



**SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ VE
UYGULAMALARI**

Hakan ŞAHİN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2019

Hakan ŞAHİN tarafından hazırlanan “SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ VE UYGULAMALARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Başkan: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Prof. Dr. İshak ALTUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 17/01/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hakan ŞAHİN

17/01/2019

SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI GENELLEŞTİRMELERİ VE
UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

Hakan ŞAHİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Uygulanabilirliğinden dolayı Banach Büzülme İlkesi matematiğin yanı sıra diğer bilim dallarında da oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu tez çalışmasında öncelikle tek değerli dönüşümler, ardından da küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri verilerek Banach Büzülme İlkesi literatürde var olan çalışmalardan farklı yönlerde genişletilmiştir. Bunun için yakın zamanda tanımlanan M-metrik uzay üzerinde Caristi tipi büzülme dönüşümü tanımlanarak bu tek değerli dönüşümler ve bazı genelleştirilmiş Caristi tipi dönüşümleri için sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Diğer taraftan M-metrik uzay üzerindeki topolojik yapılar incelenerek bu topolojilere göre küme değerli dönüşümler için Feng-Liu tipi sabit nokta teoremi verilmiştir. Çalışmamızı bir üst noktaya taşımak adına Feng-Liu'nun tekniklerini kullanarak küme değerli F-büzülme dönüşümü için iki yeni sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Çalışmamızın sonunda M-metrik uzay kavramı genişletilerek bu yeni uzayda tanımlı karma küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir. Ayrıca her bir bölümde elde edilen sonuçlar önemli örneklerle desteklenmiştir.

Bilim Kodu : 20405

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta, küme değerli dönüşüm, karma küme değerli dönüşüm, Caristi dönüşümü, F-büzülme

Sayfa Adedi : 64

Danışman : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

SOME GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS OF FIXED POINT THEOREMS

(Ph. D. Thesis)

Hakan ŞAHİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2019

ABSTRACT

Banach contraction principle has an important place in other branches of sciences as well as mathematics because of its applicability. In this thesis, Banach contraction principle is expanded in different directions from existing studies in literature by giving some fixed point theorems for the single valued mappings followed by for multivalued mappings. For this purpose, Caristi type contraction mapping concept on M-metric space recently defined is described and fixed point theorems for this single valued mappings and some generalized Caristi mappings are expressed and proved. On the other hand, topological structures on M-metric spaces are examined and then Feng-Liu type fixed point theorems are given for multivalued mappings according to these topologies. To carry our search to higher point, two new fixed point theorems multivalued F-contraction mappings are obtained by using Feng-Liu's techniques. At the end of our thesis, M-metric space concept is extended and some fixed point theorems are given for the mixed multivalued mappings on this new space. In addition, the results obtained in each section are supported nontrivial examples.

Science Code : 20405

Key Words : Fixed point, multivalued mapping, mixed multivalued mapping, Caristi mapping, F-contraction

Page Number : 64

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren tez danışmanım Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na ve bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen Prof. Dr. İshak ALTUN' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca bana burs veren TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumuna), benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim eşim ve kızıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Temel Tanımlar	3
2.2. Temel Teoremler	6
3. TEK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	11
3.1. M -Metrik Uzaylarda Caristi Tip Sabit Nokta Teoremleri.....	11
3.2. Caristi Sabit Nokta Teoreminin M -Metrik Uzaylardaki Bazı Genelleştirmeleri	17
4. KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	21
4.1. M -Metrik Uzaylarda Feng-Liu Tip Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri	21
4.2. M -Metrik Uzaylarda Küme Değerli F -Büzülme Dönüşümleri İçin İki Sabit Nokta Teoremi	31
4.3. M_b -Metrik Uzaylarda Karma Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri	42
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$P(X)$	X 'in bütün alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{C}(X)$	X 'in kapalı bütün alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X 'in kapalı ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi
τ_m	M -metriğin ürettiği topoloji
τ_s	Dizisel topoloji
τ_{m_b}	M_b -metriğin ürettiği topoloji
$\mathcal{C}_m(X)$	τ_m 'e göre X 'in bütün kapalı alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{C}_s(X)$	τ_s 'e göre X 'in bütün kapalı alt kümelerinin ailesi
p_m	M -metrik tarafından üretilen kısmi metrik
d_{p_m}	p_m kısmi metrik tarafından üretilen metrik
$\overline{A^m}$	τ_m topolojisine göre $A \subseteq X$ 'nin kapanışı
$\overline{A^s}$	τ_s topolojisine göre $A \subseteq X$ 'nin kapanışı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$	$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisinin üst limiti
$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$	$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisinin alt limiti

1. GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $Tx = x$ olacak şekildeki $x \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktası olarak adlandırılır. Diğer taraftan T küme değerli bir dönüşüm ise yani, $P(X)$ ailesi X 'in boştan farklı bütün altkümelerinin ailesi olmak üzere $T: X \rightarrow P(X)$ olacak şekildeki T dönüşümü için $x \in Tx$ olacak şekildeki $x \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktası olarak adlandırılır. Lineer olmayan bir integral denklemin veya birinci mertebeden periyodik bir diferensiyel denklemin çözümlerinin varlığını gösterirken sabit nokta teorisi kullanıldığı gibi stratejik oyunlarda Nash dengesinin varlığı için gerekli durumların hesaplanmasında da sabit nokta teoriden faydalanılabilir. Bu nedenle sabit nokta teori matematiğin yanı sıra diğer alanlarda da önemli uygulama ve çalışma alanlarına sahiptir. Bu anlamda en iyi bilinen ve metrik uzaylarda sabit nokta teoreminin başlangıcı olarak kabul edilen sonuç Banach Büzülme İlkesidir:

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ var ise T dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.

Banach, 1922 yılında tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir[1]. Ardından çok sayıda bilim insanı tarafından bu ilkenin birçok genelleştirmesi ifade edilmiştir[2-6]. Bu kimi zaman çok çeşitli genelleştirilmiş metrik uzaylar kimi zaman da farklı tipte büzülme dönüşümleri ile sağlanmıştır. Bu bağlamda Caristi tarafından tanımlanan Caristi dönüşümü ile Banach büzülme ilkesini genişleten ve sabit nokta teori için çok önemli sonuçlardan biri elde edilmiştir[7]. Ran ve Reuring, kısmi sıralı metrik uzay kavramını tanımlayarak büzülme dönüşümü üzerindeki koşulu zayıflatmış ve sonuçlarını matris denklemlere uygulamışlardır [8]. Diğer taraftan Wardowski belirli özelliklere sahip $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını kullanarak F -büzülme dönüşümünü tanımlamış ve bu dönüşüm ile yeni bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Bu F fonksiyonlarının $\mathcal{F}$ ailesini tanımlamış böylece Banach büzülme ilkesi de dahil olmak üzere literatürde iyi bilinen büzülmeleri elde etmiştir[9]. Son zamanlarda standart metrik uzaylar, M -metrik uzaylar ve hatta M_b -metrik uzaylara

genişletilerek bu uzaylarda tek değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir[10-13]. Tek değerli dönüşümler için yapılan bu çalışmalar dışında ilk olarak 1941 yılında Kakutani tarafından sonlu boyutlu Banach uzaylarında küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisi çalışılmıştır[14]. Ardından bu çalışma 1950 yılında Bohnenblust ve Karlin tarafından sonsuz boyutlu Banach uzaylarına genişletilmiştir[15]. Metrik uzaylarda ise küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisinin ilk çalışması Nadler tarafından küme değerli büzülme dönüşümü tanımı verilerek yapılmıştır. (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X nin bütün kapalı ve sınırlı altkümelerinin ailesi olmak üzere her $A, B \in CB(X)$ için,

$$H : CB(X) \times CB(X) \rightarrow [0, \infty), H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm Hausdorff metriği olarak adlandırılır. $T: X \rightarrow CB(X)$ küme değerli bir dönüşüm olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için, $H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $0 \leq \lambda < 1$ var ise T ye küme değerli büzülme dönüşümü denir. Nadler, 1969 yılında tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı her küme değerli büzülme dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir[16]. Nadler'in ardından Reich, önce X 'in boştan farklı kompakt altkümeleri olan $K(X)$ ailesi ve $k: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ şeklinde tanımlı her $t \in (0, \infty)$ için $\limsup_{r \rightarrow t^+} k(r) < 1$ özelliğine sahip k fonksiyonunu göz önüne alarak $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $H(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))d(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan $T: X \rightarrow K(X)$ dönüşümünün sabit noktasının varlığını göstermiş ardından $K(X)$ ailesi yerine $CB(X)$ alındığında aynı eşitsizliği sağlayan T dönüşümü için sonucun geçerli olup olmadığını incelemiştir. Mizoguchi ve Takahashi ise her $t \in [0, \infty)$ için $\limsup_{r \rightarrow t^+} k(r) < 1$ koşulu altında Reich'in sorusuna pozitif cevap vermiştir [17-19]. Ancak Feng ve Liu, Nadler'in sonucunu Hausdorff metriği kullanmadan literatürdeki diğer çalışmalardan çok farklı bir yönde genişletmişlerdir [20].

Bu tez çalışmasında öncelikle M -metrik uzayları üzerinde Caristi dönüşümleri tanımlanmıştır. Ardından bu dönüşümler ve bazı genelleştirilmiş Caristi tipi dönüşümler için sabit nokta teoremleri elde edilmiş, böylece literatürde var olan çalışmalar genişletilmiştir. Ayrıca, M -metrik uzayları üzerinde tanımlı küme değerli dönüşümler ve küme değerli F-büzülme dönüşümleri için bazı Feng-Liu tipi sabit nokta teoremleri verilmiştir. Sonrasında ise M_b -metrik uzay kavramı tanımlanarak bu uzay üzerinde tanımlı karma küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım[10]

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$m1) m(x, y) = m(x, x) = m(y, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$m2) m_{xy} = \min\{m(x, x), m(y, y)\} \leq m(x, y)$$

$$m3) m(x, y) = m(y, x)$$

$$m4) m(x, y) - m_{xy} \leq (m(x, z) - m_{xz}) + (m(y, z) - m_{yz})$$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir M -metrik denir ve (X, m) ikilisine de M -metrik uzay denir. Tanımdan açıktır ki her standart metrik uzay ve her kısmi metrik uzay bir M -metrik uzaydır. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

2.1.2. Tanım

(X, m) bir M -metrik uzay, $(x_n) \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere,

i) (x_n) dizisinin x noktasına M -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) - m_{x_n x} = 0 \text{ olmasıdır.}$$

ii) Eğer (x_n) dizisi için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m)$ var ve sonlu ise bu diziyeye M -Cauchy dizisidir denir.

iii) Eğer (X, m) uzayında her M -Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına M -yakınsak ve

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = m(x, x) \text{ ise bu uzaya } M\text{-tamdır denir.}$$

2.1.3. Tanım[7]

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

olacak şekilde alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu varsa T 'ye Caristi dönüşümü denir.

2.1.4. Tanım[21, 22]

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda $C(X)$, X nin bütün kapalı altkümelerinin ailesi ve $CB(X)$ ise X nin bütün kapalı ve sınırlı altkümelerinin ailesi olmak üzere her $A, B \in C(X)$

için, $H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$ şeklinde tanımlanan

$H: C(X) \times C(X) \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü Hausdorff uzaklığı olarak adlandırılır. Burada eğer H dönüşümü $CB(X)$ üzerinde tanımlanırsa bir metrik ifade eder.

2.1.5. Tanım

X, Y boştan farklı kümeler ve $T: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda X 'in her elemanını Y 'nin bir elemanına eşleyen T dönüşümüne tek değerli dönüşüm denir.

2.1.6. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ tek değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $Tx = x$ olacak şekildeki $x \in X$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir.

2.1.7. Tanım

X, Y boştan farklı kümeler olsun. Bu durumda X 'in her elemanını Y 'nin bir alt kümesine eşleyen T dönüşümüne küme değerli dönüşüm denir ve $T: X \rightarrow P(Y)$ şeklinde gösterilir. Burada $P(Y)$, Y nin bütün alt kümelerinin ailesidir.

2.1.8. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow P(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $x \in Tx$ olacak şekildeki $x \in X$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir.

2.1.9. Tanım[23]

X, Y boştan farklı kümeler olmak üzere X 'in her bir elemanını ya Y 'nin bir elemanı ya da Y 'nin bir alt kümesi ile eşleyen dönüşüme, yani hem tek değerli hem de küme değerli bir dönüşüme karma küme değerli bir dönüşümdür denir ve $T: X \rightarrow Y \cup P(Y)$ şeklinde gösterilir.

2.1.10. Tanım

X bir topolojik uzay, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda eğer,

$$f(x_0) \leq \sup_{V \in U_{x_0}} \inf_{x \in V} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alt yarı sürekli bir fonksiyon ve eğer,

$$\inf_{V \in U_{x_0}} \sup_{x \in V} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında üst yarı sürekli bir fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında alt yarı sürekli (üst yarı sürekli) ise bu durumda f fonksiyonuna alt yarı sürekli (üst yarı sürekli) denir.

2.1.11. Tanım

X bir topolojik uzay, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekildeki her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında alt yarı sürekli bir fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında alt yarı sürekli ise bu durumda f fonksiyonuna alt yarı sürekli denir.

2.2. Temel Teoremler

2.2.1. Teorem (Banach Büzölme ilkesi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $k \in [0,1)$ var ise bu dönüşüm X 'de bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca her $x_0 \in X$ başlangıç noktası için $(f^n(x_0))$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

2.2.2. Teorem

X bir topolojik uzay, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun alt yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, \alpha]) = \{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ kümesinin kapalı olmasıdır.

2.2.1. Lemma

(X, p) bir kısmi metrik uzay olmak üzere $d_p: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda d_p dönüşümü X üzerinde bir metrik olup (X, d_p) ikilisi standart metrik uzaydır.

2.2.2. Lemma

(X, m) bir M -metrik uzay ve $M_{xy} = \max\{m(x, x), m(y, y)\}$ şeklinde tanımlanmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$p_m(x, y) = m(x, y) - m_{xy} + M_{xy}$$

ve

$$d_{p_m}(x, y) = 2(m(x, y) - m_{xy}) + (M_{xy} - m_{xy})$$

şeklinde tanımlanan $p_m, d_{p_m}: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri X üzerinde sırasıyla kısmi metrik ve standart metriktir.

2.2.3. Lemma[24, 25]

(X, m) bir M -metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. O zaman,

i) (x_n) dizisi (X, p_m) kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisidir gerek ve yeter şart (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisidir.

ii) (X, p_m) tam kısmi metrik uzaydır gerek ve yeter şart (X, d_{p_m}) tam standart metrik uzaydır.

ifadeleri doğrudur.

2.2.4. Lemma

(X, m) bir M -metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. O zaman,

i) (x_n) dizisi (X, m) M -metrik uzayında bir M -Cauchy dizisidir gerek ve yeter şart (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisidir.

ii) (X, m) M -tam M -metrik uzaydır gerek ve yeter şart (X, d_{p_m}) tam standart metrik uzaydır. ifadeleri doğrudur.

İspat

i) $(x_n) \subseteq X$ bir M -Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n,k \rightarrow \infty} m(x_n, x_k) = \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı var olup buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_n) = \alpha$ elde edilir. O halde,

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} d_{p_m}(x_n, x_k) = 2(m(x_n, x_k) - m_{x_n x_k}) + (M_{x_n x_k} - m_{x_n x_k}) = 0$$

olur ki buradan $(x_n) \subseteq X$, (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisidir. Şimdi aksini kabul edelim. Yani, $(x_n) \subseteq X$, (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon = 1$ için $n, k \geq n_0$ olduğundan $d_{p_m}(x_n, x_k) < 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buna

göre,

$$\begin{aligned}
m(x_n, x_n) &= m(x_n, x_n) - m(x_{n_0}, x_{n_0}) + m(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\leq |m(x_n, x_n) - m(x_{n_0}, x_{n_0})| + m(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&= M_{x_n x_{n_0}} - m_{x_n x_{n_0}} + m(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\leq d_{p_m}(x_n, x_{n_0}) + m(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\leq 1 + m(x_{n_0}, x_{n_0})
\end{aligned}$$

olduğundan $(m(x_n, x_n))$, $\mathbb{R}$ de sınırlı bir dizidir. O halde $\lim_{k \rightarrow \infty} (m(x_{n_k}, x_{n_k})) = \alpha$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı ve $(m(x_{n_k}, x_{n_k}))$ alt dizisi vardır. Diğer taraftan $(x_n) \subseteq X$, (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan bir $\varepsilon > 0$ için $n, k \geq n_1$ olduğunda,

$$|m(x_n, x_n) - m(x_k, x_k)| \leq d_{p_m}(x_n, x_k) < \varepsilon$$

olacak şekilde n_1 doğal sayısı vardır. Bu yüzden $(m(x_n, x_n))$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_n) = \lim_{n, k \rightarrow \infty} m_{x_n x_k} = \lim_{n, k \rightarrow \infty} M_{x_n x_k} = \alpha$$

elde edilir. Şimdi,

$$\begin{aligned}
|m(x_n, x_k) - \alpha| &\leq |(m(x_n, x_k) - m_{x_n x_k}) + (M_{x_n x_k} - m_{x_n x_k})| \\
&\quad + |2m_{x_n x_k} - M_{x_n x_k} - \alpha| \\
&\leq |2(m(x_n, x_k) - m_{x_n x_k}) + (M_{x_n x_k} - m_{x_n x_k})| \\
&\quad + |2m_{x_n x_k} - M_{x_n x_k} - \alpha| \\
&= d_{p_m}(x_n, x_k) + |2m_{x_n x_k} - M_{x_n x_k} - \alpha|
\end{aligned}$$

elde edilir ki buradan $\lim_{n, k \rightarrow \infty} m(x_n, x_k) = \alpha$ yazabiliriz. Bu ise (x_n) dizisinin (X, m)

M -metrik uzayında bir M -Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

- ii) (X, m) M -tam M -metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$, (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda i) den (x_n) dizisinin (X, m) M -metrik uzayında bir M -Cauchy dizisi olduğunu söyleyebiliriz. (X, m) M -tam M -metrik uzay olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) - m_{x_n x} = 0$$

ve

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = m(x, x)$$

olacak şekilde $x \in X$ vardır. Buna göre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p_m}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(m(x_n, x) - m_{x_n x}) + (M_{x_n x} - m_{x_n x}) = 0$$

elde edilir ki bu ise (X, d_{p_m}) uzayının tam metrik uzay olduğunu gösterir. Şimdi ise kabul edelim ki (X, d_{p_m}) uzayı tam metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir M -Cauchy dizisi olsun. Bu durumda i) den (x_n) dizisinin (X, d_{p_m}) uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu söyleyebiliriz ve bu yüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p_m}(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2(m(x_n, x) - m_{x_n x}) + (M_{x_n x} - m_{x_n x}) = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2(m(x_n, x) - m_{x_n x}) = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} (M_{x_n x} - m_{x_n x}) = 0$$

yazabiliriz. İspatı tamamlamak için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = m(x, x)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Yukarıda gösterdik ki $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_{x_n x} - m_{x_n x}) = 0$ eşitliği vardır. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_n) = m(x, x)$ elde edilir. Aynı zamanda $(x_n) \subseteq X$ bir M -Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = m(x, x)$ yazılabilir. Böylece (X, m) uzayının M -tam M -metrik uzay olduğunu göstermiş oluruz.

2.2.1.Sonuç

(X, m) bir M -metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. O zaman,

- i) (x_n) dizisi (X, m) M -metrik uzayında bir M -Cauchy dizisidir gerek ve yeter şart (X, p_m)

kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

ii) (X, m) M -tam M -metrik uzaydır gerek ve yeter şart (X, p_m) tam kısmi metrik uzaydır. ifadeleri doğrudur.



3. TEK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde öncelikle M -metrik uzaylarda Caristi tip büzülme dönüşümü tanımlandı ve daha sonra ise M -metrik uzaylarda Caristi tip sabit nokta teoremleri bazı genelleştirmeleri ile ifade ve ispat edilmiştir.

3.1. M -Metrik Uzaylarda Caristi Tip Sabit Nokta Teoremleri

Banach sabit nokta teoremini literatürde var olan çalışmalardan farklı bir şekilde genişleten ve Caristi tarafından verilen aşağıdaki sabit nokta teoremi ile bu bölüme başlayalım [7]:

3.1.1. Teorem

(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer öyle bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ alt yarı sürekli fonksiyonu var ve her $x \in X$ için,

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Bae [26] ve Suzuki [27]'nin çalışmalarında olduğu gibi literatürde Caristi'nin çalışmasını genişletmekle ilgilenen birçok bilim insanı bulunmaktadır [28, 29]. Acar ve arkadaşları [30] Caristi tip sabit nokta teoremini kısmi metrik uzaylarda aşağıdaki şekilde ispatlamışlardır. Dikkat edilmelidir ki onlar bunu yaparken p kısmi metriği sadece standart metrik olduğunda doğru olan Eş. 3.1'i Eş. 3.2 ile değiştirmişlerdir:

3.1.2. Teorem

(X, p) tam kısmi metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer (X, d_p) uzayında alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in X$ için,

$$p(x, Tx) \leq p(x, x) + \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Yakın zamanda Abodayeh ve arkadaşları [31] Caristi tip sabit nokta teoremini M -metrik uzaylarda verebilmek için Caristi'nin eşitsizliğinin M -metrik uzaylardaki versiyonu olarak Eş. 3.3'ü düşündüler ve aşağıdaki Teorem 3.1.3'ü ifade ettiler.

3.1.3. Teorem

(X, m) tam M -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in X$ için,

$$m(x, Tx) \leq m_{xTx} + \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Ancak aşağıdaki örnek bu sonucun uygun genişleme olmadığını göstermektedir. Bu örnekte T dönüşümü Teorem 3.1.3'ün bütün hipotezlerini sağlamasına rağmen bir sabit noktaya sahip değildir.

Örnek

$X = [0, \infty)$ ve bu küme üzerindeki $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ metriği $m(x, y) = \min\{x, y\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, m) M -tam M -metrik uzaydır. (Dikkat edilmelidir ki bu uzayda her (x_n) dizisi her noktaya M -yakınsaktır). Eğer biz $T: X \rightarrow X$ dönüşümünü her $x \in X$ için $Tx = x + 1$ ve $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümünü her $x \in X$ için $\varphi(x) = c$ ($c > 0$ sabit) şeklinde tanımlarsak φ, τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ve T dönüşümü Eş. 3.3'ü sağlar. Ancak T dönüşümü bir sabit noktaya sahip değildir.

Bu problemi gidermek için Caristi'nin eşitsizliğinin M -metrik uzaylardaki versiyonu olarak iki yeni eşitsizliği tanımladık ve böylece bu eşitsizlikleri dikkate alarak Caristi sabit nokta teoremini M -metrik uzaylara uygun şekilde genişlettik:

$$m(x, Tx) - m_{xTx} + M_{xTx} \leq m(x, x) + \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad (3.4)$$

ve

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad (3.5)$$

3.1.1. Tanım

(X, m) bir M -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\tau_{d_{pm}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in X$ için Eş. 3.4 sağlanıyor ise bu durumda T 'ye tip-(I) Caristi dönüşümü denir.

3.1.4. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzayı üzerinde tanımlı her tip-(I) Caristi dönüşümü bu uzayda bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

T dönüşümü tip-(I) Caristi dönüşümü olduğundan $\tau_{d_{pm}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in X$ için,

$$m(x, Tx) - m_{xTx} + M_{xTx} \leq m(x, x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda her $x \in X$ için,

$$p_m(x, Tx) \leq p_m(x, x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

elde edilir. Diğer taraftan Sonuç 2.2.1'den (X, p_m) tam kısmi metrik uzaydır. O halde Teorem 3.1.2'yi kullanarak T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

3.1.2. Tanım

(X, m) bir M -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\tau_{d_{pm}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in X$ için Eş. 3.5 sağlanıyor ise bu durumda T 'ye tip-(II) Caristi dönüşümü denir.

3.1.5. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzayı üzerinde tanımlı her tip-(II) Caristi dönüşümü bu uzayda bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

(X, m) M -tam M -metrik uzayı olduğundan Sonuç 2.2.1'den (X, p_m) tam kısmi metrik uzaydır. T dönüşümü tip-(II) Caristi dönüşümü olduğundan $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in X$ için,

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre iki durum söz konusudur:

a) Eğer $M_{xTx} = m(Tx, Tx)$ ise,

$$m(x, Tx) \leq m_{xTx} + \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

ve

$$M_{xTx} = m(Tx, Tx) \leq m_{xTx} + \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} m(x, Tx) + M_{xTx} &\leq 2m_{xTx} + 2\varphi(x) - 2\varphi(Tx) \\ &= m_{xTx} + m(x, x) + 2\varphi(x) - 2\varphi(Tx) \end{aligned}$$

ve böylece

$$m(x, Tx) - m_{xTx} + M_{xTx} \leq m(x, x) + 2\varphi(x) - 2\varphi(Tx)$$

olur. Buradan ise

$$p_m(x, Tx) \leq p_m(x, x) + 2\varphi(x) - 2\varphi(Tx)$$

eşitsizliği elde edilir.

b) Eğer $M_{xTx} = m(x, x)$ ise Eş. 3.5'den $\varphi(x) - \varphi(Tx) \geq 0$ olup

$$\begin{aligned} m(x, Tx) - m_{xTx} + M_{xTx} &\leq \varphi(x) - \varphi(Tx) + M_{xTx} \\ &= m(x, x) + \varphi(x) - \varphi(Tx) \\ &\leq m(x, x) + 2\varphi(x) - 2\varphi(Tx) \end{aligned}$$

olup buradan

$$p_m(x, Tx) \leq p_m(x, x) + 2\varphi(x) - 2\varphi(Tx)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $\beta: X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümünü her $x \in X$ için $\beta(x) = 2\varphi(x)$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\beta, \tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir fonksiyon olur. (X, p_m) tam kısmi metrik uzay olup ve T dönüşümü a) ve b) durumlarının her ikisinde de her $x \in X$ için,

$$p_m(x, Tx) \leq p_m(x, x) + \beta(x) - \beta(Tx)$$

eşitsizliğini sağladığından X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Burada Caristi eşitsizliğinin M -metrik uzaylardaki versiyonu için önerdiğimiz iki eşitsizlik eğer çakışırlarsa Teorem 3.1.4 ile Teorem 3.1.5 aynı şeyi ifade edecektir. Bu nedenle aşağıdaki örnekler, Eş. 3.5'in Eş. 3.4'den kesinlikle daha genel olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Örnek

$X = [0, 1] \cup \{2\}$ ve $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisi reel sayılar üzerindeki alışılmış topoloji ile çakıştığından ve $X \subseteq \mathbb{R}$ kapalı olduğundan (X, d_{p_m}) tam metrik uzaydır. O halde Lemma 2.2.4'den (X, m) M -tam M -metrik uzaydır. Şimdi $T: X \rightarrow X$ ve $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümlerini her $x \in X$ için sırasıyla,

$$Tx = \begin{cases} 2 & , \quad x = 1 \\ x & , \quad \text{d. d.} \end{cases}$$

ve

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 2 + \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \text{ ve } x \neq 2 \\ \frac{7}{4} & , \quad x = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde φ dönüşümü $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir fonksiyon ve T dönüşümü Eş. 3.5'i sağlar. Dikkat edilmelidir ki T dönüşümü Eş. 3.4'ü sağlamaz. Gerçekten, $x = 1$ için $Tx = 2$ olup,

$$m(x, Tx) - m_{xTx} + M_{xTx} \leq m(x, x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

$$\frac{3}{2} - 1 + 2 \leq 1 + \varphi(1) - \varphi(2)$$

$$\frac{3}{2} \not\leq 3 - \frac{7}{4}$$

elde edilir. Bu nedenle bu örnek için Teorem 3.1.5'i kullanabilirken Teorem 3.1.4'ü kullanamayız.

Örnek

$X = [0, \infty)$ ve $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $m(x, y) = |x - y| + \min\{x, y\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisi reel sayılar üzerindeki alışılmış topoloji ile çakıştığından ve $X \subseteq \mathbb{R}$ kapalı olduğundan (X, d_{p_m}) tam standart metrik uzaydır. O halde Lemma 2.2.4'den (X, m) M -tam M -metrik uzaydır. Şimdi $T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \sqrt{x}$ ve $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ x & , \quad d. d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde φ dönüşümü $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli bir fonksiyon ve T dönüşümü Eş. 3.5'i sağlar. Ancak $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < x < 1$ aralığındaki x noktaları için Eş. 3.4 sağlanmaz. Bu yüzden T dönüşümü bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebilmek için Teorem 3.1.5'i kullanabilirken Teorem 3.1.4'ü kullanamayız.

3.2. Caristi Sabit Nokta Teoreminin M -Metrik Uzaylardaki Bazı Genelleştirmeleri

Daha önce literatürde Bae, Suzuki veya Acar ve arkadaşlarının çalışmaları olduğu gibi Caristi tip sabit nokta teoreminin birçok genelleştirmesi bulunduğunu belirtmiştik [26, 27, 32]. Bu bölümde ise onların sonuçları M -metrik uzaylarda ifade ve ispat edilmiştir.

3.2.1. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzay ve $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$, $\tau_{d_{pm}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli ve $\psi: X \rightarrow [0, \infty)$ bir $\mu > 0$ sayısı için sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlar olsunlar:

$$m(x, y) = m(y, y) \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(x) \quad (3.6)$$

ve

$$\sup \left\{ \psi(x) : x \in X, \varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + \mu \right\} < \infty.$$

Eğer $T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için,

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + \psi(x)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\} \quad (3.7)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Eğer $\psi(x) > 0$ ise Eş. 3.7'den $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olur. Şimdi kabul edelim ki $\psi(x) = 0$ olsun. Bu durumda $m(x, Tx) = m(Tx, Tx)$ olup Eş. 3.6'dan $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ elde edilir. O halde her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\mu > 0$ sayısı için Y kümesini ve γ reel sayısını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$Y = \left\{ x \in X : \varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + \mu \right\}$$

ve

$$\gamma = \sup_{w \in Y} \psi(w).$$

(X, m) M -tam M -metrik uzay olduğundan ve Lemma 2.2.4'den (X, d_{p_m}) tam metrik uzaydır. Bunun yanında $\varphi, \tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli olduğundan Y, X 'in $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre kapalı bir alt kümesidir. Bu yüzden (Y, d_{p_m}) tam metrik uzay olup (Y, m) M -tam M -metrik uzaydır. Diğer taraftan infimum tanımından dolayı Y kümesi boştan farklıdır. Her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olduğundan $T(Y) \subseteq Y$ dir. Ayrıca her $x \in Y$ için,

$$\begin{aligned} \max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} &\leq m_{xTx} + \psi(x)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\} \\ &\Rightarrow \max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + \gamma\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\} \end{aligned}$$

olup eğer her $x \in Y$ için $\phi: Y \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\phi(x) = \gamma\varphi(x)$ olarak tanımlanırsa ϕ dönüşümü $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli dir. Buna göre $T: Y \rightarrow Y$ dönüşümü her $x \in Y$ için,

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + \phi(x) - \phi(Tx)$$

eşitsizliğini sağladığından Teorem 3.1.5'i kullanarak T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Uyarı

Eğer m bir standart metrik ise Eş. 3.6 otomatik olarak sağlanır. Böylece [27]'deki Teorem 2 bizim çalışmamızın özel bir hali olur.

3.2.2. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Eş. 3.6'yı sağlayan $\tau_{d_{p_m}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli ve $c: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ üst yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için,

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + \max\{c(\varphi(x)), c(\varphi(Tx))\}\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki $\gamma > c\left(\inf_{w \in X} \varphi(w)\right)$ ve $\inf_{w \in X} \varphi(w) = t_0$ olsun. Hipotezden c üst yarı sürekli bir fonksiyon olduğundan $t \in [t_0, t_0 + \mu]$ olduğunda $c(t) < \gamma + \mu$ olacak şekilde bir $\mu > 0$ sayısı vardır. Teorem 3.2.1'in ispatında olduğu gibi her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan eğer biz $\psi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x \in X$ için $\psi(x) = \max\{c(\varphi(x)), c(\varphi(Tx))\}$ şeklinde tanımlarsak $\varphi(x) \leq t_0 + \mu$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq t_0 + \mu$ olup buradan $\psi(x) < \gamma + \mu$ elde edilir. Bu durumda açıkça görülebilir ki $\sup\{\psi(x): x \in X, \varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + \mu\} \leq \gamma + \mu < \infty$ dır. O halde Teorem 3.2.1'i kullanarak T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

3.2.3. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzay ve $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Eş. 3.6'yı sağlayan $\tau_{d_{pm}}$ topolojisine alt yarı sürekli ve $c: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için,

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + c(\varphi(x))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\} \quad (3.8)$$

veya

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + c(\varphi(Tx))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\} \quad (3.9)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.2.1'in ispatında olduğu gibi her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olduğu gösterilebilir. Hipotezden c dönüşümü azalmayan olduğundan $c(\varphi(Tx)) \leq c(\varphi(x))$ 'dir. Bu nedenle burada T dönüşümü için Eş. 3.8' i araştırmamız yeterlidir. Eğer $\psi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x \in X$ için $\psi(x) = c(\varphi(x))$ şeklinde tanımlarsak,

$$\sup\{\psi(x): x \in X, \varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + 1\} \leq c\left(\inf_{y \in X} \varphi(y) + 1\right) < \infty$$

olup Teorem 3.2.1'den T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

3.2.4. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzay ve $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Eş. 3.6'yı sağlayan $\tau_{d_{pm}}$ topolojisine göre alt yarı sürekli ve $c: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ üst yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için,

$$m(x, Tx) \leq \varphi(x)$$

ve

$$\max\{m(x, Tx), m(Tx, Tx)\} \leq m_{xTx} + c(m(x, Tx))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

ise X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Şimdi $\psi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x \in X$ için $\psi(x) = c(m(x, Tx))$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + 1$ olacak şekilde her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq \sup\{c(t): 0 \leq t \leq m(x, Tx)\} \\ &\leq \sup\{c(t): 0 \leq t \leq \varphi(x)\} \\ &\leq \sup\left\{c(t): 0 \leq t \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + 1\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\sup\left\{\psi(x): x \in X, \varphi(x) \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + 1\right\} \leq \max\left\{c(t): 0 \leq t \leq \inf_{y \in X} \varphi(y) + 1\right\} < \infty$$

olup Teorem 3.2.1'den T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

4. KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Banach 1922 yılında kendi adıyla bilinen Banach büzülme ilkesini ispatlamıştır[1]. Bu ilkenin uygulanabilirliği ve öneminden dolayı birçok yazar tarafından farklı şekillerde genişletilmeye çalışılmıştır. 1969 yılında Nadler tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı her küme değerli büzülme dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu göstermiştir[16]. Böylece Banach büzülme ilkesi literatürde var olan çalışmalardan farklı bir şekilde geliştirilmiş oldu. Nadler'in ardından birçok yazar hem tam metrik uzay hem de diğer soyut uzaylarda küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisini geliştirmeye çalışmışlardır[17-19, 33-36]. Özellikle Feng ve Liu, Nadler'in sonucunu Hausdorff metriği kullanmadan üstelik küme değerli dönüşümün değer kümesini $CB(X)$ yerine $C(X)$ olarak diğerlerinden farklı yönde genişletmişlerdir[20].

4.1. *M*-Metrik Uzaylarda Feng-Liu Tip Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Matthews metrik uzaylardan daha genel olan kısmi metrik uzay kavramını tanımlamış ve bu uzayda bazı temel sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır[24]. Bunun üzerine birçok yazar tarafından kısmi metrik uzaylarda hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için sabit nokta problemleri üzerine çalışılmıştır[37-39]. Son zamanlarda Asadi ve arkadaşları kısmi metrik uzay kavramını *M*- metrik uzay kavramına genişletmişler ve *M*- metrik uzaylar üzerinde tek değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini elde etmişlerdir [10]. Bu bölümde öncelikle *M*-metrik uzayları üzerindeki topolojik yapılar tartışılmıştır. Ardından bu topolojilere göre *M*-metrik uzayın kapalı alt kümeleri dikkate alınarak Feng-Liu tip küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini elde edilmiştir[40]. Bunları vermeden önce standart metrik uzaylar üzerinde Feng ve Liu tarafından ispatlanmış teoremi ifade edelim:

4.1.1. Teorem [20]

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için,
 $d(y, Ty) \leq cd(x, y)$.

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in I_b^x = \{y \in Tx: bd(x, y) \leq d(x, Tx)\}$ ve $0 < c < b < 1$ var olsun. Eğer $f(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonu alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi kabul edelim ki (X, m) bir M -metrik uzay olsun. Bu durumda $U \subseteq X$ dizisel açıktır gerek ve yeter koşul her $x \in U$ ve bu nokta için $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) = 0$ olacak şekilde her $(x_n) \subseteq X$ dizisi sonunda U kümesinin içinde kalır. Eğer bu uzaydaki bütün dizisel açık kümelerin ailesini τ_s ile gösterirsek bu aile X üzerinde bir topoloji belirtir ve bu topolojiye dizisel topoloji denir. Çalışmanın devamında bu topolojiye göre herhangi bir $A \subseteq X$ 'in kapanışı $\overline{A^s}$ ve bütün kapalı alt kümelerinin ailesi $C_s(X)$ ile gösterilmiştir.

Diğer taraftan bir (X, m) bir M -metrik uzay ve $x \in X$ olmak üzere x merkezli $r > 0$ çaplı açık yuvar,

$$B(x, r) = \{y \in X: m(x, y) < m_{xy} + r\}$$

şeklinde tanımlanır. O halde bir $U \subseteq X$ açık olması için gerek ve yeter koşul her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde $r > 0$ reel sayısının var olmasıdır. Eğer bu uzaydaki bütün açık kümelerin ailesi τ_m ile gösterirsek bu aile X üzerinde bir topoloji belirtir. Çalışmanın devamında bu topolojiye göre herhangi bir $A \subseteq X$ 'in kapanışı $\overline{A^m}$ ve bütün kapalı alt kümelerinin ailesi $C_m(X)$ gösterilmiştir.

Uyarı

(X, m) bir M -metrik uzay olmak üzere bu uzay üzerindeki τ_s topolojisi τ_m topolojisinden daha incedir. Ancak tersi doğru değildir. Öncelikle $\tau_m \subseteq \tau_s$ olduğunu ardından bir örnekle $\tau_s \subseteq \tau_m$ sağlanmadığını gösterelim. Şimdi $U \in \tau_m, x \in U$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) = 0$ olacak

şekildeki $(x_n) \subseteq X$ dizisini alalım. $U \in \tau_m$ ve $x \in U$ olduğundan $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı vardır. Diğer yandan $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) = 0$ olduğundan $r > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $m(x_n, x) < r \Rightarrow m(x_n, x) < r + m_{x_n x}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde $n \geq n_0$ olacak şekilde her n için $x_n \in B(x, r) \subseteq U$ olup $U \in \tau_s$ dir. Burada U keyfi olduğundan $\tau_m \subseteq \tau_s$ dir.

Örnek

$X = \{0\} \cup [1, \infty)$ ve $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olsun. Bu durumda (X, m) bir M -metrik uzaydır. Açıktır ki X 'in her tek nokta altkümesi dizisel açıktır. Bu yüzden τ_s , X üzerinde ayrık topolojidir. Diğer taraftan $x \in X$ ve $r > 0$ olarak alınırsa, $B(x, r) = (x - 2r, x + 2r) \cap X$ olup $x = 0$ dışındaki hiçbir $\{x\}$ tek nokta alt kümesi τ_m topolojisine göre açık değildir. Bu nedenle $\tau_s \not\subseteq \tau_m$ elde edilir.

4.1.1. Lemma

Bir M -metrik uzayda alınan bir dizinin M -yakınsaklığı ile dizinin τ_m yakınsaklığı çakışır. Gerçekten, (X, m) bir M -metrik uzay, $(x_n) \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ noktasına M -yakınsak olsun. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) - m_{x_n x} = 0$ dir. Şimdi kabul edelim ki $U \in \tau_m$ ve $x \in U$ olsun. O halde $U \in \tau_m$ olduğundan $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı vardır. Diğer taraftan $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) - m_{x_n x} = 0$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $m(x_n, x) - m_{x_n x} < r$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buna göre $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B(x, r) \subseteq U$ olduğundan (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına τ_m topolojisine göre yakınsaktır. Benzer şekilde eğer (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına τ_m topolojisine göre yakınsak ise x noktasına M -yakınsak olduğu gösterilebilir.

4.1.2. Lemma

(X, m) bir M -metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $m(x, A) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A^s} \subseteq \overline{A^m}$ dir.

İspat

$m(x, A) = 0$, $x \in U$ ve $U \in \tau_s$ olsun. İnfimum tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $m(x, x_n) < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $x_n \in A$ vardır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) = 0$ olup $U \in \tau_s$ ve $x \in U$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece, $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in U \cap A$ elde edilir ki buradan $U \cap A \neq \emptyset$ yani $x \in \overline{A^s}$ dır.

Uyarı

Eğer $x \in \overline{A^m}$ ise $m(x, A) = 0$ olmak zorunda değildir. Gerçekten eğer $X = \{0\} \cup [1, \infty)$ ve $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olarak alınırsa bu durumda (X, m) bir M -metrik uzaydır. $A = [1, 2)$ ve $x = 1$ olarak alınırsa $x \in \overline{A^m}$ fakat $m(x, A) > 0$ dır.

4.1.1. Önerme

(X, m) bir M -metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $x \in \overline{A^m}$ olması için gerek ve yeter koşul $\inf \{m(x, y) - m_{xy} : y \in A\} = 0$ olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki $\inf \{m(x, y) - m_{xy} : y \in A\} = 0$ ve $r > 0$ olsun. İnfimum tanımından $m(x, y_r) - m_{xy_r} < r$ olacak şekilde bir $y_r \in A$ vardır. Buradan $y_r \in B(x, r)$ olup $y_r \in A \cap B(x, r)$ elde edilir. Bu yüzden $x \in \overline{A^m}$ dır. Şimdi tersine $x \in \overline{A^m}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $m(x, y_n) - m_{xy_n} < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $y_n \in A$ vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf \{m(x, y) - m_{xy} : y \in A\} \leq m(x, y_n) - m_{xy_n} < \frac{1}{n}$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $\inf \{m(x, y) - m_{xy} : y \in A\} = 0$ elde edilir.

(X, m) bir M -metrik uzayı üzerinde $T: X \rightarrow C_s(X)$ küme değerli dönüşümü tanımlansın. Pozitif bir $b \in (0, 1)$ sayısı ve $x \in X$ için $m(x, Tx) = \inf \{m(x, y) : y \in Tx\}$ olmak üzere

$$T_b^x(m) = \{y \in Tx : bm(x, y) \leq m(x, Tx)\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda eğer $m(x, Tx) > 0$ ise her $b \in (0,1)$ için $T_b^x(m)$ kümesi boştan farklıdır. Gerçekten, $m(x, Tx) > 0$ ise $\varepsilon = \left(\frac{1}{b} - 1\right)m(x, Tx)$ pozitif reel sayısı için infimum tanımından öyle bir $y \in Tx$ var ve $m(x, y) < m(x, Tx) + \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar. O halde bu eşitsizlikte ε yerine yazılırsa istenilen $y \in Tx$ noktasının var olduğu görülür. Ancak standart metrik uzaylarda tanımlanan I_b^x kümesinden farklı olarak $m(x, Tx) = 0$ ise $T_b^x(m)$ kümesi boş küme olabilir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği göstermektedir:

Örnek

$X = \left\{-1, -1 + \frac{1}{n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ ve bu küme üzerinde $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümünü

$$m(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y = -1 \\ |x - y| & , \quad d.d. \end{cases}$$

ve $T: X \rightarrow C_s(X)$ dönüşümünü her $x \in X$ için $Tx = X$ olacak şekilde tanımlayalım. Açık ki (X, m) bir M -metrik uzaydır. Şimdi $x = -1$ noktası için $m(x, Tx) = 0$ olurken her $y \in Tx$ için $m(x, y) > 0$ olduğundan $T_b^x(m) = \emptyset$ dir.

Şimdi bu bölümde vereceğimiz temel teoremlerimizi ifade ve ispat edelim:

4.1.2. Teorem

(X, m) bir M -tam M -metrik uzay, $T: X \rightarrow C_m(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için,

$$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$$

ve

$$\alpha m(y, y) \leq m(x, y) \tag{4.1}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $\alpha, b, c \in (0,1)$ ve $y \in T_b^x(m)$ var olsun. Eğer $c < b$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki $x_0 \in X$ keyfi olsun. Eğer $m(x_0, Tx_0) = 0$ ise o zaman $x_0 \in \overline{Tx_0^m} = Tx_0$ olduğundan x_0 noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. O halde $m(x_0, Tx_0) > 0$ olsun. O zaman öyle bir $x_1 \in T_b^{x_0}(m)$ var öyle ki,

$$m(x_1, Tx_1) \leq cm(x_0, x_1)$$

ve

$$\alpha m(x_1, x_1) \leq m(x_0, x_1)$$

sağlanır. Benzer şekilde gösterilebilir ki eğer $m(x_1, Tx_1) = 0$ ise x_1 noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Buna göre $m(x_1, Tx_1) > 0$ olsun. Hipotezden öyle bir $x_2 \in T_b^{x_1}(m)$ var öyle ki,

$$m(x_2, Tx_2) \leq cm(x_1, x_2)$$

ve

$$\alpha m(x_2, x_2) \leq m(x_1, x_2)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için $m(x_n, Tx_n) > 0$ olmak üzere $x_{n+1} \in T_b^{x_n}(m)$,

$$m(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq cm(x_n, x_{n+1}) \quad (4.2)$$

ve

$$\alpha m(x_{n+1}, x_{n+1}) \leq m(x_n, x_{n+1}) \quad (4.3)$$

olacak şekilde X de bir (x_n) dizisi vardır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in T_b^{x_n}(m)$ olduğundan

$$bm(x_n, x_{n+1}) \leq m(x_n, Tx_n) \quad (4.4)$$

yazabiliriz. Eş. 4.2 ve Eş. 4.4'den yararlanarak her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$m(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n m(x_0, Tx_0) \quad (4.5)$$

$$m(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n m(x_0, x_1) \quad (4.6)$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 4.3, Eş. 4.5 ve Eş. 4.6 birlikte kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_n) = 0.$$

yazılabilir. Şimdi $m > n$ olacak şekildeki $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} &\leq (m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}) + (m(x_{n+1}, x_m) - m_{x_{n+1} x_m}) \\ &\leq (m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}) + (m(x_{n+1}, x_{n+2}) - m_{x_{n+1} x_{n+2}}) \\ &\quad + (m(x_{n+2}, x_m) - m_{x_{n+2} x_m}) \\ &\leq (m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}) + \dots + (m(x_{m-1}, x_m) - m_{x_{m-1} x_m}) \\ &\leq m(x_n, x_{n+1}) + m(x_{n+1}, x_{n+2}) \dots + m(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left(\frac{c}{b}\right)^n m(x_0, x_1) + \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1} m(x_0, x_1) + \dots + \left(\frac{c}{b}\right)^{m-1} m(x_0, x_1) \\ &\leq \left[\frac{\left(\frac{c}{b}\right)^n}{1 - \frac{c}{b}} \right] m(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olup $c < b$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_n) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Böylece (x_n) bir M -Cauchy dizisidir. Hipotezden (X, m) bir M -tam M -metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, z) - m_{x_n z} = 0$$

ve

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = m(z, z)$$

olacak şekilde $z \in X$ vardır. Şimdi gösterelim ki z noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Gerçekten, $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_m

topolojisine göre alt yarı sürekli olduğundan,

$$0 \leq m(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = 0$$

olup $m(z, Tz) = 0$ elde edilir. Böylece $z \in \overline{Tz^m} = Tz$ olup $z \in X$, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

4.1.1. Tanım

(X, m) M -metrik uzayında her M -Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına τ_s topolojisine göre yakınsak ise bu uzaya S -tamdır denir.

Şimdi eğer biz Teorem 4.1.2’de $T: X \rightarrow X$ dönüşümünü $C_m(X)$ değerli yerine $C_s(X)$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonunu τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli olması yerine τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli kabul edersek aşağıdaki teoremi elde ederiz. Bu teorem $C_s(X)$ ailesi $C_m(X)$ ailesinden daha geniş olduğu için önemlidir.

4.1.3. Teorem

(X, m) bir S -tam M -metrik uzay, $T: X \rightarrow C_s(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $m(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ için öyle bir c var öyle ki,

$$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$$

ve

$$\alpha m(y, y) \leq m(x, y)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $y \in T_b^x(m)$ ve $\alpha, b, c \in (0, 1)$ var olsun. Eğer $c < b$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X ’de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 4.1.2’de olduğu gibi yapılarak gösterilebilir ki X ’de bir (x_n) M -Cauchy dizisi vardır. Hipotezden (X, m) bir S -tam M -metrik uzay olduğundan (x_n) dizisinin τ_s topolojisine göre

yakınsak olacağı bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan Teorem 4.1.2'nin ispatında olduğu gibi yapılarak $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ olduğu gösterilebilir. Hipotezden $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli olduğundan,

$$0 \leq m(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = 0$$

elde edilir. Böylece z noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğu gösterilmiş olur.

Daha önce ifade ettiğimiz gibi her standart metrik uzay bir M -metrik uzay ve standart metrik uzaylarda Eş. 4.1 otomatik olarak sağlanacağından Feng-Liu sabit nokta teoremi olan Teorem 4.1.1'i Teorem 4.1.2'nin bir sonucu olarak ifade edebiliriz. Ayrıca yine her kısmi metrik uzayın bir M -metrik uzay olması ve kısmi metrik tanımından dolayı Eş. 4.1 sağlanacağından aşağıdaki teoremi de Teorem 4.1.2'nin bir sonucu olarak verebiliriz.

4.1.1. Sonuç

(X, p) bir tam kısmi metrik uzay, $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $p(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ için,

$$p(y, Ty) \leq cp(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y \in T_b^x(p)$ ve $0 < c < b < 1$ var olsun. Eğer $f(x) = p(x, Tx)$ fonksiyonu alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Burada sadece Teorem 4.1.2'nin hipotezinde yer alan Eş. 4.1'nin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Kısmi metrik uzay tanımından dolayı her $x, y \in X$ için $p(x, x) \leq p(x, y)$ olup her $\alpha \in (0, 1)$ için $\alpha p(x, x) \leq p(x, y)$ elde edilir. Böylece Teorem 4.1.2'nin bütün hipotezleri sağlandığından T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda vereceğimiz iki örnek Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'ü karşılaştırmamıza olanak sağlamaktadır. Bu örneklerin ilkinde uzayın M -tam olmasına rağmen S -tam olmadığı gösterilerek Teorem 4.1.2'nin önemi diğerinde ise T dönüşümünün görüntü kümesinin $C_m(X)$ 'e ait olmayıp $C_s(X)$ 'e ait olmasından dolayı Teorem 4.1.3'ün önemi vurgulanmaktadır.

Örnek

$X = \{0\} \cup [1, \infty)$ olsun. Bu durumda eğer $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlanırsa (X, m) ikilisi M -tam M -metrik uzaydır. Şimdi eğer $T: X \rightarrow C_m(X)$ dönüşümünü her $x \in X$ için,

$$Tx = \begin{cases} \{0,1\} & , \quad x \in \{0\} \cup [1,2] \\ \{\frac{x}{2}, x\} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu X üzerindeki alışılmış topoloji olan τ_m topolojisine göre alt yarı süreklidir. Diğer taraftan $m(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ için öyle bir $y \in T_{0,75}^x(m)$ var öyle ki $\alpha, c = 0,5$ olmak üzere

$$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$$

ve

$$\alpha m(y, y) \leq m(x, y)$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde Teorem 4.1.2'yi kullanarak T dönüşümünün X 'de bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Burada dikkat edilmelidir ki $C_m(X) \subseteq C_s(X)$ olmasına rağmen (X, m) bir S -tam M -metrik uzay olmadığından Teorem 4.1.3'ü kullanamayız. Gerçekten eğer $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ M -Cauchy dizisi alınırsa τ_s topolojisine göre yakınsak olmadığı görülecektir.

Örnek

$X = \left\{0, 1, \frac{1}{n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere eğer $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$m(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad \begin{array}{l} x = 0 \text{ ve } y \neq 0 \\ \text{veya} \\ x \neq 0 \text{ ve } y = 0 \end{array} \\ \min\{x, y\} & , \quad d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda $\tau_m = \{\emptyset, X, X \setminus \{0\}, \{0\}\}$ ve τ_s dizisel topolojisi $\emptyset, X, \{0\}, U_{1m} = \{1, \frac{1}{r} : r \geq m, r \in \mathbb{N}\}$ ve $U_{nm} = \{\frac{1}{n}, \frac{1}{r} : r \geq m, r \in \mathbb{N}\}, n < m, n, m \in \mathbb{N}$ kümelerinin sonlu kesişim ve keyfi birleşimlerinden meydana gelen aile olup (X, m) bir S -tam M -metrik uzaydır. Şimdi eğer $T: X \rightarrow C_s(X)$ dönüşümünü her $x \in X$ için,

$$Tx = \begin{cases} \{0, \frac{1}{2}\} & , \quad x = 0 \\ \{0\} & , \quad d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu X üzerindeki τ_s topolojisine göre alt yarı sürekli. Diğer taraftan $m(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ için öyle bir $y \in T_{0,7}^x(m)$ var öyle ki $\alpha, c = 0,25$ olmak üzere

$$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$$

ve

$$\alpha m(y, y) \leq m(x, y)$$

eşitsizlikleri sağlanır. O halde Teorem 4.1.3'ü kullanarak T dönüşümünün X 'de bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bu örnek için Teorem 4.1.2'yi uygulayamayız. Gerçekten, $x = 0$ için $Tx = \{0, \frac{1}{2}\}$ olup bu küme τ_m topolojisine göre kapalı değildir. Yani, $Tx \notin C_m(X)$ dir.

4.2. M -Metrik Uzaylarda Küme Değerli F -Büzülme Dönüşümleri İçin İki Sabit Nokta Teoremi

Bu bölümde Wardowski tarafından tanımlanan F -Büzülme dönüşümü yardımıyla M -metrik uzaylarda küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ifade edilerek hem Banach büzülme ilkesi hem de literatürde var olan çalışmalar oldukça farklı şekilde genişletilmiştir. Bunun için öncelikle F -Büzülme dönüşümü tanımını ardından bu büzülme yardımıyla ispatlanan sabit nokta teoremini hatırlatalım:

Aşağıdaki $(F_1) - (F_3)$ koşullarını sağlayan bütün $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının ailesini $\mathcal{F}$ ile gösterelim:

- (F₁) F kesin artandır, yani $\alpha < \beta$ olacak şekilde her $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için $F(\alpha) < F(\beta)$ 'dir,
- (F₂) Pozitif tam sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dır gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = -\infty$ olmasıdır.
- (F₃) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır.

4.2.1. Tanım [9]

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için,

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ var ise T 'ye X üzerinde F -büzölme dönüşümü denir.

4.2.1. Teorem [9]

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir F -büzölme dönüşümü olsun. O zaman T dönüşümü bir tek $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Ardından birçok yazar $\mathcal{F}$ ailesini dikkate alarak metrik uzaylar üzerindeki sabit nokta teoremlerini genişletmiştir. Bu bağlamda metrik uzay üzerinde kompakt küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Diğer taraftan kompakt küme değerli F -büzölme dönüşümlerinden farklı olarak aşağıda tanımlanan (F₄) özelliği dikkate alınarak metrik uzaylar üzerinde kapalı küme değerli F -büzölme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir[41-45]:

(F₄) $\inf A > 0$ olacak şekilde her $A \subseteq (0, \infty)$ için $F(\inf A) = \inf F(A)$ dır.

Bundan sonraki bölümde (F₁) – (F₄) koşullarını sağlayan bütün $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının ailesini $\mathcal{F}_*$ ile gösterilecektir.

Bu bölümde $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_*$ aileleri dikkate alınarak (X, m) M -tam M -metrik uzay üzerinde tanımlanmış küme değerli dönüşümler için iki yeni sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Öncelikle $\mathcal{F}_*$ ailesi düşünülerek $C_m(X)$ küme değerli dönüşümler için bir sonuç ardından da F dönüşümü üzerindeki (F_4) koşulunu kaldırmak için $C_m(X)$ ailesinden bağımsız ve aşağıda ifade edilecek olan X 'in belirli özelliklerine sahip alt kümelerinin $A(X)$ ailesi tanımlanarak $A(X)$ küme değerli dönüşümler için bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir [46].

(X, m) bir M -metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özelliklere sahip X 'in bütün A alt kümelerinin ailesini $A(X)$ ile gösterelim: Her $x \in X$ için,

$$\begin{cases} m(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A \\ \text{ve} \\ m(x, A) > 0 \Rightarrow \exists a_x \in A, m(x, A) = m(x, a_x). \end{cases} \quad (4.7)$$

Eğer (X, m) bir standart metrik uzay ise o zaman açıktır ki,

$$A(X) = \{A \subseteq X: \forall x \in X, \exists a_x \in A, m(x, A) = m(x, a_x)\}$$

ve aynı zamanda $A(X) \subseteq C_m(X) = C_s(X)$ olarak elde edilir. Ayrıca dikkat edilmelidir ki X 'in her kompakt altkümesi $A(X)$ 'e aittir.

Eğer (X, m) bir M -metrik uzay ise o zaman $A(X) \subseteq C_s(X)$ olup $A(X)$ ile $C_m(X)$ arasında bir ilişki yoktur. Aşağıdaki uyarı ve örnekler bu gerçekleri göstermektedir:

Uyarı

(X, m) bir M -metrik uzay ve $A \in A(X)$ olsun. Gösterelim ki $A \in C_s(X)$ dir. Bunu yapmak için $A^c \in \tau_s$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Şimdi $x \in A^c$ ve (x_n) , X 'de $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x) = 0$ olacak şekilde herhangi bir dizi olsun. Bu durumda $x \in A^c$ olduğu için $x \notin A$ ve $A \in A(X)$ olduğundan $m(x, A) > 0$ dir. Kabul edelim ki (x_n) dizisinin kuyruğu A^c 'nin içinde kalmaz. Yani, her $k \in \mathbb{N}$ için doğal sayıların $n_k \geq k$ olacak şekilde artan bir (n_k) dizisi vardır öyle ki $x_{n_k} \in A$ 'dır. Ayrıca $\lim_{k \rightarrow \infty} m(x_{n_k}, x) = 0$ olduğundan,

$$m(x, A) = \inf\{m(x, a) : a \in A\} \\ \leq \inf\{m(x, x_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} = 0$$

olarak bulunur. $A \in A(X)$ olduğundan $x \in A$ elde edilir ki bu $x \in A^c$ olması ile çelişir. O halde kabul yanlış (x_n) dizisinin kuyruğu A^c 'nin içinde kalır. Yani $A^c \in \tau_s$ olup buradan $A \in C_s(X)$ sonucu elde edilir.

Örnek

$X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olsun. O halde τ_m topolojisi X üzerinde alışılmış topolojidir. Eğer $A = \left\{\frac{1}{n} : n > 2, n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesini şekilde tanımlarsak $A \in C_m(X)$ 'dir. Ancak $x = 1$ ve her $a \in A$ için,

$$m(1, A) = \frac{1}{2} < m(1, a)$$

olduğundan $A \notin A(X)$ 'dir.

Örnek

$X = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ ve $m(x, y) = \min\{x, y\}$ olsun. O zaman τ_m , X üzerinde ayrık olmayan topolojidir. Eğer $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ şeklinde alırsak açıktır ki $A \in A(X)$ fakat $A \notin C_m(X)$ 'dir.

Örnek

$X = [0, \infty)$ ve bu küme üzerindeki $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümünü $m(x, y) = |x - y| + \min\{x, y\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda τ_m , X üzerinde alışılmış topolojidir. Eğer $A = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şeklinde alırsak gösterebiliriz ki $A \in A(X)$ fakat $A \notin C_m(X)$ 'dir. Gerçekten, $m(x, A) = 0$ ise $x = 0 \in A$ 'dır. Eğer $m(x, A) > 0$ ise $m(x, A) = x$ ve bu yüzden $a_x = 0 \in A$ için $m(x, A) = m(x, a_x)$ 'dir. O halde Eş. 4.7 her $x \in X$ için doğru olduğundan $A \in A(X)$ 'dir. Ancak, $A^c = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \notin \tau_m$ olduğundan $A \notin C_m(X)$ 'dir.

(X, m) bir M -metrik uzay olmak üzere $P(X)$ ile X 'in bütün altkümelerinin ailesini gösterelim. $T: X \rightarrow P(X)$ küme değerli bir dönüşüm, $F \in \mathcal{F}$ ve $\sigma \geq 0$ şeklinde olmak üzere $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $F_\sigma^x \subseteq X$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$F_\sigma^x = \{y \in Tx: F(m(x, y)) \leq F(m(x, Tx)) + \sigma\}.$$

Açıktır ki $\sigma_1 \leq \sigma_2$ için $F_{\sigma_1}^x \subseteq F_{\sigma_2}^x$ 'dir. Şimdi aşağıdaki durumlar için F_σ^x ailesini inceleyelim:

- Eğer $T: X \rightarrow A(X)$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm ise $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve her $\sigma \geq 0$ için $F_\sigma^x \neq \emptyset$ 'dir.
- Eğer $T: X \rightarrow C_m(X)$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm ise bazı $x \in X$ ve $\sigma > 0$ için F_σ^x boş kümeye eşit olabilir. Gerçekten, $X = \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\}$ ve $m(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde alınırsa bu durumda (X, m) bir M -metrik uzaydır. Şimdi eğer $T: X \rightarrow C_m(X)$ ve $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri sırasıyla,

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{1}{n}: n > 2, n \in \mathbb{N}\} & , \quad x = 1 \\ X & , \quad d.d. \end{cases}$$

ve

$$F(\alpha) = \begin{cases} \ln \alpha & , \quad \alpha \leq \frac{1}{2} \\ 2\alpha & , \quad \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

olacak şekilde tanımlanırsa bu durumda $x = 1$ ve $\sigma = \frac{1}{2}$ için,

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{2}}^1 &= \left\{y \in T1: F(m(1, y)) \leq F(m(1, T1)) + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{y \in \left\{\frac{1}{n}: n > 2, n \in \mathbb{N}\right\}: 2 \cdot \left(\frac{1+y}{2}\right) \leq \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{y \in \left\{\frac{1}{n}: n > 2, n \in \mathbb{N}\right\}: 1+y \leq \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{y \in \left\{\frac{1}{n}: n > 2, n \in \mathbb{N}\right\}: y \leq \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olup böylece istenilen gösterilmiş olur.

- Eğer $T: X \rightarrow C_m(X)$ (hatta $T: X \rightarrow P(X)$) ve $F \in F_*$ olsun. O zaman $m(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ ve her $\sigma > 0$ için $F_\sigma^x \neq \emptyset$ 'dir. Gerçekten, (F_4) özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} F_\sigma^x &= \{y \in Tx: F(m(x, y)) \leq F(m(x, Tx)) + \sigma\} \\ &= \{y \in Tx: F(m(x, y)) \leq F(\inf\{m(x, y): y \in Tx\}) + \sigma\} \\ &= \{y \in Tx: F(m(x, y)) \leq \inf\{F(m(x, y)): y \in Tx\} + \sigma\} \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi yukarıdaki durumları dikkate alarak iki yeni sonucumuzu ifade ve ispat edelim:

4.2.2. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzay, $T: X \rightarrow A(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $m(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ için,

$$\left. \begin{aligned} \tau + F(m(y, Ty)) &\leq F(m(x, y)) \\ \text{ve} \\ \alpha m(y, y) &\leq m(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde bir $y \in F_\sigma^x$ ve $0 < \alpha < 1$, $0 < \tau$ var olsun. Eğer $0 \leq \sigma < \tau$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmasın. Bu durumda her $x \in X$ için $m(x, Tx) > 0$ 'dır. Gerçekten $m(x, Tx) = 0$ ise bu durumda $Tx \in A(X)$ olduğu için $x \in Tx$ 'dir. O halde her $x \in X$ için $m(x, Tx) > 0$ olur ki bu durumda $Tx \in A(X)$ olduğundan her $0 \leq \sigma$ için F_σ^x kümesi boştan farklıdır. Şimdi kabul edelim ki $x_0 \in X$ başlangıç noktası olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \tau + F(m(x_1, Tx_1)) &\leq F(m(x_0, x_1)) \\ \text{ve} \\ \alpha m(x_1, x_1) &\leq m(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_1 \in F_{\sigma}^{x_0}$ var ve $x_1 \in X$ için,

$$\begin{aligned} \tau + F(m(x_2, Tx_2)) &\leq F(m(x_1, x_2)) \\ \text{ve} \\ \alpha m(x_2, x_2) &\leq m(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in F_{\sigma}^{x_1}$ vardır. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left. \begin{aligned} \tau + F(m(x_{n+1}, Tx_{n+1})) &\leq F(m(x_n, x_{n+1})) \\ \text{ve} \\ \alpha m(x_{n+1}, x_{n+1}) &\leq m(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_{n+1} \in F_{\sigma}^{x_n}$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi elde edilir. Biz (x_n) dizisinin bir M -Cauchy dizisi olduğunu göstermek istiyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in F_{\sigma}^{x_n}$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$F(m(x_n, x_{n+1})) \leq F(m(x_n, Tx_n)) + \sigma \quad (4.10)$$

Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 birlikte değerlendirildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} F(m(x_{n+1}, Tx_{n+1})) &\leq F(m(x_n, Tx_n)) + \sigma - \tau \\ \text{ve} \\ F(m(x_{n+1}, x_{n+2})) &\leq F(m(x_n, x_{n+1})) + \sigma - \tau \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F(m(x_n, x_{n+1})) \leq F(m(x_0, x_1)) + n(\sigma - \tau) \quad (4.11)$$

$$F(m(x_n, Tx_n)) \leq F(m(x_0, Tx_0)) + n(\sigma - \tau) \quad (4.12)$$

olup Eş. 4.11' den $\lim_{n \rightarrow \infty} F(m(x_n, x_{n+1})) = -\infty$ elde edilir. (F_2) ve (F_3) özelliklerinden yararlanılarak sırasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_{n+1}) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (m(x_n, x_{n+1}))^k F(m(x_n, x_{n+1})) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ varlığı gösterilir. Bu durumda tekrardan Eş. 4.11 kullanıldığında her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} (m(x_n, x_{n+1}))^k F(m(x_n, x_{n+1})) - (m(x_n, x_{n+1}))^k F(m(x_0, x_1)) \\ \leq (m(x_n, x_{n+1}))^k n(\sigma - \tau) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(m(x_n, x_{n+1}))^k = 0 \quad (4.14)$$

elde edilir. Eş. 4.14'den $n \geq n_1$ olduğunda $n(m(x_n, x_{n+1}))^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için,

$$m(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \quad (4.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki $m, n \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ve Eş. 4.15' den dolayı,

$$\begin{aligned} m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} &\leq (m(x_n, x_{n+1}) - m_{x_n x_{n+1}}) + \cdots + (m(x_{m-1}, x_m) - m_{x_{m-1} x_m}) \\ &\leq m(x_n, x_{n+1}) + m(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + m(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} m(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ serinin yakınsaklığından dolayı $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $m(x_n, x_m) - m_{x_n x_m} \rightarrow 0$ elde edilir. Ayrıca Eş. 4.9 ve Eş. 4.15 eşitsizlikleri dikkate

alındığında görülecektir ki $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, x_n) = 0$ olup $n, m \rightarrow \infty$ için $m(x_n, x_m) \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisinin bir M -Cauchy dizisi olduğunu söyleyebiliriz. (X, m) M -tam M -metrik uzay olduğundan (x_n) dizisinin M -yakınsak olduğu ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} m(x_n, x_m) = m(z, z)$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktasının var olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan Eş. 4.12 ve (F_2) özelliğinden yararlanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = 0$ elde edilir. Hipotezden $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ve (x_n) dizisi $z \in X$ noktasına M -yakınsak olduğundan,

$$0 < f(z) = m(z, Tz) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} m(x_n, Tx_n) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teoremdе olduğu gibi $C_m(X)$ küme değеrli dönüşümler için sabit nokta teoreminin verilebilmesi için $\mathcal{F}$ ailesi yerine $\mathcal{F}_*$ ailesi göz önüne alınmalıdır:

4.2.3. Teorem

(X, m) M -tam M -metrik uzay, $T: X \rightarrow C_m(X)$ küme değеrli bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}_*$ olsun. Bu durumda $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için,

$$\left. \begin{array}{l} \tau + F(m(y, Ty)) \leq F(m(x, y)) \\ \text{ve} \\ \alpha m(y, y) \leq m(x, y) \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde bir $y \in F_\sigma^x$ ve $0 < \alpha < 1$, $0 < \tau$ var olsun. Eğer $0 < \sigma < \tau$ olup $f(x) = m(x, Tx)$ dönüşümü τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki T dönüşümü bir sabit noktaya sahip olmasın. Bu durumda her $x \in X$ için $m(x, Tx) > 0$ dır. Gerçekten $m(x, Tx) = 0$ ise bu durumda $x \in \overline{Tx^m} = Tx$ olduğu için $x \in Tx$ 'dir. $F \in \mathcal{F}_*$ olduğundan $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için ve her $0 < \sigma$

için F_σ^x kümesi boştan farklıdır. İspatın kalan kısmı Teorem 4.2.2'nin ispatında olduğu gibi $Tz \in C_m(X)$ dikkate alınarak tamamlanır.

Şimdi ise aşağıda vereceğimiz örnek ile hem Teorem 4.2.3 varken neden Teorem 4.2.2'ye ihtiyaç duyulduğunu hem de Teorem 4.2.3'ün bilinen Feng-Liu sabit nokta teoremini içeren ve dördüncü bölümün ilk kısmında yer alan Teorem 4.1.2'nin bir genelleştirmesi olduğunu göstermesi amaçlanmaktadır.

Örnek

$X = \left\{0, \frac{1}{n^2} : n \geq 2, n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere bu küme üzerindeki $m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü $m(x, y) = x + y$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, m) M -tam M -metrik uzaydır. Şimdi $T: X \rightarrow A(X)$ dönüşümünü,

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\} & , \quad x = \frac{1}{n^2} \\ \{0\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ve $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü ise

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha}{\sqrt{\alpha}} & , \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ 1 + \alpha & , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_*$ ve $f(x) = m(x, Tx)$ fonksiyonu τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli. Teorem 4.2.2'nin bütün hipotezlerinin sağlandığını göstermek için Eş. 4.16 ile verilen büzülme koşulunun $m(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ ve $\alpha, \sigma < \tau = 2,5$ için sağlandığını göstermeliyiz. Gerçekten, $x = \frac{1}{n^2}, n \geq 2$ için $y = \frac{1}{(n+1)^2} \in F_{\sigma}^{\frac{1}{n^2}}$ alırsak Eş. 4.16' dan,

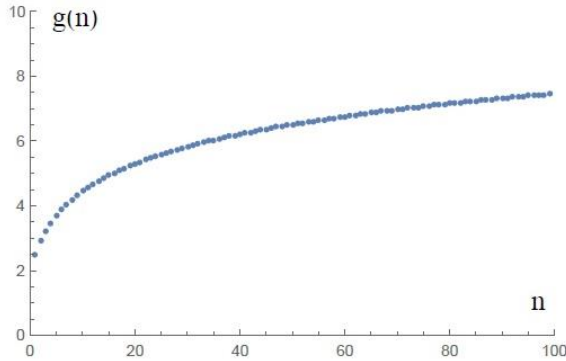
$$\tau + F(m(y, Ty)) \leq F(m(x, y)) \Leftrightarrow \tau + F\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right) \leq F\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tau + F\left(\frac{2n^2 + 6n + 5}{(n+1)^2(n+2)^2}\right) \leq F\left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}\right)$$

olup F dönüşümünün tanımını kullanarak her $n \geq 2$ için,

$$g(n) = \left[\ln\left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}\right) \frac{n(n+1)}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} \right] - \left[\ln\left(\frac{2n^2 + 6n + 5}{(n+1)^2(n+2)^2}\right) \frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{2n^2 + 6n + 5}} \right]$$

olmak üzere $\tau \leq g(n)$ dir. Aşağıdaki çizelge ve grafikte görüldüğü gibi $g: \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu artan olduğu için en küçük değerini $n = 2$ için alır. Buna göre $g(2) = 2,50725$ olduğundan $\tau \leq g(2)$ olup Eş. 4.16 koşulu sağlanır. Sonuç olarak Teorem 4.2.2'nin bütün koşulları sağlanır ve gerçekten T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.



n	$g(n)$	n	$g(n)$
2	2.50725	52	6.53959
7	3.87812	57	6.66699
12	4.55806	62	6.78385
17	5.01566	67	6.89180
22	5.36102	72	6.99209
27	5.63848	77	7.08574
32	5.87037	82	7.17357
37	6.06958	87	7.25627
42	6.24417	92	7.33440
47	6.39958	97	7.40844

Diğer taraftan Teorem 4.1.2'nin büzülme koşulu dışında bütün koşulları sağlanır. Gerçekten,

$x = \frac{1}{n^2}, n \geq 2$ için $m(x, Tx) > 0$ dir. O halde $Tx = \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} \right\}$ olduğundan

$y = \frac{1}{(n+1)^2} \in T_b^x(m)$ almalıyız. Şimdi kabul edelim ki $c < b$ olacak şekilde bir

$b, c \in (0, 1)$ için Teorem 4.1.2'nin büzülme koşulu sağlansın. Bu durumda $n \geq 2$ için,

$$\begin{aligned}
 m\left(\frac{1}{(n+1)^2}, T\frac{1}{(n+1)^2}\right) &\leq cm\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
 &\Leftrightarrow m\left(\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+2)^2}\right) \leq cm\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \leq c\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \leq c \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \leq c$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $1 \leq c$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde Teorem 4.1.2 bu örneğe uygulanamaz.

4.3. M_b -Metrik Uzaylarda Karma Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bir önceki bölümde (4.1 ve 4.2) Asadi ve arkadaşları tarafından üretilen standart metrik uzayların bir genelleştirmesi olan M -metrik uzaylar ve bu uzay üzerinde tanımlı dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri literatürde var olan çalışmaları genişletecek şekilde ifade ve ispat edildi. Diğer taraftan literatürde Czerwik tarafından tanımlanan standart metrik uzayların bir başka genelleştirmesi olan b -metrik uzay kavramı bulunmaktadır[47]. Yakın zamanda Mlaiki ve arkadaşları hem M -metrik hem de b -metriği dikkate alarak bu uzayları genişletecek şekilde M_b -metrik kavramını aşağıdaki şekilde tanımladılar [11]:

4.3.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$m_b 1) m_b(x, y) = m_b(x, x) = m_b(y, y) \Leftrightarrow x = y,$$

$$m_b 2) m_{bxy} = \min\{m_b(x, x), m_b(y, y)\} \leq m_b(x, y),$$

$$m_b 3) m_b(x, y) = m_b(y, x),$$

$$m_b 4) m_b(x, y) - m_{bxy} \leq s\{(m_b(x, z) - m_{bxz}) + (m_b(y, z) - m_{byz})\} - m_b(z, z)$$

olacak şekilde $s \geq 1$ reel sayısı vardır.

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir M_b -metrik denir ve (X, m_b) ikilisine de M_b -metrik uzay denir. Buradaki s reel sayısına M_b -metriğin katsayısı denir.

Uyarı

X üzerinde tanımlanan bir $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ M_b -metriğin tanımından anlaşılacağı üzere herhangi bir $x \in X$ için $m_b(x, x)$ sifıra eşit olmayabilir. Ancak Mlaiki ve arkadaşları tarafından verilen yukarıdaki tanımın $m_b 4)$ koşulunda $x = y = z$ için $0 \leq -m_b(x, x)$ olup m_b metriği negatif olmayan değerler aldığından $m_b(x, x) = 0$ elde edilir. Bu problemin üstesinden gelmek için $m_b 4)$ koşulu yerine aşağıdaki $m_b 4) *$ koşulunu önerdik:

$m_b 4) *$ Her $x, y, z \in X$ için öyle bir $s \geq 1$ reel sayısı var öyle ki aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$m_b(x, y) - m_{bxy} \leq s\{(m_b(x, z) - m_{bxz}) + (m_b(y, z) - m_{byz})\}$$

Bu bölümün devamında M_b -metrik uzay kavramı için $m_b 1)$, $m_b 2)$, $m_b 3)$ ile birlikte bizim tanımladığımız $m_b 4) *$ koşulunu kullanacağız. Tanımdan açıktır ki her M -metrik uzay ve b -metrik uzay aynı zamanda M_b -metrik uzaydır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği göstermektedir.

Örnek

$X = [0, \infty)$ ve bu küme üzerindeki $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü $m_b(x, y) = \min\{x^p, y^p\} + |x - y|^p$, $p > 1$ şeklinde tanımlanırsa bu dönüşüm X üzerinde $s = 2^p$ katsayısı ile bir M_b -metriktir. Ancak, bu dönüşüm ne M -metrik ne de b -metriktir. Aynı zamanda $x = y = z \neq 0$ için $m_b 4)$ koşulu sağlanmadığından, bu dönüşüm Mlaiki ve arkadaşlarının tanımına göre M_b -metrik değildir.

(X, m_b) bir M_b -metrik uzay ve $x \in X$ olmak üzere x merkezli $r > 0$ çaplı açık yuvar,

$$B(m_b, x, r) = \{y \in X: m_b(x, y) < m_{bxy} + r\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir $U \subseteq X$ açık olması için gerek ve yeter koşul her $x \in U$ için $B(m_b, x, r) \subseteq U$ olacak şekilde $r > 0$ reel sayısının var olmasıdır. X 'in bütün açık altkümelerinin ailesini τ_{m_b} ile gösterirsek bu aile X üzerinde bir topoloji belirtir. Bu bölümün devamında bir $A \subseteq X$ 'in τ_{m_b} topolojisine göre kapanışını $\overline{A^b}$ ve τ_{m_b} topolojisine göre X 'in bütün kapalı altkümelerinin ailesini $C_b(X)$ ile göstereceğiz. Her kısmi metrik uzay aynı zamanda M_b -metrik uzay ve her kısmi metrik p boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir

T_0 -topolojisi üretmesine rağmen τ_{m_b} topolojisi bir T_0 -topolojisi olmayabilir. Gerçekten, $X = [0,1]$ ve bu küme üzerindeki $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü $m_b(x, y) = \min\{x, y\}$ şeklinde tanımlanırsa $s = 2$ katsayısı ile (X, m_b) bir M_b -metrik uzaydır. Bu durumda her $r > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} B(m_b, x, r) &= \{y \in X: m_b(x, y) < m_{bxy} + r\} \\ &= \{y \in X: 0 < r\} = X \end{aligned}$$

olup $\tau_{m_b} = \{\emptyset, X\}$ olduğundan bir T_0 -topolojisi değildir.

Uyarı

(X, m_b) ikilisi $s \geq 1$ katsayısı ile bir M_b -metrik uzay ve $M_{bxy} = \max\{m_b(x, x), m_b(y, y)\}$ olmak üzere

$$b_m(x, y) = m_b(x, y) - 2m_{bxy} + M_{bxy}$$

şeklinde tanımlanan $b_m: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü X üzerinde $s \geq 1$ katsayısı ile bir b -metriktir.

4.3.1. Lemma

(X, m_b) ikilisi $s \geq 1$ katsayısı ile bir M_b -metrik uzay, (x_n) X 'de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına τ_{m_b} topolojisine göre yakınsaktır gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} (m_b(x_n, x) - m_{bx_nx}) = 0$ olmasıdır. Gerçekten, $x_n \xrightarrow{\tau_{m_b}} x$ ve $r > 0$ olsun. Buna göre $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B(m_b, x, r)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan $n \geq n_0$ olduğunda $m_b(x_n, x) < m_{bx_nx} + r$ olur ki böylece $|m_b(x_n, x) - m_{bx_nx}| < r$ elde edilir. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} (m_b(x_n, x) - m_{bx_nx}) = 0$ olması demektir. İspatın diğer tarafı Lemma 4.1.1'de olduğu gibi yapılabilir.

4.3.2. Tanım

(X, m_b) bir M_b -metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olmak üzere,

- i. Eğer (x_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_m)$ var ve sonlu ise bu diziye M_b -Cauchy dizisidir denir.
- ii. Eğer (X, m_b) uzayında her M_b -Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına M_b -yakınsak ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_m) = m_b(x, x)$ ise bu uzaya M_b -tamdır denir.

Aşağıdaki önerme ispatsız verilecektir. Çünkü ispatı Lemma 2.2.4’de verilen ispata benzer şekilde yapılabilir.

4.3.1. Önerme

(X, m_b) bir M_b -metrik uzay, $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır:

- i. (x_n) bir M_b -Cauchy dizisidir gerek ve yeter koşul (x_n) dizisi (X, b_m) b -metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.
- ii. (X, m_b) M_b -tam M_b -metrik uzaydır gerek ve yeter koşul (X, b_m) tam b -metrik uzaydır.

Bunun yanında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_m(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (m_b(x_n, x) - m_{bx_nx}) = 0 \\ \text{ve} \\ \lim_{n, m \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_m) = m_b(x, x) \end{cases}$$

ilişkisi vardır.

Bu bölüme aşağıdaki düşünce ile devam edelim: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. X üzerindeki tanımlı bu T dönüşümü için Feng-Liu sabit nokta teoremi yardımıyla tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremi elde edebiliriz. Bunu yapmak için standart metrik uzaylarda her tek nokta kümesi kapalı olduğundan her $x \in X$ için Tx ’i tek nokta kümesi almak yeterlidir. Ancak τ_{m_b} , T_1 -topolojisi olamayabileceğinden (hatta T_0 -topolojisi olamayabileceğini gösterdik) bazı tek nokta kümeleri kapalı olmayabilir. Bu yüzden benzer yolla tek değerli dönüşümler için sabit nokta

teoremi elde edilemez. Bu problemi aşmak için Romaguera'nın çalışmasında olduğu gibi bir (X, m_b) M_b -metrik uzayı üzerinde tanımlı $X \cup C_b(X)$ değerli T dönüşümünü düşüneceğiz[23]. Burada (X, m_b) bir M_b -metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X \cup C_b(X)$ dönüşümü her $x \in X$ için Tx tek değerli veya $Tx \in C_b(X)$ anlamına gelmektedir. Bu dönüşümler için hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler olduğundan [23]'de olduğu gibi karma küme değerli dönüşüm kavramını kullanacağız.

(X, m_b) bir M_b -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X \cup C_b(X)$ karma küme değerli bir dönüşüm olsun. Pozitif bir sabit $k \in (0,1)$ ve $x \in X$ için $m_b(x, Tx) = \inf\{m_b(x, y): y \in Tx\}$ şeklinde tanımlanmak üzere,

$$T_k^x(m_b) = \{y \in Tx: km_b(x, y) \leq m_b(x, Tx)\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada eğer $|Tx| = 1$ ise $T_k^x(m_b)$ boştan farklıdır. Diğer taraftan $|Tx| > 1$ ve $m_b(x, Tx) > 0$ ise her $k \in (0,1)$ için $T_k^x(m_b)$ boştan farklıdır. Ancak $|Tx| > 1$ ve $m_b(x, Tx) = 0$ ise $T_k^x(m_b)$ boş kümeye eşit olabilir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği göstermektedir.

Örnek

$X = \left\{0, -1, -1 + \frac{1}{n}: n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$m_b(x, y) = \begin{cases} 0 & , & x = y \in X \setminus \{-1\} \\ 2 & , & x = y = -1 \\ 1 & , & x \neq y \in \{0, -1\} \\ |x - y| & , & x \neq y \in \left\{-1, -1 + \frac{1}{2n}: n > 1, n \in \mathbb{N}\right\} \\ 4 & , & d.d. \end{cases}$$

Bu durumda (X, m_b) , $s = 4$ katsayısı ile bir M_b -metrik uzaydır. Ancak m_b dönüşümü X üzerinde bir M -metrik değildir. Gerçekten eğer $x = 0, y = -1 + \frac{1}{2n}$ ve $z = -1$ alırsak bu durumda M -metriğin m_4) koşulu sağlanmaz. Şimdi $T: X \rightarrow X \cup C_b(X)$ dönüşümünü her $x \in X$ için $Tx = X$ olacak şekilde tanımlayalım. O halde $x = -1$ için $|Tx| > 1$ ve

$m_b(x, Tx) = 0$ olmasına rağmen her $y \in Tx$ için $m_b(x, y) > 0$ 'dır. Buna göre her $k \in (0,1)$ için $T_k^{-1}(m_b) = \emptyset$ olarak elde edilir.

Aşağıdaki lemma ve önerme ilerde vereceğimiz sonuçlar için oldukça önemli olup benzerleri M -metrik uzaylarda ifade edildiğinden ispatsız olarak verildi.

4.3.2. Lemma

(X, m_b) ikilisi s katsayısı ile bir M_b -metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $m_b(x, A) = 0$ ise $x \in \overline{A^b}$ dır.

4.3.2. Önerme

(X, m_b) bir M_b -metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $\inf\{m_b(x, y) - m_{bxy} : y \in A\} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in \overline{A^b}$ olmasıdır.

4.3.3. Tanım [23]

(X, p) bir kısmi metrik uzay ve T karma değerli bir dönüşüm olsun. Eğer $|Tx| = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$ olacak şekildeki her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $p(Tx, Tx) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, Tx)$ ise T dönüşümü x -yörüngesel süreklidir denir. Eğer T dönüşümü her $x \in X$ için x -yörüngesel sürekli ise (X, p) uzayında yörüngesel süreklidir denir.

4.3.4. Tanım [12]

(X, m_b) bir M_b -metrik uzay ve T karma küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer $|Tx| = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, x) = m_b(x, x)$ olacak şekildeki her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $m_b(Tx, Tx) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, Tx)$ ise T dönüşümü x -alt yörüngesel süreklidir denir. Eğer T dönüşümü her $x \in X$ için x -alt yörüngesel sürekli ise (X, m_b) uzayında alt yörüngesel süreklidir denir.

Uyarı

Eğer T dönüşümü bir x noktasında x -yörüngesel sürekli ise aynı zamanda x -alt yörüngesel sürekli dir. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği göstermektedir:

Örnek

$X = \left\{0, -1, -1 + \frac{1}{n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $m_b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$m_b(x, y) = \begin{cases} 0 & , & x = y \in X \\ 1 & , & x \neq y \in \{0, -1\} \\ |x - y| & , & x \neq y \in \left\{-1, -1 + \frac{1}{2n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\} \\ 4 & , & d.d. \end{cases}$$

Bu durumda (X, m_b) ikilisi $s = 4$ katsayısı ile bir M_b -metrik uzaydır. Ayrıca $T : X \rightarrow X \cup C_b(X)$ karma küme değerli dönüşümü ise

$$Tx = \begin{cases} X & , & x \in X \setminus \{-1\} \\ \{0\} & , & x = -1 \end{cases}$$

şeklinde olmak üzere $(x_n) = \left(-1 + \frac{1}{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini alalım. Açık tır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n = X$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, -1) = 0 = m_b(-1, -1)$ eşitliği vardır. Diğer taraftan $x = -1$ için,

$$m_b(Tx, Tx) = m_b(0, 0) = 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, Tx) = \liminf_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, 0) = 4$$

olup T dönüşümü $x = -1$ noktasında x -alt yörüngesel sürekli ancak x -yörüngesel sürekli değildir.

4.3.1. Teorem

(X, m_b) ikilisi $s \geq 1$ katsayısı ile bir M_b -tam M_b -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X \cup C_b(X)$ karma küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $|Tx| = 1$ veya $|Tx| > 1$ olduğunda $m_b(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için,

$$m_b(y, Ty) \leq cm_b(x, y)$$

ve

$$\alpha m_b(y, y) \leq m_b(x, y)$$

eşitsizliklerini ve $sc < k$ eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha, c, k \in (0, 1)$ ve $y \in T_k^x(m_b)$ var olsun. Burada $f(x) = m_b(x, Tx)$ dönüşümü alt yarı sürekli ise $m_b(z, Tz) = 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. Bunun yanında eğer $|Tz| > 1$ ise $z \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Eğer $|Tz| = 1$ ve T dönüşümü $z \in X$ noktasında z -alt yörüngesel sürekli ise $z \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

İspat

Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$, $m_b(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{c}{k}\right)^n m_b(x_0, x_1)$ ve $m_b(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{k}\right)^n m_b(x_0, Tx_0)$ olacak şekilde $(x_n) \subseteq X$ dizisinin varlığını göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki $x_0 \in X$ başlangıç noktası olsun. Buna göre iki durum vardır:

1. Durum: $|Tx_0| = 1$ olsun. Bu durumda hipotezden, $\alpha m_b(x_1, x_1) \leq m_b(x_0, x_1)$ koşuluna uygun ve aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $x_1 \in Tx_0$ vardır:

$$km_b(x_0, x_1) \leq m_b(x_0, Tx_0)$$

ve

$$m_b(x_1, Tx_1) \leq cm_b(x_0, x_1)$$

Burada $x_1 \in X$ noktası için yine iki durum söz konusudur: Eğer $|Tx_1| = 1$ ise yine hipotezden $\alpha m_b(x_2, x_2) \leq m_b(x_1, x_2)$ koşuluna uygun ve aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $x_2 \in Tx_1$ vardır:

$$km_b(x_1, x_2) \leq m_b(x_1, Tx_1)$$

ve

$$m_b(x_2, Tx_2) \leq cm_b(x_1, x_2)$$

Şimdi kabul edelim ki $|Tx_1| > 1$ olsun. Buna göre eğer $m_b(x_1, Tx_1) = 0$ ise $x_1 \in \overline{Tx_1^b} = Tx_1$ olup $x_1 \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. O halde $m_b(x_1, Tx_1) > 0$ olsun. Bu durumda $\alpha m_b(x_2, x_2) \leq m_b(x_1, x_2)$ koşuluna uygun aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $x_2 \in Tx_1$ vardır:

$$km_b(x_1, x_2) \leq m_b(x_1, Tx_1)$$

ve

$$m_b(x_2, Tx_2) \leq cm_b(x_1, x_2).$$

2. Durum: $|Tx_0| > 1$ olsun. Bu durumda eğer $m_b(x_0, Tx_0) = 0$ ise $x_0 \in \overline{Tx_0^b} = Tx_0$ olup $x_0 \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. O halde kabul edelim ki $m_b(x_0, Tx_0) > 0$ olsun. Hipotezden $\alpha m_b(x_1, x_1) \leq m_b(x_0, x_1)$ koşuluna uygun ve aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $x_1 \in Tx_0$ vardır:

$$km_b(x_0, x_1) \leq m_b(x_0, Tx_0)$$

ve

$$m_b(x_1, Tx_1) \leq cm_b(x_0, x_1)$$

1. Durum'a benzer şekilde eğer $|Tx_1| = 1$ ise yine hipotezden $\alpha m_b(x_2, x_2) \leq m_b(x_1, x_2)$ koşuluna uygun ve aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $x_2 \in Tx_1$ vardır:

$$km_b(x_1, x_2) \leq m_b(x_1, Tx_1),$$

ve

$$m_b(x_2, Tx_2) \leq cm_b(x_1, x_2)$$

Şimdi kabul edelim ki $|Tx_1| > 1$ olsun. Buna göre eğer $m_b(x_1, Tx_1) = 0$ ise $x_1 \in \overline{Tx_1^b} = Tx_1$ olup $x_1 \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. O halde $m_b(x_1, Tx_1) > 0$ olsun. Bu durumda c koşuluna uygun aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $x_2 \in Tx_1$ vardır:

$$km_b(x_1, x_2) \leq m_b(x_1, Tx_1)$$

ve

$$m_b(x_2, Tx_2) \leq cm_b(x_1, x_2).$$

Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$km_b(x_n, x_{n+1}) \leq m_b(x_n, Tx_n) \quad (4.17)$$

$$m_b(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq cm_b(x_n, x_{n+1}) \quad (4.18)$$

$$\alpha m_b(x_{n+1}, x_{n+1}) \leq m_b(x_n, x_{n+1}) \quad (4.19)$$

olacak şekilde $(x_n) \subseteq X$ dizisi elde edilir. Eş. 4.17 ve Eş. 4.18'den yararlanarak ise istenilen yani aşağıdaki koşulları sağlayan $(x_n) \subseteq X$ dizisinin varlığı gösterilmiş olur:

$$m_b(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{k}\right)^n m_b(x_0, Tx_0) \quad (4.20)$$

ve

$$m_b(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{c}{k}\right)^n m_b(x_0, x_1) \quad (4.21)$$

O halde Eş. 4.20 ve Eş. 4.21 kullanılarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, Tx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Şimdi $m > n$ olacak şekildeki $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} m_b(x_n, x_m) - m_{bx_n x_m} &\leq s\{(m_b(x_n, x_{n+1}) - m_{bx_n x_{n+1}}) + (m_b(x_{n+1}, x_m) - m_{bx_{n+1} x_m})\} \\ &\leq s(m_b(x_n, x_{n+1}) - m_{bx_n x_{n+1}}) \\ &\quad + s^2 \left\{ (m_b(x_{n+1}, x_{n+2}) - m_{bx_{n+1} x_{n+2}}) \right. \\ &\quad \left. + (m_b(x_{n+2}, x_m) - m_{bx_{n+2} x_m}) \right\} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\leq s(m_b(x_n, x_{n+1}) - m_{bx_n x_{n+1}}) + \dots \\ &\quad + s^{m-n-1}(m_b(x_{m-1}, x_m) - m_{bx_{m-1} x_m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq s(m_b(x_n, x_{n+1})) + \dots + s^{m-n-1}(m_b(x_{m-1}, x_m)) \\
&\leq s\left(\frac{c}{k}\right)^n m_b(x_0, x_1) + \dots + s^{m-n}\left(\frac{c}{k}\right)^{m-1} m_b(x_0, x_1) \\
&\leq s\left(\frac{c}{k}\right)^n m_b(x_0, x_1) \left\{1 + \dots + \left(\frac{sc}{k}\right)^{m-n-1}\right\} \\
&\leq \frac{s\left(\frac{c}{k}\right)^n}{1 - \frac{sc}{k}} m_b(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir ki $c < k$ olduğundan,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_m) - m_{bx_n x_m} = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 4.19'dan dolayı

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha m_b(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_{n+1}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

eşitsizliği vardır. Buna göre Eş. 4.23 ve Eş. 4.24 birlikte değerlendirildiğinde

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. O halde $(x_n) \subseteq X$ bir M_b -Cauchy dizisidir. (X, m_b) bir M_b -tam M_b -metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, z) - m_{bx_n z} = 0 \quad (4.25)$$

ve

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} m_b(x_n, x_m) = m_b(z, z) \quad (4.26)$$

olacak şekilde $z \in X$ vardır. Şimdi gösterelim ki $z \in X$, T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Eş. 4.21, Eş. 4.24, Eş. 4.25 ve $f(x) = m_b(x, Tx)$ dönüşümünün alt yarı sürekliliği birlikte değerlendirildiğinde

$$0 \leq m_b(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, Tx_n) = 0$$

yani, $m_b(z, Tz) = 0$ elde edilir. Şimdi iki durum söz konusudur. Eğer $|Tz| > 1$ ise

$z \in \overline{Tz^b} = Tz$ olup $z \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Eğer $|Tz| = 1$ ise hipotezden T dönüşümü z noktasında z -alt yörüngesel sürekli olduğundan,

$$m_b(Tz, Tz) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, Tz)$$

elde edilir. Şimdi $m_b 4)$ özelliğinden,

$$m_b(x_n, Tz) - m_{bx_n Tz} \leq s\{(m_b(x_n, z) - m_{bx_n z}) + (m_b(z, Tz) - m_{bz Tz})\}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alındığında $m_b 2)$ özelliğinden,

$$0 \leq m_b(Tz, Tz) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_b(x_n, Tz) = 0$$

olup buradan $m_b(Tz, Tz) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $m_b(z, z) = 0$ ve $m_b(z, Tz) = 0$ olduğundan $m_b 1)$ özelliğinden $z = Tz$ elde edilir. Böylece z , T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Her standart metrik uzay, kısmi metrik uzay ve M -metrik uzay bir M_b -metrik uzay olduğundan aşağıdaki sonuçlar Teorem 4.3.1'den yararlanılarak elde edilebilir.

4.3.1. Sonuç (Feng-Liu Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) standart tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow C(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in X$ için,

$$d(y, Ty) \leq cd(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < c < k < 1$ ve $y \in T_k^x(d)$ var olsun. Eğer $f(x) = d(x, Tx)$ dönüşümü alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Standart metrik topolojisi T_1 -uzayı olduğundan $X \cup C_b(X) = C_b(X)$ 'dir. Diğer taraftan standart metriğin tanımından dolayı T dönüşümü alt yörüngesel süreklidir ve Eş. 4.19 otomatik olarak sağlanır. O halde Teorem 4.3.1'den dolayı T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

4.3.2. Sonuç

(X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X \cup C_p(X)$ karma küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda $|Tx| = 1$ veya $|Tx| > 1$ olduğunda $p(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için,

$$p(y, Ty) \leq cp(x, y)$$

ve $c < k$ eşitsizliklerini sağlayan bir $c, k \in (0, 1)$ ve $y \in T_k^x(p)$ var olsun. Eğer $f(x) = p(x, Tx)$ dönüşümü alt yarı sürekli ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

$|Tx| = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$ olacak şekildeki herhangi bir $(x_n) \subseteq X$ dizisini alalım. Kısmi metrik tanımından her zaman $p(Tx, Tx) \leq p(x, Tx)$ olduğundan $p(Tx, Tx) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} p(x_n, Tx) = p(x, Tx)$ olup T dönüşümü her $x \in X$ noktasında x -alt yörüngesel süreklidir. O halde Teorem 4.3.1'den dolayı T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

4.3.3. Sonuç

(X, m) ikilisi M -tam M -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X \cup C_m(X)$ karma değerli dönüşüm olsun. Bu durumda $|Tx| = 1$ veya $|Tx| > 1$ olduğunda $m(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için,

$$m(y, Ty) \leq cm(x, y)$$

$$am(y, y) \leq m(x, y)$$

ve $c < k$ eşitsizliklerini sağlayan bir $\alpha, c, k \in (0,1)$ ve $y \in T_k^x(m)$ var olsun. Burada $f(x) = m_b(x, Tx)$ dönüşümü alt yarı sürekli ise $m_b(z, Tz) = 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. Bunun yanında eğer $|Tz| > 1$ ise $z \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Eğer $|Tz| = 1$ ve T dönüşümü $z \in X$ noktasında z -alt yörüngesel sürekli ise $z \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Aşağıdaki örneklerde tanımlanan uzaylar M -metrik uzay olmayıp M_b -metrik uzay olması ve sonuçlarımızı doğrular nitelikte olduğu için bu örnekler değerlidir.

Örnek

$X = \{0\} \cup [1,2) \cup (2, \infty)$ ve bu küme üzerindeki $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanırsa (X, m_b) ikilisi $s = 3$ katsayısı ile bir M_b -tam M_b -metrik uzaydır.

$$m_b(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y = 0 \\ 1 & , \quad x = y \in X \setminus \{0\} \\ \frac{x+y}{2} & , \quad x \neq y \in [1,2) \\ 1,2 & , \quad d.d. \end{cases}$$

Ancak bu şekilde tanımlanan m_b dönüşümü M -metrik değildir. Gerçekten, $x = 1,5, y = 1,7$ ve $z \in (2, \infty)$ alınırsa M -metrik tanımının $m_4)$ özelliği sağlanmaz. Şimdi $T: X \rightarrow X \cup C_b(X)$ karma küme değerli dönüşümünü,

$$Tx = \begin{cases} X & , \quad x = 3 + \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $f(x) = m_b(x, Tx)$ dönüşümü τ_{m_b} topolojisine göre alt yarı süreklidir. Diğer taraftan $|Tx| = 1$ veya $|Tx| > 1$ olduğunda $m_b(x, Tx) > 0$ olacak şekilde her $x \in X$ için $c = 0,1 < k = 0,8$ eşitsizliğini sağlayan bir $c, k \in (0,1)$ ve $y = 0 \in T_{0,8}^x(m_b)$ var $m_b(y, Ty) \leq cm_b(x, y)$ ile her $\alpha \in (0,1)$ için $\alpha m_b(0,0) \leq m_b(x, 0)$ eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca T dönüşümü her $x \in X \setminus \{3 + \frac{1}{2}\}$ noktasında x -alt yörüngesel sürekli olduğundan Teorem 4.3.1'i kullanarak T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek

$X = \{0,1\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n > 2, n \in \mathbb{N}\right\}$ ve bu küme üzerindeki $m_b: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü ise aşağıdaki gibi tanımlansın. Bu durumda (X, m_b) ikilisi $s = 4$ katsayısı ile bir M_b -tam M_b -metrik uzaydır:

$$m_b(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \in X \setminus \left\{\frac{1}{2n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\} \\ \min\{x, y\} & , \quad \begin{array}{l} x = 1 \text{ ve } y \in \left\{\frac{1}{2n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\} \\ \text{veya} \\ x \in \left\{\frac{1}{2n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ ve } y = 1 \end{array} \\ \max\{x, y\} & , \quad x, y \in \left\{\frac{1}{2n} : n > 1, n \in \mathbb{N}\right\} \\ \frac{1}{2} & , \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2m+1} \text{ ve } y = \frac{1}{2n} : n > 1, m \geq 1, n, m \in \mathbb{N} \\ \text{veya} \\ x = \frac{1}{2n} \text{ ve } y = \frac{1}{2m+1} : n > 1, m \geq 1, n, m \in \mathbb{N} \end{array} \\ 2 & , \quad d.d. \end{cases}.$$

Ancak m_b dönüşümü bir M -metrik değildir. Gerçekten, $x = 1, y = \frac{1}{2n+1}$ ve $z = \frac{1}{2m}$ alınırsa M -metrik tanımının $m4)$ özelliği sağlanmaz. Şimdi $T: X \rightarrow X \cup C_b(X)$ karma küme değerli dönüşümünü,

$$Tx = \begin{cases} \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2n+1} : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\right\} & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $f(x) = m_b(x, Tx)$ dönüşümü τ_{m_b} topolojisine göre alt yarı süreklidir. Diğer taraftan $|Tx| = 1$ veya $|Tx| > 1$ olduğunda $m_b(x, Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $c = 0, 1 < k = 0,5$ eşitsizliğini sağlayan bir $c, k \in (0,1)$ ve $y = 0 \in T_{0,8}^x(m_b)$ var $m_b(y, Ty) \leq cm_b(x, y)$ ile her $\alpha \in (0,1)$ için $\alpha m_b(0,0) \leq m_b(x, 0)$ eşitsizlikleri sağlanıyor olup T dönüşümü $|Tx| = 1$ olacak şekildeki her $x \in X$ noktasında x -alt yörüngesel sürekli olduğundan Teorem 4.3.1'i kullanarak T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

İlk bölümde tek değerli ve küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori uygulama alanlarıyla tanıtılarak önemine değinilmiş ve gelişiminin tarihsel süreci hakkında temel bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlerde yer alacak sonuçlarımıza hazırlık yapmak amacıyla temel tanım ve teoremlerimize yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir. Bunu yapmak için öncelikle M -metrik uzay üzerinde Caristi dönüşümü tanımlanmıştır. Ardından Caristi dönüşümleri ve bazı genelleştirilmiş Caristi dönüşümleri için sabit nokta teoremleri yardımıyla literatürdeki çalışmalar genişletilmiştir.

Dördüncü bölümde küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir. Öncelikle M -metrik uzaylar üzerinde farklı topolojik yapılar incelenmiştir. Ardından bu topolojiler dikkate alınarak bu topolojilere göre M -metrik uzaylar üzerinde tanımlı kapalı küme değerli dönüşümler için Feng-Liu tip sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Daha sonra bu çalışmayı daha da genişletmek adına $\mathcal{F}$ ve X 'in belirli özelliklerine sahip altkümelerinin $A(X)$ ailesi diğer taraftan $\mathcal{F}_*$ ve $C_m(X)$ ailesi birlikte dikkate alınarak küme değerli dönüşümler için iki yeni sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Son olarak bu bölümde literatürde daha önce ortaya konmuş M_b -metrik uzay kavramı üzerinde var olan problem giderilerek yeniden tanımlanmış ve bu uzay üzerinde tanımlı karma küme değerli dönüşümler için Feng-Liu tip sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Biz bu tez çalışmasında güncel kavramları literatürde var olan çalışmaları genişletecek şekilde ele aldık. Ancak, giriş kısmında belirttiğim çalışmalar dışında Banach Büzölme İlkesinin literatürde çok fazla genişlemesi bulunmaktadır. Bu bağlamda yakın zamanda tanımlanmış M -metrik uzay ve M_b -metrik uzay üzerinde elde edilecek yeni sonuçlar ile literatüre katkıda bulunulabilir.



KAYNAKLAR

1. Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
2. Rhoades, B. E. (1977). A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 226, 257-290.
3. Edelstein, M. (1961). An extension of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(1), 7-10.
4. Ćirić, L. B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical society*, 45(2), 267-273.
5. Shukla, S., Patel, D. K. and Gopal, D. (2017). Banach Fixed Point Theorem and Its Generalizations, In D. Gopal, P. Kumam and M. Abbas (Eds.). *Background and Recent Developments of Metric Fixed Point Theory*. New York: Chapman and Hall/CRC Press, 1-28.
6. Karapınar, E., Alqahtani, O. and Aydi, H. (2019). On interpolative Hardy-Rogers type contractions. *Symmetry*, 11(1), 8.
7. Caristi, J. (1976). Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying Inwardness Conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 215, 241-251.
8. Ran, A. C. M. and Reurings, M. C. B. (2004). A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(5), 1435-1443.
9. Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:94.
10. Asadi, M., Karapınar, E. and Salimi, P. (2014). New extension of p-metric spaces with some fixed-point results on M-metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014:18.
11. Mlaiki, N., Zarrad, A., Souayah, N., Mukheimer, A. and Abdeljawed, T. (2016). Fixed point theorems in M_b -metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis*, 7(5), 1-9.
12. Sahin, H., Altun, I. and Türkoğlu, D. (2018). Fixed point results for mixed multivalued mappings of feng-liu type on M_b -metric spaces. In K. Tas, D. Baleanu and J. A. T. Machado (Eds.). *Mathematical Methods in Engineering*. Gewerbestrasse: Springer, pp. 67-80.
13. Monfared, H., Azhini, M. and Asadi, M. (2017). A generalized contraction principle with control function on M-metric spaces. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22(2), 395-402

14. Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8(3), 457-459.
15. Bohnenblust, M. and Karlin, S. (1950). On a Theorem of Ville, Kuhn H. W. and Tucker A. W. (Eds.). *Contributions to the Theory of Games*. 1. Baskı. New Jersey: Princeton University Press.
16. Nadler, S. B. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2), 475-488.
17. Reich, S. (1972). Fixed points of contractive functions. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 5, 26-42.
18. Reich, S. (1974). Some fixed point problems. *Atti della Accademia nazionale dei Lincei*. 57, 194-198.
19. Mizoguchi, N. and Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 141(1), 177-188.
20. Feng, Y. and Liu, S. (2006). Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317(1), 103-112.
21. Pompeiu, D. (1905). Sur la continuité des fonctions de variables complexes. in *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, 7(3), 265-315.
22. Hausdorff, F. (1927). *Mengenlehre*. Berlin:Walter de Gruyter.
23. ROMAGUERA, S. (2013). On Nadler's fixed point theorem for partial metric spaces. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 1(1).
24. Matthews, S. G. (1994). Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728(1), 183-197.
25. Oltra, S. and Valero, O. (2004). Banach's fixed point theorem for partial metric spaces. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, XXXVI, 17-26.
26. Bae, J. S. (2003). Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 284(2), 690-697.
27. Suzuki, T. (2005). Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 302(2), 502-508.
28. Kirk, W. (1976). Caristi's fixed point theorem and metric convexity. *Colloquium Mathematicum*. XXXVI.
29. Romaguera, S. (2009). A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2010(1), 493298.

30. ACAR, Ö., Altun, I. and Romaguera B. S. (2013). Caristi's type mappings on complete partial metric spaces. *Fixed Point Theory*, 14(1), 3-10.
31. Abodayeh, K., Mlaiki, N., Abdeljawad, T. and Shatanawi, W. (2016). Relations between partial Metric Spaces and M-metric spaces, Caristi Kirk's theorem in M-metric type spaces. *Journal of Mathematical Analysis*, 7(3), 1-12.
32. Acar, Ö. and Altun, I. (2012). Some generalizations of Caristi type fixed point theorem on partial metric spaces. *Filomat*, 26(4), 833-837.
33. Gordji, M. E., Bahgani, H., Khodaei, H. and Ramezani M. (2012). Geraghty's fixed point theorem for special multi-valued mappings. *Thai Journal of Mathematics*, 10(2), 225-231.
34. Popescu, O. and Stan, G. (2017). A Generalization of Nadler's Fixed Point Theorem. *Results in Mathematics*, 72(3), 1525-1534.
35. Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Papageorgiou, N. S. (2004). Common fixed point theory for multivalued contractive maps of Reich type in uniform spaces. *Applicable Analysis*, 83(1), 37-47.
36. Ćirić, L. (2009). Multi-valued nonlinear contraction mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(7-8), 2716-2723.
37. Ćirić, L., Samet, B., Aydi, H. and Vetro, C. (2011). Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application. *Applied Mathematics and Computation*, 218(6), 2398-2406.
38. Shatanawi, W., Samet, B. and Abbas, M. (2012). Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in ordered partial metric spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4), 680-687.
39. Agarwal, R.P., Alghamdi, M. A. and Shahzad, N.(2012). Fixed point theory for cyclic generalized contractions in partial metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(1), 40.
40. Altun, I., Sahin, H. and Turkoglu, D. (2018). Fixed point results for multivalued mappings of feng-liu type on M-metric spaces, *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018(2018).
41. Sgroi, M. and Vetro, C. (2013). Multi-valued F-contractions and the solution of certain functional and integral equations, *Filomat*, 27(7), 1259-1268.
42. Piri, H. and Kumam, P. (2014). Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014(1), 210.
43. Cosentino, M., Jleli, M., Samet B. and Vetro, C. (2015). Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(1), 70.

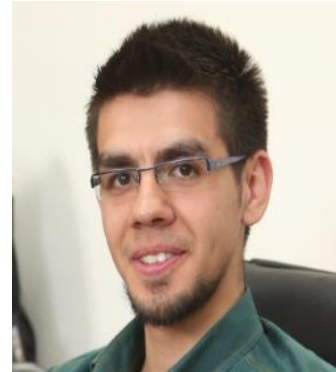
44. Dağ, H., Minak, G. and Altun, I. (2017). Some fixed point results for multivalued F-contractions on quasi metric spaces. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 111(1), 177-187.
45. Wardowski, D. (2018). Solving existence problems via F-contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(4), 1585-1598.
46. Sahin, H., Altun, I. and Turkoglu, D. (2018). Two fixed point results for multivalued F-contractions on M-metric spaces. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 1-11.
47. Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1(1), 5-11.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Hakan ŞAHİN
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 18.07.1989, Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (542) 730 81 37
 E-Posta : hakan.sahin@amasya.edu.tr



Eğitim

Derece	Okul/Program	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2013
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2011
Lise	Fatih Sultan Mehmet Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2012-2013	Amasya Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013-2017	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2018-Halen	Amasya Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

- Altun, I., Sahin, H. and Turkoglu, D. (2018). Fixed Point Results For Multivalued Mappings Of Feng-Liu Type On M-Metric Spaces, *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018.
- Sahin, H., Altun, I. and Turkoglu, D. (2018). Two fixed point results for multivalued F-contractions on M-metric spaces. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 1-11.

3. Sahin, H., Altun, I. and Türkoğlu, D. (2018). Fixed point results for mixed multivalued mappings of feng-liu type on M_b -metric spaces. In K. Tas, D. Baleanu and J. A. T. Machado (Eds.). *Mathematical Methods in Engineering*. Gewerbestrasse: Springer, pp. 67-80.

Hobiler

Sinema, Tiyatro, Bilgisayar Teknolojisi, Yüzme





GAZİ GELECEKTİR..