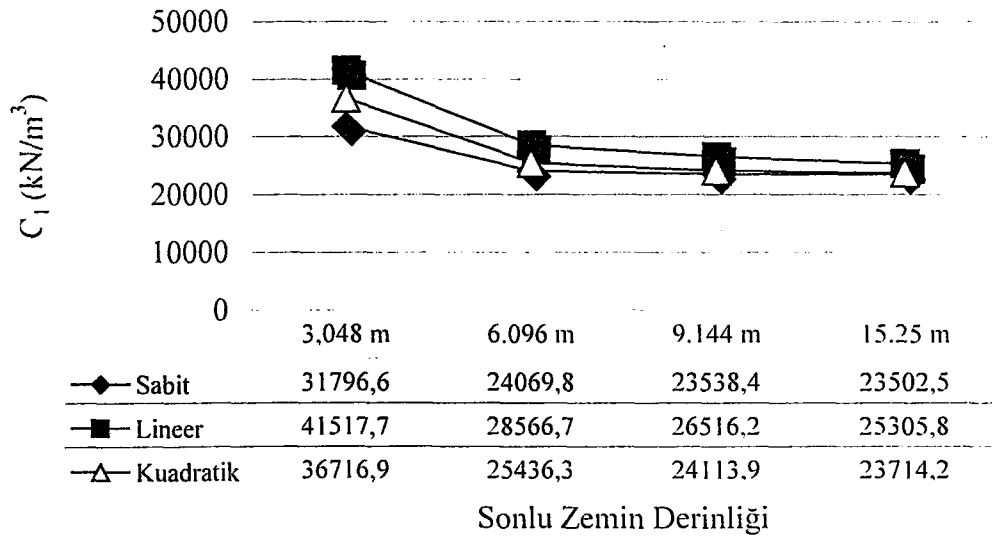


Şekil 5.10 Düzgün Yayılı Yükleme ve Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Kayma Parametresi (C_2) Değişimi

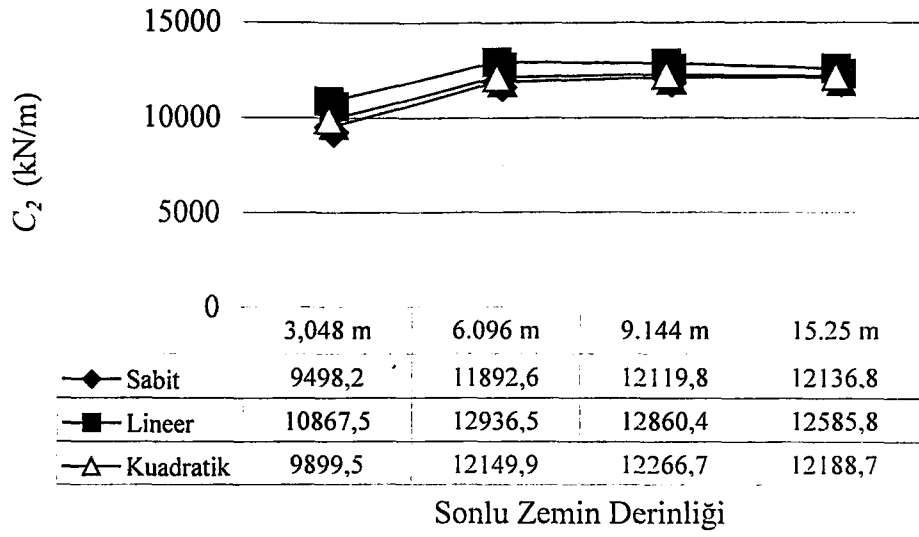


Şekil 5.11 Düzgün Yayılı Yükleme ve Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yüzey Parametresi (γ) Değişimi

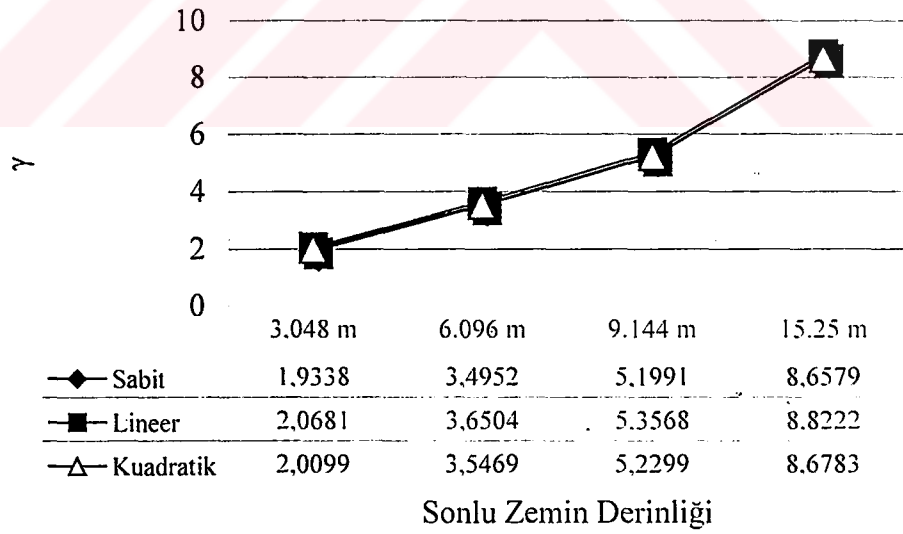
Zemin elastisite modülünün, zemin derinliğince sabit, doğrusal ve kuadratik değişiyor olması halleri için elde edilen zemin yataklanma (C_1), zemin kayma (C_2) ve zemin yüzey (γ) parametrelerinin farklı zemin derinlikleri (H) için yayılı yüklemeye (q) durumunda aldıkları değerler Şekil 5.12, 5.13 ve 5.14 de verilmiştir.



Şekil 5.12 Tekil Yükleme ve Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) Değişimi



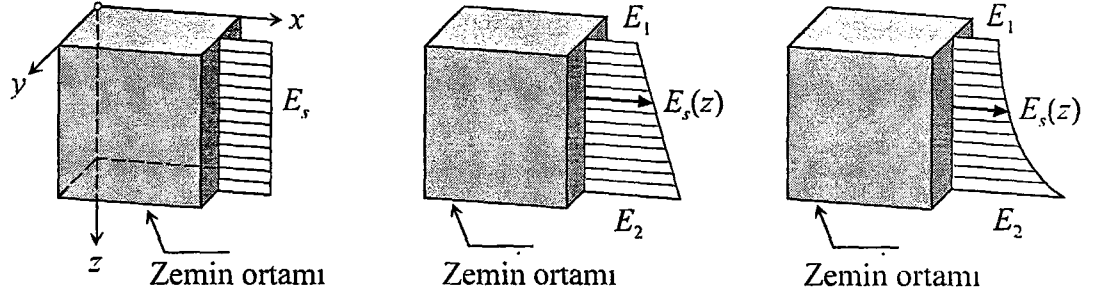
Şekil 5.13 Tekil Yükleme ve Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonunun Değişimi Durumunda Zemin Kayma Parametresi (C_2) Değişimi



Şekil 5.14 Tekil Yükleme Ve Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonel Değişimi Durumunda Zemin Yüzey Parametresi (γ) Değişimi

Zemin Elastisite Modülünün, zemin derinliğince sabit, doğrusal ve kuadratik değişim halleri için elde edilen zemin parametreleri değerleri, grafikler ile incelendiğinde: Kuadratik değişim durumundaki sonuçların, sabit ve doğrusal değişim durumundaki

sonuçların arasında değerler olduğu gözükmektedir. Bu durum elastisite modülünün değişimi için seçilen fonksiyonların grafikleri ile benzerlik göstermektedir. (Bakınız Şekil 5.15)



Şekil 5.15 Zemin Elastisite Modülünün Fonksiyonunun Değişimi

5.4 YAKINSAKLIK ÇALIŞMASI

Mühendislik problemlerinin sonlu elemanlar metodu (SEM) ile çözümlenmesinde kullanılan eleman ağı sonuçları üzerinde çok etkindir. Bu etkilenmeyi göstermek için örnek bir problem çeşitli eleman ağları kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

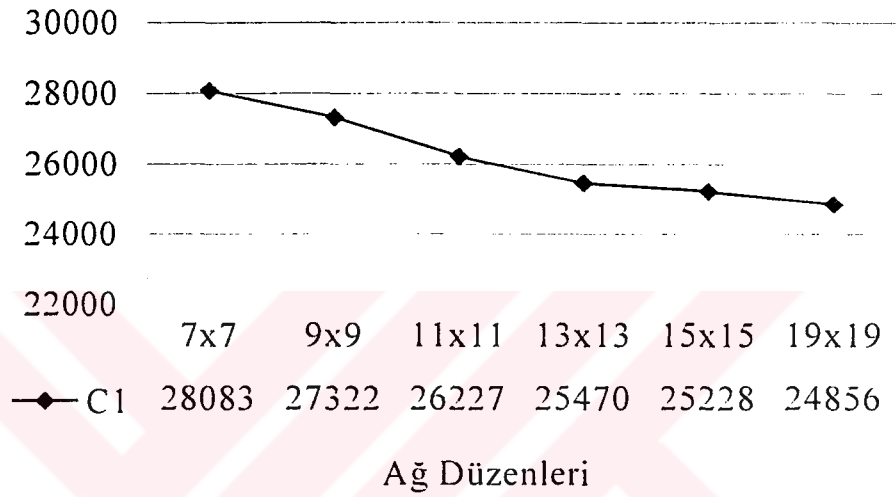
Örnek 1 de belirtilen problem çeşitli ağ düzenleri için çözülmüş ve ağ düzenlerinin değişimine göre zemin parametrelerinin değişimi incelenmiştir.

Yükleme ve sistemin geometrisinin simetrik olmasından dolayı çözümleme tüm bölge yerine çeyrek bölge üzerinde yapılmıştır. (Bakınız Şekil 5.1 ve Şekil 5.2).

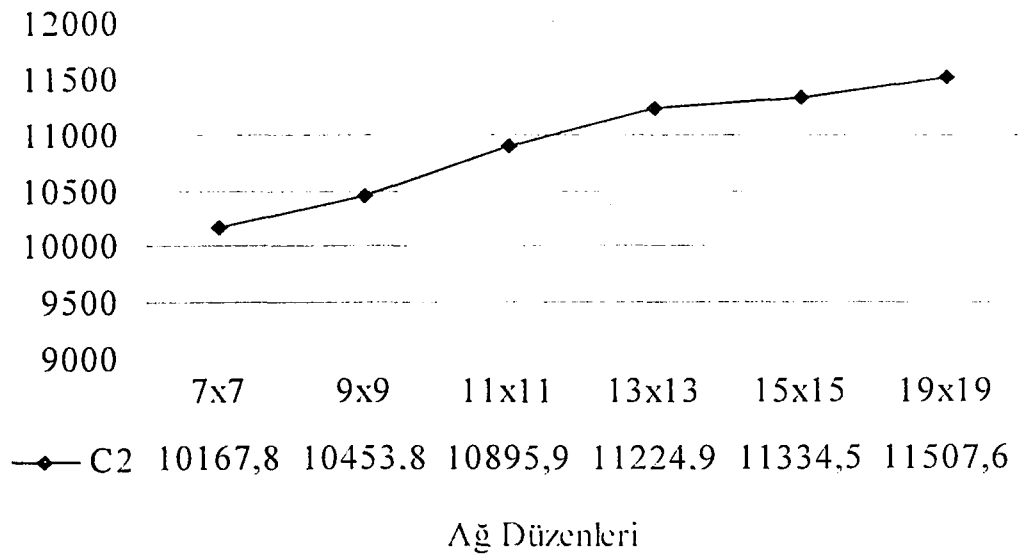
Çeyrek bölge üzerinde sırasıyla 7×7, 9×9, 11×11, 13×13, 15×15 ve 19×19 luk eleman ağları oluşturulmuştur. Her ağ düzeninde sıklaştırma yapılmadan elemanlar düzgün geometrilerde oluşturulmuştur. Plak-zemin sistemi üzerinde oluşturulan eleman ağ düzeninde plak bölgesi, zemin bölgesinden daha dar bir kısımda konumlandırıldığından dolayı plak bölgesinde tanımlanacak eleman sayısı tüm sistemin ¼ ü kadar olmasına dikkat edilmiştir. Zira plak ve zemin etkileşiminde plak bölgesi elemanları çözümlemede daha çok etkin olmaktadır. Plak bölgesinde kullanılan ağ düzeneğinde yayılı yüklemeler ve tekil yüklemeler durumlarına göre ağların sıklaştırılması ya da bollaştırılması söz konusudur. Tekil yüklemeler esnasında plaktaki

en büyük çökmeler simetri merkezine yakın bölgelerde olacağından dolayı çeyrek bölgesel plak parçasında köşe kısımlarda ağ sıkılaştırma yapılmalıdır. Bu sayede sistemin sonuçlarının yakınsaklığı sağlanmaktadır.

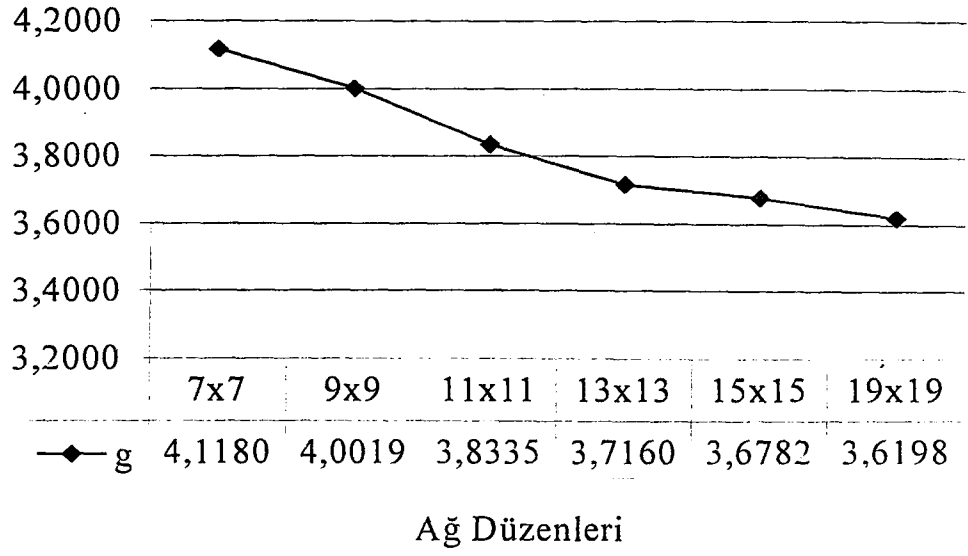
Çeşitli eleman ağlarının çeyrek bölge üzerinde oluşturulması ve tekil yükleme (P) durumunda yapılan hesaplamalardan çıkan sonuçlar Şekil 5.16, 5.17 ve 5.18 de sunulmuştur.



Şekil 5.16 Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri İçin Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Yakınsaması

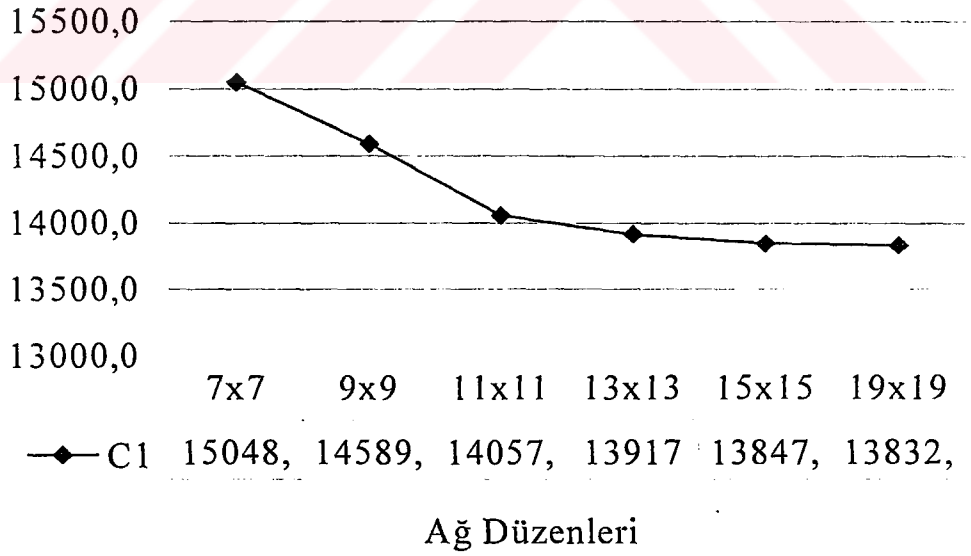


Şekil 5.17 Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri İçin Zemin Kayma Parametresi (C_2) in Yakınsaması

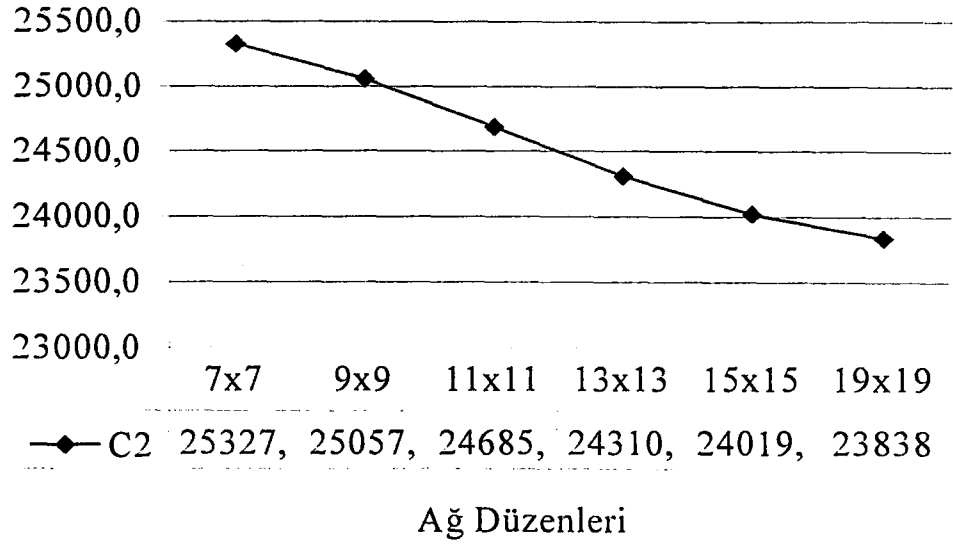


Şekil 5.18 Tekil Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri İçin Zemin YüzeY Parametresi (γ) in Yakınsaması

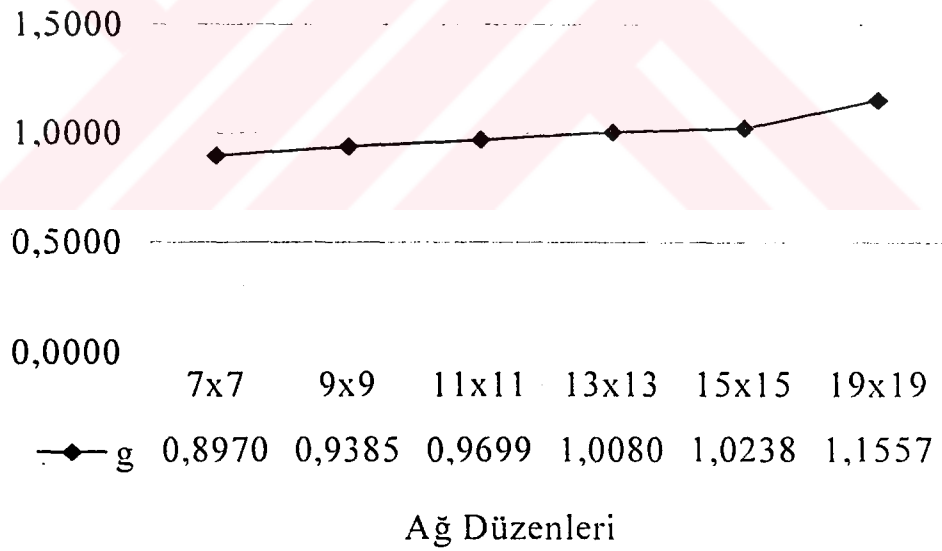
Çeşitli eleman ağlarının çeyrek bölge üzerinde oluşturulması ve yayılı yükleme (q) durumunda yapılan hesaplamalardan çıkan sonuçlar Şekil 5.19 5.20 ve 5.21 de sunulmuştur.



Şekil 5.19 Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri İçin Zemin Yataklanma Parametresi (C_1) in Yakınsaması



Şekil 5.20 Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri İçin Zemin Kayma Parametresi (C_2) in Yakınsaması



Şekil 5.21 Düzgün Yayılı Yükleme Durumunda Çeşitli Ağ Düzenleri İçin Zemin Yüzey Parametresi (γ) in Yakınsaması

Yakınsama çalışması yapılan örneklerde durumunda 15×15 lik eleman ağı ve 19×19 luk eleman ağı kullanılarak, tekil yükleme durumunda; zemin yataklanma parametresi (C_1) değerleri arasındaki fark %1.5, zemin kayma parametresi (C_2) değerleri arasındaki fark %1.5 ve zemin yüzey parametresi (γ) değerleri arasındaki fark %1.5. yayılı yükleme durumunda: zemin yataklanma parametresi (C_1) değerleri

arasındaki fark %0.01, zemin kayma parametresi (C_2) değerleri arasındaki fark %0.07 ve zemin yüzey parametresi (γ) değerleri arasındaki fark %0.11 olmaktadır. İncelenen problemde yapılan yakınsaklık çalışmasının sonucu olarak 15×15 lik eleman ağının yeterli olduğu görülmüştür.



BÖLÜM 6 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada iki parametrelili Vlasov elastik zemin modeline oturan homojen izotrop plak analizi için karışık sonlu elemanlar metodu kullanılarak bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Yöntem deneme-yanılma yolu ile zemin parametrelerinin hesabına dayanır. Bu parametreler zemin derinliğine (H), zemin elastisite modülüne (E_s), zemin Poisson oranına (ν_s) ve plak üzerindeki yükleme tipine (P, q) bağlıdır. Oluşturulan model ve bilgisayar programı kullanılarak elde edilen sonuçların geçerliliğini göstermek için daha önce başka araştırmacılar tarafından çeşitli sayısal yöntemlerle çözdükleri mühendislik problemleri incelenmiş ve sonuçlar mühendislik uygulamaları bakımından yeterli olduğu yargısına varılmıştır. (Örnek 1- Örnek 3 te görüldüğü gibi)

Kirchhoff-Love teorisine dayalı dörtgen plak karışık sonlu elemanında toplam 16 serbestlik dereceli (w çökmesi, K ve M eğilme momentleri, T burulma momenti), zemin elemanında toplam ise 4 serbestlik (w çökmesi) derecesine sahip 4 köşe düğüm noktalı dörtgen elemanlar kullanılmıştır.

Problemlerin çözümünden sonra aşağıdaki yargılara ulaşılmıştır.

1. Oluşturulan model ve bilgisayar programı literatürde mevcut çeşitli problemler ile karşılaştırıldığında geçerli sonuçlar vermektedir. bu çalışmada kullanılan Karışık Sonlu Elemanlar Metodunun literatürde var olan diğer modellere göre doğruluğu Sayısal Örnek 2 de gösterilmiştir.
2. Kullanılan ağ düzeneğinin, özellikle tekil yükleme durumunda, sonuçlara oldukça etkili olduğu görülmüştür. Bundan dolayı ağ düzeninde tekil yükleme durumunda yükün bulunduğu yer etrafında bir sıkılaştırma yapılmıştır (bakınız Ek 1 ve Ek 2). Yayılı yükleme durumunda ise eleman ağları eşit aralıklarla yer almıştır.
3. Sonlu zemin ortamı için zemin yataklanma (C_1) ve zemin kayma (C_2) parametreleri ifadeleri deneme-yanılma yöntemlerle çıkartılmıştır. Vlasov zemin parametreleri, zemin elastisite modülüne, poisson oranına, zemin derinliğine ve plak

üzerindeki yükleme türüne bağlıdır (bakınız Tablo5.1, 5.2, 5.5, 5.6 ve Şekil 5.9-5.14).

4. Zemin elastisite modülü bir fonksiyon olarak tanımlandığında duruma ait zemin parametreleri için gerekli formülasyon kullanılarak kuadratik değişime ait bağıntılar çıkartılmıştır. Bilgimiz dahilinde 3.28, 3.29, 3.31, 3.32, 3.34, 3.35 bağıntıları özgündür. Literatürde zemin elastisiteme modülü sabit ve lineer olarak tanımlaması hallerine ait çalışmalarla karşılaşılmıştır. Bu çalışmada özgün bir örnek olarak zemin elastisite modülü zemin derinliğince kuadratik değişken olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlama sonucunda elde edilen değerlere göre aşağıdaki yargılara ulaşılmıştır.

a. Zemin yataklanma parametresi (C_1), zemin derinliği arttıkça azalmaktadır. Zemin elastisite modülünün fonksiyon olarak tanımlanması durumunda kuadratik değişim değerleri, sabit ve doğrusal değişim durumundak değerlerin arasında kalmaktadır (Bakınız Şekil 5.9 ve Şekil 5.12).

b. Zemin kayma parametresi (C_2) ve Zemin yüzey parametresi (γ), zemin derinliği arttıkça artmaktadır. Zemin yataklanma parametresi (C_1) de olduğu gibi Kuadratik hali için elde edilen değerler, sabit ve doğrusal haller için elde edilen değerler arasında kalmaktadır (Bakınız Şekil 5.10, 5.11, 5.13 ve 5.14).

Bu çalışmada kullanılan ağ düzenin yeterliliğini göstermek için bir de yakınsama çalışması yapılmıştır. Bunun için Örnek 1 de belirtilen mühendislik problemi 7×7 , 9×9 , 11×11 , 13×13 , 15×15 ve 19×19 lik eleman ağlarına bölünmüştür. Yakınsama çalışması yapılan örneklerde durumunda 15×15 lik eleman ağı ve 19×19 luk eleman ağı kullanılarak, tekil yükleme durumunda; zemin yataklanma parametresi (C_1) değerleri arasındaki fark %1.5, zemin kayma parametresi (C_2) değerleri arasındaki fark %1.5 ve zemin yüzey parametresi (γ) değerleri arasındaki fark %1.5, yayılı yükleme durumunda; zemin yataklanma parametresi (C_1) değerleri arasındaki fark %0.01, zemin kayma parametresi (C_2) değerleri arasındaki fark %0.07 ve zemin yüzey parametresi (γ) değerleri arasındaki fark %0.11 olmaktadır. Daha geniş bir eleman ağı kullanıldığında zemin parametre değerlerinin yakınsaklık hızının artmasına rağmen bilinmeyen sayısı artmıyor olacaktır. Bundan dolayı yakınsaklık çalışmasının sonucu olarak bu çalışmada 15×15 lik eleman ağı kullanılmıştır.

Bu çalışmada gelinen son nokta itibarı ile yeni çalışmalara ilham vermek açısından řu soru sorulabilmektedir :Sonlu zemin ortamı için tabaka kalınlığı sabit yerine değişken alınması halinde zemiin parametreleri ve zemin st tabakasinda okme yüzeyi nasıl bir hal alırdı?



KAYNAKLAR

- Aköz, A.Y., Omurtag, M.H., ve Doğruoğlu, A.N., 1991. The mixed finite element formulation for three dimensional bars, *Int. J. Solids Structures*, **28**, 225-234.
- Altman, W., and Neto E. L., 1989. Stability of annular sectors and plates subjected to follower loads based on a mixed finite element formulation, *Computers & Structures*, **31**(6), 833-840.
- Altman, W., and Venancio-Filho, F., 1974. Stability of plates using a mixed finite element formulation, *Computers & Structures*, **4**, 437-443.
- Anderson, R.G., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., 1968. Vibration and stability of plates using finite elements, *Int. J. Solids Structures*, **4**, 1031-1055.
- Argyris, J.H., Fried, I., and Sharpf, D.W., 1968. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method, *Aeronautical J.*, R.Ae.S. **72**, 701-709.
- Azizian, G.A. and Dawe, D.J., 1985. Geometrically nonlinear analysis of rectangular Mindlin plates using the finite strip method, *Computers & Structures*, **21**(3), 423-436.
- Bathe, K.J., 1982. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall Inc., London.
- Benson, P.R., and Hinton, E., 1976. A tick finite strip solution for static, free vibration and stability problems, *Int. J. Numer. Mets. Engng.*, **10**, 665-678.
- Butlin, G.A., and Ford, R., 1968. A compotable triangular plate bending finite element, University of Leicester. Engineering Department Report 68-15.
- Cowper, G.R., Kosko, E., Lindenberg, G.M., and Olson, M.D., 1969. Static and dynamic application of high precision triangular plate bending element, *AIAA J.*, **7**, 1957-1965.
- Çelik, M., 1996. Plak sonlu elemanlarda kayma şekil değiştirmelerinin gözönüne alınması ve iki parametrelili zemine oturan plakların hesabı için bir yöntem, *İTÜ İNŞDR922ÇEL*
- Çelik, M. ve Saygun A., 1999. A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation, *Int. To Solid Structures*, **36**, 2891-2915
- Daloğlu, A.T. and Vallabhan, C. V. G., 2000. Values Of K For Slab On Winkler Foundation, *Journal of Geotechnical and Geoenviromental Eng.*, Vol 126, No.5, 463-471

- Dawe, D.J., and Roufaeil, O.L.,** 1982. Buckling of rectangular Mindlin plates, *Computers & Structures*, **15**(4), 461-471.
- Eller, C.,** 1990. Finite-element procedures for the stability analysis of non-linear, parametric excited shell structures, *Computers & Structures*, **35**(3), 259-265.
- Filonenko-Borodich, M. M.** 1940. Some approximate theories of the elastic foundation, (in Russian). *Uchenyie Zapiski Moscovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, **46**, 3-18.
- Herrmann, L.R.,** 1965a A bending analysis for plates. *Conference on matrix methods of structural mechanics*, WPAFB, Ohio, AFFDL TR66-80, 577-604.
- Herrmann, L.R.,** 1965b Finite element bending analysis for plates, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*. **93**, (EM5), 13-26.
- Jones, R.M., Xenophontos, j.,** 1977. The Vlasov Foundation Model, *Int. J. Mech. Sci.*, *Vol.19*, pp. 317-323.
- Karamanlidis, D. Prakash, V.,** 1998. Buckling And Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half-Space, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, *Vol. 16*, pp.1103-1114.
- Luo Ji-Wei,** 1982. A hybrid/mixed model finite element analysis for buckling of moderately thick plates. *Computers & Structures*. **15**. 359-364.
- Martins, R.A.F., and Owen, D.R.J.,** 1977. Structural instability and natural vibration analysis of thin arbitrary shells by the use of the semiloof element. *Int. J. Numer. Meths. Engng.* **11**, 481-498.
- Mindlin, R. D.,** 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* **18**. 31-38..
- Mizusawa, T., Kajita, T., and Naruoka, M.,** 1980. Vibration and buckling analysis of plates of abruptly varying stiffness, *Computers & Structures*. **12**. 689-693.
- Nogami, T., O'Neil, M.W.,** 1985. Beam on Generalized Two Parameter Foundation, *Journal of Engineering Mechanics*. *Vol. 111*, No:5, pp. 664-679.
- Nogami, T., Lam, Y.C.,** 1987. Two Parameter Layer Model for Analysis of Slabs on Elastic Foundation, *Journal of Engineering Mechanics*, *Vol.113*, no.9, pp. 1279-1291.
- Oden, J.D., and Reddy, J.N.,** 1976. Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer. Berlin.
- Omurtag, M.H., and Aköz, A.Y.,** 1992. Mixed finite element formulation of eccentrically stiffened cylindrical shells. *Computers & Structures*, **42**(5), 751-768
- Omurtag, M.H., and Aköz, A.Y.,** 1993a. A compatible cylindrical shell element for stiffened cylindrical shells in mixed finite element formulation, *Computers & Structures*. **49**(2), 363-370.

- Omurtag, M.H., and Aköz, A.Y.,** 1993b. A new mixed finite element solution for thin cylindrical hollow shells, *Bulletin of the Technical University of Istanbul*. **46(4)**. 497-519
- Omurtag, M.H., and Aköz, A.Y.,** 1994. Hyperbolic paraboloid shell analysis via mixed finite element formulation, *Int. J Numer. Methods Eng.*, **37**. 3037-3056.
- Omurtag, M.H., and Aköz, A.Y.,** 1995. Isoparametric mixed finite element formulation of orthotropic cylindrical shells, *Computers & Structures*, **55(5)**, 915-924.
- Omurtag, M.H., and Kadioğlu F.,** 1998. Free vibration analysis of orthotropic plates resting on pasternak foundation by mixed finite element formulation. *Computers & Structures*, **67**, 253-265.
- Omurtag, M.H., Özütok A., Aköz, A.Y., and Özçelikörs Y.,** 1997. Free vibration analysis of kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential, *Int. J Numer. Methods Eng.*, **40**. 295-317.
- Özçelikörs Y., Omurtag, M.H., and Demir, H.,** 1997. Analysis of orthotropic plate-foundation interaction by mixed finite element formulation using Gâteaux differential, *Computers & Structures*, **62(1)**, 93-106.
- Pasternak, P.L.,** 1954. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants, (Rusça). *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, Russia*.
- Prager, W.,** 1968. Variational principles for elastic plates with relaxed continuity requirements. *Int. J. Solids Structures*, **4(9)**, 837-844.
- Razaqpur, A.G.,** 1986. Stiffness of Beam-Columns on Elastic Foundation with Exact Shaper Function, *Computers and Structures, Vol. 24, No.5, pp. 813-819*.
- Razaqpur, A.G., Shah, K.H.,** 1991. Exact Analysis of Beams on Two Parameters Elastic Foundation. *Solid Structures, Vol.27, No.4, pp.435-454*.
- Reddy, J.N.,** 1984. *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons, New York.
- Reddy, J.N.,** 1993. *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd Ed., McGraw-Hill. Inc.
- Reissner, E.,** 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, **12**, 69-77.
- Singh, G., and Sadasiva Rao, Y.V.K.,** 1988. Stability of thick angle-ply composite plates. *Computers & Structures*, **29(2)**. 317-322.
- Srinivas, R., and Rao A. K.,** 1969. Buckling of thick rectangular plates. *AIAA J.* **7**. 1645-1646.

- Tabarrok, B., Fenton, R.G. and Elsaie, A.M.,** 1974. Application of a refined plate bending element to buckling problems, *Computers & Structures*, **4**, 1313-1321.
- Timoshenko, S.P.G., and Goodier, J.N.,** 1971. Theory of elasticity, *McGraw-Hill Book Co. New York, N.Y.*
- Timoshenko, S., and Krieger, S.W.,** 1982. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill. New York.
- Ting, B.Y., Mockry, E.F.,** 1984. Beam on Elastic foundation Finite Element, *Journal of Structural Engineering*. Vol.110, No.10, pp. 2324-2339.
- Tong Liyong, Tabarrok, B., and Wang, T.K.,** 1992. Simple solutions for buckling of orthotropic conical shells, *Int. J. Solids Structures*, **29**(8), 933-946.
- Turhan, A.** (1992). A consistent vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method. *Dissertation Thesis, Texas Tech. University.*
- Vallabhan, C.V.G., Das, Y.C.,** 1988. Parametric study of beams of elastic foundations *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No 14, pp.2072-2082
- Vallabhan, C.V.G., Strarughan, W.T., and Das, Y.C.,** 1991. Refined model for analysis of plates on elastic foundation. *J Engineering Mech.*, **117** (12), 2830-2844
- Vallabhan, C.V.G., Daloğlu, A.T.,** 1999. Consistent FEM-Vlasov Model For Plates on Layered Soil, *Journal of Structural Eng.*, Vol. 125, No.1, 108-113
- Vlasov, Z.V.** 1949. Structural Mechanics of thin walled three dimensional systems. (*in Russian*), *Stroizdat.*
- Vlasov, V.Z., ve Leont'ev, N.N.,** 1966. Beams plates and shells on elastic foundations. Israel programme for Scientific Translations, *Tel Aviv.*
- Washizu, K.,** 1968. Variational methods in elasticity and plasticity, *Pagemon Press.*
- Weller, T.,** 1981. Combined effects of in-plane boundary conditions and stiffening on buckling of eccentrically stringer-stiffened cylindrical panels. *Computers & Structures*, **14**(5-6), 427-442.
- Winkler, E.** (1867). Theory of elasticity and strength. *H. Dominicus, Praque.*
- Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., and Ghaboussi, J.,** 1973. Incompatible Displacement Model, in *Fences, S.T. et al., Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, London, 43-57.
- Withum, D.,** 1966. Berechnung von Platten nach dem Ritzschen Verfahren mit Hilfe dreieckförmiger Maschennetze. *Institut für Statik der Technischen Hochschule Hannover.*

Zhaohua,F., Cook,R.D.,1983. Beam Element on Two-Parameter Elastic Foundation.
Journal of Engineering, Vol.109, No.6, pp. 1390-1402.

Zienkiewicz, O.C., 1971. The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw Hill, London.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., and Too, J.M., 1991. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **3.** 275-290.



Ek Listesi

Ek 1 15x15 ELEMEN AĞININ DÜZGÜN ARALIKLI HALİ

Ek 2 15x15 ELEMEN AĞININ SIKLAŞTIRILMIŞ HALİ

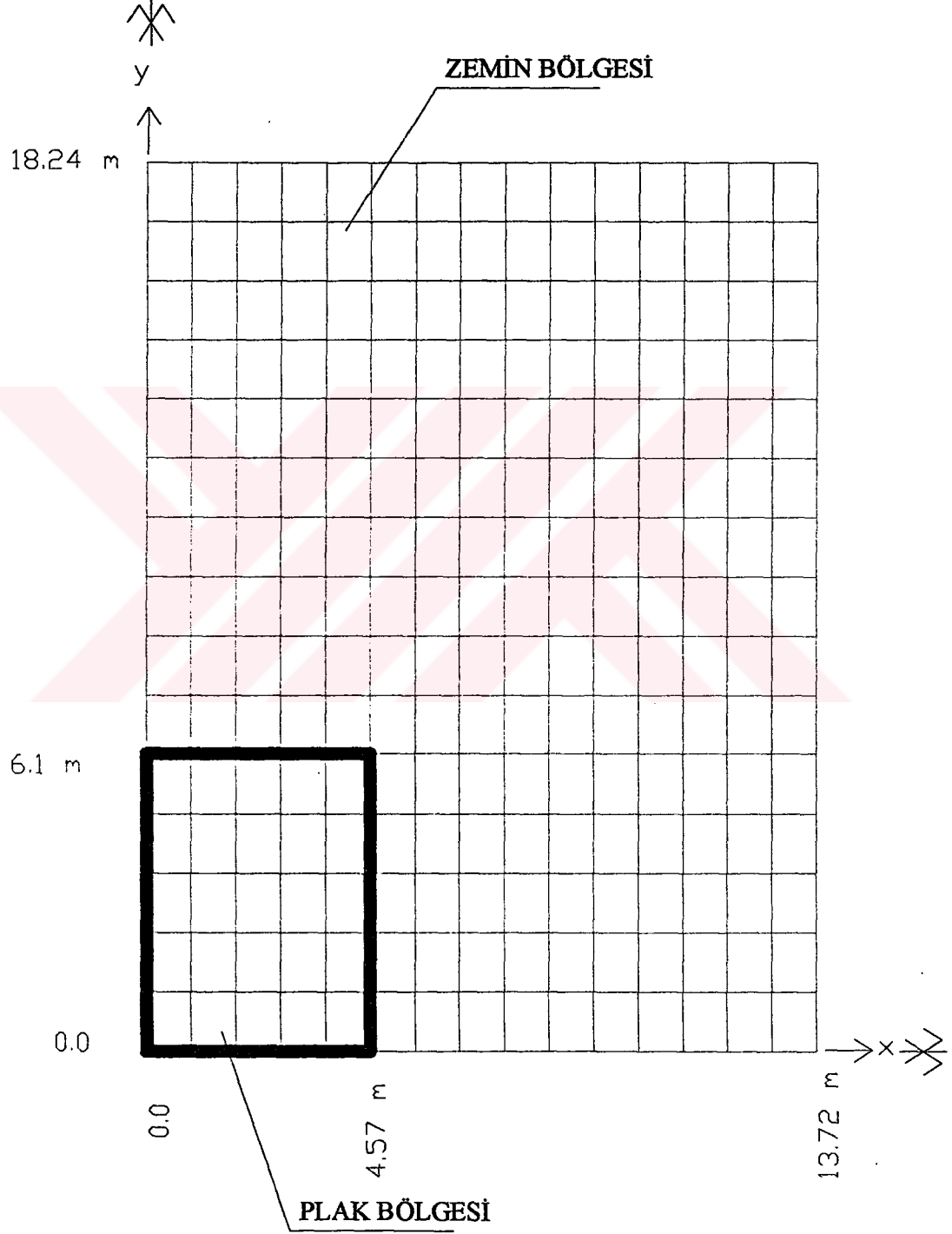
Ek 3 TEKİL YÜKLEME DURUMUNDA PLAK ÇÖKME YÜZEYİ

DÜZGÜN YAYILI YÜKLEME DURUMUNDA PLAK ÇÖKME YÜZEYİ



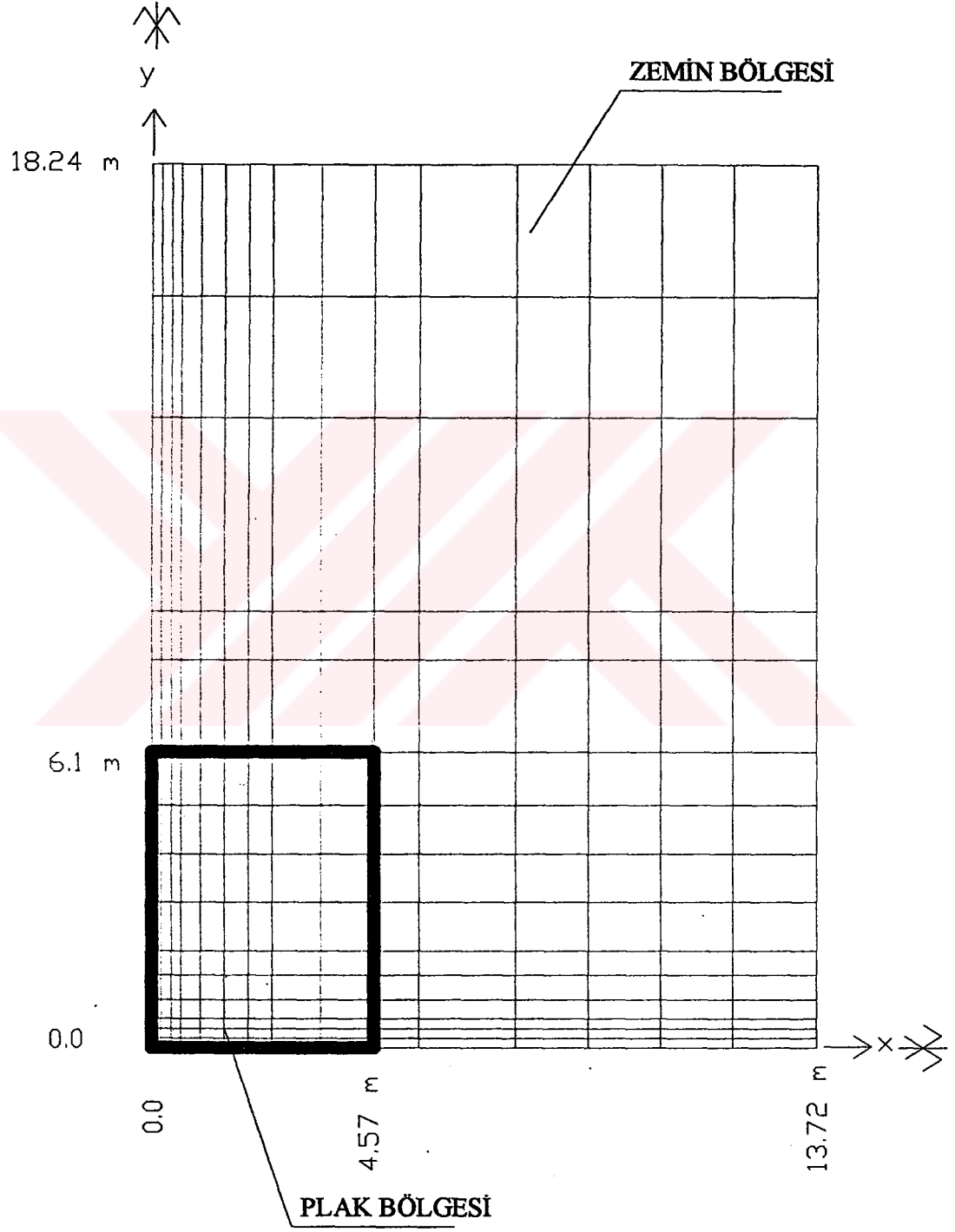
Ek 1

15x15 ELEMAN AĞININ DÜZGÜN ARALIKLI HALİ

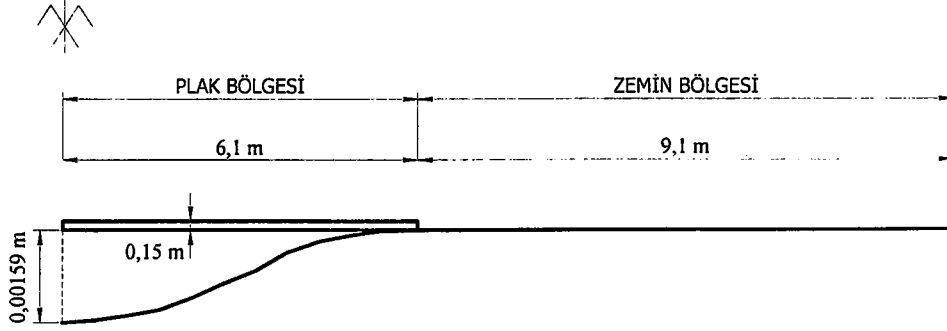


Ek 2

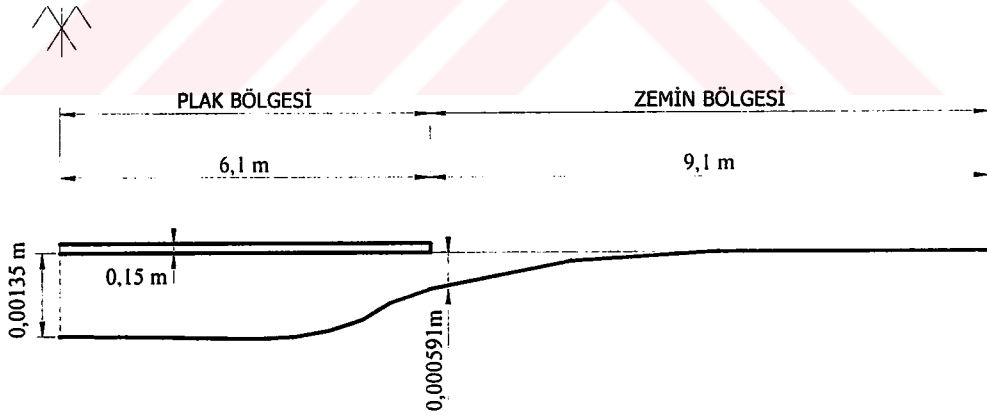
15x15 ELEMAN AĞININ SIKLAŞTIRILMIŞ HALİ



TEKİL YÜKLEME DURUMUNDA PLAK ÇÖKME YÜZEYİ



DÜZGÜN YAYILI YÜKLEME DURUMUNDA PLAK ÇÖKME YÜZEYİ



ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Anıl DİNDAR, 1977 yılında Erzurum'da doğdu. İlköğrenimini Samsun Gülsüm Sami Kefeli İlkokulunda. ortaokulu Samsun İlkadım Ortaokulu'nda. liseyi Samsun 19 Mayıs Lisesi'nde bitirdir. 1999 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümünden mezun oldu. Halen İstanbul Kültür Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.



TC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
EĞİTİM BAKANLIĞI