

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TERS WEIBULL DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN BAYESÇİ
YÖNTEMLE TAHMİNİ

İDİL BÜŞRA KUTLU

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

İdil Büşra KUTLU tarafından hazırlanan “Ters Weibull Dağılım Parametrelerinin Bayesci Yöntemle Tahmini” adlı tez çalışması 29/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Kamile ŞANLI KULA
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Dr. Öğretim Üyesi Levent ÖZBEK
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26.03.2019



İdil Büşra Kutlu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TERS WEIBULL DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN BAYESÇİ YÖNTEMLE TAHMİNİ

İdil Büşra Kutlu

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Esin Köksal Babacan

Ters Weibull dağılımı, yaşam süresi verilerini analiz etmek için uygun bir modeldir. Ters Weibull dağılımı farklı birçok alanda uygulama olanağına sahip bir dağılımdır. Bu nedenle, dağılımın parametrelerinin etkin bir şekilde tahmin edilmesi önemlidir. Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için kullanılan birçok yöntem vardır. Bunlar; en küçük kareler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi, momentler yöntemi ve Bayesci yöntemlerdir. Bu çalışmada, parametreler için tahmin yöntemleri incelenmiş ve etkinlikleri HKO ölçütüne göre karşılaştırılmıştır. Türkçe literatürde bulunmayan Ters Weibull dağılımının parametrelerinin Bayesci yöntemle tahmini araştırılmış ve yazılan simülasyon programları ile farklı önseller kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir. Bu çalışmada amaç, Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etme yöntemlerini araştırmak ve Bayesci yöntem ile diğer tahmin yöntemlerinin etkinliklerini karşılaştırmaktır. Aynı zamanda, Bayesci yöntemle parametre tahminleri elde edilirken değişik önsellerin kullanımı ile sonuçların nasıl değiştiği çeşitli simülasyonlar ile gözlenmeye çalışılmıştır. Bu kapsamda, Ters Weibull dağılımında tek parametre için farklı önsel dağılımlar kullanılarak, farklı kayıp fonksiyonları altında Bayesci sonuç çıkarımına değinilmiş, sonrasında iki parametrelili ters Weibull dağılımı için her iki parametrenin de bilinmediği durumda Lindley yaklaşımı ve Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinden Metropolis-Hasting algoritması kullanılarak Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Farklı örneklem boyutları için, en çok olabilirlik, en küçük kareler ve Bayes tahminleri Monte Carlo simülasyonu kullanılarak elde edilmiş ve hata kareler ortalamaları bakımından karşılaştırılmıştır.

Nisan 2019, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bayes yaklaşımı, Ters Weibull dağılımı, kayıp fonksiyonları, önsel dağılımlar, Monte Carlo simülasyonu, Lindley yaklaşımı

ABSTRACT

Master Thesis

PARAMETER ESTIMATION OF THE INVERSE WEIBULL DISTRIBUTION BY BAYESIAN METHOD

İdil Büşra Kutlu

Ankara University
Science Institute
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Esin Köksal Babacan

The Inverse Weibull distribution is a suitable model that analyze lifetime specifications. The distribution has application area in many different fields. For this reason, it is important that estimate these parameters efficiently. There are lots of methods to estimate the Inverse Weibull distribution parameters. These are; least squares method, maximum likelihood method, a method of moments and Bayesian approach. In this study, the estimation methods for parameters have examined and estimation efficiency according to various criteria has been compared. Estimation of the parameters of the Inverse Weibull distribution, which is not in the Turkish literature, was investigated by Bayesian method and parameter estimations were obtained by using different priors. The aim of the study is to investigate the methods for estimation of the parameters of distribution and compare estimation efficiency with a Bayesian approach. At the same time, while parameter estimation was trying to get by Bayesian approach, how the result can change with using various prior has been tried to observe with several simulations. In this context, under the different loss functions have mentioned Bayesian inference using different prior distributions for one parameter. Following, the Bayes estimators have obtained using the Lindley approximation and Metropolis Hasting algorithms from the Markov Chain Monte Carlo methods in the situation that neither of the parameters unknown for the bi-parameter Inverse Weibull distribution. The estimators have obtained under least squares method, maximum likelihood method and the Bayesian estimation method, using the Monte Carlo simulation for the different sample size and compared under the mean squared error.

April 2019, 63 pages

Key words: Bayesian approach, the Inverse Weibull distribution, loss functions, prior distributions, Monte Carlo simulation, Lindley approximation

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez hazırlama sürecim boyunca, bilgi birikimi ve mesleki tecrübesiyle bana her zaman yol gösteren, daima moral ve güç veren, bir an olsun desteğini esirgemeyen saygı değer hocam ve danışmanım sayın Doç. Dr. Esin Köksal Babacan’a şükran ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Gerek yüksek lisans eğitimim, gerekse tez çalışmalarım sırasında yardımlarını ve desteğini her zaman hissettiğim çok kıymetli hocam sayın Dr. Öğretim Üyesi Levent Özbek’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatı boyunca tek gayesi ailesini en rahat koşullarda yaşatmak olan, bu uğurda her türlü sıkıntıyı kendisi göğüsleyen, eğitime verdiği önemi sunduğu sınırsız maddi ve manevi desteği ile her daim biz çocuklarına hissettiren, sonsuz sevgisini bizlerden esirgemeyen sevgili babam Fikret Aktaş’a; hayatını ailesine ve çocuklarına adayan ve bu uğurda hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan kıymetli annem Emine Aktaş’a; kardeşliğin önemini ve sıcaklığını bana yaşatan manevi desteğini her zaman hissettiğim sevgili kardeşim Furkan Aktaş’a; var oluş sebebim olan aileme sonsuz şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Evlilik hayatım boyunca iyi-kötü her koşulda yanımda duran, her konuda bana sabırla destek olan, bana olan inancını ve güvenini daima hissettiren sevgili eşim Tunay Kutlu’ya her türlü desteği için teşekkür ederim.

Ve son olarak bana dünyanın en güzel duygusu olan anneliği ve sınırsız sevginin gücünü tattıran, hayata dört elle sarılmamı sağlayan, biricik kızım Eylül Kutlu’ya varlığıyla bana güç verdiği ve hayatıma ışık saçtığı için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI.....	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	1
2. TERS WEİBULL DAĞILIM PARAMETRELERİNİN TAHMİNİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER.....	10
2.1. Grafik Yöntemi.....	10
2.2. En Küçük Kareler Yöntemi.....	11
2.3. Momentler Yöntemi.....	12
2.4. En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	13
3. BAYESÇİ YÖNTEMLE PARAMETRE TAHMİNİ.....	16
3.1. Bayesci Yaklaşım.....	16
3.2. Literatürde Sıklıkla Kullanılan Önsel Dağılımlar.....	17
3.2.1. Düzgün önsel dağılım.....	18
3.2.2. Jeffreys'in sabit önseli.....	18
3.2.3. Belirsiz önsel dağılım.....	19
3.3. Literatürde Sıklıkla Karşılaşılan Kayıp Fonksiyonları.....	21
3.3.1. Entropi kayıp fonksiyonu.....	21
3.3.2. Yarı karesel kayıp fonksiyonu.....	21
3.3.3. Lineer olmayan üstel kayıp fonksiyonu.....	22
3.3.4. Hata kareler kayıp fonksiyonu.....	22
3.3.5. Linex kayıp fonksiyonu.....	22
3.3.6. Precautionary kayıp fonksiyonu.....	23
3.3.7. Al-Bayyati'nin kayıp fonksiyonu.....	23
4. TERS WEİBULL DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN BAYESÇİ YÖNTEMLE TAHMİNİ.....	24
4.1. Tek Parametresi Bilinmeyen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicisinin Elde Edilmesi.....	24

4.1.1. Hata kareler kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi.....	24
4.1.2. Entropi kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi.....	25
4.1.3. Linex kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi.....	26
4.1.4. Yarı karesel kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi.....	28
4.1.5. Non-Lineer Üstel kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi.....	30
4.2. İki Parametresi Bilinmeyen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicilerinin Elde Edilmesi	31
4.2.1. Lindley yaklaşımı.....	34
4.2.2. Lindley yaklaşımı ile Ters Weibull dağılımının parametrelerinin Bayesci yöntemle tahmini.....	37
5. MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YÖNTEMLERİ	41
5.1. Metropolis Algoritması	42
5.2. Metropolis-Hasting Algoritması	43
5.2.1. Tek değişkenli dağılımlar için Metropolis-Hasting algoritması.....	43
5.2.2. Çok değişkenli dağılımlar için Metropolis Hasting algoritması.....	44
5.3. Gibbs Algoritması	45
6. UYGULAMA ÇALIŞMALARI	47
6.1. Tek Parametresi Bilinen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicilerinin Elde Edilmesine ilişkin Simülasyon Çalışması	47
6.2. İki Parametresi Bilinmeyen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicilerinin Elde Edilmesine ilişkin Simülasyon Çalışması	49
6.3. Tahmin Yöntemlerinin Gerçek Veriye Uygulanması ve Sonuçlar.....	53
7. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	56
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	63

SİMGELER DİZİNİ

μ	Beklenen değer
σ^2	Varyans
$\sim$	Benzer
$\approx$	Yaklaşık
α	Alfa
λ	Lambda
β	Beta
Γ	Gamma
θ	Teta
η	Eta
Θ	Teta
δ	Delta
σ	Sigma
$\propto$	Orantılıdır
∞	Sonsuz
$\in$	Elemanıdır
$\prod$	Çarpım
$\sum$	Toplam
$\int$	İntegral

Kısaltmalar

MZMC	Markov Zinciri Monte Carlo
MCSH	Monte Carlo Standart Hata
MH	Metropolis-Hasting
HKO	Hata Kareler Ortalaması
EÇOB	En Çok Olabilirlik
EKK	En Küçük Kareler

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Şekil parametresi sabitken ölçek parametresinin farklı değerleri için Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	4
Şekil 1.2 Ölçek parametresi sabitken şekil parametresinin farklı değerleri için Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	4
Şekil 6.1 İki parametrenin de bilinmediği durum için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri	50
Şekil 6.2 İki parametrenin de bilinmediği durum için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri için histogramlar ve saçılım grafikleri	50
Şekil 6.3 İki parametrenin de bilinmediği durum için tahmin ile veri uyumu	51
Şekil 6.4 Gerçek veri seti için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri	54
Şekil 6.5 Gerçek veri seti için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri için histogramlar ve saçılım grafikleri.....	55
Şekil 6.6 Gerçek veri seti için Tahmin ile veri uyumu.....	55

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 Eşlenik dağılımlar tablosu.....	20
Çizelge 6.1 Şekil parametresi biliniyorken ölçek parametresinin farklı değerleri için çeşitli kayıp fonksiyonları altında elde edilen simülasyon sonuçları.....	48
Çizelge 6.2 $\alpha=2, \lambda=3$ için parametre tahmin sonuçları.....	49
Çizelge 6.3 İki parametrede bilinmiyorken farklı α ve λ değerleri için elde edilen simülasyon sonuçları	52
Çizelge 6.4 Parametre tahmin sonuçları.....	54

1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Weibull dağılımı, İsveçli fizikçi Waloddi Weibull'un adını taşıyan yaygın kullanıma sahip bir dağılımdır. W.Weibull bu dağılımı, malzemelerin kırılma mukavemetini analiz etmek için 1939 yılında bulmuş ve uygulamıştır. O zamandan beri, güvenilirlik mühendisliğinde yaşam süresi verilerini analiz etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Havacılık, elektronik, malzeme ve otomotiv endüstrilerinde birçok örneği bulunabilir. Ayrıca güvenilirlik mühendisliğinde ve yaşam süresi analizinde Gamma ve Log normal dağılıma alternatif olarak kullanılabilir.

Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılımın parametrelerinin şekline bağlı olarak artabilir, azalabilir veya hiç değişmeyebilir. Veriler monoton olmayan bir risk fonksiyonunu gösteriyorsa, Weibull dağılımının kullanımı uygun değildir. Kundu ve Howlader (2010) Ters Weibull dağılımının bu verileri analiz etmek için uygun bir model olacağını belirtmişlerdir.

Ters Weibull dağılımı da, Weibull dağılımı gibi, yaşam süreli veri analizi, güvenilirlik analizi ve mühendislik alanındaki istatistiksel modellerde yaygın bir kullanıma sahiptir.

Şekil parametresinin aldığı değere göre zaman zaman Ters Rayleigh ve Ters Üstel dağılımlara benzerlik gösteren Ters Weibull dağılımı, arıza oranları ile ilgili veri setleri için oluşturulacak modellerde yaygın bir kullanıma sahiptir.

Değişkenin belirli bir aralık içerisinde farklı değerler alabildiği rasgele olayları anlatmak için sürekli rasgele değişkenler kullanılır. Bu anlamda, Ters Weibull dağılımının sürekli ve esnek bir dağılım olduğu söylenebilir. Bu nedenle, birçok uygulamada teorik olarak uygun çözümler sağlar.

$Y > 0$ rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahipse, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y; \lambda, \alpha) = \alpha \lambda y^{\alpha-1} e^{-\lambda y^\alpha}, y > 0; \lambda, \alpha > 0$$

biçiminde ifade edilir.

Bu durumda, $X = \frac{1}{\lambda}$ rasgele değişkeni Ters Weibull dağılımına sahip olur ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \alpha \lambda x^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x > 0; \alpha, \lambda > 0. \quad (1)$$

biçimindedir. X 'in dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x) = e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x > 0 \quad (2)$$

biçimindedir. Burada; α şekil, λ ise ölçek parametresidir (Yao, Song, Mao, & Le, 2011).

Ters Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun farklı parametre gösterimleri ile sık kullanılan diğer gösterim biçimleri aşağıdaki gibidir,

$$f(x; \lambda, \beta) = \beta \eta^\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\left(\frac{\eta}{x}\right)^\beta} \quad (3)$$

$$f(x; \tilde{\eta}, \beta) = \beta \tilde{\eta}^{-\beta} x^{-\beta-1} e^{-(\tilde{\eta}x)^{-\beta}} \quad (4)$$

$$f(x; \tilde{\lambda}, \beta) = \beta \tilde{\lambda}^{-1} x^{-\beta-1} e^{-\tilde{\lambda}^{-1} x^{-\beta}}. \quad (5)$$

Bu gösterimlerde (3)' de η ölçek, β şekil, (4)' de $\tilde{\eta} = \frac{1}{\eta}$ ölçek, β şekil ve (5)' de $\tilde{\lambda}$ ölçek, β şekil parametresidir (Kim vd., 2014).

Bu çalışmada, en yaygın kullanıma sahip olması nedeniyle, (1) numarada verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılacaktır.

Dağılımın beklenen değeri ve varyansı,

$$E(X) = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (6)$$

$$Var(X) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right)^2 \right) \quad (7)$$

biçiminde ifade edilir. (1) ve (2)'den güvenilirlik ve hazard fonksiyonları,

$$R(x) = 1 - e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (8)$$

$$H(x) = \frac{\lambda \alpha^{-\alpha-1} e^{-\lambda x^{-\alpha}}}{1 - e^{-\lambda x^{-\alpha}}}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (9)$$

biçiminde yazılabilir (Sultan K. , 2008).

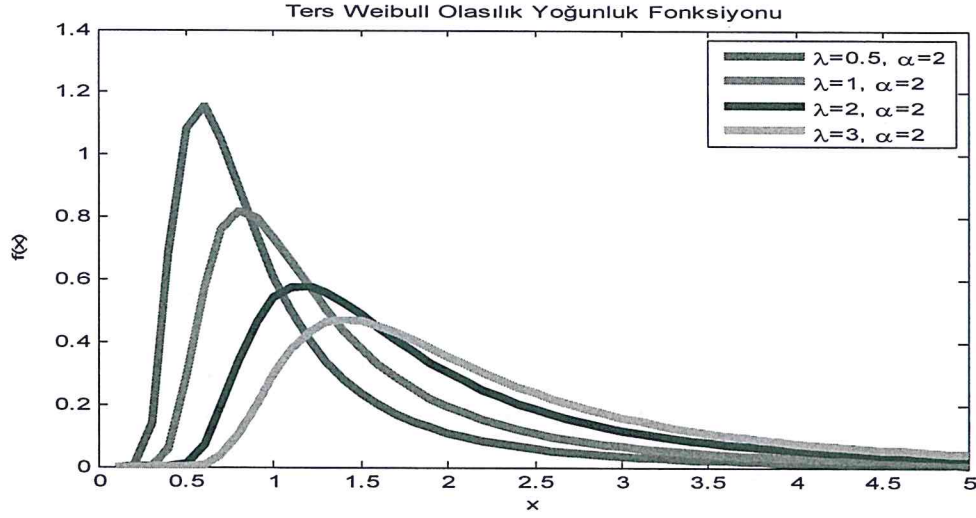
Yaşam süresi ve güvenilirlik ile ilgili analizlerde, bütün deneysel birimler için başarısızlık süreleri tam olarak elde edilemeyebilir. Bu durumda, çalışmada kullanılan veriler için çeşitlilik ortaya çıkar. Arıza oranlarıyla ilgili veriler, tam veri ve sansürlü veri olmak üzere iki grupta toplanabilir. $T_1, T_2, \dots, T_n$ birbirinden bağımsız n adet rasgele değişkeni içeren bir örneklem olsun. T_i rasgele değişkeninin aldığı değerler $t_1, t_2, \dots, t_n$ ile ifade edilmek üzere, tam veride, model için var olan $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ verileri mevcut olur. Bu da, veri setinde tüm değerlerin gözlemlendiği yani bilindiği anlamına gelir. Sansürlü veride, gözlemlerin tamamının yahut bir kısmının değeri bilinmez. Bu durumda, veri tam değildir. Sansürlü verinin; sağ, sol, aralıklı, tekli, çoklu, 1.tip ve 2.tip sansürlü olmak üzere farklı türleri vardır (Zeytinoğlu, 2009).

Bu çalışmada, veri setinin tam olduğu durumda parametre tahmin yöntemleri araştırılacak ve Ters Weibull dağılımının parametreleri için Bayes yöntemiyle diğer yöntemlerin etkinlikleri karşılaştırılacaktır.

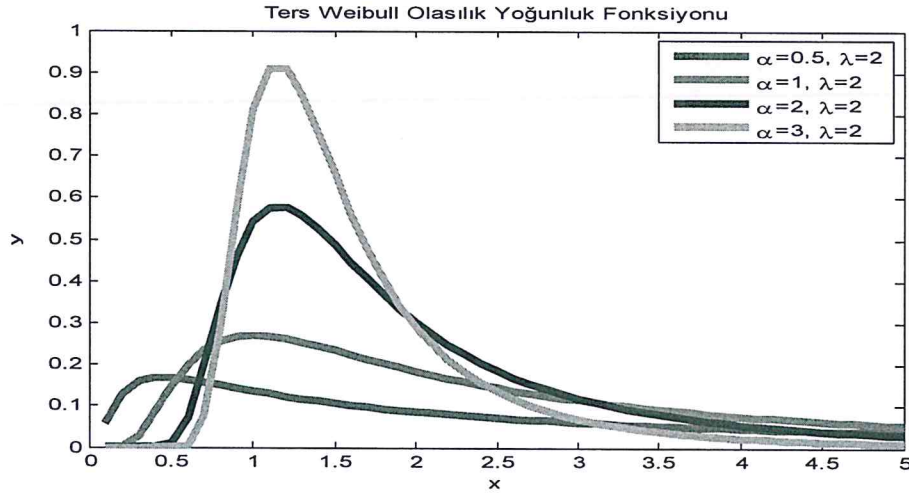
Ters Weibull dağılımının parametrelerinden birisi şekil parametresidir. Şekil parametresi, grafik yönteminde elde edilen regresyon doğrusunun eğimine eşittir. Bu nedenle, eğim olarak da bilinir. Eğim, 0 ile 1 arasında bir değer aldığına, yani $0 < \alpha < 1$ olduğunda, başarısızlık oranları zaman içinde artmaktadır. $\alpha=1$ olduğunda dağılımın Ters Üstel dağılım ile; $\alpha=2$ olduğunda ise Ters Rayleigh dağılımı ile aynı olduğu söylenebilir.

Dağılımın diğer bir parametresi olan ölçek parametresi zaman içeren birimlere sahiptir. Şekil parametresi sabit olduğunda, ölçek parametresinin değeri artarsa, dağılımın basıklığı artar, buna paralel olarak yüksekliği azalır. Ölçek parametresinin değeri azaldığında, dağılımın yüksekliği artar dolayısıyla daha sivri uçlu olur.

Şekil ve ölçek parametrelerinin değişimine göre Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



Şekil 1.1 Şekil parametresi sabitken ölçek parametresinin farklı değerleri için Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 1.2 Ölçek parametresi sabitken şekil parametresinin farklı değerleri için Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

Johnson ve ark. (1994) tarafından, Frechet dağılımı olarak adlandırılan Ters Weibull dağılımının hazard fonksiyonu, Log-Normal ve Ters Gauss dağılımlarına benzerdir (Murthy vd., 2004). Carriere (1992) çalışmasında, bir popülasyonun ölüm oranı eğrisini modellemek için Ters Weibull dağılımını kullanmıştır. Keller ve Kamath (1982), bu dağılımın, pistonlar, krank milleri ve ana yataklar gibi dizel motorlarının mekanik parçalarındaki bozulma olaylarını modellemek için uygun olduğunu ileri sürmüşlerdir.

Erto (1986) çalışmasında, Ters Weibull dağılımının, sabit bir gerilimin etkisine maruz kalan bir yalıtım sıvısının parçalanması gibi birçok veriye iyi uyum sağladığını göstermiştir (Nelson, 1982).

Klasik ve Bayes yaklaşımları kullanılarak Ters Weibull dağılımı üzerinde çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Calabria ve Pulcini (1990), Ters Weibull dağılımının en çok olabilirlik tahminlerini ve güvenilirliğini, tam ve sağdan sansürlü veriler için analiz etmişlerdir. Monte Carlo simülasyonu ile bu tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri ile en küçük kareler tahminlerini karşılaştırmışlardır. Yine, Calabria ve Pulcini (1994) çalışmalarında, Ters Weibull dağılımının, mekanik bozulma olaylarını tanımlamak için uygun bir model olduğunu ileri sürmüşlerdir. Çalışmada, Ters Weibull dağılımının güvenilirliği olarak ifade edilen $R(t)$ 'nin, en çok olabilirlik tahmin edicisinin istatistiksel özellikleri incelenmiştir. 0.90, 0.95 ve 0.98 güven seviyeleri için $R(t)$ 'nin güven aralığı tabloları verilmiştir. Parametrelerin maksimum olabilirlik tahmin edicilerine dayanan tolerans limitleri türetilmiş ve güvenilirlik fonksiyonunun güven aralıklarını elde etmek için gereken tabloların, tolerans limitlerini tahmin etmeye de yardımcı olduğu gösterilmiştir. Tabloların kullanımını netleştirmek için sayısal bir örnek de verilmiştir.

Khan ve Pasha (2008) çalışmalarında, Ters Weibull dağılımının teorik analizini sunmuşlardır. Farklı dağılımlara yaklaşan Ters Weibull dağılımının esnekliğini göstermişler ve simülasyon analizi ile şekil, ölçek parametreleri gibi ilgili parametreleri karşılaştırmışlardır. Şekil parametresi ile ortalama, medyan, mod, varyans, varyasyon katsayısı, çarpıklık katsayısı ve basıklık katsayısı arasındaki ilişkiyi grafiksel ve matematiksel olarak göstermişlerdir.

Sultan (2008), sıra istatistiklerini kullanarak, yalnızca şekil parametresinin bilindiği ve hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği iki farklı durum için, en çok olabilirlik yöntemi başta olmak üzere farklı tahmin yöntemleri ve farklı kayıp fonksiyonları altında Ters Weibull dağılım parametrelerini elde etmiş ve karşılaştırmıştır. Tahminlerin güvenilirlik ve risk fonksiyonlarını elde etmiştir. Monte Carlo simülasyonu ile tahminlerin hata kareler ortalamalarını karşılaştırmış ve sonuçları gerçek verilere uygulamıştır.

Sultan (2010), Ters Weibull dağılımından düşük kayıt değerlerini kullanarak, yalnızca şekil parametresinin bilindiği ve hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği iki farklı durum için farklı tahmin yöntemleri geliştirilmesi üzerinde durmuştur. İlk önce, Ters Weibull dağılımının ölçek parametresinin en iyi doğrusal yansız tahminini türetmiştir. Farklı tahmin yöntemlerini karşılaştırmak için, Ters Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametrelerinin en iyi doğrusal yansız tahminlerini hesaplayarak 2007 yılında yaptığı çalışmasının (Sultan K. , 2007) sonuçlarını sunmuştur. İkinci olarak, konum ve ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerini türetmiş, konum ve ölçek parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerinin bazı özelliklerini tartışmıştır. Tahminleri karşılaştırmak için, elde edilen tahminler arasındaki göreceli verimliliği hesaplamış; son olarak, Monte Carlo simülasyonlarını kullanarak bazı nümerik sonuçlar elde etmiştir.

Yao ve ark. (2011), entropi kayıp fonksiyonu altında parametrelerin E-Bayes ve ampirik Bayes tahminlerini elde etmişler ve tahminlerin hata kareler ortalamalarını Monte Carlo simülasyon metodu ile karşılaştırmışlardır. Netice olarak, ampirik Bayes tahmininin en iyi sonucu verdiği, E-Bayes tahmininin de ampirik Bayes tahminine oldukça yakın olduğu sonucuna varmışlardır.

Ellah (2012), genelleştirilmiş sıra istatistikleri kavramını, farklı yorumlara sahip çeşitli sıralı rasgele değişken modellerine birleşik bir yaklaşım olarak tanıtmıştır. Çalışmasında, parametrelerin ve güvenilirlik fonksiyonunun tahmin edicilerini elde etmek için Ters Weibull dağılımından seçilen n adet genelleştirilmiş sıra istatistiğine (GOS) dayanarak çıkarım oluşturmak için bir metodoloji geliştirmiştir. Bayes tahminlerini, dengeli hata kareler (balanced SEL) ve dengeli Linex kayıp fonksiyonları gibi çeşitli kayıp fonksiyonları altında elde etmiştir. Bayes'in dengeli hata kareler ve dengeli Linex kayıp fonksiyonları altında elde edilen tahminlerinin, özel durumlar olarak simetrik ve asimetrik kayıp fonksiyonları altında elde edilenlerden daha kullanışlı olduğunu ileri sürmüştür. Son olarak, gerçek veri seti kullanarak sonuçları karşılaştırmıştır.

Kundu ve ark. (2013), ilerleyen tür 2.tip sansürlü veriye dayanan iki parametrelili bir Ters Weibull dağılımının bilinmeyen parametrelerinin istatistiksel çıkarımını ele almışlardır.

En çok olabilirlik tahmin edicileri açık formlarda elde edilemediğinden, açık formlara yakınsayan en çok olabilirlik tahminlerini önermişlerdir. Hata kareler ve Linex kayıp fonksiyonları altında, Ters Weibull dağılım parametreleri ve güvenilirlik fonksiyonu için Bayes ve genelleştirilmiş Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Bayes ve genelleştirilmiş Bayes tahmin edicileri açık formda elde edilemediğinden, bu tahmin edicilerin elde edilmesinde Lindley yaklaşımını kullanmışlardır. Çalışmada ayrıca, Gibbs örnekleme tekniğine dayanarak bilinmeyen parametrelerin en yüksek sonsal yoğunluklu güvenilirlik aralıkları hesaplanmış ve bir optimallik kriteri kullanılarak optimal sansürleme şeması önerilmiştir. Farklı tahmin edicilerin etkinliğini görmek için simülasyon deneyleri yapılmış ve son olarak açıklama amacıyla iki veri seti analiz edilmiştir.

Singh ve Sharma (2013) çalışmalarında, 2.tip hibrid sansürlü veriler altında Ters Weibull dağılım parametrelerinin tahmini için Bayes yaklaşımını ele almışlar ve parametreler için en yüksek sonsal yoğunluklu güvenilirlik aralıklarını oluşturmuşlardır. Model parametrelerinin Bayes tahmin edicilerinin performansını, Monte Carlo Markov Zinciri (MZMC) tekniğini kullanarak maksimum olasılık tahmin edicileriyle karşılaştırmışlardır. Son olarak, örnekleme amacıyla iki gerçek veri setini analiz etmişlerdir.

Singh ve Sharma (2013) diğer bir çalışmalarında ise, 2.tip hibrid sansürleme şeması altında gelecekteki örneklerin Ters Weibull dağılımından tahmin edilmesi için Bayes yaklaşımı üzerinde durmuşlardır. Ters Weibull dağılımının parametrelerine karşılık gelen en yüksek yoğunluklu (HPD) güvenilirlik aralıkları ile birlikte Bayes tahmin edicilerini de elde etmişlerdir. Çalışmada, model parametrelerinin Bayes tahmin edicilerinin performansı, MZMC tekniği kullanılarak maksimum olasılık tahmin edicileriyle karşılaştırılmıştır. Son olarak, tartışılan metodolojiyi göstermek için gerçek bir veri seti analiz edilmiştir.

Singh ve Kumar (2013), tam veri durumu ile 1.tip ve 2.tip sansürlü veriler için, genel entropi ve hata kareler kayıp fonksiyonları altında Ters Weibull dağılım parametrelerinin Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Elde edilen bu tahmin ediciler simülasyon riskleri temelinde gerçek veriler kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Yahgmaei ve ark. (2013), hata kareler, entropi ve precautionary kayıp fonksiyonları altında, yarı karesel, gamma ve düzgün dağılım olmak üzere üç farklı önsel dağılım belirleyerek, Ters Weibull dağılımına ait ölçek parametresinin Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Bu çalışmada özellikle, en çok olabilirlik tahminleri üzerinde durulmuştur. Sonuç olarak ise, risk fonksiyonları ve hata kareler ortalaması ölçütleri baz alınarak simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır.

Baldawi ve ark. (2014), Ters Weibull dağılımının ölçek parametresinin Bayes tahminlerini yarı karesel kayıp fonksiyonu ve üstel kayıp fonksiyonu altında elde etmişlerdir. Tahminlerin elde edilmesinde, önsel dağılım olarak üstel ve Ters Levy dağılımları kullanılmıştır. Monte Carlo simülasyonu ile bu tahmin edicilerin performansı hata kareler ortalamaları ölçütüne göre karşılaştırılmış ve non-lineer üstel kayıp fonksiyonu altında, Ters Levy önseli seçilerek yapılan en çok olabilirlik tahmininin en iyi sonucu verdiği kanaatine varmışlardır.

Elshahat ile Ismail'in (2014) çalışması, Ters Weibull dağılımının yeni bir formunun bilinmeyen parametrelerinin “yarı olabilirlik” adını verdikleri bir yöntem ile tahminine ilişkin olup, önerilen yarı olabilirlik tahmin edicilerini maksimum olasılık tahmin edicileriyle karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması yapmışlardır. Ayrıca, elde edilen sonucu göstermek için gerçek bir yaşam veri seti kullanmışlardır.

Mudasir ve ark. (2015), Linex ve karesel olmak üzere, iki farklı kayıp fonksiyonu altında Ters Weibull dağılımına ait ölçek parametresinin Bayes tahmin edicileri ile bu tahmin edicilerin risk fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Chiodo ve arkadaşlarına göre (Chiodo vd., 2015), aşırı rüzgar hızı değerlerinin tahmin edilmesi, hem rüzgar enerjisi hem de rüzgar kulesi güvenlik değerlendirmesi için kilit bir konudur. Çalışmada, böyle bir tahmin için, aşırı bir rüzgar hızında emniyet değerlendirmesi yapılmış ve uygun bir olasılık modeline dayanan yeni bir yöntem önerilmiştir. Yöntem, aşırı rüzgar hızlarının karakterizasyonu için Ters Weibull olasılık dağılımını varsayar ve yeni bir Bayes tahmin metodu geliştirir. Yöntemde, “Negatif Log-Lognormal” dağılımı ile belirli bir rüzgar hızı miktarının önceden belirlenmesi değerlendirilir. Tipik rüzgar hızı verileriyle ilgili büyük bir sayısal simülasyonlar setini kullanarak, Bayes tahmin edicilerinin verimliliği için Gumbel dağılımını alternatif bir

aşırı değer modeli olarak kabul etmişlerdir. Çalışmada özellikle, tahmin edilen rüzgar hızının, olasılık dağılımlarından ayrılmalara ilişkin tahminlerin sağlamlığı üzerinde durulmuştur.

Ahmad ve ark. (2015), Ters Weibull dağılımı için Bayes tahmin yöntemini Bayes tahmin edicisini elde etmişlerdir. Ters Weibull dağılımının ölçek parametresini tahmin etmek için, üç farklı kayıp fonksiyonu altında Jeffrey's ve Quasi önsellerini kullanmışlardır. Ayrıca bu yöntemler, R yazılımında yapılan simülasyon çalışması ile değişken örneklem büyüklüğünde ortalama hata kareleri kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Loganathan ve Uma (2017), iki parametrelili Ters Weibull dağılımı için farklı yöntemler kullanarak parametre tahmini yapmışlardır. Fisher bilgi matrisini kullanarak en çok olabilirlik, en küçük kareler, moment tahminlerini elde etmişler ve bu tahminleri hata kareler ortalaması ölçütünü kullanarak simülasyon yöntemiyle karşılaştırmışlardır. Sonuçta en çok olabilirlik tahmin edicisinin en iyi tahmini verdiğini öne sürmüşlerdir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için kullanılan yöntemler anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, Bayesci yaklaşım ve literatürde verilen değişik kayıp fonksiyonlarına göre Bayesci parametre tahmini anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, Ters Weibull dağılımı için Bayesci parametre tahmini yöntemine geçilmiş ve ilk olarak tek parametrenin bilindiği durum için sonuç çıkarımı araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, MZMC yöntemleri anlatılmış, 6. Bölüm simülasyon ve uygulama çalışmalarına ayrılmıştır.

Son bölümde, çalışmaya ilişkin sonuçlar verilmiştir.

2. TERS WEİBULL DAĞILIM PARAMETRELERİNİN TAHMİNİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER

Günümüzde arıza oranları ile ilişkili verilerin analizinde sıkça kullanılan Ters Weibull olasılık dağılımı, genellikle iki parametrelili logaritmik bir model içerir. Ters Weibull olasılık dağılımının parametrelerinin tahmininde değişik yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerden; grafik yöntemi, en küçük kareler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve momentler yöntemi en sık kullanılanlar arasındadır. Grafik yönteminde, yalnızca grafik ortamında bir tahmin yapılmakta iken, diğer yöntemlerde matematiksel ve istatistiksel formülasyonlar kullanılmaktadır. Dağılımın uygulamadaki başarısı, parametre tahminlerinin iyi yapılmasına bağlıdır.

2.1. Grafik Yöntemi

Dağılımın parametreleri, grafik yöntemi kullanılarak tahmin edilebilir. Bu yöntemde, parametreler grafik yardımıyla hesaplanır. Yani, matematiksel bir hesaplama yapılmaz. Bu yöntem ile yapılan tahminde, ilk olarak veriler küçükten büyüğe doğru sıralanarak her bir gözlem değeri için sıra medyanları,

$$\frac{i - 0.3}{N + 0.4} \times 100$$

ile hesaplanır. i ile verinin sıra sayısı, N ile toplam örnek büyüklüğü ifade edilir. Gözlemler için sıra medyanları hesaplandıktan sonra, veri ve sıra medyanları çizilir. Grafikte, X eksenini ile zaman verileri, Y eksenini ile birikimli yüzdelere gösterilmektedir. Bu noktalara uyan en iyi doğru elde edilmek istenir. Şekil parametresi için tahmin edilen değer, bu doğrudan elde edilen değerdir. X eksenine paralel bir doğru çizilir. Bu doğru üzerinde bulunan $Q(t)$ değerinden dikey bir doğru daha çizilir. Çizilen bu doğrunun X eksenini kestiği nokta, ölçek parametresi için bir tahmin değeridir (Zeytinoğlu, 2009).

2.2. En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi, Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için kullanılan yöntemlerden biridir. İki parametrelili Ters Weibull dağılımında, birikimli dağılım fonksiyonunun her iki tarafının logaritması alınarak hesaplamalar yapılır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Ters Weibull dağılımından alınan rasgele bir örneklem olsun. (2)'de verilen birikimli dağılım fonksiyonunun her iki tarafının logaritması alınarak aşağıdaki gibi bir fonksiyona dönüştürülür.

$$\ln[-\ln F(X)] = \ln \lambda - \alpha \ln x \quad (10)$$

Burada, $Y = \ln[-\ln F(X)]$, $X = \ln x$, $\beta_1 = -\alpha$, $\beta_0 = \ln \lambda$ dönüşümleri kullanılarak eşitlik aşağıdaki gibi lineer bir şekilde yazılabilir.

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 \quad (11)$$

$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ ile $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örneklemine sıra istatistikleri gösterilsin.

$i = 1, 2, \dots, n$ için, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'lerin (i). en küçük sıra istatistiği $X_{(i)}$ 'dir. Ortalama aralığı (mean rank), birikimli dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'in değerlerini tahmin etmek için kullanılır,

$$\hat{F}(x_{(i)}) = \frac{i}{n+1}. \quad (12)$$

Son olarak, hata kareler toplamı minimize edilerek, β_0 ve β_1 regresyon parametreleri belirlenir.

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \ln x_{(i)})^2 \quad (13)$$

β_0 ve β_1 'i tahmin etmek için, Q 'nun sırasıyla β_0 ve β_1 'e göre kısmi türevi alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{dQ}{d\beta_0} = 0 \text{ ve } \frac{dQ}{d\beta_1} = 0 \quad (14)$$

Buradan, β_0 ve β_1 'in tahminleri, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] - \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})]}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 x_{(i)} - (\sum_{i=1}^n \ln x_{(i)})^2} \quad (15)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] + \hat{\alpha} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \quad (16)$$

Buna göre, λ ve α 'nın tahmin edicileri $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] - \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})]}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 x_{(i)} - (\sum_{i=1}^n \ln x_{(i)})^2} \quad (17)$$

$$\hat{\lambda} = \exp \left[\sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] + \hat{\alpha} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \right] \quad (18)$$

biçiminde yazılabilir (Loganathan & Uma, 2017).

2.3. Momentler Yöntemi

Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri de momentler yöntemidir.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ bilinmeyen parametreler olmak üzere, bilindiği üzere k tane kitle momenti, k tane örneklem momentine eşitlenerek parametreler tahmin edilir. Buna göre;

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

...

...

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

k tane denklem yazılır ve bu denklemler $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ parametreleri için çözülerek moment tahmin edicileri elde edilir.

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (20)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (21)$$

olmak üzere moment tahmin edicilerini elde etmek için kullanılacak iki bilinmeyenli denklem sistemi şöyle olur;

$$\lambda^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (22)$$

$$\lambda^{\frac{2}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (23)$$

Bu denklemlerden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) = \frac{\sum x_i^2}{n} \lambda^{-\frac{2}{\alpha}} \quad (24)$$

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} \right)^{\alpha} \quad (25)$$

λ 'nın tahmin edicisi $\hat{\lambda}$ yukarıdaki eşitlikten bulunabilir. α 'nın tahmin edicisi $\hat{\alpha}$ ise,

$$\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) = \frac{\sum x_i^2}{n} \lambda^{-\frac{2}{\alpha}} \quad (26)$$

eşitliği çözülerek bulunabilir. Bu denklemin analitik bir çözümü yoktur ve sayısal olarak çözülmesi gerekir. Denklemi çözmek için Newton Raphson yöntemi kullanılır (Loganathan & Uma, 2017).

2.4. En Çok Olabilirlik Yöntemi

$X_1, X_2, \dots, X_n$, Ters Weibull dağılımından alınan, n birimli, sansürlsüz, tam bir veri seti olsun. Olabilirlik fonksiyonu şu şekilde verilir;

$$L(\lambda, \alpha) = \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})}. \quad (27)$$

(27)'deki olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınır;

$$l(\alpha, \lambda|x) = n \log \alpha + n \log \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \quad (28)$$

elde edilir.

$l(\alpha, \lambda|x)$ 'nin α ve λ 'ya göre 1.dereceden kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlendiğinde;

$$\frac{dl(\alpha, \lambda|x)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \log(1/x_i) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{dl(\alpha, \lambda|x)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} = 0 \quad (30)$$

olur. λ parametresinin tahmin edicisi $\hat{\lambda}$ ve α parametresinin tahmin edicisi $\hat{\alpha}$ yı hesaplamak için sayısal yöntemler uygulanabilir (Loganathan & Uma, 2017).

Bu tez kapsamında parametre tahminlerini elde etmek için çok değişkenli durumda kullanılan Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Denklemlerin çok değişkenli Newton-Raphson yöntemi ile çözümü aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \alpha} = \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \lambda} = \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \quad (34)$$

olmak üzere birinci türevler için f vektörü,

$$f = \begin{pmatrix} \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \\ \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \end{pmatrix} \quad (35)$$

ve ikinci türevlerin yer aldığı Hessian matrisi,

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\lambda^2} & \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) & -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

biçiminde elde edilir. Buna göre, λ_0 ve α_0 başlangıç değerleri ve seçilen durdurma kuralı kullanılarak aşağıdaki iteratif denklemle sonuca ulaşılır,

$$\begin{pmatrix} \lambda_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i-1} \\ \alpha_{i-1} \end{pmatrix} - J^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_0, \alpha_0) \\ f(\lambda_0, \alpha_0) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

3. BAYESCI YÖNTEMLE PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde genel haliyle Bayesci çıkarım anlatılmıştır.

3.1. Bayesci Yaklaşım

Klasik istatistiksel yöntemlerde, bilinmeyen parametreler sabit bir değer olarak varsayılır. Parametreler sabit olduğundan onlar hakkında olasılık çıkarımları yapılamaz. Bu noktada, Bayes yöntemi alternatif bir yaklaşım sunar. Bayes yönteminde parametrelere, uygun önsel dağılıma sahip rasgele değişkenler gözüyle bakılır. Yani, Bayes tahmin edicilerinin bulunmasında parametrenin bir dağılıma (prior veya önsel dağılım) sahip olduğu varsayılır. Daha sonra parametrenin önsel dağılımı ve verilen örneklem bilgisi kullanılarak sonsal dağılımı elde edilir. Elde edilen bu sonsal dağılıma göre beklenen değeri parametrenin Bayes tahmini olarak adlandırılır.

Bayesci çıkarım için adımlar aşağıda verildiği gibi sıralanabilir,

- i. θ için, önsel dağılım olarak adlandırılan ve $\pi(\theta)$ ile gösterilen bir olasılık dağılımı tanımlanır. Önsel dağılım, gözlem yapılmadan önce parametre hakkında elde olan bilgidir.
- ii. Gözlenen y veri seti için, θ verildiğinde y 'nin dağılımını tanımlayan $p(y|\theta)$ olabilirlik fonksiyonu belirlenir.
- iii. Önsel dağılım ve olabilirlik fonksiyonu güncellenerek $p(\theta|y)$ sonsal dağılımı hesaplanır. Elde edilen bu sonsal dağılım kullanılarak θ için istenilen tüm istatistiksel çıkarımlar yapılır.

Bu kuralları esas alan Bayes teoremi aşağıdaki şekilde gösterilebilir

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)\pi(\theta)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)\pi(\theta)}{\int p(y|\theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (38)$$

Burada, $\int p(y|\theta)\pi(\theta)d\theta$, sonsal dağılımın normalleştirme sabitini; $p(y)$, y 'nin marjinal dağılımını; $p(y|\theta)$ 'nın herhangi bir orantılı fonksiyonu ise θ 'nın olabilirlik fonksiyonunu gösterir ve $L(\theta) \propto p(y|\theta)$ biçiminde yazılabilir. Buradan, Bayes teoremi aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$p(\theta|y) = \frac{L(\theta)\pi(\theta)}{\int L(\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (39)$$

Burada, $p(y)$ marjinal dağılımı aslında bir integraldir. Bu integral, integralin değeri sonlu olduğunda sonsal dağılım için ek bilgi vermeyecektir. Buna göre, $p(\theta|y)$

$$p(\theta|y) \propto L(\theta)\pi(\theta) \quad (40)$$

biçiminde ifade edilebilir (Cengiz vd., 2013). Bir θ parametresinin Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\theta}_{Bayes} = E(\theta|y) = \int_{\theta \in \Theta} \theta \pi(\theta|y) d\theta = \frac{\int_{\theta \in \Theta} \theta L(\theta|y) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\theta \in \Theta} L(\theta|y) \pi(\theta) d\theta} \quad (41)$$

olarak elde edilir (Cengiz vd., 2013).

Aşağıdaki kısımda literatürde sıklıkla kullanılan önsel dağılımlar verilmiştir.

3.2. Literatürde Sıklıkla Kullanılan Önsel Dağılımlar

Bayesci yaklaşımda parametreler için önsel dağılımı belirleme sorununun yanı sıra, hesaplama ve yakınsama sorunları da bulunmaktadır. Bu hesaplama zorluğu nedeniyle yaklaşık çıkarımlar yapılmaktadır. Bu yüksek boyutlu integralleri hesaplama ve yakınsama sorunları nedeniyle Bayesci çıkarımda önsel dağılımın seçimi önemlidir (Cengiz vd., 2013).

Temel olarak önseller; bilgilendirici ve bilgilendirici olmayan önseller olmak üzere iki gruba ayrılır. Bilgilendirici önseller subjektifken bilgilendirici olmayan önseller objektiftir. Bilgilendirici olmayan önsel dağılım kullanıldığında, sonsal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilirlik fonksiyonuna benzer. Subjektif ve objektif önseller hakkında detaylı bilgi için Berger (2006) ve Goldstein (2006)'a bakılabilir.

Bayesci yaklaşımında, önsel dağılımın seçimi konusunda görüş ayrılıkları bulunmaktadır. Önsel dağılım seçimine göre Bayesciler için aşağıdaki gibi bir sınıflandırma yapmak mümkündür.

- ✓ Klasik Bayesciler, düzgün önsel dağılım gibi bilgi vermeyen önselleri kullanırlar.
- ✓ Modern Parametrik Bayesciler, bilinen eşlenik önselleri kullanırlar.

- ✓ Subjektif Bayesciler ise, önceki bilgiler, uzman görüşü ve inançlar ile geçmişteki çalışma sonuçları doğrultusunda elde edilen önsel dağılımları kullanmayı tercih ederler.

Bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar, parametreler hakkında önsel bilgisi zayıf olan veya veriden elde edilen bilgi hariç başka bilgiye ihtiyaç duymayan dağılımlardır. Bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar aşağıda verilmiştir.

3.2.1. Düzgün önsel dağılım

Düzgün önsel dağılımda, bir aralık belirlenir ve parametreye bu aralık içerisinde aynı olasılık değerleri atanır.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$p(\theta) = c = 1 \text{ ve } 0 \leq \theta \leq m$$

biçiminde olmak üzere, belirtilen aralıkta yer alan her nokta için parametrenin olasılığı c 'ye eşittir. Geçerli bir sebep olmadığı sürece, bir olayın gerçekleşme olasılığı başka bir olayın gerçekleşme olasılığından büyük değildir. Böyle durumlarda, başarı olasılığının, olası tüm değerlerine eşit ağırlık veren düzgün önsel dağılım tercih edilir. Parametre belirli bir aralıkta değer alıyorsa veya sınıflandırılabiliriyorsa, bu durumda önsel dağılım olarak düzgün önsel dağılım alınabilir. Parametre $[0, m]$ aralığında değer alıyorsa ise, m sonsuza giderken önsel dağılımın verdiği bilgi azalır. Reel ekseninde $[-\infty, \infty]$ aralığında, θ 'nın tüm değerleri için $p(\theta) = c$ olduğunda, düzgün önsel dağılım uygun olmayan bir önsel dağılım olur. Uygun olmayan dağılımdan kasıt olasılık yoğunluk fonksiyonunun integralinin 1 olmamasıdır. Bu tür dağılımlar, çıkarsamada zorluğa neden olur. Ancak, böyle bir önselden elde edilen sonsal dağılımın kesinlikle yanlış olacağı kanaati de doğru değildir.

3.2.2. Jeffreys'in sabit önseli

Jeffreys (1961) tarafından önerilen ve hesaplaması kolay olan bu önsel dağılım düzgün dağılım özelliğine sahiptir ve parametrelerin tanımlandığı aralığın dışındaki büyük değerleri ihtiva etmez. Bu önselin hesaplanmasında, Fisher bilgi matrisi kullanılır. Olabilirliğin anlamlı olduğu bölgede çok fazla değişmeyen Jeffreys'in önsel dağılımı ile

ilgili detaylı bilgi için Bernardo ve Smith (2000) ve O'Hagan (1994)'da bakılabilir. Bu önsel dağılım oldukça kullanışlıdır. Aralık dışında büyük değerler içermemesi ve olabilirliğin anlamlı olduğu bölgede çok fazla değişmemesi nedeniyle, parametre belirli bir aralıkla sınırlı olsun ya da olmasın ($[-\infty, \infty]$ veya $[0, \infty]$) önsel dağılımı bir sabitle eşitler. Jeffreys'in önsel dağılımı

$$\pi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2}$$

ile verilir. Burada, $|\cdot|$ ile determinant, $I(\theta)$ ile $p(y|\theta)$ olabilirlik fonksiyonunun Fisher bilgi matrisi gösterilir (Gamerman, 1997).

3.2.3. Belirsiz önsel dağılım

Bir önsel dağılım için tanımlanan aralıkta hesaplanan integral veya toplam 1'e eşit olduğunda bu önsel dağılım belirli önsel, sonsuza eşitse belirsiz önsel olarak adlandırılır (Tektaş,2006). Kesikli rasgele değişkenler için olasılık fonksiyonunun toplamı 1 değilse ya da sürekli rasgele değişkenler için olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali sonlu bir değere eşit değilse bunlar belirsiz önsel dağılım olarak adlandırılır (Güner, 2014).

Büyük varyansın belirsizlikle özdeşleştirilmesi fikrinden hareketle, dağılımların şekil parametrelerine atanan değerler ile, geniş bir aralıkta değer alan ve hemen hemen düzgün önsel dağılım kadar düz olan bilgilendirici olmayan bir önsel dağılım oluşturulabilir. Örneğin;

$$p(\theta) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

olmak üzere σ^2 'ye büyük değer atanır.

$$p(\sigma) \sim G(\alpha, \beta)$$

olmak üzere α, β 'ya oldukça küçük değerler atanır. Bu şekilde oluşturulan belirsiz önsel dağılım uygun bir dağılım olur. Düzgün önsel dağılım yerine belirsiz önsel dağılım tercih edilirse hesaplamada kolaylık sağlanmış olur.

Bilgilendirici bir önselin, sonsal dağılım üzerinde etkili olduğu söylenir. Bu tür dağılımlar, gerçek veri setleri ile ilgili uygulamalarda önemlidir. Yani, daha önce yapılmış çalışmalardan elde edilen bilgi, geçmişte yaşanan deneyimler veya mevcut bilgi ile birleştirilebilen uzman görüşleri gibi uygun önsel dağılımlar kullanılırsa Bayesci yöntemin gücü artar.

Eğer önsel dağılım ile sonsal dağılım aynı aileden geliyorsa, bu tür önsel dağılımlar ailesine “eşlenik aile” veya sadece “eşlenik” denir. Eşlenik aileye örnek olarak örneklemenin binom dağılımına sahip bir kitleden seçilmiş olduğu düşünülün. Yani,

$$y \sim \text{Bin}(n, \theta)$$

olsun. θ parametresi için alınacak önsel dağılım Beta Dağılımı olduğunda θ için elde edilecek sonsal dağılım da yine Beta dağılımı olur. Yani, Binom dağılımı için eşlenik önsel dağılım Beta dağılımıdır. Eşlenik önseller genellikle hesaplamadaki kolaylığı artırdığı için tercih edilir. Aşağıdaki tabloda bazı eşlenik dağılımlar verilmiştir (Öztürk & Cengiz, 2017).

Çizelge 3. 1 Eşlenik dağılımlar tablosu

Olabilirlik fonksiyonu	Önsel Dağılım	Sonsal Dağılım
Binom	Beta	Beta
Negatif Binom	Beta	Beta
Normal	Normal	Normal
Poisson	Gama	Gama
Üstel	Gama	Gama
Gama	Gama	Gama

Bayesci analiz kullanmanın avantajlarından bazıları şöyledir;

- ✓ veriyi önsel bilgi ile teorik bir çatı altında birleştirmeyi sağlar,
- ✓ asimptotik yaklaşım olmadan, veri ile ilgili kesin çıkarımlar verir,
- ✓ küçük boyutlu örneklem için de kullanılabilir,
- ✓ parametre tahminleri ve hipotez testlerinde direk çıkarımlar verir,
- ✓ kayıp veri ile ilgili problemlerde ve hiyerarşik modellerde uygulanabilir.

Bazı dezavantajları ise şöyledir;

- ✓ önsel dağılımın seçiminde kullanılan belirli bir yöntem yoktur,
- ✓ parametre sayısının çok olduğu modellerde hesaplamalar zor olmaktadır.

Sonsal dağılımdan istatistiksel çıkarımlar yaparken gerekli olan integrallerin hesaplanmasında analitik çözümler bulunmaması uygulamada karşılaşılan problemlerden birisidir. Bu noktada, hesaplamada sayısal yöntemlerin veya simülasyon yöntemlerinin kullanımı gerekir. Tezin 4.Bölümünün sonunda ve 5.Bölümünde bu yöntemler anlatılmıştır.

Bayesci yaklaşım ile ilgili daha detaylı bilgi için; Berger (1985), Bernardo ve Smith (1994), Carlin ve Louis (2000), Robert (2001) ve Wasserman (2004)'a bakılabilir (Cengiz vd., 2013).

3.3. Literatürde Sıklıkla Karşılaşılan Kayıp Fonksiyonları

Çalışmamız kapsamında literatürde bulunan kayıp fonksiyonları incelenmiştir.

3.3.1. Entropi kayıp fonksiyonu

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, \lambda)$ ve λ dağılımın parametresi olsun. δ, λ 'nın bir tahmini olmak üzere, entropi kayıp fonksiyonu;

$$L(\lambda, \delta) = E_{\lambda} \left(\ln \frac{f(\lambda, X)}{f(\delta, X)} \right) \quad (42)$$

biçiminde verilir (Nematollahi & Motamed-Shariati, 2009).

3.3.2. Yarı karesel kayıp fonksiyonu

Yarı karesel kayıp fonksiyonu, tahmin edilen bir modelin ne kadar doğru olduğunun ölçüsünü verir. Tahmin edilen olasılık ile gerçek değer arasındaki farkı dikkate alarak çalışır. Yarı karesel kayıp fonksiyonu;

$$\eta(x) = c(t - x)^2$$

biçiminde tanımlanır. Burada c sabittir. Yarı karesel kayıp fonksiyonu;

$$L(\alpha, \hat{\alpha}) = (e^{-c\hat{\alpha}} - e^{-c\alpha})^2, c \neq 0 \quad (43)$$

biçiminde de ifade edilebilir (Al-Baldawi vd., 2014).

3.3.3. Lineer olmayan üstel kayıp fonksiyonu

Lineer Olmayan Üstel kayıp fonksiyonu;

$$L(\hat{\alpha}, \alpha) = k[e^{cD} - cD^2 - cD - 1], k > 0, c > 0 \quad (44)$$

biçiminde ifade edilir.

Burada,

$$D = \hat{\alpha} - \alpha$$

olup tahmin hatasını göstermektedir (Al-Baldawi vd., 2014).

3.3.4. Hata kareler kayıp fonksiyonu

Tahminler için daha öncede bahsedildiği gibi, genellikle hata kareler kayıp fonksiyonu kullanılır. Legendre (1805) ve Gauss (1810) tarafından önerilen hata kareler kayıp fonksiyonu;

$$L(\alpha - \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2 \quad (45)$$

biçiminde tanımlanır (Sultan K. , 2008).

3.3.5. Linex kayıp fonksiyonu

Asimetrik bir fonksiyon olan Linex kayıp fonksiyonu;

$$L(\hat{\alpha} - \alpha) = (e^{c(\hat{\alpha} - \alpha)} - c(\hat{\alpha} - \alpha) - 1) \quad (46)$$

biçiminde ifade edilir. Burada α ve $\hat{\alpha}$ parametrenin gerçek ve tahmin edilen değerlerini göstermektedir (Ahmad vd., 2015).

3.3.6. Precautionary kayıp fonksiyonu

Precautionary kayıp fonksiyonu;

$$L(\hat{\alpha}, \alpha) = \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)^2}{\alpha} \quad (47)$$

biçiminde tanımlanır. Asimetrik olan bu kayıp fonksiyonu ilk olarak 1996 yılında Nordstrom tarafından tanımlanmıştır (Ahmad vd., 2015).

3.3.7. Al-Bayyati'nin kayıp fonksiyonu

Yine, asimetrik bir fonksiyon olan Al-Bayyati'nin kayıp fonksiyonu;

$$L(\hat{\alpha}, \alpha) = \alpha^{c_1} (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \quad (48)$$

biçiminde tanımlanır. Burada c_1 sabittir (Ahmad vd., 2015).

4. TERS WEİBULL DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN BAYESÇİ YÖNTEMLE TAHMİNİ

Bu bölümde, ilk olarak tek parametresi bilinen Ters Weibull dağılımının Bayes tahmin edicilerinin nasıl bulunacağı üzerinde durulmuştur. Daha sonra iki parametrenin de bilinmediği durum göz önüne alınmıştır.

4.1. Tek Parametresi Bilinmeyen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicisinin Elde Edilmesi

Bu kısımda, şekil parametresi bilinen Ters Weibull dağılımının ölçek parametresi için, bir önceki bölümde ifade edilen kayıp fonksiyonlarının kullanılması ile Bayes tahmin edicilerinin nasıl bulunacağı üzerinde durulmuştur.

4.1.1. Hata kareler kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi

λ için önsel dağılım Gamma (a, b) olarak alınırsa,

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-b\lambda}, \lambda > 0, a, b > 0 \quad (49)$$

biçiminde olmak üzere (27)'deki olabilirlik fonksiyonu ile (49)'deki önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu birleştirilerek λ için sonsal dağılım,

$$\pi(\lambda | x) = \frac{L(\lambda; X)g(\lambda)}{\int_0^\infty L(\lambda; X)g(\lambda)d\lambda}$$

formülü kullanılarak elde edilir. Buna göre, sonsal dağılım

$$\pi(\lambda | x) = \frac{\lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)}}{\int_0^\infty \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)} d\lambda} = \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)} \quad (50)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse bu dağılım bir Gamma dağılımıdır ve parametreleri $n + a$ ve $T + b$ dir. Burada $T = \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}$ dir. Buna göre, λ 'nın Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\lambda} = (n + a)(T + b) \quad (51)$$

biçiminde elde edilir (Sultan K. S., 2008).

4.1.2. Entropi kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi

$X_i, i=1, \dots, n$ başarısızlık süresini göstermek üzere, birbirinden bağımsız ve hepsi Ters Weibull dağılımına sahip olan n birimlik bir örneklem olsun. Buna göre olabilirlik fonksiyonu

$$L = \prod_{i=1}^n f(x; \alpha, \lambda) \quad (52)$$

biçiminde olur. Yani, $X_i \sim \text{Ters Weibull}(\alpha, \lambda)$ biçiminde olmak üzere $f(x; \alpha, \lambda)$ yerine yazıldığında,

$$L = \prod_{i=1}^n \alpha \lambda x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda x_i^{-\alpha}} = \alpha^n \lambda^n e^{-\lambda T} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} \quad (53)$$

biçiminde elde edilir. Burada $T = \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}$ dır.

X rasgele değişkeni Ters Weibull dağılımına sahip olduğunda entropi kayıp fonksiyonu,

$$L(\lambda, \delta) = E_x \left(\ln \frac{\lambda^n \lambda^n e^{-n\lambda \bar{x}} e^{-(\lambda-1)T(x)}}{\delta^n \lambda^n e^{-n\lambda \bar{x}} e^{-(\delta-1)T(x)}} \right) = E_\lambda ((\delta-\lambda)T(x) + n \ln \frac{\lambda}{\delta}) = n \left(\frac{\delta}{\lambda} + \ln \frac{\lambda}{\delta} - 1 \right) \quad (54)$$

biçiminde yazılır. $\pi(\lambda)$, λ 'nın herhangi bir önseli olarak varsayıldığında Entropi kayıp fonksiyonu (54) altında Bayes tahmin edicisi;

$$\delta_B(X) = \left(E \left(\frac{1}{\lambda} \middle| X \right) \right)^{-1} \quad (55)$$

biçiminde elde edilir.

İlk olarak ölçek parametresi λ için önsel dağılımın Gamma olarak varsayıldığı durum göz önüne alınsın. Buna göre önsel dağılım

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}, \lambda > 0, a, b > 0 \quad (56)$$

biçiminde olmak üzere λ parametresi için sonsal dağılım bir önceki kısımda,

$$\pi(\lambda|x) = \frac{\lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)}}{\int_0^\infty \alpha^{n+a-1} e^{-\alpha(T+b)} d\alpha} = \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)} \sim \Gamma(n+a, T+b) \quad (57)$$

biçiminde elde edilmişti. $\hat{\lambda}_B$ ile λ 'nın Bayes tahmin edicisi gösterilmek üzere;

$$\hat{\lambda}_B = E((\lambda|x)) \quad (58)$$

olacaktır. Buradan;

$$\hat{\lambda}_B = (n+a)(T+b) \quad (59)$$

elde edilir. Entropi kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi ise;

$$\delta_B(X) = \left(E\left(\frac{1}{\lambda} \middle| X\right) \right)^{-1} \quad (60)$$

olmak üzere;

$$E\left(\frac{1}{\lambda} \middle| X\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)} d\lambda = \frac{T+b}{n+a-1} \quad (61)$$

olarak elde edilir. Buradan da;

$$\delta_B(X) = \left(\frac{T+b}{n+a-1} \right)^{-1} = \frac{n+a-1}{T+b} \quad (62)$$

olarak bulunmuş olur (Yao, Song, Mao, & Le, 2011).

4.1.3. Linex kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi

(50) numaralı eşitlikten λ 'nın Linex kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda} = \frac{-1}{c} \log(E[e^{-c\lambda} | X]) \quad (63)$$

biçiminde yazılabilir. Ters Weibull dağılımı için Linex kayıp fonksiyonu altında işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= \int_0^{\infty} e^{-c\lambda} \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(T+b)} d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(c+T+b)} \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \lambda^{n+a-1} d\lambda
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \tag{65}$$

$$\lambda(c+T+b) = t$$

$$d\lambda(c+T+b) = dt$$

$$\lambda = \frac{t}{c+T+b}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{c+T+b} \right)^{n+a-1} d\lambda \\
&= \frac{(T+b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \cdot \frac{1}{(c+T+b)^{n+a-1}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+a-1} dt
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+a-1} dt = \Gamma(n+a)$$

$$E(e^{-c\lambda}|x) = \frac{(T+b)^{n+a}}{(c+T+b)^{n+a-1}} \tag{67}$$

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{c} \log(E(e^{-c\lambda}|x))$$

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{c} \log\left(\frac{(T+b)^{n+a}}{(c+T+b)^{n+a-1}}\right) \tag{68}$$

olarak elde edilir (Sultan K. , 2008).

4.1.4. Yarı karesel kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi

Yarı karesel (Quasi-Quadratic) kayıp fonksiyonu;

$$L_1(\lambda, \hat{\lambda}) = (e^{-c\hat{\lambda}} - e^{-c\lambda})^2, c \neq 0 \quad (69)$$

biçiminde olmak üzere, Bayes tahmin edicisi sonsal dağılım için riski minimize eden tahmin edici olacaktır. Buna göre,

$$R_1(\hat{\lambda}, \lambda) = E[L_1(\hat{\lambda}, \lambda)] = \int_0^\infty (e^{-c\hat{\lambda}} - e^{-c\lambda})^2 h(\lambda | x) d\lambda \quad (70)$$

olmak üzere bu fonksiyonu minimize eden $\hat{\lambda}$;

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{c} [\ln E(e^{-c\lambda} | x)] \quad (71)$$

dır. Burada;

$$E(e^{-c\lambda}) = \int_0^\infty e^{-c\lambda} \pi(\lambda | x) d\lambda \quad (72)$$

ile bulunur. İlk olarak önsel dağılım Üstel dağılım olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} E(e^{-c\lambda}) &= \int_0^\infty e^{-c\lambda} \pi_1(\lambda | x) d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-c\lambda} \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})^{n+1} \lambda^n e^{-\lambda(\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})}}{\Gamma(n+1)} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{(\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})^{n+1} \lambda^n e^{-\lambda(c + \beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})}}{\Gamma(n+1)} d\lambda \end{aligned} \quad (73)$$

$$E(e^{-c\lambda} | x) = \left[\frac{\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{c + \beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right]^{n+1} \quad (74)$$

biçiminde elde edilir. Buna göre Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_1 = -\frac{1}{c} \ln \left[\frac{\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{c + \beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right]^{n+1} \quad (75)$$

olarak bulunur. Burada β hiper parametredir.

Önsel dağılım Ters Levy dağılımı olarak alınır,

$$\begin{aligned} E(e^{-c\lambda}) &= \int_0^\infty e^{-c\lambda} h_2(\lambda | x) d\lambda \\ E(e^{-c\lambda}) &= \int_0^\infty \frac{e^{-c\lambda} \left(\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \right)^{n+\frac{1}{2}} \lambda^{n-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \right)^{n+\frac{1}{2}} \lambda^{n-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(c + \frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})}}{\Gamma(n+1)} d\lambda \end{aligned} \quad (76)$$

$$E(e^{-c\lambda} | x) = \left[\frac{\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{c + \frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (77)$$

olup, buna göre Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_2 = -\frac{1}{c} \ln \left[\frac{\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{c + \frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (78)$$

biçiminde elde edilir. Burada θ hiper parametredir.

Hiper parametre, önsel dağılımın parametrelerine verilen isimdir. Hiper parametre terimi, asıl dağılımın model parametrelerinden, önsel dağılımın parametrelerini ayırmak için kullanılan bir terimdir. Örneğin, bir Bernoulli dağılımının p parametresinin dağılımını modellemek için bir Beta önsel dağılımı kullanılıyorsa, bu durumda; “ p ” Bernoulli dağılımının parametresi, “ α ve β ” ise Beta önsel dağılımının parametreleri, yani hiper parametrelerdir (Al-Baldawi vd., 2014).

4.1.5. Non-Linear Üstel kayıp fonksiyonu altında ölçek parametresi λ için Bayes tahmin edicisinin elde edilmesi

Non-Linear Üstel kayıp fonksiyonu;

$$L_2(\hat{\lambda}, \lambda) = k [e^{cD} - cD^2 - cD - 1], k > 0, c > 0 \quad (79)$$

biçiminde olmak üzere, burada $D = \hat{\lambda} - \lambda$ olup, tahmin edici hatasını göstermektedir. Genellik kaybı olmaksızın, $k = 1$ olarak alınabilir. Bayes tahmini, sonsal riski minimize eden $\hat{\lambda}$ değeri olacaktır. Risk,

$$R_2(\hat{\lambda}, \lambda) = E[L_2(\hat{\lambda}, \lambda)] = \int_0^\infty L_2(\hat{\lambda}, \lambda) h(\lambda | x) d\lambda \quad (80)$$

biçiminde olmak üzere Bayes tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda} = \frac{-[\ln E(e^{-c\lambda}) - 2E(\lambda)]}{(c + 2)} \quad (81)$$

olarak bulunur. Burada;

$$E(e^{-c\lambda}) = \int_0^\infty e^{-c\lambda} h(\lambda | x) d\lambda \quad (82)$$

biçiminde hesaplanır.

Önsel dağılım Üstel dağılım olarak alındığında Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\lambda}_3 = -\frac{1}{c+2} \left[\ln \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{c + \beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right)^{n+1} - 2 \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right] \quad (83)$$

olarak bulunur.

Önsel dağılım Ters Levy dağılımı olarak alındığında Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\lambda}_4 = -\frac{1}{c+2} \left[\ln \left(\frac{\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{c + \frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right)^{n+\frac{1}{2}} - 2 \frac{n+1}{\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \right] \quad (84)$$

biçiminde hesaplanır (Al-Baldawi vd., 2014).

4.2. İki Parametresi Bilinmeyen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicilerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda Ters Weibull dağılımı için her iki parametrenin de bilinmediği durum göz önüne alınmıştır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Ters Weibull dağılımından alınan n birimlik bir örneklem olsun. Buna göre olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\lambda, \alpha) = \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \quad (85)$$

biçiminde elde edilir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındığında,

$$l(\alpha, \lambda|x) = n \log \alpha + n \log \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \quad (86)$$

olur. α ve λ parametrelerinin birbirinden bağımsız Gamma önsel dağılımlarına sahip olduğu varsayılın. Buna göre,

$$g_1(\alpha) = \frac{p_1^{q_1}}{\Gamma(q_1)} e^{-p_1 \alpha} \alpha^{q_1-1} \quad (87)$$

$$g_2(\lambda) = \frac{p_2^{q_2}}{\Gamma(q_2)} e^{-p_2 \lambda} \lambda^{q_2-1} \quad (88)$$

biçiminde yazılabilirler.

Buradan ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(\alpha, \lambda) = \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1) \Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda), \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (89)$$

olur.

Bayes tahmin edicisini elde edebilmek için ilk olarak olabilirlik fonksiyonu ile önsel dağılımları çarpılır,

$$\pi(\alpha, \lambda, x) = L(x|\lambda, \alpha) \cdot g_1(\alpha) \cdot g_2(\lambda)$$

$$= \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda). \quad (90)$$

Daha sonra her iki parametreye göre integral alınarak X 'in marjinal dağılımı,

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \iint \pi(\alpha, \lambda|x) d\alpha d\lambda \\ &= \iint \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda) d\alpha d\lambda \quad (91) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Daha sonra olabilirlik fonksiyonu marjinal fonksiyona oranlanarak iki parametre için ortak sonsal dağılım aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \lambda|x) &= \frac{\pi(\alpha, \lambda, x)}{\pi(x)} \\ &= \frac{\alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda)}{\iint \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda) d\alpha d\lambda} \\ &= \frac{\alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda}}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} \quad (92) \end{aligned}$$

Parametrelere ilişkin sonsal marjinal dağılımları elde etmek için sırayla parametrelere göre integral alınır ve marjinal sonsal dağılımlar aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} \pi_1(\lambda|x) &= \int \pi(\alpha, \lambda|x) d\alpha \\ &= \frac{\lambda^{n+q_2-1} e^{-p_2 \lambda} \int \alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha} d\alpha}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} \quad (93) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(\alpha|x) &= \int \pi(\alpha, \lambda|x) d\lambda \\ &= \frac{\alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-p_1 \alpha} \int e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_2 \lambda} \lambda^{n+q_2-1} d\lambda}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} \quad (94) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi her iki parametre içinde elde edilen sonsal dağılımlar bilinen dağılımlara benzememekte ve bunlara ait kapalı form elde edilememektedir. Karesel kayıp fonksiyonu altında aranan tahmin ediciler bu dağılımların beklenen değerleri olacaktır. Buna göre beklenen değerler,

$$\hat{\alpha} = E(\alpha) = \int \alpha \pi_2(\alpha|x) d\alpha$$

$$\hat{\alpha} = \int \alpha \frac{\alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-p_1 \alpha} \int e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_2 \lambda} \lambda^{n+q_2-1} d\lambda}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} d\alpha \quad (95)$$

$$\hat{\lambda} = E(\lambda) = \int \lambda \pi_1(\lambda|x) d\lambda$$

$$\hat{\lambda} = \int \lambda \frac{\lambda^{n+q_2-1} e^{-p_2 \lambda} \int \alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha} d\alpha}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} d\lambda. \quad (96)$$

ile hesaplanır. Tahmin edicileri bulabilmek için yukarıdaki integraller analitik olarak hesaplanamadığından nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulur. Burada, Bayes tahmin edicilerini elde edebilmek için Lindley tarafından 1980 yılında önerilen yaklaşım kullanılmıştır. Bu amaçla ilk olarak aşağıdaki kısımda Lindley yaklaşımı verilmiş, daha sonra bu yaklaşım (95) ve (96) eşitliklerine uygulanarak istenilen sonuçlar elde edilmiştir.

Bayes analizinde, ilgilenilen parametrenin, belirli önsel dağılıma sahip rasgele bir değişken olduğu düşünülür. Önsel dağılımın seçimi genellikle mevcut olan önsel bilgilerin türüne dayanır. Bu nedenle seçilen önsel ailesi, hiper-parametrelerin hesaplanmasında kolaylık sağlaması amacıyla esnek olmalıdır. Pratikteki pek çok problemde, verilen varyans ile parametrenin beklenen değeri kavramı, beklenen değere olan güveni gösterir. Yani, seçilen önselin varyansının küçük bir değer olması, beklenen değere olan güveni artırırken; varyansın büyük bir değer olması beklenen değere olan güveni azaltır. Bunun yanı sıra, önselin seçimi, matematiksel manipülasyonları da kolaylaştıran bir husustur. Bu noktaları göz önünde bulundurarak, burada α ve λ parametreleri için önsel dağılım olarak bağımsız Gamma dağılımları alınmıştır.

Önsel dağılımın beklenen değerinin ve varyansının bilindiği varsayımı altında, (87) ve (88) numaralı eşitliklerde yer alan hiper-parametreler kolaylıkla değerlendirilebilir. Örneğin, α 'nın V_α varyanslı, M_α beklenen değeri hakkında bir fikre sahip olunduğu (beklenen değer M_α 'ya güvenin tam olduğu varsayımı altında) varsayılın. $p_1 = M_\alpha/V_\alpha$ ve $q_1 = M_\alpha^2/V_\alpha$ olarak verildiğinde, $M_\alpha = q_1/p_1$ ve $V_\alpha = q_1/p_1^2$ olur. Aynı prosedür, λ için de izlenebilir. Parametreler hakkında hiçbir bilgimiz yoksa veya çok az bilgimiz varsa, önsel varyans çok büyük, yani sonsuza eğilimli olarak alınabilir. Böyle bir durumda, p_1, q_1, p_2 ve q_2 hiper-parametreleri sıfıra yakın değer alırlar ve (87) ve (88) ile verilen önsel dağılımlar aşağıda sırayla verildiği gibi bilgilendirici olmayan önseller olarak alınabilirler.

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} ; \alpha > 0$$

$$J_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda} ; \lambda > 0$$

(Singh vd., 2013).

4.2.1. Lindley yaklaşımı

Bayes tahmin edicisinin elde edilmesinde bir önceki kısımda da görüldüğü üzere genellikle güçlükler ortaya çıkmaktadır. Lindley (1980) tarafından, n 'in yeterince büyük olması durumunda çok parametrelili dağılımlarda zorlanılan integrallerin yaklaşık çözümüne ilişkin bir yöntem geliştirilmiştir. Aşağıda, Lindley yaklaşımı kullanılarak Bayes tahmin edicilerinin nasıl elde edileceği hakkında genel bir anlatıma yer verilmiştir.

$$I = \frac{\int_{\theta} w(\theta) e^{l(\theta)} d\theta}{\int_{\theta} \pi(\theta) e^{l(\theta)} d\theta} \quad (97)$$

integrali göz önüne alınsın. Burada $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ parametre vektörünü, θ parametre uzayını, $l(\underline{\theta})$ olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını, $\pi(\underline{\theta})$, $\underline{\theta}$ parametresinin rasgele seçilmiş ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. $u(\underline{\theta}), \underline{\theta}'$ nin bir

fonksiyonu olmak üzere $w(\underline{\theta}) = u(\underline{\theta}) \pi(\underline{\theta})$ alınarak $u(\underline{\theta})$ 'nın sonsal beklenen değeri aşağıdaki şekilde elde edilir

$$E [u(\underline{\theta}/X)] = \frac{\int_{\underline{\theta}} u(\underline{\theta}) e^{l(\underline{\theta})+G(\underline{\theta})} d\theta}{\int_{\underline{\theta}} e^{l(\underline{\theta})+G(\underline{\theta})} d\theta}. \quad (98)$$

(98) ile verilen eşitlikte $G(\underline{\theta})$, $\underline{\theta}$ parametresinin ortak önsel dağılımının logaritmasıdır ve $G(\underline{\theta}) = \log \pi(\underline{\theta})$ şeklinde gösterilir. O halde (98) eşitliğinin yaklaşık değeri aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$u(\hat{\theta})_{LBayes} = E [u(\underline{\theta}/X)] \\ \approx \left\{ u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p l_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \right\} \quad (99)$$

Burada p , bilinmeyen parametre sayısını ifade etmektedir. Ayrıca,

$$l_{ijk} = \frac{\partial^3 l}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}, \quad i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, p$$

$$l_{ij} = \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p$$

$$u_i = \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p$$

$$\sigma_{ij} = [-l_{ij}]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p$$

şeklindedir.

$p = 2$ için Lindley yaklaşımı kullanılarak elde edilen yaklaşık Bayes tahmin edicisi,

$$u(\hat{\theta})_{LBayes} = E [u(\underline{\theta}|X)]$$

$$\begin{aligned}
& \approx \left\{ u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 l_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \right\} \\
& \approx u(\hat{u}_1, \hat{u}_2) + \frac{1}{2} \{a_{1i} + a_{2i}\} + \frac{1}{2} \{(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12})d + (u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22})e\} \quad (100)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\hat{u}_1, \hat{u}_2, u_1$ ve u_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileridir. a_{1i}, a_{2i}, d ve e aşağıdaki gibidir.

$$a_{1i} = (u_{1i} + 2u_1 g_i) \sigma_{1i}, i = 1, 2$$

$$a_{2i} = (u_{2i} + 2u_2 g_i) \sigma_{2i}, i = 1, 2$$

$$d = l_{111} \sigma_{11} + l_{121} \sigma_{12} + l_{211} \sigma_{21} + l_{221} \sigma_{22}$$

$$e = l_{112} \sigma_{22} + l_{122} \sigma_{12} + l_{212} \sigma_{21} + l_{222} \sigma_{22}$$

$p=3$ için Lindley yaklaşımı kullanılarak elde edilen Bayes tahmin edicisi ise;

$$u(\hat{\theta})_{LBayes} = E [u(\theta|X)]$$

$$\begin{aligned}
& \approx \left\{ u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (u_{ij} + 2u_i g_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 l_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \right\} \\
& \approx (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) + (u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + a_4 + a_5) + \frac{1}{2} A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12} + u_3 \sigma_{13}) \\
& + \frac{1}{2} B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22} + u_3 \sigma_{23}) + \frac{1}{2} C(u_1 \sigma_{31} + u_2 \sigma_{32} + u_3 \sigma_{33}) \quad (101)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, u_1, u_2$ ve u_3 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileridir. Ayrıca, a_i, A, B ve C eşitlikleri de aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$a_i = g_1 \sigma_{i1} + g_2 \sigma_{i2} + u_3 \sigma_{i3}, i = 1, 2, 3$$

$$a_4 = u_{12} \sigma_{12} + u_{13} \sigma_{13} + u_{23} \sigma_{23}$$

$$a_5 = \frac{1}{2} (u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33})$$

$$A = \sigma_{11}l_{111} + 2\sigma_{12}l_{121} + 2\sigma_{13}l_{131} + 2\sigma_{23}l_{231} + \sigma_{22}l_{221} + \sigma_{33}l_{331}$$

$$B = \sigma_{11}l_{112} + 2\sigma_{12}l_{122} + 2\sigma_{13}l_{132} + 2\sigma_{23}l_{232} + \sigma_{22}l_{222} + \sigma_{33}l_{332}$$

$$C = \sigma_{11}l_{113} + 2\sigma_{12}l_{123} + 2\sigma_{13}l_{133} + 2\sigma_{23}l_{233} + \sigma_{22}l_{223} + \sigma_{33}l_{333}$$

(Demir, 2015).

4.2.2. Lindley yaklaşımı ile Ters Weibull dağılımının parametrelerinin Bayesci yöntemle tahmini

Bu kısımda, bir önceki kısımda verilen Lindley yaklaşımı kullanılarak Ters Weibull dağılımının parametre tahminleri elde edilmiştir. Her iki parametre için de önsel dağılım birbirinden bağımsız Gamma dağılımı olarak alındığında ortak önsel dağılımın,

$$g(\alpha, \lambda) = \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1\alpha - p_2\lambda), \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (102)$$

biçiminde olduğu ifade edilmişti. Bu fonksiyonun logaritması alındığında,

$$G(\alpha, \lambda) = \log g(\alpha, \lambda)$$

$$= q_1 \log p_1 + q_2 \log p_2 - \log \Gamma(q_1) - \log \Gamma(q_2) + (q_1 - 1) \log \alpha + (q_2 - 1) \log \lambda \quad (103)$$

elde edilir. Bu fonksiyonun sırasıyla α ve λ 'ya göre türevleri alınır,

$$g_1 = \frac{dG(\alpha, \lambda)}{d\alpha} = \frac{q_1 - 1}{\alpha} - p_1 \quad (104)$$

$$g_2 = \frac{dG(\alpha, \lambda)}{d\lambda} = \frac{q_2 - 1}{\lambda} - p_2 \quad (105)$$

olur. Buradan, bir önceki kısımda verilen sonuçlar uygulanarak aşağıdaki işlemler yapılmış ve parametreler için Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir.

$$L_1 = \frac{d \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \quad (106)$$

$$L_{12} = \frac{d^2 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha d\lambda} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{d \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{112} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha^2 d\lambda} = \frac{d}{d\alpha} \left(- \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2$$

$$\begin{aligned} L_{121} &= \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha d\lambda d\alpha} = \frac{d^2}{d\alpha d\lambda} \left(\frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right) \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(- \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \end{aligned}$$

$$L_{122} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha d\lambda^2} = \frac{d^2}{d\alpha d\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} L_2 \right) = \frac{d^2}{d\alpha d\lambda} \left(\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \right) = 0$$

$$L_2 = \frac{d \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}$$

$$L_{21} = \frac{d^2 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda d\alpha} = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{221} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda^2 d\alpha} = 0$$

$$L_{212} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda d\alpha d\lambda} = 0$$

$$L_{211} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda d\alpha^2} = \frac{d}{d\lambda} \left(- \frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2$$

$$L_{222} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda^3} = 2 \frac{n}{\lambda^3}$$

$$L_{11} = - \frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2$$

$$L_{12} = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{21} = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{22} = - \frac{n}{\lambda^2}$$

$$l_{111} = \frac{2n}{\alpha^3} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^3$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \begin{bmatrix} -\frac{n}{\lambda^2} & \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) & -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \right) \cdot \left(-\frac{n}{\lambda^2} \right) + \left(-\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right)^2 = T$$

$$-\frac{n}{\lambda^2} = U$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) = V$$

$$-\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 = W$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} U & V \\ V & W \end{bmatrix}$$

$$u(\alpha, \lambda) = \alpha \text{ alınırsa, } u_1 = 1, u_2 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = u_{11} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes} = \hat{\alpha}_{ML} + G_{11}g_1 + G_{12}g_2 + \frac{1}{2}(l_{111}G_{11}^2 + 3l_{112}G_{11}G_{22} + l_{222}G_{12}G_{22}) \quad (107)$$

$$u(\alpha, \lambda) = \lambda \text{ alınırsa, } u_2 = 1, u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = u_{11} = 0$$

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \hat{\lambda}_{ML} + G_{21}g_1 + G_{22}g_2 + \frac{1}{2}(l_{222}G_{22}^2 + 3l_{112}(G_{11}G_{22} + 2G_{12}^2) + l_{111}G_{11}G_{12}) \quad (108)$$

Yapılan işlemler sonucunda parametrelere ilişkin Bayes tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_B = \hat{\alpha} + \frac{U}{T} \left(\frac{q_1 - 1}{\hat{\alpha}} - p_1 \right) + \frac{V}{T} \left(\frac{q_2 - 1}{\hat{\lambda}} - p_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\hat{\alpha}^3} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^3 \left(\frac{U}{T} \right)^2 \right) + \\ 3 \left(- \sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^2 \right) \frac{U}{T} \frac{V}{T} + \frac{2n}{\hat{\lambda}^3} \frac{V}{T} \frac{W}{T} \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_B = \hat{\lambda} + \frac{V}{T} \left(\frac{q_1 - 1}{\hat{\alpha}} - p_1 \right) + \frac{W}{T} \left(\frac{q_2 - 1}{\hat{\lambda}} - p_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\hat{\lambda}^3} \left(\frac{W}{T} \right)^2 \right) \\ + \left(- \sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^2 \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{U}{T} \frac{W}{T} + 2 \left(\frac{V}{T} \right)^2 \right) + \left(\frac{2n}{\hat{\alpha}^3} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^3 \frac{U}{T} \frac{V}{T} \right) \quad (110)$$

biçiminde elde edilmiştir.

5. MARKOV ZİNCİRİ MONTE CARLO YÖNTEMLERİ

Bayesci yaklaşımda, modelin veriye uygulanması çoğu zaman karmaşık, yüksek boyutlu integrallerin hesaplanmasını gerektiren çıkarım sorunlarına yol açabilir. Bu integraller için analitik çözümler elde edilemediği durumlarda, hesaplamalar için simülasyon yöntemleri kullanılır. Bu yöntemler Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) yöntemleri olarak bilinir. Bu yöntemler, bu kısımda anlatılmıştır.

Monte Carlo yöntemleri, tekrarlanan rasgele örneklemeler kullanılarak nümerik çözümlerin yapıldığı yöntemlerdir. Fizik, mühendislik, istatistik, ekonomi, programlama gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Monte Carlo yöntemleri çok çeşitli olmakla birlikte, soruna yönelik girdi tanımları yapılması, belirli bir olasılık dağılımına göre rasgele girdilerin üretilmesi, girdiler üzerinden belirleyici hesapların yapılması olmak üzere temel bir yapıya sahiptirler.

MZMC, bir olasılık dağılımı üzerinden örneklemeler ile, Markov zincirinin denge dağılımına ulaşmayı hedefleyen algoritmalar grubuna verilen isimdir. Örneklenmek istenen soruna ilişkin boyut sayısının yüksek olması, diğer yöntemleri kullanışsız hale getirirken, MZMC yöntemleri çoğu zaman uygulanabilir tek yöntem olmaktadır. Genellikle rasgele yürüyüş mantığı ile çalışan algoritmalar kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları şunlardır; Metropolis, Metropolis-Hasting ve Gibbs.

Özetle MZMC yöntemi, sonsal dağılımlardan örneklem çekmek için kullanılan bir simülasyon yöntemidir. Bu yöntem ile, istenilen hedef dağılımdan örneklem yapılır.

Her örnek bir öncekine bağlı olduğundan burada Markov zinciri gösterimi mevcuttur. Markov zinciri, θ^{t-1} rasgele değişkenine bağlı θ^t rasgele değişkenlerinden oluşan, $\theta^1, \theta^2, \dots$ biçiminde bir dizidir.

Tanner (1993), Gilks ve ark. (1996), Chen ve ark. (2000), Liu (2001), Gelman ve ark. (2004), Robert ve Casella (2004), Congdon (2001, 2003, 2005) tarafından yapılan çalışmalar sayesinde MZMC yöntemi Bayesci yaklaşımın uygulamada sıklıkla kullanılır hale gelmesini sağlamıştır (Cengiz vd., 2013).

Sonsal ortalama tahmininin standart hatası, Monte Carlo Standart Hata (MCSH) olarak bilinir ve simülasyonun doğruluğunun ölçüsü olarak kullanılır. Monte Carlo standart hata oranının %5'den küçük olduğu durumda MZMC zincirinin yakınsamaya ulaştığı söylenir (Öztürk & Cengiz, 2017).

5.1. Metropolis Algoritması

Metropolis algoritması, Amerikalı fizik ve bilgisayar bilimcisi Nicholas C. Metropolis tarafından önerilen kolay ve pratik bir algoritmadır. İstenen bir hedef dağılımdan rasgele örneklem almak için kullanılan bir algoritmadır.

Bu algoritma, belirli bir olasılık dağılımından elde edilen rasgele örneklerin, doğrudan dağılımın kestirilmesinde ya da integral hesaplamasında kullanılmasına dayanmaktadır. Ard arda üretilen rasgele değerler, bir olasılık karşılaştırmasına tabi tutularak seçilir. Bu şekilde, Markov zincirinin denge dağılımına erişilene kadar yeni rasgele değerler üretilmeye devam edilir. Tekrar sayısı ne kadar fazla olursa, denge dağılımını örnekleme kalitesi o kadar artar.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\theta|y)$ olan bir dağılımdan rasgele örneklem alınmak istensin. θ^t ile f dağılımından elde edilen t .nci örnek gösterilsin. Bu algoritmada başlangıç değeri olarak θ^0 başlangıç değeri alınır ve “öneri” dağılımı olarak adlandırılan simetrik olan bir $q(\theta^{t+1}|\theta^t)$ yoğunluk fonksiyonu kullanılır. $(t + 1)$.nci adımda θ^t parametre değeri için $q(\cdot|\cdot)$ öneri dağılımından rasgele bir örnek üretilir ve yeni örnek “red” veya “kabul” edilir. Kabul edildiğinde, algoritma yeni örnek ile başlayarak tekrarlanır. Kabul edilmediğinde ise algoritma şu anki noktadan tekrara başlar. Bu şekilde, durduruluncaya kadar tekrarlama işlemine devam edilir. Bu algoritmanın avantajı, istenen tekrar sayısına ulaşıldığında örneklemenin durdurulabilmesi ve toplam örnek sayısına karar verilebilmesidir.

Metropolis algoritması için tek kısıt, $q(\theta_{yeni}|\theta^t)$ öneri dağılımının simetrik bir dağılım olmasıdır. Önerilen dağılım, örneklem elde etmesi bilinen bir dağılım olmalı ve θ^t bilindiğinde θ_{yeni} elde etme olasılığı ile θ_{yeni} bilindiğinde θ^t elde etme olasılığı birbirine eşit yani $q(\theta_{yeni}|\theta^t) = q(\theta^t|\theta_{yeni})$ olmalıdır. Metropolis algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir:

1. $t=0$ için başlangıç noktası $\theta^0, f(\theta^0|y) > 0$ olacak şekilde seçilir.
2. Öneri dağılımı $q(\cdot|\theta^t)$ kullanılarak θ_{yeni} üretilir.
3. Kabul olasılığı, $r = \min\{\frac{f(\theta_{\text{yeni}}|y)}{f(\theta^t|y)}, 1\}$ hesaplanır.
4. $U(0,1)$ 'den bir u üretilir.
5. $u < r$ ise $\theta^{t+1} = \theta_{\text{yeni}}$ kabul edilir, değilse $\theta^{t+1} = \theta^t$ olur.
6. T istenilen örneklem sayısı olmak üzere, $t = t + 1$ alınır ve $t < T$ ise 2.nci adıma dönülür, değilse işlem tamamlanır (Cengiz vd., 2013).

5.2. Metropolis-Hasting Algoritması

Metropolis-Hasting (MH) algoritması Metropolis algoritmasının genelleştirilmiş özel bir halidir. Metropolis-Hasting algoritması Metropolis algoritması ile benzer şekilde çalışmakta olup, bu algoritmayı Metropolis algoritmasından ayıran en önemli fark hem simetrik hem de asimetrik dağılımlara uygulanabilir olmasıdır. Metropolis-Hasting algoritması aşağıdaki kabul olasılığını kullanır,

$$\alpha = \min(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{t-1})} \frac{q(\theta^{t-1}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{t-1})})$$

5.2.1 Tek değişkenli dağılımlar için Metropolis-Hasting algoritması

Tek değişkenli dağılımlar için, Metropolis-Hasting algoritmasının adımları aşağıda özetlenmiştir.

1. $t=1$
2. Bir u başlangıç değeri oluşturulur ve $\theta^{(t)} = u$ olarak alınır
3. Aşağıdaki algoritma tekrar edilir

$t = t + 1$
 $q(\theta|\theta^{(t-1)})$ 'den bir θ^* teklifi belirlenir
 Kabul olasılığı $\alpha = \min\left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{(t-1)})} \frac{q(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{(t-1)})}\right)$ hesaplanır
 Düzgün $(0,1)$ dağılımından bir u oluşturulur
 $u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta^{(t)} = \theta^*$ alınır, değilse $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$ olur
4. $t=T$ olana kadar adımlar tekrar edilir (Steyvers, 2015).

5.2.2. Çok değişkenli dağılımlar için Metropolis Hasting algoritması

Çok değişkenli dağılımlarda, değişkenleri örneklemenin iki farklı yolu vardır.

I. Gruplu güncelleme(*Blockwise Updating*)

Gruplu güncelleme adı verilen ilk yaklaşımda, hedef dağılım ile aynı boyutta olan bir öneri dağılımı kullanılır. Örneğin, n değişken içeren bir olasılık dağılımından örnek alınmak isteniyorsa, n boyutlu bir öneri dağılımı tasarlanır ve öneri (tüm n değişkenleri için değerler içeren) bir blok olarak kabul edilir veya reddedilir.

Aşağıda, n bileşen içeren rasgele bir değişkeni temsil etmek için $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ vektör gösterimi kullanılmış olup, $\theta^{(t)}$ örneklemdaki t .inci durumu temsil etmektedir. Bu, skaler değişkenlerin vektörlerle yer değiştirdiği Metropolis-Hasting örnekleycisinin genelleştirilmesine götürür.

1. $t=1$

2. Bir başlangıç değeri oluşturulur $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\theta^{(t)} = u$ olarak alınır

3. Aşağıdaki algoritma tekrar edilir

$$t = t + 1$$

$q(\theta|\theta^{(t-1)})$ 'den bir θ^* teklifi belirlenir

Kabul olasılığı $\alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{(t-1)})} \frac{q(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{(t-1)})} \right)$ hesaplanır

Düzgün (0,1) dağılımından bir u oluşturulur

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta^{(t)} = \theta^*$ alınır, değilse $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$ olur

4. $t=T$ olana kadar adımlar tekrar edilir (Steyvers, 2015).

II. Tekli Güncelleme (*Componentwise Updating*)

Gruplu güncelleme yaklaşımındaki olası bir sorun, uygun yüksek boyutlu teklif dağılımları bulmanın zor olabilmesidir. Diğer bir problem de, gruplu güncellemenin yüksek red oranları ile ilişkilendirilebilmesidir. Tüm bileşenleri aynı anda içeren θ için bir teklifi kabul etmek veya reddetmek yerine, θ 'nın ayrı ayrı bileşenleri için birer birer teklif yapmak daha kolaydır. Bu, bileşensel güncelleme yaklaşımına yol açar.

Örneğin, iki değişkenli bir dağılım varsayalım $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Öncelikle örneklem $\theta_1^{(1)}$ ve $\theta_2^{(1)}$ 'nin uygun değerleri ile başlatılır. Her bir t iterasyonunda, $\theta_1^{(t-1)}$ son durumuna bağlı olarak $\theta_1^{(*)}$ teklifi yapılır. Daha sonra, $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$ 'e karşı $(\theta_1^{(*)}, \theta_2^{(t-1)})$ olasılığı karşılaştırılarak kabul oranı değerlendirilir. Bu teklifte, yalnızca birinci bileşen değiştirilir, ikinci bileşen sabit tutulur. Bir sonraki adımda, son $\theta_2^{(t-1)}$ durumuna bağlı olarak bir θ_2^* teklifi sunulur. Daha sonra, $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$ 'e karşı $(\theta_1^{(t)}, \theta_2^*)$ olasılığı karşılaştırılarak kabul oranı değerlendirilir. Önemli olarak bu ikinci adımda, ilk bileşen sabit tutulur, ancak bu ilk adımdaki güncellenmiş değerdir. Bu nedenle, ikinci adımda olan şey, ilk adımda olanlara bağlıdır. İki değişkenli Tekli Metropolis-Hasting örnekleyicisinin adımlarının özeti aşağıdaki gibidir.

1. $t=1$ olsun.
2. Bir başlangıç değeri oluşturulur $u = (u_1, u_2)$ ve $\theta^{(t)} = u$ olarak alınır.
3. Aşağıdaki algoritma tekrar edilir.

$$t = t + 1$$

$q(\theta_1 | \theta_1^{(t-1)})$ 'den bir θ_1^* teklifi belirlenir

$$\text{Kabul olasılığı, } \alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta_1^*, \theta_2^{(t-1)})}{p(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})} \frac{q(\theta_1^{(t-1)} | \theta_1^*)}{q(\theta_1^* | \theta_1^{(t-1)})} \right) \text{ hesaplanır.}$$

Düzgün (0,1) dağılımından bir u sayısı üretilir.

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta_1^{(t)} = \theta_1^*$ olur, değilse $\theta_1^{(t)} = \theta_1^{(t-1)}$ olur.

$q(\theta_2 | \theta_2^{(t-1)})$ 'den bir θ_2^* teklifi belirlenir.

$$\text{Kabul olasılığı } \alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta_1^{(t)}, \theta_2^*)}{p(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t-1)})} \frac{q(\theta_2^{(t-1)} | \theta_2^*)}{q(\theta_2^* | \theta_2^{(t-1)})} \right) \text{ hesaplanır.}$$

Düzgün (0,1) dağılımından bir u sayısı üretilir.

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta_2^{(t)} = \theta_2^*$ olur, değilse $\theta_2^{(t)} = \theta_2^{(t-1)}$ alınır.

4. $t = T$ olana kadar tekrar edilir (Steyvers, 2015).

5.3. Gibbs Algoritması

Metropolis ve Metropolis- Hasting algoritmasının özel bir hali olan Gibbs algoritması, ilk olarak Amerikalı fizikçi Josiah W.Gibbs, sonrasında ise Geman (1984) tarafından isimlendirilmiştir. Bayesci çıkarım için Gibbs örneklemesini ilk kez Gelfand ve

arkadaşları kullanmıştır. Gibbs algoritması kullanılarak örnekleme yapılırken, değişkenler arasındaki ilişki ile ilgili bilgiye ihtiyaç duyulur, çünkü Gibbs örnekleme koşullu olasılıklara dayanır. Metropolis algoritmasında olduğu gibi yardımcı bir dağılım gerekli olmadığından bazı araştırmacılar bu algoritmanın daha kullanışlı olduğunu ileri sürmüşlerdir.

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ parametre vektörü, $p(y|\theta)$ olabilirlik ve $\pi(\theta)$ önsel bir dağılım olsun. $\pi(\theta_i|\theta_j, i \neq j, y)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\pi(\theta_i|\theta_j, i \neq j, y) \propto p(y|\theta) \pi(\theta)$$

Gibbs örnekleme için algoritma aşağıdaki gibidir:

1. $t = 0$ için keyfi bir $\theta^{(0)} = \{\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}\}$ başlangıç değeri seçilir.

2. θ' nin her bir bileşeni

$$\pi(\theta_1|\theta_2^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)}, y)' \text{ den } \theta_1^{(t+1)},$$

$$\pi(\theta_2|\theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)}, y)' \text{ den } \theta_2^{(t+1)},$$

.....

$$\pi(\theta_k|\theta_1^{(t+1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(t+1)}, y)' \text{ den } \theta_k^{(t+1)}$$

şeklinde elde edilir.

3. $t = t + 1$ alınır ve T istenilen örneklem büyüklüğü olmak üzere $t < T$ ise 2.nci adıma gidilir değilse işlem bitirilir (Cengiz vd., 2013).

6. UYGULAMA ÇALIŞMALARI

Bu bölümde, tez boyunca anlatılan konulara ilişkin simülasyon ve uygulama çalışmaları yapılmıştır. Matlab programında yazılan kodlar kullanılarak yapılan simülasyon çalışmasında, Ters Weibull dağılımının tek parametresinin bilindiği ve her iki parametresinin de bilinmediği iki farklı durum için parametre tahminleri yapılmıştır. Yapılan çalışma ile, parametrelerin farklı yöntemler kullanılarak elde edilen tahmin sonuçları karşılaştırılmıştır.

6.1. Tek Parametresi Bilinen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicilerinin Elde Edilmesine ilişkin Simülasyon Çalışması

Bu kısımda, Bölüm 3.3.'te anlatılan kayıp fonksiyonları göz önüne alınarak parametre tahminleri yapılmıştır. Bunun için, α şekil parametresi 2 olarak bilinen Ters Weibull dağılımından $n=20,30,50,100$ birimlik örneklem farklı ölçek parametresi $\lambda=2,3,4$ değerleri için üretilmiştir. Hangi kayıp fonksiyonunun daha iyi sonuç verdiğini görebilmek için 1000 deneme yapılmış ve karşılaştırma yapmak için hata kareler ortalaması (HKO) ölçütü olarak kullanılmıştır. Buna göre seçilen ölçüt,

$$HKO = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2}{1000}$$

biçiminde hesaplanmıştır.

Simülasyon sonuçları Çizelge 6.1 ile verilmiştir.

Çizelge 6.1 Şekil parametresi biliniyorken ölçek parametresinin farklı değerleri için çeşitli kayıp fonksiyonları altında elde edilen simülasyon sonuçları

Parametre Değeri	n	Kayıp Fonksiyonları													
		Hata Kareler		Entropi		Linex		Quasi (üstel)		Quasi (Levy)		Non-Linear (üstel)		Non-Linear (Levy)	
		$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\lambda}$	HKO
$\alpha = 2$ $\lambda = 2$	20	2.0526	0.1614	1.9549	0.1459	1.1204	0.8157	1.4225	0.3718	1.4406	0.3556	1.5275	0.2759	1.5609	0.2534
	30	2.0238	0.1563	1.9585	0.1476	1.2241	0.6618	1.5488	0.2580	1.5648	0.2483	1.6280	0.2061	1.6532	0.1948
	50	2.0225	0.0902	1.9828	0.0866	1.3419	0.4830	1.6990	0.1359	1.7116	0.1308	1.7529	0.1127	1.7704	0.1074
	100	1.9654	0.0353	1.9459	0.0363	1.3825	0.4076	1.7946	0.0660	1.8019	0.0637	1.8231	0.0567	1.8324	0.0542
$\alpha = 2$ $\lambda = 3$	20	2.8481	0.3504	2.7125	0.3796	1.4995	2.3119	1.7863	1.5294	1.8286	1.4380	1.9632	1.1606	2.0347	1.0371
	30	2.8949	0.2380	2.8015	0.2520	1.7308	1.6746	2.0348	0.9909	2.0739	0.9242	2.1782	0.7551	2.2351	0.6767
	50	2.9463	0.1614	2.8885	0.1647	1.9877	1.0917	2.3193	0.5262	2.3516	0.4881	2.4238	0.4077	2.4656	0.3681
	100	2.9777	0.0889	2.9482	0.0894	2.2283	0.6513	2.6070	0.2067	2.6285	0.1926	2.6688	0.1673	2.6942	0.1539
$\alpha = 2$ $\lambda = 4$	20	3.6117	0.5901	3.4397	0.7124	1.8105	4.8539	2.0875	3.7142	3.4657	3.4657	2.3416	2.8456	2.4585	2.5011
	30	3.7518	0.4640	3.6308	0.5131	2.1543	3.4895	2.4458	2.4944	2.5128	2.3036	2.6634	1.9016	2.7609	1.6746
	50	3.8479	0.2984	3.7724	0.3164	2.5431	2.2145	2.8585	1.3904	2.9154	1.2731	3.0234	1.0651	3.0965	0.9416
	100	3.9182	0.1500	3.8794	0.1550	2.9492	1.1817	3.3073	0.5535	3.3466	0.5050	3.4091	0.4328	3.4549	0.3862

Çizelge 6.1'den elde edilen sonuçlara göre; $\alpha=\lambda=2$ iken, örneklem sayısının küçük olduğu durumda Entropi kayıp fonksiyonu, diğer bütün durumlarda ise Hata Kareler kayıp fonksiyonu için hata kareler ortalaması (HKO) değerlerinin daha düşük olduğu görülmektedir. Buna göre, aynı λ değeri için örneklem büyüklüğü arttıkça, hata kareler ortalaması düşmüştür. İki kayıp fonksiyonu arasında ise, hemen hemen tüm durumlarda Hata Kareler kayıp fonksiyonu için elde edilen sonuçların daha iyi olduğu söylenebilir.

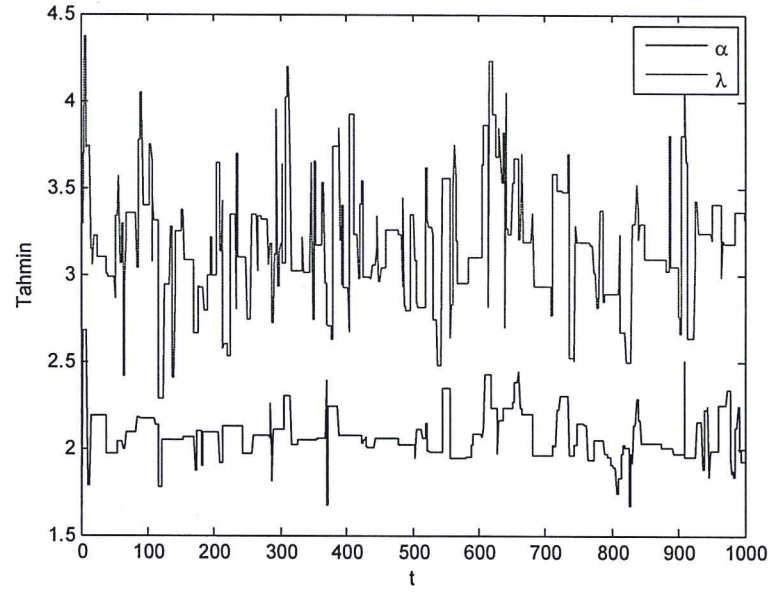
6.2. İki Parametresi Bilinmeyen Ters Weibull Dağılımı için Bayes Tahmin Edicilerinin Elde Edilmesine ilişkin Simülasyon Çalışması

Bu kısımda, Bölüm 4.2.2'de verilen Lindley yaklaşımı ve Bölüm 5.2'de verilen Metropolis Hasting algoritması kullanılarak Ters Weibull dağılımının parametre tahminleri yapılmıştır. Bayesci yöntemle elde edilen sonuçlarla klasik yöntemle elde edilen sonuçları karşılaştırmak amacıyla, ilk olarak Ters Weibull dağılımının parametreleri en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bayesci sonuç çıkarımı için ise öncelikle Lindley yaklaşımı kullanılmış ve parametre tahminleri elde edilmiştir. Daha sonra, MZMC yöntemlerinden çok değişkenli Metropolis-Hasting algoritması uygulanmış ve parametre tahminleri bir de bu yöntemle elde edilmiştir. Bu yöntem uygulanırken iterasyon sayısı 1000 olarak alınmış ve buna göre sonsal dağılımdan örneklem çekilmiştir. Elde edilen örneklem değerlerinin ortalaması Bayes tahminlerini vermiştir.

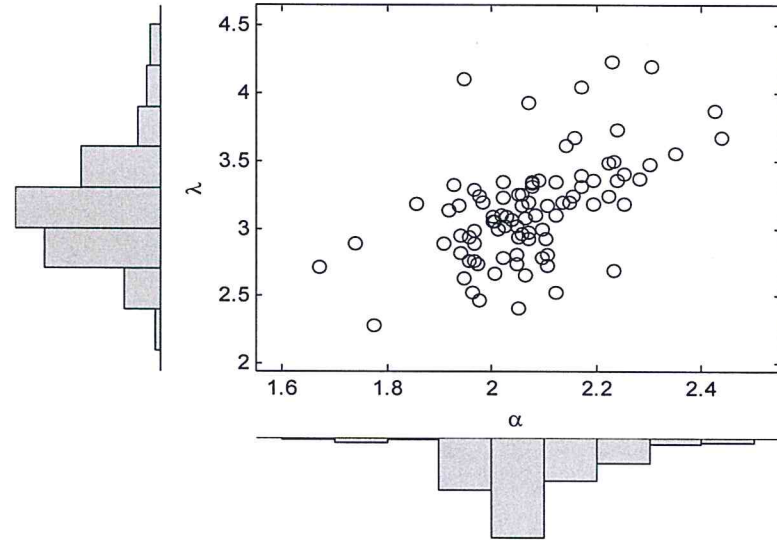
İlk olarak tek deneme için Matlab programı çalıştırılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 6.2 $\alpha=2, \lambda=3$ için parametre tahmin sonuçları

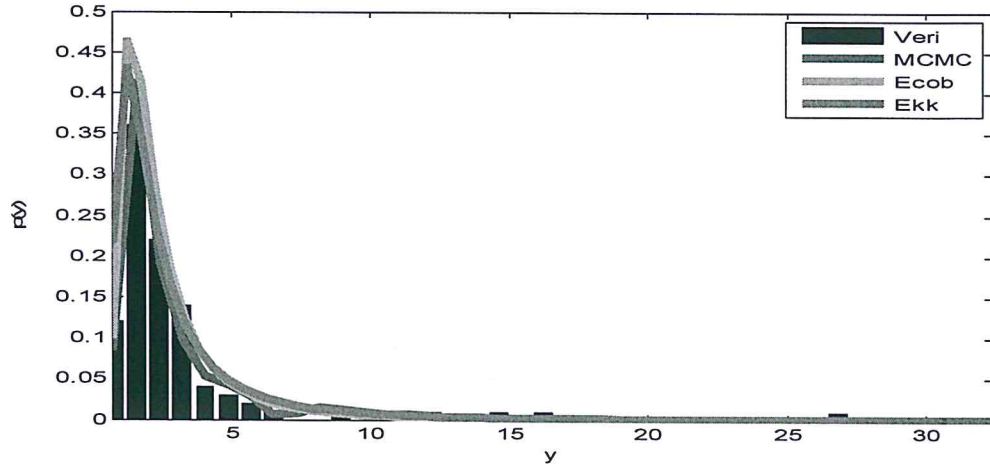
	MZMC(Metropolis-Hasting)				EÇOB		EKK		Lindley	
	Kabul olasılığı		Ortalama							
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
n=100 $\alpha = 2$ $\lambda = 3$	0.120	0.205	1.876	3.055	1.871	3.008	1.877891	3.035305	1.718935	2.68179



Şekil 6.1 İki parametrenin de bilinmediği durum için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri



Şekil 6.2 İki parametrenin de bilinmediği durum için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri için histogramlar ve saçılım grafikleri



Şekil 6.3 İki parametrenin de bilinmediği durum için tahmin ile veri uyumu

Şekil 6.3'den görüldüğü gibi klasik yöntemlerle elde edilen sonuçlarla Bayesci yöntemlerle elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır. MZMC yönteminin Lindley'e göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Tahminlerin etkinliklerini karşılaştırmak amacıyla simülasyon programı 500 kez çalıştırılmış ve her bir yöntem için hata kareler ortalaması,

$$HKO = \frac{\sum_{i=1}^{500} (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2 + (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{500}$$

biçiminde hesaplanarak ölçüt olarak alınmıştır. $\alpha = 2, \lambda = 3$; $\alpha = 2, \lambda = 4$; $\alpha = 3, \lambda = 4$; $\alpha = 4, \lambda = 4$ olarak alınmış ve $n = 30, 50, 100$ birim için simülasyonlar tekrarlanmıştır. Buna göre sonuçlar sonraki sayfada yer alan Çizelge 6.3'de özetlenmiştir.

Çizelge 6.3 İki parametrede bilinmiyorken farklı α ve λ değerleri için elde edilen simülasyon sonuçları

Bayes Yöntemi														
Parametre Değeri	n	EKK			EÇOB			MZMC(Metropolis-Hasting)			Lindley			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	HKO	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	HKO	
$\alpha=2$ $\lambda=3$	30	1.8016	2.7060	0.703762	2.0930	3.2952	0.856728	2.0443	3.2554	0.656257	2.1162	3.3876	0.928569	
	50	1.8500	2.7413	0.488054	2.0490	3.1286	0.404682	2.0224	3.1189	0.343817	2.0639	3.1837	0.423971	
	100	1.9017	2.8215	0.256044	2.0377	3.0951	0.195039	2.0247	3.0934	0.186122	2.0450	3.1224	0.201784	
	30	1.8178	3.5859	1.928088	2.0824	4.4674	2.38198	2.0240	4.2649	1.180361	2.0909	4.5712	2.566637	
$\alpha=2$ $\lambda=4$	50	1.8800	3.6771	0.864699	2.0640	4.2588	0.802696	2.0292	4.1730	0.60814	2.0696	4.3181	0.847311	
	100	1.9022	3.7390	0.530042	2.0404	4.1844	0.39999	2.0208	4.1419	0.351229	2.0431	4.2134	0.41329	
$\alpha=3$ $\lambda=4$	30	2.7468	3.5724	1.569131	3.1286	4.3904	1.784965	2.9700	4.1205	0.9679	3.1454	4.4888	1.913283	
	50	2.7881	3.6331	1.108676	3.0816	4.2377	0.916855	2.9878	4.0947	0.654658	3.0919	4.2946	0.957383	
	100	2.8507	3.7049	0.577108	3.0481	4.1173	0.37186	3.0052	4.0624	0.325235	3.0533	4.1449	0.3803606	
$\alpha=4$ $\lambda=4$	30	3.6674	3.5821	1.817536	4.2312	4.4987	2.26985	3.9248	4.1133	1.049091	4.2559	4.5934	2.417122	
	50	3.7234	3.6612	1.144398	4.1246	4.3128	1.132669	3.9471	4.1026	0.709152	4.1397	4.3675	1.180423	
	100	3.7945	3.7241	0.685901	4.0575	4.1408	0.429078	3.9763	4.0527	0.34642	4.0654	4.1673	0.439145	

Örnekleme sayısı artıkça hata kareler ortalaması her yöntem için düşerken tahmin sonuçlarının gerçek değerlere oldukça yakın olduğu gözükmemektedir. Veri sayısı 30 olduğunda en küçük kareler yöntemi ile elde edilen hata kareler ortalaması en çok olabilirlik yöntemine göre elde edilen hatadan daha düşüktür. Bayesci yöntemde ise Metropolis-Hasting algoritmasının Lindley yaklaşımına göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmektedir. Tüm durumlarda Metropolis-Hasting algoritmasının hata kareler ortalamasının en küçük olduğu gözlenmektedir.

6.3. Tahmin Yöntemlerinin Gerçek Veriye Uygulanması ve Sonuçlar

Bu bölümde, önceki bölümlerde önerilen yöntemler, gerçek yaşamdan alınan veri seti üzerinde gözlenmiştir. Gerçek veri seti, Kundu ve Howlader (2010) makalesinden alınmış olup, ilgili kaynakta verinin orijinalde Bjerkedal'a (1960) ait olduğu belirtilmiştir. Veri seti, farklı dozlarda tüberkül basilleri enjekte edilmiş gine domuzlarının hayatta kalma sürelerini (18 gün içerisinde) göstermektedir. Gine domuzlarının, insan tüberkülozuna olan duyarlılığının yüksek olması sebebiyle bu çalışmada kullanıldığı belirtilmiştir. Veri setinin, Ters Weibull dağılımına göre, monoton olmayan risk oranına sahip bir dağılımdan bir örnek olduğu varsayılmıştır.

Rejim sayısı, 0.5 ml'lik bir çözelti içerisindeki basil birimlerinin sayısının genel logaritmasıdır. Örneğin; rejim sayısının 6.6 olması, her bir 0.5 ml.'lik çözelti içerisindeki, $4.0 \cdot 10^6$ adet basil ünitesini işaret eder ($\ln(4.0 \cdot 10^6) = 6.6$).

6.6 rejimine karşılık olarak listelenen 72 gözlem aşağıda verilmiştir.

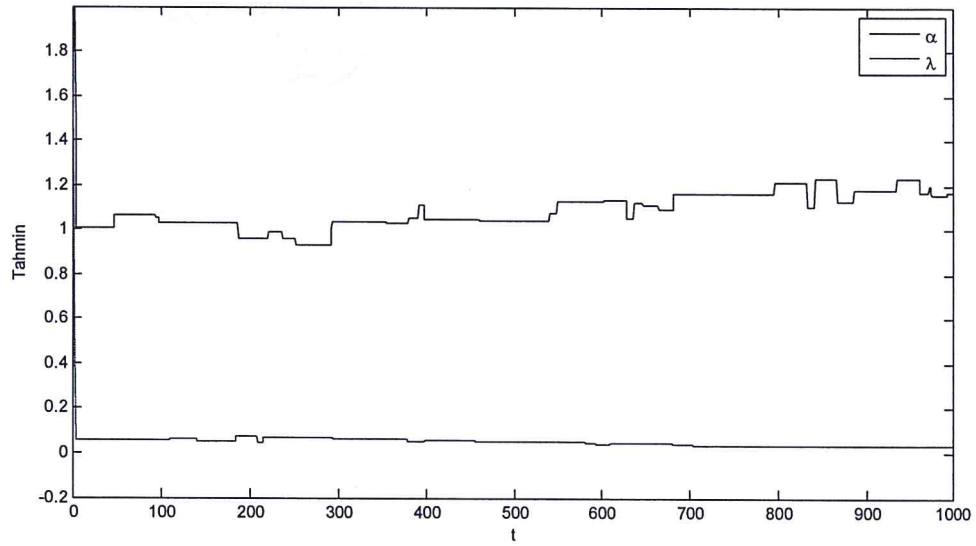
12	15	22	24	24	32	32	33	34	38	38	43	44	48	52	53	54	54	55	56
57	58	58	59	60	60	60	60	61	62	63	65	65	67	68	70	70	72	73	75
76	76	81	83	84	85	87	91	95	96	98	99	109	110	121	127	129	131		
143	146	146	175	175	211	233	258	258	263	297	341	341	376						

Yukarıdaki veriler için Matlab programı çalıştırılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

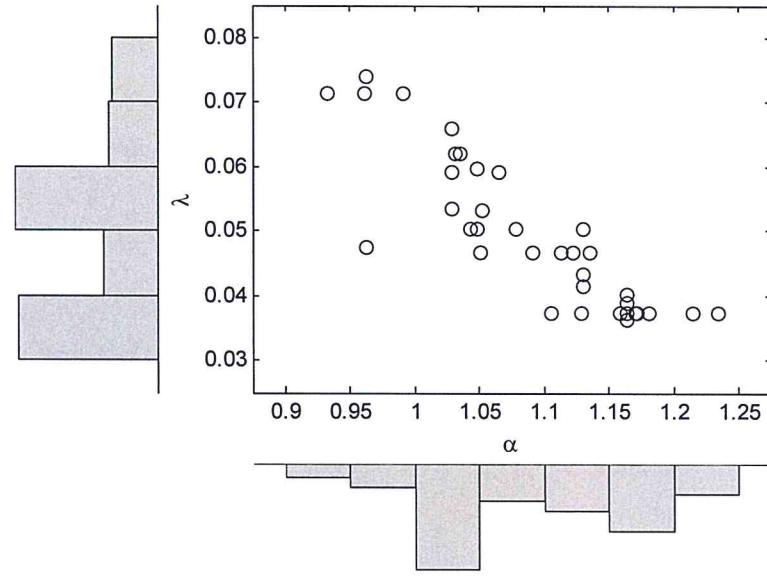
Çizelge 6.4 Parametre tahmin sonuçları

Kabul olasılığı		MZMC Ortalama		EÇOB		EKK		Lindley	
α	λ	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
0.036	0.019	1.061	0.055	1.379	0.018	1.543164	0.011543	1.380173	0.018446

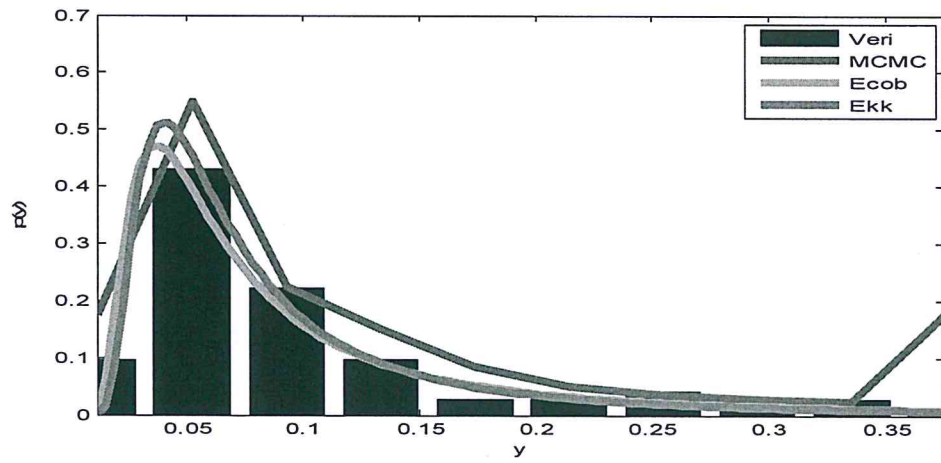
Sonuçlar incelendiğinde, Lindley ile EÇOB tahmin sonuçlarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir ki bu beklenen bir sonuçtur. EKK yöntemi α için en büyük tahmini veren yöntem olmuştur. MZMC yönteminde ise α diğer yöntemlere göre küçük, λ ise büyük olarak elde edilmiştir.



Şekil 6.4 Gerçek veri seti için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri



Şekil 6.5 Gerçek veri seti için MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri için histogramlar ve saçılım grafikleri



Şekil 6.6 Gerçek veri seti için Tahmin ile veri uyumu

Elde edilen tahmin sonuçlarına göre çizdirilen grafiklerde MZMC yönteminin en iyi uyumu gösterdiği söylenebilir.

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Yaşam süresi verilerini analiz etmek için uygun bir model olan Ters Weibull dağılımı, faydalı ömür ve yıpranma periyotları gibi çeşitli özellikleri modellemek için kullanılabilir. Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için genellikle; en küçük kareler, en çok olabilirlik, momentler ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Farklı birçok alanda uygulama olanağına sahip olması nedeniyle, Ters Weibull dağılım parametrelerinin etkin bir şekilde tahmin edilmesi önemlidir.

Bu tez çalışmasında, Ters Weibull dağılımının parametreleri için tahmin yöntemleri incelenmiş ve yapılan simülasyon çalışmaları ile bu yöntemler karşılaştırılmıştır. Ters Weibull dağılımının parametrelerinin Bayesci yöntemle tahmini araştırılmış ve yapılan simülasyon programları ile parametre tahminleri elde edilmiştir. Tahmin yöntemlerini karşılaştırmak için hata kareler ortalaması ölçütü kullanılmıştır. Literatürde sıklıkla karşılaşılan kayıp fonksiyonları göz önüne alınarak, tek parametresi bilinen Ters Weibull dağılımı için parametre tahminleri yapılmış, sonrasında iki parametresi bilinmeyen Ters Weibull dağılımının parametreleri Lindley yaklaşımı ve Metropolis-Hasting algoritması kullanılarak elde edilmiştir. Farklı örneklem boyutları için, en çok olabilirlik, en küçük kareler ve Bayes tahmin edicileri Monte Carlo simülasyonu kullanılarak hata kareler ortalamaları bakımından karşılaştırılmıştır.

Tek parametresi bilinen Ters Weibull dağılımına ilişkin simülasyon sonuçları değerlendirildiğinde, Hata Kareler kayıp fonksiyonu altında elde edilen tahmin sonuçlarının gerçek değerlere daha yakın olduğu ve hata kareler ortalamasının genel anlamda diğer tüm kayıp fonksiyonlarına göre daha düşük belirlendiği gözlenmiştir. Sonuç olarak, Hata Kareler kayıp fonksiyonunun hemen hemen tüm durumlarda diğer kayıp fonksiyonlarına kıyasla daha iyi sonuç verdiği söylenebilir.

İki parametresi bilinmeyen Ters Weibull dağılımına ilişkin simülasyon sonuçlarından, beklendiği üzere örneklem sayısı arttıkça hata kareler ortalamasının her yöntem için düştüğü ve tahmin sonuçlarının gerçek değerlere oldukça yakın olduğu gözlenmiştir.

Bayesci yöntemde, tüm durumlarda Metropolis-Hasting algoritmasının hata kareler ortalamasının en küçük olduğu ve Metropolis-Hasting algoritmasının Lindley yaklaşımına göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

En son olarak Ters Weibull dağılımına sahip olduğu düşünülen gerçek veriler kullanılarak dağılım parametreleri tahmin edilmiş ve tahminlere göre çizdirilen grafiklerde en iyi uyumu MZMC yöntemine göre elde edilen sonuçların gösterdiği görülmüştür.

Sonuç olarak, Bayesci yöntemler uygulanarak elde edilen tahmin değerlerinin klasik yöntemlerle elde edilen değerlerle benzerlik gösterdiği, hatta birçok durumda Bayesci yöntemle elde edilen sonuçların daha iyi olduğu söylenebilir. Bayesci yöntemlerde klasik yöntemlerden farklı olarak işin içine parametreler ile ilgili önsel bilgiler dahil edilir ve parametreler sanki birer rasgele değişken gibi alınır. Tez boyunca yapılan simülasyon çalışmalarından elde edilen sonuçlara göre, bu bilgilerin kullanılması ile tahminlerin iyileştiği söylenebilir.

Sonuç olarak, Ters Weibull dağılımı için Bayesci yöntemler kullanılarak elde edilen tahmin sonuçlarının klasik yöntemlerle elde edilenler kadar iyi olduğu söylenebilir. Hatta hata kareler ortalaması ölçütüne göre Bayesci MZMC kullanılarak elde edilen sonuçların diğerlerine göre daha iyi olduğu yani tahmin sürecinde Bayesci yöntemlerin klasik yöntemlere iyi bir alternatif olarak kullanılabileceği söylenebilir.

KAYNAKLAR

- Ahmad vd., v. (2015). Classical and Bayesian Approach in Estimation of Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution. *Mathematical Theory and Modeling*, 5(13), 2224-5804.
- Ahmad, K., Ahmad, S., & Ahmed, A. (2015). Classical and Bayesian Approach in Estimation of Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution. *Mathematical Theory and Modeling*, 5(13), 2224-5804.
- Al-Baldawi vd., A.-B. (2014). Bayes Estimators of the Scale Parameter of an Inverse Weibull Distribution under two different Loss Functions. *Journal of Advances in Mathematics*, 8(2), 1571-1577.
- Berger, J. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer-Verlag.
- Berger, J. (2006). The Case for Objective Bayesian Analysis. *Bayesian Analysis*, 3, 385-402.
- Bernardo, J., & Smith, A. (1994). *Bayesian Theory*. New yYrk: John Wiley&Sons.
- Bernardo, J., & Smith, A. (2000). *Bayesian Theory*. New York: John Wiley&Sons.
- Bjerkedal, T. (1960). Acquisition of resistance in guinea pigs infected with different doses of virulent tubercle bacilli. *Am.J.Hyg.* 72, 130-148.
- Calabria, R., & Pulcini, G. (1990). On the Maximum Likelihood and Least Squares Estimation in the Inverse Weibull Distribution. *Statistics Applicata*, 2, 53-66.
- Calabria, R., & Pulcini, G. (1994). Bayes 2-Sample Prediction for the Inverse Weibull Distribution. *Communications in Statistics-Theory&Methods*, 23, 1811-1824.
- Carlin, B., & Louis, T. (2000). *Bayes and empirical Bayes Methods for Data Analysis* (Second Edition b.). London: Chapman&Hall.
- Carriere, J. (1992). Parametric Models for Life Tables. *Transactions of society Actuaries*, 44, 77-100.
- Cengiz vd., C. (2013). Lojistik Regresyonda Parametre Tahmininde Bayesci Bir Yaklaşım. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*(12), 15-22.

- Chiodo vd., C. v. (2015). Bayes Estimation of Inverse Weibull Distribution for Extreme Wind Speed Prediction. *ICCEP*. İtalya: IEEE.
- Demir, E. (2015). İlerleyen Tür Tip 2 Sağdan Sansürleme Altında Bazı Yaşam Zamanı Dağılımları İçin Parametre Tahmini . *Yüksek Lisans Tezi*. Konya, Selçuk.
- Ellah, A. H. (2012). Bayesian and Non-Bayesian Estimation of the Inverse Weibull Model Based on Generalized Order Statistics. *Intelligent Information Management*, 4, 23-31.
- Elshahat, M., & Ismail, A. (2014). Quasi-Bayesian Estimation for Inverse Weibull Distribution. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 2(2), 64-75.
- Erto, P. (1986). Properties and Identification of the Inverse Weibull: Unknown or Just forgotten. *Quality and Reliability Engineering International*, 9, 383-385.
- Gamerman, D. (1997). Sampling from the Posterior Distribution in Generalized Linear Mixed Models. *Statistics and Computing* , 57-68.
- Goldstein, M. (2006). Subjective Bayesian Analysis: Principles and Practice. *Bayesian Analysis*, 3, 403-420.
- Güner, A. (2014, 6). Bayesci Yaklaşımda Eşlenik Aileleri Önseli ile Jeffreys Önselinin Karşılaştırılması. *Bayesci Yaklaşımda Eşlenik Aileleri Önseli ile Jeffreys Önselinin Karşılaştırılması*. Eskişehir, Osmangazi, Türkiye.
- Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*. Oxford: Oxford University Press.
- Johnson, N., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* (Vol 1. b.). New York: John Wiley and Sons.
- Keller, A., & Kamath, A. (1982). Alternative Reliability Models for Mechanical Systems. *Proceeding of the 3rd International Conference on Reliability and Maintainability*, 411-415.
- Khan vd., K. (2008). Theoretical Analysis of Inverse Weibull Distribution. *WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS*, 7(2), 1109-2769.
- Kim vd., K. (2014). Non-informative priors for the inverse Weibull distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(5), 1039-1054.

- Kundu, D., & Howlader, H. (2010). Bayesian Inference and Prediction of the Inverse Weibull Distribution for Type-II Censored Data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(6), 1547-1558.
- Kundu, D., Sultan, K., & Alsadat, N. (2013). Bayesian and maximum likelihood estimations of the inverse Weibull parameters under progressive type-II censoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(10), 2248-2265.
- Loganathan, A., & Uma, M. (2017). Comparison of Estimation Methods for Inverse Weibull distribution. *Global and Stochastic Analysis*, 4(1), 83-93.
- Mudasir, S., Ahmed, A., & Ahmad, S. (2015). A Note on Bayesian Estimation of Inverse Weibull Distribution under LINEX and Quadratic Loss Functions. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 13(2), 170-177.
- Murthy vd., M. (2004). Weibull Model Selection for Reliability Modeling. *Reliability Engineering & System Safety*, 86, 257-267.
- Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. New York: Wiley.
- Nematollahi, N., & Motamed-Shariati, F. (2009). Estimation of the selected gamma population. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 208-221.
- O'Hagan, A. (1994). *Bayesian Inference*. London: Arnold.
- Öztürk, Z., & Cengiz, M. A. (2017). Bayesci Genelleştirilmiş Lineer Karma Modellerde Önsel Seçimleri ve Karşılaştırılması. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(3), 999-1010.
- Panaiteescu, E., Popescu, P., Cozma, P., & Popa, M. (2010). Bayesian and Non-Bayesian Estimators Using Record Statistics of the Modified-Inverse Weibull Distribution. *Proceedings of the Romanian Academy*, 11(Series A), 224-231.
- Robert, C. (2001). *The Bayesian Choice* (Second Edition b.). New York: Springer-Verlag.
- Singh vd., v. (2013). Bayesian estimation of parameters of inverse Weibull distribution. *Journal of Applied Statistics*, 40(7), 1597-1607.

- Singh, S. K., Singh, U., & Sharma, V. K. (2013). Bayesian analysis for Type-II hybrid censored sample from inverse Weibull distribution. *Int J Syst Assur Eng Manag*, 4(3), 241–248.
- Singh, S. K., Singh, U., & Sharma, V. K. (2013). Bayesian Prediction of Future Observations from Inverse Weibull Distribution Based on Type-II Hybrid Censored Sample. *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, 1(2), 32-43.
- Steyvers, M. (2015). *Advanced Matlab: Exploratory Data Analysis and Computational Statistics*.
- Sultan, K. (2007). Higher Order Moments of Record Values from the Inverse Weibull Lifetime Model and Edgeworth Approximate Inference. *International Journal of Reliability and Applications*, 8(1), 1-16.
- Sultan, K. (2008). Bayesian Estimates Based on Record Values from the Inverse Weibull Lifetime Model. *Model Quality Technology & Quantitative Management*, 5(4), 363-374.
- Sultan, K. S. (2008). Bayesian Estimates Based on Record Values from the Inverse Weibull Lifetime Model. *Model Quality Technology & Quantitative Management*, 5(4), 363-374.
- Sultan, K. S. (2010). Record Values from the Inverse Weibull Lifetime Model: Different Methods of Estimation. *Intelligent Information Management*, 2, 631-636.
- Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. New York: Springer-Verlag.
- Yahgmaei, F., Babanezhad, M., & Moghadam, O. S. (2013). Bayesian Estimation of the Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution under the Asymmetric Loss Functions. *Journal of Probability and Statistics*, Vol.2013(Article ID 890914), 8 pages.
- Yao, W. Y., Song, B. W., Mao, Z. Y., & Le, H. Y. (2011). Parameter Estimations of Inverse Weibull Distribution. *Advanced Materials Research*, 199-200, 564-568.

Zeytinoğlu, F. Ç. (2009). Weibull Dağılımının Ölçek ve Biçim Parametreleri için İstatistiksel Tahmin Yöntemlerinin Karşılaştırılması. *İstanbul Ticaret Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 8(15), 73-87.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İdil Büşra Kutlu

Doğum Tarihi : 17/12/1979

Doğum Yeri : Ankara

Uyruğu : T.C.

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

EĞİTİM DURUMU

Lise : Sokullu Mehmet Paşa – İng. Ağırlıklı- Lisesi, Ankara 1993 – 1997

Lisans : Ankara Üni. Fen Fak. İstatistik Böl. Ankara 1997 – 2001

ÇALIŞTIĞI KURUM/KURUMLAR

Türkiye İş Bankası A.Ş. Genel Müdürlüğü
Mali Analiz Bölümü - 2003 – 2015
(Kıdemli Servis Yetkilisi)

TÜBİTAK
Teknoloji ve Yenilik Destek Programları Başkanlığı
(TEYDEB)
Uzman

KURSLAR/SERTİFİKALAR

ODTÜ.Yabancı Diller Yüksek Okulu, Sertifika Programı	2001-2002
Karaca Dil Kursu, İleri Seviyede Gramer + Çeviri Programı	2001-2002
Bilgisayar Kullanımı Sertifika Programı	2001-2002
Genel Bankacılık ve Muhasebe Eğitimi	2003
İstihbarat ve Mali Tahlil Eğitimi	2005
Makyajlanmış Mali Tabloların Tespiti	2011
Mali Analiz Sürecinde Yapılan Aktarma ve Arındırmalar	2011