



**SINE-GORDON AÇILIM METODUNUN  
GELİŞTİRİLMİŞ ZAKHAROV-KUZNETSOV  
VE (2+1) BOYUTLU CUBIC KLEIN-GORDON  
DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

**Tuğba YAZĞAN**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Hasan BULUT  
ARALIK-2018**

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINE-GORDON AÇILIM METODUNUN GELİŞTİRİLMİŞ  
ZAKHAROV -KUZNETSOV VE (2+1) BOYUTLU CUBİC KLEİN-GORDON  
DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba YAZĞAN

(161121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.11.2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 18.12.2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan BULUT

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Aralık-2018

## ÖNSÖZ

Bu çalışmaya başladığımdan beri zamanlarımı, araştırmalarımı, bilgi ve birikimlerini esirgemeyen, sonuna kadar destek veren ve titizlikle çalışmalarımı gözden geçiren çok değerli hocalarım Prof. Doç. Dr. Hasan BULUT ve Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ'a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilir ve saygılarımı sunarım.

Bu tez çalışması Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri koordinasyon birimi tarafından FF.18.05 proje numaralı ve “ Sinüs Hiperbolik –Gordon Açılım metodunun geliştirilmiş Zakharov-Kuznetsov ve (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon denklemlerine uygulanması” başlıklı proje ile desteklenmiştir.

**Tuğba YAZĞAN**  
**ELAZIĞ - 2018**

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

ÖNSÖZ .....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET .....	III
SUMMARY .....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER .....	3
3. MATERYAL ve METOTLAR.....	9
3.1 Sine-Gordon Açılım Metodu.....	9
3.2 Genişletilmiş sinh-Gordon Açılım Metodu .....	11
4. METODUN UYGULANMASI.....	15
4.1 SGEM Metodunun mZK ve (2+1) Boyutlu cKG Denklemlerine Uygulanması ....	15
4.2 ShGEEM Açılım Metodunun mZK ve (2+1) Boyutlu cKG Denklemlerine Uygulanması .....	31
5. SONUÇLAR.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ .....	51

## ÖZET

Yapılan çalışma dört bölüme ayrılmıştır.

Birinci bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; sine-Gordon açılım ve sinh-Gordon açılım metodunun genel yapısı verildi.

Üçüncü bölümde; Zakharov-Kuznetsov ve  $(2+1)$  boyutlu Cubic Klein-Gordon denklemlerine Sine-Gordon açılım ve sinh-Gordon açılım metodları ile çözümler yapıldı. Mathematica 9 programı kullanılarak çözümlerin iki ve üç boyutlu grafiği çizildi.

Dördüncü bölümde ise, elde edilen analitik çözümler göz önüne alınarak kapsamlı bir sonuç verildi.

**Anahtar Kelimeler:** sine-Gordon Açılım Metodu, sinh-Gordon Açılım Metodu, Geliştirilmiş Zakharov-Kuznetsov Denklemi,  $(2+1)$ -boyutlu cubic Klein-Gordon Denklemi

## SUMMARY

### **Application of Sine-Gordon Expansion Method to Modified Zakharov-Kuznetsov and (2 + 1) Dimensional Cubic Klein-Gordon Equations**

This study is consisted of the four chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study was introduced. In chapter two, the general structures of SGEM and ShGEEM has been presented.

In chapter three, the travelling wave solution of Zakharov-Kuznetsov ve (2+1) boyutlu Cubic Klein-Gordon differantial equations by using SGEM and ShGEEM 2D and 3D surfaces of results have been plotted with the help of Wolfram Mathematica 9. In chapter four, it has been given a conclusion about techniques used by taking into account travelling wave solutions obtained in this study.

**Key Words:** sine-Gordon Expansion Method, sinh-Gordon Expansion Method, Modified Zakharov-Kuznetsov Equation, (2+1)-dimensional cubic Klein-Gordon Equation

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa No

- Şekil 4.1. (4.5) denkleminde  $a = 3, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 17
- Şekil 4.2. (4.6) denkleminde  $a = 3, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 18
- Şekil 4.3. (4.7) denkleminde  $c = 2, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 19
- Şekil 4.4. (4.8) denkleminde  $c = 2, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 20
- Şekil 4.5. (4.9) denkleminde  $c = 2, a = 3, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 21
- Şekil 4.6. (4.10) denkleminde  $c = 2, a = 3, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 22
- Şekil 4.7. (4.11) denkleminde  $c = 2, a = 3, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ..... 22
- Şekil 4.8. (4.16) denkleminde  $\beta = 2, \alpha = 1, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 24
- Şekil 4.9. (4.17) denkleminde  $\beta = 2, \alpha = 1, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 25
- Şekil 4.10. (4.18) denkleminde  $\beta = 2, \alpha = 1, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 26
- Şekil 4.11. (4.19) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 27
- Şekil 4.12. (4.20) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 28
- Şekil 4.13. (4.21) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 28
- Şekil 4.14. (4.22) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, \alpha = 1, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 29
- Şekil 4.15. (4.23) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, \alpha = 1, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri ... 30
- Şekil 4.16. (4.24) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, \alpha = 1, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri .. 31
- Şekil 4.17.  $\mu = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.25) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri ..... 33
- Şekil 4.18.  $\mu = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.6) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri ..... 33

<b>Şekil 4.19.</b> $\mu = -1, a = 0.35, t = 0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.31) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	34
<b>Şekil 4.20.</b> $\mu = -1, a = 0.35, t = 0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.32) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	34
<b>Şekil 4.21.</b> $c = 1, a = 0.35, t = 0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.33) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	35
<b>Şekil 4.22.</b> $c = 1, a = 0.35, t = 0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.2.10) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	35
<b>Şekil 4.23.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.2.15) denkleminin topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri.....	38
<b>Şekil 4.24.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.2.16) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	38
<b>Şekil 4.25.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.41) denkleminin topolojik olmayan ve topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri.....	39
<b>Şekil 4.26.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.2.18) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	40
<b>Şekil 4.27.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.2.19) topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	41
<b>Şekil 4.28.</b> $\alpha = 2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.2.20) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	41
<b>Şekil 4.29.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.45) denkleminin topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	42
<b>Şekil 4.30.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.46) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	42
<b>Şekil 4.31.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.47) denkleminin topolojik olmayan ve topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri.....	43
<b>Şekil 4.32.</b> $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.49) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	44
<b>Şekil 4.33.</b> $\alpha = 2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$ ve $y = 0.9$ değerleri göz önüne alındığında (4.49) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri .....	45

## 1. GİRİŞ

Lineer olmayan evrim denklemlerinin çeşitli tipleri için salınımlı dalga çözümlerini araştırmak lineer olmayan fiziksel olaylarda oynadığı büyük rol nedeniyle, birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Lineer olmayan evrim denklemleri gerçek yaşantımızda meydana gelen lineer olmayan fiziksel olayları yani katıhal fiziği, optik fiberler, akışkan mekaniği gibi matematiksel fizik, biyoloji, kimya ve mühendislik alanlarında çeşitli lineer olmayan dalga olaylarını tanımlar. Bu yüzden lineer olmayan evrim denklemleri günlük aktivitelerimizde oynadığı rol nedeniyle bu denklemlerin salınımlı dalga çözümlerini araştırmak önemli ölçüde yarar sağlamaktadır. Lineer olmayan matematiksel modellerin bu türlerinin salınımlı dalga çözümlerini elde etmek için çeşitli analitik ve sayısal metotlar bize yol göstermiştir. Bu metotlar; Kudryashov metodu [1-4], genelleştirilmiş Kudryashov metodu [5-6], tanh metodu [7-10], genişletilmiş tanh metodu [11-15], varyasyonel iterasyon metodu [16-19], birinci integral metodu [20-22], üstel fonksiyon metodu [23-26], homotopi pertürbasyon metodu [27], genişletilmiş tanh metodu [28], homojen denge metodu [29], çoklu değişkenlere ayırma metodu [30], Hirota'nın bilinear tekniği [31], geliştirilmiş  $\tan(\Phi(\zeta)/2)$  açılım metodu [32], deneme denklem metodu [33], dinamik sistemler metodu [34], belirsiz katsayılar metodu [35], deneme çözüm metodu [36-37], Backlund dönüşüm metodu [38], geliştirilmiş  $\exp(-\varphi(\zeta))$  açılım fonksiyon metodu [39], ters varyasyonel prensibi [40-41], ansatz yaklaşımı [42-43], geliştirilmiş adomain ayrışım metodu [44] gibi çeşitli yöntemler birçok matematiksel modellere uygulanmıştır.

Biz bu çalışmada, sine-Gordon açılım (SGEM) ve genişletilmiş sinh-Gordon açılım (ShGEEM) metodlarını, geliştirilmiş Zakharov-Kuznetsov (mZK) ve (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon (cKG) denklemlerinin çözümlerini elde etmek için kullandık.

İlk olarak, geliştirilmiş Zakharov-Kuznetsov denklemini göz önüne aldık ve lineer olmayan geliştirilmiş Zakharov-Kuznetsov (mZK) denklemi aşağıda şekildeki gibidir [45].

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{yyy} = 0$$

İki boyutlu izotropiğe sahip mZK denklemi, iki boyutlu güçlü manyetize edilmiş kayıpsız bir plazma içinde zayıf lineer olmayan iyon-akustik dalgaları tanımlamak için

ortaya konmuştur. İyon-akustik dalgaların lineer olmayan dalga yapıları iki boyutlu kayıpsız bir plazmada güçlü bir şekilde manyetize edilmiştir. Benzer şekilde mZK denkleminin dalga çözümlerini araştırmak için farklı araştırmacılar tarafından çeşitli metotlar ele alınmıştır. Bu metotlardan bazıları yeni denge metodu [46], geliştirilmiş  $(G'/G)$  açılım metodu [47], indirgeyici pertürbasyon prosedürü [48], homotopi pertürbasyon metodu [49] gibi metotlardır.

İkinci olarak, bu çalışmada (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon denkleminin yeni salınımlı dalga çözümleri elde edildi. cKG denklemi aşağıdaki şekilde gibidir [50].

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} + \alpha u + \beta u^3 = 0$$

cKG denklemi Josephon Junctions'daki akışkanların yayılımı, elementer davranışlar ve kristallerdeki yer değiştirme yayılımı dahil birçok farklı lineer olmayan olayları modellemek için kullanılmıştır. cKG denkleminin dalga çözümlerini elde etmek için çeşitli sayısal ve analitik metotlardan yararlanılmıştır. Örneğin bunlar; geliştirilmiş basit denklem metodu [51], Hirota'nın bilineer dönüşüm metodu [52], tanh fonksiyon metodu [53] gibi metotlardır.

## 2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

### Tanım 2.1.

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir [54].

### Tanım 2.2.

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine *sınır değer problemi* denir. Verilen şartlara da *sınır şartları* ismi verilir [54].

Diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması bakımından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \quad (2.1)$$

şekliyle verilebilir. (2.1) da yer alan  $A, B, C, D, E, F$  ve  $G$  sabitler olsun. Diğer taraftan

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad (2.2)$$

diskriminantı tanımlayalım.

<i>Diskriminant</i>	<i>Denklem tipi</i>	<i>Örnek</i>	<i>İsmlendirme</i>
$\Delta > 0$	<i>hiperbolik</i>	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$	Dalga denklemi
$\Delta = 0$	<i>parabolik</i>	$u_t - k u_{xx} = 0,$	Isıdenklemi
$\Delta < 0$	<i>eliptik</i>	$u_{xx} + u_{yy} = 0,$	Laplace denklemi

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını tarif etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konulduğunda denklemini sağlayan bir çözüm yapılandırmasıdır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir.

**Tanım 2.3.**

Eğer bir  $f(x)$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktası civarında

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}, \quad (2.3)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilirse ve  $x_0$  noktasını içeren bir açık aralıkta  $x$ 'in bütün değerleri için Taylor açılımı  $f(x)$  fonksiyonuna yaklaşıyorsa  $f(x)$  fonksiyonu  $x = x_0$  noktasında analitik fonksiyondur denir [54].

**Tanım 2.4.**

Bir bağımlı ve bir bağımsız değişkenden oluşan, bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerini bulunduran denkleme adi diferansiyel denklem denir. Genel olarak,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.4)$$

şeklinde yazılır [54].

**Tanım 2.5.**

İçinde en az iki bağımsız ve bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Genel olarak,

$$f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0, \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır [55].

**Tanım 2.6.**

Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına denklemin mertebesi denir [55].

**Tanım 2.7.**

Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin kuvvetine denklemin derecesi denir [55].

**Tanım 2.8.**

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazıldığında katsayılar sabit yada yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem adını alır [55].

**Tanım 2.9.**

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı lineer denir [55].

**Tanım 2.10.**

Bir kısmi türevli denklem yarı lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir [55].

**Tanım 2.11.**

Bir  $x$  bağımsız değişkeni ile, bunun iki veya daha fazla fonksiyonu ve bu fonksiyonların  $x$ 'e göre türevlerinden meydana gelen sisteme diferansiyel denklem sistemi denir [56-57].

**Tanım 2.12.**

Başlangıç değer problemi, belli bir noktadan başlayıp aranan fonksiyonun çözüm alanında adım adım bulunabildiği problemlerdir. Başlangıç değer problemini ifade eden  $n$ . mertebeden bir denklemin çözümü için gerekli bütün şartlar bağımsız değişkenin tek bir değerinde verilir [58].

**Tanım 2.13.**

Çözümü kapalı bir alanda aranan ve genel çözümde bulunan sabitlerin değerlerinin belirlenmesi için bağımsız değişkenin en az iki değerinin verildiği problemlere sınır değer problemleri denir. [58].

**Tanım 2.14.**

Dalga, bir fizik terimi olarak, uzay veya uzay zamanda yayılan ve sıklıkla enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. Bununla birlikte günlük dilde farklı anlamlarda kullanılmaktadır. Ayrıca denizlerde oluşan bir su vurutusudur. Dalgalar bir yerden başka bir yere uzanırlar. Titreşimleri, periyodik (bir kemandaki nota sesi gibi) olabileceği gibi, periyodik olmayabilir.

**Tanım 2.15.**

Soliton, enerji darbelerine benzeyen ve dağılmadan bir biçim hızla hareket eden, zamanda bozulmamış asimptotik olarak bu birkaç sinyalin çarpışması ve çarpışmadan sonra bozulmamış biçimleriyle çıkan tekil dalgalardır.

Solitonlar, fiziksel sistemleri tanımlamak için kullanılan doğrusal olmayan dağıtıcı kısmi ayrimsal eşitliklerin yayılma sınıfının çözümleri olarak bulunmuştur. Solitonlarında içinde bulunduğu bu klasik çözümler; sabit, statik, hem uzaya hemde zamana bağlı olan çözümler olarak sınıflandırılırlar [59].

**Tanım 2.16.**

Sabit çözümler, sıfırdan farklı olan, potansiyeli minimum kılan, sıfır-enerjili kararlı vakum çözümleridir ve solitonlar bu çözümler arasında hapsoldüğünden sonlu enerjiye sahiptirler [59].

**Tanım 2.17.**

Statik çözümler, uzay boyutuna göre; tek boyutlu kink (tek yamaçlı) çözümler, iki boyutlu vortex çözümler, üç boyutlu monopole (tek kutup) çözümler olarak üçe ayrılırlar. Kink çözümler Baryon olarak yorumlanmıştır. İki boyutlu çözümler ise, tek boyutlu çözümlerin sadece boyut olarak genişletilmiş durumundadır [59].

**Tanım 2.18.**

Topolojik özelliklere sahip uzay ve zamana bağlı (uzay ve zaman iç içe girmiş veya uzay ve zaman birlikte sonsuza açılmışlardır) olan bu çözümlere instanton ve meron çözümleri örnek olarak verilebilir. Konformal simetrinin kırılması ile bulunan instantonlar, kuarkların vakum durumu olarak yorumlanmış olup, vakumlar arası geçişi vermelerinden dolayı kuarkların hapsolme problemini açıklamada önem kazanmışlardır [59].

**Tanım 2.19.**

Instantonlar, herhangi bir modelin alan denkleminin, öklidyen versiyonunun yerleşmiş sonlu eylemli klasik çözümleridir. Klasik düzeyde instantonlar, zamandan bağımsız alan denklemlerinin statik soliton çözümleri formundan çok farklı değildir. Solitonlar, yayılmış parçacık durumuna; instantonlar ise, vakum durum yapısını mükemmel şekilde etkileyen tünelleme etkilerine neden olur [59].

**Teorem 2.1.1.**

$a, b$  ve  $n$  sabitler olmak üzere  $f(x, y)$  fonksiyonu  $a \leq x \leq b$  ve  $-\infty < y < +\infty$  ile tanımlanmış  $D$  bölgesinin bütün noktalarında tanımlı ve sürekli olan bir

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), y(a) = n,$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Eğer  $D$  bölgesindeki noktalar için;

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|, \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $L$  sabiti var ise o zaman başlangıç değer probleminin yalnız bir çözümü vardır. Bu çözümde  $y(x)$  çözümdür ve  $y(x)$  fonksiyonu da  $D$  bölgesinde her  $(x, y)$  ikilileri için sürekli ve türevi alınabilen bir fonksiyondur. Birinci mertebeden;

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.7)$$

başlangıç değer problemi için verilecek olan tüm çözüm yöntemleri;

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

şeklinde ifade edilen sistemler için de yazılabilir.

(2.1.2) denklemin çözümü  $y = Q(x)$  olsun.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noktalarında  $Q(x)$  çözümüne yakın değerler elde edelim.  $y_0 = Q(x_0)$  ve  $y'_0 = Q'(x_0)$  olduğu açıktır. Genel olarak  $y_n \neq Q(x_n)$  ve  $y'_n \neq Q'(x_n)$ ,  $n \geq 1$  dir.  $x$ -ekseni üzerinde uygun  $h$  aralıkları seçilerek

$$x = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \dots, \quad x_n = x_0 + nh.$$

Noktalarında çözüme ait  $y_1, y_2, \dots, y_n$  fonksiyon değerini hesaplayabiliriz.

### 3. MATERYAL ve METOTLAR

#### 3.1. Sine-Gordon Açılım Metodu

Bu bölümde lineer olmayan evrim denklemlerinin bazı yeni salınımlı dalga çözümlerini bulmak için sine-Gordon açılım yöntemi açıklanacaktır. Sine-Gordon açılım metodu (3.1.1) deki sine-Gordon denklemi ve salınımlı dalga dönüşümü  $\xi = \mu(x-ct)$  [60-61-62] temeline dayanır.

Aşağıdaki sine-Gordon denklemini göz önüne alalım [60]-[63]

$$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin(u), \quad (3.1.1)$$

Burada  $u = u(x,t)$  ve  $m$  bir reel sabittir.

(3.1.1) denkleminde  $u = u(x,t) = U(\xi)$ ,  $\xi = \mu(x-ct)$  dalga dönüşümünü kullanarak aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$U'' = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} \sin(U), \quad (3.1.2)$$

Burada  $U = U(\xi)$ ,  $\xi$  dalganın genliğidir ve  $c$  dalganın hızıdır.

(3.1.2) nin tamamen sadeleştirilmiş hali

$$\left[ \left( \frac{U}{2} \right)' \right]^2 = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)} \sin^2 \left( \frac{U}{2} \right) + K, \quad (3.1.3)$$

şeklindedir. Burada  $K$  integrasyon sabitidir.

$K = 0$ ,  $w(\xi) = \frac{U}{2}$  ve  $a^2 = \frac{m^2}{\mu^2(1-c^2)}$  ifadeleri (3.1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$w' = a \sin(w) \quad (3.1.4)$$

denklemini elde edilir.

Ayrıca (3.1.4) denkleminde  $a = 1$  yazılırsa aşağıdaki (3.1.5) denklemini elde ederiz.

$$w' = \sin(w) \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) denklemini değişkenlerine ayırarak çözdüğümüzde, aşağıdaki iki önemli denklemini

$$\sin(w) = \sin(w(\xi)) = \frac{2pe^\xi}{p^2 e^{2\xi} + 1} \Big|_{p=1} = \operatorname{sech}(\xi) \quad (3.1.6)$$

$$\cos(w) = \cos(w(\xi)) = \frac{p^2 e^{2\xi} - 1}{p^2 e^{2\xi} + 1} \Big|_{p=1} = \tanh(\xi) \quad (3.1.7)$$

elde ederiz. Burada  $p$  integral sabitidir.

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, u_{xxx}, u_{xxt}, \dots) \quad (3.1.8)$$

şeklinde verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^n \tanh^{i-1}(\xi) [B_i \operatorname{sech}(\xi) + A_i \tanh(\xi)] + A_0 \quad (3.1.9)$$

şeklinde olsun. (3.1.9) denklemini (3.1.6) ve (3.1.7) denklemlerine göre yeniden

$$U(w) = \sum_{i=1}^n \cos^{i-1}(w) [B_i \sin(w) + A_i \cos(w)] + A_0 \quad (3.1.10)$$

şeklinde yazılabilir.

$n$  'nin değeri, elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklemde en yüksek mertebedeki türeve ve en yüksek dereceden lineer olmayan terimine balans prensibi uygulanarak belirlenebilir. Aynı dereceye sahip  $\sin^i(w)\cos^j(w)$  katsayılarının toplamının sıfır olması düşünülerek bir cebirsel denklem sistemi üretilir. Wolfram Mathematica 9 programı kullanarak bu cebirsel denklem sistemi çözülür ve  $A_i, B_i, \mu$  ve  $c$  değerleri elde edilir. Sonuç olarak  $A_i, B_i, \mu$  ve  $c$  değerleri denklem (3.1.9)'da yerine yazılırsa, (3.1.8) denklemi için yeni salınımlı dalga çözümleri elde ederiz.

### 3.2. Genişletilmiş sinh-Gordon Açılım Metodu

Bu bölümde kısmi diferansiyel denklemlerde farklı analitik çözümler veren genişletilmiş ShGEEM 'nin genel yapısı ele alındı

Aşağıdaki sinh-Gordon denklemini göz önüne alalım [64].

$$\psi_{xt} = \alpha \sinh(\psi), \quad (3.2.1)$$

Burada  $\alpha$  sıfırdan farklı bir sabittir.

$$\psi(x, t) = U(\zeta), \quad \zeta = k(x - \mu t), \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) deki dalga dönüşümü (3.2.1) denkleminde uygulanırsa aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklem elde edilir.

$$U'' = -\frac{\alpha}{k^2 \mu} \sinh(U), \quad (3.2.3)$$

Burada  $k$  dalga sayısı,  $\mu$  ise dalganın hızıdır.

(3.2.3) denkleminin her iki tarafının integrali alındığında,

$$\left(\frac{U'}{2}\right)^2 = -\frac{\alpha}{k^2\mu} \sinh^2\left(\frac{U}{2}\right) + c, \quad (3.2.4)$$

denklemini elde edilir. Burada  $c$  integrasyon sabitidir.

$$-\frac{\alpha}{k^2\mu} = b \text{ ve } \frac{U}{2} = w, \text{ de\u011ferleri (3.2.4) denkleminde yerine yazılırsa,}$$

$$w' = \sqrt{b \sinh^2(w) + c}. \quad (3.2.5)$$

denklemini elde edilir.  $a$  ve  $b$  parametrelerin farklı de\u011ferleri i\u00e7in, (3.2.5) denklemini a\u00e7a\u011fıdaki \u015fekilde elde edilir.

**\u00d6zel Durum -1:**  $c = 0$ ,  $b = 1$ , alındığında (3.2.5) denklemini (3.2.6) ya d\u00f6n\u00fc\u015fur.

$$w' = \sinh(w). \quad (3.2.6)$$

Biz (3.2.6) denklemini tamamen sadele\u015ftirirsek, (3.2.7) ve (3.2.8) deki \u00e7\u00f6z\u00fcmlemleri elde ederiz.

$$\sinh(w) = \pm \operatorname{csc} h(\zeta) \text{ veya } \sinh(w) = \pm \operatorname{isech}(\zeta) \quad (3.2.7)$$

ve

$$\cosh(w) = \pm \operatorname{coth}(\zeta) \text{ veya } \cosh(w) = \pm \operatorname{tanh}(\zeta), \quad (3.2.8)$$

burada  $i = \sqrt{-1}$  dir.

**Özel Durum-2:**  $c = 1$  ve  $b = 1$  alındığında (3.2.5) denklemini (3.2.9) denklemine d\u00f6n\u00fc\u015fur.

$$w' = \cosh(w). \quad (3.2.9)$$

(3.2.9) denklemi sadeleştirilerek, aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$\sinh(w) = \tan(\zeta) \text{ veya } \sinh(w) = -\cot(\zeta) \quad (3.2.10)$$

ve

$$\cosh(w) = \pm \sec(\zeta) \text{ veya } \cosh(w) = \pm \tan(\zeta). \quad (3.2.11)$$

$$P(\psi, \psi_x, \psi_{xt}, \psi^2 \psi_t, \dots = 0), \quad (3.2.12)$$

Yukarıda verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çeşitli dalga çözümlerini elde etmek için aşağıdaki adımlar takip edilmelidir.

**Adım-1:** Biz bu adımda ilk olarak (3.2.2) denklemini kullanarak (3.2.12) denklemini aşağıdaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme dönüştürürüz.

$$Q(U, U', U'', U^2 U', \dots) = 0 \quad (3.2.13)$$

**Adım-2:** İkinci olarak farz edelimki (3.2.13) denklemi aşağıdaki (3.2.14) formunda yeni ansatz çözüme sahip olsun.

$$U(w) = \sum_{j=1}^m [B_j \sinh(w) + A_j \cosh(w)]^j + A_0, \quad (3.2.14)$$

Burada  $w$ ,  $\zeta$  'nin bir fonksiyonudur ve (3.2.5) denklemini sağlar. Ayrıca  $A_0$ ,  $A_j$ ,  $B_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) burada tanımlanmış sabitlerdir.  $m$  'nin değerini elde etmek için (3.2.13) denklemindeki en yüksek derecedeki türev ve en yüksek derecedeki lineer olmayan kuvvetleri ifade eden terimlere balans prensibi uygulanır.

**Adım-3:** Biz  $w^{s'} \sinh^i(w) \cosh^j(w)$  ( $s = 0$ , ve  $i, j = 0,1,2,\dots$ ) deki bir polinom denklemi elde etmek için (3.2.2) denkleminin (3.2.13) denklemine uygulanması

gerekmektedir. Ayrıca (3.2.13) denklemi (3.2.14) denklemine dönüştürülür ve  $m = 1$  alınıp yerine yazılır.  $w^{s} \sinh^i(w) \cosh^j(w)$  ifadesinin katsayıları 0'a eşitlenerek  $A_0, A_j, B_j, k, \mu$  deki lineer olmayan cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

**Adım-4:** Daha sonra elde edilen lineer olmayan cebirsel denklem sistemindeki  $A_0, A_j, B_j, k, \mu$  parametrelerin değerlerini belirlemek için sembolik olarak çözülür.

**Adım-5:** (3.2.7), (3.2.8), (3.2.10) ve (3.2.11) denklemlerinde elde edilen sonuçlar kullanılarak, verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için dalga çözümleri

$$U(\zeta) = \sum_{j=1}^m \left[ \pm B_j i \sec h(\zeta) \pm A_j \tanh(\zeta) \right]^j + A_0, \quad (3.2.15)$$

$$U(\zeta) = \sum_{j=1}^m \left[ \pm B_j \csc h(\zeta) \pm A_j \coth(\zeta) \right]^j + A_0, \quad (3.2.16)$$

$$U(\zeta) = \sum_{j=1}^m \left[ A_j \tan(\zeta) \pm B_j \sec(\zeta) \right]^j + A_0 \quad (3.2.17)$$

ve

$$U(\zeta) = \sum_{j=1}^m \left[ -A_j \cot(\zeta) \pm B_j \csc(\zeta) \right]^j + A_0. \quad (3.2.18)$$

şeklindedir.

## 4. METODUN UYGULANMASI

### 4.1. SGEM Metodunun mZK ve (2+1) Boyutlu cKG Denklemlerine Uygulanması

Bu bölümde geliştirilmiş Zakharov- Kuznetsov [45] ve (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon [50] denklemlerine sine-Gordon açılım metodu uygulandı.

**Uygulama 1:** Aşağıdaki mZK denklemini göz önüne alalım.

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0 \quad (4.1.1)$$

Burada  $u = U(\xi)$ ,  $\xi = \mu(x + ay - ct)$ , dalga dönüşümü yapılırsa, (4.1.1) denklemini aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denkleme indirgenir;

$$3\mu^2(1+a^2)U'' + U^3 - 3cU = 0 \quad (4.1.2)$$

(4.1.2) denkleminde en yüksek türevin mertebesi  $U''$  ve en yüksek derece lineer olmayan terimi  $U^3$  dikkate alınarak balans tekniği uygulanırsa  $n=1$  elde edilir. Daha sonra  $n=1$  ifadesini (3.1.10) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0 \quad (4.1.3)$$

(4.1.3) denkleminin iki defa türevi alınır,

$$U'' = B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w), \quad (4.1.4)$$

denklemini elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.4) denklemleri (4.1.2) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& -3cA_0 + A_0^3 - 3cA_1 \cos(w) - 6\mu^2 A_1 \sin^2(w) \cos(w) - 6a^2 \mu^2 A_1 \sin^2(w) \cos(w) + 3A_0^2 A_1 \cos(w) \\
& + 3A_0 A_1^2 \cos^2(w) + A_1^3 \cos^3(w) - 3cB_1 \sin(w) + 3\mu^2 B_1 \cos^2(w) \sin(w) + 3a^2 \mu^2 B_1 \cos^2(w) \sin(w) \\
& - 3\mu^2 B_1 \sin^3(w) - 3a^2 \mu^2 B_1 \sin^3(w) + 3A_0^2 B_1 \sin(w) + 6A_0 A_1 B_1 \sin(w) \cos(w) + 3A_1^2 B_1 \cos^2(w) \\
& \sin(w) + 3A_0 B_1^2 \sin^2(w) + 3A_1 B_1^2 \sin^2(w) \cos(w) + B_1^3 \sin^3(w) = 0.
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı derecedeki trigonometrik fonksiyonların katsayılarının her bir toplamını ayrı ayrı sıfıra eşitleyerek denklemlerin cebirsel bir sistemini elde ederiz. (4.1.1) denkleminin yeni salınımlı çözümlerini elde etmek için Wolfram Mathematica 9 programı yardımı ile cebirsel denklem sistemini çözeriz ve  $n=1$  alınarak (3.1.9) denklemdeki katsayılar için elde ettiğimiz sonuçları her bir durumda yerine yazarız.

**Durum 1 :**

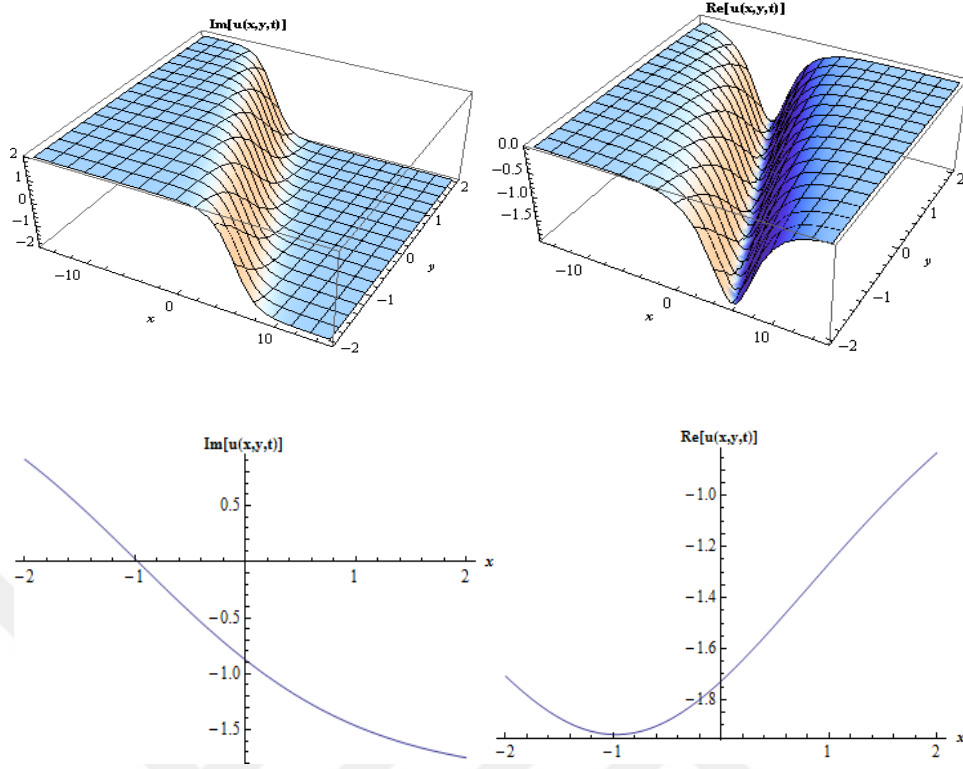
$$A_0 = 0, A_1 = -i\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1+a^2}\mu, B_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+a^2)}\mu^2, c = -\frac{1}{2}(1+a^2)\mu^2 \quad \text{katsayıları}$$

alındığında

$$u_1(x, y, t) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sech} \left[ \mu \left( x + ay + \frac{1}{2}(1+a^2)\mu^2 t \right) \right] \quad (4.1.5)$$

$$\times \left( \sqrt{(1+a^2)}\mu^2 + i\sqrt{1+a^2}\mu \sinh \left[ \mu \left( x + ay + \frac{1}{2}(1+a^2)\mu^2 t \right) \right] \right).$$

denklemini elde edilir.



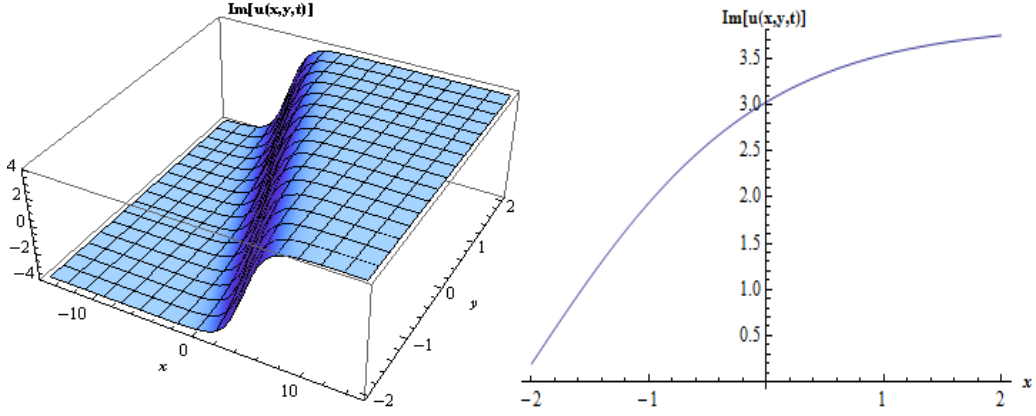
**Şekil 4.1.** (4.1.5) denkleminde  $a = 3, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 2 :**

$A_0 = 0, A_1 = i\sqrt{6}\sqrt{1+a^2}\mu, B_1 = 0, c = -2(1+a^2)\mu^2$  katsayıları alındığında

$$u_2(x, y, t) = i\sqrt{6}\sqrt{1+a^2}\mu \tanh\left[\mu(x + ay + 2(1+a^2)\mu^2 t)\right] \quad (4.1.6)$$

denklemini elde edilir.



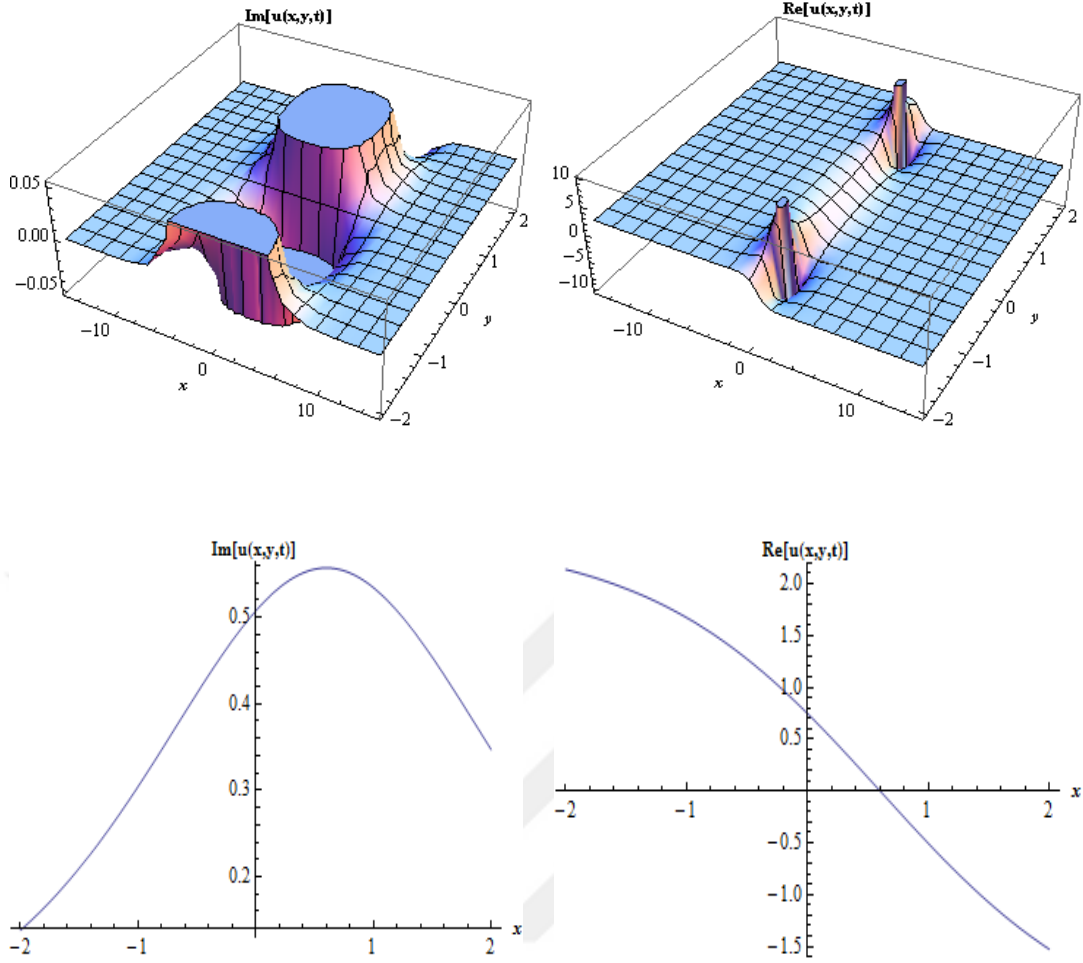
**Şekil 4.2.** (4.1.6) denkleminde  $a=3, \mu=0.5, t=0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y=0.2$  değerleri göz önüne alınarak üçboyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 3 :**

$$A_0 = 0, A_1 = -\sqrt{3}\sqrt{c}, B_1 = 0, a = -\frac{\sqrt{-\frac{c}{2} - \mu^2}}{\mu} \quad \text{katsayıları alındığında}$$

$$u_3(x, y, t) = -\sqrt{3}\sqrt{c} \tanh \left[ \mu \left( -ct + x - \frac{1}{\mu} \left( \sqrt{-\frac{c}{2} - \mu^2} \right) y \right) \right] \quad (4.1.7)$$

denklemini elde edilir.



Şekil 4.3. (4.1.7) denkleminde  $c = 2, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

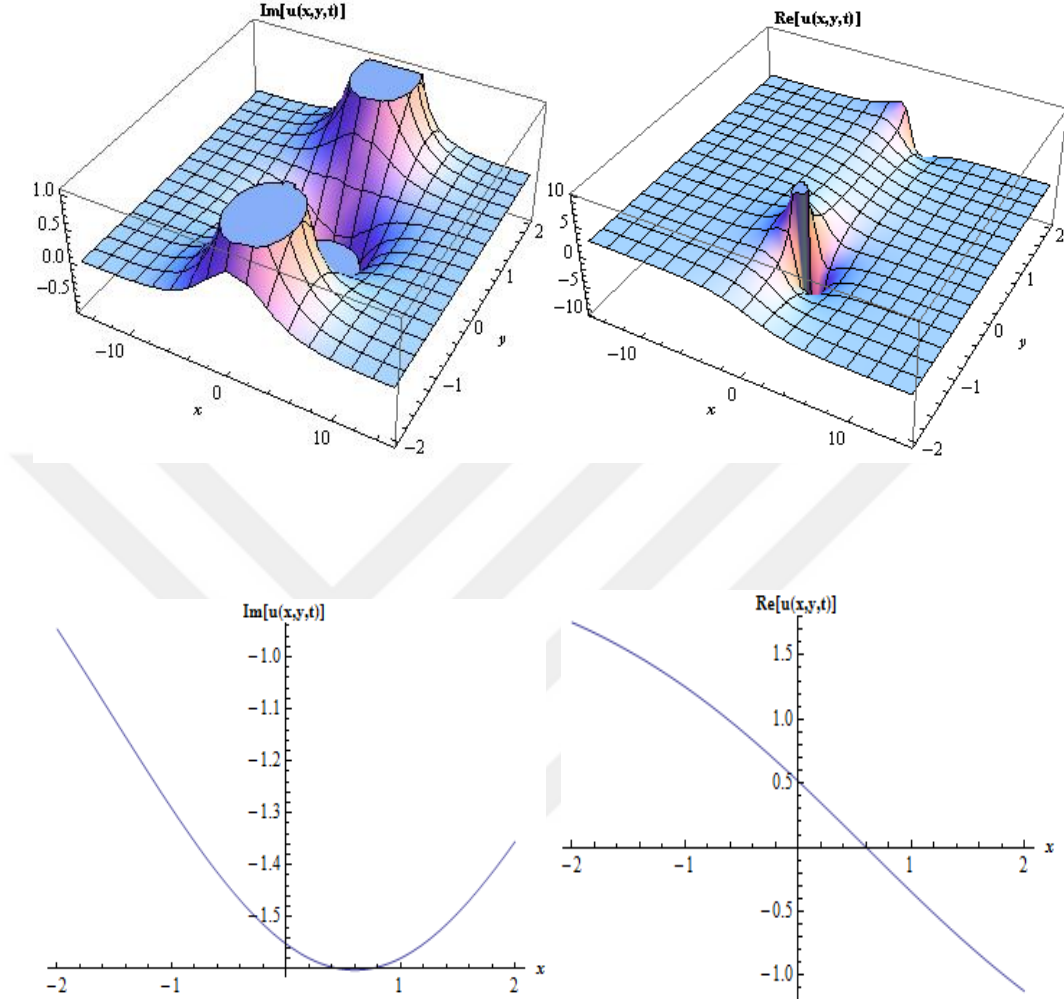
**Durum 4 :**

$A_0 = 0, A_1 = -\sqrt{3}\sqrt{c}, B_1 = -i\sqrt{3}\sqrt{c}, a = -\frac{i\sqrt{2c + \mu^2}}{\mu}$  katsayıları alındığında

$$u_4(x, y, t) = \sqrt{3}\sqrt{c} \left( -i \operatorname{sech} \left[ \mu \left( -ct + x - \frac{i\sqrt{2c + \mu^2} y}{\mu} \right) \right] \right)$$

$$- \tan h \left[ \mu \left( -ct + x - \frac{i\sqrt{2c + \mu^2} y}{\mu} \right) \right] \quad (4.1.8)$$

denklemini elde edilir.



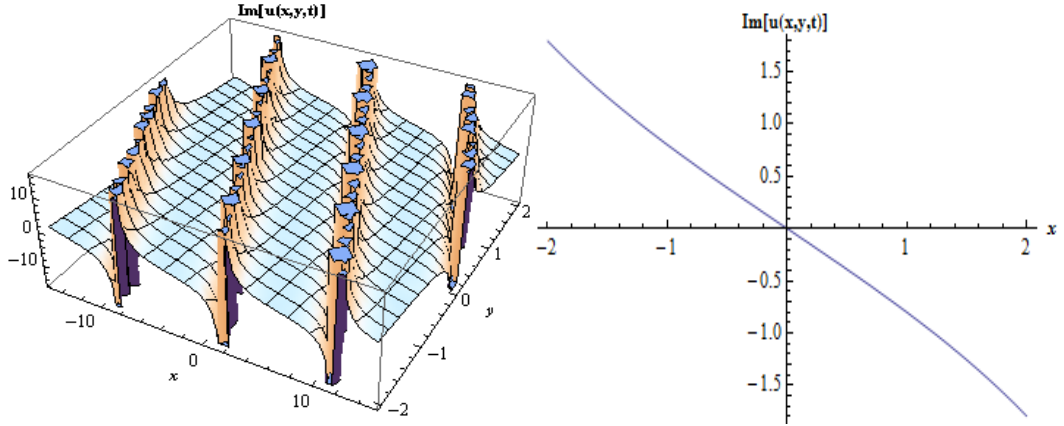
Şekil 4.4. (4.1.8) denkleminde  $c = 2, \mu = 0.5, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 5 :**

$A_0 = 0, A_1 = \sqrt{3}\sqrt{c}, B_1 = 0, \mu = \frac{\sqrt{c}}{i\sqrt{2}\sqrt{1+a^2}}$  katsayıları alındığında

$$u_5(x, y, t) = \sqrt{3}\sqrt{c} \tanh \left[ \frac{\sqrt{c}(x + ay - ct)}{i\sqrt{2}\sqrt{1+a^2}} \right] \quad (4.1.9)$$

denklemini elde edilir.



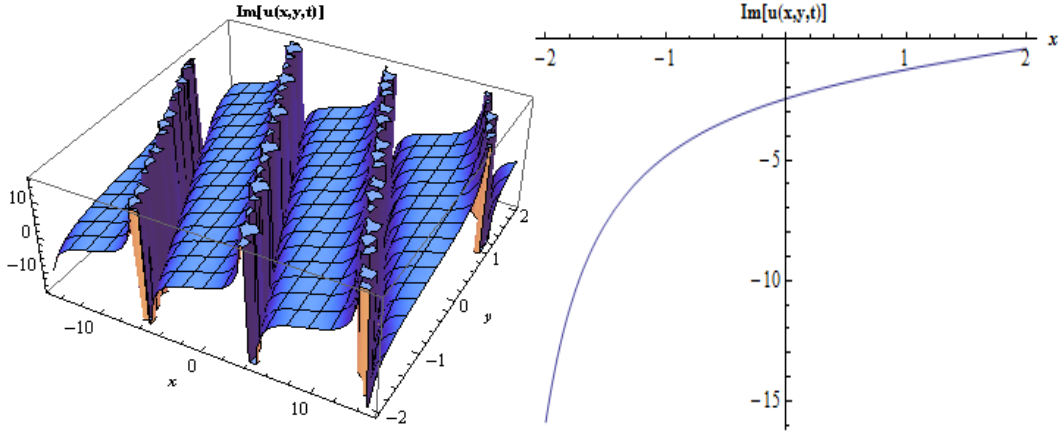
**Şekil 4.5.** (4.1.9) denkleminde  $c=2, a=3, t=0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y=0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 6 :**

$A_0 = 0, A_1 = \sqrt{3}\sqrt{c}, B_1 = -i\sqrt{3}\sqrt{c}, \mu = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{c}}{i\sqrt{1+a^2}}$  katsayıları alındığında

$$u_6(x, y, t) = \sqrt{3}\sqrt{c} \left( -i \operatorname{sech} \left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{c}(x+ay-ct)}{i\sqrt{1+a^2}} \right] - \tanh \left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{c}(x+ay-ct)}{i\sqrt{1+a^2}} \right] \right). \quad (4.1.10)$$

denklemini elde edilir.



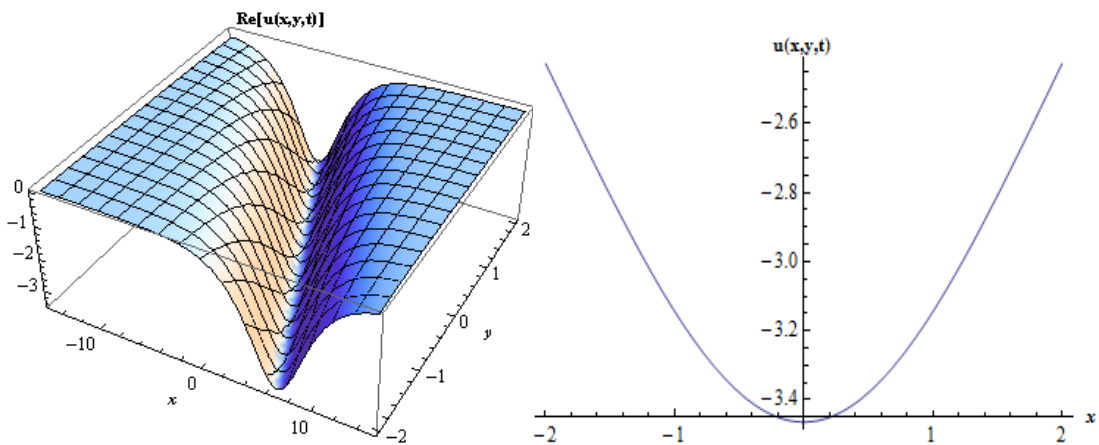
**Şekil 4.6.** (4.1.10) denkleminde  $c = 2, a = 3, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 7 :**

$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = -\sqrt{6}\sqrt{c}, \mu = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1+a^2}}$  katsayıları alındığında

$$u_7(x, y, t) = -\sqrt{6}\sqrt{c} \operatorname{sech} \left[ \frac{\sqrt{c}(x + ay - ct)}{\sqrt{1+a^2}} \right] \quad (4.1.11)$$

denklemini elde edilir.



**Şekil 4.7.** (4.1.11) denkleminde  $c = 2, a = 3, t = 0.3, -15 < x < 15, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.2$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Uygulama 2:** Aşağıda verilen (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon denklemi göz önüne alınırsa;

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} + \alpha u + \beta u^3 = 0 \quad (4.1.12)$$

$u = U(\xi)$ ,  $\xi = x + ay - ct$ , dalga dönüşümü gerçekleştirilerek (4.1.12) denklemi aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denkleme indirgenir:

$$(1 + a^2 - c^2)U'' + \alpha U + \beta U^3 = 0 \quad (4.1.13)$$

(4.1.13) denklemine, en yüksek mertebedeki  $U''$  türevine ve en yüksek derecedeki lineer olmayan  $U^3$  terimine balans prensibi uygulanarak  $n=1$  elde edilir. Elde ettiğimiz  $n=1$  (3.1.10) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$U(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0 \quad (4.1.14)$$

(4.1.14) denkleminin iki defa türevini aldığımızda aşağıdaki denklem elde edilir:

$$U'' = B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w), \quad (4.1.15)$$

(4.1.14) ve (4.1.15) denklemleri (4.1.13) denkleminde yerine konulursa aşağıdaki cebirsel denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \alpha A_0 + \beta A_0^3 + \alpha A_1 \cos(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w) - 2a^2 A_1 \sin^2(w) \cos(w) + 2c^2 A_1 \sin^2(w) \cos(w) \\ & + 3\beta A_0^2 A_1 \cos(w) + 3\beta A_0 A_1^2 \cos^2(w) + \beta A_1^3 \cos^3(w) + \alpha B_1 \sin(w) + B_1 \cos^2(w) \sin(w) \\ & + a^2 B_1 \cos^2(w) \sin(w) - c^2 B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - a^2 B_1 \sin^3(w) + c^2 B_1 \sin^3(w) \\ & + 3\beta A_0^2 B_1 \sin(w) + 6\beta A_0 A_1 B_1 \sin(w) \cos(w) + 3\beta A_1^2 B_1 \cos^2(w) \sin(w) + 3\beta A_0 B_1^2 \sin^2(w) \\ & + 3\beta A_1 B_1^2 \sin^2(w) \cos(w) + \beta B_1^3 \sin^3(w) = 0 \end{aligned}$$

Aynı derecedeki trigonometrik fonksiyonların katsayılarının her bir toplamını ayrı ayrı sifıra eşitleyerek denklemlerin cebirsel bir sistemini elde ederiz. (4.1.12) denkleminin

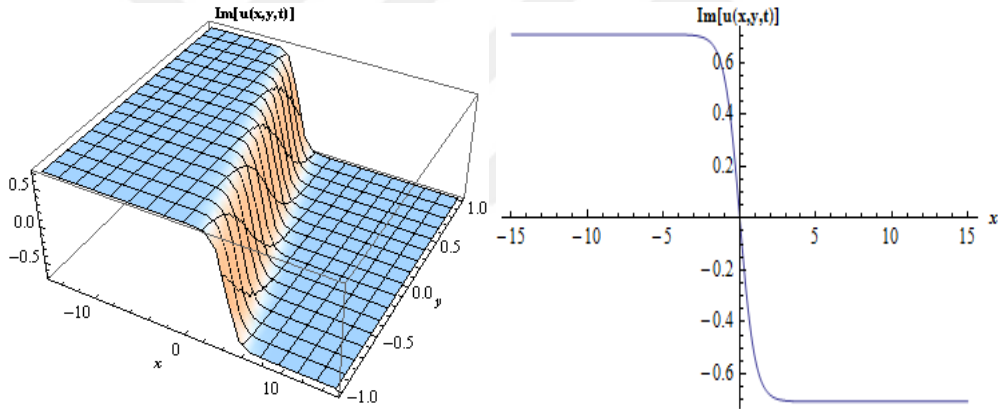
yeni salınımlı çözümlerini elde etmek için Wolfram Mathematica 9 programı yardımı ile cebirsel denklem sistemini çözeriz ve  $n=1$  alınarak (3.1.9) denklemindeki katsayılar için elde ettiğimiz sonuçları her bir durumda yerine yazalım.

**Durum 1:**

$$A_0 = 0, A_1 = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\beta}, B_1 = 0, c = -\sqrt{1+a^2 - \frac{\alpha}{2}} \quad \text{katsayıları alındığında}$$

$$u_1(x, y, t) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \tanh \left[ x + ay + \sqrt{1+a^2 - \frac{\alpha}{2}}t \right] \quad (4.1.16)$$

denklemini elde edilir.



**Şekil 4.8.** (4.1.16) denkleminde  $\beta = 2, \alpha = 1, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

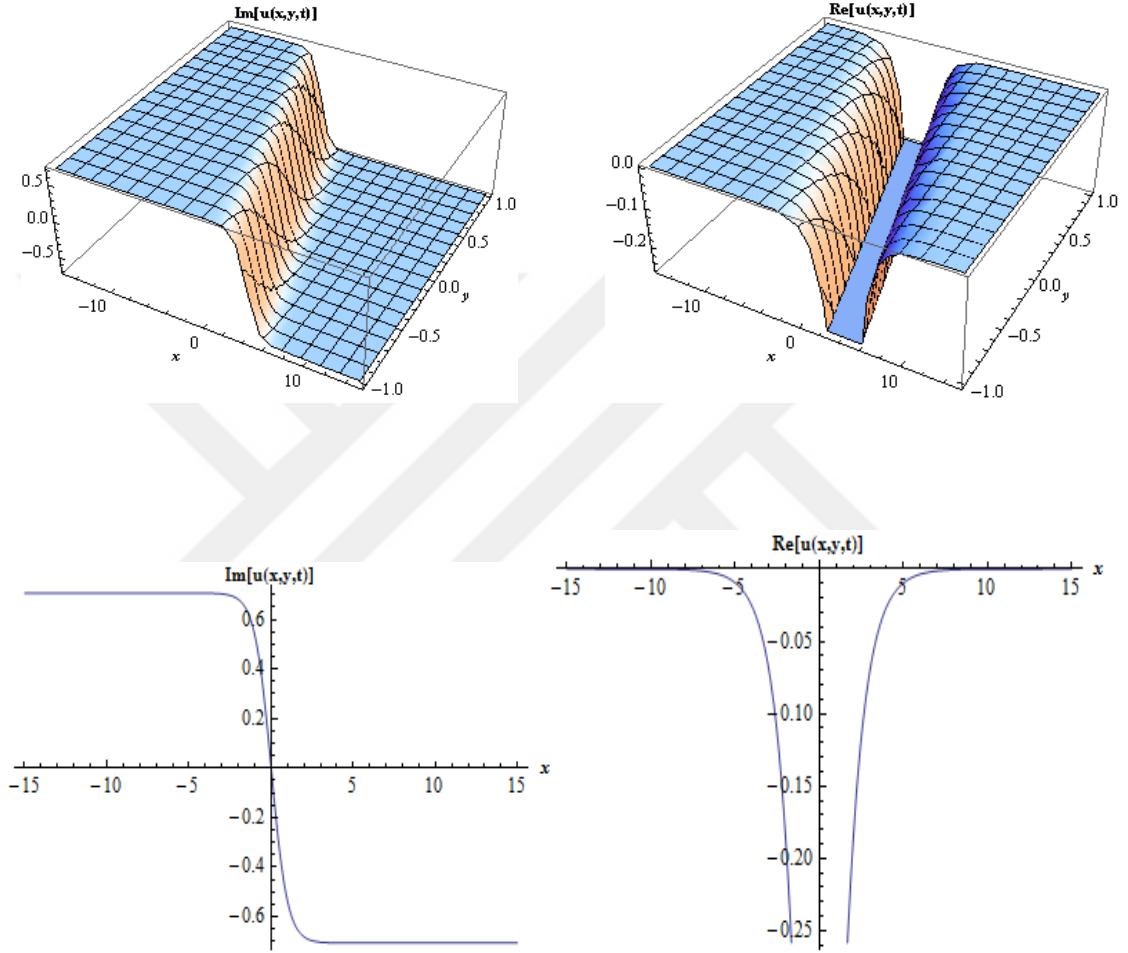
**Durum 2:**

$$A_0 = 0, A_1 = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, B_1 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, c = -\sqrt{1+a^2 - 2\alpha} \quad \text{katsayıları alındığında}$$

$$u_2(x, y, t) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \left( \operatorname{sech} \left[ x + ay + \sqrt{1+a^2 - 2\alpha}t \right] \right)$$

$$+i \tanh \left[ x + ay + \sqrt{1 + a^2 - 2\alpha t} \right]. \quad (4.1.17)$$

denklemini elde edilir



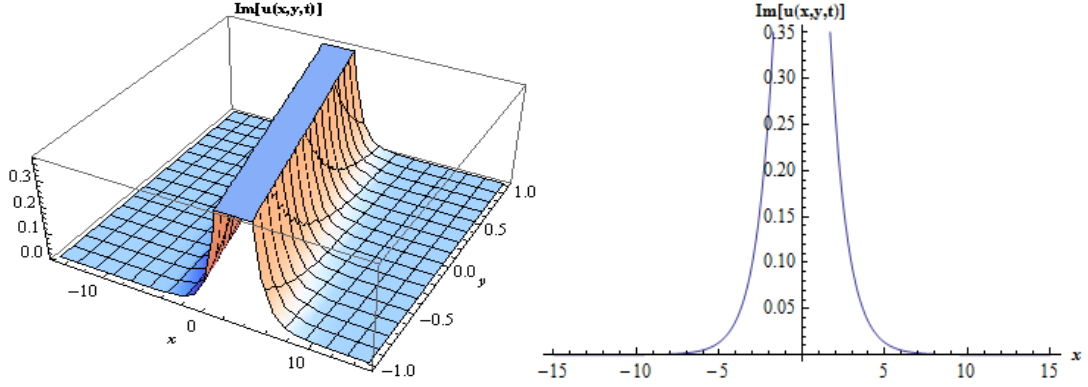
**Şekil 4.9.** (4.1.17) denkleminde  $\beta = 2, \alpha = 1, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 3 :**

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = \frac{i\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, c = -\sqrt{1 + a^2 + \alpha} \quad \text{katsayıları alındığında}$$

$$u_3(x, y, t) = \frac{i\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sech} \left[ x + ay + \sqrt{1 + a^2 + \alpha t} \right] \quad (4.1.18)$$

denklemini elde edilir.



**Şekil 4.10.** (4.1.18) denkleminde  $\beta = 2, \alpha = 1, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

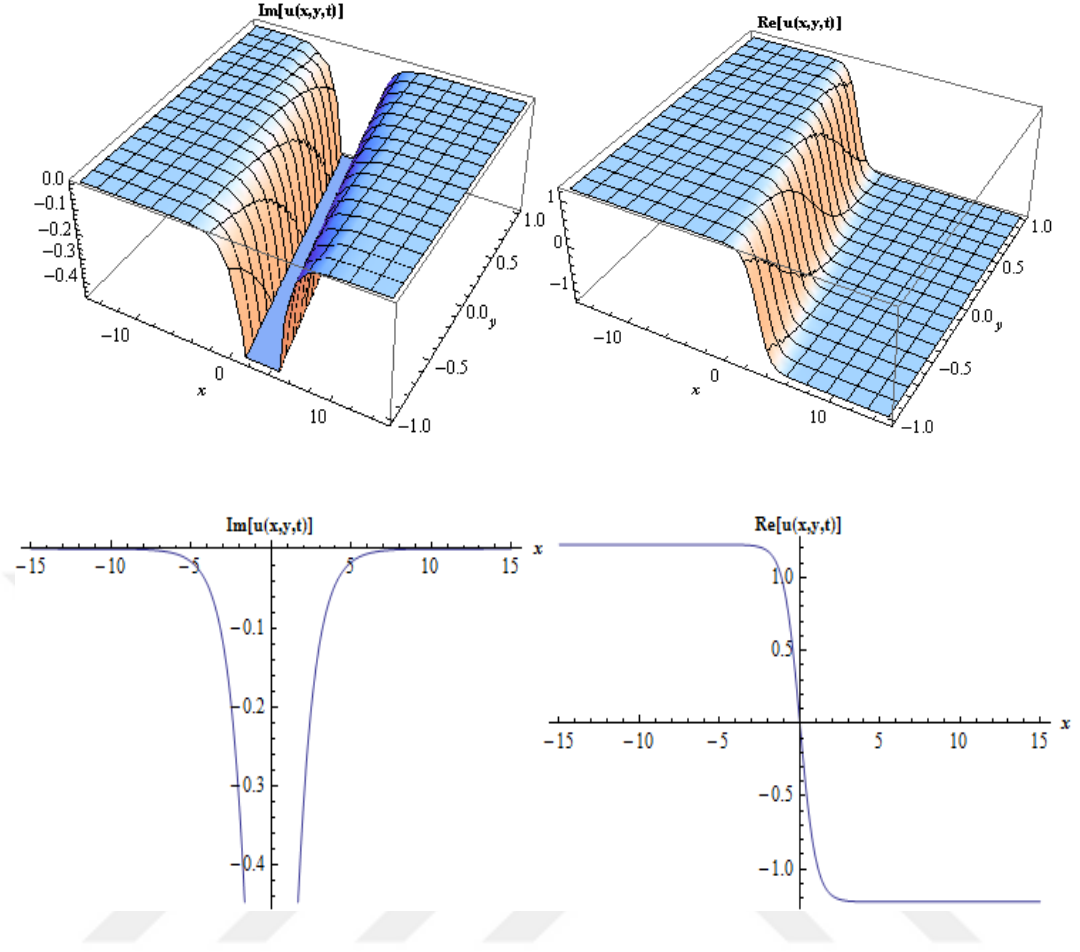
**Durum 4 :**

$$A_0 = 0, A_1 = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2 - 1}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}}, B_1 = -\frac{\sqrt{1 + a^2 - c^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}}, \alpha = \frac{1}{2}(1 + a^2 - c^2) \quad \text{katsayıları}$$

alındığında

$$u_4(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}} \operatorname{sech}[ct - x - ay] \times \left( \sqrt{1 + a^2 - c^2} - \sqrt{c^2 - a^2 - 1} \sinh[ct - x - ay] \right) \quad (4.1.19)$$

denklemini elde edilir.



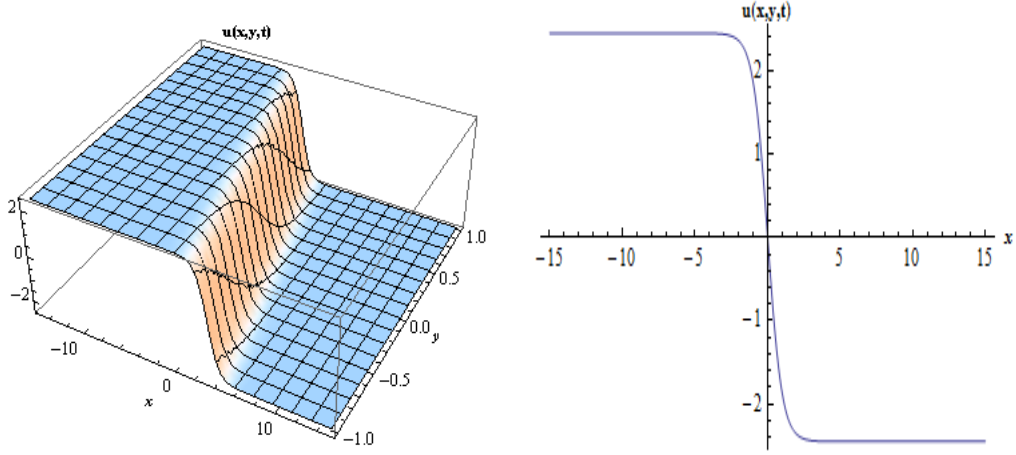
**Şekil 4.11.** (4.1.19) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 5:**

$A_0 = 0, A_1 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - a^2 - 1}}{\sqrt{\beta}}, B_1 = 0, \alpha = 2(1 + a^2 - c^2)$  katsayıları alındığında

$$u_5(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - a^2 - 1}}{\sqrt{\beta}} \tanh[ct - x - ay] \quad (4.1.20)$$

denklemini elde edilir.



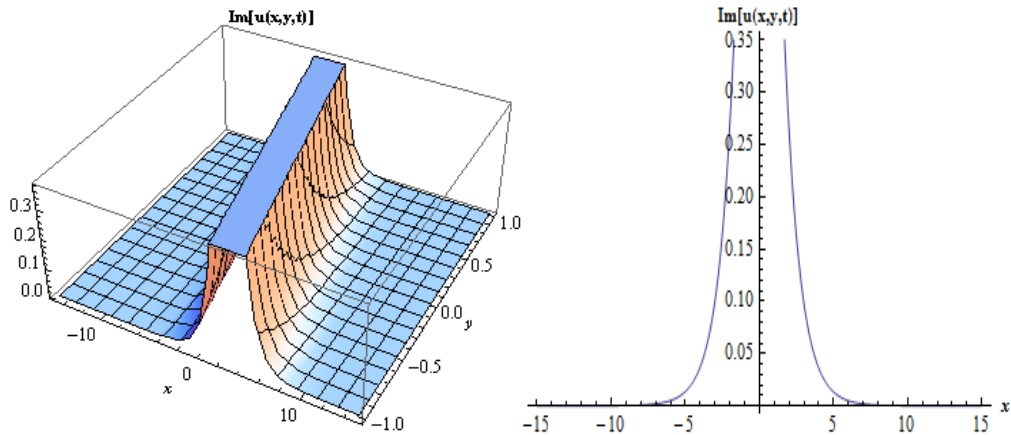
**Şekil 4.12.** (4.1.20) denklemde  $\beta = 2, c = 4, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 6:**

$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+a^2-c^2}}{\sqrt{\beta}}, \alpha = c^2 - a^2 - 1$  katsayıları alındığında

$$u_6(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+a^2-c^2}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sech}[ct - x - ay] \quad (4.1.21)$$

denklemini elde edilir.



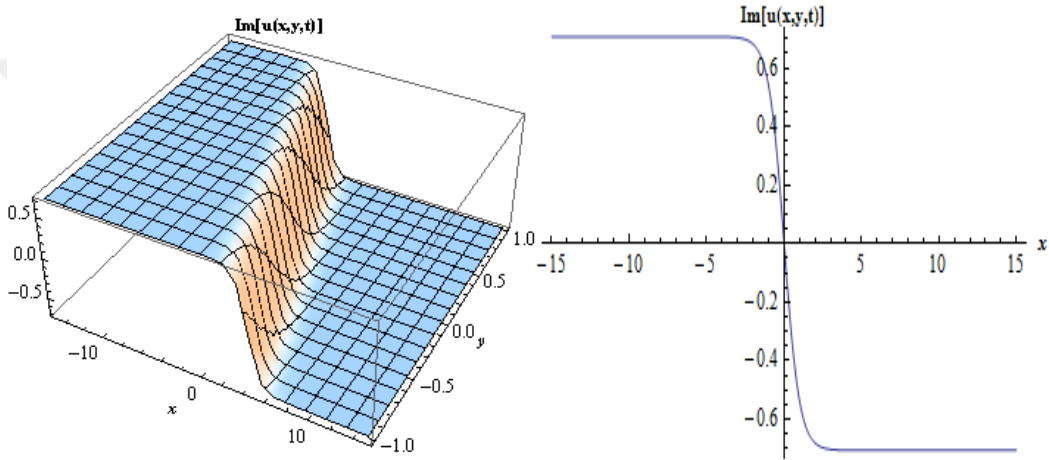
**Şekil 4.13.** (4.1.21) denklemde  $\beta = 2, c = 4, a = 3, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 7:**

$A_0 = 0, A_1 = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, B_1 = 0, a = -\sqrt{c^2 + \frac{\alpha}{2}} - 1$ , katsayıları alındığında

$$u_7(x, y, t) = \frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \tanh \left[ ct - x + \sqrt{c^2 + \frac{\alpha}{2}} - 1y \right] \quad (4.1.22)$$

denklemini elde edilir.



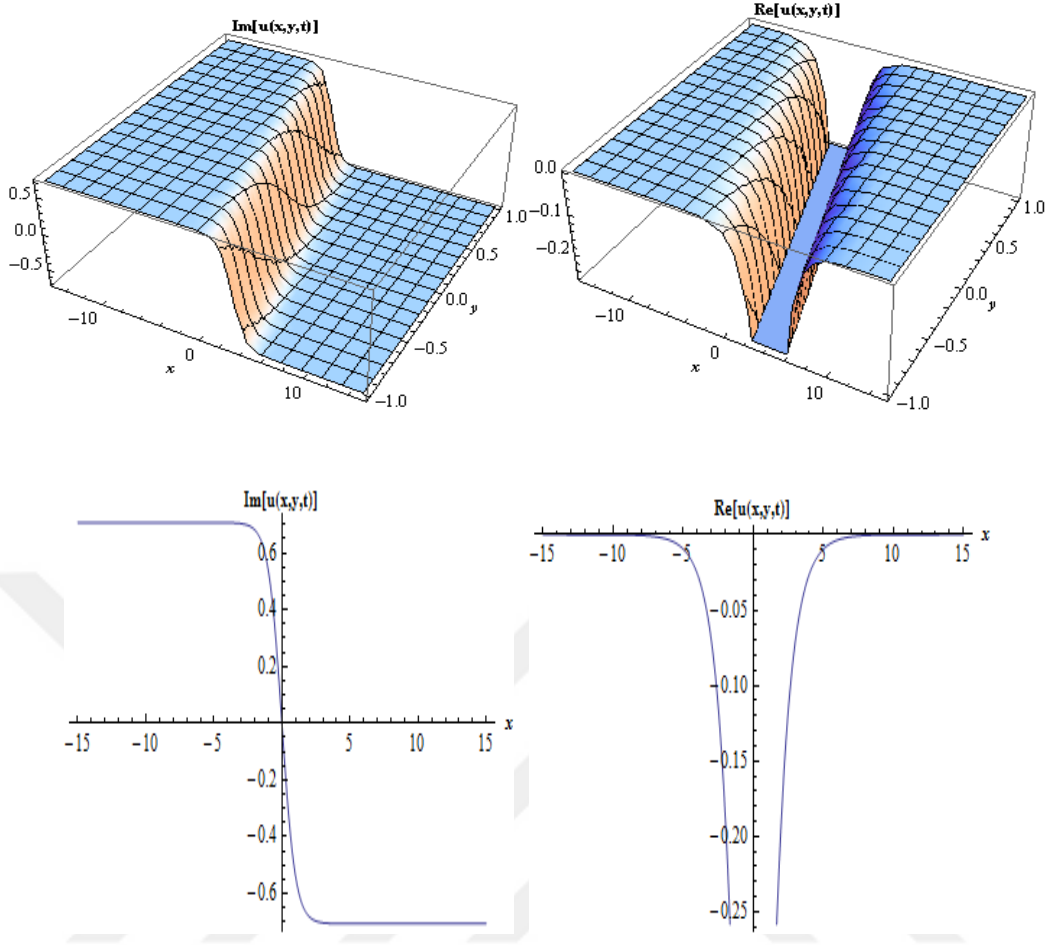
**Şekil 4.14.** (4.1.22) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, \alpha = 1, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 8 :**

$A_0 = 0, A_1 = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, B_1 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, a = \sqrt{c^2 + 2\alpha} - 1$ , katsayıları alındığında

$$u_8(x, y, t) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \left( \operatorname{sech} \left[ ct - x - \sqrt{c^2 + 2\alpha} - 1y \right] - i \tanh \left[ ct - x - \sqrt{c^2 + 2\alpha} - 1y \right] \right). \quad (4.1.23)$$

denklemini elde edilir.



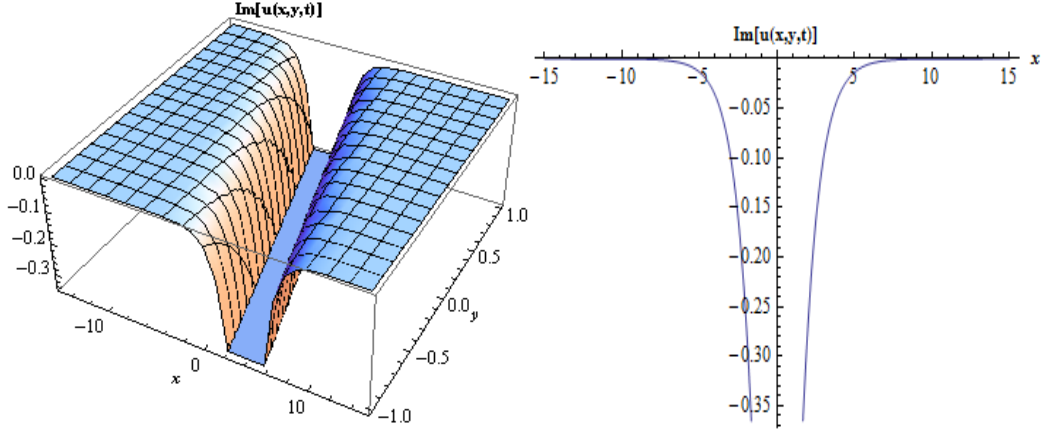
**Şekil 4.15.** (4.1.23) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, \alpha = 1, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

**Durum 9:**

$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = -\frac{i\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, a = \sqrt{c^2 - \alpha - 1}$  katsayıları alındığında

$$u_9(x, y, t) = -\frac{i\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sech} \left[ ct - x - \sqrt{c^2 - \alpha - 1}y \right] \quad (4.1.24)$$

denklemini elde edilir.



**Şekil 4.16.** (4.1.24) denkleminde  $\beta = 2, c = 4, \alpha = 1, t = 0.002, -15 < x < 15, -1 < y < 1$  ve  $y = 0.001$  değerleri göz önüne alınarak üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri

## 4.2. ShGEEM Açılım Metodunun mZK ve (2+1) Boyutlu cKG Denkemlerine Uygulanması

### **Uygulama 3:** mZK denkleminde genişletilmiş ShGEEM'in uygulanması

Biz bu kısımda mZK denkleminde genişletilmiş sinh-Gordon açılım metodunu uyguladık.

[65] tarafından verilen mZK denklemini göz önüne alalım.

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{yyy} = 0 \quad (4.2.1)$$

Burada  $u = U(\xi)$ ,  $\xi = \mu(x + ay - ct)$ , dalga dönüşümü gerçekleştirilerek (4.2.1) denklemini aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denkleme indirgenir.

$$3\mu^2(1+a^2)U'' + U^3 - 3cU = 0 \quad (4.2.2)$$

(4.2.2) denklemindeki  $U''$  ve  $U^3$  şeklindeki terimlere balans prensibi uygulanarak  $m = 1$  elde edilir. Daha sonra biz  $m = 1$  ifadesini (3.2.14) denkleminde yerine yazarsak

$$U(w) = B_1 \sinh(w) + A_1 \cosh(w) + A_0 \quad (4.2.3)$$

denklemini elde ederiz. (4.2.3) denkleminin iki defa türevi alınırsa,

$$U''(w) = B_1 \cosh^2(w) \sinh(w) + B_1 \sinh^3(w) + 2A_1 \sinh^2(w) \cosh(w) \quad (4.2.4)$$

denklemini elde edilir. (4.2.3) ve (4.2.4) denklemleri (4.2.2) denkleminde yerlerine yazıldığında aşağıdaki cebirsel sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} & -3cA_0 + A_0^3 - 3c \cosh(w) A_1 + 6\mu^2 \cosh(w) \sinh(w)^2 A_1 + 6a^2 \mu^2 \cosh(w) \sinh(w)^2 A_1 + 3 \cosh(w) \\ & A_0^2 A_1 + 3 \cosh(w)^2 A_0 A_1^2 + \cosh(w)^3 A_1^3 - 3c \sinh(w) B_1 + 3\mu^2 \cosh(w)^2 \sinh(w) B_1 + 3a^2 \mu^2 \cosh(w)^2 \\ & \sinh(w) B_1 + 3\mu^2 \sinh(w)^3 B_1 + 3a^2 \mu^2 \sinh(w)^3 B_1 + 3 \sinh(w) A_0^2 B_1 + 6 \cosh(w) \sinh(w) A_0 A_1 B_1 \\ & + 3 \cosh(w)^2 \sinh(w) A_1^2 B_1 + 3 \sinh(w)^2 A_0 B_1^2 + 3 \cosh(w) \sinh(w)^2 A_1 B_1^2 + \sinh(w)^3 B_1^3 = 0 \end{aligned}$$

Bazı hiperbolik fonksiyonların tanımları yerine yazıldıktan sonra  $w^s \sinh^i(w) \cosh^j(w)$  ifadesinin trigonometrik fonksiyonların katsayılarının herbirinin toplamını sıfıra eşitleyerek denklemlerin cebirsel bir sistemini elde ederiz. (4.2.1) denkleminde yeni salınımlı çözümler elde etmek için Wolfram Mathematica 9 yazılımı yardımı ile cebirsel denklem sistemi çözülür ve  $m=1$  ile birlikte (3.2.15)-(3.2.18) denklemlerindeki katsayıların elde edilmiş sonuçları her bir durumda yerine yazılır.

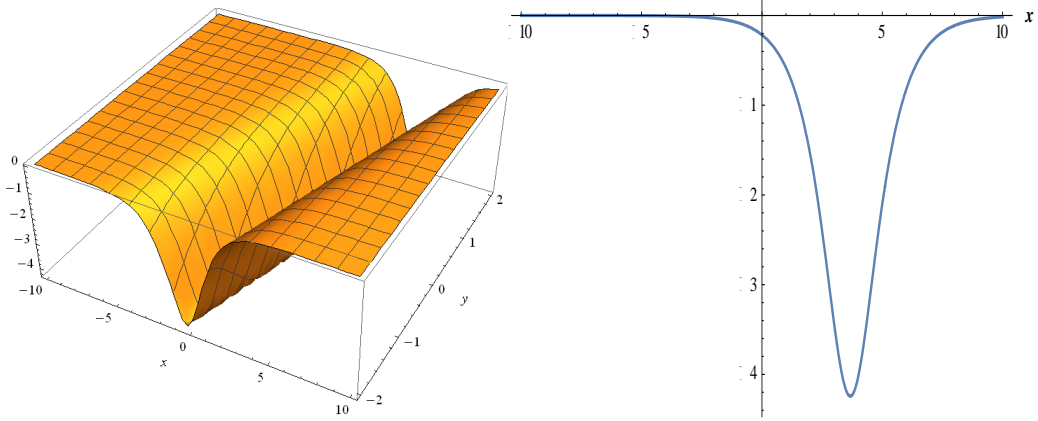
### **Durum 1 :**

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = i\sqrt{6c}, \quad a = -\frac{\sqrt{c-\mu^2}}{\mu}, \quad \text{katsayıları alındığında}$$

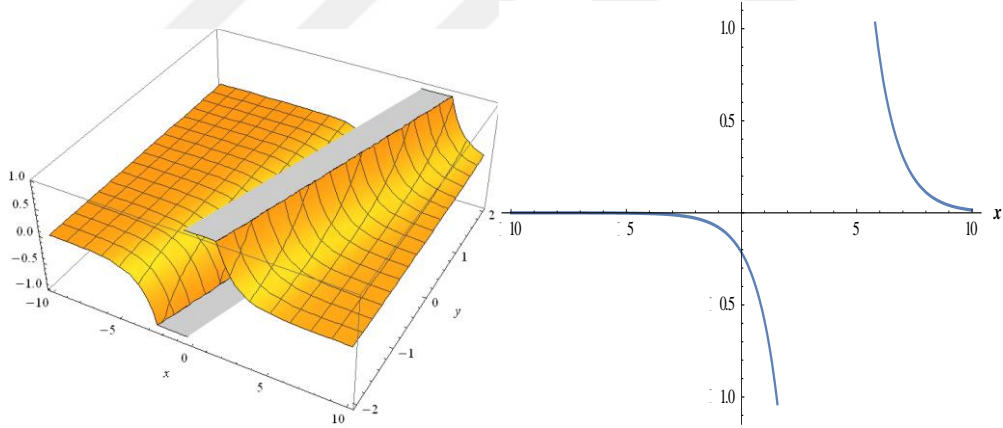
$$u_{1,1}(x, y, t) = -\sqrt{6c} \operatorname{sech} \left[ \mu \left( -ct + x - \frac{y\sqrt{c-\mu^2}}{\mu} \right) \right] \quad (4.2.5)$$

$$u_{1,2}(x, y, t) = \sqrt{-6c} \operatorname{csc} h \left[ \mu \left( -ct + x - \frac{y\sqrt{c-\mu^2}}{\mu} \right) \right] \quad (4.2.6)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.17.**  $\mu = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.5) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.18.**  $\mu = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.6) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

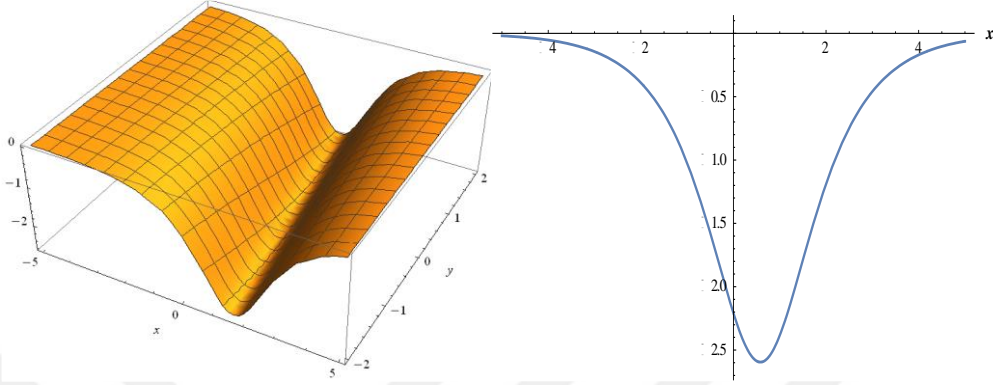
**Durum 2 :**

$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = -i\sqrt{6(1+a^2)}\mu, c = (1+a^2)\mu^2$ , katsayıları alındığında

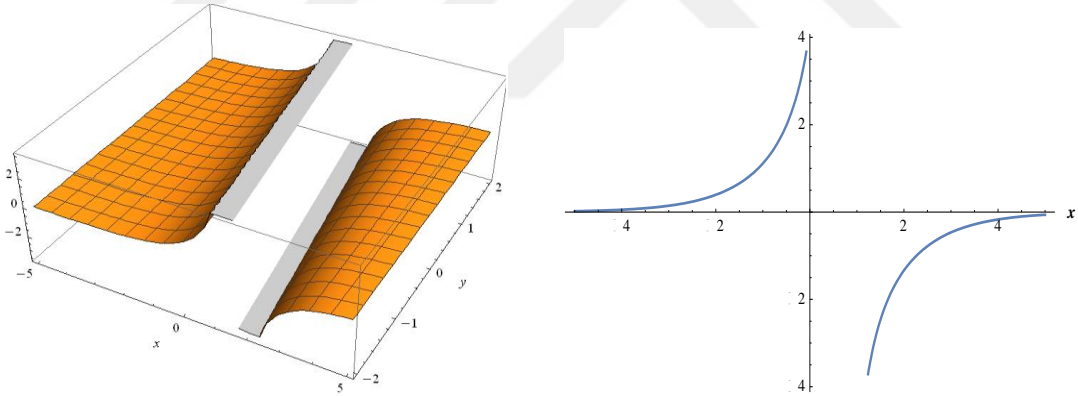
$$u_{2,1}(x, y, t) = \sqrt{6(1+a^2)}\mu \operatorname{sech} \left[ \mu(x + ay - (1+a^2)\mu^2 t) \right] \quad (4.2.7)$$

$$u_{2,2}(x, y, t) = -i\sqrt{6(1+a^2)}\mu \operatorname{csch}\left[\mu(x+ay-(1+a^2)\mu^2t)\right] \quad (4.2.8)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.19.**  $\mu = -1, a = 0.35, t = 0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.7) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.20.**  $\mu = -1, a = 0.35, t = 0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.8) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

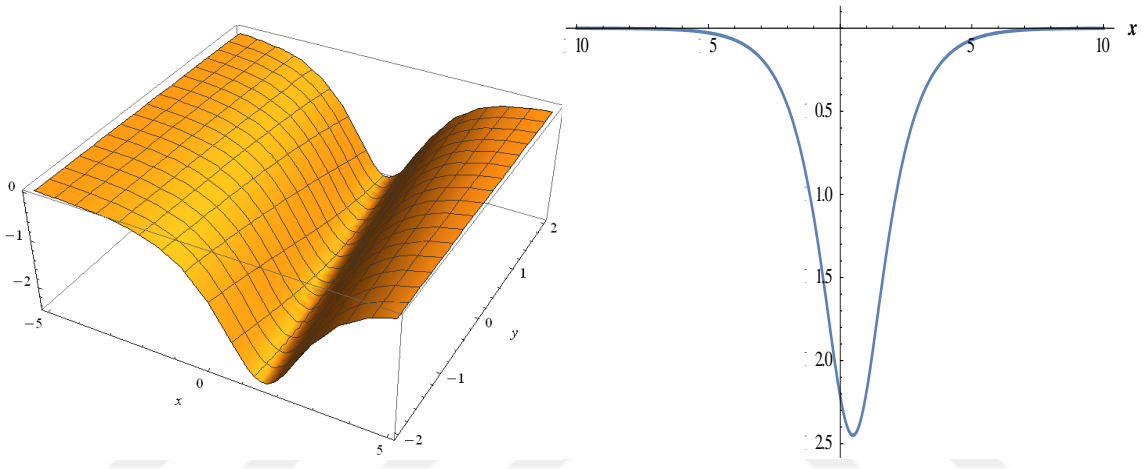
### **Durum 3 :**

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = i\sqrt{6c}, \mu = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1+a^2}}, \text{ katsayıları alındığında}$$

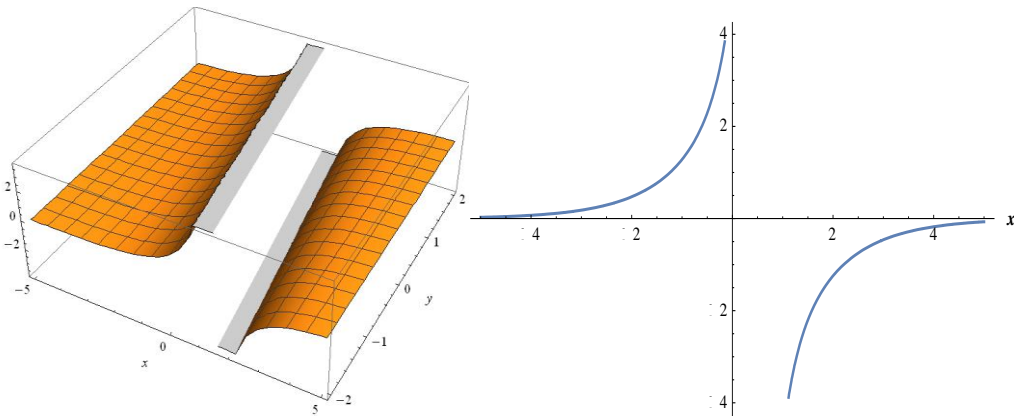
$$u_{3,1}(x, y, t) = -\sqrt{6c} \operatorname{sech} \left[ \frac{\sqrt{c}(-ct + x + ay)}{\sqrt{1+a^2}} \right] \quad (4.2.9)$$

$$u_{3,2}(x, y, t) = -i\sqrt{6c} \operatorname{csc} h \left[ \frac{\sqrt{c}(-ct + x + ay)}{\sqrt{1+a^2}} \right] \quad (4.2.10)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.21.**  $c=1, a=0.35, t=0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$  ve  $y=0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.9) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.22.**  $c=1, a=0.35, t=0.8, -5 < x < 5, -2 < y < 2$  ve  $y=0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.10) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

**Uygulama 4:** (2+1) boyutlu cKG denklemine genişletilmiş ShGEEM'in uygulanması

Bu bölümde, genişletilmiş sinh-Gordon açılım (ShGEEM) metodunun, (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon (cKG) denklemine uygulanışı sunulmaktadır.

[65] tarafından verilen (2+1) boyutlu cKG denklemini göz önüne alalım.

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} + \alpha u + \beta u^3 = 0 \quad (4.2.11)$$

Burada  $u = U(\xi)$ ,  $\xi = x + ay - ct$ , dalga dönüşümü gerçekleştirilerek (4.2.11) denklemi aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denkleme indirgenir.

$$(1 + a^2 - c^2)U'' + \alpha U + \beta U^3 = 0 \quad (4.2.12)$$

(4.2.12) denklemindeki  $U''$  and  $U^3$  şeklindeki terimlere balans prensibi uygulanarak  $m = 1$  elde edilir. Biz  $m = 1$  ifadesini (3.2.14) denkleminde yerine yazarsak

$$U(w) = B_1 \sinh(w) + A_1 \cosh(w) + A_0, \quad (4.2.13)$$

elde edilir. (4.2.13) denkleminin iki defa türevi alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$U''(w) = B_1 \cosh^2(w) \sinh(w) + B_1 \sinh^3(w) + 2A_1 \sinh^2(w) \cosh(w), \quad (4.2.14)$$

(4.2.13) ve (4.2.14) denklemleri (4.2.12) denkleminde yerlerine yazıldığında aşağıdaki cebirsel sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \alpha A_0 + \beta A_0^3 + \alpha \cosh(w)A_1 + 2 \cosh(w)\sinh(w)^2 A_1 + 2a^2 \cosh(w)\sinh(w)^2 A_1 - 2c^2 \cosh(w) \\ & \sinh(w)^2 A_1 + 3\beta \cosh(w)A_0^2 A_1 + 3\beta \cosh(w)^2 A_0 A_1^2 + \beta \cosh(w)^3 A_1^3 + \alpha \sinh(w)B_1 + \cosh(w)^2 \\ & \sinh(w)B_1 + a^2 \cosh(w)^2 \sinh(w)B_1 - c^2 \cosh(w)^2 \sinh(w)B_1 + \sinh(w)^3 B_1 + a^2 \sinh(w)^3 B_1 - \\ & c^2 \sinh(w)^3 B_1 + 3\beta \sinh(w)A_0^2 B_1 + 6\beta \cosh(w)\sinh(w)A_0 A_1 B_1 + 3\beta \cosh(w)^2 \sinh(w)A_1^2 B_1 \\ & + 3\beta \sinh(w)^2 A_0 B_1^2 + 3\beta \cosh(w)\sinh(w)^2 A_1 B_1^2 + \beta \sinh(w)^3 B_1^3 = 0 \end{aligned}$$

Bazı hiperbolik fonksiyonların tanımları yerine yazıldıktan sonra  $w^s \sinh^i(w) \cosh^j(w)$  ifadesinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle  $A_0, A_1, B_1, c, a, \mu$  deki tanımlanmış lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. (4.2.11) denkleminde yeni salınımlı çözümler elde etmek için Wolfram Mathematica 9 yazılımı yardımı ile cebirsel denklem sistemi çözülür ve  $m=1$  ile birlikte (3.2.15)-(3.2.18) denklemlerindeki katsayıların elde edilmiş sonuçları her bir durumda yerine yazılır.

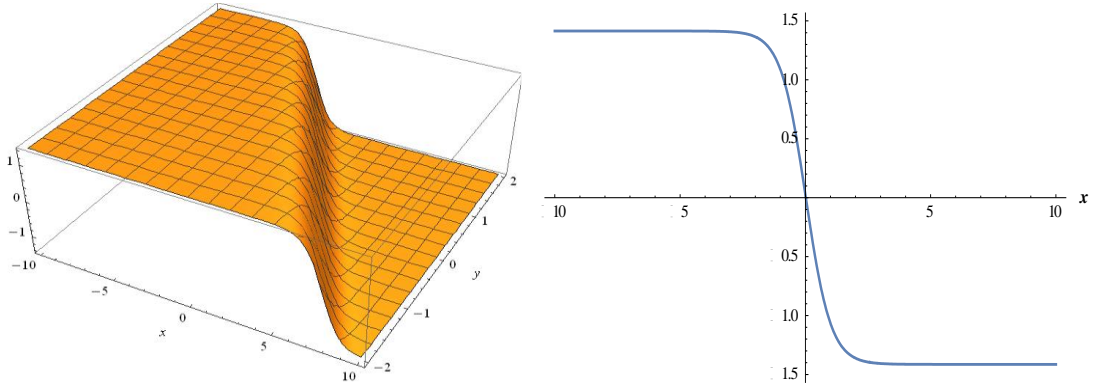
**Durum 4 :**

$$A_0 = 0, A_1 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, B_1 = 0, a = \sqrt{-1 + c^2 + \frac{\alpha}{2}}, \text{ katsayıları alındığında}$$

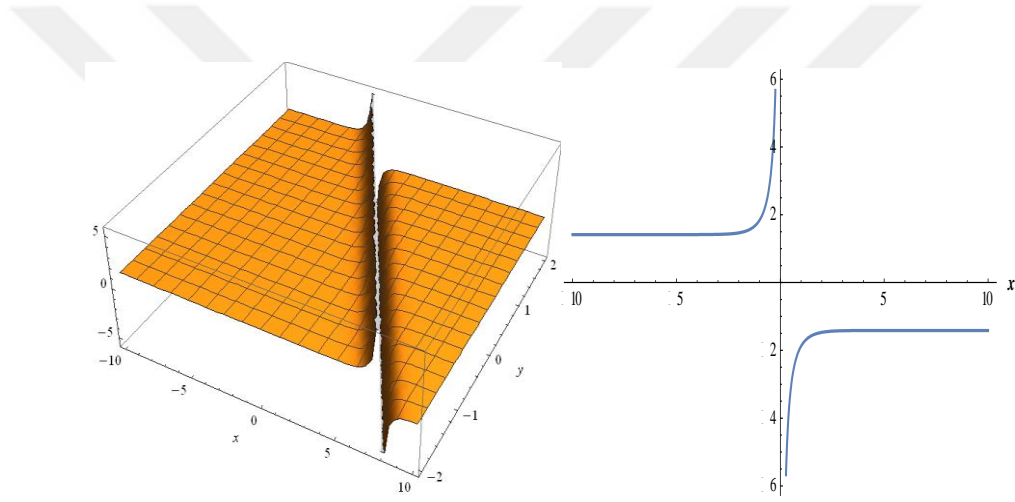
$$u_{4,1}(x, y, t) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \tanh \left[ ct - x - y \sqrt{-1 + c^2 + \frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.2.15)$$

$$u_{4,2}(x, y, t) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \coth \left[ ct - x - y \sqrt{-1 + c^2 + \frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.2.16)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.23.**  $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.15) denkleminin topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.24.**  $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.16) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

**Durum 5 :**

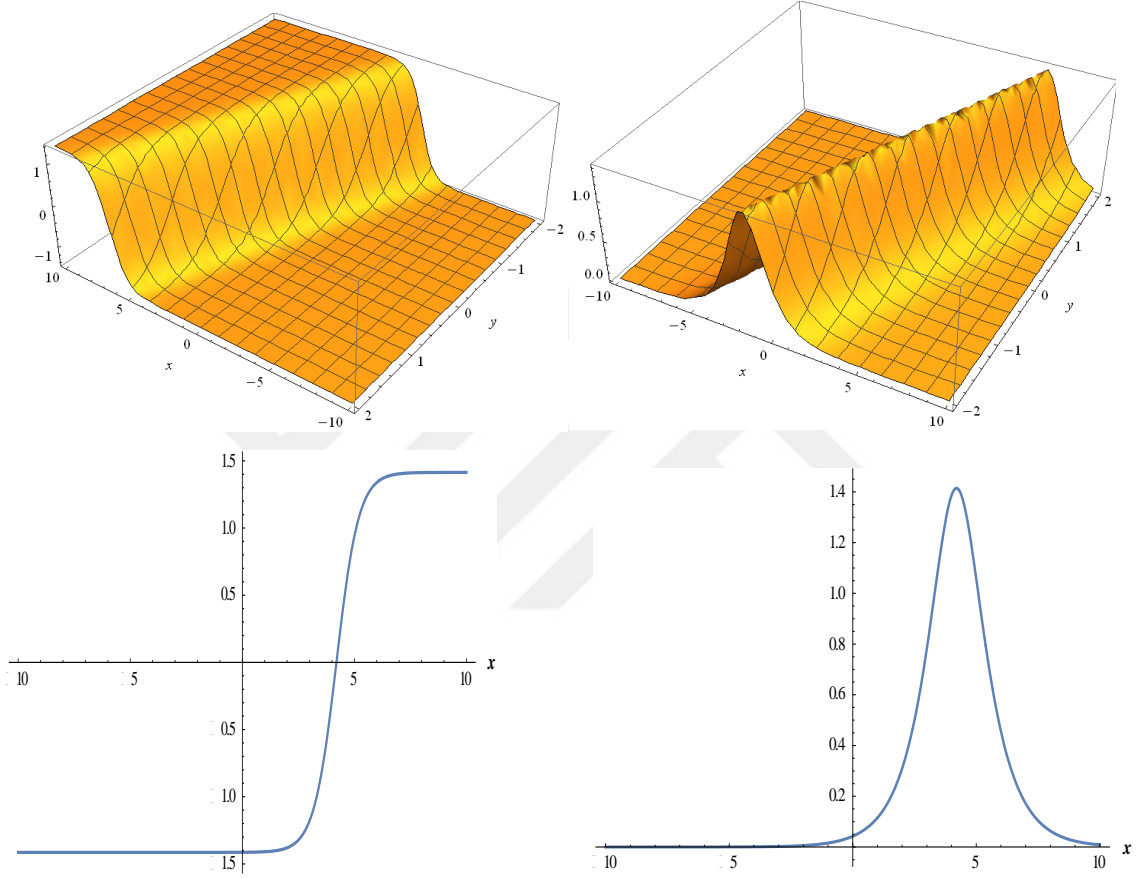
$$A_0 = 0, A_1 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, B_1 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, a = -\sqrt{-1 + c^2 + 2\alpha},$$

yukarıdaki katsayılar alındığında

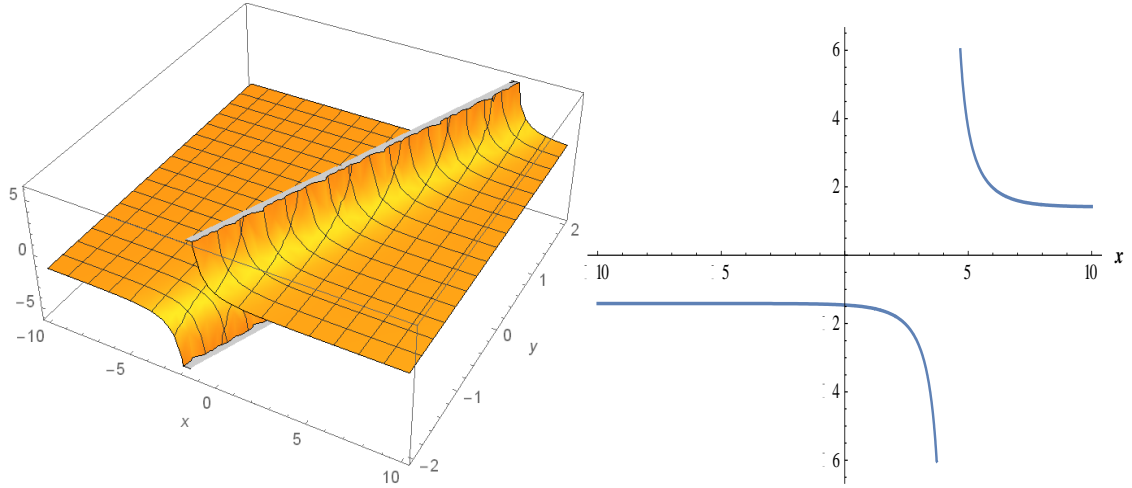
$$u_{5,1}(x, y, t) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \left( i \operatorname{sech} \left[ ct - x + y\sqrt{-1 + c^2 + 2\alpha} \right] - \tanh \left[ ct - x + y\sqrt{-1 + c^2 + 2\alpha} \right] \right). \quad (4.2.17)$$

$$u_{5,2}(x, y, t) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \left( -\cot h \left[ ct - x + y\sqrt{-1+c^2+2\alpha} \right] - \operatorname{csch} \left[ ct - x + y\sqrt{-1+c^2+2\alpha} \right] \right). \quad (4.2.18)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.25.**  $\alpha = -2, \beta = 1, c = \frac{1}{3}, \theta = 0.8, k = 0$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.17) denkleminin topolojik olmayan ve topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.26.**  $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.18) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

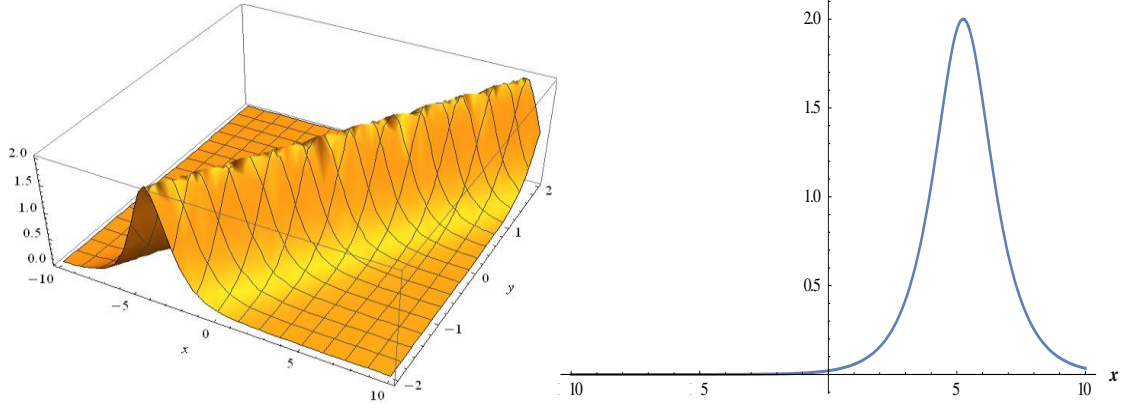
**Durum 6 :**

$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}, a = -\sqrt{-1 + c^2 + 2\alpha}$ , katsayıları alındığında

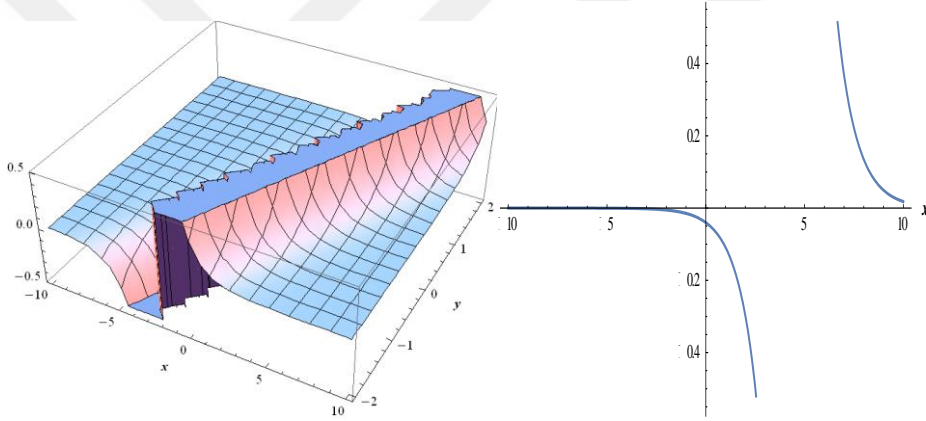
$$u_{6,1}(x, y, t) = \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech} \left[ ct - x + y\sqrt{-1 + c^2 - \alpha} \right] \quad (4.2.19)$$

$$u_{6,2}(x, y, t) = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{csc h} \left[ ct - x + y\sqrt{-1 + c^2 - \alpha} \right] \quad (4.2.20)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.27.**  $\alpha = -2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.19) topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.28.**  $\alpha = 2, \beta = 1, c = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.20) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

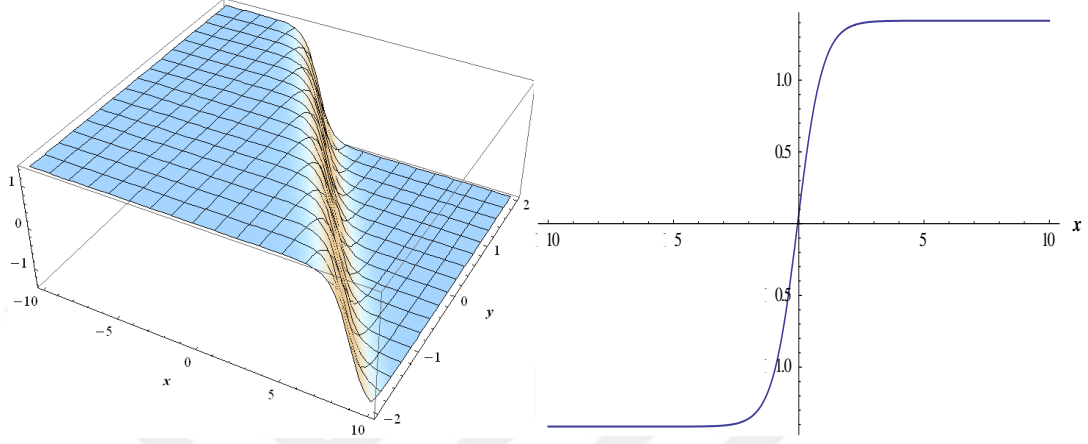
**Durum 7 :**

$$A_0 = 0, A_1 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, B_1 = 0, c = \sqrt{1 + a^2 - \frac{\alpha}{2}}, \text{ katsayıları alındığında}$$

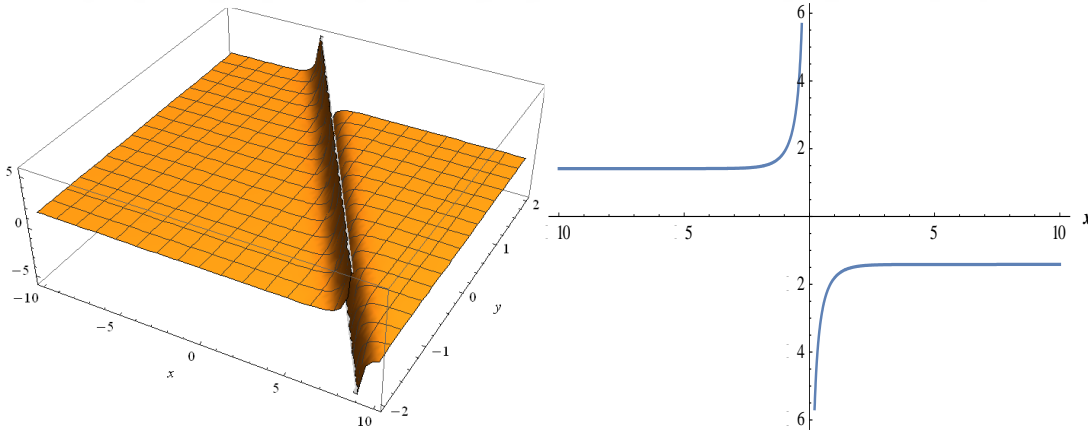
$$u_{7,1}(x, y, t) = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \tanh \left[ x + ay - t \sqrt{1 + a^2 - \frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.2.21)$$

$$u_{7,2}(x, y, t) = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \cot h \left[ x + ay - t \sqrt{1 + a^2 - \frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.2.22)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.29.**  $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.21) denkleminin topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



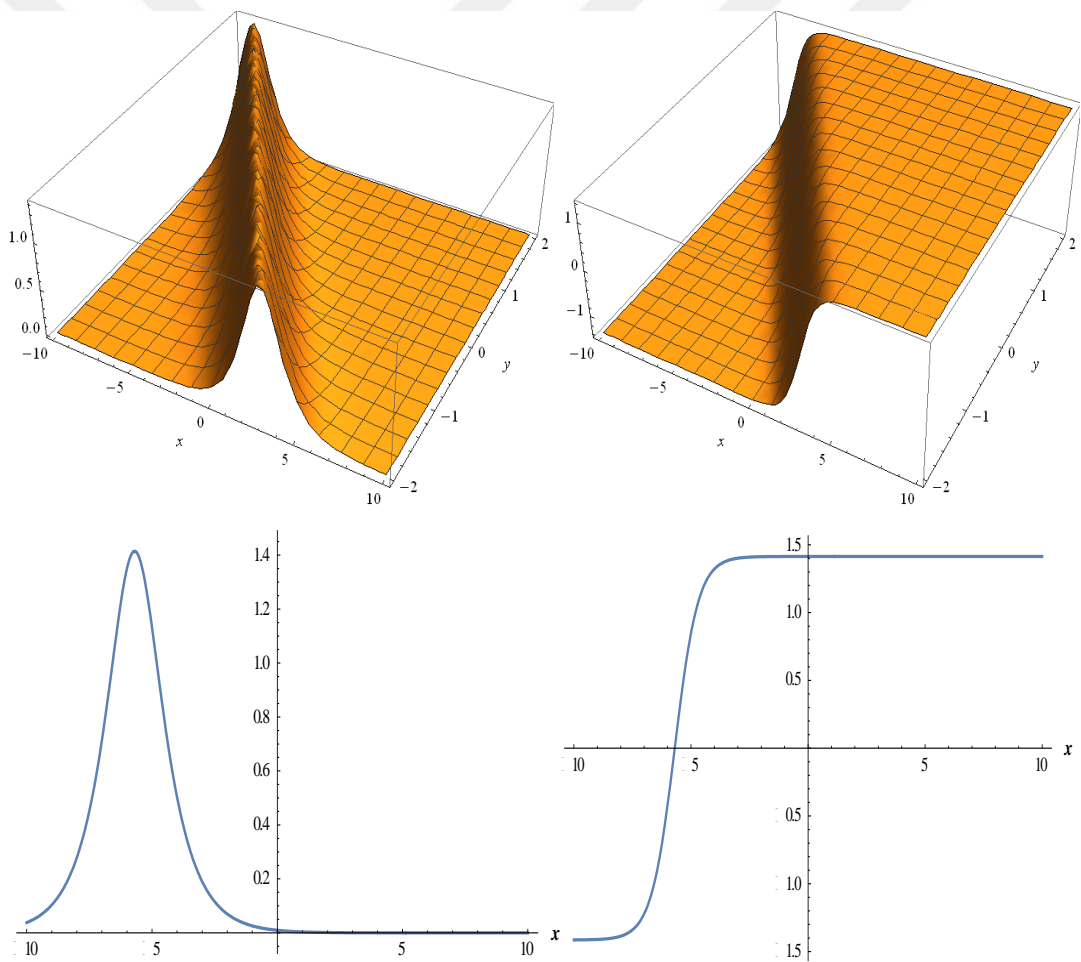
**Şekil 4.30.**  $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.22) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

**Durum 8 :**

$A_0 = 0, A_1 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, B_1 = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, c = -\sqrt{1+a^2-2\alpha}$  katsayıları alındığında

$$u_{8,1}(x, y, t) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \left( i \operatorname{sech} \left[ x + ay + t\sqrt{1+a^2-2\alpha} \right] + \tanh \left[ x + ay + t\sqrt{1+a^2-2\alpha} \right] \right). \quad (4.2.23)$$

denklemini elde edilir.



**Şekil 4.31.**  $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.23) denkleminin topolojik olmayan ve topolojik kink-type soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

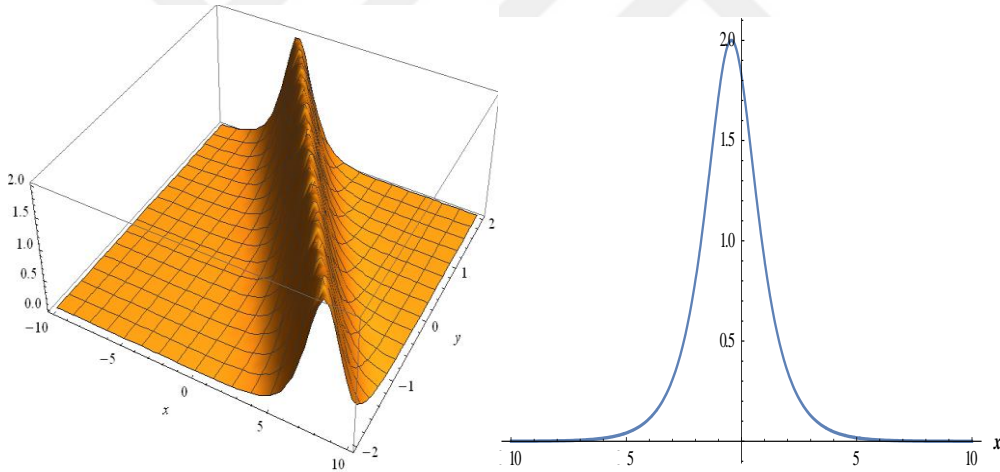
**Durum 9 :**

$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}, c = \sqrt{1+a^2+\alpha}$ , katsayıları alındığında

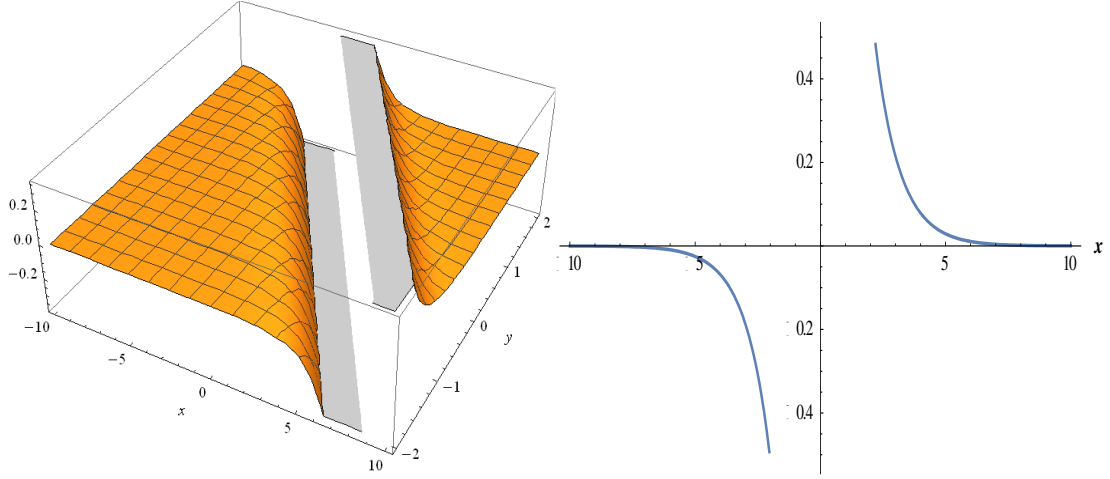
$$u_{9,1}(x, y, t) = -i \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech} \left[ x + ay - t\sqrt{1+a^2+\alpha} \right] \quad (4.2.24)$$

$$u_{9,2}(x, y, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{csc} h \left[ x + ay - t\sqrt{1+a^2+\alpha} \right] \quad (4.2.25)$$

denklemleri elde edilir.



**Şekil 4.32.**  $\alpha = -2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.24) denkleminin topolojik olmayan soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri



**Şekil 4.33.**  $\alpha = 2, \beta = 1, a = 3, t = 0.8, -10 < x < 10, -2 < y < 2$  ve  $y = 0.9$  değerleri göz önüne alındığında (4.2.25) denkleminin tekil soliton yüzeyinin iki ve üç boyutlu grafikleri

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada (2+1) boyutlu cubic Klein-Gordon ve geliştirilmiş Zakharov-Kuznetsov denklemlerinin çözümlerini elde etmek için sine-Gordon açılım metodu ve sinh-Gordon açılım metotları başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Ayrıca her iki denklem için bazı yeni hiperbolik fonksiyon çözümleri elde edildi. Bu denklemlerin non-topological, topological, topological kink-type, non-topological kink-type, singular soliton ve combined singular soliton gibi yeni dalga çözümleri bulundu. Elde edilen yeni çözümler için Wolfram Mathematica 9 programı kullanılarak bu çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizildi. İlaveten bu çözümlerin hepsinin Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla doğrulukları onaylandı. [45] ve [50] deki yazarlar tarafından elde edilen sonuçlar ile elde ettiğimiz sonuçlar karşılaştırıldığında bizim sonuçlarımızın her iki denklem içinde sekant hiperbolik, sinüs ve tanjant yapılarında yeni çözümler olduğunu gözlemledik. Bulduğumuz bu sonuçlar bize bazı lineer olmayan modellerin fiziksel anlamlarını açıklamak için yardımcı olacaktır. Bu açıdan düşünüldüğünde, sine-Gordon açılım ve genişletilmiş sinh-Gordon açılım metodlarının çeşitli lineer olmayan fiziksel modellerin dalga çözümlerini araştırmak için uygulanan güçlü bir metot olduğunu göstermektedir [64-65].

## KAYNAKLAR

- [1] **Kadkhoda, N., Jafari, H.:** Kudryashov method for exact solutions of isothermal magnetostatic atmospheres. *Iran. J. Numer. Anal. Optim.* 6(1), 43–52 (2016)
- [2] **Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Mahmoodirad, A.:** Application of Kudryashov method for higher-order nonlinear Schrodinger equation. *Indian J. Phys.* 87(8), 781–785 (2013)
- [3] **Ryabov, P.N., Sinelsshchikov, D.I., Kochanov, M.B.:** Application of Kudryashov method for finding exact solutions of the higher order nonlinear evolution equations. *Appl. Math. Comput.* 218(7), 3965–3972 (2011)
- [4] **Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E.:** A new approach to Kudryashov’s method for solving some nonlinear physical models. *Int. J. Phys. Sci.* 7(21), 2860–2866 (2012)
- [5] **Islam, M.S., Khan, K., Arnous, A.H.:** Generalized Kudryashov method for solving some (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations. *New Trends Math. Sci.* 3(3), 46–57 (2015)
- [6] **Kaplan, M., Bekir, A., Akbulut, A.:** A generalized Kudryashov method to some nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Nonlinear Dyn.* 85(4), 2843–2850 (2016)
- [7] **Malfliet, W.:** The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations. *J. Comput. Appl. Math.* 164, 529–541 (2004)
- [8] **Wazwaz, A.M.:** The tanh and the sine–cosine methods for the complex modified KdV and the generalized KdV equations. *Comput. Math. Appl.* 49, 1101–1112 (2005)
- [9] **Karimi, M.:** The tanh method for solutions of the nonlinear modified Korteweg de Vries equation. *Math. Sci. J.* 9(1), 47–54 (2013)
- [10] **Abdelkaway, M.A., Bhrawy, A.H., Zerrad, E., Biswas, A.:** Application of tanh method to complex coupled nonlinear evolution equations. *Acta Phys. Pol. A* 129(3), 278–283 (2016)
- [11] **Yusufoglu, E., Bekir, A.:** On the extended tanh method applications of nonlinear equations. *Int. J. Nonlinear Sci.* 4(1), 10–16 (2007)
- [12] **Abdou, M.A.:** The extended tanh method and its applications for solving nonlinear physical models. *Appl. Math. Comput.* 190(1), 988–996 (2007)
- [13] **Wazwaz, A.M.:** The extended tanh method for the Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation, the modified ZK equation and its generalized forms. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 13(6), 1039–1047 (2008)
- [14] **Zayed, E.M.E., Abdelrahman, H.M.:** The extended tanh-method for finding traveling wave solutions of nonlinear evolution equations. *Appl. Math. E Notes* 10, 235–245 (2010)
- [15] **Lin, X., Tang, S., Huang, W.:** The extended tanh method for compactons and solitons solutions for the  $ch(n, 2n - 1, 2n, n)$  equations. *J. Inf. Secur.* 3, 185–188 (2012)
- [16] **Wazwaz, A.M.:** The variational iteration method: a reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations. *Comput. Math. Appl.* 54, 926–932 (2007)

- [17] **Yusufoglu, E.:** The variational iteration method for studying the Klein–Gordon equation. *Appl. Math. Lett.* 21, 669–674 (2008)
- [18] **Wang, Q., Fu, F.:** Variational iteration method for solving differential equations with piecewise constant arguments. *I J Eng. Manuf.* 2, 36–43 (2012)
- [19] **Rao, D.V.G.:** A study of the variational iteration method for solving three species food web model. *Int. J. Math. Anal.* 6(16), 753–759 (2012)
- [20] **Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Paghaleh, A.S.:** The first integral method to nonlinear partial differential equations. *Appl. Math. Int. J.* 7(1), 117–132 (2012)
- [21] **Alquran, M., Katatbeh, Q., Al-Shrida, B.:** Applications of first integral method to some complex nonlinear evolution systems. *Appl. Math. Inf. Sci.* 9(2), 825–831 (2015)
- [22] **Sharma, P., Kushel, O.Y.:** The first integral method for Huxley equation. *Int. J. Nonlinear Sci.* 10(1), 46–52 (2010)
- [23] **He, J., Wu, X.:** Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos Solitons Fractals* 30(3), 700–708 (2006)
- [24] **Moradi, E., Varasteh, H., Abdollahzadeh, A., Malekshah, M.M.:** The exp-function method for solving two dimensional sine-Bratu type equations. *Appl. Math.* 5, 1212–1217 (2015)
- [25] **Manafian, J., Shahabi, R., Norbakhsh, N., Zamanpour, I., Jalali, J.:** Application of the exp-function method for the KP-BBM equation and its generalized form. *Open Sci. J. Mod. Phys.* 1(3), 17–23 (2014)
- [26] **Navickas, Z., Telksnys, T., Ragulskis, M.:** Comments on “The exp-function method and generalized solitary solutions”. *Comput. Math. Appl.* 69, 798–803 (2015)
- [27] **Ariel P.D.,** The homotopy perturbation method and analytical solution of the problem of flow past a rotating disk, 58(11-12), 2504-2513 (2009)
- [28] **Hendi A.,** The extended tanh method and its applications for solving nonlinear physical models, *IJRRAS*, 3(1), 83-91 (2010)
- [29] **Fan E. and Zhang H.,** A note on the homogeneous balance method, *Physics Letter A*, (5), 403-406, 1998
- [30] **Jin-ping Y. and Sen-Yue L.,** Multilinear Variable Separation Approach in (3+1)-Dimensions: the Burgers Equation, *Chinc. Phys.lett*, 20(9), 1448 (2003)
- [31] **Wazwaz A.M.,** The Hirota’s bilinear method and the tanh-coth method for multiple-soliton solutions of the Sawada-Kotera-Kadomtsev-Petviashvili equation, 200(1), 160-166 (2008)
- [32] **J. Manafian,** Optical soliton solutions for Schrödinger type nonlinear evolution equations by the  $\tan(\varphi/2)$ -expansion method, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 127 (10) (2016) 4222-4245
- [33] **M. Ekici, M. Mirzazadeh, A. Sonmezoglu, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, A. Biswas, M. Belic,** Dark and singular optical solitons with Kundu-Eckhaus equation by extended trial equation method and extended  $G'/G$ -expansion scheme, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 127 (2016) 10490-10497.
- [34] **H. Liu, F. Yan, C. Xu,** The bifurcation and exact travelling wave solutions of  $(1+2)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equation with dual-power law nonlinearity, *Nonlinear Dyn.* 67 (1) (2012) 465-473.

- [35] **A. Biswas, H. Triki, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M.Z. Ullah, M. Belic**, Cubic-quartic optical solitons in Kerr and power law media, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 144 (2017) 357-362.
- [36] **A. Biswas, M. Mirzazadeh, M. Eslami, Q. Zhou, A. Bhrawy, M. Belic**, Optical solitons *Electron Opt.* 127 (18) (2016) 7250-7257.
- [37] **A. Biswas, Y. Yildirim, E.Yasar, H. Triki, A.S. Alshomrani, M.Z. Ullah, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic**, Optical soliton perturbation with complex Ginzburg-Landau equation using trial solution approach, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 160 (2018) 44-60.
- [38] **H.A. Zedan, E. Aladrous, S. Shapll**, Exact solutions for a perturbed nonlinear Schrödinger equatin by using Backlund transformations, *Nonlinear Dyn.* 74 (4) (2013) 1145-1151.
- [39] **T.A. Sulaiman, T. Akturk, H. Bulut, H.M. Baskonus**, Investigation of various soliton solutions to the Heisenberg ferromagnetic spin chain equation, *J.Electromagn. Waves Appl.* (2017) 1-13.
- [40] **A. Biswas, Q. Zhou, M.Z. Ullah, H. Triki, S.P. Moshokoa, M. Belic**, Optical soliton perturbation with anti-cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 143 (2017) 131-134.
- [41] **A. Biswas, M.Z. Ullah, M. Asma, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic**, Optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 139 (2017) 16-19.
- [42] **M. Savescu, A.H. Bhrawy, E.M. Hilal, A.A. Alshaery, A. Biswas**, Optical solitons in birefringent fibers with four-wave mixing for Kerr law nonlinearity, *Rom.J.Phys.* 59 (2014) 582-589.
- [43] **A.H. Bhrawy, A.A. Alshaery, E.M. Hilal, Z. Jovanoski, A. Biswas**, Bright and dark solitons in a cascaded system, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 125 (2014) 6162-6165.
- [44] **H.O. Bakodah, A.A. Al Qarni, M.A. Banaja, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, A. Biswas**, Bright and dark Thirring optical solitons with improved adomian decomposition method, *Optik-Int.J.Light Electron Opt.* 130 (2017) 1115-1123.
- [45] **Tascan, F., Bekir, A., Koparan, M.:** Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 14, 1810–1815 (2009)
- [46] **Khalfallah, M.,** New exact traveling wave solutions of the (2+1)-dimensional Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation. *An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta* 15(2), 35–43 (2007)
- [47] **Naher, H., Abdullah, F.A.:** The improved  $(G'/G)$  -expansion method for the (2+1)-dimensional modified Zakharov–Kuznetsov equation. *J. Appl. Math.* 2012, 438928 (2012) doi:10.1155/2012/438928
- [48] **Seadawy A. R.,** Stability analysis solutions for nonlinear three-dimensional modified Korteweg–de Vries–Zakharov–Kuznetsov equation in a magnetized electron–positron plasma 455, 44-51 (2016)
- [49] **Mohyud-Din S.T. and Noor M.A.,** Homotopy Perturbation Method for Solving Fourth-Order Boundary Value Problems 2007, 1-15 (2016)
- [50] **Baskonus, H.M., Bulut, H.:** New hyperbolic function solutions for some nonlinear partial differential equation arising in mathematical physics. *Entropy* 17, 4255–4270 (2015)

- [51] **Khan, K., Akbar, M.A.**, Exact solutions of the (2+1)-dimensional cubic Klein–Gordon equation and the (3+1)-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation using the modified simple equation method. *J. Assoc. Arab Univ. Basic Appl. Sci.* 15, 74–81 (2014)
- [52] **Hirota R., Satsuma J.**, Soliton solutions of a coupled KDV equation *Phys. Lett. A*, 85 (1981) 404-408.
- [53] **Fan E.**, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations 277 (2000) 212-218.
- [54] **Yaşar, B. İ., 2005**, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [55] **Koca, K., 2003**, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [56] **Başarır, M., ve Türker, E. S., 2003**, Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler, Değişim Yayınları, İstanbul
- [57] **Tülüce Şeyma**, Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Analizi, Fırat Üniversitesi, Doktora Semineri, 2012
- [58] **Karagöz, İ.** Sayısal analiz ve mühendislik uygulamaları, Nobel yayınları, 2011.
- [59] **Rajaraman, R.**, 1982, Solitons and Instantons, North-Holland, Amsterdam, 0444870474.
- [60] **Yan, C.:** A simple transformation for nonlinear waves. *Phys. Lett. A* 22(4), 77–84 (1996)
- [61] **Baskonus, H.M.:** New acoustic wave behaviors to the Davey–Stewartson equation with power nonlinearity arising in fluid dynamics. *Nonlinear Dyn.* 86(1), 177–183 (2016)
- [62] **Bulut, H., Sulaiman, T.A., Baskonus, H.M.:** New solitary and optical wave structures to the Korteweg–de Vries equation with dual-power law nonlinearity. *Opt. Quantum Electron.* 48(564), 1–14 (2016)
- [63] **Yan, Z., Zhang, H.:** New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics. *Phys. Lett. A* 252, 291–296 (1999)
- [64] **X. Xian-Lin, T.Jia-Shi**, Travelling wave solutions for Konopelchenko-Dubrovsky equation using an extended sinh-Gordon equation expansion method, *Commun. Theor. Phys.* 50 (2008) 1047.
- [65] **Bulut, H., Sulaiman, T.A., Baskonus, H.M, Yazgan T.,** Novel hyperbolic behaviors to some important models arising in quantum science **49:349 (2017)**

## ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Hatay’da doğdu. İlköğretimi Hatay Payas Fahrettin Altay İlköğretim okulunda tamamladı. Ortaöğretimi Hatay Payas Yakacık Lisesinde okudu. Lisans öğrenimini 2016 yılında Elazığ Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı. 2016 yılının güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Yüksek lisans öğrenimine başladı.

**Tuğba YAZĞAN**

