



**LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI VE
HYERS-ULAM KARARLILIĞI**

Nalan KİTAN UYAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2019

Nalan KİTAN UYAR tarafından hazırlanan "LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI VE HYERS-ULAM KARARLILIĞI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Adil MISIR

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Fatma AYAZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Abdullah ÖZBEKLER

Matematik Ana Bilim Dalı, Atılım Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 26/02/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nalan KİTAN UYAR

26/02/2019

LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI VE HYERS-ULAM KARARLILIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Nalan KİTAN UYAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2019

ÖZET

1940 yılında Stanislaw Ulam, Wiskonsin Üniversitesinde fonksiyonel denklemlerin kararlılığı ile ilgili bir problemi ortaya koymuştur. Donald H. Hyers bir sonraki yıl, Ulam'ın bu sorusuna Banach uzayları üzerinde toplamsal dönüşümler için kısmi olarak bir cevap vermiştir. Fonksiyonel denklemlerin kararlılık problemi, Ulam'ın bu sorusuna Hyers'in verdiği teoremlerle başlamıştır. Yaklaşık otuz yıl önce Ulam'ın problemi ve Hyers teoreminin çeşitli genellemeleri ile bağlantılı olarak birçok çalışma yapılmıştır. 1978'de Themistocles M. Rassias, Hyers'in teoremini Banach uzayları üzerinde genişletmeyi başarmıştır. Daha sonra Ulam problemi fonksiyonel denklemler yerine bazı diferensiyel denklemler için tanımlanıp araştırılmıştır. İlk olarak Alsina Ger 1998 yılında, birinci mertebeden $y'(t) = y(t)$ lineer diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını araştırmıştır. Göstermiştir ki her $t \in I$ için $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $|y'(t) - y(t)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise $g'(t) = g(t)$ denklemini sağlayan bir $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyle ki her $t \in I$ için $|y(t) - g(t)| < 3\varepsilon$ sağlanır. Bu tez çalışması ilk olarak bazı fonksiyonel denklemlerin, birinci basamaktan lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlerin ve yüksek basamaktan sabit katsayılı homogen lineer diferensiyel denklemlerin kararlılığı incelenmiştir. İkinci olarak bazı özel tipte birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir. Son olarak lineer diferensiyel denkleme dönüşebilen Bernoulli diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı ispatlanmıştır.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Diferensiyel Denklemlerin Kararlılığı, Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

Sayfa Adedi : 107

Danışman : Prof. Dr. Adil MISIR

HYRES-ULAM STABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Nalan KITAN UYAR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2019

ABSTRACT

In 1940, Stanislaw Ulam posed a problem with the stability of functional equations at the University of Wisconsin. The next year Donald H. Hyers gave a partial answer to the Ulam's question for additive transformations on Banach spaces. Stability problem of functional equations started with the theorem of Hyers. During the last three decades very important contributions to the stability problems of functional equations were given by many mathematicians. In 1978, Themistocles M. Rassias was able to expand Hyers' theorem on Banach spaces. More than thirty years ago, a generalization of Ulam's problem for some differential equations was proposed and investigated by replacing functional equations with differential equations. In 1998, Alsina Ger investigated the Hyers-Ulam stability of the first order $y'(t) = y(t)$ linear differential equation. They proved that if a differentiable function $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies $|f'(t) - f(t)| < \varepsilon$ for all $t \in I$, then there exist a differentiable function $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $g'(t) = g(t)$ for any $t \in I$ such that $|y(t) - g(t)| < 3\varepsilon$ for every $t \in I$. In this thesis, we firstly study the stability of some functional equations, linear or non-linear differential equations of first order and higher order homogeneous constant coefficient linear differential equations. Secondly, we prove the Hyers-Ulam stability of some special kind of linear differential equations of first order. Finally, we prove the Hyers-Ulam stability of Bernoulli differential equations that can be converted into linear equations.

Science Code : 20406

Key Words : Stability of Differential Equations, The Hyers-Ulam-Rassias Stability.

Page Number : 107

Supervisor : Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli zamanlarını bana ayırarak yardımlarını ve anlayışını esirgemeyen, akademik başarısı ve örnek kişiliği ile bana yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Adil MISİR'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi destekleri ile her zaman yanımda olan sevgili eşim Mesut UYAR'a, canım kızlarım Elif Asya ve Zeynep Doğa'ya teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR	3
2.1. Temel Tanım ve Gösterimler	3
2.2. Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler	6
2.2.1. Lineer diferensiyel denkleme dönüşebilen diferensiyel denklemler	9
3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI	15
3.1. Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Kararlılığı	15
3.1.1. Yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin kararlılığı	16
3.2. Lineer Sistemlerin Kararlılığı	18
3.2.1. Sabit katsayılı lineer sistemlerin kararlılığı	19
4. FONKSİYONEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI	21
4.1. Fonksiyonel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı	21
4.2. Normlu Lineer Uzaylarda Ulam Probleminin Çözümü	32
5. BİRİNCİ BASAMAKTAN AYRILABİLEN TİPTEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI	39
5.1. $y' = y$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	39
5.2. $y' = \lambda y$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	50

5.3. $y'(t) - ay(t) = 0$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	66
5.4. $y' + g(t)y = 0$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	67
5.5. $\varphi(t)y'(t) = y(t)$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı	80
6. $y' + P(t)y = G(t, y)$ DENKLEMİNİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI	87
6.1. Birinci Basamaktan Homogen Olmayan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı	87
6.2. Bernoulli Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı	92
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	103
KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ	107

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^1(I)$	I üzerinde sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı
(X, D)	Metrik uzay
$ \cdot $	Mutlak değer
$\ \cdot\ $	Norm
$\in$	Elemanıdır
$\subset$	Alt küme
$\sum$	Toplam sembolü
$\inf$	İnfimum, Alt sınırların en büyüğü
$\sup$	Supremum, Üst sınırların en küçüğü
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$\exp(x)$	x sayısının e tabanındaki görüntüsü
$Re(z)$	z sayısının reel kısmı

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak bakıldığında, diferensiyel denklemler ile ilgili ilk çalışmaların diferensiyel denklemlerin kurucusu olarak bilinen Newton tarafından yapıldığı görülmektedir. Daha sonra Leibnitz, Bernoulli, Euler ve Cauchy gibi birçok bilim insanı diferensiyel denklemlerin geliştirilmesine ve bu denklemlerin çözümleri ile ilgili sistematik yapıların kurulmasına katkıda bulunmuşlardır.

Günümüzde matematik, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, tıp, ekonomi ve sosyal bilimler gibi birçok uygulama alanına sahip olan diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar hızlı bir şekilde ilerlemektedir. Bu çalışmalar denklemin analitik çözümlerinin belirlenmesi, denklemin çözümünün davranışının incelenmesi ve denklemin çözümünün yaklaşık değerinin belirlenmesi şeklinde gruplandırılabilirler.

Her denklemin elemanter çözümleri elde edilemediğinden verilen denklemin çözümünü elde etmeksizin çözümlerin özelliklerini incelemek mümkündür. Bu anlamda çözümlerin sınırlılığı, sıfırlarının sayısı ve dağılımı, salınımlılığı ve kararlılığı gibi kalitatif incelemeler yapılabilmektedir.

Bu çalışmada diferensiyel denklemlerin kararlılığı ve 1940 yılında Ulam tarafından ortaya atılan ve 1941 yılında Hyers tarafından cevaplandırılan bir problem ile ortaya çıkan Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir. Bu incelemeyi yaparken önce fonksiyonel denklemler ele alınmıştır. Bu çalışmada $F(x+y) = F(x) + F(y)$ ve $F(xy) = F(x) + F(y)$ gibi fonksiyonel denklemlerin birkaç tanesi detaylı olarak ele alınmıştır.

1993 yılında fonksiyonel denklemler için Hyers-Ulam kararlılığı Obloza tarafından diferensiyel denklemlere uyarlanmıştır ve 1998 yılında Alsina ve Ger tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada bunlardan $y' = y$, $y' = ay$ ve $y' + g(t)y = 0$ gibi bir kaç denklemin Hyers-Ulam kararlılığını detaylı olarak ele alınmıştır.

Son olarak homogen olmayan diferensiyel denklemin

$$y' + p(t)y = G(t, y)$$

şeklindeki formu ele alınmış ve ilk olarak $G(t, y) = q(t)$ özel hali alınarak

$$y' + p(t)y = q(t)$$

birinci basamaktan lineer diferensiyel denkleminin daha sonra $G(t, y) = q(t) y^n$ alınarak lineer diferensiyel denkleme dönüşebilen

$$y' + p(t) y = q(t) y^n$$

Bernoulli diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam, Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlılığı incelenmiştir.



2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan fonksiyonel analiz, soyut matematik ve lineer cebirden bildiğimiz temel tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Gösterimler

2.1.1. Tanım

L boş olmayan bir küme ve F , reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$\begin{aligned} + : L \times L &\longrightarrow L \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cdot : F \times L &\longrightarrow L \\ (\alpha, x) &\longrightarrow \alpha x \end{aligned}$$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa L kümesine F cismi üzerinde lineer uzay (veya vektör uzay) denir.

A) L $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G_1) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G_2) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G_3) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G_4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G_5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L_1) $\alpha.x \in L$ dir

L_2) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

$L_3)$ $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

$L_4)$ $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

$L_5)$ Her $x \in F$ için $1.x = x$ dir. Burada 1, F nin birim elemanıdır [6].

2.1.2. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$M1) d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$M2) d(x, y) = d(y, x),$$

$$M3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir **metrik** ve d ile birlikte X e **metrik uzay** denir ve (X, d) veya X_d ile gösterilir [4] .

2.1.3. Tanım

X , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için

$$N1) \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** denir [3].

2.1.4. Tanım

Eğer bir X normlu uzayındaki her bir Cauchy dizisi X deki bir elemana yakınsar ise, bu durumda bu X normlu uzayı tamdır denir. Bir normlu uzay, eğer tam ise bir **Banach uzayı** olarak adlandırılır [4].

2.1.5. Tanım

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(G, *)$ cebirsel yapısına bir **grup** denir.

$G_1)$ $*$, G' de bir ikili işlemdir.

$G_2)$ $*$ işleminin G' de birleşme özelliği vardır. Yani her $a, b \in G$ için

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

yazılabilir.

$G_3)$ $*$ işleminin G' de birim elemanı vardır. Yani her $a \in G$ için

$$a * e = e * a$$

olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır.

$G_4)$ $*$ işlemine göre G' deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $\forall a \in G$ için

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a$$

olacak şekilde bir tek $a^{-1} \in G$ bulunabilir.

2.1.6. Tanım

$(G, *)$ ve (H, Δ) birer grup olmak üzere $g_1, g_2 \in G$ elemanları

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \Delta f(g_2)$$

eşitliğini sağlıyorsa $f : G \longrightarrow H$ fonksiyonuna G den H ye bir **homomorfizma** denir [1].

2.1.7. Tanım

Boş kümeden farklı bir G grubu üzerinde tanımlı bir herhangi d metriği verilsin. (G, d) metrik uzayına bir **metrik grup** denir.

2.1.8. Tanım

$F = \mathbb{R}$ veya $F = \mathbb{C}$ olmak üzere L, F üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f : L \rightarrow F$$

operatörüne **fonksiyonel** denir [3].

2.1.9. Tanım

$T(x + y) = T(x) + T(y)$ denkleminde Cauchy fonksiyonel denklemi denir. Bu denklemin herhangi bir çözümü toplamsal olarak adlandırılır. Diğer Cauchy fonksiyonel denklemleri

$$E(x + y) = E(x)E(y) \quad (\text{üstel})$$

$$L(xy) = L(x) + L(y) \quad (\text{logaritmik})$$

$$M(x + y) = M(x)M(y) \quad (\text{çarpımsal})$$

denklemlerdir.

2.2. Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler

Bu kısımda, ilerideki bölümlerde kullanacağımız birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemler ile lineer diferensiyel denklemlere dönüştürülebilen diferensiyel denklemlerin hatırlatmasına yer verilmiştir.

Öncelikle birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemin tanımı verilecektir.

2.2.1. Tanım

Genel olarak $a(x), b(x)$ ve $c(x)$ fonksiyonları bir $A \subset \mathbb{R}$ alt aralığında sürekli

fonksiyonlar olsun. $a(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (2.1)$$

formundaki bir diferensiyel denkleme **birinci basamaktan lineer diferensiyel denklem** denir [9].

$a(x)$ fonksiyonu A kümesinde sürekli ve $a(x) \neq 0$ olduğundan en az bir $x_0 \in A$ için $a(x_0) \neq 0$ dır. Süreklilikten dolayı x_0 noktasının öyle bir $I \subset A$ komşuluğu vardır ki her $x \in I$ için $a(x) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $x \in I$ olmak üzere (2.1) denkleminin her iki tarafını $a(x)$ ile bölünürse,

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \text{ve} \quad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

olmak üzere,

$$y' + p(x)y = q(x), x \in I \quad (2.2)$$

denklemini elde edilir ki bu denklem birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin standart formu olarak bilinir. Eğer $q(x) = 0$ ise (2.2) denklemini,

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2.3)$$

halini alır ki bu denkleme (2.2) denkleminin karşılık gelen homogen birinci basamaktan lineer diferensiyel denklem denir. Eğer en az bir $x \in I$ için $q(x) \neq 0$ ise (2.2) denkleminin homogen olmayan birinci basamaktan lineer diferensiyel denklem denir. Bu denklemin genel çözümünü elde etmek için denklem $y \neq 0$ ile bölünüp her iki tarafının integrali alınırsa (2.3) denklemini

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

şeklinde yazılıp bu ifadenin integrali alınırsa

$$\ln y = - \int p(x)dx + c \quad \text{veya} \quad \ln y = - \int p(x)dx + \ln C$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$y(x) = C \exp \left(- \int p(x) dx \right) \quad (2.4)$$

genel çözümüne ulaşılır. Eğer (2.2) denkleminin her iki tarafı integral çarpanı olarak bilinen

$$\lambda(x) = \exp \left(\int p(x) dx \right)$$

ile çarpılırsa,

$$y' \exp \left(\int p(x) dx \right) + p(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) y = q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) \quad (2.5)$$

elde edilir. Eğer

$$\frac{d}{dx} \exp \left(\int p(x) dx \right) = p(x) \exp \left(\int p(x) dx \right)$$

olduğu ve

$$\frac{d}{dx} \left[y \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] = y' \exp \left(\int p(x) dx \right) + p(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) y$$

olduğu (2.5) de kullanılırsa, (2.5) eşitliği

$$\frac{d}{dx} \left[y \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] = q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right)$$

veya buna denk olarak

$$d \left[y \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] = \left[q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] dx \quad (2.6)$$

olarak yazılabilir. Eğer (2.6) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve aranan $y(x)$ fonksiyonu yalnız bırakılırsa

$$y(x) = \exp \left(- \int p(x) dx \right) \left\{ \int \left[q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) \right] dx + C \right\} \quad (2.7)$$

elde edilir. Burada C integrasyon sabitidir.

2.2.1. Lineer diferensiyel denkleme dönüşebilen diferensiyel denklemler

Birinci basamaktan bazı diferensiyel denklemler uygun dönüşümler yardımıyla bilinen modellerde diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. Lineer denklem olmayıp lineer denkleme dönüştürülebilir en önemli iki denklem modeli Bernoulli ve Riccati diferensiyel denklemleridir.

2.2.2. Tanım

$a, b, c \in C(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere Bernoulli diferensiyel denkleminin genel formu

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^n(x), n \neq 0, 1$$

şeklindedir [9].

$a(x) \neq 0$ olduğu yerde, bu denklem $a(x)$ ile bölünürse

$$y' + p(x)y = q(x)y^n(x), n \neq 0, 1 \quad (2.8)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden Bernoulli diferensiyel denklemini genel olarak (2.8) ile verilmektedir. Eğer n sabiti 0 veya 1 ise bu denklem sırasıyla, birinci basamaktan lineer diferensiyel denkleme ve değişkenlerine ayrılabilen birinci basamaktan diferensiyel denkleme dönüşmektedir. Eğer (2.8) denkleminin her iki tarafını $y^{-n}(x)$ ile çarpılırsa,

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \quad (2.9)$$

denklemini elde edilir. Eğer $v(x) = y^{1-n}(x)$ dönüşümü yapılırsa, (2.9) denklemini

$$v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x)$$

veya

$$v' + P(x)v = Q(x) \quad (2.10)$$

lineer birinci basamaktan diferensiyel denklemine dönüşür. Burada

$$P(x) = (1 - n)p(x) \text{ ve } Q(x) = (1 - n)q(x)$$

dir. Dolayısıyla (2.10) denkleminin v genel çözümünün bilinmesi halinde (2.8) denkleminin

$$y(x) = [v(x)]^{1/1-n}$$

şeklinde genel çözümü elde edilebilir.

2.2.3. Tanım

Riccati diferensiyel denkleminin genel formu

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (2.11)$$

şeklinde dir. Burada $p, q, r \in C(A)$ dır [9].

Bu denklemin bir özel çözümü olan $y_1(x)$ in bilinmesi halinde

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \quad (2.12)$$

dönüşümü ile (2.11) denklemini bir lineer diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. (2.12) denkleminin her iki tarafının türevi alınır

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \text{ ve } y'(x) = y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

elde edilir ve bu (2.11) denkleminde kullanılırsa,

$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = p(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 + q(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right) + r(x)$$

$$= [p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)] + p(x) \left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + q(x) \frac{1}{z}$$

ve böylece

$$-\frac{1}{z^2}z' = p(x) \left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + q(x) \frac{1}{z}$$

elde edilir ki bu denklem $-z^2$ ile çarpılıp düzenlenirse, bu denklemin

$$z' + (2y_1p(x) + q(x))z + p(x) = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde birinci basamaktan lineer diferensiyel denklem olduğu görülür. O halde (2.13) denkleminin genel çözümü z bulunup $y = y_1 + \frac{1}{z}$ de yerine yazılırsa (2.11) denkleminin genel çözümünü elde edilmiş olur.

2.2.4. Tanım

Genel olarak n .basamaktan değişken katsayılı homogen olmayan bir Cauchy-Euler veya kısaca Euler diferensiyel denkleminin genel formu

$$a_0x^ny^n + a_1x^{n-1}y^{n-1} + \dots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x), x > 0 \quad (2.14)$$

şeklindedir [9] .

$x = e^t$ dönüşümü, bu diferensiyel denklemi sabit katsayılı bir diferensiyel denkleme dönüştürmektedir. Bunu özel olarak $n = 2$ için gösterelim. $x = e^t$ ise $t = \ln x$ olacaktır. Bu durumda bilinmeyen fonksiyon

$$y(x) = y(e^t) = \phi(t) = \phi(\ln x)$$

halini alacaktır ve zincir kuralı yardımıyla, $D = \frac{d}{dt}$ olmak üzere

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\phi(t)}{dx} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dt} = e^{-t} D\phi$$

ve benzer şekilde

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt} \right) = e^{-2t} D(D-1)\phi$$

ve bu şekilde devam edilerek keyfi bir n için,

$$y^{(n)} = e^{-nt} D(D-1)(D-2)\dots(D-n+1)\phi$$

elde edilir. Bu değerler (2.14) denkleminde $n = 2$ için yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y &= a_0 x^2 \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 \phi}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt} \right) \right] + a_1 x \left(\frac{1}{x} \frac{d\phi}{dt} \right) + a_2 \phi \\ &= a_0 \left(\frac{d^2 \phi}{dt^2} - \frac{d\phi}{dt} \right) + a_1 \frac{d\phi}{dt} + a_2 \phi \\ &= a_0 \frac{d^2 \phi}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{d\phi}{dt} + a_2 \phi \\ &= f(e^t) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

olacaktır ki bu da bize,

$$a_0 \frac{d^2 \phi}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{d\phi}{dt} + a_2 \phi = g(t) \quad (2.15)$$

şeklinde sabit katsayılı homogen olmayan lineer bir diferensiyel denklem verir. Eğer karşılık gelen karakteristik denklemin kökleri birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 reel sabitler ise,

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \phi_p(t)$$

dolayısıyla $t = \ln x$ olduğu kullanılırsa $\phi(\ln x) = y(x)$ olacağından (2.14) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + y_p(x)$$

olarak bulunur, karakteristik denklemin kökleri çakışık ise

$$\phi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} + \phi_p(t)$$

dolayısıyla $t = \ln x$ olduğu kullanılırsa $\phi(\ln x) = y(x)$ olacağından (2.14) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 x^{\lambda} + c_2 x^{\lambda} \ln x + y_p(x)$$

olarak bulunur. Son olarak karakteristik denklemin kökleri $\alpha \pm i\beta$ şeklinde eşlenik kompleks sayılar ise (2.15) denklemi çözülürse,

$$\phi(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + \phi_p(t)$$

elde edilir. Burada $t = \ln x$ olduğu kullanılırsa $\phi(\ln x) = y(x)$ olacağından (2.14) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = x^\alpha (c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)) + y_p(x)$$

olarak bulunur. Birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmak için her zaman integral çarpanı bulmak kolay değildir. Örneğin,

$$y' + e^{x^2} y = \sin x$$

denkleminin integral çarpanını bulmak için $\exp\left(\int e^{x^2} dx\right)$ integralini hesaplamak gerekir. Fakat bilinen yöntemler kullanılarak bu integrali hesaplayamayız. İşte böyle durumlarda denklemin yaklaşık çözümünü bulmak gerekebilir.



3. DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

Diferensiyel denklemler alanında yapılan çalışmaları çeşitli alt gruplara ayırabiliriz. Bunlardan bir tanesi kararlılık teorisi olarak bilinmektedir. Kararlılık teorisi diferensiyel denklemlerin çözümünün davranışı inceler. Bir diferensiyel denklemin kararlı, asimptotik kararlı veya kararsız olması bu diferensiyel denklemin çözümlerinin bağımsız değişkeninin olabildiğince büyük değerler aldığı anda davranışının incelenmesi olarak özetlenebilir.

3.1. Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Kararlılığı

3.1.1. Lemma

$\alpha > 0$ ve $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere $t > 0$ için, $t^m e^{-\alpha t} \leq c$ olacak şekilde bir $c = c(\alpha, m) > 0$ sayısı vardır.

3.1.2. Lemma

$\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$ ve $\operatorname{Re} \lambda < \sigma$ olsun. Bu durumda; her $t > 0$ için $|t^m e^{\lambda t}| \leq c e^{\sigma t}$ olacak şekilde bir $c > 0$ vardır.

3.1.3. Lemma

$P(\lambda)$, n . dereceden bir polinom ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ler bu polinomun kökleri olsunlar. Bu durumda eğer her $j = 1, 2, \dots, n$ için $\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma$ özelliğini sağlıyorsa $L(D)y = 0$, $D = \frac{d}{dt}$ denkleminin herhangi bir $y(t)$ çözümü için

$$|y(t)| \leq c e^{\sigma t}, \quad t \geq 0$$

olacak şekilde bir $c > 0$ vardır.

3.1.4. Lemma

$P(\lambda)$, n . dereceden bir polinom olsun. $P(\lambda) = 0$ denkleminin tüm kökleri pozitif olmayan reel kısımlı olsun ve reel kısmı sıfır olanlar basit kökler olsunlar. Bu durumda eğer y , $P(D)y = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü ise $t \geq 0$ için

$$|y(t)| \leq c$$

olacak şekilde bir $c > 0$ vardır.

3.1.5. Lemma

$P(D)y = 0$ denkleminin karşılık gelen karakteristik denklemin tüm sıfırlarının negatif reel kısmı varsa, $P(D)y = 0$ denkleminin herhangi bir y çözümü için

$$|y(t)| \leq k.e^{-at}$$

$t \geq 0$ olacak şekilde $a > 0, k > 0$ sabitleri vardır. Dolayısıyla $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ dır.

3.1.6. Tanım

$t \geq 0$ olmak üzere $x(t) \in \mathbb{R}^n$ olsun ve $x'(t) = f(t, x(t))$ diferensiyel denklemi için f sürekli fonksiyonu ikinci bileşene göre lokal Lipschitzyan olsun.

Denklemin $x(t_0) = x_0$ koşuluna uyan maksimal tanımlı çözümünü $t \rightarrow x(t, t_0, x_0)$ ile gösterelim. $\varphi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de bu diferensiyel denklemin bir çözümü olsun. Bu durumda

1) Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ varsa öyle ki $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta$ olduğunda $|\varphi(t) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ özelliği her $t \geq t_0$ için sağlanıyor ise φ çözümüne $[t_0, \infty)$ üzerinde **kararlıdır** denir.

2) Eğer φ çözümü kararlı ve (1) durumundaki gibi her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bir $\delta_1 < \delta$ vardır öyle ki $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta_1$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - x(t, t_0, x_0)| = 0$ oluyor ise φ çözümüne **asimptotik kararlıdır** denir.

3) Eğer her $\delta > 0$ için bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki, bir x_0 noktası için $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta$ olduğunda öyle bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ noktası için $|\varphi(t_1) - x(t_1, t_0, x_0)| \geq \varepsilon$ kalıyorsa φ çözümüne **kararsızdır (kararlı değildir)** denir [18].

3.1.1. Yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin kararlılığı

Yüksek mertebeden sabit katsayılı diferensiyel denklemlerin kararlılığını incelemek için **Routh-Hurwitz Kriteri** sık kullanılan yöntemlerden biridir.

3.1.7 Teorem

$D = \frac{d}{dt}$ olmak üzere

$$P(D)z = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \quad (3.1)$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel denkleminin karşılık gelen karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

ve a_j ler sabit katsayılar olmak üzere Hurwitz matrisi

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \dots$$

ve bu şekilde devam edilerek n . adımda $j > n$ olduğunda $a_j = 0$ olmak üzere

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $P(D)z = 0$ denkleminin ait karakteristik denklemin sıfırlarının negatif reel kısmı olması için gerek ve yeter koşul her $k=1,2,\dots,n$ için $\det H_k > 0$ olmasıdır.

Örnek

$y'' + 5y' + 2y = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünün asimptotik kararlı olduğunu gösterelim. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$ dır. $a_1 = 5, a_2 = 2$ olmak üzere Hurwitz matrisleri sırasıyla $H_1 = a_1 = 5$ olduğundan $\det H_1 = 5 > 0$, $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ olduğundan $\det H_2 = 10 > 0$ dır. Her $k=1,2$ için $\det H_k > 0$ olduğundan verilen denkleme ait karakteristik denkleminin sıfırları negatif reel kısmılıdır. O halde verilen denklem asimptotik kararlıdır.

Örnek

$y''' + 2y'' + y' - y = 0$ diferensiyel denklemin çözümünün kararlı olmadığını gösterelim. Bu diferensiyel denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ ve $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ ve $a_3 = -1$ olmak üzere Hurwitz matrisleri sırasıyla $H_1 = a_1 = 2$ olduğundan $\det H_1 = 2 > 0$, $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan $\det H_2 = 3 > 0$, $H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ olduğundan $\det H_3 = -3 < 0$ dır. Her $k = 1, 2, 3$ için $\det H_k > 0$ olmadığından verilen denkleme ait karakteristik denkleminin sıfırları negatif reel kısımlı değildir. O halde verilen denklem kararlı değildir.

3.2. Lineer Sistemlerin Kararlılığı

$y^n = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ normal formundaki her diferensiyel denklem, n bilinmeyenli denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülebilir. Şöyle ki $y = x_1$, $y' = x_2$, $y'' = x_3, \dots$, $y^{(n-1)} = x_n$ olarak alırsak diferensiyel denklem,

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ y'(t) &= x_1'(t) = x_2(t) \\ y''(t) &= x_2'(t) = x_3(t) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ y^{(n)}(t) &= x_n'(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

sistemine dönüşür. Bu sistemde,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{olarak tanımlanırsa, } x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{olur. Böylece}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

olmak üzere denklem matris formunda yazılabilir. Buradan, $x'(t) = A(t)x(t)$ denkleminin genel çözümü $x_h(t)$ ve $x'(t) = A(t)x(t) + G(t)$ denkleminin bir özel çözümü $x_p(t)$ ise genel çözüm, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ dir.

3.2.1. Sabit katsayılı lineer sistemlerin kararlılığı

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ bir sabit matris ve $t \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

bilinmeyen vektör için $x'(t) = Ax(t)$ lineer homogen sistemi ele alınsın.

$x'(t) = Ax(t)$, $x(t_0) = x_0$ başlangıç değer probleminin çözümü e^{At} matrisi A sabit matrisine karşılık gelen üstel matrisi olmak üzere $x(t) = e^{At}x_0$ dır. Bu sistemin bir denge noktası orijin olduğundan denge noktasındaki kararlılık karakterize edilebilir.

3.2.1 Teorem

A matrisi $n \times n$ tipinde bir matris, $\sigma(A)$ da A matrisinin spektrumu (A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesinden oluşan küme) olmak üzere $x'(t) = Ax(t)$ lineer homogen sistemi için,

- 1) Eğer $Re(\sigma(A)) \leq 0$ ve A nın reel kısmı sıfır olan tüm özdeğerleri basit ise orijin bu denklemin kararlı sabit noktasıdır.
- 2) Eğer $Re(\sigma(A)) < 0$ ise orijin denklemin asimptotik kararlı çözümüdür.
- 3) Eğer A nın reel kısmı pozitif olan bir özdeğeri varsa orijin denklem için kararsızdır.



4. FONKSİYONEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

Cauchy fonksiyoneli olarak bilinen $T(x + y) = T(x) + T(y)$ toplamsal fonksiyonel denkleminin çözümleri bir çok alanda araştırılmıştır. Bu denklemin her çözümü bir toplamsal fonksiyon veya toplamsal dönüşüm olarak adlandırılmaktadır. Hyers-Ulam kararlılığı ilk defa, 1940 yılında Wisconsin Üniversitesi Matematik Kulübünde bir konuşma yapan Dr. S. Ulam'ın fonksiyonel denklemlerin kararlılığı için "Bir fonksiyonel denklemin yaklaşık çözümü varsa, bu çözüme yakın olan denklemin tam çözümü bulunabilir mi?" sorusunu ortaya atması ve bir yıl sonra, 1941 yılında bu soruya Hyers'in aşağıdaki cevabı vermesi ile ortaya çıkmış olmasından dolayı bu kararlılığa Hyers-Ulam kararlılığı denmektedir.

4.1. Fonksiyonel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

4.1.1. Tanım

$T : X \longrightarrow Y$ ye bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\|T(x + y) - T(x) - T(y)\| < \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa bu T operatörüne δ – toplamsal denir [7].

4.1.2. Teorem

E ve E' birer Banach uzayı olmak üzere, $f : E \rightarrow E'$ bir δ – toplamsal dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in E$ için

$$\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

limiti vardır, $\ell(x)$ bir toplamsal dönüşümdür ve $\|f(x) - \ell(x)\| \leq \delta$ eşitsizliği bütün $x \in E$ için sağlanır. Ayrıca $\ell(x)$ bu eşitsizliği sağlayan tek toplamsal dönüşümdür [7].

İspat

Keyfi bir $x \in E$ için δ – toplamsal tanımından

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| < \delta \tag{4.1}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte $y = x$ yazılırsa

$$\|f(2x) - 2f(x)\| < \delta \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) eşitsizliğinde x yerine $\frac{x}{2}$ yazılıp eşitsizlik 2 ile bölünürse

$$\|\frac{1}{2}f(x) - f(\frac{x}{2})\| < \frac{\delta}{2} \quad (4.3)$$

elde edilir. Kabul edilsin ki,

$$\|2^{-n}f(x) - f(2^{-n}x)\| < \delta(1 - 2^{-n}) \quad (4.4)$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi bu eşitsizliğin doğru olduğu gösterilecektir. Eğer tümevarım methodu kullanılırsa,

$n = 1$ için (4.4) eşitsizliği (4.3) eşitsizliğine dönüştüğünden sağlanır.

$n = k$ için (4.4) eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin.

$n = k + 1$ için sağlandığı gösterilecektir. $n = k$ için

$$\|2^{-k}f(x) - f(2^{-k}x)\| < \delta(1 - 2^{-k})$$

doğru olsun. Bu eşitsizlik 2 ile bölünürse

$$\|2^{-k-1}f(x) - 2^{-1}f(2^{-k}x)\| < \delta\left(\frac{1}{2} - 2^{-k-1}\right) \quad (4.5)$$

(4.3) eşitsizliğinde $x = 2^{-k}x$ yazılırsa,

$$\|2^{-1}f(2^{-k}x) - f(2^{-k-1}x)\| < \frac{\delta}{2} \quad (4.6)$$

elde edilir.

Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|2^{-k-1}f(x) - f(2^{-k-1}x)\| &\leq \underbrace{\|2^{-k-1}f(x) - 2^{-1}f(2^{-k}x)\|}_{< \delta \left(\frac{1}{2} - 2^{-k-1}\right)} \\
&\quad + \underbrace{\|2^{-1}f(2^{-k}x) - f(2^{-k-1}x)\|}_{\frac{\delta}{2}} \\
&< \delta(1 - 2^{-k-1})
\end{aligned}$$

yazılabildiğinden (4.4) eşitsizliği $k+1$ için de doğrudur. Her $x \in E$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m < n$ olmak üzere

$$q_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

olarak tanımlansın. Bu tanım kullanılarak $q_m(x) - q_n(x)$ farkı

$$\begin{aligned}
q_m(x) - q_n(x) &= \frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n} \\
&= \frac{2^n f(2^m x) - 2^m f(2^n x)}{2^{m+n}} \\
&= \frac{f(2^{m-n} \cdot 2^n x) - 2^{m-n} f(2^n x)}{2^m}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\|q_m(x) - q_n(x)\| \leq \frac{\delta(1 - 2^{m-n})}{2^m}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\{q_n(x)\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. E ve E' Banach uzay ve Banach uzaylarda her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $q_n(x)$ yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

olacak şekilde bir $\ell(x)$ fonksiyonu vardır. Her $x, y \in E$ için, (4.1) de $x = 2^n x$ ve $y = 2^n y$ alınırsa

$$\|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\| < \delta$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı 2^n ile bölünürse

$$0 \leq \left\| \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\| < \frac{\delta}{2^n}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır, normun sürekliliğinden

$$0 \leq \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^n}$$

elde edilir. Eğer $\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ olduğu kullanılırsa

$$0 \leq \|\ell(x+y) - \ell(x) - \ell(y)\| < 0$$

yazılabilir. Buradan,

$$\ell(x+y) - \ell(x) - \ell(y) = 0$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenerek,

$$\ell(x+y) = \ell(x) + \ell(y)$$

elde edilir ki bu ℓ 'nin toplamsal olduğunu gösterir. (4.4) eşitsizliğinde x yerine $2^n x$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \|2^{-n} f(2^n x) - f(2^{-n} \cdot 2^n x)\| &< \delta (1 - 2^{-n}) \\ \left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\| &< \delta (1 - 2^{-n}) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, her $x \in E$ için $\|\ell(x) - f(x)\| \leq \delta$ olur.

Şimdi kabul edilsin ki; $L(x)$,

$$\|L(x) - f(x)\| \leq \delta$$

eşitsizliğini sağlayan başka bir toplamsal dönüşüm ve bir $y \in E$ için $\ell(y) \neq L(y)$ olsun.

Her $y \in E$ için

$$n > \frac{2\delta}{\|L(y) - \ell(y)\|}$$

olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı seçilsin. Eğer L ve ℓ nin toplamsallığı kullanılıp y yerine x yazılarak

$$L(x+x) = L(2x) = 2L(x), \quad \ell(x+x) = \ell(2x) = 2\ell(x)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek keyfi bir $x \in E$ için

$$L(nx) = nL(x), \quad \ell(nx) = n\ell(x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\|L(y) - \ell(y)\| n > 2\delta$$

ifadesinden

$$\|L(ny) - \ell(ny)\| > 2\delta$$

elde edilir. Diğer yandan; üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\|\ell(ny) - f(ny) + f(ny) - L(ny)\| \leq \underbrace{\|\ell(ny) - f(ny)\|}_{<\delta} + \underbrace{\|f(ny) - L(ny)\|}_{<\delta} < 2\delta$$

yazılabilir. Bu ise;

$$\|L(ny) - \ell(ny)\| > 2\delta$$

olması ile çelişir. O halde $L(x) = \ell(x)$ olmalıdır. Yani $\ell(x)$,

$$\|\ell(x) - f(x)\| \leq \delta$$

eşitsizliğini sağlayan tek toplamsal çözümdür.

4.1.3. Teorem

Teorem 4.1.2 nin hipotezleri altında, $f(x)$ E de ki bir tek noktada sürekli ise $\ell(x)$, E üzerinde süreklidir [7].

İspat

Olmayana ergi yöntemi kullanılsın. Kabul edilsin ki, $f(x)$ E nin tek bir noktasında sürekli olsun. $\ell(x)$ toplamsal dönüşümü sürekli olmasın.

O halde, öyle bir k tamsayısı ve E de sıfıra yakınsayan öyle bir x_n dizisi vardır ki, bütün pozitif n tamsayıları için

$$\|\ell(x_n)\| > \frac{1}{k}$$

dır. m , tamsayısı $m > 3k\delta$ olacak şekilde seçilsin. ℓ toplamsal olduğundan

$$\|\ell(mx_n + y) - \ell(y)\| = \|\ell(mx_n) + \ell(y) - \ell(y)\| = \|\ell(mx_n)\| > 3\delta \quad (4.7)$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \|\ell(mx_n + y) - \ell(y)\| &\leq \underbrace{\|\ell(mx_n + y) - f(mx_n + y)\|}_{<\delta} \\ &\quad + \underbrace{\|f(mx_n + y) - f(y)\|}_{<\delta} + \underbrace{\|f(y) - \ell(y)\|}_{<\delta} \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. $f(x)$ E nin tek bir noktasında sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(mx_n + y) = f(y)$$

yazılabilir ve buradan yeterince büyük n ler için

$$\|f(mx_n + y) - f(y)\| < \delta$$

elde edilir. Burada (4.7) ve (4.8) den çelişki elde edilir. O halde $\ell(x)$ E nin her noktasında süreklidir.

Sonuç

Teorem 4.1.2 nin hipotezleri altında, varsayalım ki E deki her x için $-\infty < t < \infty$ olmak üzere $f(tx)$ fonksiyonu t reel değişkenine göre sürekli olsun. Bu durumda $\ell(x)$ birinci dereceden homogendir [7].

İspat

Verilen sabit bir x için $f(tx)$ E den E' de sürekli bir δ -toplamsal dönüşümdür. Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 den $\ell(tx)$, t de sürekli ve toplamsallıktan $\ell(x)$ birinci dereceden homogendir.

1995 yılında G. L. Forti çok değişkenli lineer fonksiyonel denklemlerde Hyers -Ulam kararlılığı üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalardan

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad (4.9)$$

lineer fonksiyonel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını ele alınacaktır.

4.1.4. Tanım

G bir yarı grup ve B bir Banach uzayı olsun. Eğer verilmiş bir $\delta \geq 0$ ve her $x, y \in G$ için

$$\|f(xy) - f(x) - f(y)\| \leq \delta; \delta \geq 0 \quad (4.10)$$

eşitsizliğini sağlayan her $f : G \rightarrow B$ fonksiyonu için

$$\|f(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon, x \in G$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde (4.9) denkleminin bir φ çözümü varsa (4.9) denklemine Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir. Burada ε, δ ya bağlıdır [5].

Sonraki iki teoremin ispatı için aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyulacaktır.

4.1.5. Tanım

G bir grup, M de $B(G)$ üzerinde lineer bir fonksiyonel olsun. M lineer fonksiyoneli

aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa M ye invariant ortalama denir.

(i) Her $f \in B(G)$ için $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$,

(ii) Reel değerli her $f \in B(G)$ için $\inf \{f(x) : x \in G\} \leq M(f) \leq \sup \{f(x) : x \in G\}$,

(iii) Her $x \in G$ ve $f \in B(G)$ için $M({}_xf) = M(f)$ dir. Burada ${}_xf(t) = f(xt)$ ya da

(iii)' Her $x \in G$ ve $f \in B(G)$ için $M(f_x) = M(f)$ dir. Burada $f_x(t) = f(xt)$ dir.

Eğer M (i)-(ii)-(iii) özelliklerini sağlıyorsa M ye **sol invariant ortalama**, (i)-(ii)-(iii)' özelliklerini sağlıyorsa M ye **sağ invariant ortalama** denir [5].

4.1.6. Teorem

G bir sol yarı grup olsun. Bu durumda (4.9) denklemi G üzerinde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır [5] .

İspat

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ele alınsın. Her $x, y \in G$ ve $\delta \geq 0$ için

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \delta$$

sağlansın. Her sabit x için $y \mapsto f(xy) - f(y)$ fonksiyonu sınırlı olsun. m_y , G üzerinde tanımlı sınırlı kompleks fonksiyonların bir sol invariant ortalaması olsun. φ fonksiyonu

$$\varphi(x) = m_y \{{}_xf - f\}, \quad x \in G \tag{4.11}$$

olarak tanımlansın. Burada ${}_xf(t) = f(xt)$ dir.

$$\begin{aligned} \varphi(xz) &= m_y \{{}_{xz}f - f\} \\ &= m_y \{{}_{xz}f - {}_xf + {}_xf - f\} \\ &= m_y \{{}_{xz}f - {}_xf\} + m_y \{{}_xf - f\} \quad (m \text{ nin lineerliğinden}) \\ &= m_y \{{}_x({}_zf - f)\} + m_y \{{}_xf - f\} \\ &= m_y \{{}_zf - f\} + m_y \{{}_xf - f\} \quad ((iii) \text{ den}) \\ &= \varphi(z) + \varphi(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu ise φ nin (4.9) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir.

Şimdi de, $|\varphi(x) - f(x)|$ farkından

$$\begin{aligned}
 |\varphi(x) - f(x)| &= |m_y \{x f - f\} - f(x)| \\
 &= |m_y \{x f - f - f(x)\}| \\
 &\leq \sup_{y \in G} |f(xy) - f(x) - f(y)|; ((ii) \text{ den}) \\
 &\leq \delta
 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bize tanım gereği (4.9) denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlı olduğunu verir.

2004 yılında D. Yang quadratik fonksiyonel denklemlerde Hyers-Ulam kararlılığı üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalardan

$$f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - 2f(y) = 0 \quad (4.12)$$

lineer fonksiyonel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı ele alınacaktır.

4.1.7. Tanım

G bir grup ve B bir Banach uzayı olsun. Eğer her $f : G \rightarrow B$ fonksiyonu her $x, y \in G$ için,

$$\|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta, \quad \delta \geq 0 \quad (4.13)$$

sağlansın. Bu durumda bir $q : G \rightarrow B$ quadratik fonksiyon ve δ ya bağlı $\delta_1 \geq 0$ için

$$\|f(x) - q(x)\| \leq \delta_1$$

eşitsizliği sağlanıyor ise (4.12) denkleminde quadratik kararlı denir [19].

4.1.8. Teorem

Eğer G bir grup ise $(G, \mathbb{C})$ quadratik kararlıdır [19].

İspat

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu her $x, y \in G$ için (4.13) eşitsizliğini sağlasın. Eğer e, G grubunun

birim elemanı olmak üzere, (4.13) eşitsizliğinde $x = y = e$ alınırsa

$$|2f(e)| \leq \delta \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.13) eşitsizliğinde y serbest bırakılıp $x = e$ alınırsa

$$|f(y) + f(y^{-1}) - 2f(e) - 2f(y)| \leq \delta \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) eşitsizliklerinden

$$|f(y^{-1}) - f(y)| \leq 2\delta \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.13) eşitsizliğinde x ile y nin yerleri değiştirilirse

$$|f(yx) + f(yx^{-1}) - 2f(y) - 2f(x)| \leq \delta \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.13) ve (4.17) den

$$|f(xy) - f(yx) + f(xy^{-1}) - f(yx^{-1})| \leq 2\delta \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.16) ve (4.18) den

$$|f(xy) - f(yx)| \leq 4\delta \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.13) ile (4.19) kullanılarak

$$\begin{aligned} |f(yx) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - 2f(y)| &\leq |f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - 2f(y)| \\ &\quad + |f(yx) - f(xy)| \\ &\leq \delta + 4\delta \\ &= 5\delta \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Böylece her sabit $y \in G$ için $x \mapsto f(yx) + f(xy^{-1}) - 2f(x)$ fonksiyonu sınırlıdır. Şimdi M_x , $B(G)$ üzerinde bir invariant ortalama olsun ve ϕ fonksiyonunu

$$\phi(y) := M_x \{_y f + f_{y^{-1}} - 2f\}, \quad y \in G$$

olarak tanımlansın. (4.13) ile (4.19) tekrar ele alınırsa,

$$\begin{aligned}
 |f(yx) + f(y^{-1}x) - 2f(x) - 2f(y)| &\leq |f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) - 2f(y)| \\
 &\quad + |f(yx) - f(xy)| + |f(y^{-1}x) - f(xy^{-1})| \\
 &\leq \delta + 4\delta + 4\delta \\
 &= 9\delta
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her sabit y için

$$x \longmapsto f(yx) + f(y^{-1}x) - 2f(x)$$

fonksiyonu $B(G)$ nin bir elemanıdır ayrıca (4.13) den

$$x \longmapsto f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)$$

fonksiyonu da $B(G)$ nin bir elemanıdır. Sonuç olarak, herhangi bir $z \in G$ için, (iii) den

$$\begin{aligned}
 M_x \{f_{yz}f + f_{yz^{-1}}f - 2f_yf\} &= M_x \{f_y(zf + f_{z^{-1}}f - 2f)\} \\
 &= M_x \{zf + f_{z^{-1}}f - 2f\}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 M_x \{f_{z^{-1}y^{-1}} + f_{zy^{-1}} - 2f_{y^{-1}}\} &= M_x \{(f_{z^{-1}} + f_z - 2f)_{y^{-1}}\} \\
 &= M_x \{f_{z^{-1}} + f_z - 2f\}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğer bu iki eşitlik $\phi(yz) + \phi(yz^{-1})$ ifadesinde kullanılırsa (iii)' ve (iii) den aşağıdaki kullanışlı eşitlik kolayca elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
 \phi(yz) + \phi(yz^{-1}) &= M_x \{f_{yz}f + f_{z^{-1}y^{-1}} - 2f\} + M_x \{f_{yz^{-1}}f + f_{zy^{-1}} - 2f\} \\
 &= M_x \{f_{yz}f + f_{z^{-1}y^{-1}} - 2f\} + M_x \{f_{yz^{-1}}f + f_{zy^{-1}} - 2f\} \\
 &\quad + M_x \{2_yf - 2_yf + 2f_{y^{-1}} - 2f_{y^{-1}}\} \\
 &= M_x \{f_{yz}f + f_{yz^{-1}}f - 2_yf\} + M_x \{f_{z^{-1}y^{-1}} + f_{zy^{-1}} - 2f_{y^{-1}}\} \\
 &\quad + M_x \{2_yf + 2f_{y^{-1}} - 4f\} \\
 &= M_x \{f_y(zf + f_{z^{-1}}f - 2f)\} + M_x \{(f_{z^{-1}} + f_z - 2f)_{y^{-1}}\} \\
 &\quad + M_x \{2_yf + 2f_{y^{-1}} - 4f\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_x \{ {}_zf + {}_{z^{-1}}f - 2f \} + M_x \{ f_{z^{-1}} + f_z - 2f \} \\
&+ M_x \{ 2{}_yf + 2f_{y^{-1}} - 4f \} \\
&= M_x \{ {}_zf + f_{z^{-1}} - 2f \} + M_x \{ {}_{z^{-1}}f + {}_zf - 2f \} \\
&+ 2M_x \{ {}_yf + f_{y^{-1}} - 2f \} \\
&= \phi(z) + \phi(z^{-1}) + 2\phi(y)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

ϕ^e , ϕ nin çift kısmını temsil etmek üzere $\phi^e(yz) + \phi^e(yz^{-1}) = 2\phi^e(y) + 2\phi^e(z)$ olarak yazılabilir. Böylece ϕ^e , (4.13) eşitsizliğini sağlar. $q : G \rightarrow \mathbb{C}$ üzerinde her $y \in G$ için bir $q(y) = \phi^e(y)/2$ fonksiyonunu tanımlansın.

$$\begin{aligned}
|q(y) - f(y)| &= \left| \frac{1}{2} \phi^e(y) - f(y) \right| \\
&= \frac{1}{4} |\phi(y) + \phi(y^{-1}) - 4f(y)| \\
&= \frac{1}{4} |M_x \{ ({}_yf + f_{y^{-1}} - 2f) + ({}_{y^{-1}}f + f_y - 2f) - 4f(y) \}| \\
&\leq \frac{1}{4} \sup \{ |(f(yz) + f(zy^{-1}) - 2f(z)) + (f(y^{-1}z) + f(z)y - 2f(z)) \\
&\quad - 4f(y) + (f(y^{-1}z) + f(z)y - 2f(z)) - 4f(y)| \} \\
&\leq \frac{1}{4} \sup \{ |f(yz) + f(y^{-1}z) - 2f(z) - 2f(y)| \\
&\quad + |f(zy) + f(zy^{-1}) - 2f(z) - 2f(y)| \} \\
&\leq \frac{1}{4} (9\delta + \delta) = \frac{5\delta}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\delta_1 = \frac{5\delta}{2}$ olarak alırsak ispat tamamlanmış olur.

4.2. Normlu Lineer Uzaylarda Ulam Probleminin Çözümü

1986 yılında Yunanistan Amerikan Kolejinde çalışan John M. Rassias lineer uzaylarda Hyers-Ulam kararlılığı üzerine çalışmalar yapmış ve bu çalışmalar aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

Bir sonraki teoremin ispatını yapabilmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyulacaktır. X , $\|\cdot\|_1$ ile tanımlanan normlu bir uzay; Y , $\|\cdot\|_2$ ile tanımlanan bir Banach uzayı olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

4.2.1. Lemma

X uzayında herhangi bir n tamsayısı ve $c_2 \geq 0$ için

$$\|f(2^n x)/2^n - f(x)\|_2 \leq c_2 \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b} \quad (4.21)$$

eşitsizliği vardır [16].

İspat

Tümevarım methodunu uygulansın. Kabul edilsin ki $n = 1$ için doğru olsun. Yani

$$\|f(2x)/2 - f(x)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^{a+b} / 2 \quad (4.22)$$

doğru olsun. $n = k$ için doğru olduğunu kabul edilsin. Bu durumda

$$\|f(2^k z)/2^k - f(z)\|_2 \leq c_2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i(a+b-1)-1} \|z\|_1^{a+b}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte z yerine $2x$ alınıp eşitsizlik 2 ile bölünürse

$$\|f(2^{k+1}x)/2^{k+1} - f(2x)/2\|_2 \leq c_2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{(i+1)(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b}$$

elde edilir. $i = i + 1$ alınırsa,

$$\|f(2^{k+1}x)/2^{k+1} - f(2x)/2\|_2 \leq c_2 \sum_{i=1}^k 2^{i(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b} \quad (4.23)$$

elde edilir. Şimdi, $n = k + 1$ için de eşitsizliğin doğru olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} \|f(2^{k+1}x)/2^{k+1} - f(x)\|_2 &\leq \|f(2^{k+1}x)/2^{k+1} - f(2x)/2\|_2 + \|f(2x)/2 - f(x)\|_2 \\ &\leq c_2 \sum_{i=1}^k 2^{i(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b} + c_2 \|x\|_1^{a+b} 2^{-1} \\ &= c_2 \sum_{i=0}^k 2^{i(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b} \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\|f(2^{k+1}x)/2^{k+1} - f(x)\|_2 \leq c_2 \sum_{i=0}^k 2^{i(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b} \quad (4.24)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^{i(a+b-1)} < \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(a+b-1)} = \frac{1}{1 - 2^{a+b-1}} = c_0 \quad (4.25)$$

sağlanır. Burada $c = c_0 c_2 / 2$ dir. Eğer (4.22) ve (4.23) kullanılırsa (4.21) elde edilir ki bu da lemmanın ispatını tamamlar.

Bu durumda Lemma 4.2.1, (4.25) ve $c = c_0 c_2 / 2$ den, herhangi bir $x \in X$ için

$$\|f(2^n x)/2^n - f(x)\|_2 \leq c \|x\|_1^{a+b} \quad (4.26)$$

elde edilir.

4.2.2. Lemma

$\{f(2^n x)/2^n\}$ dizisi yakınsaktır [16].

İspat

$\{f(2^n x)/2^n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebilmek için önce (4.26) yı ve Y nin tamlığı kullanılsın. Gerçekten, $i > j > 0$ olmak üzere

$$\|f(2^i x)/2^i - f(2^j x)/2^j\|_2 = 2^{-j} \|f(2^i x)/2^{i-j} - f(2^j x)\|_2 \quad (4.27)$$

olarak yazılabilir. Eğer $2^j x = h$ alıp (4.26) da kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f(2^i x)/2^i - f(2^j x)/2^j\|_2 &= 2^{-j} \|f(2^i x)/2^{i-j} - f(h)\|_2 \\ &< 2^{j(a+b-1)} c \|x\|_1^{a+b} \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $0 \leq a + b < 1$ olduğundan

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f(2^i x)/2^i - f(2^j x)/2^j\|_2 = 0 \quad (4.28)$$

elde edilir. Buradan (4.28) ve Y nin tamlığını kullanılırsa $\{f(2^n x)/2^n\}$ dizisi yakınsak olur. Dolayısıyla lemmanın ispatı da tamamlanmış olur.

Şimdi

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} \quad (4.29)$$

olarak tanımlansın. (4.35) da x yerine $2^n x$ ve y yerine $2^n y$ alınır

$$\|f(2^n x + 2^n y) - [f(2^n x) + f(2^n y)]\|_2 \leq c_2 \|2^n x\|_1^a \|2^n y\|_1^b$$

elde edilir. Bu eşitsizliği 2^n ile bölünürse

$$2^{-n} \|f(2^n x + 2^n y) - [f(2^n x) + f(2^n y)]\|_2 \leq c_2 2^{(a+b-1)n} \|x\|_1^a \|y\|_1^b$$

ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınır, her $x, y \in X$ için

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} [f(2^n(x+y))/2^n] - \lim_{n \rightarrow \infty} [f(2^n x)/2^n] - \lim_{n \rightarrow \infty} [f(2^n y)/2^n] \right\|_2 = 0$$

ve L nin tanımı gereği

$$\|L(x+y) - L(x) - L(y)\|_2 = 0$$

bulunur. Buradan, her $x, y \in X$ için

$$L(x+y) = L(x) + L(y) \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.30) dan herhangi bir $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$L(qx) = qL(x)$$

yazılabilir.

4.2.3. Lemma

Y^+ sürekli lineer fonksiyonların uzayı ve T dönüşümünde $T : t \rightarrow g(L(t.x))$ ile veya $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(t) = g(L(t.x))$ olacak şekilde olsun. Burada $g \in Y^+$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$ ve x sabittir. Bu durumda T süreklidir [16].

İspat

$T_n(t)$ dizisi

$$T_n(t) = g\left(\frac{f(2^n x t)}{2^n}\right)$$

olsun öyle ki $g \in Y^+$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$ ve x sabit olmak üzere $T(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)$ sağlansın. $T_n(t)$ sürekli olduğundan T , T_n sürekli dönüşümünün noktasal limiti ile ölçülebilir. Dahası T , “+” işlemine göre bir homomorfizmadır. Yani, her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad (4.31)$$

yazılabilir. (4.31) den ve T nin ölçülebilir olması T nin sürekli bir dönüşüm olduğunu verir. O halde ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.3 ve Y^+ nın Y nin noktalarını ayırması L nin doğrusallığını verir. Ancak, (4.26) da her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitini alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(2^n x)/2^n - f(x)\|_2 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} c \|x\|_1^{a+b} \\ \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} f(2^n x)/2^n - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \right\|_2 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} c \|x\|_1^{a+b} \\ \|L(x) - f(x)\|_2 &\leq c \|x\|_1^{a+b} \end{aligned}$$

(4.36) yi elde edilir. Bu nedenle $L : X \rightarrow Y$ doğrusal bir eşlemenin varlığını kanıtlamış olunur.

Teklik: $M : X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Öyle ki, herhangi bir $x \in X$ ve $c^* \geq 0$ için

$$\|f(x) - M(x)\|_2 \leq c^* \|x\|_1^{a^*+b^*} \quad (4.32)$$

sağlansın. Burada a^*, b^* ve c^* sabit ve $0 \leq a^* + b^* \leq 1$ dir. Eğer

$$\|f(x) - L(x)\|_2 \leq c^* \|x\|_1^{a^*+b^*}$$

yi sağlayan doğrusal bir dönüşüm varsa herhangi bir $x \in X$ için

$$L(x) = M(x) \tag{4.33}$$

dir.

(4.33) ü ispatlamak için aşağıdaki Lemmanın ispatlanması gereklidir.

4.2.4. Lemma

Eğer

$$\|f(2x) - L(x)\|_2 \leq c \|x\|_1^{a+b} \tag{4.34}$$

ve (4.32) eşitsizlikleri sağlanıyor ise $x \in X$ için,

$$\|L(x) - M(x)\|_2 \leq m^{a+b-1} c \|x\|_1^{a+b} + m^{a^*+b^*-1} c^* \|x\|_1^{a^*+b^*}$$

dir [16].

İspat

Hipotezde verilen eşitsizliklerle birlikte, L ve M nin lineerliği ve $L(x) = \frac{L(mx)}{m}$, $M(x) = \frac{M(mx)}{m}$ olduğu üçgen eşitsizliği ile beraber kullanılırsa,

$$\|L(mx) - M(mx)\|_2 \leq \|L(mx) - f(mx)\|_2 + \|M(mx) - f(mx)\|_2$$

$$\|mL(x) - mM(x)\|_2 \leq c \|mx\|_1^{a+b} + c^* \|x\|_1^{a^*+b^*}$$

$$m \|L(x) - M(x)\|_2 \leq cm^{a+b} \|x\|_1 + c^* m^{a^*+b^*} \|x\|_1$$

$$\|L(x) - M(x)\|_2 \leq cm^{a+b-1} \|x\|_1 + c^* m^{a^*+b^*-1} \|x\|_1$$

elde edilir.

Son eşitsizlikte $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $0 \leq a + b < 1$ olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} \|L(x) - M(x)\| = 0$ olur. Bu ise $L(x) = M(x)$ olduğunu gösterir.

4.2.5. Teorem

X , $\|\cdot\|_1$ ile tanımlanan normlu bir uzay; Y , $\|\cdot\|_2$ ile tanımlanan bir Banach uzayı olsun. Buna ek olarak $f : X \rightarrow Y$ olmak üzere $f(tx)$ dönüşümü her sabit x için t ye göre sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\|f(x+y) - [f(x) + f(y)]\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^a \|y\|_1^b \quad (4.35)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $0 \leq a + b < 1$ ve $c_2 \geq 0$ varsa her $x \in X$ için

$$\|f(x) - L(x)\|_2 \leq c. \|x\|_1^{a+b} \quad (4.36)$$

olacak şekilde tek bir $L : X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm vardır. Burada $c = c_2/(2 - 2^{a+b})$ dir. Bu teoride özel olarak $a = b = 0$ alınır ve (4.36) da yerine yazılırsa her $x \in X$ için

$$\|f(x) - L(x)\|_2 \leq c_2$$

bulunur. Bu ise Hyers in elde ettiği sonuçtur [16].

İspat

Eğer (4.35) eşitsizliğinde $y = x$ alınırsa

$$\|f(2x) - 2f(x)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^{a+b}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik 2 ile bölünürse,

$$\|f(2x)/2 - f(x)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^{a+b} / 2 \quad (4.37)$$

elde edilir . Lemma 4.2.1 de (4.21) eşitsizliği ispatlanmış olup (4.26) eşitsizliğinde $n = 1$ alınarak (4.37) elde edilir. Lemma 4.2.3 de (4.36) eşitsizliği ve Lemma 4.2.4 de L lineer dönüşümünün tek olduğu ispatlanmıştır.

5. BİRİNCİ BASAMAKTAN AYRILABİLEN TİPTEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

Bu bölüme kadar bazı fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir. Diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı, ilk olarak 1993 yılında M. Obloza tarafından incelenmiştir. Obloza'nın yapmış olduğu çalışmalar 1998 yılında Alsina ve Ger tarafından $y' = y$ lineer diferensiyel denklemleri için geliştirilmiştir.

5.1. $y' = y$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

Bu kesimde verilecek teoremin ön hazırlığı yapılacaktır.

5.1.1. Lemma

Her gerçel x ve y sayıları için $x \neq y$ olmak üzere,

$$e^{(x+y)/2} \leq \frac{e^x - e^y}{y - x} \leq \frac{e^x + e^y}{2} \quad (5.1)$$

eşitsizliği sağlanır [2].

5.1.2. Lemma

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon ve her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (5.2)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul f nin

$$f(x) = i(x)e^x$$

formunda olmasıdır. Burada $i : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı azalmayan bir fonksiyondur [2].

İspat

f fonksiyonu (5.2) eşitsizliğini sağlasın. Herhangi bir $x \in I$ ve $h > 0$ olmak üzere

$x + h \in I$ için türev tanımından

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ve f fonksiyonu azalmayan olduğundan, $f'(x) \geq f(x)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} hf'(x) &\approx f(x+h) - f(x) \\ f(x+h) &= f(x) + h.f'(x) \\ &\geq f(x) + h.f(x) \\ &\geq (1+h)f(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ardışık indüksiyon ile, $x + ih \in I$ ve $i \in \mathbb{N}$ için

$$f(x + ih) \geq (1 + h)^i f(x)$$

elde edilir. Böylece, keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ ve her $x < y$ için

$$f(y) = f\left(x + n \frac{y-x}{n}\right) \geq \left(1 + \frac{y-x}{n}\right)^n f(x)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $f(y) \geq e^{y-x} f(x)$ olur. Yani başka bir ifade ile $i : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $i(x) = f(x)e^{-x}$ azalmayan fonksiyonu tanımlansın.

Tersine, $f(x) = i(x)e^x$ olarak alınırsa, $x < y$ için

$$i(x) \leq i\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq i(y)$$

yazılabilir. Buradan,

$$i(y)e^{y-x} - i\left(\frac{x+y}{2}\right)e^{y-x} \geq 0 \geq i(x) - i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

yani

$$i(y)e^{y-x} - i(x) \geq i\left(\frac{x+y}{2}\right)(e^{y-x} - 1)$$

elde edilir.

Her iki taraf $\frac{e^x}{y-x}$ ile çarpılırsa ve (5.1) eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{i(y)e^y - i(x)e^x}{y-x} \geq i \left(\frac{x+y}{2} \right) \frac{e^y - e^x}{y-x} \geq i \left(\frac{x+y}{2} \right) e^{\frac{x+y}{2}}$$

elde edilir. Burada f fonksiyonunun tanımını kullanarak eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \geq i \left(\frac{x+y}{2} \right) e^{\frac{x+y}{2}} = f \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

olur ki bu da (5.2) eşitsizliğinin sağlanması demektir. Yani, f negatif olmayandır.

5.1.3. Teorem

Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Öyle ki $f(x) \geq \varepsilon$ ve her $x, y \in I$ için $x < y$ olmak üzere

$$f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} + \varepsilon \quad (5.3)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul f nin

$$f(x) = \varepsilon + i(x)e^x$$

formunda olmasıdır. Burada $i : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ ya tanımlı azalmayan bir fonksiyondur [2] .

İspat

Lemma 5.1.2 yi $f - \varepsilon$ için uygulanırsa,

$$f \left(\frac{x+y}{2} \right) - \varepsilon \leq \frac{(f(y) - \varepsilon) - (f(x) - \varepsilon)}{y-x}$$

ve

$$f(y) - \varepsilon = f \left(x + n \frac{y-x}{n} \right) - \varepsilon \geq \left(1 + \frac{y-x}{n} \right)^n (f(x) - \varepsilon)$$

elde edilir.

Eğer $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$f(y) - \varepsilon \geq e^{y-x} (f(x) - \varepsilon)$$

olur. Yani başka bir ifade ile $i : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$i(x) = (f(x) - \varepsilon)e^{-x}$$

olarak tanımlanmış fonksiyon azalmayandır. Tersine, $f(x) = \varepsilon + i(x)e^x$ olarak alınırsa, $x < y$ için

$$i(x) \leq i\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq i(y)$$

yazılabilir. Buradan,

$$i(y)e^{y-x} - i\left(\frac{x+y}{2}\right)e^{y-x} \geq 0 \geq i(x) - i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

yani

$$i(y)e^{y-x} - i(x) \geq i\left(\frac{x+y}{2}\right)(e^{y-x} - 1)$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{e^x}{y-x}$ ile çarpılır ve (5.1) eşitsizliğini kullanılırsa

$$\frac{i(y)e^y - i(x)e^x}{y-x} \geq i\left(\frac{x+y}{2}\right) \frac{e^y - e^x}{y-x} \geq i\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{(f(y) - \varepsilon) - (f(x) - \varepsilon)}{y-x} \geq i\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{\frac{x+y}{2}} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varepsilon$$

ve

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} + \varepsilon \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

olur ki buradan (5.3) sağlanır. Yani, f negatif olmayandır.

5.1.4. Lemma

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ azalmayan bir fonksiyon ve her $x, y \in I$ için $x < y$ olmak üzere

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (5.4)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $d : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlı artmayan bir fonksiyondur ve f

$$f(x) = d(x)e^x$$

formunda olmalıdır [2] .

İspat

f , (5.4) ün azalmayan bir çözümü olsun. Her $x \in I$, $h \in (0, 1)$ ve $x + h \in I$ için

$$0 \leq f(x + h) - f(x) \leq hf\left(x + \frac{h}{2}\right) \leq hf(x + h)$$

eşitsizliğinden

$$f(x + h) \leq \frac{f(x)}{1 - h}$$

elde edilir. Eğer I da $x < y$ için yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $(y - x)/n \in (0, 1)$ alınırsa

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f\left(x + n\frac{y - x}{n}\right) \leq f(x) \left(1 - \frac{y - x}{n}\right)^{-n}$$

elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$f(y) \leq e^{y-x} f(x)$$

olur. Yani başka bir ifade ile $d : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(x) = f(x)e^{-x}$$

olarak tanımlanmış fonksiyon artmayandır.

5.1.5. Lemma

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ azalmayan bir Jensen içbükey fonksiyonunun (5.4) eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul öyle bir d artmayan fonksiyonu vardır ki $x \in I$, $x \rightarrow d(x)e^x$ içbükey ve f nin $f(x) = d(x)e^x$ formunda olmasıdır [2] .

İspat

Gereklik bir önceki lemmadan açıktır. Yeterlilik için ; $x \in I$, $f(x) = d(x)e^x$ Jensen içbükey fonksiyonu azalmayıdır. Eğer $x < y$ ise

$$d(x) = f(x)e^{-x} \geq f(y)e^{-y} = d(y)$$

yani

$$f(x) \geq f(y)e^{x-y}$$

yazılabilir. Bu nedenle tüm fonksiyonlar pozitifdir. (5.1) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &\leq \frac{f(y) - f(y)e^{x-y}}{y - x} \\ &= \frac{f(y)}{e^y} \cdot \frac{e^y - e^x}{y - x} \\ &\leq \frac{f(y)}{e^y} \cdot \frac{e^x + e^y}{2} \\ &= \frac{f(y)e^{x-y} + f(y)}{2} \\ &\leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \\ &\leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ elde edilir ki bu da (5.4) eşitsizliğini verir.

Not

Monotonik bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Jensen içbükey fonksiyonu normal anlamda içbükey olması gerektiğine dikkat edilmelidir.

Yani her $x, y \in I$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

dir.

5.1.6. Teorem

Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $f(x) \geq -\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan bir Jensen içbükey fonksiyonunun

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \varepsilon \leq f\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (5.5)$$

eşitsizliğinin çözümü olması için gerek ve yeter koşul öyle bir d artmayan fonksiyon vardır ki $x \in I$, $x \rightarrow d(x)e^x$ Jensen içbükey ve f nin

$$f(x) = d(x)e^x - \varepsilon$$

formunda olmasıdır [2].

İspat

Lemma 5.1.2 nin ispatında f yerine $f + \varepsilon$ alınır benzer işlemler tekrar edilirse ispat tamamlanır.

5.1.7. Tanım

Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$|f'(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği her $x \in A$ için sağlansın. Eğer bir $k > 0$ sayısı için

$$|f(x) - y(x)| \leq k.\varepsilon$$

özellikliğini sağlayacak şekilde $y' = y$ denkleminin bir $y(x)$ çözümü bulunabiliyor ise $y' = y$ denkleminde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir.

5.1.8. Teorem

$g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(i) Her $x \in I$ için $g(x) \leq g'(x) \iff i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ azalmayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $g(x) = i(x)e^x$ olarak yazılabilir.

(ii) Her $x \in I$ için $g'(x) \leq g(x) \iff d : I \longrightarrow \mathbb{R}$ artmayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $g(x) = d(x)e^x$ olarak yazılabilir [2] .

İspat

(i) ($\implies$): Her $x \in I$ için $g(x) \leq g'(x)$ olsun. $i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonu $i(x) = g(x)e^{-x}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $i'(x)$ vardır.

$$i'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = (g'(x) - g(x))e^{-x} \geq 0$$

olur ki bunun anlamı i azalmayan bir fonksiyondur. Buradan

$$g(x) = i(x)e^x$$

formunda olduğu görülür.

($\impliedby$) :

$$i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

azalmayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $g(x) = i(x)e^x$ olsun. i azalmayan olduğundan her $x \in I$ için $i'(x) \geq 0$ dır. $g(x) = i(x)e^x$ ve

$$g'(x) = i'(x)e^x + i(x)e^x$$

olduğundan $g(x) \leq g'(x)$ elde edilir.

(ii)($\implies$) : Her $x \in I$ için $g'(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda $d : I \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir $d(x) = g(x)e^{-x}$ fonksiyonu tanımlansın. Böylece $d'(x)$ vardır. Ayrıca

$$d'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = (g'(x) - g(x))e^{-x} \leq 0$$

olur ki bunun anlamı d artmayan bir fonksiyondur. Buradan

$$g(x) = d(x)e^x$$

formunda olduğu görülür.

($\Leftarrow$) :

$d : I \rightarrow \mathbb{R}$ artmayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $g(x) = d(x)e^x$ olsun. d artmayan olduğundan her $x \in I$ için $d'(x) \leq 0$ dır. $g(x) = d(x)e^x$ ve

$$g'(x) = d'(x)e^x + d(x)e^x$$

olduğundan $g'(x) \leq g(x)$ elde edilir.

5.1.9. Teorem

Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\ell, J = \{e^{-x} : x \in I\}$ kümesi üzerinde tanımlı, artmayan ve 2ε - Lipschitzyan özellikli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \varepsilon + e^x \ell(e^{-x})$$

olarak yazılabilmektedir [2] .

İspat

Her $x \in I$ için $|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ sağlansın. Buradan $-\varepsilon \leq f'(x) - f(x) \leq \varepsilon$ olduğu dolayısıyla

$$f(x) - \varepsilon \leq f'(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

olduğu elde edilir. Eğer $g(x) = f(x) - \varepsilon$ alınırsa $g(x) \leq g'(x)$ elde edilir. Böylece

Teorem 5.1.8 (i) den öyle bir i türevlenebilir ve azalmayan fonksiyonu vardır ki

$$g(x) = f(x) - \varepsilon = i(x)e^x, x \in I$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $h(x) = f(x) + \varepsilon$ dersek $h'(x) \leq h(x)$ elde edilir. Böylece Teorem 5.1.8 (ii) den öyle bir d türevlenebilir ve artmayan fonksiyonu vardır ki

$$h(x) = f(x) + \varepsilon = d(x)e^x, x \in I$$

şeklinde yazılabilir. $f(x) - \varepsilon = i(x)e^x$ olduğundan $f(x) = \varepsilon + i(x)e^x$ yazılabilir. Ayrıca $f(x) + \varepsilon = d(x)e^x$ olduğundan $f(x) = d(x)e^x - \varepsilon$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$\varepsilon + i(x)e^x = d(x)e^x - \varepsilon$$

olur. Bu eşitliğin türevi alınır,

$$\begin{aligned} i'(x)e^x + i(x)e^x &= d'(x)e^x + d(x)e^x \\ &= d'(x)e^x + i(x)e^x + 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$d'(x) = \frac{i'(x)e^x - 2\varepsilon}{e^x} = i'(x) - 2\varepsilon e^{-x}$$

elde edilir.

d türevlenebilir ve artmayan olduğundan her $x \in I$ için $d'(x) \leq 0$ sağlanır. Eğer $d'(x) = i'(x) - 2\varepsilon e^{-x} \leq 0$ olduğu kullanılırsa $i'(x) \leq 2\varepsilon e^{-x}$ elde edilir. $i(x)$ azalmayan olduğundan $i'(x) \geq 0$ dır.

Böylece $0 \leq i'(x) \leq 2\varepsilon e^{-x}$ elde edilir. Şimdi de $J = \{e^{-x} : x \in I\}$ ve $\ell : J \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\ell(z) = i(-\ln z)$ olarak tanımlansın. O zaman

$$\ell'(z) = [i(-\ln z)]' = -i'(-\ln z) \cdot \frac{1}{z} \leq 0 \quad (z \in J)$$

olur.

Dolayısıyla ℓ artmayandır. z_1 ve $z_2 \in J$ ve $z_1 \neq z_2$ olsun. Ortalama değer teoreminden

bir $z_3 \in (\min(z_1, z_2), \max(z_1, z_2))$ vardır ki

$$\begin{aligned}
 |\ell(z_1) - \ell(z_2)| &= |\ell'(z_3)| |z_1 - z_2| \\
 &= \left| \frac{-i'(-\ln z_3)}{z_3} \right| |z_1 - z_2| \\
 &= i'(-\ln z_3) e^{-\ln z_3} |z_1 - z_2| \\
 &\leq 2\varepsilon |z_1 - z_2|
 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ℓ , 2ε -Lipschitzyandır.

$f(x) = \varepsilon + i(x)e^x$, $\ell(z) = i(-\ln z)$ olduğu ve $z \in J$ olduğundan $z = e^{-x}$ modelinde olması gerektiği kullanılarak $-\ln z = x$ buradan da $\ell(z) = i(x)$ elde edilir. Böylece,

$$f(x) = \varepsilon + \ell(e^{-x}).e^x$$

elde edilir.

$$a := \inf J = [0, \infty)$$

$$\text{ve } c := \lim_{t \rightarrow a^+} \ell(t)$$

olsun.

Her $x \in I$ için,

$$\begin{aligned}
 |f(x) - ce^x| &= |\varepsilon + \ell(e^{-x})e^x - ce^x| \\
 &\leq \varepsilon + e^x |\ell(e^{-x}) - c| \\
 &= \varepsilon + e^x \left| \ell(e^{-x}) - \lim_{t \rightarrow a^+} \ell(t) \right| \\
 &= \varepsilon + e^x |\ell(e^{-x}) - \ell(a)| \\
 &\leq \varepsilon + e^x \cdot 2\varepsilon |e^{-x} - a| \\
 &= \varepsilon + 2\varepsilon |1 - ae^x| \\
 &\leq 3\varepsilon
 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $g(x) = ce^x$ alınırsa $g'(x) = g(x)$ sağlanır. O halde verilen $\varepsilon > 0$ için f de $|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise bir $g(x) = ce^x$ fonksiyonu vardır ki $g'(x) = g(x)$ sağlanır ve $|g(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ olur.

Sonuç olarak $y' = y$ diferensiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlıdır.

Burada I belli iken J bellidir ve dolayısıyla a ve c sonlu tek değerlerdir. Bu da $g(x) = ce^x$ fonksiyonunun tek olarak belirlendiğini verir.

5.2. $y' = \lambda y$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

2002 yılında Takeshi Miura, Sin-Ei Takahasi ve Shizuo Miyajima Alsina ve Ger'in sonucunu genelleştirerek $y' = \lambda y$ denkleminin Banach Uzayında Hyers-Ulam kararlılığını incelemişlerdir.

$X \neq \{0\}$ bir kompleks Banach uzayı, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon \geq 0$ verilmiş olsun. I da $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olsun.

5.2.1. Tanım

Eğer her $\|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan φ türevlenebilir fonksiyonu için

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \leq k\varepsilon, k > 0$$

olacak şekilde $y' = \lambda y$ denkleminin bir $x_\varphi \in X$ çözümü varsa $y' = \lambda y$ diferensiyel denkleminin I üzerinde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir [17] .

$y' = \lambda y$ diferensiyel denkleminin genel çözümünün $e^{\lambda t}x$, $x \in X$ formundadır. Eğer

$$m(I, \lambda) = \inf \{e^{-Re\lambda t} : t \in I\}, \quad M(I, \lambda) = \sup \{e^{-Re\lambda t} : t \in I\}$$

olarak tanımlanırsa $0 \leq m(I, \lambda) < \infty$ ve $0 < M(I, \lambda) \leq \infty$ olduğu açıktır.

5.2.2. Teorem

$\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon \geq 0$ verilmiş olsun. I da $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı ve $\varphi : I \rightarrow X$

$$\|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)\| \leq \varepsilon$$

özellğinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıda verilen durumlar doğrudur:

(i) $Re\lambda \neq 0$ ise,

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \leq \frac{1}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)}\right) \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x_\varphi \in X$ vardır. Özel olarak, $m(I, \lambda) = 0$ ise x_φ elemanı

$$\sup_{t \in I} \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| < \infty$$

olacak şekilde tektir.

(ii) $Re\lambda = 0$ ve I nın çapı $\delta(I) < \infty$ ise

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| < \varepsilon\delta(I)$$

olacak şekilde $x_\varphi \in X$ vardır.

(iii) $Re\lambda = 0$ ve $\delta(I) = \infty$ ise $y' = \lambda y$ diferensiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlı değildir [17] .

İspat

X^* ile X in dual uzayı gösterilsin. $X^* = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ sürekli}\} = C(X, \mathbb{C})$ olsun. Herhangi bir $f \in X^*$ için $\varphi_f : I \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $(\varphi_f)(t) := f(\varphi(t))$, $t \in I$ olarak tanımlansın ve $(\varphi_f)'(t) = f(\varphi'(t))$ olacak şekilde bir f elemanı alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |(\varphi_f)'(t) - \lambda(\varphi_f)(t)| &= |f(\varphi'(t) - \lambda\varphi(t))| \\ &= |f(\varphi'(t) - f(\lambda\varphi(t)))| \\ &\leq \|f\| |\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)| \\ &\leq \varepsilon \|f\| \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $h(t) := e^{-\lambda t}(\varphi_f)(t)$ olacak şekilde bir h fonksiyonu tanımlanırsa

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\lambda e^{-\lambda t}(\varphi_f)(t) + e^{-\lambda t}(\varphi_f)'(t) \\ &= e^{-\lambda t} \{(\varphi_f)'(t) - \lambda(\varphi_f)(t)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$|h'(t)| \leq \varepsilon \|f\| |e^{-\lambda t}|$$

eşitsizliği sağlanır. Hesabın temel teoreminden

$$\int_s^t h'(\tau) d\tau = h(t) - h(s)$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |h(s) - h(t)| &= \left| \int_s^t h'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t |h'(\tau)| d\tau \\ &\leq \varepsilon \|f\| \int_s^t |e^{-\lambda \tau}| d\tau \\ &\leq \varepsilon \|f\| \int_s^t e^{-(Re\lambda)\tau} d\tau \\ &= \frac{\varepsilon \|f\|}{-Re\lambda} (e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}) \end{aligned}$$

elde edilir.

(i) Kabul edilsin ki, $Re\lambda \neq 0$ olsun. Bu durumda yukarıda elde edilen eşitsizlikten her $s, t \in I$ için,

$$|f(e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s))| \leq \frac{\varepsilon \|f\|}{|Re\lambda|} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}|$$

$$\|f\| |e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)| \leq \frac{\varepsilon \|f\|}{|Re\lambda|} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}|$$

$$|e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)| \leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eğer

$$e^{-(Re\lambda)s} \searrow m(I, \lambda)$$

ise $e^{-\lambda s}\varphi(s)$ fonksiyonu X kümesi üzerinde yakınsak olur. $e^{-\lambda s}\varphi(s)$ fonksiyonunun yakınsadığı değer $x_\varphi \in X$ olarak alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| &= \|e^{\lambda t}(e^{-\lambda t}\varphi(t) - x_\varphi)\| \\ &= |e^{(Re\lambda)t}| \|e^{-\lambda t}\varphi(t) - x_\varphi\| \\ &= e^{(Re\lambda)t} \|e^{-\lambda t}\varphi(t) + e^{-\lambda s}\varphi(s) - e^{-\lambda s}\varphi(s) - x_\varphi\| \\ &\leq e^{(Re\lambda)t} \|e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)\| + e^{(Re\lambda)t} \|e^{-\lambda s}\varphi(s) - x_\varphi\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} e^{(Re\lambda)t} |e^{-(Re\lambda)t} - e^{-(Re\lambda)s}| \\ &= \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{e^{-(Re\lambda)s}}{e^{-(Re\lambda)t}}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de kabul edilsin ki $x \in X$ elemanı $\sup_{t \in I} \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x\| = c < \infty$ olacak şekilde olsun. Eğer $m(I, \lambda) = 0$ ise

$$\begin{aligned} \|x - x_\varphi\| &\leq |e^{-\lambda t}| \{ \|e^{\lambda t}x - \varphi(t)\| + \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \} \\ &\leq e^{-(Re\lambda)t} \left(c + \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için $e^{-(Re\lambda)t} \rightarrow 0$ olduğundan $\|x - x_\varphi\| \rightarrow 0$ olur ki buradan $x = x_\varphi$ olmalıdır.

(ii) $Re\lambda = 0$ ve I nın çapı $\delta(I) < \infty$ olsun. Bu durumda daha önceden elde edilen $|h(s) - h(t)| \leq \varepsilon \|f\| \int_s^t e^{-(Re\lambda)\tau} d\tau$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s))| &\leq \varepsilon \|f\| \int_s^t e^{-(Re\lambda)\tau} d\tau \\ &\leq \varepsilon \|f\| |t - s| \\ &\leq \varepsilon \|f\| \delta(I) \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $Re\lambda = 0$ için

$$\begin{aligned}\|e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)\| &\leq \|e^{-\lambda t}(\varphi(t) - e^{\lambda t}.e^{-\lambda s}\varphi(s))\| \\ &\leq \|\varphi(t) - e^{\lambda t}.e^{-\lambda s}\varphi(s)\| \\ &\leq \varepsilon\delta(I)\end{aligned}$$

elde edilir. (i) nin ispatında $e^{-\lambda s}\varphi(s)$ fonksiyonunun yakınsadığı değer x_φ olarak alınmıştı. O halde,

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| < \varepsilon\delta(I)$$

elde edilir.

(iii) $Re\lambda = 0$ ve $\delta(I) = \infty$ olsun. Bu durumda $\|x_o\| = 1$ olacak şekilde bir $x_o \in X$ bulunabilir. Şimdi $\varphi_0(t) := \varepsilon te^{\lambda t}x_o, t \in I$ olarak tanımlansın. Buradan,

$$\begin{aligned}\|\varphi'_0(t) - \lambda\varphi_0(t)\| &= \|\varepsilon e^{\lambda t}x_o + \varepsilon \lambda te^{\lambda t}x_o - \varepsilon \lambda te^{\lambda t}x_o\| \\ &\leq \varepsilon |e^{\lambda t}| \|x_o\| \\ &\leq \varepsilon |e^{(Re\lambda)t}| \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edilsin ki bir $k \geq 0$ ve $y_o \in X$ için $\|\varphi_o(t) - e^{\lambda t}y_o\| \leq k\varepsilon$ sağlansın.

$$\|\varphi_0(t) - e^{\lambda t}y_o\| = \|\varepsilon tx_o - y_o\| \leq k\varepsilon$$

olur.

$$|\varepsilon|t|\|x_o\| - \|y_o\|| \leq \|\varepsilon tx_o - y_o\| \leq k\varepsilon$$

eşitsizliğinde her iki taraf ε ile bölünürse

$$|t| \leq k + \frac{\|y_o\|}{\varepsilon}$$

olup $k + \frac{\|y_o\|}{\varepsilon}$ toplamı sonlu olduğundan $\delta(I) = \infty$ olması ile çelişir. Buradan $y' = \lambda y$ diferensiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlı olamaz.

5.2.3. Tanım

B bir Banach uzayı $f : I \rightarrow B$ diferensiyel bir dönüşüm olsun. Eğer her bir $t \in I$ için bir $f'(t) \in B$ vardır öyle ki

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t+s) - f(t)}{s} - f'(t) \right\|_B = 0$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna türevlenebilirdir denir. Burada $\|\cdot\|_B$, B üzerinde tanımlanan normdur [10, 11, 13] .

5.2.4. Tanım

B bir Banach uzayı $f : I \rightarrow B$ diferensiyel bir dönüşüm ve $t \in I$ olmak üzere

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_B \leq \varepsilon$$

özellğinde türevlenebilir bir f fonksiyonu için bir $x \in B$ vardır ki

$$x'(t) = \lambda x(t) \text{ ve } \|f(t) - x(t)\|_B \leq k\varepsilon$$

sağlanacak şekilde $k > 0$ varsa $y' = \lambda y$ diferensiyel denkleminde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir [11] .

5.2.5. Önerme

B bir Banach uzayı $f : I \rightarrow B$ ye diferensiyel bir dönüşüm olsun. Aşağıda verilen iki durum eşdeğerdir.

$$(i) \|f'(t) - \lambda f(t)\|_B \leq \varepsilon, (t \in I)$$

$$(ii) g : I \rightarrow B \text{ bir diferensiyel dönüşüm vardır ki her } t \in I \text{ için } f(t) = g(t)e^{\lambda t} \text{ ve } \|g'(t)\|_B \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \text{ dir [11] .}$$

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii) : $f(t) = g(t)e^{\lambda t}$ eşitliğinden $g(t) = f(t)e^{-\lambda t}$ yazılabilir. Buradan g nin türevlenebileceği açıktır ve $g'(t) = \{f'(t) - \lambda f(t)\} e^{-\lambda t}$ yazılabilir. Bu eşitlikte her iki

tarafın B üzerinde normu alınır

$$\begin{aligned}\|g'(t)\|_B &= \|f'(t) - \lambda f(t)\|_B e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} \\ &\leq \varepsilon e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) :

$f(t) = g(t)e^{\lambda t}$ eşitliğinde türev alınır

$$f'(t) = \{g'(t) + \lambda g(t)\} e^{\lambda t} = g'(t)e^{\lambda t} + \lambda f(t)$$

elde edilir. Buradan

$$f'(t) - \lambda f(t) = g'(t)e^{\lambda t}$$

yazılabilir. Her iki tarafın B üzerinde normu alınır

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_B = \|g'(t)e^{\lambda t}\|_B = \|g'(t)\|_B e^{(\operatorname{Re}\lambda)t}$$

elde edilir. $\|g'(t)\|_B \leq \varepsilon e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t}$ olduğundan $\|f'(t) - \lambda f(t)\|_B \leq \varepsilon$ yazılabilir.

5.2.6. Önerme

B bir Banach uzayı $f : I \rightarrow B$ diferensiyel bir dönüşüm olsun. Aşağıda verilen iki durum eşdeğerdir.

(i) $f'(t) = \lambda f(t), t \in I$;

(ii) Bir $g \in B$ vardır öyle ki $f(t) = ge^{\lambda t}, t \in I$ [11].

İspat

Önerme 5.2.5 de $t \in I$ için $g'(t) = 0$ olduğunda durum (ii) de verilen $g(t)$ dönüşümünün sabit olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\tilde{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir $\tilde{g}$ fonksiyonu tanımlansın ve herhangi bir $t_0 \in I$ için

$$\tilde{g}(t) = \|g(t) - g(t_0)\|_B$$

olsun. Burada $\tilde{g}$ türevlenebilirdir ve $g'(t) = 0$ olduğundan $\tilde{g}'(t) = 0$ dır. Bu nedenle $\tilde{g}$ sabit fonksiyondur. $\tilde{g}(t_0) = 0$ olduğundan $g(t) = g(t_0)$ yazılabilir. Böylece $g(t)$ sabit fonksiyondur ve bu da ispatı tamamlar.

5.2.7. Lemma

$g : I \rightarrow \mathbb{C}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Her $t \in I$ için

$$|g'(t)| \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

olmak üzere g nin gerçel kısmı u ve imajiner kısmı v olsun. $Re\lambda = 0$ olmadıkça I dan $\mathbb{C}$ ye $\tilde{u}$ ve $\tilde{v}$ fonksiyonlarını sırasıyla

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}, \quad \tilde{v}(t) = v(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $t_0 \leq s$ olmak üzere her $s \in I$ için,

$$0 \leq \tilde{u}(s) - \tilde{u}(t_0) \leq \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} \{e^{-(Re\lambda)t_0} - e^{-(Re\lambda)s}\}$$

ve

$$0 \leq \tilde{v}(s) - \tilde{v}(t_0) \leq \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} \{e^{-(Re\lambda)t_0} - e^{-(Re\lambda)s}\}$$

eşitsizlikleri sağlanır [11].

İspat

$g'(t) = u'(t) + iv'(t)$ olduğundan, her $t \in I$ için

$$|u'(t)|, |v'(t)| \leq |g'(t)| \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

yazılabilir.

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}$$

eşitliğinde türev alınırsa $\tilde{u}'(t) = u'(t) + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$ elde edilir. Ayrıca $|u'(t)| \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$ olduğundan,

$$-\varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq u'(t) \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t},$$

$$-\varepsilon e^{-(Re\lambda)t} + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq u'(t) + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

ve

$$0 \leq \tilde{u}'(t) + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq 2\varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

elde edilir.

Şimdi $s \in I$ olmak üzere I dan $\mathbb{C}$ ye bir U fonksiyonu

$$U(s) = -\tilde{u}(s) - \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)s} + \tilde{u}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_0}$$

olarak tanımlansın. U türevlenebilirdir ve her $s \in I$ için

$$U'(s) = -\tilde{u}'(s) + 2\varepsilon e^{-(Re\lambda)s} \geq 0$$

sağlanır. $U(t_0) = 0$ olduğundan eğer $s \geq t_0$ ise $U(s) \geq 0$ dır ($U'(s) \geq 0$ olduğundan U fonksiyonu azalmayandır yani $s \geq t_0$ için $U(s) \geq U(t_0) = 0$ dır).

$\tilde{u}'(s) \geq 0$ olduğundan $s \geq t_0$ ise $\tilde{u}(s) \geq \tilde{u}(t_0)$ sağlanır. Buradan,

$$0 \leq \tilde{u}(s) - \tilde{u}(t_0) \leq \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} \{e^{-(Re\lambda)t_0} - e^{-(Re\lambda)s}\}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}$$

eşitliğinde türev alınırsa $\tilde{v}'(t) = v'(t) + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$ elde edilir.

$|v'(t)| \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$ olduğundan,

$$-\varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq v'(t) \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t},$$

$$-\varepsilon e^{-(Re\lambda)t} + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq v'(t) + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t} + \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

ve

$$0 \leq \tilde{v}'(t) \leq 2\varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

elde edilir. Şimdi $s \in I$ olmak üzere I dan $\mathbb{C}$ ye bir V fonksiyonu

$$V(s) = -\tilde{v}(s) - \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)s} + \tilde{v}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_0}$$

olarak tanımlansın. V türevlenebilirdir ve her $s \in I$ için

$$V'(s) = -\tilde{v}'(s) + 2\varepsilon e^{-(Re\lambda)s} \geq 0$$

sağlanır. $V(t_0) = 0$ olduğundan eğer $s \geq t_0$ ise $V(s) \geq 0$ dır ($V'(s) \geq 0$ olduğundan V fonksiyonu azalmayandır yani $s \geq t_0$ için $V(s) \geq V(t_0) = 0$ dır).

$\tilde{v}'(s) \geq 0$ olduğundan $s \geq t_0$ ise $\tilde{v}(s) \geq \tilde{v}(t_0)$ sağlanır. Buradan,

$$0 \leq \tilde{v}(s) - \tilde{v}(t_0) \leq \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} \{e^{-(Re\lambda)t_0} - e^{-(Re\lambda)s}\}$$

elde edilir. O halde ispat tamamlanmıştır.

5.2.8. Lemma

$Re\lambda > 0$ olsun. $\lim_{s \nearrow \sup I} u(s)$ ve $\lim_{s \nearrow \sup I} v(s)$ limitleri vardır [11] .

İspat

Öncelikle $\sup_{t \in I} \tilde{u}(t)$ nin sonlu olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla $t_0 \in I$ için Lemma

5.2.7 düzenlenirse

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &\leq \tilde{u}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} \{e^{-(Re\lambda)t_0} - e^{-(Re\lambda)t}\} \\ &< \tilde{u}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_0}, t_0 \leq t.\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $t < t_0$ ise, $\tilde{u}'(t) \geq 0$ olduğundan her $t \in I$ için $\tilde{u}(t) \leq \tilde{u}(t_0)$ elde edilir. Bu nedenle, her $t \in I$ için

$$\tilde{u}(t) \leq \tilde{u}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_0}$$

dir. ($\varepsilon \geq 0$) Buradan $\sup_{t \in I} \tilde{u}(t)$ nin sonlu olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de,

$$\lim_{s \nearrow \sup I} u(s) = \sup_{t \in I} \tilde{u}(t)$$

olduğu gösterilsin. Gerçekten, verilen her $\eta > 0$ için öyle bir $s_0 \in I$ bulunabilir öyle ki $\sup_{t \in I} \tilde{u}(t) - \eta < \tilde{u}(s_0)$ dir. $\tilde{u}'(t) \geq 0$ olduğundan $s_0 \leq s$ ise her $t \in I$ için

$$\sup_{t \in I} \tilde{u}(t) - \eta < \tilde{u}(s) < \sup_{t \in I} \tilde{u}(t) + \eta$$

yazılabilir. Bu ifade $\lim_{\eta \rightarrow 0} |\sup_{t \in I} \tilde{u}(t) - \tilde{u}(s)| < \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta$ olarak yazılabileceğinden

$$\lim_{s \nearrow \sup I} u(s) = \sup_{t \in I} \tilde{u}(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\sup_{t \in I} \tilde{v}(t)$ nin sonlu olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla $t_0 \in I$ için Lemma 5.2.7 düzenlenirse

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t) &\leq \tilde{v}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} \{e^{-(Re\lambda)t_0} - e^{-(Re\lambda)t}\} \\ &< \tilde{v}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_0}, t_0 \leq t.\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $t < t_0$ ise, $\tilde{v}'(t) \geq 0$ olduğundan her $t \in I$ için $\tilde{v}(t) \leq \tilde{v}(t_0)$ elde edilir. Bu nedenle, her $t \in I$ için

$$\tilde{v}(t) \leq \tilde{v}(t_0) + \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_0}$$

dir.

Buradan $\sup_{t \in I} \tilde{v}(t)$ nin sınırlı olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de,

$$\lim_{s \nearrow \sup I} v(s) = \sup_{t \in I} \tilde{v}(t)$$

olduğunu gösterilsin. Gerçekten, verilen her $\eta > 0$ için öyle bir $s_0 \in I$ bulunabilir öyle ki $\sup_{t \in I} \tilde{v}(t) - \eta < \tilde{v}(s_0)$ dir. $\tilde{v}'(t) \geq 0$ olduğundan $s_0 \leq s$ ise her $t \in I$ için

$$\sup_{t \in I} \tilde{v}(t) - \eta < \tilde{v}(s) < \sup_{t \in I} \tilde{v}(t) + \eta$$

yazılabilir. Bu ifade $\lim_{\eta \rightarrow 0} |\sup_{t \in I} \tilde{v}(t) - \tilde{v}(s)| < \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta$ olarak yazılabileceğinden

$$\lim_{s \nearrow \sup I} v(s) = \sup_{t \in I} \tilde{v}(t)$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

5.2.9. Teorem

$Re\lambda > 0$, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $t \in I$ olmak üzere

$$|f'(t) - \lambda f(t)| \leq \varepsilon$$

özellğinde türevlenebilir bir f fonksiyonu için öyle bir $\theta \in \mathbb{C}$ vardır öyle ki her $t \in I$ için

$$|f(t) - \theta e^{\lambda t}| \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda}$$

dir [11].

İspat

Önerme 5.2.5 kullanılırsa $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$f(t) = g(t)e^{\lambda t} \text{ ve } |g'(t)| \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

olsun. u ve v , g kompleks sayısının sırasıyla reel ve imajiner kısmı olsun. I dan $\mathbb{C}$ ye $\tilde{u}$

ve $\tilde{v}$ fonksiyonları

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}, \quad \tilde{v}(t) = v(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}.$$

olarak tanımlansın. Lemma 5.2.8 den $\lim_{s \nearrow \sup I} u(s)$ ve $\lim_{s \nearrow \sup I} v(s)$ limitlerinin var olduğu bilindiğinden Lemma 5.2.7 den eğer $t \leq s$ ise,

$$0 \leq \tilde{u}(s) - \tilde{u}(t) < \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}$$

yazılabilir. Buradan, her $t \in I$ için

$$\begin{aligned} \left| u(t) - \lim_{s \nearrow \sup I} \tilde{u}(s) \right| &= \lim_{s \nearrow \sup I} \left| \tilde{u}(t) + \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t} - \tilde{u}(s) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, her $t \in I$ için

$$\left| v(t) - \lim_{s \nearrow \sup I} \tilde{v}(s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}$$

elde edilebilir. Buradan, her $t \in I$ için

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \lim_{t \nearrow \sup I} \{(\tilde{u}(t) + i\tilde{v}(t))\} e^{\lambda t} \right| &= \left[\left(u(t) - \lim_{s \nearrow \sup I} \tilde{u}(s) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(v(t) - \lim_{s \nearrow \sup I} \tilde{v}(s) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} e^{(Re\lambda)t} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t} e^{(Re\lambda)t} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.2.10. Teorem

$Re\lambda > 0$, $f : I \longrightarrow A$, $t \in I$ ve A kompleks sayılar kümesinde kapalı bir küme olmak üzere

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

özelliğinde türevlenebilir bir f fonksiyonu için eğer A sabit fonksiyonlara sahip ise öyle bir $\theta \in A$ vardır ki her $t \in I$ için

$$\|f(t) - \theta e^{\lambda t}\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda}$$

sağlanır. Ayrıca A nın sabit fonksiyonları yok ise öyle bir $\tilde{\theta}$ vardır ki her $t \in I$ için

$$\|f(t) - \tilde{\theta} e^{\lambda t}\|_{\infty} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda}$$

sağlanır [11] .

İspat

Her $x \in X$ (X topolojik uzay) için I dan $\mathbb{C}$ ye f_x fonksiyonu

$$f_x(t) := f(t)(x), (t \in I)$$

şeklinde tanımlansın. f_x fonksiyonu türevlenebilir olduğundan her $x \in X$ için

$$(f_x)'(t) := f'(t)(x), (t \in I)$$

yazılabilir. Buradan her $x \in X$ için

$$|(f_x)'(t) - \lambda f_x(t)| \leq \|f'(t) - \lambda f(t)\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

olduğunu söylenebilir. Önerme 5.2.5 den her $x \in X$ için I dan $\mathbb{C}$ ye bir g_x diferensiyel fonksiyonu karşılık gelir öyle ki

$$f_x(t) = g_x(t)e^{\lambda t} \text{ ve } |(g_x)'(t)| \leq \varepsilon e^{-(Re\lambda)t}$$

dir. g_x in reel ve imajiner kısımları sırasıyla u_x ve v_x olsun. I dan $\mathbb{C}$ ye

$$\tilde{u}_x(t) = u_x(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}, \quad \tilde{v}_x(t) = v_x(t) - \frac{\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t}.$$

fonksiyonları tanımlansın.

Teorem 5.2.9 un ispatından her $x \in X$ için

$$\left| f_x(t) - \lim_{s \nearrow \sup I} \{ \tilde{u}_x(s) + i\tilde{v}_x(s) \} e^{\lambda s} \right| \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda}$$

yazılabilir. Burada X den $\mathbb{C}$ ye

$$\theta(x) = \lim_{s \nearrow \sup I} \{ \tilde{u}_x(s) + i\tilde{v}_x(s) \}$$

olacak şekilde bir θ fonksiyonu tanımlansın. Bu tanımlama ile eşitsizlik

$$\|f(t) - \theta e^{\lambda t}\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda}$$

olarak yazılabilir. I dan bir $\{t_n\}$ dizisi alalım ve $t_n \nearrow \sup I$ olsun. X den $\mathbb{C}$ ye

$$\theta_n(t_n) = \tilde{u}_x(t_n) + i\tilde{v}_x(t_n)$$

şeklinde bir θ_n fonksiyonu tanımlansın. $g_x(t_n) = f_x(t_n)e^{-\lambda t_n}$ olduğundan $x \mapsto g_x(t_n)$ olarak tanımlanan fonksiyon her $n \in \mathbb{N}$ için A ya aittir.

Gösterilebilir ki, A sabit fonksiyonlara sahip ise θ , A nın bir elemanıdır. Gerçekten, θ_n her $n \in \mathbb{N}$ için A nın bir elemanıdır. Lemma 5.2.8 den $t \leq s$ için

$$|\tilde{u}_x(s) - \tilde{u}_x(t)| \leq \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} |e^{-(Re\lambda)s} - e^{-(Re\lambda)t}|, |\tilde{v}_x(s) - \tilde{v}_x(t)| \leq \frac{2\varepsilon}{Re\lambda} |e^{-(Re\lambda)s} - e^{-(Re\lambda)t}|$$

yazılabilir. Buradan, her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |\theta(x) - \theta_n(x)| &= \lim_{s \nearrow \sup I} \sqrt{|\tilde{u}_x(s) - \tilde{u}_x(t_n)|^2 + |\tilde{v}_x(s) - \tilde{v}_x(t_n)|^2} \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} \left| \lim_{s \nearrow \sup I} e^{-(Re\lambda)s} - e^{-(Re\lambda)t_n} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $\theta, \{\theta_n\} \subset A$ dizisinin limitidir ve A kapalı olduğundan, θ A nın bir elemanıdır. Şimdi A nın sabit fonksiyonlarının olmadığı düşünölsün. X den $\mathbb{C}$ ye

$$\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + \frac{(1+i)\varepsilon}{Re\lambda} \lim_{s \nearrow \sup I} e^{-(Re\lambda)s}, \quad \tilde{\theta}_n(x) = \theta_n(x) + \frac{(1+i)\varepsilon}{Re\lambda} e^{-(Re\lambda)t_n}$$

olacak şekilde $\tilde{\theta}$ ve $\tilde{\theta}_n$ fonksiyonları tanımlansın. $\{\tilde{\theta}_n\} \subset A$ olduğundan her $x \in X$ ve

her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{\theta}_n(x) = g_x(t_n)$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\theta}(x) - \tilde{\theta}_n(x) \right| &\leq |\theta(x) - \theta_n(x)| + \frac{|1+i|\varepsilon}{Re\lambda} \left| \lim_{s \nearrow \sup I} e^{-(Re\lambda)s} - e^{-(Re\lambda)t_n} \right| \\ &\leq \frac{3\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} \left| \lim_{s \nearrow \sup I} e^{-(Re\lambda)s} - e^{-(Re\lambda)t_n} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. A kapalı olduğundan $\tilde{\theta}$, A nın elemanıdır. Dahası, her $t \in I$ için

$$\begin{aligned} \|f(t) - \tilde{\theta}e^{\lambda t}\|_{\infty} &\leq \|f(t) - \theta e^{\lambda t}\|_{\infty} + \frac{|1+i|\varepsilon}{Re\lambda} \left| \lim_{s \nearrow \sup I} e^{-(Re\lambda)s} e^{\lambda t} \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{Re\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Sonuç

$Re\lambda > 0$, $f(a, +\infty)$ ($-\infty \leq a \leq +\infty$) öyle ki

$$\|f'(t) - \lambda f(t)\|_{\infty} \leq \varepsilon, (t \in (a, +\infty))$$

özellğinde türevlenebilir bir dönüşüm ise f benzersiz olarak Teorem 5.2.9 anlamında A nın bir fonksiyonu ile yaklaşır [11].

İspat

Teorem 5.2.9 dan, eğer $\theta_1, \theta_2 \in A$ ise $t \in (a, +\infty)$ için $\|f(t) - \theta_j e^{\lambda t}\|_{\infty} \leq k_j \varepsilon$ olacak şekilde bazı $k_j \geq 0, (j = 1, 2)$ için $\theta_1 = \theta_2$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\infty} &\leq \|\theta_1 - f(t)e^{-\lambda t}\|_{\infty} + \|f(t)e^{-\lambda t} - \theta_2\|_{\infty} \\ &\leq (k_1 + k_2)\varepsilon e^{-(Re\lambda)t} \end{aligned}$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\|\theta_1 - \theta_2\|_{\infty} \rightarrow 0$ elde edilir. Buradan $\theta_1 = \theta_2$ dir.

5.3. $y'(t) - ay(t) = 0$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

2017 yılında Masakazu Onitsuka ve Tomohiro Shoji $y'(t) - ay(t) = 0, a \neq 0$ birinci basamaktan homogen diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu bölümde a nın sıfırdan farklı olduğu, birinci basamaktan

$$y'(t) - ay(t) = 0 \quad (5.6)$$

diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı incelenecektir. 2013 yılında Miura, Jung ve Takahasi aşağıdaki teoremden verilen keskin sonucu elde etmişlerdir.

5.3.1. Teorem

$y'(t) - ay(t) = 0$ denklemi $1/|a|$ Hyers-Ulam kararlılık sabiti ile Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir. Burada, $1/|a|$ sabiti $\mathbb{R}$ üzerindeki minimum Hyers-Ulam kararlılık sabitidir [14].

2017 yılında ise Onitsuka ve Shoji de aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

5.3.2. Teorem

$\varepsilon > 0$ verilen keyfi bir sabit olsun. Kabul edelim ki her $t \in I$ için diferensiyellenebilir bir $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $|\phi'(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

(i) Eğer $a > 0$ ve $\sup I$ var ise $\tau = \sup I$ olmak üzere $\lim_{t \rightarrow \tau-0} \phi(t)$ mevcut ve $y(t)$ (5.6) denkleminin herhangi bir çözümü ise her $t \in I$ için $|\lim_{t \rightarrow \tau-0} \phi(t) - y(\tau)| < \varepsilon/a$ olduğunda $|\phi(t) - y(t)| < \varepsilon/a$ sağlanır.

(ii) Eğer $a > 0$ ve $\sup I$ yok ise bu durumda $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e^{-at}$ vardır ve $y(t) = (\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e^{-at})e^{at}$ (5.6) denkleminin gerçek çözümüdür öyle ki her $t \in I$ için $|\phi(t) - y(t)| < \varepsilon/a$ sağlanır.

(iii) Eğer $a < 0$ ve $\inf I$ var ise $\sigma = \inf I$ olmak üzere $\lim_{t \rightarrow \sigma+0} \phi(t)$ mevcut ve $y(t)$ (5.6) denkleminin herhangi bir çözümü ise her $t \in I$ için $|\lim_{t \rightarrow \sigma+0} \phi(t) - y(\sigma)| < \varepsilon/|a|$ olduğunda $|\phi(t) - y(t)| < \varepsilon/|a|$ sağlanır.

(iv) Eğer $a < 0$ ve $\inf I$ yok ise bu durumda $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t)e^{-at}$ vardır ve $y(t) = (\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t)e^{-at})e^{at}$ (5.6) denkleminin gerçek çözümüdür öyle ki her $t \in I$

için $|\phi(t) - y(t)| < \varepsilon / |a|$ sağlanır [14].

Bu teoremden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

Sonuç

(5.6) denklemi I üzerinde Hyers-Ulam anlamında $1/|a|$ Hyers-Ulam kararlılık sabiti ile kararlıdır [14] .

Not

$a = 1$ durumunda, (5.6) denklemi için bir HUS sabiti yukarıdaki bir önceki sonuçlardan biridir. Yani, teoremin Alsina ve Ger'in bir sonucu olduğu söylenebilir.

5.4. $y' + g(t)y = 0$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

2003-2004 yıllarında Takeshi Miura, Shizuo Miyajima ve Sin-Ei Takahasi birinci basamaktan lineer diferensiyel operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemişlerdir. X reel veya kompleks Banach Uzayı ve $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$C(I, X) = \{f \mid f : I \rightarrow X, \text{ sürekli}\},$$

$$C^1(I, X) = \{f \mid f : I \rightarrow X, \text{ sürekli ve türevlenebilir}\} \subset C(I, X)$$

ve

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(t)| : t \in I\}$$

olsun. $T_h : C^1(I, X) \rightarrow C(I, X)$ lineer operatörü $T_h u = u' + hu$ olarak tanımlansın.

$$\tilde{h}(t) = e^{\int_0^t h(s) ds}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda,

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds$$

fonksiyonu $T_h u = v$ denklemini sağlar. Yani,

$$u'(t) = -\frac{\tilde{h}'(t)}{\tilde{h}^2(t)} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \frac{d}{dt} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds$$

sağlanır. Burada

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds = \tilde{h}(t) v(t)$$

olduğundan,

$$u'(t) = -\frac{\tilde{h}'(t)}{\tilde{h}(t)} \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds + v(t)$$

olarak yazılabilir.

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds$$

olduğundan,

$$u'(t) = -\frac{\tilde{h}'(t)}{\tilde{h}(t)} u(t) + v(t)$$

olur. Buradan, $\tilde{h}'(t)$ ve $h(t)$ yerlerine yazılırsa,

$$u'(t) = -\frac{h(t) e^{\int_0^t h(s) ds}}{e^{\int_0^t h(s) ds}} u(t) + v(t)$$

elde edilir.

Gerekli sadeleştirme yapılarak,

$u'(t) = -h(t)u(t) + v(t)$ ve buradan $u'(t) + h(t)u(t) = v(t)$ elde edilir.

Bu ise $T_h u(t) = v(t)$ olduğunu verir. Tersine, $T_h u = v$ denkleminin genel çözümü

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ y_0 + \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olarak yazılabilir. Burada $y_0 \in X$ keyfi bir sayıdır.

5.4.1. Tanım

Eğer aşağıdaki özellik sağlanacak şekilde bir $k \geq 0$ sayısı varsa T_h operatörüne **Hyers-Ulam anlamında kararlıdır** denir:

$$\|T_h u - v\|_\infty \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan her $\varepsilon \geq 0$, $v \in C(I, X)$ ve $u \in C^1(I, X)$ fonksiyonları için bir $u_0 \in C^1(I, X)$ elemanı vardır ki

$$T_h u_0 = v \text{ ve } \|u - u_0\|_\infty \leq k\varepsilon$$

sağlanır. Burada $k \geq 0$ sabitine $T_h u$ operatörüne karşılık gelen bir **Hyers-Ulam kararlılık sabiti** denir. Eğer $\min\{k\}$ değeri varsa bu minimum k değerine $T_h u$ operatörünün **Hyers-Ulam kararlılık sabiti** denir [12].

Özel olarak $X = \mathbb{R}$ ve $h(t) = -1$ seçilirse $T_h u = 0$ denklemi $u' = u$ denklemine indirgenir ve bu durum Bölüm 5.1 de incelenmiştir.

Benzer şekilde $X \neq \{0\}$ bir kompleks Banach uzayı ve $h(t) = -\lambda \in \mathbb{C}$ seçilirse $T_h u = 0$ denklemi $u' = \lambda u$ denklemine indirgenir ve bu durum Bölüm 5.2 de incelenmiştir.

Kabul edilsin ki, $X \neq \{0\}$ bir Banach uzayı ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\tilde{g}(t) = e^{\int_0^t g(s)ds}$ olarak tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun.

$$C_g := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_t^\infty |\tilde{g}(s)| ds$$

$$D_g := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_{-\infty}^t |\tilde{g}(s)| ds$$

$$E_g := \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \left| \int_0^t \tilde{g}(s) ds \right|$$

olarak tanımlansın. Burada C_g, D_g ve E_g değerlerinin sonlu olmaları üzerine bir kısıtlama yoktur.

5.4.2. Teorem

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli ve $T_h : C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ lineer operatörü

$$(T_h u)(t) = u'(t) + h(t)u(t)$$

olarak tanımlansın. Kabul edelim ki, C_h, D_h ve E_h değerlerinden biri sonlu olsun. Bu durumda T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır. Bununla beraber, $C_h < \infty$ veya $D_h < \infty$ ise $\|T_h u - v\| < \infty$ eşitsizliğini sağlayan her $v \in C(\mathbb{R}, X)$ ve $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$ için bir $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, X)$ vardır ki

$$T_h u_0 = v \text{ ve } \|u - u_0\|_\infty < \infty$$

sağlanır [12] .

İspat

Kabul edilsin ki $\varepsilon \geq 0$, $v \in C(\mathbb{R}, X)$ ve $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$ için $\|T_h u - v\| \leq \varepsilon$ sağlansın. $w := T_h u - v$ olarak tanımlansın.

Buradan $T_h u = v + w$ olur. Bu durumda,

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^t \tilde{h}(s)(v(s) + w(s)) ds \right\}$$

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^t \tilde{h}(s)w(s)ds \right\}$$

olarak yazılabilir. İlk olarak, $C_h < \infty$ olduğu kabul edilsin. $\|w\| \leq \varepsilon$ (sınırlı) olduğundan $\int_0^\infty \tilde{h}(t)w(t)dt \in X$ dir.

Bu yüzden her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^\infty \tilde{h}(s)w(s)ds \right\} - \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ \int_t^\infty \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olarak yazılabilir. Her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$x_0 := u(0) + \int_0^\infty \tilde{h}(s)w(s)ds$$

ve

$$u_0(t) := \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ x_0 + \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $T_h u_0 = v$ sağlanır ve

$$u(t) = u_0(t) - \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_t^\infty \tilde{h}(s)w(s)ds$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_0(t)\| &= \frac{1}{|\tilde{h}(t)|} \left\| \int_t^\infty \tilde{h}(s)w(s)ds \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\tilde{h}(t)|} \int_t^\infty |\tilde{h}(s)| ds \\ &\leq \varepsilon C_h \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır ve C_h sabiti

de bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir. $D_h < \infty$ olduğu kabul edilsin.

$\|w\| \leq \varepsilon$ (sınırlı) olduğundan $\int_{-\infty}^0 \tilde{h}(t)w(t)dt \in X$ dir.

Bu yüzden her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) - \int_{-\infty}^0 \tilde{h}(s)w(s)ds \right\} + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ \int_{-\infty}^t \tilde{h}(s)w(s)ds \right\}$$

olarak yazılabilir. Her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$x_1 := u(0) - \int_{-\infty}^0 \tilde{h}(s)w(s)ds$$

ve

$$u_1(t) := \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ x_1 + \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $T_h u_1 = v$ sağlanır ve

$$u(t) = u_1(t) + \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_{-\infty}^t \tilde{h}(s)w(s)ds$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_1(t)\| &= \frac{1}{|\tilde{h}(t)|} \left\| \int_{-\infty}^t \tilde{h}(s)w(s)ds \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\tilde{h}(t)|} \int_{-\infty}^t |\tilde{h}(s)| ds \\ &\leq \varepsilon D_h \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır ve D_h sabiti de bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir.

Şimdi de $E_h < \infty$ olması durumu ele alınsın. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u_2(t) := \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ u(0) + \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

tanımlansın. Bu durumda, $T_h u_2 = v$ sağlanır.

$$\|u(t) - u_2(t)\| = \frac{1}{|\tilde{h}(t)|} \left\| \int_0^t \tilde{h}(s)w(s)ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{|\tilde{h}(t)|} \left| \int_0^t |\tilde{h}(s)| ds \right| \leq \varepsilon E_h$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlıdır ve E_h sabiti de bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir.

Son olarak kabul edilsin ki, $C_h < \infty$ veya $D_h < \infty$ olsun. Bu durumda $u_0(t)$ nin tek olduğu gösterilmelidir.

Bunun gösterilmesi için, $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$ ve $v \in C(\mathbb{R}, X)$ için $u_3(t)$ ve $u_4(t) \in C^1(\mathbb{R}, X)$ fonksiyonları $T_h u_j = v$ ve $\|u - u_j\| \leq M_j < \infty$ ($j = 3, 4$) özelliklerini sağlasın. $T_h u_j = v$ sağlandığından

$$u_j(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ x_j + \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right\}$$

olacak şekilde x_j ler bulunabilir. Buradan, $x_j = \tilde{h}(t)u_j(t) - \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|x_3 - x_4\| &= \left\| \left(\tilde{h}(t)u_3(t) - \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right) - \left(\tilde{h}(t)u_4(t) - \int_0^t \tilde{h}(s)v(s)ds \right) \right\| \\ &= \left\| \tilde{h}(t)u_3(t) - \tilde{h}(t)u_4(t) \right\| \\ &= |\tilde{h}(t)| \|u_3(t) - u_4(t)\| \\ &= |\tilde{h}(t)| \|u_3(t) - u_4(t) + u(t) - u(t)\| \\ &\leq |\tilde{h}(t)| (\|u(t) - u_3(t)\| + \|u(t) - u_4(t)\|) \\ &\leq |\tilde{h}(t)| (M_3 + M_4) \end{aligned}$$

elde edilir. $\left| \tilde{h}(t) \right|$ nin $(-\infty, 0]$ veya $[0, \infty)$ üzerinde integrallenebilir olduğu kullanılarak $\inf_{t \in \mathbb{R}} \left| \tilde{h}(t) \right| = 0$ bulunur. Bu yüzden $x_3 = x_4$ olmalıdır. Buradan $u_3 = u_4$ elde edilir.

5.4.3. Teorem

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $T_h : C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ lineer operatörü her $t \in \mathbb{R}$ için $T_h u(t) = u'(t) + h(t)u(t)$ olarak tanımlansın. Kabul edelim ki, T_h Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahip olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- (a) $\inf_{t \in [0, \infty)} \left| \tilde{h}(t) \right| = 0$ ise $C_h < \infty$ dur. Bununla beraber C_h, T_h ın bir kararlılık sabitidir.
- (b) $\inf_{t \in (-\infty, 0]} \left| \tilde{h}(t) \right| = 0$ ise $D_h < \infty$ dur. Bununla beraber D_h, T_h ın bir kararlılık sabitidir.
- (c) $\inf_{t \in \mathbb{R}} \left| \tilde{h}(t) \right| > 0$ ise $E_h < \infty$ dur.
- (d) $\inf_{t \in (-\infty, 0]} \left| \tilde{h}(t) \right|$ veya $\inf_{t \in [0, \infty)} \left| \tilde{h}(t) \right|$ pozitiftir [12].

İspat

Sabit $x_0 \in X$ için $\|x_0\| = 1$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için $v(t) = \frac{\left| \tilde{h}(t) \right| x_0}{\tilde{h}(t)}$ olsun.

$v \in C(\mathbb{R}, X)$ olduğundan $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$ olmak üzere

$$u(t) := \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \int_0^t x_0 \left| \tilde{h}(s) \right| ds$$

olarak tanımlansın. $T_h u = v$ olduğundan $\|T_h u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$ yazılabilir.

K, T_h için keyfi bir Hyers-Ulam kararlılık sabiti olsun. Öyle bir $u_o \in C^1(\mathbb{R}, X)$ bulunabilir ki $T_h u_o = 0$ ve $\|u - u_o\|_\infty \leq K$ sağlanır. $T_h u_o = 0$ olduğundan her $t \in \mathbb{R}$ için u_o ı, $x_1 = u_o(0) \in X$ olmak üzere $u_o(t) = \frac{x_1}{\tilde{h}(t)}$ formunda yazılabilir. Buradan, her

$t \in \mathbb{R}$ için

$$\left\| \int_0^t x_0 |\tilde{h}(s)| ds - x_1 \right\| \leq K |\tilde{h}(t)| \quad (5.7)$$

elde edilir.

(a) Varsayalım ki, $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)| = 0$ olsun. $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ olacak şekilde öyle bir monoton artan dizi bulunabilir ki, her $n \in \mathbb{N}$ için, $t_n \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) ve $|\tilde{h}(t_n)| < \frac{1}{n}$ dir.

Buradan (5.7) kullanılırsa

$$\left| \int_0^{t_n} |\tilde{h}(s)| ds - \|x_1\| \right| \leq K |\tilde{h}(t_n)| < \frac{K}{n} \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.8) den $\int_0^\infty |\tilde{h}(s)| ds$ integrali vardır. (5.7) eşitsizliğinde $t = t_n$ ve $n \rightarrow \infty$ alınırsa, $x_1 = \int_0^\infty x_0 |\tilde{h}(s)| ds$ elde edilir.

Buradan, (5.7) eşitsizliği kullanılırsa, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\int_t^\infty |\tilde{h}(s)| ds = \left\| \int_0^t x_0 |\tilde{h}(s)| ds - x_1 \right\| \leq K |\tilde{h}(t)| \quad (5.9)$$

dir. Bu ise $C_h \leq K < \infty$ olması demektir. K keyfi bir Hyers-Ulam kararlılık sabiti ve C_h in kendisi de bir Hyers-Ulam kararlılık sabiti olduğundan C_h, T_h operatörü için bir Hyers-Ulam kararlılık sabitidir.

(b) Eğer $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| = 0$ sağlanıyor ise (a) şıkkına benzer bir yol izleyerek $D_h < \infty$ olduğu dolayısıyla D_h in Hyers-Ulam kararlılık sabiti olduğu gösterilebilir.

(c) Varsayalım ki, $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{h}(t)| > 0$ olsun. Buradan,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u_0(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|x_1\|}{|\tilde{h}(t)|} = \frac{\|x_1\|}{\inf_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{h}(t)|} < \infty$$

yazılabilir. Bundan dolayı, her $t \in \mathbb{R}$ için $\|x_1\| \leq \|u_0\|_\infty |\tilde{h}(t)|$ dir. Buradan, (5.7)

eşitsizliği kullanılarak, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\left| \int_0^t \tilde{h}(s) ds \right| = \left\| \int_0^t x_0 \tilde{h}(s) ds \right\| \leq (K + \|u_0\|_\infty) |\tilde{h}(t)|$$

elde edilir. Bu ise $E_h < \infty$ olması demektir.

(d) Varsayalım ki, $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)| = 0$ olsun. $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| > 0$ olduğu gösterilmelidir.

Aksine, $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| = 0$ olduğu kabul edilsin. Buradan, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, 0]$ olacak şekilde öyle bir monoton azalan dizi bulunabilir ki, her $n \in \mathbb{N}$ için, $s_n \searrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$) ve $|\tilde{h}(s_n)| < \frac{1}{n}$ dir. (5.9) dan,

$$\int_{s_n}^{\infty} |\tilde{h}(s)| ds \leq K |\tilde{h}(s_n)| < \frac{K}{n}$$

yazılabilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)| = 0$ iken $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| > 0$ olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $T_h : C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ lineer operatörü her $t \in \mathbb{R}$ için $T_h u(t) = u'(t) + h(t)u(t)$ olarak tanımlansın. T_h operatörünün Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahip olması için gerek ve yeter koşul C_h, D_h ve E_h dan birinin sınırlı olmasıdır. Daha doğrusu, aşağıdakiler doğrudur:

(a) Eğer $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)| = 0$ ise T_h operatörünün Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahip olması için gerek ve yeter koşul $C_h < \infty$ olmasıdır.

(b) Eğer $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| = 0$ ise T_h operatörünün Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahip olması için gerek ve yeter koşul $D_h < \infty$ olmasıdır.

(c) Eğer $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{h}(t)| > 0$ ise T_h operatörünün Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahip olması için gerek ve yeter koşul $E_h < \infty$ olmasıdır [12].

Sonuç

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli $M > 0$ sabiti için

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_0^t \psi(s) ds \right| < M$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ye $Reh = \varphi + \psi$ özelliğini sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Kabul edelim ki $t_o > 0$ ve $\delta_o > 0$ vardır öyle ki $|t| \geq t_o$ iken $\varphi(t) \leq -\delta_o$ dir. Ayrıca $C_h < \infty$ dir ve dolayısıyla T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahiptir.

(b) Kabul edelim ki $t_1 > 0$ ve $\delta_1 > 0$ vardır öyle ki $|t| \geq t_1$ iken $\delta_1 \leq \varphi(t)$ dir. Ayrıca $D_h < \infty$ dir ve dolayısıyla T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahiptir.

(c) Kabul edelim ki $t_2 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ vardır öyle ki $t \leq -t_2$ iken $\varphi(t) \leq -\delta_2$ ve $t_2 \leq t$ iken $\delta_2 \leq \varphi(t)$ dir. Ayrıca $E_h < \infty$ dir ve dolayısıyla T_h operatörü Hyers-Ulam anlamında kararlılığa sahiptir [12].

İspat

(a) Öncelikle, her $t \in \mathbb{R}$ için $\int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) ds$ integralinin var olduğu gösterilmelidir. Eğer, $s \geq t_o$ ise hipotezden

$$\int_0^s \varphi(\tau) d\tau \leq \int_0^{t_o} \varphi(\tau) d\tau - \int_{t_o}^s \delta_o d\tau \leq \int_0^{t_o} \varphi(\tau) d\tau - \delta_o s + \delta_o t_o$$

elde edilir. Buradan, her $s \geq t_o$ için

$$\int_0^s \varphi(\tau) d\tau \leq \int_0^{t_o} \varphi(\tau) d\tau - \delta_o s + \delta_o t_o$$

yazılabilir ve $\tilde{\varphi}$ fonksiyonunun tanımı gereği

$$\tilde{\varphi}(s) \leq \tilde{\varphi}(t_o) e^{\delta_o t_o} e^{-\delta_o s} \quad (5.10)$$

elde edilir.

Böylece her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \leq \int_t^{t_0} \tilde{\varphi}(s) ds + \tilde{\varphi}(t_0) e^{\delta_0 t_0} \int_{t_0}^\infty e^{-\delta_0 s} ds = \int_t^{t_0} \tilde{\varphi}(s) ds + \frac{1}{\delta_0} \tilde{\varphi}(t_0) < \infty$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) ds$ integralinin varlığını her $t \in \mathbb{R}$ için ispatlanmış olur.

Şimdi, C_φ nin sınırlı olduğu gösterilmelidir.

(i) $t_o \leq t$ olsun. (5.10) dan, $s \rightarrow \infty$ iken $\tilde{\varphi}(s) \rightarrow 0$ olduğu söylenebilir.

Tüm $s \geq t_o$ için $1 \leq \frac{-\varphi(s)}{\delta_0}$ olduğundan,

$$\int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \leq -\frac{1}{\delta_0} \int_t^\infty \varphi(s) \tilde{\varphi}(s) ds = -\frac{1}{\delta_0} [\tilde{\varphi}(s)]_t^\infty = \frac{1}{\delta_0} \tilde{\varphi}(t)$$

elde edilir.

(ii) $-t_o < t < t_o$ ve $\alpha = \inf \{ \tilde{\varphi}(s) : |s| < t_o \}$ olsun. Buradan,

$$\int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \leq \int_{-t_o}^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \leq \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_{-t_o}^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \right\} \tilde{\varphi}(t)$$

elde edilir.

(iii) $t \leq -t_o$ olsun. (5.10) için benzer işlemler yapılırsa,

$$\tilde{\varphi}(t) \geq e^{-\delta_0(t+t_o)} \tilde{\varphi}(-t_o) \geq \tilde{\varphi}(-t_o)$$

olduğu görülür.

Ayrıca, her $s \leq -t_0$ için $\varphi(s) \leq -\delta_0$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) ds &= \int_t^{-t_0} \tilde{\varphi}(s) ds + \int_{-t_0}^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \\ &\leq -\frac{1}{\delta_0} \int_t^{-t_0} \varphi(s) \tilde{\varphi}(s) ds + \int_{-t_0}^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \\ &\leq \left\{ \frac{1}{\delta_0} + \frac{1}{\tilde{\varphi}(-t_0)} \int_{-t_0}^\infty \tilde{\varphi}(s) ds \right\} \tilde{\varphi}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdan, $C_\varphi < \infty$ olduğu ispatlanmış olur. Son olarak, C_h nin sonlu olduğu gösterilmelidir. Her $t \in \mathbb{R}$ için $Reh = \varphi + \psi$ olduğundan

$$\left| \tilde{h}(t) \right| = \exp \int_0^t Re[h(\tau)] d\tau = \tilde{\varphi}(t) \tilde{\psi}(t)$$

yazılabilir. Hipotezden, her $t \in \mathbb{R}$ için $e^{-M} < \tilde{\psi}(t) < e^M$ yazılabilir.

Buradan, her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{1}{\left| \tilde{h}(t) \right|} \int_t^\infty \left| \tilde{h}(s) \right| ds = \frac{1}{\tilde{\varphi}(t) \tilde{\psi}(t)} \int_t^\infty \tilde{\varphi}(s) \tilde{\psi}(s) ds \leq e^{2M} C_\varphi$$

elde edilir. Bu yüzden, $C_h < \infty$ dur. Teorem 5.4.2 den T_h Hyers-Ulam anlamında kararlıdır.

(b) Benzer şekilde $D_\varphi < \infty$ olduğu ve buradan $D_h < \infty$ olduğu gösterilebilir. Teorem 5.4.2 den T_h Hyers-Ulam anlamında kararlıdır.

(c) (a) da olduğu gibi benzer adımlar izlenirse, her $t \geq t_2$ için

$$0 < \int_0^t \tilde{\varphi}(s) ds \leq \left\{ \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\tilde{\varphi}(t_2)} \int_0^{t_2} \tilde{\varphi}(s) ds \right\} \tilde{\varphi}(t)$$

yazılabilir.

Her $t \leq t_2$ için,

$$0 < \int_t^0 \tilde{\varphi}(s) ds \leq \left\{ \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\tilde{\varphi}(-t_2)} \int_{-t_2}^0 \tilde{\varphi}(s) ds \right\} \tilde{\varphi}(t)$$

dir. Ayrıca, $\beta := \inf_{s \in [-t_2, t_2]} \tilde{\varphi}(s)$ olarak tanımlanırsa, her $-t_2 < t < t_2$ için

$$\left\{ \frac{1}{\beta} \int_0^{-t_2} \tilde{\varphi}(s) ds \right\} \tilde{\varphi}(t) \leq \int_0^t \tilde{\varphi}(s) ds \leq \left\{ \frac{1}{\beta} \int_0^{t_2} \tilde{\varphi}(s) ds \right\} \tilde{\varphi}(t)$$

elde edilir. Buradan $E_\varphi < \infty$ elde edilir. Teorem 5.4.2 den T_h Hyers-Ulam anlamında kararlıdır.

5.5. $\varphi(t)y'(t) = y(t)$ Diferensiyel Denkleminin Hyers-Ulam Kararlılığı

2004 yılında S. M. Jung $\varphi(t)y'(t) = y(t)$ birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını incelemiştir. Alsina ve Ger'in çalışmalarından yola çıkılarak öncelikle yardımcı lemmalar verilecektir.

5.5.1. Lemma

$z : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) $z(t) \leq \varphi(t)z'(t)$ eşitsizliğinin her $t \in I$ için doğru olması için gerek ve yeter koşul her $t \in I$ için öyle bir türevlenebilir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki

$$\alpha'(t)\varphi(t) \geq 0 \text{ ve } z(t) = \alpha(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\}$$

sağlanır.

(b) $z(t) \geq \varphi(t)z'(t)$ eşitsizliğinin herhangi bir $t \in I$ için doğru olması için gerek ve yeter koşul her $t \in I$ için öyle bir türevlenebilir $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon vardır ki

$$\beta'(t)\varphi(t) \leq 0 \text{ ve } z(t) = \beta(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\}$$

sağlanır [8].

İspat

(a) Kabul edilsin ki her $t \in I$ için $z(t) \leq \varphi(t)z'(t)$ eşitsizliği sağlansın. I dan $\mathbb{R}$ ye α fonksiyonu

$$\alpha(t) = \exp \left\{ - \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} z(t)$$

olarak tanımlansın. α nın I üzerinde türevlenebildiği açıktır.

$$\alpha'(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \exp \left\{ - \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} (\varphi(t)z'(t) - z(t))$$

elde edilir bu da gösterir ki her $t \in I$ için $\alpha'(t)\varphi(t) \geq 0$ doğrudur. Tersine, kabul edilsin ki her $t \in I$ için $\alpha'(t)\varphi(t) \geq 0$ doğru olsun. $I \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir

$$z(t) = \alpha(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\}$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada z fonksiyonu I üzerinde türevlenebilirdir. Her $t \in I$ için,

$$\varphi(t)z'(t) = \alpha'(t)\varphi(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} + z(t) \geq z(t)$$

elde edilir ki buradan ispat tamamlanır.

(b) (a) nın ispatında $z(t)$ yerine $-z(t)$ yazılarak ispat tamamlanabilir.

5.5.2. Teorem

Verilen bir $\varepsilon > 0$ için y nin, her $t \in I$ için

$$|\varphi(t)y'(t) - y(t)| \leq \varepsilon \tag{5.11}$$

eşitsizliğinin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir

fonksiyon olmak üzere herhangi bir $t \in I$ için

$$y(t) = \varepsilon + \alpha(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \quad (5.12)$$

ve

$$0 \leq \alpha'(t)\varphi(t) \leq 2\varepsilon \exp \left\{ - \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \quad (5.13)$$

olmasıdır [8].

İspat

Kabul edilsin ki $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (5.11) eşitsizliğinin bir çözümü olsun. Bu durumda (5.11) eşitsizliğinden

$$y(t) - \varepsilon \leq \varphi(t)y'(t) \leq y(t) + \varepsilon \quad (5.14)$$

eşitsizliği her $t \in I$ için sağlanır. Burada bir $z(t) = y(t) - \varepsilon$ fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon (5.14) eşitsizliğin sol tarafında kullanılırsa $z(t) \leq \varphi(t)z'(t)$ yazılabilir. Lemma 5.5.1 (a) ya göre öyle bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonu vardır ki her $t \in I$ için

$$y(t) = \varepsilon + \alpha(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\}$$

ve

$$\alpha'(t)\varphi(t) \geq 0 \quad (5.15)$$

her $t \in I$ için sağlanır. Benzer şekilde, $z(t) = y(t) + \varepsilon$ fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon (5.14) eşitsizliğinin sağ tarafında kullanılırsa $z(t) \geq \varphi(t)z'(t)$ sağlanır. Lemma 5.5.1 (b) ye göre öyle bir $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyon vardır ki her $t \in I$ için (5.12) eşitsizliği sağlanır.

$$y(t) + \varepsilon = \beta(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \quad (5.16)$$

ve

$$\beta'(t)\varphi(t) \leq 0 \quad (5.17)$$

sağlanır. Buradan (5.12) ve (5.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned} y'(t) &= \alpha'(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} + \frac{\alpha(t)}{\varphi(t)} \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \\ &= \beta'(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} + \frac{1}{\varphi(t)} \left(\alpha(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} + 2\varepsilon \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\beta'(t) = \alpha'(t) - \frac{2\varepsilon}{\varphi(t)} \exp \left\{ - \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\},$$

elde edilir. (5.15) ve (5.17) eşitsizlikleri her $t \in I$ için

$$0 \leq \alpha'(t)\varphi(t) \leq 2\varepsilon \exp \left\{ - \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. $y(t)$ fonksiyonunun t ye göre türevi alınıp elde edilen denklem $\varphi(t)$ ile çarpılıp daha sonra elde edilen denklemden y çıkarılırsa

$$\varphi(t)y'(t) - y(t) = \alpha'(t)\varphi(t) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} - \varepsilon$$

elde edilir. (5.13) ve son denklemden

$$-\varepsilon \leq \varphi(t)y'(t) - y(t) \leq \varepsilon$$

elde edilir ki bu da (5.11) eşitsizliğine eşittir.

Aşağıdaki teoremden, Miura, Takahasi ve Choda'nın bir sonucu olarak Alsina ve Ger'in sonucunu açık bir şekilde geliştiren $\varphi(t)y'(t) = y(t)$ diferensiyel denkleminin kararlılığının ispatı verilecektir.

5.5.3. Teorem

Her $t \in I$ için $\varphi(t) > 0$ veya $\varphi(t) < 0$ sağlanıyorsa ve $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ (5.11) eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise

$$\left| y(t) - c \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir c reel sayısı vardır [8] .

İspat

Öncelikle kabul edilsin ki, her $t \in I$ için $\varphi(t) > 0$ sağlansın. y de (5.11) eşitsizliğini sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon olsun. c yi $c := \lim_{t \rightarrow b} \alpha(t)$ olarak tanımlansın. Burada, α Teorem 5.5.2 de verilen $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ dır. Her $t \in I$ için $\varphi(t) > 0$ olduğundan, (5.13) eşitsizliği $-\varphi(t)$ ile bölünüp t den b ye integral alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq \alpha(t) - c = - \int_t^b \alpha'(s) ds \geq 2\varepsilon \int_t^b \left(-\frac{1}{\varphi(s)} \right) \exp \left\{ - \int_a^s \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} ds \\ &= 2\varepsilon \exp \left\{ - \int_a^b \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} - 2\varepsilon \exp \left\{ - \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik $\exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\}$ ile çarpılıp her tarafına ε eklenirse

$$\varepsilon \geq \varepsilon + (\alpha(t) - c) \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \geq 2\varepsilon \exp \left\{ - \int_t^b \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} - \varepsilon \geq -\varepsilon$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler (5.12) ile birlikte

$$\left| y(t) - c \exp \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right\} \right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini ispatlar. Şimdi de kabul edilsin ki, her $t \in I$ için $\varphi(t) < 0$ sağlansın. y de

(5.11) eşitsizliğini sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon olsun. c yi $c := \lim_{t \rightarrow a^+} \alpha(t)$ olarak tanımlanıp benzer işlemler yapılırsa istenilen sonuç elde edilir.





6. $y' + P(t)y = G(t, y)$ DENKLEMİNİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

2014 yılında Maher Nazmi Qarawani birinci basamaktan lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin ve Bernoulli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlılığını incelemiştir. Bu kesimde $y' + P(t)y = G(t, y)$ denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlılığı incelenecektir. Burada $G(t, y) = Q(t)$ ve $G(t, y) = q(t)y^n$ $n \neq 0, 1$ olması durumları ayrı ayrı incelenecektir.

$$y' + P(t)y = Q(t) \quad (6.1)$$

diferensiyel denkleminin

$$y(t_0) = y_0 \quad (6.2)$$

başlangıç koşulları altında Hyers-Ulam anlamında kararlılığı incelenecektir. Burada $y \in C^1(I)$, $I = [t_0, t_1]$, $-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$ dir.

6.1. Birinci Basamaktan Homogen Olmayan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

6.1.1. Tanım

Bir $\varepsilon > 0$ verilsin ve bir $y \in C^1(I)$ fonksiyonu da $|y' + P(t)y - Q(t)| \leq \varepsilon\varphi(t)$ eşitsizliğini uygun bir $\varphi(t)$ pozitif tanımlı fonksiyonu için sağlasın. Bu durumda eğer bir K pozitif sayısı için $|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon\varphi(t)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde (6.1)-(6.2) probleminin bir $x(t) \in C^1(I)$ çözümü varsa (6.1)-(6.2) problemine **Hyers-Ulam-Rassias (HUR) anlamında kararlıdır** denir [15].

6.1.2. Tanım

Bir $\varepsilon > 0$ verilsin ve $y \in C^1(I)$ fonksiyonu $|y' + P(t)y - Q(t)| \leq \varepsilon\varphi(t)$ eşitsizliğini uygun bir $\varphi(t)$ pozitif tanımlı bir fonksiyonu için sağlansın. Bu durumda (6.1)-(6.2) probleminin bir $x(t) \in C^1(I)$ çözümü var ve $|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon\varphi(t)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyor ve $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$ oluyor ise (6.1) denkleminde **Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır** denir. Bu durum kısaca baş harfler bir araya getirilerek HURG ile de gösterilir [15].

6.1.3. Teorem

Eğer $P(t)$ ve $Q(t)$ fonksiyonları I üzerinde sürekli ve $y \in C^1(I)$ fonksiyonu (6.1) denkleminin (6.2) koşulunu sağlayan bir yaklaşık çözümü ise (6.1)-(6.2) problemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır [15] .

İspat

$y \in C^1(I)$ (6.1) denkleminin (6.2) koşulunu sağlayan yaklaşık çözümü olsun. O halde,

$$|y' + P(t)y - Q(t)| \leq \varepsilon \varphi(t), y(t_0) = y_0$$

olacaktır.

$$\varphi(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t P(s) ds \right)$$

olarak alınsın. Bu durumda,

$$-\varepsilon \exp \left(- \int_{t_0}^t P(s) ds \right) \leq y' + P(t)y - Q(t) \leq \varepsilon \exp \left(- \int_{t_0}^t P(s) ds \right)$$

yazılabilir. Eşitsizlik $e^{\int_{t_0}^t P(s) ds}$ ile çarpılırsa,

$$-\varepsilon \leq \exp \left(\int_{t_0}^t P(s) ds \right) (y' + P(t)y - Q(t)) \leq \varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlik düzenlenerek,

$$-\varepsilon \leq \left(y \exp \left(\int_{t_0}^t P(s) ds \right) \right)' - \exp \left(\int_{t_0}^t P(s) ds \right) Q(t) \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin t_0 dan t ye integrali alınırsa,

$$-\varepsilon(t - t_0) \leq y(t) \exp \left(\int_{t_0}^t P(s) ds \right) - y_0 - \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} Q(s) ds \leq \varepsilon(t - t_0)$$

elde edilir.

Eğer eşitsizlik $e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} -\varepsilon(t - t_0) \exp \left(-\int_{t_0}^t P(s) ds \right) &\leq y(t) - e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} Q(s) ds \right) \\ &\leq \varepsilon(t - t_0) \exp \left(-\int_{t_0}^t P(s) ds \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\left| y(t) - \exp \left(-\int_{t_0}^t P(s) ds \right) \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} Q(s) ds \right) \right| \leq \varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds}$$

yazılabilir.

Eğer,

$$x(t) := \exp \left(-\int_{t_0}^t P(s) ds \right) \left(y_0 + \int_{t_0}^t \exp \left(\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau \right) Q(s) ds \right)$$

olarak tanımlanırsa $x(t_0) = y_0$ sağlanır.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -P(t) e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau) d\tau} Q(s) ds \right) + e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds} e^{\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau} Q(t) \\ &= -P(t)x(t) + Q(t) \end{aligned}$$

olduğundan (6.1) denklemi sağlanır.

Bu durumda,

$$-\varepsilon(t - t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t P(s) ds \right) \leq y(t) - x(t) \leq \varepsilon(t - t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t P(s) ds \right)$$

veya

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t P(s) ds \right) \leq \varepsilon(t_1 - t_0) \varphi(t) \quad (t_1 < \infty)$$

olarak yazılabilir.

$t_1 - t_0 = K$ dersek Tanım 6.1.1 gereği (6.1)-(6.2) problemi HUR anlamında kararlıdır.

Şimdi de, I aralığının yarı sonsuz olması durumunu içeren hali ele alınsın. Yani, $t_1 \leq \infty$ olsun.

6.1.4. Teorem

Eğer $P(t)$ ve $Q(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli, $P(t) \geq c > 0$ ve $y \in C^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu (6.1) denkleminin (6.2) koşulunu sağlayan bir yaklaşık çözümü ise (6.1)-(6.2) problemi Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır [15].

İspat

Eğer Teorem 6.1.3 de elde edilmiş olan $|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds}$ eşitsizliğinde $Q(t) = (t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds}$ olarak alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_{t_0}^t P(s) ds} = e^{-\int_{t_0}^{\infty} P(s) ds} \rightarrow 0$$

olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$ elde edilir. Buradan, Tanım 6.1.2 gereği (6.1)-(6.2) problemi HURG anlamında kararlıdır.

Örnek

$$y' + (2 \sin^2 t)y = \cos t, y(0) = 1, t \geq 0$$

problemini ele alalım.

Eğer y bir yaklaşık çözüm ise, $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t -2\sin^2 s ds\right) = e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}$ olmak üzere

$$-\varepsilon\varphi(t) \leq y' + (2\sin^2 t)y - \cos t \leq \varepsilon\varphi(t)$$

eşitsizliği

$$-\varepsilon e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t} \leq y' + (2\sin^2 t)y - \cos t \leq \varepsilon e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlik $e^{t-\frac{1}{2}\sin 2t}$ ile çarpılırsa

$$-\varepsilon \leq (y' + (2\sin^2 t)y - \cos t)e^{t-\frac{1}{2}\sin 2t} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$-\varepsilon \leq \left(ye^{t-\frac{1}{2}\sin 2t}\right)' - (\cos t)e^{t-\frac{1}{2}\sin 2t} \leq \varepsilon$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizliğin $t_o = 0$ dan t ye integrali alınırsa

$$-\varepsilon t \leq ye^{t-\frac{1}{2}\sin 2t} - y(0) - \int_0^t (\cos s)e^{s-\frac{1}{2}\sin 2s} ds \leq \varepsilon t$$

elde edilir.

Eğer eşitsizlik $e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}$ ile çarpılırsa

$$\left| y(t) - \underbrace{\exp\left(-t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \left(1 + \int_0^t \cos s \exp\left(s - \frac{1}{2}\sin 2s\right) ds\right)}_{x(t)} \right| \leq \underbrace{\varepsilon t e^{-t+\frac{1}{2}\sin 2t}}_{\phi(t)}$$

yazılabilir. $x(t) := \exp\left(-t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \left(1 + \int_0^t \cos s \exp\left(s - \frac{1}{2}\sin 2s\right) ds\right)$ olarak tanımlanırsa $x(t_o) = y_0$ sağlandığından verilen başlangıç değer problemi sağlanır.

Ayrıca

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \exp \left(-t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

elde edilir. Buradan, Tanım 6.1.2 gereği verilen başlangıç değer problemi HURG anlamında kararlıdır.

6.2. Bernoulli Diferensiyel Dekleminin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

Bu kesimde Bernoulli diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlılığı incelenecektir.

Öncelikle,

$$y' + p(t)y = G(t, y) \tag{6.3}$$

diferensiyel denkleminin

$$y(t_0) = y_0 \tag{6.4}$$

başlangıç koşulları altında ele alınacaktır.

Burada $G(t, y) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve herhangi bir $t \in [t_0, t_1]$ ve $y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lipschitz koşulunu yani,

$$|G(t, y) - G(t, z)| \leq L |y - z|$$

eşitsizliğini ve $G(t, 0) = 0$ özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.

6.2.1. Tanım

Bir $\varepsilon > 0$ verilsin ve bir $y \in C^1(I)$ fonksiyonu da

$$|y' + p(t)y - G(t, y)| \leq \varepsilon \varphi(t)$$

eşitsizliğini uygun bir $\varphi(t)$ pozitif tanımlı bir fonksiyonu için sağlasın. Bu durumda eğer bir K pozitif sayısı için

$$|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon \varphi(t)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde (6.3)-(6.4) probleminin bir $x(t) \in C^1(I)$ çözümü varsa (6.3)-(6.4) problemine **Hyers-Ulam-Rassias (HUR) anlamında kararlıdır** denir [15].

6.2.2. Teorem

Eğer $p(t)$ fonksiyonları I üzerinde sürekli ve $y \in C^1(I)$ fonksiyonu (6.3) denkleminin (6.4) koşulunu sağlayan bir yaklaşık çözümü ise (6.3)-(6.4) problemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır [15].

İspat

$y \in C^1(I)$ (6.3) denkleminin (6.4) koşulunu sağlayan yaklaşık çözümü olsun. O zaman,

$$|y' + p(t)y - G(t, y)| \leq \varepsilon \varphi(t), y(t_0) = y_0$$

olacaktır.

Özel olarak $\varphi(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$-\varepsilon e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \leq y' + p(t)y - G(t, y) \leq \varepsilon e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$$

yazılabilir. Eşitsizlik $e^{\int_{t_0}^t P(s)ds}$ ile çarpılırsa,

$$-\varepsilon \leq e^{\int_{t_0}^t P(s)ds} (y' + p(t)y - G(t, y)) \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik düzenlenerek,

$$-\varepsilon \leq \left(y e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} \right)' - e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} G(t, y) \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Eğer bu eşitsizliğin t_0 dan t ye integrali alınırsa,

$$-\varepsilon(t - t_0) \leq y(t) e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} - y_0 - \int_{t_0}^t G(s, y) e^{\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \leq \varepsilon(t - t_0)$$

elde edilir.

Eğer eşitsizlik $e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} -\varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} &\leq y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, y) e^{\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \right) \\ &\leq \varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\left| y - e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, y) e^{\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \right) \right| \leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \quad (t_1 < \infty)$$

yazılabilir. Eğer,

$$x(t) := e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, x) e^{\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \right)$$

olarak tanımlanırsa

$$x(t_0) := e^{-\int_{t_0}^{t_0} p(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t_0} G(s, x) e^{\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \right) = y_0$$

olduğu görülür.

Ayrıca eğer integral altında türev alma işlemi kullanılıp düzenleme yapılırsa $x(t)$ fonksiyonunun (6.3) denklemini sağladığı görülür. Dolayısıyla $x(t)$ fonksiyonu (6.3)-(6.4) probleminin çözümüdür. Şimdi de üçgen eşitsizliği kullanılarak $|y(t) - x(t)|$ farkına bakılırsa,

$$\begin{aligned}
|y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, x) e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \right) \right| \\
&\leq \left| y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, y) e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \right) \right| \\
&\quad + \left| e^{-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, y) e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t G(s, x) e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \right) \right| \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + e^{-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} \int_{t_0}^t |G(s, y) - G(s, x)| e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + L e^{-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} \int_{t_0}^t |y - x| e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + L \int_{t_0}^t |y - x| e^{-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + L \int_{t_0}^t |y - x| e^{\int_t^{t_0} p(\tau)d\tau} e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + L \int_{t_0}^t |y - x| e^{\int_t^s p(\tau)d\tau} ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizlik

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + L \int_{t_0}^t |y - x| e^{\int_t^s p(\tau)d\tau} ds$$

olarak yazılıp Gronwall eşitsizliğini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|y(t) - x(t)| &\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} L \int_{t_0}^t e^{\int_s^t (-c) d\tau} ds \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} e^{L[1 - e^{-p(t^*)(t-t_0)}]} \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^L e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}
\end{aligned}$$

elde edilir. $e^L(t_1 - t_0) = K$ olarak alınırsa Tanım 6.1.1 gereği (6.3)-(6.4) problemi HUR anlamında kararlıdır.

Şimdi de, I aralığının yarı sonsuz olması durumunu içeren hali ele alınsın. Yani, $t_1 \leq \infty$ olsun.

6.2.3. Teorem

Eğer $y \in C^1(\mathbb{R})$ yaklaşık çözüm $P(t)$ ve $Q(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $p(t) \geq c > 0$ ise (6.3)-(6.4) problemi Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır [15].

İspat

Teorem 6.2.2 de elde edilen

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} + L \int_{t_0}^t |y - x| e^{\int_t^s p(\tau) d\tau} ds$$

eşitsizliğinde Gronwall eşitsizliği $p(t) \geq c > 0$ alınarak kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|y(t) - x(t)| &\leq \varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t c ds} L \int_{t_0}^t e^{\int_s^t p(\tau) d\tau} ds \\
&\leq \varepsilon(t - t_0) e^{-c(t-t_0)} e^{L \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} ds} \\
&= \varepsilon(t - t_0) e^{-c(t-t_0)} e^{L e^{-ct} \frac{1}{c} (e^{ct} - e^{ct_0})} \\
&= \varepsilon(t - t_0) e^{-c(t-t_0)} e^{\frac{L}{c} (1 - e^{c(t_0-t)})} \\
&\leq \varepsilon(t - t_0) e^{-c(t-t_0)} e^{\frac{L}{c}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - t_0)e^{-c(t-t_0)} = 0$ ve dolayısıyla

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - x(t)) = 0$$

elde edilir. O halde (6.3) denklemi (6.4) başlangıç koşulları altında Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır.

Şimdi Bernoulli diferensiyel denklemi için Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenecektir.

$$y' + p(t)y = q(t)y^n \quad (6.5)$$

Bernoulli diferensiyel denklemi

$$y(t_0) = y_0 \quad (6.6)$$

başlangıç koşulları altında ele alınsın.

6.2.4. Tanım

Bir $\varepsilon > 0$ verilsin ve bir $y \in C^1(I)$ fonksiyonu

$$|y' + p(t)y - q(t)y^n| \leq \varepsilon \varphi(t)$$

eşitsizliğini uygun bir $\varphi(t) > 0$ fonksiyonu için sağlansın. Bu durumda (6.5)-(6.6) probleminin bir $x(t) \in C^1(I)$ çözümü var ve

$$|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon\phi(t)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ve bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyor ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

oluyor ise (6.5)-(6.6) problemine **Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta (HURG) anlamında kararlıdır** denir [15].

6.2.5. Teorem

$y' + p(t)y = q(t)y^n$ denkleminde $n > 1$ olsun. Eğer $y \in C^1(I)$ yaklaşık çözüm ve $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları I üzerinde sürekli ise (6.5)-(6.6) problemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır [15].

İspat

$y \in C^1(I)$ (6.5) denkleminin (6.6) koşulunu sağlayan yaklaşık çözümü olsun. O halde,

$$|y' + p(t)y - q(t)y^n| \leq \varepsilon \varphi(t), y(t_0) = y_0$$

olacaktır. $\varphi(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$-\varepsilon e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \leq y' + p(t)y - q(t)y^n \leq \varepsilon e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$$

yazılabilir.

Eşitsizlik $e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}$ ile çarpılırsa,

$$-\varepsilon \leq e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} (y' + p(t)y - q(t)y^n) \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik düzenlenerek,

$$-\varepsilon \leq \left(y e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \right)' - e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} q(t)y^n \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin t_0 dan t ye integrali alınırsa,

$$-\varepsilon(t - t_0) \leq y(t)e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} - y_0 - \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} q(s)y^n ds \leq \varepsilon(t - t_0)$$

elde edilir.

Eğer eşitsizlik $e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} -\varepsilon(t-t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} &\leq y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} q(s)y^n ds \right) \\ &\leq \varepsilon(t-t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\begin{aligned} \left| y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} q(s)y^n ds \right) \right| &\leq \varepsilon(t-t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \\ &\leq \varepsilon(t_1-t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \quad (t_1 < \infty) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Eğer,

$$x(t) := e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t q(s)x^n e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} ds \right)$$

olarak tanımlanırsa $x(t_0) = y_0$ sağlanır.

Şimdi de üçgen eşitsizliği uygulanırsa $|y(t) - x(t)|$ farkından

$$\begin{aligned}
|y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t q(s)x^n e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds \right) \right| \\
&\leq \left| y(t) - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t q(s)y^n e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds \right) \right| \\
&\quad + \left| e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t q(s)y^n e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t q(s)x^n e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds \right) \right| \\
&\leq \varepsilon(t_1 - t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \int_{t_0}^t |q(s)| |y^n - x^n| e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\left| \frac{\partial (q(t)y^n)}{\partial y} \right| = |nq(t)y^{n-1}|$ ifadesi her $(t, y) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}$ için sınırlıdır ve $q(t)y^n$ ifadesi $n > 1$ için Lipschitz koşulunu sağlar.

Buradan,

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t_1 - t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} + L \int_{t_0}^t |y - x| e^{\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds$$

olarak yazılıp Gronwall eşitsizliği kullanılırsa,

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon(t_1 - t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} e^{Lq_0[1 - e^{-p(t^*)(t-t_0)}]} \leq \varepsilon(t_1 - t_0)e^{Lq_0} e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$$

elde edilir. Burada $(t_1 - t_0)e^{Lq_0} = K$ alınırsa,

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon K \varphi(t)$$

elde edilir ki Tanım 6.2.1 gereği (6.5)-(6.6) problemi (HUR) anlamında kararlıdır.

Bu durum aşağıdaki örnekle açıklanabilir.

Örnek

$$y' + 4ty = ty^2, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, t_1]$$

problemini ele alalım. Eğer y yaklaşık çözüm ise, $\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t -4s ds\right) = e^{-2t^2}$ olmak üzere

$$-\varepsilon\varphi(t) \leq y' + 4ty - ty^2 \leq \varepsilon\varphi(t)$$

eşitsizliği

$$-\varepsilon e^{-2t^2} \leq y' + 4ty - ty^2 \leq \varepsilon e^{-2t^2}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlik e^{2t^2} ile çarpılırsa

$$-\varepsilon \leq e^{2t^2} (y' + 4ty - ty^2) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$-\varepsilon \leq \left(ye^{2t^2}\right)' - e^{2t^2}ty^2 \leq \varepsilon$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizliğin $t_0 = 0$ dan t ye integrali alınır

$$-\varepsilon t \leq ye^{2t^2} - \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} sy^2 ds\right) \leq \varepsilon t$$

elde edilir. Eşitsizlik e^{-2t^2} ile çarpılırsa,

$$-\varepsilon te^{-2t^2} \leq y - e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} sy^2 ds\right) \leq \varepsilon te^{-2t^2}$$

olur. Buradan,

$$\left| y - e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} sy^2 ds\right) \right| \leq \varepsilon te^{-2t^2} \leq \varepsilon t_1 e^{-2t^2} \quad (t_1 < \infty)$$

yazılabilir. Eğer

$$x(t) := e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} s x^2 ds \right)$$

olarak tanımlanırsa $x(t_0) = y_0$ sağlandığından (6.3)-(6.4) problemi sağlanır. Şimdi de üçgen eşitsizliği uygulanırsa $|y(t) - x(t)|$ farkından

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left| y(t) - e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} s x^2 ds \right) \right| \\ &\leq \left| y(t) - e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} s y^2 ds \right) \right| \\ &\quad + \left| e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} s y^2 ds \right) - e^{-2t^2} \left(1 + \int_0^t e^{2s^2} s x^2 ds \right) \right| \\ &\leq \varepsilon t_1 e^{-2t^2} + e^{-2t^2} \int_0^t s e^{2s^2} |x^2 - y^2| ds \end{aligned}$$

elde edilir.

Gronwall eşitsizliğinden ve Lipschitz koşulundan

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon t_1 e^{-2t^2} e^{\int_0^t s e^{2s^2} ds} \leq \varepsilon t_1 e^{-2t^2} e^L$$

elde edilir. Burada, $\varphi(t) = e^{-2t^2}$ olduğundan $t_1 e^L = K$ olarak alınır

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon K \varphi(t)$$

olarak yazılabilir. Tanım 6.2.1 gereği $y' + 4ty = ty^2$, $y(0) = 1$, $t \in [0, t_1]$ problemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada önce fonksiyonel denklemlerin daha sonra birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin ve en sonunda da Bernoulli diferensiyel denkleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam- Rassias anlamında kararlılıkları incelenmiştir.

Diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı üzerine yapılan çalışmalar 2000 li yıllardan sonra oldukça artmıştır. Bu çalışmalarda bazı lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin, birinci basamaktan lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin, yüksek basamaktan lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam, Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılığı ile ilgili yapılan çalışmalar ele alınmaktadır.

Son yıllarda kısmi diferensiyel denklemler, integral denklemleri, bir zaman skalası üzerinde tanımlı dinamik denklemler ve kesirli mertebeden diferensiyel denklemler için Hyers-Ulam kararlılığı üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Bu konuya ilgi duyan okuyucular yüksek mertebeden lineer diferensiyel denklemler için Hyers-Ulam, Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılığı problemini yoğun bir şekilde çalışmaktadırlar. Bu tezde ele aldığımız çalışmaların, bu alanda çalışacak olan bilim insanlarını bilgilendireceği ve onların çalışmalarına yardımcı olacağı düşüncesindeyiz.

Dolayısıyla kısmi türevli denklemler, zaman skalası üzerinde dinamik denklemler veya kesirli mertebeden diferensiyel denklemler üzerinde Hyers-Ulam, Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılığı çalışmayı düşünen bir bilim insanının bu ve buna benzer çalışmaları okuması faydalı olacaktır.



KAYNAKLAR

1. Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A. (2010). *Soyut Matematik* (Dördüncü Baskı). Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara.
2. Alsina, C., Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function. *Journal of Inequalities and Applications*, 2(4), 373-380.
3. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz* (Üçüncü Baskı). Gazi Kitabevi, Ankara.
4. Çakar, Ö. (2002). *Fonksiyonel Analize Giriş*. Ankara Üniversitesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
5. Forti, G. L. (1995). Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables, *Aequationes Mathematicae* 50, 143-190.
6. Hacısalihoğlu, H. H. (2010). *Lineer Cebir Cilt 1* (Dokuzuncu Baskı). Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara.
7. Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.* 27, 222-224.
8. Jung, S. M. (2005). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, 311, 139-146.
9. Mısır, A. (2018). *Teori Teknik ve Uygulamalı Diferensiyel Denklemler* (İkinci Baskı). Gazi Kitabevi, Ankara.
10. Miura, T., Takahasi, S. E., Choda, H. (2001). On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued diferentiable map. *Tokyo Journal of Mathematics*, 24, 467-476.
11. Miura, T. (2002). On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 55 , 17-24.
12. Miura, T., Jung, S. M., Takahasi, S. E. (2003). A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, 286, 136-146.
13. Miura, T., Jung, S. M., Takahasi, S. E. (2004). Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations $y' = \lambda y$. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 41, 995-1005.
14. Onitsuka, M., Shoji, T. (2017). Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a real-valued coefficient. *Applied Mathematics Letters*, 63, 102-108.

15. Qarawani, M. N. (2014). On Hyers-Ulam-Rassias stability for Bernoulli's and first order linear and nonlinear differential equations. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 4(11), 1615-1628.
16. Rassias, J. M. (1989). Solution of a problem of Ulam. *Journal Of Approximation Theory*, 57, 268-273.
17. Takahasi, S. E., Miura, T. and Miyajima, S. (2002). On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 39, 309-315.
18. Yanovsky, I. (2005). Ordinary Differential Equations. *Graduate Level Problems and Solutions*, 1-128.
19. Yang, D. (2004). The stability of the quadratic functional equation on amenable groups. *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, 291, 666-672.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : KİTAN UYAR, Nalan
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 10.09.1981-Ankara
 Medeni hali : Evli
 e-mail : nalanuyar@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Tezsiz Yüksek lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik Öğr. Böl.	2005
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik Böl.	2003
Lise	Ankara Başkent Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-	Sağlık Bakanlığı	Programcı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Kitan Uyar, N., Mısır, A., *On Hyers-Ulam-Rassias Stability For First-Order Differential Equations and Bernoulli Differential Equations*. International Conference on Mathematics and Mathematics Educations 2018, Ordu University, 27-29 June, Ordu, Türkiye.

Hobiler

Kitap okumak, film izlemek, seyahat etmek, puzzle yapmak, kültürel ve sanatsal etkinliklere katılmak.



GAZİ GELECEKTİR..