

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN
BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**

GAMZE LÜLECİ

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

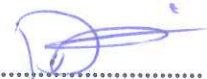
MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN
BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

GAMZE LÜLECİ

Doç Dr.Ali DEMİR
Danışman, Kocaeli Üniversitesi
Doç. Dr.Mine Aylin BAYRAK
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi
Dr. Öğr. Üyesi Sertaç ERMAN
Jüri Üyesi, Medipol Üniversitesi


.....

.....

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 15.02.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Matematik anabilim dalı açısından bakıldığında yeni sayılabilecek bu araştırma alanına ilk defa ilgi duymamı sağlayan, yol göstericiliği ve danışmanlığı ile tezimi çok daha iyi bir seviyeye getirmemde yardımcı olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali Demir'e bütün önerileri, anlayışı ve yönlendirmeleri için çok teşekkür ediyorum. Tez çalışması süresince verdiği akademik bilgiler ve fikir alışverişleri bu tezin ortaya çıkmasında büyük bir rol oynamıştır.

Ayrıca her zaman benimle birlikte olan ve bu tez çalışması sırasında sürekli bana destek olan çok sevgili aileme ve yol arkadaşım Muhammed Gedik'e anlayışları ve gösterdikleri sabır için çok teşekkür ediyorum.

Ocak -2019

Gamze LÜLECİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
GİRİŞ	1
1. KESİRLİ MERTEBEDEN HESAPLAMALAR	3
1.1. Gama Fonksiyonu.....	3
1.2. Beta Fonksiyonu.....	5
1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	7
2. KESİRLİ OPERATÖRLER.....	9
2.1. Tekrarlı İntegral İçin Cauchy Formülü	9
2.2. Riemann-Liouville Yaklaşımı	11
2.3. Caputo Yaklaşımı	12
2.4. Differintegralin Temel Özellikleri.....	14
2.4.1. Differintegralin lineerliği	15
2.4.2. Differintegrallerin sonsuz serilere uygulanabilirliği	15
2.4.3. Riemann Liouville ve Caputo yaklaşımlarının birbirine denkliği.....	15
2.4.4. Differintegralin değişme özelliği	16
3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	18
3.1. Sonlu Aralıkta Difüzyon Probleminin Çözümü	18
3.2. İç Çarpım Uzayı	21
3.3. Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Çözümü.....	22
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	30
KAYNAKLAR	31
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER	33
ÖZGEÇMİŞ	34

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Gama Fonksiyon Grafiği	5
Şekil 1.2. Beta Fonksiyon Grafiği.....	6
Şekil 1.3. Mittag Leffler Fonksiyon Grafiği	7



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

β	: Beta Fonksiyonu
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
${}^C D^\alpha$	: Caputo Kesirli Türevi
$\mathcal{D}$	: Differintegral
D^α	: Riemann-Liouville Kesirli Türevi
$E_{\alpha,\beta}$	: Mittag Leffler Fonksiyonu
$\exp$	: Üstel Fonksiyon
Γ	: Gama Fonksiyonu
J^α	: Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Son yıllarda, matematik literatüründe 300 yılı aşkın bir süredir var olan kesirli mertebeden türev ve integral kavramlarının, sistem modellemeye kontrolör tasarımı, elektrokimya, biyomühendislik, biyofizik, fizik, mekanik-mekatronik gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok alanında uygulanmaktadır.

Bu çalışmada öncelikle 19. yy. da ortaya atılan ve literatürde sıklıkla kullanılan Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımı verilmiştir. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımının Laplace dönüşümünde ortaya çıkan sorunlarını gideren literatürde önerilmiş Caputo kesirli mertebeden türev tanımı verilmiştir. Riemann Liouville ve Caputo türevlerinin cebirsel özellikleri, sonsuz serilere uygulanabilirliği gösterilmiş, Riemann ve Caputo türevlerinin birbirine denkliği incelenmiştir. Daha sonra kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri incelenmiş, özellikle ayrılabilir kesirli mertebeden diferansiyel denklemler üzerinde durulmuştur.

Son olarak da bu tez çalışmasında kesirli mertebeden difüzyon denklemi için sonlu aralıkta sınır değer problemleri çözümüne yer verilmiştir. Bu kapsamda, λ özdeğerlerine karşılık gelen bir özfonksiyon elde edilmiş ve sistemi sağlayan genel çözüm bulunmuştur. Ardından çalışılan sınır değer problemiyle ilgili uygulama gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Başlangıç Sınır Değer Problemi, Caputo Kesirli Türevi, Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi, Mittag-Leffler Fonksiyonu.

ON THE SOLUTION OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SPACE-FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

ABSTRACT

In recent years, the fractional order of derivative and integral concepts, which existed in the mathematical literature for more than 300 years, have been applied in many areas of engineering and mathematics such as electrochemistry, bio-engineering, bio-physic, mechanical, mechatronics, controller design, system modeling.

In this study, firstly, Riemann-Liouville fractional order derivative which was introduced in 19th century was used. In addition, the definition of Riemann-Liouville fractional order derivative of the definition of the Laplace transformation of the problems that arise in the literature suggested the definition of Caputo fractional order derivative. The algebraic properties of Riemann Liouville and Caputo derivatives, their applicability to infinite series, and the equivalence of Riemann and Caputo derivatives have been investigated. Then, analytical solutions of fractional order differential equations have been examined, especially separable fractional differential equations have been studied.

Finally, in this thesis, the solution of the boundary value problems in a range for the fractional order diffusion equation is given. In this context, eigenfunctions corresponding to the eigenvalues λ is obtained and a general solution to the system is found. Then, the boundary value problem which is related to its application has been solved.

Keywords: Initial-Boundary Value Problem, Caputo Fractional Derivative, Space-Fractional Diffusion Equation, Mittag-Leffler Function.

GİRİŞ

Kesirli türev ve integral kavramları ilk defa 17. yüzyılın ikinci yarısında Leibniz ve Newton tarafından birbirlerinden habersiz olarak geliştirilmiştir. Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen tam sayılı mertebeden türev ve integral işlemlerinin bir genelleştirmesi olarak kabul edilen kesirli mertebeden türev ve integral kavramı da, aslında tam sayılı mertebeden türev ve integral kadar eskidir. Kesirli mertebeden türev ile ifade edilmek istenen aslında herhangi bir mertebeden türevdir. Birçok kaynakta da değinildiği gibi kesirli mertebeden türev ifadesi ilk defa 1695 yılında Leibniz'in L'hospital'e yazdığı bir mektupta geçmektedir. Bu mektubunda Leibniz L'hospital'e "Tam sayılı mertebeden türevler daha genişletilmiş olan reel sayılı mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" diye sormuştur.

Tam sayılı türev işleminde olduğu gibi, kesirli mertebeden türev için de literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir ancak kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türev mertebesi tam sayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade Leibniz ve Newton tarafından önerilen tam sayılı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır. Literatürde en çok söz edilen tanımlar, daha sonraki bölümlerde ayrıntısıyla değinilecek olan Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev tanımlarıdır. Yapılan çalışmalarda bu iki tanımın bazı durumlarda birbiri cinsinden ifade edildiği gösterilmiştir. Caputo kesirli mertebeden türev tanımı, Riemann-Liouville tanımının Laplace dönüşüm ifadesinin uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak için 1960'lı yıllarda İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından önerilmiştir [1].

Başlangıçta, soyut matematiğin bir konusu olan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler ve yapılan çalışmalar sayesinde günümüzde kendisine birçok uygulama alanı bulmuştur. Bu uygulamaların önemli bir kısmının fizik, matematik problemi modellemelerinde, karmaşık dinamik sistemlerin modellenmesi olduğu söylenebilir [2].

Bu tez çalışmasında kesirli mertebeden difüzyon denklemi için sonlu aralıkta sınır değer problemi oluşturulmuştur. λ özdeğer olmak üzere λ 'nın alabileceği tüm değerlere bağlı çözümler incelenmiş ve bu özdeğerlere bağlı bir özfonksiyonlar elde edilmiştir. Elde edilen özfonksiyonlar kullanılarak genel çözüme ulaşılmıştır. Ardından konuyla ilgili difüzyon denklemi için sınır değer problemi uygulaması yapılmıştır.



1. KESİRLİ MERTEBEDEN HESAPLAMALAR

Klasik analizin ana konusu; bazı durumda birbirine göre ters iki operatör olan fonksiyonların türev ve integralleridir. Bir $f(t)$ fonksiyonu düşünülürse her tamsayı mertebeden türev ve integral alarak devam edildiğinde iki taraftan da sonsuz dizi elde edilir:

$$\dots, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \frac{d f(t)}{dt}, f(t), \int_a^t f(\Gamma) d\Gamma, \int_a^t \int_a^{\Gamma_1} f(\Gamma) d\Gamma d\Gamma_1, \dots \quad (1.1)$$

Kesirli analiz yukardaki dizi enterpolasyonunu tekrarladığından keyfi mertebeden için bu işlem klasik türev ve integrallerin birleştirilmiş genellemesidir. Bu durumda türev ve integralin bir arada kullanılması sebebiyle bazı kaynaklarda differintegral ifadesine yer verilmiştir. Differintegral tanımlamak için birçok operatör tanımlanmıştır. Örneğin; differintegralin Grünwald Letnikov tanımı sonsuz küçük boyut ve limit üstünde integral ve türev tabanının klasik tanımından başlar. Bu yaklaşımın dezavantajı fonksiyonlar üstünde büyük kısıtlamalar ve hesaplamaların teknik zorluklarıdır. Neyse ki Riemann-Liouville tanımı gibi özel bir durum olarak Letnikov tanımının sonucunu içeren daha kullanışlı bir yaklaşım vardır [3].

Bu bölümde Riemann-Liouville ve Caputo türevlerinin tanımını yapmakta yardımcı olan Gama Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu ve Mittag Leffler Fonksiyonu tanımları yapılacaktır. Beta Fonksiyonunun Gama Fonksiyonu cinsinden yazımı incelenecek ve adi diferansiyel denklemlerin genel çözümünde elde edilen üstel fonksiyonun yerine kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin genel çözümünde Mittag Leffler Fonksiyonunun kullanıldığı görülecektir.

1.1. Gama Fonksiyonu

Gamma fonksiyonunu, Euler'in ikinci tür integral formu olarak tanımlamak standart olmasına rağmen, s pozitif bir tamsayı olduğunda faktöriyel fonksiyonunun bir uzantısı olarak da görülebilir.

Gama fonksiyonu $\forall s \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tümevarımdan;

$$\Gamma(1) = 1 \quad (1.3)$$

$\forall s \in \mathbb{N}$ için;

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (1.4)$$

olarak bulunur.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (1.5)$$

olur ki bu bize Gama fonksiyonunun faktöriyel fonksiyonu olduğunu söyler.

Euler, Gama fonksiyonunu kullanarak, kesirli analiz için bazı fikirler ortaya koymuştur(monomialler);

$m \in \mathbb{Z}$ için bir monomialin n . mertebeden türevini düşünölsün;

$$y(x) = x^m \quad (1.6)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & , m \geq n \\ 0 & , m < n \end{cases} \quad (1.7)$$

$s, \mu \in \mathbb{R}^+$ 'a genelleme yapmak için Gama fonksiyonu kullanılırsa;

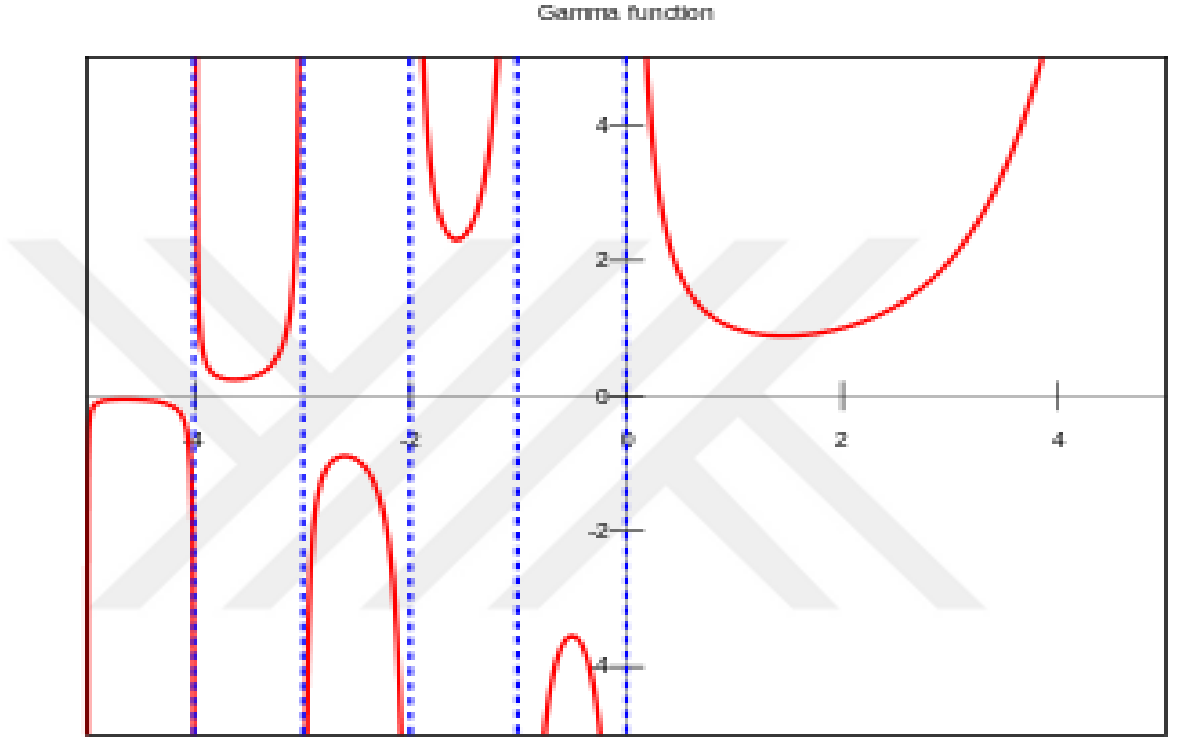
$$y(x) = x^\mu \quad (1.8)$$

$$\frac{d^s y}{dx^s} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-s+1)} x^{\mu-s} \quad (1.9)$$

ifadesi elde edilir [4].

Örneğin; sabit fonksiyonların kesirli türevi sıfırdan farklıdır. $y(x)=1$ fonksiyonunun $1/2$. mertebeden kesirli türevi;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$



Şekil 1.1. Gama Fonksiyon Grafiği

1.2. Beta Fonksiyonu

$\text{Re}(z) > 0$ ve $\text{Re}(w) > 0$ şartını sağlayan z ve w parametrelerine bağlı Beta fonksiyonu genelleştirilmiş integral yardımıyla;

$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ şeklinde tanımlanır. Kuvvet fonksiyonunun kesirli türevinin hesaplanması için Beta fonksiyonu çok önemlidir [5].

Laplace dönüşümü yardımıyla Beta fonksiyonunu Gama fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir;

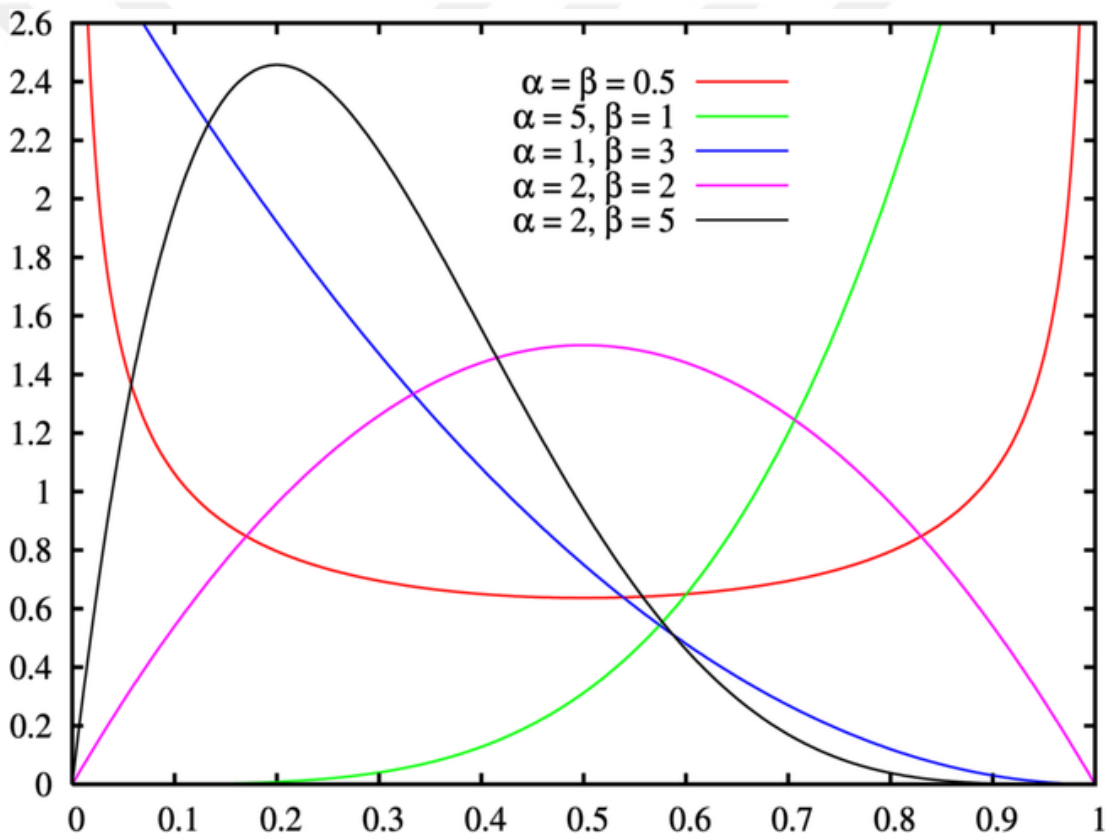
$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (1.11)$$

Beta fonksiyonu kullanılarak Gama fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki kullanışlı sonuçlar elde edilmiştir;

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.12)$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z) \quad (1.13)$$

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2z)!}{2^{2z}z!} \quad (1.14)$$



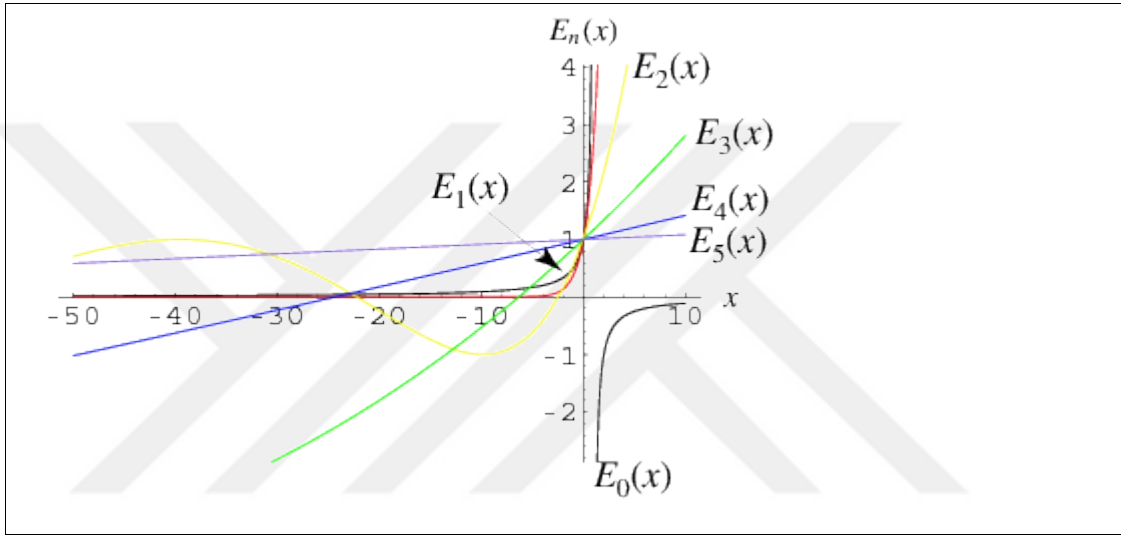
Şekil 1.2. Beta Fonksiyon Grafiği

1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Tamsayıli mertebeden diferansiyel denklem çözümlerinde e^x üstel fonksiyonu çok önemli bir yere sahiptir. Bu üstel fonksiyonu seri formunda yazılırsa;

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \quad (1.15)$$

İfadesi elde edilir.



Şekil 1.3. Mittag Leffler Fonksiyon Grafiği

Üstel fonksiyonların genelleştirilmiş hali, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde çok önemli rol oynayan Mittag Leffler fonksiyonudur. Mittag Leffler fonksiyonunu tanımlanırsa;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad , \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

Özel α ve β parametrelerinin değerleri için aşağıdaki iyi tanımlı klasik fonksiyonlar elde edilir;

$$E_{1,1}(z) = e^z \quad (1.17)$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.18)$$

$$E_{2,1}(z^2)=\cosh(z) \quad (1.19)$$

$$E_{2,2}(z^2)=\frac{\sinh(z)}{z} \quad (1.20)$$

$$E_{\frac{1}{2},1}(z)=e^{z^2}\operatorname{erfc}(-z) \quad (1.21)$$

Mittag Leffler Fonksiyonu düzgün yakınsak olduğundan terim terim türev alınabilir. Bu tür durumlarda aşağıdaki fonksiyonu kullanılır;

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)} \quad (1.22)$$

Sınır değer problemlerinin çözümünde önemli rol oynayan aşağıdaki fonksiyonlara tanımlansın;

$$\begin{aligned} \sin_q(\mu t^q) &= \frac{E_{q,1}(i\mu t^q) - E_{q,1}(-i\mu t^q)}{2i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)q+1)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \cos_q(\mu t^q) &= \frac{E_{q,1}(i\mu t^q) + E_{q,1}(-i\mu t^q)}{2i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\mu t^q)^{2k}}{\Gamma(2kq+1)} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dikkat edilirse $q=1$ için bu fonksiyonlar $\sin(\mu t^q)$ ve $\cos(\mu t^q)$ birim trigonometrik fonksiyonlarıdır [6].

2. KESİRLİ OPERATÖRLER

Önceki çalışmalar da dahil olmak üzere kesirli diferansiyel denklemler, çeşitli bilimsel araştırma alanlarında, çok çeşitli süreç ve sistemlerde ortaya çıktığı için, birçok uzman ve akademisyen için çok çekici ve motive edici bir konu haline gelmiştir. Bu eğilimin ana nedeni, kesirli mertebeden türev içeren matematiksel modellerinin tamsayı mertebeden türev içeren matematiksel modellerden daha iyi sonuçlar vermesidir. Bu özellik, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri fiziksel problemlerin modellenmesinde en iyi seçim yapmıştır.

Bu bölümde Riemann Liouville ve Caputo türevleri incelenecektir. Kullanım açısından bir karşılaştırma yapmak gerekirse Caputo türevleri daha kullanışlıdır. Çünkü Caputo türevlerini içeren matematiksel modellerin analizi, tamsayı mertebeden türevleri içeren matematiksel modellerin analizine daha yakın sonuçlar vermektedir. Literatürde bu sonuca destek veren oldukça fazla çalışma bulunmaktadır. En sık kullanılan fonksiyon olan Mittag-Leffler fonksiyonundan yararlanılarak, kesirli diferansiyel denklemlerin karakteristik denklemlerinin çözümleri etkin bir şekilde oluşturulmuştur. Bu anlamda, adi diferansiyel denklemler için çözümlerin belirlenmesinde kullanılan üstel fonksiyon, Mittag-Leffler fonksiyonu ile yer değiştirir. Aslında üstel fonksiyon Mittag-Leffler fonksiyonunun özel halidir.

2.1. Tekrarlı İntegral İçin Cauchy Formülü

Teorem 2.1.1. f , $[a, b]$ üzerinde sürekli olan herhangi bir fonksiyon olsun. f 'nin a noktasındaki n katlı integrali;

$$f^{(-n)}(x) = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (2.1)$$

tek katlı integral olarak

$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} = \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.2)$$

şeklinde verilir [4].

İspat. İspat için tümevarım yönteminden yararlanılır. $n=1$ için;

$$(x-t)^{n-1} = (x-t)^0 = 1 \quad (2.3)$$

olur. Yani $n=1$ için,

$$\int_a^x f(\sigma_1) d\sigma_1 = \frac{1}{(0!)} \int_a^x (x-t)^0 f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.4)$$

ifadesi sağlanır.

Şimdi kabul edelim ki keyfî bir n için bu ifade sağlansın. İntegrasyon sırası değiştiğinde $n+1$ için ;

$$f^{(-(n+1))}(x) = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \dots \int_a^{\sigma_1} f(\sigma_{n+1}) d\sigma_{n+1} d\sigma_n \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_a^{\sigma_1} (\sigma_1 - t)^{n-1} f(t) dt d\sigma_1 \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_t^x (\sigma_1 - t)^{n-1} f(t) d\sigma_1 dt \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{(n)!} \int_a^x ((x-t)^n - (t-t)^n) f(t) dt \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{(n)!} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt \quad (2.9)$$

Denklem (2.9) istenilen sonuçtur [6].

2.2. Riemann-Liouville Yaklaşımı

Tanım 2.2.1. f sürekli bir fonksiyon, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun. α mertebeli kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \quad (2.10)$$

Tanım 2.2.2. $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n > \alpha$, (n, α) 'ya en yakın tamsayı olsun. Bir $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} J^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} f(u) du \quad (2.11)$$

Teorem 2.2.1. $p \geq 0$ için $f(t) = t^p$ kuvvet fonksiyonunun $n-1 < \alpha < n$ için $\alpha > 0$ mertebeli Riemann-Liouville türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$D^\alpha t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.12)$$

İspat. $\alpha > 0$ mertebeli Riemann-Liouville türevini hesaplınsın;

$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} u^p du \quad (2.13)$$

$0 \leq v \leq 1$ için $u = vt$, $du = t dv$ ve

$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 ((1-v)t)^{n-\alpha-1} (vt)^p t dv \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-v)^{n-\alpha-1} v^p dv \frac{d^n}{dt^n} t^{n+p-\alpha} \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} B(p+1, n-\alpha) \frac{d^n}{dt^n} t^{n+p-\alpha} \quad (2.16)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} B(p+1, n-\alpha) \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+p-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.18)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.19)$$

Burada B -Beta fonksiyonu $x, y > 0$ için

$$B(x, y) = \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{y-1} dv, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir [5].

2.3. Caputo Yaklaşımı

Tanımın 2.3.1. $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n > \alpha$ (n, α 'ya en yakın tamsayı) olsun. Bir $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeli Caputo kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$${}^c D^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du \quad (2.21)$$

Örneğin; $f(x)=x$ fonksiyonunun $n=1$ için $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevi hesap edilirse;

$${}^c D_x^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dt}(t) dt \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.23)$$

$$t=ux \quad dt=x du$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \quad (2.24)$$

$$= \frac{\beta\left(\frac{1}{2}, 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

Elde edilen sonucun tekrar $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevini alınırsa;

$${}^c D_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{1}{2}} \right) dt \quad (2.26)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \quad (2.27)$$

$$t=ux \quad dt=xdu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} du \quad (2.28)$$

$$= \frac{\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 \quad (2.29)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak $f(x)=x$ fonksiyonunun 2.kez $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevini alındığında 1. mertebeden adi türevi alınmış olur.

Teorem 2.3.1. $p \geq 0$ için $f(t)=t^p$ kuvvet fonksiyonunun $n-1 < \alpha < n$ olmak üzere $\alpha > 0$ mertebeden Caputo türevi;

$${}^c D^{\alpha} t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} & , \quad p > n-1 \\ 0 & , \quad p \leq n-1 \end{cases} \quad (2.30)$$

şeklinde hesaplanır.

İspat. $p \leq n-1$ olduğunda yani;

$$\frac{d^n}{dt^n} t^p = 0 \quad \text{ve} \quad {}^c D^n t^p = \frac{1}{\Gamma(n-n)} \int_0^t 0 = 0 \quad (2.31)$$

olur.

$p > n-1$ olduğunda Caputo türevi;

$${}^c D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} u^{p-n} du \quad (2.32)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 ((1-v)t)^{n-\alpha-1} (vt)^{p-n} t dv \quad (2.33)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \int_0^1 (1-v)^{n-\alpha-1} v^{p-n} dv \quad (2.34)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)B(p-n+1, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.35)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.36)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \quad (2.37)$$

olarak verilir [5].

2.4. Differintegralin Temel Özellikleri

Differintegralı $\mathfrak{D}$ notasyonu ile ifade edilir.

2.4.1. Differintegralin lineerliği

μ, λ, α, a reel sabitleri için $f(t)$ ve $g(t)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere;

$$D_a^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t) \quad (2.38)$$

eşitliği sağlanır [3].

2.4.2. Differintegrallerin sonsuz serilere uygulanabilirliği

Bu sorunun çözümü için Riemann Liouville türevi;

$a > 0, n = [\alpha] + 1$ olmak üzere;

$$D_a^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\tau) d\tau \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \sum_{k=0}^{\infty} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f_k(\tau) d\tau \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f_k(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} D_a^\alpha f_k(t) \quad (2.42)$$

Öyleyse aynı koşullar altında serilerin düzgün yakınsak olduğu yerde;

$$D_a^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_a^\alpha f_k(t) \quad (2.43)$$

genel formülü elde edilir [3].

2.4.3. Riemann Liouville ve Caputo yaklaşımlarının birbirine denkliği

$f(t)$ fonksiyonu $(n-1)$ kez diferansiyellenebilir ve $f^n(t)$ integrallenebilir fonksiyon olsun. $a > 0$, $n = [\alpha] - 1$ ve $\alpha \neq n+1$, $n = n_c$ olmak üzere ;

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{(t-a)^{n-\alpha} f(a)}{n-\alpha} + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} f'(\tau) d\tau \right] \quad (2.45)$$

$$= \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{n+k-\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{2n-\alpha-1}}{n-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] \quad (2.46)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} + {}^c D_a^\alpha f(t) \quad (2.48)$$

$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için $f^{(k)}(a)=0$ özel fonksiyonu için toplam ortadan kalkar ve $a \rightarrow -\infty$ ve $k < \alpha$ iken; $D_{-\infty}^\alpha f(t) = {}^c D_{-\infty}^\alpha f(t)$ elde edilir ki bu da sorunun cevabı olur [6].

2.4.4. Differintegralin değişme özelliği

$$D_a^{-\alpha} \left(D_a^{-\beta} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\xi (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right) d\xi \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^\xi (t-\xi)^{\alpha-1} (\xi-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau d\xi \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t-\xi)^{\alpha-1} (\xi-\tau)^{\beta-1} d\xi d\tau \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) d\tau \quad (2.52)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (2.53)$$

$$= D_a^{-(\alpha+\beta)} f(t) \quad (2.54)$$

Sonuç olarak differintegral değişme özelliğine sahiptir [3].



3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu çalışmanın amacı, çeşitli uygulamalara sahip tek boyutlu difüzyon denklemi için başlangıç sınır değer probleminin analitik çözümünü elde etmektir. Kesirli mertebeden türevler Caputo anlamında alınır, çünkü Caputo türeviyle verilen başlangıç sınır değer problemi tamsayı mertebeden türev içeren başlangıç sınır değer problemlerine yakın sonuçlar verir.

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleme, değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanarak kesirli mertebeden türevi içeren biri adi diferansiyel denklem diğeri kesirli mertebeden diferansiyel denklem olmak üzere iki diferansiyel denkleme ayrıştırılır. Genelleştirilmiş çözüm, belirli bir özdeğer probleminin özfonksiyonları kullanılarak bir Fourier serisi biçiminde oluşturulur. Bu seride bilinmeyen katsayılarını elde edebilmek için, tek boyutlu kesirli mertebeden difüzyon denklemi için başlangıç koşulu kullanılır. Başlangıç ve sınır koşullarının kullanılmasıyla, kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi içeren başlangıç sınır değer probleminin analitik çözümü elde edilir.

İlk olarak kesirli mertebeden difüzyon denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümüne başlamadan önce çözümde kullanacağımız değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemler, sonlu aralıkta difüzyon denkleminin çözümü ve yeni bir iç çarpım uzayı tanımlayalım.

3.1. Sonlu Aralıkta Difüzyon Probleminin Çözümü

$(0, 1)$ aralığında bir difüzyon problemi düşünülürse;

$$u_t - k u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(1, t) = 0 \quad (3.3)$$

Bu problemin çözümü için değişkenlerine ayrılabilme metodu uygulanır. Varsayalım x ve t değişkenlerine ayrılabilir $u(x, t)$ çözümü aşağıdaki gibi verilsin;

$$u(x,t)=X(x)T(t) \quad (3.4)$$

Denklem (3.4), Denklem (3.1)'de yerine yazılırsa;

$$X(x)T'(t)-kX''(x)T(t)=0 \quad (3.5)$$

elde edilir. Her iki taraf $X(x)T(t)$ çarpımına bölünürse;

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda \text{ sabit} \quad (3.6)$$

şeklinde olur. Buradan ,

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (3.7)$$

$$T' + \lambda k T = 0 \quad (3.8)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (3.3)'ten

$$X(0)=X(l)=0 \quad (3.9)$$

olduğundan $u(x, t)=0$ aşıkâr çözüm olur.

Sınır Değer Problemi (3.7)-(3.9) çözümü için Denklem (3.7)'in karakteristik denklemi;

$$r^2 + \lambda = 0 \quad (3.10)$$

olur. Bu denklemin λ 'ya bağlı 3 farklı çözümü mevcuttur.

i. $\lambda=0$ ise $r_1=r_2=0$ olduğunda;

$$X(x)=(c_1+c_2x)e^{0 \cdot x}=c_1+c_2x \quad (3.11)$$

Denklem (3.7)'den $0=X(0)=c_1, 0=X(l)=c_2.l \Rightarrow c_2=0$ sınır koşulları elde edilir.

$X(x)=0$ olduğundan $u(x, t)=0$ çözümü başlangıç koşulunu sağlamadığı için çözüm yoktur.

ii. $\lambda < 0$ ise $r_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$ olur ki;

$$X(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x} = A \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B \sinh(\sqrt{-\lambda}x) \quad (3.12)$$

çözümü elde edilir. Sınır koşulları yerine yazılırsa;

$0 = X(0) = A$ ve $0 = X(l) = B \sinh(\sqrt{-\lambda}l)$, $B \neq 0$ olduğundan çelişki olur. Dolayısıyla bu durumda da çözüm yoktur.

iii. $\lambda > 0$ ise $r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}i$ olur ki;

$$X(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (3.13)$$

elde edilir. Sınır koşulları yerine yazılırsa; $0 = X(0) = c_1$; $0 = X(l) = c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}l)$, $c_2 \neq 0$ elde edilir.

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.14)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n=1,2,\dots \quad (3.15)$$

λ_n değerleri problemin özdeğerleri olup bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar;

$$X_n(x) = c_2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.8)'e geri dönülürse;

$$T_n(t) = c_n \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2k}{l^2}t}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.17)$$

şeklinde çözümü elde edilir.

Denklem (3.16) ve Denklem (3.17) genel çözümde yerine yazılırsa;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2k}{l^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad c_n^* = c_2 \cdot c_n \quad (3.18)$$

elde edilir.

Denklem (3.2) sınır koşulu kullanılarak;

$$u(x,0)=\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (3.19)$$

elde edilir.

Bu denklemin çözümünde c_n^* katsayısını bulmak için $(0, l)$ aralığında $\phi(x)$ 'in iç çarpımından yararlanılır;

$$c_n^* = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad (3.20)$$

3.2. İç Çarpım Uzayı

Bu bölümde başlangıç sınır değer probleminin çözümünü tanımlamak için yeni bir iç çarpım uzayı tanımlanır.

Lineer kesirli mertebeden türe ve sahip olan kısmi diferansiyel denklemleri içeren başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünü değişkenlerine ayrılabilir yöntemle çözmek için bir iç çarpım tanımlamasına ihtiyaç vardır. Dolayısıyla böyle bir iç çarpımın tanımlanması bu tür başlangıç sınır değer problemlerinin analitik çözümünün elde edilmesinde teoride ve uygulamada büyük katkı sağlayacaktır. Böyle bir iç çarpımın yokluğundan dolayı bu tür başlangıç sınır değer problemlerini çözümünde nümerik yöntemler kullanılmış ve yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Sonuç olarak böyle bir iç çarpım tanımlayıp, elde edilen iç çarpım uzayında tamsayı mertebeden kısmi diferansiyel denklemler içeren başlangıç sınır değer problemi için elde edilen teoremler kesirli diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemlerine genişletilecektir. Ayrıca elde edilen seri çözümündeki bilinmeyen katsayılar yeni iç çarpım kullanılarak kolay bir şekilde bulunacaktır [7,8].

Teorem 4. $I = [a, b]$ kapalı aralığında $0 < \beta \leq 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere β ve μ sabitleri için $\sin_{\beta}(\mu(\frac{x}{b-a})^{\beta})$ ve $\cos_{\beta}(\mu(\frac{x}{b-a})^{\beta})$ tüm lineer kombinasyonlarını içeren bir L vektör uzayı olsun.

$T:V \rightarrow \text{span} \left\{ \sin \left(\mu \left(\frac{x}{b-a} \right) \right), \cos \left(\mu \left(\frac{x}{b-a} \right) \right) \right\}$ bire bir ve örten lineer dönüşüm verilsin. Bu durumda T^{-1} ters dönüşümü mevcuttur.

$\langle ., . \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $T_u(x; \beta) = u(x, 1)$ ve $T_v(x; \beta) = v(x, 1)$ olmak üzere;

$$\langle u(x; \beta), v(x; \beta) \rangle = T^{-1} \left(\int_{x=a}^{x=b} (T_u(x; \beta) T_v(x; \beta) dx) \right) \quad (3.21)$$

$$\langle u(x; \beta), v(x; \beta) \rangle = \int u(x, 1) v(x, 1) dx = w(x, 1) \quad (3.22)$$

Bu noktada $w(x, 1)$ fonksiyonuna karşılık gelen $w(x, \beta)$ fonksiyonuna dönüştürülür. İntegral değerlerini yerine koyup β değerine geri dönülürse yeni bir iç çarpım uzayı tanımlanır [7,8];

$$\langle u(x; \beta), v(x; \beta) \rangle = w(x, \beta) \Big|_{x=a}^{x=b} = w(b, \beta) - w(a, \beta) \quad (3.23)$$

3.3. Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi İçin Başlangıç Sınır Değer Probleminin Çözümü

Bu bölümde kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi içeren başlangıç sınır değer problemini incelenecektir.

$(0, 1)$ aralığında verilen difüzyon problemi düşünölsün;

$$u_t = k^c D_x^{2q} u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad 0 < q < 1 \quad (3.24)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (3.25)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (3.26)$$

Bu problemin içerdöği kesirli diferansiyel denklem lineer olduğu için değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak çözülebilir. Kabul edelim ki $u(x, t)$ çözümlü x değişkenini içeren bir fonksiyon ile t değişkenini içeren fonksiyonun çarpımı olarak aşığıdaki gibi yazılabilir;

$$u(x, t; q) = X(x; q) T(t; q) \quad (3.27)$$

Denklem (3.24)'ten;

$$X(x;q)T'(t;q)=k {}^cD_x^{2q}X(x;q)T(t;q) \quad (3.28)$$

denklemini elde edilir. Her iki taraf da $X(x;q)T(t;q)$ çarpımına bölünürse;

$$\frac{T'(t;q)}{kT(t;q)} = \frac{{}^cD_x^{2q}X(x;q)}{X(x;q)} = -\lambda(q) \quad (3.29)$$

eşitliğini elde edilir.

Burada $\lambda(q)$ sabiti kesirli türevin mertebesine bağlıdır. Denklem (3.29)'de biri kesirli mertebeden diferansiyel denklem diğeri adi diferansiyel denklem olmak üzere iki tane ayrılabilir diferansiyel denklem elde edilir. Sınır Koşulu (3.25) sağ taraftaki denkleme uygulanırsa kesirli mertebeden diferansiyel denklemi içeren aşağıdaki problem elde edilir;

$${}^cD_x^{2q}X(x;q)+\lambda(q)X(x;q)=0 \quad (3.30)$$

$$X(0;q)=0 \quad X(l;q)=0 \quad (3.31)$$

Ve sol taraftaki adi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$T'(t;q)+\lambda(q)kT(t;q)=0 \quad (3.32)$$

Denklem (3.30) - (3.31) özdeğer probleminin çözümünü Mittag–Leffler fonksiyonu cinsinden $X(x; q)=E_{q,1}(rx^q)$ formunda bulunursa karakteristik denklem aşağıdaki gibi elde edilir;

$$r^2+\lambda(q)=0 \quad (3.33)$$

Denklem (3.33) çözümünde $\lambda(q)$ 'ya bağlı 3 farklı durum incelenecektir;

1.Durum: $\lambda < 0$ ise $r_1=\sqrt{-\lambda}$ and $r_2=-\sqrt{-\lambda}$ şeklinde iki reel ayrık kök elde ederiz.

Böylece Denklem (3.30) - (3.31) özdeğer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir;

$$X(x;q)=c_1E_{q,1}(\sqrt{-\lambda}.x^q)+c_2E_{q,1}(-\sqrt{-\lambda}.x^q) \quad (3.34)$$

$x = 0$ noktasında verilen sınır değer koşulundan;

$$X(0;q)=c_1 E_{q,1}(0)+c_2 E_{q,1}(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2 \quad (3.35)$$

elde edilir. $x=1$ noktasında verilen sınır değer koşulundan;

$$X(1;q)=c_1 E_{q,1}(\sqrt{-\lambda} \cdot 1^q)-c_1 E_{q,1}(-\sqrt{-\lambda} \cdot 1^q)=0 \quad (3.36)$$

elde edilir. Böylece $\sqrt{\lambda} 1^q=0 \Rightarrow \lambda=0$

$$X(x;\beta)=c_1 (E_{\beta,1}(0)-E_{\beta,1}(0))=0 \quad (3.37)$$

olur ki bu durum $\lambda(q)<0$ için çözümün olmadığını gösterir.

2.Durum: $\lambda=0$ için $r_1=r_2=0$ çakışık kökler elde edilir ve Denklem (3.30)-(3.31) özdeğer probleminin genel çözümü aşağıdaki gibi bulunur;

$$X(x;q)=c_1+c_2 \frac{x^q}{\Gamma(q+1)} \quad (3.38)$$

$x=0$ noktasında verilen sınır değer koşulu için;

$$X(0;q)=0 \Rightarrow c_1=0 \quad (3.39)$$

$x=1$ noktasında verilen sınır değer koşulu için;

$$X(1;q)=c_2 \frac{1^q}{\Gamma(q+1)}=0 \Rightarrow c_2=0 \quad (3.40)$$

Dolayısıyla $X(x;q)=0$ bulunur. Bu durumda $u(x,t)=0$ elde ederiz ki bu da $\lambda=0$ için çözüm olmadığı anlamına gelir.

3.Durum: $\lambda>0$ ise $r_1=i\sqrt{\lambda}$ and $r_2=-i\sqrt{\lambda}$ şeklinde iki farklı kompleks kök elde edilir ve Denklem (3.28) - (3.29) özdeğer probleminin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur;

$$X(x;q)=c_1 \cos_q(\sqrt{\lambda} x^q)+c_2 \sin_q(\sqrt{\lambda} x^q) \quad (3.41)$$

$x = 0$ noktasında verilen sınır koşulu için;

$$X(0;q)=c_1 \cos_q(0)+c_2 \sin_q(0)=0 \Rightarrow X(0)=c_1=0 \quad (3.42)$$

Benzer şekilde $x=l$ noktasında verilen sınır koşulu için;

$$X(l;q)=c_2 \sin_q(\sqrt{\lambda} l^q)=0 \quad (3.43)$$

elde edilir. Buradan $\sin_q(\sqrt{\lambda} l^q)=0 \Rightarrow W_n(q)=\sqrt{\lambda_n} l^q, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lambda_n(q)=\left(\frac{W_n}{l^q}\right)^2, n \in \mathbb{N} \quad (3.44)$$

elde edilir. Böylece özdeğer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir;

$$X_n(x)=\sin_q\left(W_n(q)\left(\frac{x}{l}\right)^q\right) \quad (3.45)$$

Benzer işlemler uygulanarak Denklem (3.32) adi diferensiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir;

$$T_n'(t;q)+\left(\frac{W_n}{l^q}\right)^2 k T_n(t;q)=0 \Rightarrow T_n(t;q)=e^{-\left(\frac{W_n}{l^q}\right)^2 kt} \quad (3.46)$$

Böylece başlangıç değer probleminin çözümü seri formda aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u(x,t;q)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin_q\left(W_n(q)\left(\frac{x}{l}\right)^q\right)e^{-\left(\frac{W_n}{l^q}\right)^2 kt} \quad (3.47)$$

$$u(x,t;q)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin_q\left(W_n(q)\left(\frac{x}{l}\right)^q\right)e^{-\left(\frac{W_n}{l^q}\right)^2 kt} \quad (3.48)$$

Denklem (3.24) , Sınır Koşulu (3.26)'yı sağlamış olur. Bilinmeyen c_n katsayıları Denklem (3.23) iç çarpım tanımı ve Denklem (3.25) başlangıç koşuluyla elde edilir. Öyle ki $u(x, t; q)$ çözümü Denklem (3.24) -(3.26) başlangıç sınır değer problemini sağlar.

Denklem (3.48)'de t yerine 0 yazılarak ve Denklem (3.25) başlangıç koşulu kullanarak aşağıdaki form elde edilir;

$$u(x,0)=\phi(x)= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin_q \left(W_n(q) \left(\frac{x}{l} \right)^q \right) \quad (3.49)$$

Denklem (3.23) iç çarpım uzayı ile c_n $n=1,2, 3, \dots$ katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$c_n = \langle \phi(x), \sin_q \left(\frac{W_n(q)}{l^q} x^q \right) \rangle, n=1,2,3, \dots \quad (3.50)$$

Son olarak, bir örnek ile yeni yaklaşımın uygulanabilirliği gösterilecektir.

Örnek: Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler içeren aşağıdaki başlangıç sınır değer problemi düşünölsün;

$$u_t = 2 D_x^{2q} u, \quad 0 < x < 2, t > 0 \quad (3.51)$$

$$u(x,0) = -\sin(\pi x) \quad (3.52)$$

$$u(0,t)=0, \quad u(2,t)=0 \quad (3.53)$$

Not: $q=1$ için başlangıç sınır değeri problemi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$D_t u(x,t) = 2 D_x^2 u(x,t), \quad 0 \leq x \leq 2, t > 0 \quad (3.54)$$

$$u(x,0) = -\sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (3.55)$$

$$u(0,t)=0, \quad u(2,t)=0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.56)$$

Bu başlangıç sınır değeri probleminin genel çözümü değışkenlerine ayırma yöntemi kullanarak;

$$u(x,t) = -\sin(\pi x) \exp(-2t\pi^2) \quad (3.57)$$

formunda elde edilir.

Bu durumda ihtiyacımız olan şey bu iki problemin karşılaştırılması olacaktır. Değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak Denklem (3.51)-(3.53) başlangıç sınır değer probleminin çözümü, x değişkenine bağlı bir fonksiyon ile t değişkenine bağlı bir fonksiyonun çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$u(x,t;q)=X(x;q)T(t;q) \quad (3.58)$$

Denklem (3.58) , Denklem (3.51)'de yerine yazılırsa;

$$X(x;q)T'(t;q)=2 D_x^{2q}X(x;q)T(t;q) \quad (3.59)$$

denklemini elde edilir. Her iki taraf $X(x;q)T(t;q)$ çarpımına bölünürse;

$$\frac{T'(t;q)}{2T(t;q)} = \frac{{}^c D_x^{2q}(x;q)}{X(x;q)} = -\lambda(q) \quad (3.60)$$

eşitliği elde edilir. Sınır Koşulu (3.53) ile sağ taraftaki denklem aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel denklem için sınır değer problemini verir;

$${}^c D_x^{2q}X(x;q)+\lambda(q)X(x;q)=0 \quad (3.61)$$

$$X(0;q)=0 \quad X(2;q)=0 \quad (3.62)$$

Ve sol taraftaki denklem aşağıdaki adi diferansiyel denklemi verecektir;

$$T'(t;q)+2\lambda(q)T(t;q)=0 \quad (3.63)$$

Denklem (3.61)- (3.62) çözümü $X(x;q)=E_{q,1}(rx^q)$ şeklinde Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılabilir. Bu problemin karakteristik denklemi $\lambda(q)=\mu_q^2$ olmak şartıyla $r^2+\mu_q^2=0$ şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak Denklem (3.41)'i kullanarak çözüm aşağıdaki şekilde yazılır;

$$X(x;q)=c_1 \cos_q(\mu_q x^q)+c_2 \sin_q(\mu_q x^q) \quad (3.64)$$

$x=0$ ve $x=2$ sınır koşulları uygulanırsa;

$X(0)=0 \Rightarrow X(0)=c_1=0$, $X(2)=c_2 \sin_q(\mu_q 2^q)=0$ olur ki bu da aşağıdaki denkliği sağlamak durumundadır ;

$$\sin_q(\mu_q 2^q)=0 \quad (3.65)$$

$\sin_q(W_n)=0$ olacak şekilde $W_n(q)=\mu_n 2^q$ ifadesi verilsin. Böylece özdeğer probleminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir;

$$X_n(x;q)=c_2 \sin_q\left(\frac{W_n(q)}{2^q} x^q\right) \quad (3.66)$$

Denklem (3.63)'dan elde edilen çözüm aşağıdaki gibidir;

$$T_n'(t;q)+2\frac{W_n(q)}{2^q} T_n(t;q)=0 \Rightarrow T_n(t;q)=c_n e^{-\frac{W_n}{2^{q-1}}t}, n=1,2,\dots \quad (3.67)$$

Böylece genel çözüm aşağıdaki formdaki gibi olur;

$$\begin{aligned} u(x,t;q) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x;q) T_n(t;q) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{2,n} \sin_q\left(\frac{W_n}{2^q} x^q\right) c_n e^{-\frac{W_n}{2^{q-1}}t}, c_{2,n} \cdot c_n = c_n^* \end{aligned} \quad (3.68)$$

Bu durumda genel çözüm seri formunda aşağıdaki gibi yazılır;

$$u(x,t;q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \sin_q\left(\frac{W_n}{2^q} x^q\right) e^{-\frac{W_n}{2^{q-1}}t} \quad (3.69)$$

Denklem (3.69) fonksiyonu, Denklem (3.51) kesirli diferansiyel denklemi ve Sınır Koşulu (3.53)'ü sağlar. Bilinmeyen c_n^* katsayılarını belirlemek için Denklem (3.52) başlangıç koşulu uygulanır;

$$u(x,0)=\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \sin_q\left(\frac{W_n}{2^q} x^q\right) = -\sin(\pi x) \quad (3.70)$$

İç çarpım kullanarak c_n^* katsayıları belirlenirse;

$$c_n^* = \langle -\sin \pi x, \sin_q \left(\frac{W_n(q)}{2^q} x^q \right) \rangle, \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.71)$$

$n \neq 2$ ise aşağıdaki ifade elde edilir;

$$c_n^* = \left[\frac{1}{W_{n-2}} \sin_q(W_{n-2}(q)) - \frac{1}{W_{n+2}} \sin_q(W_{n+2}(q)) \right] = 0 \quad (3.72)$$

$n=2$ için c_2^* aşağıdaki gibi ifade elde edilir ;

$$c_2^* = \langle -\sin \pi x, \sin_q \left(\frac{W_2(q)}{2^q} x^q \right) \rangle \quad (3.73)$$

$$c_2^* = -\frac{1}{2} x^q - \frac{\sin_q \left(\frac{W_4(q)}{2^q} x^q \right)}{W_4(q)} \Bigg|_0^2 = -2^{q-1} \quad (3.74)$$

Böylece Denklem (3.51)-(3.53) başlangıç sınır değer probleminin genel çözümü aşağıdaki gibidir;

$$u(x, t; \alpha, q) = -2^{q-1} \sin_q \left(\frac{W_2(q)}{2^q} x^q \right) e^{-\left(\frac{W_2}{2^{q-1}} \right)^2 t} \quad (3.75)$$

Dikkat edilirse q ifadesi 1'e giderken Denklem (3.75) fonksiyonu Denklem (3.57)'ye yakınsar.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Mevcut tezde sunulan yöntemin temel fikri tamsayı mertebeden sonlu aralıkta difüzyon denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün daha geneli olan reel mertebeden difüzyon denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümlerini elde etmek olmuştur. Bu durumda yeni iç çarpım uzayı kullanılarak kesirli mertebeden türevi içeren başlangıç sınır değer probleminin analitik çözümü bulunmuştur. Bu çalışmada elde edilen veriler daha karmaşık problemlerin çözümünde yol gösterici olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] I.Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, SanDiego, Calif , USA ,1999.
- [2] I.Podlubny, Fractional Differential Equations , Slovakia, http://people.tuke.sk/igor.podlubny/fc_apps.html , (Ziyaret Tarihi 11.04.2018).
- [3] Kisela T., Fractional Differential Equations and Their Applications, Diploma Thesis, BRNO University of Tecnology, Institute of Mathematics, BRNO, 2008.
- [4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam,2006.
- [5] Vance D., *Fractional Derivatives and Fractional Mechanics*, USA, 2014.
- [6] Ishteva L., Properties and Applications of The Caputo Fractional Operator, Master Thesis, University of Karlsruhe, Institute of Practical Mathematics, Sofia, 2005.
- [7] Demir A., Erman S., Özgür B., Korkmaz E., Analysis of Fractional Partial Differential Equations by Taylor Series Expansion, Boundary Value Problems,*Springer Open Journal*, 2013, **68**(1),1-12.
- [8] Demir A., Kanca F., Özbilge E., Numerical Solution and Distinguishability in Time Fractional Parabolic Equation, Boundary Value Problems, *Springer Open Journal*, DOI: 10.1186/s13661-015-0405-6.
- [9] Luchko Y., Initial-Boundary-Value Problems for The One Dimensional Time-Fractional Diffusion Equation, *Fractional Calculus and Applied Analysis an International Journal for Theory and Applications*, 2012, **15**(1), 141–160.
- [10] Luchko Y.,Initial-Boundary Problems for The Generalized Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, **374**(2), 538– 548.
- [11] Momani S., Odibat Z., Numerical Comparison of Methods for Solving Linear Differential Equations of Fractional Order, *Chaos Solitons And Fractals*, 2007, **31**(5), 1248–1255.

- [12] Ozbilge E., Demir A., Analysis of The Inverse Problem in a Time Fractional Parabolic Equation with Mixed Boundary Conditions, Boundary Value Problems, *Springer Open Journal*, 2014, **134**(1),1-9.
- [13] Plociniczak L., Analytical Studies of a Time-Fractional Porous Medium Equation Derivation, Approximation and Applications, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,2015, **24**(1),169–183.
- [14] Kodal Sevindir H., Demir A., The Solution of Initial Boundary Value Problem with Time and Space Fractional Diffusion Equation Via a Novel Inner Product, *Advances in Mathematical Physics*, DOI:10.1155/2018/1389314.



KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- [1] Demir A., **Lüleci G.**, On the Solution of Initial Boundary Value Problem for Space Fractional Diffusion Equations, International Conference on Mathematics, İstanbul, Turkey, 3-6 July, 2018.



ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında Merkez/Erzincan'da doğdu. Eğitim-Öğretim hayatına Erzincan'da başlayıp lise dönemini Gölcük/Kocaeli'nde tamamladı. 2011 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ve 2013 yılında Anadolu Üniversitesi İlahiyat Fakültesi'nde öğrenim görmeye başladı. 2016 yılında Matematik Bölümü'nden 3.olarak mezun olduktan sonra aynı üniversitede Matematik Anabilim Dalı'nda Tezli Yüksek Lisansa başladı. Halen Sakarya Üniversitesi'nde İlahiyat Fakültesi 3.sınıf öğrencisi olup Derince Safir Koleji'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

