



3-BOYUTLU TRANS SASAKİAN MANİFOLDLARDA RİCCİ SOLİTONLAR VE
GRADİENT RİCCİ SOLİTONLAR ÜZERİNE

Harun DEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mart - 2019

3-BOYUTLU TRANS SASAKIAN MANİFOLDLARDA RİCCİ SOLİTONLAR VE
GRADİENT RİCCİ SOLİTONLAR ÜZERİNE

Harun DEMİR

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Mine TURAN

Mart-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Harun DEMİR'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "3-BOYUTLU TRANS SASAKİAN MANİFOLDLARDA RİCCİ SOLİTONLAR VE GRADİENT RİCCİ SOLİTONLAR ÜZERİNE" başlıklı bu çalışma, jürimizce Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

26/03/2019

Prof. Dr. Önder UYSAL

Enstitü Müdürü, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Anabilim Dalı Başkanı, Matematik Bölümü

Doç. Dr. Mine TURAN

Danışman, Matematik Bölümü

Sınav Komitesi Üyeleri

Prof. Dr. Ziya AKÇA

Matematik Bilgisayar Bölümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ATA

Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

Doç. Dr. Mine TURAN

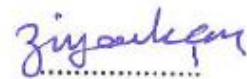
Matematik Bölümü, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Kütahya Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının % 21 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.


Doç. Dr. Mine TURAN


Harun DEMİR

3-BOYUTLU TRANS SASAKIAN MANİFOLDLARDA RİCCİ SOLİTONLAR VE GRADİENT RİCCİ SOLİTONLAR ÜZERİNE

Harun DEMİR

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2019

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mine TURAN

ÖZET

Bu çalışmada 3- boyutlu trans-Sasakian manifoldlarda Ricci Solitonlar ve gradient Ricci Solitonlar konulu Turan, M., De, U.C. ve Yıldız, A.(2012) makalesi incelenmiştir. Bir Ricci soliton, Einstein metriğinin genel halidir. (M, g) manifoldunda

$$\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \quad (*)$$

denklemini sağlıyorsa g bir Ricci Soliton denir.

Burada $\mathcal{L}$ Lie türev, S bir Ricci tensör, V ise M üzerinde bir tam vektör alanı ve λ sabittir. $(*)$ denklemini sağlayan metrikler ilginçtir ve fizikte oldukça faydalıdır Ricci soliton λ değerinin negatif, sıfır ve pozitif oluşuna göre sırasıyla daralan, istikrarlı ve genişleyen olduğu söylenir. V vektör alanı eğer $-f$ potansiyel fonksiyonunun gradienti ise g' ye gradient Ricci soliton denir. Bu durumda $(*)$ denklemini

$$\nabla \nabla f = S + \lambda g$$

formunu alır.

Eğer bir 3- boyutlu trans-Sasakian manifold içindeki g metriği Ricci soliton, karakteristik vektör ile doğrudan olursa ve α, β sabit olursa manifold sabit skaler eğriliklidir. Yine bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold sabit skaler eğrilikli ise bu manifold ya β -Kenmotsu manifold ya da bir Einstein manifold olur.

Çalışmanın daha kolay anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Ama öncesinde meraklısı için diferensiyel geometrinin temel teorilerinden olan manifold kavramının kısa bir tarihçesi anlatılmıştır. Ayrıca tensör, Ricci tensör, soliton fonksiyon kavramlarına da yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlar, Ricci Tensör, Ricci Soliton

A STUDY ON RICCI SOLITONS AND GRADIENT RICCI SOLITONS IN 3-DIMENSIONAL TRANS-SASAKIAN MANIFOLDES

Harun DEMİR

Mathematics, M. S. Thesis, 2019

Thesis Supervisor: Assoc Prof. Mine TURAN

SUMMARY

In this study, the article on Ricci solitons and gradient Ricci solitons in 3-dimensional trans-Sasakian manifolds, written by Turan, M., De, U.C. ve Yıldız, A.(2012), were investigated. A Ricci soliton is the general form of the Einstein metric. In the manifold (M, g) satisfies

$$\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \quad (*)$$

then g is called a Ricci Soliton.

$\mathcal{L}$ Lie derivative, S is a Ricci tensor, V is a complete vector field on M and λ is constant. The metrics that satisfies the equation $(*)$ are interesting and very useful in physics. Ricci soliton is said to be narrowed, stable and expanding depending on whether λ is negative, zero and positive respectively. If the vector field V is the gradient of the potential function $-f$, then g is called gradient Ricci soliton. In this case $(*)$ equation takes following form:

$$\nabla \nabla f = S + \lambda g$$

If the metric g in a 3-dimensional trans-Sasakian manifold Ricci soliton linear with the characteristic vector V and α, β is constant, then the manifold has constant-scalar curvature. If a 3-dimensional trans-Sasakian manifold has constant scalar curvature, then this manifold is either β -Kenmotsu manifold or Einstein manifold.

In order to be understood more easily, some basic concepts were included in the study. But at the beginning of the study, a brief history of the concept of the manifold, which is one of the fundamental theories of differential geometry, was described for enthusiasts. In addition, tensor, Ricci tensor, soliton function concepts were also included. 2019, 83 pages

Keywords: 3-dimensional trans-Sasakian manifolds, Ricci Tensor, Ricci Soliton

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimde konunun belirlenmesi, konu ile ilgili araştırmalar yapılması ve Tezin yazımı sırasında beni yönlendiren ve hiç bir yardımı esirgemeyen değerli Hocam, Danışmanım Sayın Doç.Dr.Mine Turan’a teşekkürlerimi sunarım.

Yine Bu süreçte Her konuda destek veren tezimi değerlendiren Tez Komisyonu hocalarımıza, Enstitü Personeline ve isimlerini burada zikredemediğim çalışma arkadaşlarıma içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen eşim Mihriye hanım ,kızlarım Alya Berru ve Azra Beren’e çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu Yüksek lisans tez çalışmasını sevgili anneme ithaf ediyorum.

Harun DEMİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
SUMMARY	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Tarihçe ve Literatür.....	1
1.2. Temel Tanımlar.....	7
1.3. Tensör Hesabının Tarihi.....	21
2. TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLAR	26
2.1. Hemen Hemen Kontak Manifoldlar.....	26
2.2. Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold	27
2.3. Kontakt Yapılarda İkinci Temel Form.....	28
2.4. Hemen Hemen Kontak Manifoldlarda Torsiyon Tensörü	28
2.5. $M(C)$ Sasakian Uzay Formu.....	31
2.6. Einstein Sasakian Manifoldlar	32
2.7. Trans-Sasakian Manifold	35
3. BOYUTLU TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLAR	37
3.1. Projektif Olarak Düz Trans-Sasakian Manifold.....	38
3.2. $R(X, Y).P = 0$ Koşuluna Uyan Trans-Sasakian Manifold.....	39
3.3. 3-Boyutlu Konformal Olarak Düz Trans-Sasakian Manifold	41
3.4. $R(X, Y).C = 0$ Koşuluna Uyan Trans-Sasakian Manifold	42
3.5. $R(X, Y).C = 0$ Koşuluna Uyan Trans-Sasakian Manifold.....	44
3.6. Genelleştirilmiş η – Einstein Trans- Sasakian Manifold	46
3.7. Lokal Olarak $\emptyset$ -Simetrik Üç Boyutlu Trans-Sasakian Manifold.....	47
4. 3-BOYUTLU TRANS- SASAKİAN MANİFOLDLAR VE RİCCİ TENSÖRÜ	50

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.1. η –Paralel Ricci Tensör.....	53
4.2. Sabit Eğrilikli Trans-Sasakian Manifolddarda Ricci Tensörü	55
4.3. Sasakian Manifolddarla Homotetik Olan Trans- Sasakian Manifolddar	59
4.4. Trans-Sasakian Manifolddarda Ricci Soliton	63
 5. ÜÇ BOYUTLU TRANS- SASAKIAN MANİFOLDLARDA RİCCİ SOLİTONLAR VE GRADİENT RİCCİ SOLİTONLAR	 72
5.1. Ön Bilgiler	72
5.2. 3-Boyutlu Trans- Sasakian Manifold.....	73
5.3. Ricci Soliton.....	77
5.4. Gradient Ricci Soliton.....	80
 6. SONUÇ VE ÖNERİLER	 85
KAYNAKLAR DİZİNİ	86
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

g	Riemann metriği
L	Lie operatörü
M	Manifold
P	Weyl-projektif eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
r	Skaler eğrilik
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci eğrilik tensörü
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
ξ	Karakteristik vektör alanı
η	1-form
φ	(1,1) tipinden tensör alanı

Kısaltmalar

$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin en önemli teorilerinden biri Manifold teorisidir. Uzayı daha basit ve kolay anlaşılabilir yapılar türünden açıklayan manifoldlar zamanla diferensiyel geometrinin yanında Matematik, Fizik, Termodinamik, Mekanik gibi birçok bilim dalında ve farklı mühendislik alanlarında önemli bir çalışma alanı olmuştur.

1.1. Tarihçe ve Literatür

19.yüzyılın ilk yılları geometrik kavramları genelleştirmeye yönelik çabaların arttığı yıllardı. Klasik mekaniğin dinamik sistemleri yüksek boyutlu geometrik dilin yararlılığına dair artan bir farkındalığın olduğu alanlardı. Lagrange, *Mecanique Analitique* (1788) adlı kitabında uzayda bir noktanın üç koordinatına ek olarak zamanı da bir tür dördüncü boyut olarak almıştı ve *Theorie des Fonctions Analytiques* (1797, Bölüm 3.5.25) kitabında 3 boyutlu geometrik durumdan transfer ederek 5 değişkenli fonksiyon sistemlerine bir kontakt argument uygulamıştı. Ancak ardından gelen bilim adamları onun bu yolunu takip etmedi (Scholz, 1999).

1840'lardan önce geometrik dil ve geometrik fikirleri daha yüksek boyutlara yaymak için daha geniş çaplı girişimler vardı. Örneğin Jacobi (1834), n boyutlu kürelerin hacmini hesapladı ve n değişkenli kuadratik formları diyagonalize etmek için ortogonal yer değiştirmeler kullandı. Fakat araştırmalarında açık geometrik dilden kaçınmayı tercih etti. Değişim yüzyılın ortalarına doğru oldu. Kısa bir zaman aralığında geometrik düşüncenin kavramsal genellemelerini daha yüksek boyutlara uygulayan ve araştıran bir grup yazar bu çağda ortaya çıktı. Bunlar arasında, n -boyutlu geometri üzerine kavramsal temel sunan "Lineale Ausdehnungslehre" eseriyle (1844) Grassmann vardı. "Tensor" kelimesi, 1846 yılında William Rowan Hamilton tarafından, şimdi bir tensörün kastedilmesinden farklı bir şey anlatmak için kullanıldı. Cauchy ve Gauss gibi önde gelen matematikçiler de eserlerinde (Cauchy, 1847) ya da derslerinde (Gauss, 1851/1917) genişletilmiş geometri dilini kullanmaya başladılar. Gauss, derslerinde ($n - k$) boyutsal manifoldlar dilini bile kullanıyordu (Gauss, 1851/1917: 477ff.) tanımlamak için kısıtlanmıştı. Daha sonra tensör analizi olarak anılacak olan kavramlar Carl Friedrich Gauss'un Diferansiyel geometri çalışmalarından doğmuştur. Riemann, Gauss'un çizdiği temel kavramsal çerçeveden bunun nasıl geliştirileceğine dair az da olsa bir ilham buldu ve onu çok bağımsız bir şekilde geliştirdi.

Tensör hesabı, 1890 civarında Gregorio Ricci Curbastro tarafından Mutlak diferansiyel hesabı adıyla geliştirildi ve 1892 yılında Ricci tarafından sunuldu. Çağdaş kullanım 1898'de Woldemar Voigt tarafından tanıtıldı. Ricci ve Tullio Levi-Civita'nın "Mutlak Diferansiyel Hesabı Yöntemleri ve Uygulamaları" adlı eseri yayınlamasıyla bu kavramlar matematikçiler tarafından erişilebilir hale gelmiş oldu.

Riemann "Habilitationvortrag" olarak adlandırılan ünlü bilimsel sunumlarında (Riemann, 1854) geometrik manifold yapıları hakkında oluşturduğu fikirlerini ilk kez sunarken, matematik, fizik ve felsefe arasında bir sınır bölgesinde çalıştığının tamamen farkındaydı (Scholz, 1999). Aslında Riemann bu sunumuyla, daha sonra genel küme teorisi (ayrık manifoldlar) ve topoloji (sürekli manifoldlar) haline gelecek alanların kavramsal bir başlangıç noktası için bir taslak oluşturmuştu. Riemann tezinde (Riemann, 1851) sonsuz boyutlu reel fonksiyon uzayları ve onların sürekli değişen koşulları hakkında çalışmalarını sunarken "sürekli manifoldlar" terimini de bu bağlamda kullanmıştı ancak bu terimle ne anlatmak istediğinden tam olarak bahsetmemişti. Bu Gauss'un R^n de sonlu boyutlu doğrusal alt manifoldlarının kaba bir genelleştirilmesi şeklindeydi ve hatta kendisinin 1854 te geliştirdiği manifold kavramından çok daha geneldi.

Manifold genel olarak anlaşılması güç bir kavram olduğundan Riemann'ın manifold kavramı 19. yüzyılın matematiğinde ağır kavramsal problemlerle karşılaşmış ve yavaşlamıştır. 1870 ve sonrasında "sayı manifoldu" olarak anlaşılması en kolay yol olmuştur. Eşitsizliklerle tanımlanan bu tür altmanifoldlar m boyutlu alt kümeler olarak (genellikle bağlantılı) Beltrami (1868a, 1868b), Helmholtz (1868) ve hatta genç Klein'in Öklidsel olmayan Geometri ve Erlangen programı (1871) üzerine çalışmalarında tanımlanan en kolay yaklaşımlar olmuştur. Bu Riemann'ın kastının daraltılmasıydı ve yerel basitlik ile manifoldların küresel karmaşıklığı arasındaki ayrımın ortaya çıkmasını engelledi. Oysa küresel davranış Riemann'ın konsepti için temel bir bileşendi, 1860'larda ve 1870'lerde geometrik fonksiyon teorisinin özel bağlamında ve Riemann yüzeylerinin topolojisi hakkındaki bilginin yayılmasından sonra açıkça anlaşıldı. (Lüroth, Clebsch, Neumann, Clifford ve arkadaşları) (Clebsch, 1864) ve (Neumann, 1865).

n -boyutlu manifoldların karakterizasyonuna yönelik ilk kombinatoryal yaklaşım, gerçi biraz acemice ve belli belirsiz bir tanım olarak nitelense de, (Scholz, 1999), Klein'in öğrencisi W. Dyck tarafından, bir "sayı manifoldu" olarak karakterizasyonun yanı sıra kullanılmıştır.

Dyck, Klein'in başından beri " R^n "nin bir altmanifoldu M ", olarak verdiği tanımdan başlayarak E_k -isomorphic tipine ait altmanifoldlar boyunca k -topları ile keserek ve yapıştırarak bir n -top E^n 'den M 'nin nasıl yapılacağına dair açık bir tanım vermiştir (von Dyck, 1888, 1890). Verdiği tanım, sadece kendi tanımları veya yapıları için değil, manifoldların topolojik karakterizasyonuna da yardımcı olmuştur. Felix Klein ünlü tarihsel derslerinde Gauss ve Riemann'ın diferansiyel geometrisinin Lagrange denklemlerinin toprağından beslendiğini iddia etmiştir (Klein, 1926: 146).

Manifold kavramının 19. yüzyılda bile fiziğe dair birkaç bağlantısı vardır. Riemann, bu bağlantıları da tartışmaya başlamıştı. Habilitations konuşmasının son bölümü ve doruk noktasında matematiksel argümanlar ile fiziksel / ampirik anlayışların değerlendirilmesi arasındaki ince bir etkileşimde bir taslak vererek fiziksel uzayın daha iyi anlaşılmasını sağlamayı önerdi. Riemann' a göre temel bağlantı olan maddenin mikro yapısının ve onun bağlanma kuvvetlerinin, manifoldlar üzerinde mümkün olduğunca farklı geometrik yapılara doğrudan dönüştürüldüğünün daha iyi anlaşılmasıydı. Yine de, Riemann'ın astronomik ölçümlere atıfta bulunularak, bir Öklid uzay yapısının kabul edilmesi, zamanın fiziksel bilgisine iyi uyum sağlamıştır (Scholz, 1999).

Riemann ünlü Paris ödülü denemesinde (Riemann, 1861) ikinci bir bağlantı belirtilmişti. Riemann, bir ante homojen olmayan madde bölgesinde üç boyutlu bir ısı akışı problemini modellemiş ve onu 3-boyutlu Riemann metriğinde bir diferansiyel geometrik yapıya çevirmiştir (Riemann, 1876).

1871'de Betti, daha yüksek sayıda bağlantısallık olduğuna dair sunumunu yayınladı. Bu eserinde objeler R^n in bir n – boyutlu S_n alt manifoldlarıydı (genellikle kapalı ve bağlantılı). Betti onları spazi olarak adlandırmıştı. Bağlantısallık sayılarını (Betti sayıları) p_k ($1 \leq k \leq n$) karakterize etme yöntemi, kapalı n -boyutlu altmanifoldların U_i ($1 \leq i \leq p$) maksimal sistemlerini düşünmekti (Betti, 1871: 278). Betti, maksimal sayıda p 'nin altmanifoldlar sisteminin seçiminden bağımsız olduğunu öne sürdü. Bununla birlikte, Betti'nin sınır ilişkisi için sözlü açıklaması Tonelli'nin karşı argümanlarını durduracak kadar yeterli değildi. Tonelli (1875) döngüler ve onların homoloji ilişkileri için daha rafine bir sembollemeye gerek olduğunu gösterdi. Hatta Tonelli yüzeyin sınır kısmı için yola bağlantılılığın zararlı özellikleri üzerindeki gereksiz tartışmayı da düzeltti. Bu haklı eleştiriler, Betti'nin, manifold teorisine doğru olan bu ilk adımı kamuoyuna sunma başarısını azaltmadı. Bununla birlikte, bu boşluk kalmıştır çünkü

yöntem genel olarak n -boyutlu (kapalı) manifoldlar için sunulmuş olmasına rağmen, en basit üç boyutlu örneği hariç, daha yüksek boyutlar için bu yöntemle hemen yeni bir anlayışa erişilememiştir (Scholz, 1999). Örneğin, Betti, P. Tardy'ye 1863'te yazılan mektuplarda "kalınlaşmış" iki-küre ve R^3 'te masif ve "kalınlaşmış" torusun bağlantısallığını tartışmıştı ama bu ancak 1915'te yayınlanmıştır (Betti, 1915). Bu durum yüzyılın sonlarında Poincare'nin analiz üzerine yazdığı muazzam serisini (L'Analysis situs, 1899) yayınlayana kadar neredeyse hiç değişmeden böyle sürmüştür.

1880'lerde Poincare belirsiz bir şekilde anlamış olsa da manifold kavramıyla birçok analitik veya geometrik bağlamda karşılaşmıştı. Bunlardan biri onu ünlü yapan otomorfik fonksiyonlar teorisi idi. Yüksek mertebeden manifoldlarla deneyim kazandığı diğer bir çalışma diferansiyel denklemlerin nitel teorisi üzerine yaptığı araştırma idi. Elde ettiği sonuçları yüksek mertebeden doğrusal olmayan lineer diferansiyel denklemler üzerine genelleştirirken ve bu problemi birinci dereceden yüksek boyutlu sistemlere transfer ederken (Poincare, 1886) Kronecker'in R^n de hiperyüzeyler üzerinde fonksiyon sistemlerinin indeks kavramını kullanmıştı. Daha önceleri W.Dyck Kronecker indekslerinin topolojik karakteristik taşıdığını göstermişti. Poincare Kronecker'leri bir sembolik araç olarak kullanarak vektör alanları için indeks teoreminin yüksek boyutlu bir versiyonu fikrine ulaştı. Bu teorem daha sonra R^n de açık alt manifoldlar veya hiper yüzeyler için Poincare-Hopf index teoremi olarak anıldı. Bu bağlamda Poincare, Riemann ve Betti'nin daha yüksek bağlantısallık düzeylerini belirlemek için yöntemlerin daha fazla ayrıntılandırılması gereğini açıkça ifade etmiştir (Poincare, 1886: 448).

Poincare'in 1890'ların başında izlemeye başladığı ve hayatının geri kalanı için en iyi çalışması olarak sürdürmeye devam ettiği, "Analiz situs" makaleler serisinde herhangi bir (sonlu) boyutlu manifold için teorik bir araştırma ve karakterizasyonuna dair bir zemin oluşturdu ve bu çalışmalar oldukça verimli ve büyük ölçüde genişleyerek çağımıza ulaştı (Poincare, 1895, 1899, 1900, 1902a, 1902b, 1904). Poincare, manifoldların homolojisini analiz etmek için iki yaklaşım sunmuştu: İlk önce doğrudan Riemann ve Betti'yi takip ediyordu ve bu yaklaşım makale serisinin açılış çalışmasında yer almıştı. Temel manifoldlar grubunu tanıttı ve öngörülen temel grup ile 3 boyutlu manifoldların çeşitli örneklerini inşa etti. (Poincare, 1895). İkincisi çalışma ve sunumu hücre komplekslerinin homolojileri üzerineydi ve bu ilk iki serinin konusuydu (Poincare, 1899, 1900). Bu daha ilkel örneklerin yerine beşinci seride "on iki yüzlü uzay" ın ayrıntılı bir örneğine (Poincare, 1904) geçti. Daha sonra iki çalışma ile cebirsel yüzeylerin homolojisini hesaplama yöntemleri geliştirdi (Poincare, 1902a, 1902b).

Yüzyılın başlarında Poincare manifoldlar için bir homoloji teorisi oluşturmak adına çok şey başarmıştı. Eski değişmezleri (Betti sayıları) yeni ve çok daha açık bir sembolik çerçevede tanıtmış, yeni bir kavram olan torsiyon katsayılarını tanıtmıştı, bunları hesaplamak için çok iyi cebirsel yollar geliştirdi, bunları çok çeşitli durumlarda hesapladı ve iki temel teoremi kanıtladı (Dualite, Euler-Poincare). Hiç şüphesiz Poincare, topolojik olarak geniş kapsamlı bir manifoldlar teorisinin ana başlatıcısıydı. Dahası, onun homolojiye ikinci "kombinatoryal" yaklaşımı, daha genel topolojik uzaylara doğru bir homoloji teorisinin yolunu açmıştır (Scholz, 1999). Poincare manifoldlar için aşağıdaki şekilde yapılandırmacı bir tanım verdi:

$n \geq 2$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ olsun. F_i ve φ_j , F_i 'nin ortak tanım kümesinin her bir noktasında $J = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right\| \neq 0$ olmak üzere sürekli türetilbilir, sürekli ve düzgün fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki p tane denklem ve q tane eşitsizlik bir manifold tanımlar:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) > 0 \\ \dots \\ \varphi_q(x_1, \dots, x_n) > 0 \end{cases}$$

Manifoldlara ilk aksiyomatik formül denemesi Hilbert ve Weyl (1913) tarafından 2 boyutlu olarak bağlamsal düşüncede verildi. Hilbert'in yaklaşımı (1902a, 1902b) geometrinin temellerinden yükseliyordu ve ana amacı 2 boyutlu sürekli manifold kavramının aksiyomatik olarak çerçevesini belirlemektir. Hilbert, varsayımlarını Riemann ve Helmholtz'un genişletilmiş manifoldu ve Lie tarafından sayı manifoldu olarak adlandırılan kavramın kesin tanımı olarak belirtmiştir (Hilbert, 1902a: 233). Hermann Weyl iki boyutlu kompleks topolojik manifoldun tanımını veren ilk kişiydi. Weyl'in analizi, analitik bir formun (Weierstrass ve Riemann'a göre) geometrik bir temsilinden başlar sonra da D. Hilbert ve diğerleri tarafından elde edilen yeni topolojik gelişmeler aracılığıyla Riemann yüzeyinin özel bir yapısına erişir. Özel olarak, Hausdorff'un bir noktanın "komşuluğu" kavramı, Weyl'in bir topolojik manifoldun inşasında önemli bir rol oynamıştır. Weyl'in merkez fikri, bir manifoldun $\mathbb{R}^n$ ile yerel homeomorfizmi idi.

Daha sonra, Weyl, F. Klein'ın önceki çalışmalarını dikkate alarak, R^n de bu manifoldun yerel homeomorfizmi aracılığıyla manifold üzerinde bir topolojik diferansiyellenebilir yapı ortaya koydu (Weyl, 1913)

O. Veblen ve J.H.C. Whitehead n boyutlu regular Afın manifold için üç aksiyom grubu verdi (Veblen ve Whitehead, 1932). Veblen ve Whitehead bir “pseudo-grup” G yi iki önermeli(postulate) koşullu bir kompozisyonla karakterize ettiler. n -boyutlu bir u sınıfı manifoldu tanımlamak için u sınıfının transformasyonlarının pseudo-grubunu’nu düşündüler. Onların düşüncesinde, u sınıfı n -boyutlu bir manifoldun yapısı belirli bir sistemle tanımlandı. Bu sistem φ , $V \subset R^n$ bölgesi üzerine biyektif bir resmediş olmak üzere, yeterince geniş $U \subset P(M)$ tanım kümeleri üzerinde $\varphi: U \rightarrow V$ koordinat sistemleri içinden bir sistem olarak tanımlanır :

- I. Kabul edilebilir koordinat sistemlerinin temel aksiyomları
- II. Uyumlu koordinat sistemleri birleşimi
- III. Topolojik aksiyomlar, ayrılabilirlik

Veblen ve Whitehead III.grup aksiyomların Hausdorf anlamında bir topolojik yapıyı gerektirdiğini ve onların aksiyomlarının Hilbert anlamında tutarlı ve bağımsız olduğunu gösterdiler (Veblen & Whitehead 1931: 95), (Veblen & Whitehead 1932: 79). Dahası, makalelerinde $u = C^1$ sınıfı için aksiyom sistemlerinin diferansiyel geometri için mantıksal bir temel olduğunu açıkladılar. Çünkü bu sınıfta (veya daha yüksek olanlarda) “ Manifoldun her bir noktasında diferansiyellerin teğet uzayını tanımlamak mümkündür.”

Bir yıl sonra yayınladıkları “Foundations of Differential Geometry” çalışmalarında modern diferansiyel geometrinin kavramsal standartizasyonuna büyük bir katkı yaparak diferansiyel topolojinin gelecekteki gelişmelerine sağlam bir zemin oluşturdular (Veblen; Whitehead, 1932). Riemann metriği, Afın bağlantılar vb. temel kavramlarını bir sembolleme ile verdiler. 1930'ların anlayışında bile, manifoldların diferansiyel geometrisini iyi bir şekilde kurduklarından kimsenin şüphesi kalmamıştı (Scholz, 1999).

1.2. Temel Tanımlar

Tanım 1.1. F^n de bir açık alt cümle W olmak üzere

$$f: W \rightarrow R$$

fonksiyonunun t . mertebeden sürekli olan tüm kısmi türevleri var ise, f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir.

Özel Durum : f fonksiyonu sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir.

$$C^k(W, IR) = \{f \mid f: W \rightarrow R \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından} \}$$

$$C^\infty(W, R) = \{f \mid f \in C^k(W, R), k \in N\}$$

gösterimleri kullanılır.

Tanım 1.2. F^n in açık alt cümlesi W ve V olsun. Bir $\psi: W \rightarrow V$ fonksiyonu

$$i) \quad \psi \in C^k(W, V)$$

$$ii) \quad \psi^1: V \rightarrow W \text{ var ve } \psi^1 \in C^k(V, W)$$

önergelerini sağlıyor ise ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve W ile V ye de t . dereceden diffeomorfiktirler denir . (Hacısalıhoğlu,1993)

Tanım 1.3. P topolojik bir uzay, r herhangi bir noktası olsun. W, R^n 'de açık bir altuzay olmak üzere $\phi: W \rightarrow P$ gönderimi homeomorfiyse ve $r \in \phi(W)$ ise ϕ 'ye P 'nin r çevresinde bir parametrizasyonu denir. P Hausdorff ve 2.sayılabılır ise ve P 'nin her noktası çevresinde R^n 'den gelen bir parametrizasyon bulunabiliyorsa P 'ye n boyutlu topolojik manifold denir. (Hacısalıhoğlu,1993)

Tanım 1.4. E^n 'nin $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T_{E^n(P)}^*$ olsun. Buna göre bir

$$\eta: E^n \rightarrow \cup T_{E^n(P)}^*, \text{ fonksiyonu için,}$$

$$P \in E^n$$

$$\pi \circ \eta: E^n \rightarrow \cup E^n \text{ olacak şekilde bir,}$$

$$\pi: \cup T_{E^n(P)}^* \rightarrow E^n$$

$P \in \mathbb{Z}^n$ fonksiyonu mevcut ise η ye E^n üzerinde 1-form denir (Hacısalıhoğlu, 1993)

Tanım 1.5. M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir.

Tanım 1.6. M bir manifold ve M de bir komşuluk W olsun. Bir $R \in W$ noktasındaki tanjant uzay $T_W(R)$ olsun. W nin bütün R noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\cup T_W(R)$ ile gösterilsin.

$$R \in W$$

$$\Pi: \cup T_W(R) \rightarrow W$$

$$R \in W$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_W(P)$ tanjant vektörü için

$$\Pi(t_p) = R$$

biçiminde tanımlansın. W 'nin komşuluğunda bir vektör alanı operatörü olarak

$$X: W \rightarrow \cup T_W(R)$$

$$R \in W$$

biçiminde bir fonksiyondur.

$$\Pi \circ X = I: W \rightarrow W$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur .

Tanım 1.7. W bir P cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : W \times W \rightarrow W$$

dönüşümü de;

- i) 2- lineer
- ii) Alterne ($\forall K, L \in V$ için $[K,LY] = - [L, K]$)
- iii) $\forall K, L, M \in W$ için

$$[K, [L, M]] + [L, [M, K]] + [M, [K, L]] = 0, \text{ (Jacobi özdeşliği)}$$

olarak verilsin, $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne, V üstünde bir Lie operatörü denir. (Bu taktirde V vektör uzayına bir Lie Cebiri denir)

Tanım 1.8. C^∞ da M bir manifold olsun. $\chi(M)$: M üstünde vektör alanlarının uzayı olmak üzere (ileriki bölümlerde $\chi(M)$ yerine TM de alabileceğiz) C^∞ 'da reel değerli fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : TM \times TM \rightarrow C^\infty(M, R)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. $\langle, \rangle$ fonksiyonu M 'de bir iç çarpım, bir metrik tensör, Riemann metriği veya diferansiyellenebilir bir metrik olaraktanımlanır. (Kocayigit, 2004).

M bir Riemann manifoldu, $\chi(M)$ deki tanımlanmış her bir $\langle, \rangle$ iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir çarpım indirger. Şöyle ki $X, Y \in TM$ olmak üzere, $P \in M$ için $K_p, L_p \in T_M(P)$ dir. Diğer taraftan, $\langle K, L \rangle \in C^\infty(M, R)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $\langle K, L \rangle(P) \in R$ dir. Böylece;

$$\langle, \rangle(P) : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow R$$

fonksiyonu, $\forall K_p, L_p \in T_M(P)$

$$\langle K_p, L_p \rangle = \langle K, L \rangle(P) = \langle K, L \rangle|_P$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, $\langle, \rangle(P)$, $T_M(P)$ de bir iç çarpım fonksiyonu olur.

Tanım 1.9. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M, R)$ olmak üzere diferansiyellenebilir

$$\langle, \rangle : TM \times TM \rightarrow C^\infty(M, R)$$

fonksiyonu,

- i) 2-lineer
- ii) Simetrik
- iii) $\forall K, L \in \chi(M)$ için $\langle K, L \rangle = 0 \Rightarrow L = 0 \in \chi(M)$ (non-dejenere)

özelliklerini sağlıyor ise, M ye bir yarı-Riemann manifoldu denir (Kocayigit, 2004).

Tanım 1.10. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

$$i) \quad D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z, \quad X, Y, Z \in \chi(M), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, R)$$

$$ii) \quad D_X(f.Y) = f.D_X Y + X[f]Y, \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad \forall f \in C^\infty(M, R)$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir(Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.11. Bir yarı-Riemann manifoldu M_1 olsun. H , M_1 üstünde bir afin koneksiyon olmak üzere i,ii,iii için,

$$i) \quad H, C^\infty \text{ sınıfındandır.}$$

$$ii) \quad M_1 \text{ nin bir } B \text{ bölgesi üzerinde, } C^\infty \text{ olan } \forall K, L \in \chi(M) \text{ için,}$$

sıfır torsion özelliği olan $D_K L - D_L K = [K, L]$ dir.

M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall K, L, M \in \chi(M)$ ve $\forall p \in B$ ve metrik ile bağdaşan bir D için iii) $X_p \langle L, M \rangle = \langle D_K L, M \rangle|_p + \langle L, D_K M \rangle|_p$

Yukarıdaki i,ii,iii, durumları sağlanıyorsa D koneksiyonuna M üstünde bir Riemann koneksiyonu ve D_K e de K 'ya göre Riemann kovaryant türev operatörü denir.(Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.12. $M' \subset E^n$ de bir hiperyüzey, N ; M nin birim normal vektör alanı olmak üzere E^n de Riemann koneksiyonu D olmak üzere, $\forall K \in \chi(M)$, Yani TM için

$$S(K) = D_K N$$

şeklinde tanımlı

$$S: TM \xrightarrow{\text{lineer}} TM$$

S dönüşümüne M de Weingarten dönüşümü denir.(Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.13. M ve N , sırası ile, m ve n boyutlu birer C^r manifoldu olsunlar.

$S_m = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ve $S_n = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in B}$ de, sırası ile, M ve N için birer atlas olsunlar.

$$S_{m+n} = \{(U_\alpha \times V_\beta), (\psi_\alpha \times \varphi_\beta)\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$$

atlası ile birlikte $(m+n)$ -boyutlu $M \times N$ topolojik manifolduna M ve N manifoldlarının çarpım manifoldu denir(Yano ve Kon, 1983).

M nin U_α üzerindeki lokal koordinat sistemi $(x_1, \dots, x_m)$ ve N nin V_β üzerindeki lokal koordinat sistemi de $(y_1, \dots, y_n)$ ise

$$\bar{x}_i(p, q) = x_i(p) \text{ ve } \bar{y}_k(p, q) = y_k(q), \quad \forall (p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$$

ve $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$$

de $M \times N$ çarpım manifoldu için $U_\alpha \times V_\beta$ üzerindeki lokal koordinat sistemi olur(Yano ve Kon, 1983).

Tanım 1.14. M bir yarı-Riemannian manifold ve M nin k -boyutlu bir alt manifoldu $\bar{M}$ olsun M nin $\langle, \rangle$ metrik tensörünün $\chi(\bar{M})$ ye kısıtlanmasıyla elde edilen metrik tensöre, indirgenmiş metrik tensör ve $\bar{M}$ ye de indirgenmiş metrik tensör altında yarı-Riemannian manifold denir(Kocayigit, 2004).

Tanım 1.15. M bir Riemannian manifold ve M nin k -boyutlu bir alt manifoldu $\bar{M}$ olsun. Eğer indirgenmiş metrik tensör singüler değil ise $\bar{M}$ ye singüler olmayan altmanifold denir(Kocayigit, 2004).

Tanım 1.16. n -boyutlu bir Riemannian manifold M ve M nin k -boyutlu bir altmanifoldu $\bar{M}$ olsun. $\chi(\bar{M})$ nin $\chi(M)$ deki ortogonal komplemanı $\chi(\bar{M})^\perp$ ve M nin Riemann koneksiyonu D olsun. $\chi(M) = \chi(\bar{M}) \oplus \chi(\bar{M})^\perp$ eşitliği gereğince, C^∞ olan $K, L \in \chi(\bar{M})$ için, yazılabilen

$$D_K L = \bar{D}(K, L) + V(K, L), \quad \bar{D}(K, L) \in \chi(\bar{M}), V(K, L) \in \chi(\bar{M})^\perp$$

eşitliğine Genelleştirilmiş Gauss Denklemi denir(Kocayigit, 2004).

$\bar{D}(K, L)$ ve $V(K, L)$ bileşenlerine $D_K L$ nin, teğet ve normal bileşenleri denir. $\bar{D}(K, L)$ =teğ $D_K L$ ve $V(K, L) = \text{nor}(D_K L)$ kullanacağız. Genel olarak, $K \in \chi(M)$ vektör alanı $\chi(M) = \chi(\bar{M}) \oplus \chi(\bar{M})^\perp$ eşitliği gereğince

$$K = K_1 + K_2, \quad K_1 \in \chi(\bar{M}), \quad K_2 \in \chi(\bar{M})^\perp$$

ifadesi K_1 ve K_2 gibi iki vektör alanının toplamı olarak yazılır. K nın teğetsel bileşeni K_1 ve K nın normal bileşeni de K_2 dir.

$$K_1 = \text{teğ}(K), \quad K_2 = \text{nor}(K) \quad \text{ve} \quad \langle K_1, K_2 \rangle = 0$$

dir. Daha önemlisi, teğ ve nor fonksiyonları $\chi(M)$ üzerinde $C^\infty(M, R)$ lineer fonksiyonlardır (Kocayiğit, 2004).

Teorem 1.1. M bir Riemann manifoldu ve $\bar{M} \subset M$ k -boyutlu altmanifold olsun. O zaman

$$\bar{D} : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

$$(X, Y) \rightarrow \bar{D}_X Y = \text{teğ}(D_X Y)$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ fonksiyonu $\bar{M}$ nin Riemann koneksiyonudur. (Kocayiğit, 2004).

Teorem 1.2. M bir Riemann manifoldu ve $\bar{M} \subset M$ altmanifold olsun. M ve $\bar{M}$ nin Riemann koneksiyonları, sırasıyla, D ve $\bar{D}$ olmak üzere,

$$V : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})^\perp$$

$$(X, Y) \rightarrow V(X, Y) = D_X Y - \bar{D}_X Y$$

fonksiyonu $\chi(\bar{M})^\perp$ değerli, simetrik, 2-kovaryant tensör alanıdır. (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.17. M bir n -Riemann manifoldu ve $\bar{M}$ de M nin bir k -boyutlu altmanifoldu olsun. O zaman

$$V : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})^\perp$$

$$(X, Y) \rightarrow V(X, Y) = D_X Y - \bar{D}_X Y$$

şeklinde tanımlı, $\chi(M)^\perp$ değerli, simetrik, 2-kovaryant tensör alanına $\bar{M}$ nin ikinci temel tensörü veya Genelleştirilmiş Weingarten Dönüşümü denir (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.18. n - boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M nin k - boyutlu bir altmanifoldu $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ nin ikinci temel tensörü V ve $\chi(\bar{M})^\perp$ in bir ortonormal bazı

$$\Psi = \{ N_1, \dots, N_{n-k} \}$$

olmak üzere,

$$B_I: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$B_I(X, Y) = \langle V(X, Y), N_i \rangle, 1 \leq i \leq n-k$$

şeklinde tanımlı B_I bilinear formlarına $\bar{M}$ nin ψ ye göre ikinci temel formları denir (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.19. N bir $C^\infty(n-1)$ - manifold olsun.

$$f: N \rightarrow E^n$$

fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = M$ manifolduna E^n in bir hiperyüzeyi denir (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.20. : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(E^n)$ in bir alt uzayı $\chi(M)$, $\chi(E^n)$ deki iç çarpıma göre $\chi(M)$ nin ortogonal komplemanı $\chi(M)^\perp$ olsun. $\chi(M)^\perp$ in bir ortonormal bazını $\{N\}$ ile gösterelim. N ye M nin bir birim normal vektör alanı denir (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.21. E^n , n - boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde differansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme denir.

E^n deki her bir irtibatlı M hiperyüzeyi için tam iki farklı yönlendirme vardır. Bunlardan birisi N_i e diğeri de $-N_i$ e karşılık gelir. Üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan hiperyüzeye yönlendirilmiş (oriented) hiperyüzey denir (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.22. Üzerinde uygun bir yön seçilebilen bir M manifolduna yönlenebilir manifold veya yönlendirilebilir manifold denir. Böyle bir manifold üzerinde seçilmiş olan özel bir μ yönüne M manifoldu üzerinde μ yönü denir. (M, μ) ikilisine de yönlendirilmiş manifold veya kısaca yönlü manifold denir (Kocayiğit, 2004).

Tanım 1.23. M de ∇ afin koneksiyonu verilsin. $\forall K, L \in \chi(M)$ için

$$T: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(K, L) \rightarrow T(K, L)$$

$$T(K, L) = \nabla_K L - \nabla_L K - [K, L]$$

şeklinde tanımlı (1,2) tipindeki tensör alanına M nin torsion tensörü denir (Yamata, 1990).

Özel olarak $T = 0$ durumunda

$$[K, L] = \nabla_K L - \nabla_L K$$

dır ve ∇ ya M üzerinde sıfır torsionlu (zero-torsion) koneksiyon adı verilir (Yamata, 1990).

Tanım 1.24. (M, g) , afin koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olan bir Riemann manifoldu olsun.

$$R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$Z \rightarrow R(X, Y)Z$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

olarak tanımlanan

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne M nin *eğrilik tensör alanı* ve $R(X, Y)$ dönüşümüne de *eğrilik dönüşümü* denir (Yamata, 1990).

$$\text{Özellik: } \forall X, Y \in \chi(M) \text{ için } T(X, Y) = -T(Y, X)$$

$$R(X, Y) = -R(Y, X)$$

dir (Yamata, 1990).

Tanım 1.25. M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametrel grup φ_t olsun. X vektör alanına göre bir K tensör alanının $L_X K$ ile gösterilen Lie türevi

$$(L_X K)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \right) [K_p - (\varphi_t K)_p]$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.1. M de bir ∇ afin koneksiyonu ve bir $U \subset M$ açık altcümlesi verilsin.

$X, Y \in \chi(M)$ olsun. U üzerinde X veya Y sıfır ise $\nabla_X Y$ de U üzerinde sıfırdır (Yamata, 1990).

Tanım 1.26. $((V, +), (R, +, \cdot))$ vektör uzayının kompleksleştirilmiş diye

$$V^c = \{ X + iY \mid X, Y \in V \} \quad \text{ve}$$

$$\forall X_1 + iY_1, X_2 + iY_2 \in V^c, \forall Z = Z_1 + iZ_2 \in V \text{ için}$$

$$(X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2),$$

$$(Z_1 + iZ_2)(X_1 + iY_1) = (Z_1X_1 - Z_2Y_1) + i(Z_1Y_1 + Z_2X_1)$$

olmak üzere,

$$((V^c, +), (C, +, \cdot), \cdot)$$

vektör uzayına denir(Yamata, 1990).

Önerme 1.2. $A: V \xrightarrow{\text{lineer}} V; ((V, +), ((IR, +, \cdot), \cdot))$

verilsin. O zaman

$A^2 = -I \Rightarrow V$ nin $\{ \alpha_1, \dots, \alpha_n, A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_n) \}$ olacak şekilde bir bazı vardır (Yamata, 1990).

Tanım 1.27. $V = ((V, +), (IR, +, \cdot), \cdot)$ verilsin

$J: V \xrightarrow{\text{lineer}} V$ öyle ki $J^2 = -I$ ise J lineer dönüşümüne V üzerinde bir kompleks yapıdır denir (Yamata, 1990).

Tanım 1.28. : M bir reel manifold olsun. M üzerinde bir J tensör alanlı $(1, 1)$ - tipinde iken;

$$\forall P \in M \text{ için}$$

$$J(P) = J_P: T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümü $T_M(P)$ üzerinde bir kompleks yapı ise J ye M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı (hhky) dır denir. M ye de J kompleks yapısıyla bir hemen hemen kompleks manifolddur denir(Yamata, 1990).

Sonuç 1.1. M bir hemen hemen kompleks manifold ise boyutu $2n$ 'dir(Yamata, 1990).

Teorem 1.3. M bir kompleks manifold ise M üzerinde bir hhky vardır(Yamata, 1990).

Tanım 1.29. $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alanı F olsun. O zaman $\forall K, L \in \chi(M)$ için

$$N_F(K, L) = F^2[K, L] + [FK, L] - F[K, FL] - [FK, FL]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin Nijenhuis torsion tensörü denir(Yamata, 1990).

$F = J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde $J^2 = -I$ olacağından da

$$N_J(K, L) = -[K, L] + [JK, JL] - J[JK, L] - j[K, JL] \text{ dir (Yamata, 1990).}$$

Teorem 1.4. Bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir $\Leftrightarrow N_J = 0$ dır (Yamata, 1990).

Tanım 1.30. M de bir J hemen hemen kompleks yapısı verilsin. Eğer $X \in \chi(M)$ için

$$L_X J = 0 \text{ ise } X \text{ e infinitezimal otomorfizm (Analitik vektör alanı) denir (Yamata, 1990).}$$

Tanım 1.31. M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold Olmak üzere. C^∞ vektör alanlarının uzayı M üzerindeki $\chi(M)$, M den R ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, R)$ olmak üzere, M üzerinde tanımlı pozitif simetrik

$$g: TM \times TM \rightarrow C^\infty(M, R)$$

olarak tanımlanan 2-lineer Riemann metriği (g) ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir. (M, g) şeklinde gösterilir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

M manifold ve iki $k, l \in M$ noktaları için k ve l yi birleştiren bir eğri varsa M ,bağlantılı manifolddur. M bağlantılı ve temel grubu birim elemandan oluşuyor ise M ye basit bağlantılıdır denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.32. Diferensiyellenebilir manifold M ve M deki $\chi(M)$; C^∞ vektör alanlarının uzayı olsun;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \text{ lineer} - \chi(M)$$

$$(K, L) \rightarrow \nabla(K, L) = \nabla_K L$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall K, L, M \in \chi(M)$ için,

$$i) \nabla_K (L+M) = \nabla_K L + \nabla_K M$$

$$ii) \nabla_{fK+gL} M = f \nabla_K L + g \nabla_L M$$

$$iii) \nabla_K (fL) = f \nabla_K L + K(f)L$$

özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir Afin Koneksiyon adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.33. (M, g) ; Riemann manifoldu , ∇ ; M üzerinde tanımlı bir afin koneksiyon. $\forall k, l, m \in \chi(M)$ olsun.

∇ dönüşümü;

$$i) \nabla_K l - \nabla_l k = [K, L] \text{ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği)}$$

$$ii) Kg(L, M) = g(\nabla_K L, M) + g(L, \nabla_K M) \text{ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon veya M nin Levi-Civita Koneksiyonu adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.34. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2\text{-linear}} \chi(M)$$

$$(K, L) \rightarrow \nabla(K, L) = \nabla_K L$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir $C^\infty X, Y \in \chi(U)$ vektör alanı çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya Lineer Koneksiyon (veya kovaryant türev) adı verilir (O' Neill 1983).

$\forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

- i.) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$
- ii.) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$
- iii.) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
- iv.) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

dir.

Tanım 1.35. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi- Civita koneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(K,L)M = \nabla_K \nabla_L M - \nabla_L \nabla_K M - \nabla_{[K,L]}M \quad (1.1)$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir $(1,3)$ -tensör alanıdır ve M nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca $R(K,L,M, W) = g(R(K,L)M, W)$ tensörüne M nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir. Her $K,L,M, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$i.) \quad R(K,L)M = -R(L,K)M, \quad (1.2)$$

$$ii.) \quad g(R(K,L)V, W) = -g(R(K,L)W, V), \quad (1.3)$$

$$iii.) \quad R(K,L)M + R(L,K)M + R(M,K)L = 0, \quad (1.4)$$

$$iv.) \quad g(R(K,L)V, W) = g(R(V,W)K,L) \quad (1.5)$$

(O'Neill 1983).

Tanım 1.36. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $W, P \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu $Q(W,P) = g(W,W)G(P,P) - g(W,P)^2$ biçiminde tanımlansın. $Q(W,P) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(W,P) = \frac{g(R(W,P)P,W)}{Q(W,P)} \quad (1.6)$$

olup buna Π 'nin kesitsel eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.37. (M, g) m - boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$Q: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$T \rightarrow Q(T) = - \sum_{i=1}^n R(T_i, T)T_i$$

biçiminde tanımlanan Q operatörüne M nin Ricci Operatörü denir.

Tanım 1.38. (M, g) m - boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow R$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ tipindeki S tensör alanına, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.39. m - boyutlu bir Riemann manifoldu (M, g) olsun. Her $K, L \in \chi(M)$ için;

$$S(K, L) = \lambda g(K, L) \quad (1.8)$$

S Ricci tensörü, olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise ,ve bu fonksiyon metrik tensör g nin bir katı ise M ye Einstein manifoldu adı verilir (Yano and Kon, 1983).

Tanım 1.40. (M, g) m - boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (1.9)$$

değerine M nin skalar eğriliği adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.41. M , $(2m+1)$ - boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $K, L, M \in \chi(M)$ için M nin Weyl projektif eğrilik tensör alanı ;

$$P(K, L)M = R(K, L)M - \frac{1}{2m} [S(L, M)K - S(K, M)L] \quad (1.10)$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1983).

Tanım 1.42. M , $(2m+1)$ - boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $K, L, M \in \chi(M)$ için M nin Weyl conformal eğrilik tensör alanı ;

$$C(K, L)M = R(K, L)M + \frac{1}{2m-1} [S(K, M)L - S(L, M)K + g(K, M)QL - g(L, M)QK] - \frac{\tau}{2m(2m-1)} [g(K, M)L - g(L, M)L] \quad (1.11)$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1983).

Tanım 1.43. M manifoldu conformal flat olarak adlandırılırsa $C = 0$ dir. (Yano and Kon, 1983).

Tanım 1.44. M , $(2p+1)$ - boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $K, L, M \in \chi(M)$ için M nin Weyl concircular eğrilik tensör alanı;

$$\bar{C}(K, L)M = R(K, L)M - \frac{\tau}{2p(2p-1)} [g(L, M)K - g(K, M)L] \quad (1.12)$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1983).

Tanım 1.45. Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara uzay form denir. $(2m + 1) -$ boyutlu bir M uzay formu $M^{2m+1}(x)$ ile gösterilir. Eğer $x = 0$ ise $M^{2m+1}(x) = E^n$ ise Öklid uzayı, $x = \frac{1}{r^2}$ ise $M^{2m+1}(x) = S^n(r)$ küresi, $x = -\frac{1}{r^2}$ ise $M^{2m+1}(x) = H^n(r)$ Hiperbolik uzaydır (Chen, 1973).

Yani, M 'nin Ricci- pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_S = \{ p \in M : S - \frac{\kappa}{n} g \neq 0 \}$ kümesi üzerinde $R.S = L_S Q(g, S)$ olmasıdır. L_S , U_S üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 1.46. $m \geq 4$ boyutlu bir (M, g) Riemann manifoldu için eğer M nin tüm noktalarda $R.C$ ve $Q(g, C)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ; Weyl – pseudosimetriktir manifolddur.

Tanım 1.47. Bir (M, g) $m \geq 3$ boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_K S)(L, M) = \alpha(K)S(L, M) \quad (1.13)$$

olacak şekilde bir $\alpha(K)$ 1- formu var ise M ye Ricci Rekürent denir.

$$(\nabla_K S)(L, M) = \alpha(K)S(L, M) + \beta(K)g(L, M) \quad (1.14)$$

olacak biçimde $\alpha(K)$ ve $\beta(K)$ 1- formları var ise M ye genelleştirilmiş Ricci Rekürent denir. S nin kovaryant türevi $\bar{\nabla}S$

$$(\bar{\nabla}_K S)(K, L) + L_Y S(K, M) + (\bar{\nabla}_M S)(K, L) = 0 \quad (1.15)$$

ile tanımlanır. Eğer;

$$(\bar{\nabla}_K S)(K, L) + \bar{\nabla}_L S(K, M) + (\bar{\nabla}_M S)(K, L) = 0 \quad (1.16)$$

ise M ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir. Bundan başka g metrik tensörünün türevi

$$(\bar{\nabla}_K g)(K, L) = \bar{\nabla}_K g(L, M) - g(\bar{\nabla}_K L, M) - g(L, \bar{\nabla}_K Z) \quad (1.17)$$

ile ifade edilir.

Teorem 1.5. (M, g) ; Riemann manifoldu. M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu Koszul formülü ile karakterize edilir (O' Neill, 1983)

$$2g(\bar{\nabla}_K L, M) = K(g(L, M)) + L(g(M, K)) - M(g(K, L)) \\ - g(K, [L, M]) - g(L, [K, M]) + g(M, [K, L])$$

1.3. Tensör Hesabının Tarihi

20. yüzyılda tensör analizi olarak bilinen bu alan Einstein'ın 1915 civarında genel izafiyet teorisini ortaya atmasıyla daha geniş kabul gördü. Genel izafiyet teorisi tamamen tensörler dilinde formüle edilmişti. Einstein, geometrici Marcel Grossmann'dan büyük zorluklarla tensör hesabını öğrenmişti. Ancak, 1915'te, Einstein'ın genel görelilik kuramını dünyaya duyurmasından önceki aylarda, hala uzay denklemlerinde ciddi bazı kusurları vardı. Bu kusurlar Levi-Civita 'nın ilgisini çekti, onunla aynı yıl Mart'tan Mayıs'a kadar süren bir yazışmaya başladı.

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), Lugo di Romagna'da doğan bir İtalyan matematikçidir ve Tensör hesaplarının mucidi olarak ünlenmiş olsa da diğer alanlarda da önemli eserler yayımlamıştır. O ve öğrencisi Levi-Civita (1873-1941), şimdi tensör hesabı olarak bilinen mutlak diferansiyel hesabını formüle etmiştir. Tensörler süreklilik mekaniği başta olmak üzere birçok alanda kullanışlı bulunmuştur. Einstein'dan sadece birkaç yaş büyük olan Levi-Civita, Roma Üniversitesi'nde dünyaca ünlü bir matematikçi ve sevilen bir profesördü. Birkaç kitabın ve yüzlerce bilimsel makalenin yazarıydı. Yabancı üniversitelerden

onursal dereceler almış ve prestijli İngiliz Kraliyet Akademisi de dahil olmak üzere İtalya ve yurtdışında birçok öğrenim akademisine üye olmuştu(http://en.wikipedia.org/wiki/Tullio_Levi-Civita) Levi-Civita özellikle Einstein'ın genel görelilik kuramıyla ilgiliydi. Einstein 1915' te izafiyet teorisinin uzay denklemleri için tensör hesabını vazgeçilmez bulmasına kadar, tensör hesabının önemi yeterince kavranmamıştı.

Bu aylarda Einstein, hepsi şu an mevcut olan, Levi-Civita'ya onbir mektup yazdı (Weinstein, 2012). Ancak İtalyan matematikçinin mektuplarından sadece biri bugünlere gelebilmiştir. Einstein'ın son derece karmaşık matematiksel denklemlerle dolu mektuplarına bakıldığında, Levi-Civita, Einstein'ın uzay denklemlerindeki kusurlara karşı ciddi ve kritik kanıtlar sunmuş olmalıydı. Einstein mektuplarında çoğu kez Civita'ya karşı çıkmış ve kendi ispatlarında ısrar etmişti.

Bir Vektör Uzayında Tensörün Tanımı

Tensör; vektörler, skalerler ve diğer tensörler arasındaki doğrusal ilişkileri açıklayan geometrik bir nesnedir. Tensör hesabı, lineer cebirin genellemesi olarak kabul edilebilecek bir tekniktir. Klasik lineer cebir vektörler ve matrislerle ilgilenir. Tensörler vektörlerin ve matrislerin genellemeleridir.

W sonlu boyutlu bir vektör uzayı, W^* onun dual uzayını gösterebilir. V üzerinde kovaryant k -tensörü; bir multilinear mapping olur(resmediş);

$$F : \underbrace{W \times \dots \times W}_{k \text{ tane}} \rightarrow R$$

benzer şekilde kontravaryant l -tensörü de bir multilinear mapping(resmediş) olur;

$$F : \underbrace{W^* \times \dots \times W^*}_{l \text{ tane}} \rightarrow R$$

Çoğu zaman karışık türde tensörler de kullanılır, bunlar $\binom{k}{l}$ türünde tensörlerdir. Örneğin k - kovaryant, l -kontravaryant bir multilineer resmediş aşağıdaki gibidir;

$$F : \underbrace{W^* \times \dots \times W^*}_{l \text{ tane}} \times \underbrace{W \times \dots \times W}_{k \text{ tane}} \rightarrow R$$

Tüm kovaryant k-tensörlerinin uzayı $T^k(W)$, kotravaryant l-tensörlerin uzayı $T_l(W)$ ve tüm $\binom{k}{l}$ türü karışık tensörlerin uzayı da $T_l^k(W)$ ile gösterilir. Aşağıdaki özdeşlikler sağlanır(Lee, 1997);

$$T_0^k(W) = T^k(W)$$

$$T_l^0(W) = T_l(W)$$

$$T^1(W) = W^*$$

$$T_1(W) = W^{**}$$

$$T^0(W) = R$$

$$T_1^1(W) = (W)$$

Aris, Tensörleri fiziksel anlamda şöyle açıklıyor: "İki vektörün bölümü tatmin edici bir şekilde tanımlanmasa da, tensörler onları daha ziyade görmelerini sağlayan durumlarda fiziksel olarak ortaya çıkarlar. Örneğin gerilme, birim alan başına bir kuvvettir. Bir kuvvetin bir vektör olduğunu gördük. Eğer alanın boyutunu ve yönünü belirtmek zorunda olduğumuzu hatırladığımızda, bu alanın yönü normalidir. f , kuvvetin vektörünü ve A da normalin yönündeki alana eşit büyüklükteki bir vektörü belirtirse, T 'nin gerilimi f/A olarak düşünülebilir. Ancak bir vektörün bölünmesi tanımsız olduğu için, bu yolla tam olarak ortaya çıkmaz. Daha doğrusu, gerilim sisteminde A 'yı, $T = f/A$ gibi yeni bir varlık ile çarparak elde edebiliriz ki $f = AT$ olacaktır. Gerilim sistemi bir tensördür ve (en azından) iki yön onunla ilişkili görünür."(Aris, 1989).

Önemli Bazı Tensörler

$\Gamma_{\mu\nu}^K = \frac{1}{2} g^{K\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$ bir metrik bağlantı olmak üzere;

Riemann eğrilik tensörü ;

$$R_{\lambda\mu\nu}^K = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^K - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^K + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^K - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^K$$

Ricci tensörü Riemann tensörünün daralmasıdır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$$

Bu nedenle eğer Riemann tensörünü bilirsek, Ricci tensörünü hesaplayabiliriz. Skaler eğrilik Ricci tensörünün daralmasıdır ve aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Bir kürenin alanını düz bir uzayda hesaplayabiliriz, fakat eğri bir uzayda, bu alan, eğrilikle orantılı bir miktarda hesapladığımızdan sapacaktır. Skaler eğrilik bu sapmanın limiti olarak tanımlanır. Genel olarak $D-1$ boyutlu kürede skaler eğrilik aşağıdaki limitle hesaplanır :

$$R = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{6D}{\epsilon^2} \left[1 - \frac{A_{\text{eğri}}(\epsilon)}{A_{\text{düz}}(\epsilon)} \right]$$

ϵ : verilen bir x_0^μ başlangıç noktasından geodezik uzaklık

Ricci Tensörü

Albert Einstein İzafiyet Teorisi açıklarken diferensiyel geometri ve tensör hesabını kullanarak teorisini sağlan bir temele oturtmayı tercih etmişti. Genel Relativite teorisinin ardındaki fikir, yerçekimi gibi bir kuvvetin olmaması, sadece geometri var olmasıdır. Uzay-zaman, bir metriğe sahip 4 boyutlu bir manifold olarak tanımlanır ve düz bir geometriye sahip olan bir Minkowski uzay-zamanının genelleştirilmesidir. Bu nedenle, Einstein'a göre, o, yerçekimsel alan kaynaklarının bulunduğu bir uzay-zaman değildir ve kavisli bir uzay olarak kabul edilir. Bu nedenle, kütlelerin ışığı gibi nesneler, alanın eğriliğine göre hareket eder. Einstein Alan Denklemlerini kullanmıştı. Bu diferensiyel denklem metrik tensör g_{ab} dilinde yazılmıştı:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{C^4} T_{ab}$$

Denklemin sol tarafı uzay-zaman geometrisi hakkında gerekli olan Ricci tensör, skaler eğrilik ve metrik bilgilerini veriyordu. Denklemden sağ tarafta enerjinin dağılımını veren enerji momentum tensörü ve uzay boyunca kütle bulunmaktadır. Einstein bu denklemlerin çözümünün çok güç olabileceğini belirtti (Wald, 1984). O zamandan beri bu denklemlerin birçok çözümleri bulundu. Einstein denklemlerine kesin çözümlerin araştırılmasında önemli bir katkı, Weyl tensörüne ve Ricci tensörüne göre uzay-zamanlarının sınıflandırılması oldu. Riemann tensörünün sınıflandırılmasını (özellikle Weyl tensörünün) ilk kez Petrov yaptı.(Petrov, 1954). Bu çalışma keyfi boyutlara ve metriklere genelleştirildi. 1982'de Hamilton, Ricci (flow)

akışının bir manifoldun yapısını basitleştirmek için mükemmel bir araç olduğunu keşfetti. Ricci eğrilik tensörünü (Ric) kullanarak Ricci flow (RF) tanımladı(diffüsiye eğrilik akış da denir);

$$(\text{Metriğin değişim oranı}) = -2Ric.$$

Bu notasyonu düzgün manifoldlar üzerinde bir kanonik metrik bulmak için oluşturdu. Sonra Ricci akışı özellikle pozitif eğrilikli Riemann manifoldları için güçlü bir araç oldu. Ricci Akışı bir Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan bir evrim denklemdir:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = -2R_{ij}$$

Ricci soliton kavramı hem Einstein metriğinin bir genelleştirilmesi hem de Ricci akışının bir çözümü olarak Hamilton tarafından tanıtıldı (Hamilton, 1988). g , bir Riemann manifoldu üzerinde bir Riemann metriği olsun. Eğer aşağıdaki denklem,

$$\mathcal{L}_X g + 2S + 2\rho g = 0$$

Ricci tensörü tarafından bir düzgün X vektör uzayında herhangi bir ρ sayısı için sağlanıyorsa g ' ye Ricci soliton denir. Burada $\mathcal{L}_X$, X ' e göre bir Lie türevidir. ρ nın negatif, sıfır veya pozitif olma durumuna göre Ricci soliton, genişleyen, durgun ya da büzülen olarak adlandırılır (Hamilton, 1988).

Bir manifoldun yapısı bir bağlantı ve bir metrik tensör ile tamamlanabilir. Metrik ile kuvvetle ilişkili olan Levi-Civita bağlantısı ile Riemann eğrilik tensörü ve ondan yararlanarak Ricci tensörü tanımlanır. Ricci solitonun metriği sadece fizik için değil matematik için de önemlidir ve sıkça quasi-Einstein olarak refere edilir. Ricci tensörü Einstein Alan denklemlerinde karşımıza çıkmaktadır, bu nedenle bu çalışmada kısaca değinilmiştir.

Soliton Fonksiyonlar

Bilim insanları Matematikt, Fizik ve Astronomide sabit bir hızda yayılım dalgaların izlediği yolu gösterirken şeklini koruyan ve giderek kendini güçlendiren tek tek dalgalardır. Bunlar solitonlar olarak adlandırılır. Solitonlar, boş bir ortamda dağılan ve doğrusal olmayan biri başlarken diğerini söndüren dalgalardır. Dalgaların hız ve frekansının değiştiği Solitonlar, fiziksel olguları sistemsal olarak tanımlamak için kullanılan doğrusal olmayan kısmi ayrıklık eşitliklerin yayılması olarak bulunmuştur. Çevrimli dalga adında Soliton terimi, ilk olarak 1834 yılında, İskoçya'da John Scott Russell tarafından tanımlanmıştır.

2. TRANS-SASAKIAN MANİFOLDLAR

2.1. Hemen Hemen Kontakt Manifolddlar

Tanım 2.1.1. Hemen Hemen Kontakt(Değme) Manifolddlar

$2n + 1$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde ϕ , $(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ , bir vektör alanı ve η , 1-form olsun. X, M üzerinde herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

özellikleri sağlanıyorsa, M manifolduna hemen hemen kontakt manifold denir. (Yano ve Kon, 1984)

Hemen hemen kontakt metrik bir manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Burada ϕ , $(1, 1)$ tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η bir 1-form ve g , uyumlu Riemann metriği olmak üzere M ye teğet tüm X ve Y için :

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \phi\xi = 0, \quad \eta\phi = 0 \quad 1.3.(1)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad 1.3.(2)$$

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y), \quad g(X, \xi) = \eta(X) \quad 1.3.(3)$$

özellikleri sağlanır. Manifoldun Φ temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad 1.3.(4)$$

ile tanımlanır. (Blair, 1976)

Teorem 2.1.1 Hemen hemen kontakt manifold'da (M, ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü için $P, \xi, \in P(M)$, $P \neq \xi$ ve $\phi : P(M) \xrightarrow{\text{lineer}} P(M)$ için

$$i) \phi(\xi) = 0,$$

$$ii) \eta \circ \phi = 0$$

$$iii) \text{rank } \phi = 2n \text{ dir. (Yano and Kon, 1983)}$$

2.2. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifold

Tanım 2.2.1 : $(2P+1)$ boyutlu M diferansiyellernebilir Rieman manifoldunu ele alalım. (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt yapısıyla birlikte M nin bir H noktasındaki g Riemann metriği

$$g : T_{(M)}(H) \times T_{(M)}(H) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}, \text{ dir.}$$

simetrik pozitif tanımlı

$\forall K, L \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için $\eta(X) = g(K, \xi)$ $g(\phi(K), \phi(L)) = g(K, L) - \eta(K)\eta(L)$ koşulunu sağlayan g metriğine M üzerinde hemen hemen kontakt metrik,

(ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen kontakt metrik yapı, (M, ϕ, ξ, η, g) ifadesine de hemen hemen kontakt manifold (hhkm) denir (Yano and Kon, 1983)

Teorem 2.2.1 (ϕ, ξ, η, g) hhky ile birlikte $(2n+1)$ – boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu verilsin. $\forall K, L \in \chi(M)$ için

$g(\phi(K), \phi(L)) = g(K, L) - \eta(K)\eta(L)$ olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır. (Blair, 1976)

Sonuç 2.2.1 $(2P+1)$ boyutlu M Riemann manifoldu ve (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapı olsun. $\forall K, L \in \chi(M)$ için $g(\phi(K), L) = -g(K, \phi(L))$

Yani ϕ g ye göre anti – simetrik tensör alanıdır (Yano and Kon, 1983)

Sonuç 2.2.2 g metriğine karşılık gelen matris A ise $\forall K, L \in \chi(M)$ için $g(K, L) = K^T A L$ olmak üzere;

$$\phi: K(M) \xrightarrow{\text{lineer}} K(M)$$

$$K \longrightarrow \phi(K) = B(K)$$

$$L \longrightarrow \phi(L) = B(L) \quad \text{ için } \quad B^T A = -AB \text{ dir.}$$

Teorem 2.2.2 $(2n+1)$ - boyutlu bir hemen hemen kontakt manifoldu M verilsin. M nin kontakt formu verildiğinde, $\forall K, L \in \chi(M)$ için, $g(K, \phi(L)) = d\eta(K, L)$ hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır. (Yano and Kon, 1983)

2.3. Kontakt Yapılarda İkinci Temel Form

Tanım 2.3.1 M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hhk metrik yapı verilsin. $\forall K, L \in \chi(M)$ için, $\hat{O}(K, L) = g(K, \phi(L)) = d\eta(K, L)$ şeklinde tanımlı $\nexists$ dönüşümüne (ϕ, ξ, η, g) hhk metrik yapısının ikinci temel formu denir. Burada η kontak formu için yazılan $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ koşulu şeklinde tanımlı $\eta \wedge (\hat{O})^n \neq 0$ şeklini alır. (Yano ve Kon, 1984)

Teorem 2.3.1 $(2p+1)$ - boyutlu bir hhk metrik manifoldu (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. $\forall K, L \in \chi(M)$ için $d\eta(K, L) = g(K, \phi(L)) = \hat{O}(K, L)$ oluyorsa (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne *Kontak metrik yapı* ve (M, ϕ, ξ, η, g) ye de *Kontak metrik manifold* denir. (Yano ve Kon, 1983)

Sonuç 2.3.1 $\hat{O} = d\eta$ eşitliğini sağlayan (ϕ, ξ, η, g) hhk metrik yapısı aynı zamanda kontak metrik yapıdır. (Yano ve Kon, 1983)

Sonuç 2.3.3 her kontak metrik manifold aynı zamanda kontak manifolddur. (Yano ve Kon, 1984)

Önerme 2.3.1 w bir r -form olmak üzere $\forall x_1, x_2, \dots, x_r \in \chi(M)$ için

$$dw(x_1, x_2, \dots, x_r) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r (-1)^i x_i (w(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)) + \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^n \sum_{0 \leq i \leq j \leq r} w([x_i, x_j]),$$

$x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_r$ dir. Özel olarak w bir 1-form ise $2dw(K, L) = Kw(L) - L(w(K)) - w[K, L]$ dir.

Teorem 2.3.2 M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) hhk metrik yapısı için $\hat{O} = (X, Y) = \frac{1}{2} ([g(D_x \xi, Y) - g(D_y \xi, X)])$ dir. (Yano ve Kon, 1983)

Teorem 2.3.3 $(2n+1)$ boyutlu diferansiyellenebilir Riemann manifoldu M , (ϕ, ξ, η, g) kontak metrik yapısıyla verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, \xi) = 0 \text{ ve}$$

$$d\eta(\phi(X), Y) + d\eta(X, \phi(Y)) = 0 \text{ dir. (Yano and Kon, 1983)}$$

2.4. Hemen Hemen Kontakt Manifolddlarda Torsiyon Tensörü

Tanım 2.4.1 Bir reel vektör uzayı W olsun. $J = W \longrightarrow W$ lineer dönüşümü $J^2 = -I$ koşulunu sağlıyorsa J ye W üzerinde bir kompleks yapı denir. (Yano and Kon, 1983)

M , $(2p+1)$ boyutlu hemen hemen kontakt manifold verilsin. Bu Manifold üzerinde hemen hemen kontakt yapısı (ϕ, ξ, η) oluşturulsun. $\mathbb{R}$ reel bir doğruyu gösterebilirsin. $\mathbb{R}$ bir manifold olduğundan $M \times \mathbb{R}$ de bir manifold olur.

$X(\mathbb{R}) = \left\{ f \frac{d}{dt} \mid f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \right\}$, $X(M, \mathbb{R}) = \left\{ (X, f \frac{d}{dt}) \mid X \in (M) \text{ ve } f \frac{d}{dt} \in X(\mathbb{R}) \right\}$ olmak üzere X, M ye göre teğet vektör alanı t de $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f \frac{d}{dt}$, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyondur.

$M \times \mathbb{R}$ nin tanjan uzayındaki bir J lineer dönüşümü

$$J: X(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow X(M, \mathbb{R})$$

$(X, f \frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f \frac{d}{dt})$ olmak üzere $J(X, f \frac{d}{dt}) = (\phi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$ şeklinde tanımlanır. (Yano ve Kon, 1984)

Teorem 2.4.1 Yukarıda ki tanımlı J dönüşümü lineerdir ve $J^2 = -I$ dir.

Sonuç 2.4.1 $(M \times \mathbb{R})$ nin tanjant uzayında tanımlı J dönüşümü $(M \times \mathbb{R})$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı oluşturur. (Yano and Kon, 1983)

Tanım 2.4.2 M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere, $F(1,1)$ tipinde tensör alanı olsun. $\forall K, L \in \chi(M)$ için,

$$N_F: K(M) \times L(M) \longrightarrow K(M)$$

$(K, L) \longrightarrow N_F(K, L)$ olmak üzere $N_F(K, L) = F^2([K, L]) + [F(K), F(L)] - F[F(K), L - F[K, L]]$ şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipindeki N_F tensör alanına I nin Nijenyus torsiyon tensörü denir.

Tanım 2.4.3 $(M \times \mathbb{R})$ hemen hemen kontakt manifoldu verilsin. $N_J = 0$ ise J hemen hemen kompleks yapısına integrallenebilirdir denir. (Yano and Kon, 1983, Blair, 2002)

Tanım 2.4.4 Eğer $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir J hemen hemen yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına normaldir denir. (Yano and Kon, 1984; Blair, 2002).

Tanım 2.4.5 M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\phi = \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

$(t, p) \longrightarrow \phi_t(p)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise ϕ ye M nin diferansiyellebilir bir 1- parametrelili grubu adı verilir (Yano ve Kon, 1983).

İ) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\phi_t : P \longrightarrow \phi_t(P)$ bir diffeomorfizm

İİ) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $p \in M$ için, $\phi_{t+s} : P \longrightarrow \phi_t(\phi_s(P))$ dir.

Tanım 2.4.6 M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü 1- parametrelili grup ϕ_t olsun. X vektör alanına göre K tensör alanının X yönünde $L_X K$ ile gösterilen Lie türevi,

$$L_X K = \lim_{t \rightarrow 0} [K_x - (\phi_x K)x] \quad L_X K = [X, Y] \text{ olarak tanımlanır (Kubayashi and Nomizu, 1963).}$$

Önerme 2.4.3 $L_X K = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall t \in \mathbb{R}$ için ϕ_t nin K yı invaryant bırakmasıdır. (Kubayashi and Nomizu, 1963)

Tanım 2.4.7. $M, (\phi, \eta, g)$ üçlüsü bir değme metrik yapısı olan $(2p+1)$ - boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer M Sasakian yapıya sahiptir ise M 'nin değme metrik yapısı normaldir. Arasıra Sasakian manifold normal değme metrik manifold olarak da adlandırılır (Yano and Kon, 1983).

Teorem 2.4.2. M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) bir

Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow \forall K, L \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_K \phi)L = g(K, L)\xi - \eta(L)K \quad 2.4.(1)$$

dir (Yano ve Kon, 1983).

Burada;

$$\nabla_K(\phi L) = (\nabla_K \phi)L + \phi \nabla_K L \text{ dir.}$$

Sonuç 2.4.2. M bir Sasakian manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere;

$$R(K, L)\xi = \eta(L)K - \eta(K)L \quad 2.4.(2)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

Teorem 2.4.3. M $(2p+1)$ boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere M 'de bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. M nin eğrilik tensörü R olmak üzere M Sasakian manifolddur $\Leftrightarrow$

$$R(K, \xi)L = -g(K, L)\xi + \eta(L)K \quad 2.4.(3)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

Uyarı: Bir Sasakian manifoldu bir K – değme manifolddur fakat tersi sadece boy $M = 3$ olması halinde geçerlidir (Yano and Kon, 1983).

Sonuç 2.4.3. M bir Sasakian manifold olsun. $\forall K, L \in \chi(M)$ ve ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere;

$$R(K, \xi)L = -(\nabla_K \phi)L \quad 2.4.(4)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

Sonuç 2.4.4. M , değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2m+1)$ - boyutlu bir Sasakian manifold olsun. bu takdirde;

$$\begin{aligned} R(K, L)\phi Z = & \phi R(K, L)M + g(\phi K, M)L - g(L, K)\phi K \\ & + g(K, M)\phi L - g(\phi K, M)L \end{aligned} \quad 2.4.(5)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

Sonuç 2.4.5 M bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} R(K, L)M = & -\phi R(K, L)\phi M + g(\phi L, M)K - g(K, M)\phi L \\ & - g(\phi L, M)\phi K - g(\phi K, M)\phi L \end{aligned} \quad 2.4.(6)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

2.5. $M(C)$ Sasakian Uzay Formu

Önerme 2.5.1. (M, g) Riemann manifoldu sabit c eğrilikli bir manifold olsun. O zaman

$\forall K, L, M \in \chi(M)$ için;

$$R(K, L)M = c(g(L, M)K - G(K, M)L) \quad 2.5.(1)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

Tanım 2.5.1. M bir Sasakian manifold olsun. böylece $p \in M$ deki $T_p M$ tanjant uzayında ξ ya dik bir E birim vektörü $\{E, \phi E\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{E, \phi E\}$ düzlemine $T_p M$ nin

ϕ -kesitseli denir. Ayrıca

$$K(E, \phi E) = g(R(E, \phi E)\phi E, E)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye M nin bir ϕ -kesitsel eğriliği adı verilir. (Yano and Kon, 1983).

Tanım 2.5.2. M bir Sasakian manifold olmak üzere M nin ϕ -kesitsel eğriliği $c = sbt$ ise M bir Sasakian uzay formu olarak adlandırılır ve $M(c)$ şeklinde gösterilir (Verstraelen ve Vrancken, 1988).

Teorem 2.5.1. $M(c)$ Sasakian uzay formunun R eğrilik tensörü, $\forall K, L, M \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} R(K, L)M &= \frac{1}{4}(c+3)[g(L, M)K - g(K, M)L] \\ &- \frac{1}{4}(c-1)[\eta(C)\eta(Z)L - \eta(L)\eta(M)K \\ &+ g(K, M)\eta(L)\xi - g(L, M)\eta(K)\xi \\ &+ g(\phi L, M)\phi K - g(\phi K, M)\phi L + 2g(\phi K, L)\phi M] \end{aligned} \quad 2.5.(2)$$

dir (Yano and Kon, 1983).

2.6. Einstein Sasakian Manifolds

Bu bölümde bir n - boyutlu reel diferensiyellenebilir M manifoldunu inceleyeceğiz. Burada F vektör değerli bir lineer fonksiyon, A bir 1-form ve T bir vektör alanı olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı için;

$$(a) \bar{X} + X = A(X)T \quad (b) \bar{X} = F(X)$$

Koşullarını sağlayan (F, T, A) üçlüsüne M 'de bir hemen hemen kontak yapı ve (M, F, T, A) dörtlüsüne de hemen hemen kontak manifold denir. Bir hemen hemen Grayan Manifold'daki bir Riemann konneksiyonu olan D üzerinde;

$$F(X,Y) = (D_X A)(Y) - (D_Y A)(X) = (dA)(X,Y)$$

oluyorsa M bir hemen hemen Sasakian Manifold olarak adlandırılır. Bir Sasakian Manifoldda F kapalıdır. Eğer T killing vektör;

$$(D_X A)(Y) - (D_Y A)(X) = 0$$

ise bir hemen hemen Sasakian Manifoldun Sasakian Manifold olduğu söylenir. Böylece Sasakian Manifoldda;

$$F(X,Y) = (D_X A)(Y) \text{ ve } (D_X F)(Y,Z) = R(X,Y,Z,T)$$

R , M nin $(0,4)$ tipinde bir eğrilik tensörüdür. Bir Sasakian Manifoldda $R(X,Y,Z,U) = g[(X,Y,Z),U]$ ve;

$$(a) \quad R(X,Y,T) = A(Y)X - A(X)Y$$

$$(b) \quad R(T,Y,Z) = g(Y,Z)T - A(Z)Y$$

$$(c) \quad R(T,X,Y,Z) = A(Z)g(X,Y) - g(X,Z)A(Y) \quad 2.6.(1)$$

$$(d) \quad R(X,Y,Z,T) = A[R(X,Y,Z)] = A(X)g(Y,Z) - A(Y)g(X,Z)$$

$$(e) \quad R(T,X,Y,T) = g(\bar{X},\bar{Y}) = g(X,Y) - A(X)A(Y)$$

$$(a) \quad Ric(X,T) = g(r(X),T) = A(r(X)) = (n-1)A(X) \quad 2.6.(2)$$

$$(b) \quad Ric(\bar{X},Y) + Ric(X,\bar{Y}) = 0$$

eşitlikleri doğrudur. Burada Ric, Ricci tensördür.

Tanım 2.6.1. M bir $(n = 2m + 1)$ - boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M üzerinde

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X \quad 2.6.(3)$$

eşitliği var ise M ye bir Kenmotsu manifold adı verilir. Burada ∇ , g Riemann metriğine göre Levi – Civita koneksiyonudur.

Önerme 2.6.1. Bir M Kenmotsu manifoldu için 2.3.(3) den aşağıdaki eşitlikler geçerlidir(Yamata, 1990)

$$\nabla_x \xi = X - \eta(X)\xi, \quad 2.6.(4)$$

$$(\nabla_x \eta)Y = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

Önerme 2.6.2. Bir M Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \quad 2.6.(5)$$

dir (Yamata, 1990).

Teorem 2.6.1. M bir $(2m + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold ve M üzerinde Riemann eğrilik tensörü R olsun. bu durumda

$$R(\xi,X)Y = -g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \quad \text{dir. (Yamata, 1990)} \quad 2.6.(6)$$

Sonuç 2.6.1. M bir Kenmotsu manifold olsun. 2.3.(6) denkleminde her X,Y,Z vektör alanları için

$$\eta(R(X,Y)Z) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X)$$

dir (Yamata, 1990).

Sonuç 2.6.2. M bir Kenmotsu manifold olsun. 2.3.(6) denkleminde her X vektör alanı için

$$R(\xi,X)\xi = X - \eta(X)\xi \quad 2.6.(7)$$

dir (Yamata, 1990).

Sonuç 2.6.3. M bir $(n = 2m + 1) -$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S ve Ricci operatörü Q olmak üzere

$$S(X,\xi) = (1 - n)\eta(X) \quad 2.6.(8)$$

ve

$$Q\xi = (1 - n)\xi \quad 2.6.(9)$$

dir (Yamata, 1990).

Bu bölümde Kenmotsu Manifolflar üzerinde sağlanan bazı eğrilik şartlarını vereceğiz

Teorem 2.6.2. M^{2m+1} ($n = 2m+1$)- boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $R(\xi, X) \cdot S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

2.7. Trans-Sasakian Manifold

Tanım 2.7.1 M kontakt manifold üzerinde hemen hemen kontakt metrik bir yapı (ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer $(M \times R, J, G)$, W_4 sınıfı Hermetiyan bir manifold ise bir trans- Sasakian manifold olarak adlandırılır. Burada $M \times R$ 'nin hemen hemen kompleks bir yapısı olan J ,

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right) \quad 2.7.(1)$$

şeklinde M üzerinde bulunan tüm X vektör alanları için ve $M \times R$ üzerinde f düz fonksiyonu için tanımlanır. G , $M \times R$ üzerinde bir çarpım metriktir. Bu aşağıdaki koşul ile açıklanabilir (Blair, ve Oubina, 1990);

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X) \quad 2.7.(2)$$

Burada α ve β , M üzerinde düz fonksiyonlardır. Böyle bir yapı (α, β) tipi bir trans-Sasakian manifold olarak adlandırılır. 1.3.(6) ile,

$$\nabla_X \xi = -\alpha(\phi X) + \beta(X - \eta(X)\xi), \quad 2.7.(3)$$

$$(\nabla_X \eta)(Y) = -\alpha g(\phi X, Y) + \beta g(\phi X, \phi Y) \quad 2.7.(4)$$

Bir trans-Sasakian manifold (M, ϕ, ξ, η, g) üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (De ve Tripathi, 2003).

$$2\alpha\beta + \xi\alpha = 0 \quad 2.7.(5)$$

$$S(X, \xi) = (2(\alpha^2 - \beta^2) - \xi\beta)\eta(X) - X\beta - (\phi X)\alpha \quad 2.7.(6)$$

$$\begin{aligned} S(X, Y) = & \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(X, Y) \\ & - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Y) \\ & - (Y\beta + (\phi Y)\alpha)\eta(X) - (X\beta + (\phi X)\alpha)\eta(Y) \end{aligned} \quad 2.7.(7)$$

$$R(X, Y)\xi = (\alpha^2 - \beta^2)[\eta(Y)X - \eta(X)Y]$$

$$-\eta(Y)(X\beta)\xi + \phi(X)\alpha\xi + \eta(X)(Y\beta)\xi + \phi(Y)\alpha\xi$$

$$-(Y\beta)X + (X\beta)Y - (\phi(Y)\alpha)X + (\phi(X)\alpha)Y, \quad 2.7.(8)$$

ve

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \left(\frac{r}{2} + 2\xi\beta - 2(\alpha^2 - \beta^2)\right)(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ & - g(Y, Z)\left[\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\xi \right. \\ & \left. - \eta(X)(\phi\text{grad}\alpha - \text{grad}\beta) + (X\beta + (\phi X)\alpha)\xi\right] \\ & + g(X, Z)\left[\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(Y)\xi \right. \\ & \left. - \eta(Y)(\phi\text{grad}\alpha - \text{grad}\beta) + (Y\beta + (\phi Y)\alpha)\xi\right] \\ & - [(Z\beta + (\phi Z)\alpha)\eta(Y) + (Y\beta + (\phi Y)\alpha)\eta(Z) \\ & + \frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2))\eta(Y)\eta(Z)]X \\ & + [(Z\beta + (\phi Z)\alpha)\eta(X) + (X\beta + (\phi X)\alpha)\eta(Z) \\ & + \frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2))\eta(X)\eta(Z)]Y \end{aligned} \quad 2.7.(9)$$

Burada S , (0,2) tipinde bir Ricci tensörü; R , (1,3) türünde bir eğrilik tensörü ve r , M manifoldunun skaler eğriliğidir.

3. BOYUTLU TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLAR

Trans-Sasakian manifoldlar, D. Chinea ve C. Gonzales (1990) tarafından hemen hemen kontakt metrik yapıların sınıflandırılmasından doğal bir şekilde ortaya çıkmıştır (Uday ve Krishnendu, 2012). Ayrıca Hermitiyen manifoldların Gray-Hervella sınıflamasında W_4 sınıfı olan bir Hermitiyen manifold vardır.

$2n + 1$ boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. $\bar{M} = M \times R$ çarpımı bir doğal kompleks J yapısına sahip ve metrik çarpımı olan G bir Hermitiyandır. Hemen hemen Hermitiyen manifoldların $(\bar{M}, J, G)$ geometrisi hemen hemen kontakt metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ geometrisini hakim kılar ve M üzerinde Sasakian yapı, Quasi-Sasakian yapı, Kenmotsu yapı gibi çeşitli yapılar verir. Hemen hemen Hermitiyen manifold $(\bar{M}, J, G)$ üzerinde 16 farklı yapı olduğu bilinmektedir ve bunlar yerel olarak konformal olan Kahler manifoldları ile yakından ilişkilidir (Gray ve Hervella, 1980). Bir $(\bar{M}, J, G)$ manifoldu üzerindeki bir hemen hemen kontakt $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ yapı $M \times R$ çarpım manifoldunun W_4 sınıfına ait olması durumunda bir trans-Sasakian yapı olarak adlandırılır (Oubina, 1985). Bu yapı Sasakian ve Kenmotsu yapılarının bir metrik manifold üzerinde genelleştirilmesidir.

Üç boyutlu trans-Sasakian manifoldlar üzerinde çalışmalar yapan belli başlı bilim adamları De ve Tripathi(2003), De ve Sarkar (2008), Kim, Prasad ve Tripathi(2002), Bagewadi ve Venkatesha(2007; 2013), Shukla ve Singh (2010) olarak sayılabilir. Trans-Sasakian manifoldların ortaya çıkmasından sonra, Trans-Sasakian manifoldlarının geometrisini inceleyen Blair ve Oubina(1990) ve Marrero(1992)'nin çok önemli katkıları olmuştur. Genel olarak $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ şeklinde gösterilen bir trans-Sasakian manifold;

(α, β) tip Trans-Sasakian manifold olarak adlandırılır. $(0, 0)$ tip Trans-Sasakian manifold cosymplectic manifold, $(\alpha, 0)$ tip Trans-Sasakian manifold α -Sasakian manifold ve $(0, \beta)$ tip Trans-Sasakian manifoldlara da β -Kenmotsu manifoldları denir. (α, β) tipi bir trans-Sasakian manifoldda α ve β keyfi fonksiyonlar değildir, fakat vektör alanı üzerinde birbiriyle ilişkilidir. Ne α -Sasakian, ne de β -Kenmotsu olmayan trans-Sasakian manifoldlar örnekleri vardır.

Örneğin, (Agashe, ve Chafle, 1992) (x, y, z) kartezyen koordinatları R^3 te olmak üzere. (ϕ, ξ, η, g) yapısı aşağıdaki şekilde verilsin:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta = dz - ydx, \quad \phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} e^z + y^2 & 0 & -y \\ 0 & e^z & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu yapı $(\frac{-1}{2e^z}, \frac{1}{2})$ tipinde bir trans-Sasakian yapıdır. Çünkü $2\alpha\beta + \xi\alpha = 0$ koşulunu sağladığı gösterilir.

Marrero (1992), boyutu 5 ve 5 ten büyük olan Trans –Sasakian manifoldların ya kozimplektik veya α –Sasakian ya da β –Kenmotsu olacağını gösterdikten sonra 3 boyutlu Trans- Sasakian üzerine yapılan çalışmalar trans-Sasakian fonksiyonların tanımında geçen α ve β düz fonksiyonlarına sınırlamalar koymak şekline bürünüp oldukça yoğunlaşmıştır. Genellikle 3 boyutlu Riemann manifoldları üzerinde inşaa edilen çok çeşitli trans-Sasakian manifold örnekleri vardır. (ϵ) –Sasakian ve (ϵ) - Kenmotsu manifoldlarının doğal bir genellemesi olan (ϵ) - trans-Sasakian manifold buna bir örnektir.

Yarı simetrik kontakt manifoldlar (Takahashi 1969, Perrone 1992, Papantoniou (1993) tarafından incelenmiştir. Takahashi yarı simetrik Sasakian manifoldların sabit kesit eğriliğinin 1 olduğunu ispatlamıştır(Takahashi 1969). Blair ve Sharma (1990) 3-boyutlu lokal simetrik kontakt metrik manifoldun sabit eğriliğinin 0 veya 1 olduğunu ispatlamıştır.

3.1. Projektif Olarak Düz Trans-Sasakian Manifold

Bir W , Weyl –projektif eğrilik tensörü aşağıdaki şekilde tanımlanır. Burada R eğrilik tensörü ve S ise Ricci tensördür.

$$W(K, L)M = R(K, L)M - \frac{1}{2m} [S(L, M)L - S(K, M)L] \quad 3.5.(1)$$

Farz edelim ki $W = 0$ olsun, 2.5.(1) eşitliği aşağıdaki gibi olur;

$$R(K, L)M = \frac{1}{2m} [S(L, M)K - S(K, M)L] \quad 3.5.(2)$$

' $R(K, L, M, W) = g(R(K, L, M), W)$ olmak üzere bu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$'R(K, L, M, W) = \frac{1}{2m} [S(L, M)g(K, W) - S(K, M)g(L, W)] \quad 3.5.(3)$$

Bu eşitlikte $W = \xi$ koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\eta(R(K, L)M) = \frac{1}{2m} [S(L, M)\eta(K) - S(K, M)\eta(L)]$$

Şimdi de $X = \xi$ yi yukarıdaki eşitlikte yerine yazıp özdeşlikler kullanılarak;

$$S(K, L) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)g(K, M) \quad 3.5.(4)$$

bulunur. O halde bu manifold bir Einstein'dır. Buradan aşağıdaki teoreme ulaşılır (Bagewadi,Venkatesha,2007);

Theorem 3.1.1. Projektif olarak düz bir Weyl trans-Sasakian manifold bir Einstein manifolddur.

3.2. $R(X, Y).P = 0$ Koşuluna Uyan Trans-Sasakian Manifold

3.5.(1) kullanılarak aşağıdaki bağıntıyı elde edilir: $X=K, Y=L, Z=M$ alınırsa

$$\begin{aligned} \eta(P(K, L)M) &= (\alpha^2 - \beta^2) [g(L, M)\eta(K) - g(K, M)\eta(L)] \\ &\quad - \frac{1}{2m} [S(L, M)\eta(K) - S(K, M)\eta(L)] \end{aligned} \quad 3.2.(1)$$

Bu eşitlikte $M = \xi$ koyarsak, $\eta(P(K, L)\xi) = 0$ olur. Bu eşitlikte bu seferde $K = \xi$ koyarsak

$$\eta(P(\xi, K)M) = (\alpha^2 - \beta^2)g(L, M) - \frac{1}{2m}S(L, M) \quad 3.2.(2)$$

elde ederiz. 2.1.(2) ve 2.7.(6) eşitliklerini kullanarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} (R(K, L)P)(U, V)M &= R(K, L).P(U, V)Z - P(R(K, L)U, V)M \\ &\quad - P(U, R(K, L)V)M - P(U, V)R(K, L)M \end{aligned}$$

$R(K, L)P = 0$ olduğunu kullanırsak denklem aşağıdaki hale dönüşür:

$$\begin{aligned} R(K, L).P(U, V)M - P(R(K, L)U, V)M - P(U, R(K, L)V)M \\ - P(U, V)R(K, L)M = 0 \end{aligned}$$

Bunun sonucu olarak,

$$g[R(\xi, L).P(U, V)M, \xi] - g[P(R(\xi, L)U, V)M, \xi] \\ - g[P(U, R(\xi, L)V)M, \xi] - g[P(U, V)R(\xi, L)M, \xi] = 0$$

Bu eşitlikten hareket edersek aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$- 'P(U, V, M, L) + \eta(L)\eta(P(U, V)M) - \eta(U)\eta(P(L, V)M) \\ + g(L, U)\eta(P(\xi, V)Z) - \eta(V)\eta(P(U, L)M) + g(L, V)\eta(W(U, \xi)M) \\ - \eta(M)\eta(W(U, V)L) = 0 \quad 3.2.(3)$$

Burada $- 'P(U, V, M, L) = g(P(U, V)M, L)$ dir. $Y = U$ koyarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$- 'P(U, V, M, L) + g(U, U)\eta(P(\xi, V)M) - \eta(V)\eta(P(U, U)M) \\ + g(U, V)\eta(P(U, \xi)M) - \eta(M)\eta(P(U, V)U) = 0 \quad 3.2.(4)$$

$i = 1, 2, \dots, (2m + 1)$ olmak üzere $\{e_i\}$ her hangibir noktada tanjant uzayın bir ortonormal tabanı olsun. O zaman $1 \leq i \leq 2m + 1$ için 2.6.(3) bağıntısının $U = e_i$ için toplamı aşağıdaki gibi olur:

$$\eta(P(\xi, V)Z) = \frac{1}{2m} \left[\frac{r}{2m} - (2m + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(V)\eta(Z) \quad 3.2.(5)$$

2.6.(2) ve 2.6.(5) denklemlerini kullanarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$S(V, Z) = [2m(\alpha^2 - \beta^2)]g(V, Z) - \left[\frac{r}{2m} - (2m + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(V)\eta(Z) \quad 3.2.(6)$$

Bu eşitlikte $Z = \xi$ koyup $S(X, \xi) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)$ özelliğini kullanarak:

$$r = 2m(2m + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \quad 3.2.(7)$$

buluruz.

3.2.(1), $\eta(P(X, Y)\xi) = 0$, 3.2.(6) ve 3.2.(7) yi 3.2.(3) de koyarak aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$- 'P(U, V, Z, Y) = 0$$

Bu eşitliği aşağıdaki eşitlik izler:

$$P(U, V)Z = 0$$

Bu sonuç bize bahse konu trans-Sasakian manifoldun Weyl-projektif düz olduğunu belirtir. Bunun sonucunda aşağıdaki teoremler ortaya çıkar(Bagewadi, Venkatesha, 2007).

Teorem 3.2.1. $m > 0$ olmak üzere $2m+1$ boyutlu bir trans-Sasakian manifold olan M içinde $R(X, Y).P = 0$ bağıntısı korunuyorsa, o zaman bu manifold Weyl-projektif düzdür.

Teorem 3.2.2. $m > 0$ olmak üzere $2m+1$ boyutlu bir trans-Sasakian manifold olan M içinde $R(X, Y).P = 0$ bağıntısı sağlanıyorsa, o zaman bu manifold bir Einstein manifolddur ve sabit eğriliği $2m(2m+1)(\alpha^2 - \beta^2)$ olur.

3.3. 3-Boyutlu Konformal Olarak Düz Trans-Sasakian Manifold

Weyl-konformal eğrilik tensörü C aşağıdaki şekilde tanımlanır(Shaikh ve Matsuyama, 2007):

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2m-1}[g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + S(Y, Z)X \\ - S(X, Z)Y] + \frac{r}{2m(2m-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \end{aligned} \quad 3.3.(1)$$

Farz edelim ki $C = 0$ olsun. O zaman eşitlik aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = \frac{1}{2m-1}[g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \\ + \frac{r}{2m(2m-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \end{aligned}$$

Buradan $'R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y, Z), W)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$\begin{aligned} 'R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2m-1}[g(Y, Z)g(QX, W) - g(X, Z)g(QY, W) \\ + S(Y, Z)g(X, W) - S(X, Z)g(Y, W)] \\ + \frac{r}{2m(2m-1)}[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] \end{aligned}$$

Yukarıda $W = \xi$ koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \eta(R(X, Y)Z) &= \frac{1}{2m-1} [g(Y, Z)g(QX, \xi) - g(X, Z)g(QY, \xi) + S(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad - S(X, Z)\eta(Y)] + \frac{r}{2m(2m-1)} [g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)] \end{aligned}$$

Şimdi de yukarıdaki eşitlikte $X = \xi$ koyup 1.3.(2), 2.7.(6) ve 2.7.(8)yi kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$S(X, Y) = - \left[\frac{r}{2m} + (\alpha^2 - \beta^2) \right] g(Y, Z) + \left[\frac{r}{2m} + (2m + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(Y)\eta(Z)$$

O halde manifold bir η -Einstein manifolddur. Bunun sonucunda aşağıdaki teorem ifade edilir:

Teorem 3.3.1. Konformal olarak düz olan bir trans-Sasakian manifold η -Einstein manifolddur.

Teorem 3.3.2. (De ve Krishnendu, 2012) M , 3 boyutlu konformal olarak düz bir konnekt trans-Sasakian manifold olsun. M' ya bir η -Einstein manifold ya da bir β -Kenmotsu manifolddur.

3.4. $R(X, Y) \cdot C = 0$ Koşuluna Uyan Trans-Sasakian Manifold

2.7.(1), 1.3.(3) ve 1.3.(12) den aşağıdaki eşitlik elde edilir(Shaikh ve Matsuyama, 2007): $X=K, Y=L, Z=M$ alalım,

$$\begin{aligned} \eta(C(K, L)M) &= (\alpha^2 - \beta^2) [g(L, M)\eta(K) - g(K, M)\eta(L)] \\ &\quad - \frac{1}{2m-1} [g(L, M)\eta(QK) - g(K, M)\eta(QL)] \\ &\quad + S(L, M)\eta(K) - S(K, M)\eta(L) \\ &\quad + \frac{r}{2m(2m-1)} [g(L, M)\eta(K) - g(K, M)\eta(L)] \end{aligned} \quad 3.4.(1)$$

Yukarıdaki eşitlikte $K = \xi$ koyarak,

$$\eta(C(K, L)\xi) = 0 \quad 3.4.(2)$$

elde edilir. 3.4.(1) de yeniden $X = \xi$ koyarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\eta(C(\xi, L)M) = & -\frac{1}{(2m-1)} \left[\frac{r}{2m} - (\alpha^2 - \beta^2) \right] [g(L, M) - \eta(L)\eta(M)] \\ & - \frac{1}{(2m-1)} [S(L, M) - 2m(\alpha^2 - \beta^2)\eta(L)\eta(M)]\end{aligned}\quad 3.4.(3)$$

1.3.(2), 1.3.(3) ve 2.7.(6) kullanılarak ;

$$\begin{aligned}(R(K, L)C)(U, V)M = & R(K, L) \cdot C(U, V)M - C(R(K, L)U, V)M \\ & - C(U, R(K, L)V)M - C(U, V)R(K, L)M\end{aligned}$$

elde edilir. $R(K, L) \cdot C = 0$ yazılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}R(K, L) \cdot C(U, V)M - C(R(K, L)U, V)M - C(U, R(K, L)V)M \\ - C(U, V)R(K, L)M = 0\end{aligned}$$

Bunun sonucunda:

$$\begin{aligned}g[R(\xi, L) \cdot C(U, V)M, \xi] - g[C(R(\xi, L)U, V)M, \xi] \\ - g[C(R(\xi, L)V)M, \xi] - g[C(U, V)R(\xi, L)M, \xi] = 0\end{aligned}$$

Bu eşitlik $'C(U, V, M, L) = g(C(U, V)M, L)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği getirir:

$$\begin{aligned}'C(U, V, M, L) + \eta(L)\eta(C(U, V)Z) - \eta(U)\eta(C(L, V)M) \\ + g(L, U)\eta(C(\xi, V)L) - \eta(V)\eta(C(U, L)M) \\ + g(L, V)\eta(C(U, \xi)M) - \eta(M)\eta(C(U, V)L) = 0\end{aligned}\quad 3.4.(4)$$

Bu eşitlikte $Y = U$ koyulursa aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\begin{aligned}'C(U, V, M, U) + g(U, U)\eta(C(\xi, V)M) - \eta(V)\eta(C(U, U)M) \\ + g(U, V)\eta(C(U, \xi)M) - \eta(M)\eta(C(U, V)U) = 0\end{aligned}\quad 3.4.(5)$$

$i = 1, 2, \dots, (2p + 1)$ olmak üzere $\{e_i\}$ her hangibir noktada tanjant uzayın bir ortonormal tabanı olsun. O zaman $1 \leq i \leq 2p + 1$ için 3.4.(4) bağıntısının $U = e_i$ için toplamı:

$$\eta(C(\xi, V)M) = \frac{1}{2m(2m-1)} [\alpha^2 - \beta^2] - \frac{r}{2m} \eta(V)\eta(M) \quad 3.4.(6)$$

3.4.(3) ve 3.4.(6) dan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$S(V, M) = \left[\frac{r}{2m} - (\alpha^2 - \beta^2) \right] g(V, M) + \left[\left((2m+1) - \frac{1}{2m} \right) (\alpha^2 - \beta^2) + \frac{r}{2m} \left(\frac{1}{2m} - 1 \right) \right] \eta(V) \eta(M) \quad 3.4.(7)$$

Bu eşitlikte $Z = \xi$ koyulur ve aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$r = 2m(\alpha^2 - \beta^2) \quad 3.4.(8)$$

Şimdi de 3.4.(5) te 3.4.(1), 3.4.(2), 3.4.(7) ve 3.4.(8) i kullanarak

$$'C(U, V, Z, L) = 0$$

bulunur. Bu eşitlikten $C(U, V) = 0$ elde edilir. Bu nedenle trans- Sasakian manifold konformal olarak düzdür. Bunun sonucunda aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.4.1. $m > 0$ olmak üzere eğer $2m+1$ boyutlu bir M trans- Sasakian manifoldu içinde $R(X, Y).C = 0$ bağıntısı gerçekleşiyorsa bu manifold konformal olarak düzdür.

Teorem 3.4.2. $m > 0$ olmak üzere $2m+1$ boyutlu bir trans-Sasakian manifold $R(X, Y).C = 0$ koşulunu sağlıyorsa bu manifold $2m(\alpha^2 - \beta^2)$ sabit eğrilikli bir η –Einstein manifolddur.

3.5. $R(X, Y).\bar{C} = 0$ Koşuluna Uyan Trans-Sasakian Manifold

Bir consicular eğrilik tensörü $\bar{C}$ aşağıdaki gibi tanımlanır(Shaikh ve Matsuyama, 2007):
 $X=K, Y=L, Z=M$, olsun

$$\bar{C}(K, L)M = R(K, L)M - \frac{r}{2m(2m+1)} [g(L, M)K - g(K, M)L] \quad 3.5.(1)$$

Burada R eğrilik tensörü ve r skaler eğriliktir. 3.1.(2) ve 3.1.(12) den

$$\eta(\bar{C}(K, L)M) = \left[(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{r}{2m(2m+1)} \right] [g(L, M)\eta(K) - g(K, M)\eta(L)] \quad 3.5.(2)$$

Yukarıdaki eşitlik $M = \xi$ için

$$\eta(\bar{C}(K, L)\xi) = 0 \quad 3.5.(3)$$

Şimdi de 2.6.2 de $K = \xi$ alınırsa aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\eta(\bar{C}(\xi, L)M) = \left[(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{r}{2m(2m+1)} \right] [g(L, M) - \eta(K)\eta(M)] \quad 3.5.(4)$$

Şimdi de 3.5.(4) de 1.3.(3) ve 2.7.(6) kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir;

$$\begin{aligned} (R(K,L) \bar{C})(U,V)M &= R(K,L) \bar{C}(U,V)M - \bar{C}(R(K,L)U,V)M \\ &\quad - \bar{C}(U,R(K,L)V)M - \bar{C}(U,V)R(K,L)M \end{aligned}$$

$R(K,L) \cdot \bar{C} = 0$ olduğundan bu bağıntı aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} R(K,L) \cdot \bar{C}(U,V)M - \bar{C}(R(K,L)U,V)M - \bar{C}(U, R(K,L)V)M \\ - \bar{C}(U, V)R(K,L)Z = 0 \end{aligned} \quad 3.5.(5)$$

Bu nedenle;

$$\begin{aligned} g[R(\xi, K) \cdot \bar{C}(U, V)M, \xi] - g[\bar{C}(R(\xi, L)U, V)M, \xi] - g[\bar{C}(U, R(\xi, L)V)M, \xi] \\ - g[\bar{C}(U, V)R(\xi, L)M, \xi] = 0 \end{aligned} \quad 3.5.(6)$$

Bu bağıntıdan $- ' \bar{C}(U, V, M, L) = g(\bar{C}(U, V)M, L)$ değişimi ve $Y = U$ konularak aşağıdaki bağıntıya ulaşılır:

$$\begin{aligned} - ' \bar{C}(U, V, M, L) + g(U, U)\eta(\bar{C}(\xi, V)M) - \eta(V)\eta(\bar{C}(U, U)M) \\ + g(U, V)\eta(\bar{C}(U, \xi)M) - \eta(M)\eta(\bar{C}(U, V)U) = 0 \end{aligned} \quad 3.5.(7)$$

$i = 1, 2, \dots, (2m + 1)$ olmak üzere $\{e_i\}$, manifoldun herhangi bir noktasında teğet uzayın ortonormal tabanı olsun. O zaman $1 \leq i \leq 2m + 1$ için 3.5.(6) bağıntısının $U = e_i$ için toplamı:

$$\begin{aligned} \eta(\bar{C}(\xi, V)Z) &= \frac{1}{2m} S(V, Z) - \frac{r}{2m(2m+1)} g(V, Z) \\ &\quad + \frac{1}{2m} \left[\frac{r}{2m} - (2m + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(V)\eta(Z) \end{aligned} \quad 3.5.(8)$$

3.5.(4) ve 3.5.(8) den aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$S(V, Z) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)g(V, Z) - \left[\frac{r}{2m(2m+1)} - (\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(V)\eta(Z) \quad 3.5.(9)$$

Yukarıdaki bağıntıda $Z = \xi$ koyup 3.1.(10) u kullanarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$r = 2m(2m + 1)(\alpha^2 - \beta^2) \quad 3.5.(10)$$

Şimdi de 3.5.(2), 3.5.(4), 3.5.(9) ve 3.5.(10) u 3.5.(7) ye yerleştirerek;

$$- ' \bar{C}(U, V, Z, Y) = 0$$

bulunur ve bu bağıntı aşağıdaki bağıntıya yol açar:

$$\bar{C}(U, V)Z = 0$$

O halde söz konusu trans-Sasakian manifold konsirkular düzdür. Bu nedenle aşağıdaki teorem ifade edilir:

Teorem 3.5.1. $m > 0$ olmak üzere $2m+1$ boyutlu bir trans-Sasakian manifold $R(X, Y) \cdot \bar{C} = 0$

koşulunu sağlıyor ise o zaman bu manifold konsirkular flattır. Genel olarak bir quasi-konformal flat bir Riemann manifold bir Einstein manifolddur, öyleyse özel durum olarak bir konsirkular flat trans-Sasakian manifold bir Einstein manifolddur. Aşağıdaki teorem bunu ifade eder.

Teorem 3.5.2. $m > 0$ olmak üzere $2m+1$ boyutlu bir trans-Sasakian manifold $R(X, Y) \cdot \bar{C} = 0$ koşulunu sağlıyorsa sabit eğriliği $2m(2m+1)(\alpha^2 - \beta^2)$ olan bir Einstein manifolddur. (Bagewadi ve Venkatesha, 2007)

3.6. Genelleştirilmiş η – Einstein Trans- Sasakian Manifold

Tanım 3.6.1. Eğer bir hemen hemen kontakt manifold $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ ‘un $(0, 2)$ tipindeki S Ricci tensörü $S = ag + b\eta \otimes \eta$ formunda ise, (a ve b düz fonksiyonlar) bu manifolda η –Einstein manifold denir.

Trans- Sasakian η –Einstein manifoldun içerdiği a ve b skalerleri aşağıdaki gibidir (De ve Tripathi, 2003);

$$a = \frac{r}{2n} - (\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)$$

$$b = \frac{r}{-2n} + (2n+1)(\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)$$

Tanım 3.6.2. Bir trans-Sasakian $M(\phi, \xi, \eta, g)$ manifoldun $(0, 2)$ tipindeki S Ricci tensörü

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) + c[\eta(X)\omega(Y) + \eta(Y)\omega(X)] \quad 3.6.(1)$$

formunda ise, bu manifolda trans- Sasakian η –Einstein manifoldu denir. Burada a ve b skalerleri sıfırdan farklı, ω ise örneğin $\omega(X) = g(X, \rho)$ gibi tüm X ler için sıfır olmayan 1-form,

ve ζ ile ρ birbirine ortogonal birim vektörlerdir. a , b ve c skalerlerine eşlik eden skalerler denir. Bu skalerlerin değerleri aşağıdaki gibi ifade edilir(Shaikh ve Matsuyama, 2009):

$$a = \frac{r}{2n} - (\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)$$

$$b = \frac{r}{-2n} + (2n + 1)(\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)$$

$$c = \omega(\phi grad\alpha) - (2n - 1)\omega(grad\beta)$$

Teorem 3.6.1. Bir genelleştirilmiş trans- Sasakian η –Einstein manifoldu (M^{2n+1}, g) ye eşlik eden $2n(\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)$ ve $\frac{r}{2n} - (\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)$ skalerleri Ricci tensörleridir ve yönleri sırasıyla ξ ve ρ vektör alanları yönündedir, S Ricci tensörünün uzunluğu q olmak üzere;

$$\omega(\phi grad\alpha) < \frac{1}{\sqrt{2}}q + (2n - 1)\omega(grad\beta)$$

eşitsizliği sağlanır (Shaikh ve Matsuyama, 2009).

3.7. Lokal Olarak ϕ -Simetrik Üç Boyutlu Trans-Sasakian Manifold

Tanım 3.7.1. ξ ye ortogonal tüm X, Y, Z, W vektör alanları için $\phi^2(\nabla_W R)(X, Y)Z = 0$ koşulunu sağlayan bir trans-Sasakian manifold, lokal olarak ϕ simetrik manifold adını alır (Takahashi, 1977).

Teorem 3.7.1. α ve β sabitler olduğunda bir 3-boyutlu (α, β) türü kontakt trans-Sasakian manifold ancak ve ancak skaler eğriliği sabit ise lokal olarak simetriktir denir.

Örneğin,

$M = \{(x, y, z) \in R^3, z \neq 0\}$ 3 boyutlu manifoldu düşünelim.

$$e_1 = z \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_2 = z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

ile tanımlanan vektör alanları M nin her noktasında lineer bağımsızdır. g Riemann metriği aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$g(e_1, e_3) = g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = 0$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$$

η , herhangi bir $Z \in \chi(M)$ için $\eta(Z) = g(Z, e_3)$ denklemlle tanımlanan 1-form olsun. (1, 1) tensör alanı ϕ aşağıdaki eşitliklerle tanımlansın,

$$\phi(e_1) = -e_2, \quad \phi(e_2) = e_1, \quad \phi(e_3) = 0$$

ϕ ve g 'nin lineerliğini kullanırsak tüm $Z, W \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\eta(e_3) = 1,$$

$$\phi^2 Z = -Z + \eta(Z)e_3$$

$$g(\phi Z, \phi W) = g(Z, W) - \eta(Z)\eta(W)$$

Bu nedenle $e_3 = \xi$ için (ϕ, ξ, η, g) yapısı M üzerinde hemen hemen kontakt metrik bir yapı tanımlar. Şimdi doğrudan hesapla aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_3] = -e_1$$

Koszul formülüne göre metrik g 'nin Riemann konneksiyonu ∇ :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X_g(Y, Z) + Y_g(Z, X) - Z_g(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad 3.7.(1)$$

Yukarıdaki bağıntıyı kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) = 2g(-e_1, e_1)$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, e_2) = 0 = 2g(-e_1, e_2)$$

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, e_3) = 0 = 2g(-e_1, e_3)$$

Bunun sonucunda, $\nabla_{e_1} e_3 = -e_1$ dir. Benzer şekilde, $\nabla_{e_2} e_3 = -e_2$ ve $\nabla_{e_3} e_3 = 0$

3.7.(1) den aşağıdaki bağıntılar da elde edilir:

$$\nabla_{e_1} e_2 = 0 \quad \nabla_{e_1} e_1 = e_3$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = e_3 \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0$$

$$\nabla_{e_3} e_2 = 0 \quad \nabla_{e_3} e_1 = 0$$

Bunları kullanırsak;

$$(\nabla_{e_1}\emptyset)e_1 = \nabla_{e_1}\emptyset e_1 - \emptyset\nabla_{e_1}e_1 = -\nabla_{e_1}e_2 - \emptyset e_3 = -\nabla_{e_1}e_2 = 0 \quad 3.7.(2)$$

Benzer şekilde;

$$(\nabla_{e_1}\emptyset)e_2 = e_3 \quad 3.7.(3)$$

$$(\nabla_{e_1}\emptyset)e_3 = -e_2 \quad 3.7.(4)$$

3.7.(2), 3.7.(3) ve 3.7.(4) den manifoldun $X = e_1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ve $e_1 = \xi$ için

$$(\nabla_X\emptyset)Y = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\emptyset X$$

koşulunu sağladığı görülür. Benzer şekilde $X = e_2$, $X = e_3$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ve $e_3 = \xi$ için de manifoldun yukarıdaki koşulu sağladığı görülür. Bunun sonucunda manifoldun (0, -1) tipinde trans-Sasakian manifold olduğu anlaşılır. Yukarıdaki sonuçlar yardımıyla aşağıdaki eşitlikler de sağlanır:

$$R(e_1, e_2)e_3 = 0 \quad R(e_2, e_3)e_3 = -e_2 \quad R(e_1, e_3)e_3 = -e_1$$

$$R(e_1, e_2)e_2 = -e_1 \quad R(e_2, e_3)e_2 = e_3 \quad R(e_1, e_3)e_2 = 0$$

$$R(e_1, e_2)e_1 = e_2 \quad R(e_2, e_3)e_1 = 0 \quad R(e_1, e_3)e_1 = e_3$$

Tüm bu eşitlikler $\phi^2(\nabla_w R)(X,Y)Z = 0$ bağıntısının sağlandığını gösterir. O halde bahse konu 3 boyutlu trans-Sasakian manifold lokal olarak ϕ – simetriktir. Ek olarak eğrilik tensörünün yukarıdaki ifadelerinden skaler eğrilik $r = -3$ olarak elde edilir. Sonuç olarak α, β ve r sabitler olarak ortaya çıktığından Teorem 2.11.1 e göre de manifold ϕ – simetriktir (De ve Sakar, 2008).

4. 3-BOYUTLU TRANS- SASAKİAN MANİFOLDLAR VE RİCCİ TENSÖRÜ

Teorem 4.1. Bir 3- boyutlu trans-Sasakian manifold için Ricci operatörü aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} QX &= \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)X - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\xi \\ &\quad + \eta(X)(\varphi(\text{grad } \alpha) - \text{grad } \beta) - (X\beta + (\varphi X)\alpha)\xi \end{aligned}$$

İspat:

Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold için 1.3.(10) ve 1.3.(13) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılır(De ve Tripathi, 2003):

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \eta(Y)QX - \eta(X)QY - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - 2(\alpha^2 - \beta^2)\right)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \\ &\quad - (Y\beta + (\varphi Y)\alpha)X + (X\beta + (\varphi X)\alpha)Y \end{aligned}$$

1.3.(12) ve yukarıdaki denklemden aşağıdaki denklem bulunur:

$$\begin{aligned} &\eta(Y)(QX - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)X - 2\alpha\beta\varphi X + (X\beta)\xi - (Y\alpha)\varphi X - ((\varphi Y)\alpha)X \\ &= \eta(X)(QY - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)Y - 2\alpha\beta\varphi Y + (Y\beta)\xi - (Y\alpha)\varphi Y - ((\varphi X)\alpha)Y \end{aligned}$$

Bu denklemde $Y = \xi$ konularak Ricci operatörü elde edilir.

Sonuç 4.1. Bir 3- boyutlu trans-Sasakian manifold için Ricci tensörü aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(X, Y) - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad - (Y\beta + (\varphi Y)\alpha)\eta(X) - (X\beta + (\varphi X)\alpha)\eta(Y) \end{aligned}$$

Hemen hemen kontakt metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ üzerinde bulunan α ve β sayıları aşağıdaki eşitliği sağlarsa,

$$(\nabla\varphi)(X, Y) = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X) \quad 4.(1)$$

bu manifold (α, β) türü bir trans-Sasakian manifold olarak adlandırılır ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ şeklinde gösterilir.

$$\text{Burada her } X, Y \in \chi(M) \text{ için } (\nabla\varphi)(X, Y) = \nabla_X \varphi Y - \varphi(\nabla_X Y)$$

ve ∇ , g 'ye göre bir Levi-Civita konneksiyonudur (Blair; Obina, 1990). 3.(1) ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliğinden aşağıdaki bağıntı yazılır:

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi(X) + \beta(X - \eta(X)\xi), \quad X \in \chi(M) \quad 4.(2)$$

Bir (M, g) Riemann manifoldunun Ricci tensörü Ric olsun. O zaman Q , Ricci operatörü $(1,1)$ tipinde simetrik bir tensör uzayıdır ve aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\text{Ric}(X, Y) = g(QX, Y), \quad X, Y \in \chi(M)$$

Sonuç 4.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. O zaman

$$\xi(\alpha) = -2\alpha\beta$$

İspat:

3.(2) 'yi kullanarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$d\eta(X, Y) = -2\alpha g(\varphi X, Y), \quad X, Y \in \chi(M)$$

Bunun sonucu olarak 2-form $\Omega(X, Y) = \alpha g(\varphi X, Y)$ şeklinde tanımlanan Ω kapalıdır.

1.3.(2), 1.3.(6), ve 1.3.(7) yi $d\Omega = 0$ denkleminde kullanıp işlemler yapılarak tüm $X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\varphi\{X(\alpha)Y - Y(\alpha)X - 2\alpha\beta\eta(X)Y\} + g(\varphi X, Y)(\nabla\alpha + 2\alpha\beta\xi) = 0$$

Yukarıdaki denklemde φ operatörü uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$Y(\alpha)X - X(\alpha)Y + 2\alpha\beta\eta(Y)X - 2\alpha\beta\eta(X)Y + X(\alpha)\eta(Y)\xi \\ - Y(\alpha)\eta(X)\xi + g(\varphi X, Y)\varphi(\nabla\alpha) = 0$$

M üzerindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ şeklinde lokal bir orthonormal çatı için yukarıdaki denklemde $X = e_1$ alarak ve e_1 ile iç çarpım yaparak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$(2\alpha\beta + \xi(\alpha))\xi = 0$$

Bu da istenen $\xi(\alpha) = -2\alpha\beta$ eşitliğine denktir.

Sonuç 4.3. 3- boyutlu bir trans-Sasakian manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ olsun. Bu manifoldun Ricci operatörü aşağıdaki denklemi sağlar:

$$Q(\xi) = \varphi(\nabla\alpha) - \nabla\beta + 2(\alpha^2 - \beta^2)\xi - g(\nabla\beta, \xi)\xi$$

Burada $\nabla\alpha$ ve $\nabla\beta$ gradyanları α ve β düz fonksiyonlarının gradyanlarıdır.

İspat :

2.3.(2), 2.3.(6), ve 2.3.(7) yi kullanarak

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi$$

eşitliği hesaplanır. Bazı basit işlemler yapılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$R(X, Y)\xi = Y(\alpha)\varphi X - X(\alpha)\varphi Y + X(\beta)(Y - \eta(Y)\xi) - Y(\beta)(X - \eta(X)\xi) \\ + (\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + 2\alpha\beta(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y)$$

Yukarıdaki denklemden aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\text{Ric}(Y, \xi) = g(\varphi(\nabla\alpha), Y) - g(\nabla\beta, \xi)\eta(Y) + 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)$$

Bu eşitlik ispatın tamamlandığını gösterir.

4.1. η –Paralel Ricci Tensör

Tanım 4.1.1. Bir trans –Sasakian manifoldun Ricci tensörü tüm X, Y ve Z için $(\nabla_X S)(\phi X, \phi Z) = 0$ koşulunu sağlarsa bu manifoldda η –paralel denir.(Kon, 1976). M bir 3-boyutlu kontakt trans-Sasakian manifold olsun. Bu manifoldun Ricci tensörü 1.3.(11) ile verilir. 1.3.(11) de X yerine ϕX , Y yerine ϕY koyarak ve 1.3.(1) i kullanarak 3-boyutlu bir trans-Sasakian manifold elde ederiz;

$$S(\phi X, \phi Y) = \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2) \right) g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad 4.1.(1)$$

Buradan aşağıdaki eşitlik gösterilir:

$$\begin{aligned} (\nabla_Z S)(\phi X, \phi Y) &= \nabla_Z S(\phi X, \phi Y) - S(\nabla_Z \phi X, \phi Y) - S(\phi X, \nabla_Z \phi Y) \\ &= \nabla_Z S(\phi X, \phi Y) - S((\nabla_Z \phi)X, \phi Y) - S(\phi \nabla_Z X, \phi Y) \\ &= -S(\phi X, (\nabla_Z \phi)Y) - S(\phi X, \phi \nabla_Z Y) \end{aligned} \quad 4.1.(2)$$

1.3.(12), 1.3.(10) ve 3.1.(1) eşitlerini 3.1.(2) de yerine koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} (\nabla_Z S)(\phi X, \phi Y) &= \left(\frac{1}{2} dr(Z) + \nabla_Z(\xi\beta) - 2\alpha d\alpha(Z) \right) (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\ &\quad + \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2) \right) (\nabla_Z g(X, Y) - (\nabla_Z \eta(X))\eta(Y) \\ &\quad - \eta(X)(\nabla_Z \eta(Y)) - S(\alpha(g(Z, X)\xi - \eta(X)Z) \\ &\quad + \beta(g(\phi Z, X)\xi - \eta(X)\phi Z), \phi Y) \\ &\quad - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2) \right) (g(\nabla_Z X, Y) - \eta(\nabla_Z X)\eta(Y)) \\ &\quad - S(\phi X, \alpha(g(Z, Y)\xi - \eta(Y)Z) + \beta(g(\phi Z, Y)\xi - \eta(Y)\phi Z)) \\ &\quad - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2) \right) (g(X, \nabla_Z Y) - \eta(X)\eta(\nabla_Z Y)) \end{aligned} \quad 4.1.(3)$$

2.6.(7) ve 2.6.(8) i kullanarak 4.1.(3) den aşağıdaki eşitliği elde edilir:

$$\begin{aligned} (\nabla_Z S)(\phi X, \phi Y) &= \\ &= \left(\frac{1}{2} dr(Z) + \nabla_Z(\xi\beta) - 2\alpha d\alpha(Z) + 2\beta d\beta(Z) \right) (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)(\nabla_Z g(X, Y) - (\nabla_Z \eta(X))\eta(Y) \\
& - \eta(X)(\nabla_Z \eta(Y)) + \alpha g(Z, X)((\emptyset Y)\beta + (\emptyset^2 Y)\alpha) \\
& + \alpha \eta(X)\left\{\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(Z, \emptyset Y) - ((\emptyset Y)\beta + (\emptyset^2 Y)\alpha)\eta(Z)\right\} \\
& + \beta g(\emptyset Z, X)((\emptyset Y)\beta + (\emptyset^2 Y)\alpha) \\
& + \beta \eta(X)\left\{\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)(g(Z, Y) - \eta(Z)\eta(Y))\right\} \\
& - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)(g(\nabla_Z X, Y) - \eta(\nabla_Z X)\eta(Y)) \\
& + \alpha g(Z, Y)((\emptyset X)\beta + (\emptyset^2 X)\alpha) \\
& + \alpha \eta(Y)\left\{\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(Z, \emptyset X) - ((\emptyset X)\beta + (\emptyset^2 X)\alpha)\eta(Z)\right\} \\
& + \beta g(\emptyset Z, Y)((\emptyset X)\beta + (\emptyset^2 X)\alpha) \\
& + \beta \eta(Y)\left\{\left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)(g(Z, X) - \eta(Z)\eta(X))\right\} \\
& - \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)(g(X, \nabla_Z Y) - \eta(X)\eta(\nabla_Z Y))
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Yukarıdaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& (\nabla_Z S)(\emptyset X, \emptyset Y) = \\
& = \left(\frac{1}{2} dr(Z) + \nabla_Z(\xi\beta) - 2\alpha d\alpha(Z) + 2\beta d\beta(Z)\right)(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\
& + \left(\frac{r}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)(\nabla_Z g(X, Y) - (\nabla_Z \eta(X))\eta(Y) - \eta(X)(\nabla_Z \eta(Y)) \\
& + \alpha \eta(X)g(Z, \emptyset Y) + \beta \eta(X)(g(Z, Y) - \eta(Z)\eta(Y)) - g(\nabla_Z X, Y) \\
& + \eta(\nabla_Z X)\eta(Y) + \alpha \eta(Y)g(Z, \emptyset X) + \beta \eta(Y)(g(Z, X) - \eta(Z)\eta(X)) \\
& - g(X, \nabla_Z Y) + \eta(X)\eta(\nabla_Z Y)) \\
& + ((\emptyset Y)\beta + (\emptyset^2 Y)\alpha)(\alpha g(Z, X) + \beta g(\emptyset Z, X) - \alpha \eta(X)\eta(Z)) \\
& + ((\emptyset X)\beta + (\emptyset^2 X)\alpha)(\alpha g(Z, Y) + \beta g(\emptyset Z, Y) - \alpha \eta(Y)\eta(Z))
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Farz edelim ki α ve β sabit sayılar olsun. O zaman 3.1.(5) ve 1.3.(8) kullanarak aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$(\nabla_Z S)(\emptyset X, \emptyset Y) = \frac{1}{2} dr(Z)(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \quad 4.1.(6)$$

Bunun sonucunda aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.1.1. α ve β sabitler olmak üzere, (α, β) tipinde 3-boyutlu konnekt trans-Sasakian bir manifoldun, η – paralel Ricci tensörüne sahip olması için gerek ve yeter koşul; manifoldun skaler eğriliğinin sabit olmasıdır. Teorem 3.1.2 ve Teorem 4.1.1den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1 α ve β sabitler olmak üzere, bir 3-boyutlu konnekt trans-Sasakian manifoldun η – paralel Ricci tensörüne sahip olması için gerek ve yeter koşul manifoldun $\emptyset$ - simetrik olmasıdır. (De ve Sarkar, 2008)

4.2. Sabit Eğrilikli Trans-Sasakian Manifoldlarda Ricci Tensörü

M bir 3-boyutlu kompakt konnekt trans-Sasakian manifold olsun. Bu manifold sabit eğrilikli ise o zaman bu manifoldun (0,2) tipinde Ricci tensörü aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$S(X, Y) = 2\lambda(X, Y) \quad 4.2.(1)$$

Burada λ bir sabittir. $Y = \xi$ konulur ve 1.3.(10)'u kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$X\beta + (\phi X)\alpha + [2(\lambda - \alpha^2 + \beta^2) + \xi\beta]\eta(X) = 0 \quad 4.2.(2)$$

$X = \xi$ için bu denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\xi\beta = -(\lambda - \alpha^2 + \beta^2)$$

Yukarıdaki denklem ve 3.2.(2) sayesinde aşağıdaki denklem yazılır:

$$X\beta + (\phi X)\alpha + (\lambda - \alpha^2 + \beta^2)\eta(X) = 0 \quad 4.2.(3)$$

β fonksiyonunun gradyanı $d\beta$ harici türeviyle $d\beta(X) = g(\text{grad}\beta, X)$ formülüyle bağlantılır. Bu formül ve 3.2.(3) ' ü kullanılarak aşağıdaki denklem yazılır:

$$d\beta(X) + g(\text{grad}\alpha, \phi X) + (\lambda - \alpha^2 + \beta^2)\eta(X) = 0 \quad 4.2.(4)$$

Yukardaki denklemin Y ye göre kovaryant diferansiyeli alınarak aşağıdaki denklem oluşturulur:

$$\begin{aligned} &(\nabla_Y d\beta)(X) + g(\nabla_Y \text{grad}\alpha, \phi X) + g(\text{grad}\alpha, (\nabla_Y \phi)X) \\ &+ Y(\beta^2 - \alpha^2)\eta(X) + (\lambda - \alpha^2 + \beta^2)(\nabla_Y \eta)(X) = 0 \end{aligned} \quad 4.2.(5)$$

Yukarıdaki denklemde X ve Y yi değiştirirerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X d\beta)(Y) + g(\nabla_X \text{grad}\alpha, \phi Y) + g(\text{grad}\alpha, (\nabla_X \phi)Y) \\ &+ X(\beta^2 - \alpha^2)\eta(Y) + (\lambda - \alpha^2 + \beta^2)(\nabla_X \eta)(Y) = 0 \end{aligned} \quad 4.2.(6)$$

3.2.(6) ‘ dan 3.2.(5) ‘ i çıkartarak aşağıdaki bağıntı oluşturulur:

$$\begin{aligned} &g(\nabla_X \text{grad}\alpha, \phi Y) - g(\nabla_Y \text{grad}\alpha, \phi X) + ((\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X)\alpha \\ &+ [X(\beta^2 - \alpha^2)\eta(Y) - Y(\beta^2 - \alpha^2)\eta(X)] \\ &+ (\lambda + \beta^2 - \alpha^2)((\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)) = 0 \end{aligned} \quad 4.2.(7)$$

1.3.(8) ve 1.3.(4) ‘ ü kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X) = \alpha(\Phi(X, Y) - \Phi(Y, X)) = 2\alpha\Phi(X, Y) \quad 4.2.(8)$$

3.2.(8) ve 3.2.(7) yi kullanarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\begin{aligned} &g(\nabla_X \text{grad}\alpha, \phi Y) - g(\nabla_Y \text{grad}\alpha, \phi X) + ((\nabla_X \phi)Y - (\nabla_Y \phi)X)\alpha \\ &+ [X(\beta^2 - \alpha^2)\eta(Y) - Y(\beta^2 - \alpha^2)\eta(X)] \\ &+ 2(\lambda + \beta^2 - \alpha^2)\alpha\Phi(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad 4.2.(9)$$

$\{E_0, E_1, E_2\}$ bir lokal ϕ -taban olsun. Yani $E_0 = \xi$ ve $E_2 = \phi E_1$ bir orthonormal çatıdır. 3.1.(12) de $E_1 = X$, $E_2 = Y$ koyarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$(\nabla_{E_1} \phi) E_2 = \alpha(g(E_1, E_2)\xi - \eta(E_2)E_1) + \beta(g(\phi E_1, E_2)\xi - \eta(E_2)\phi E_1)$$

$$(\nabla_{E_1} \phi) E_2 = \beta g(\phi E_1, E_2)\xi = \beta \xi \quad 4.2.(10)$$

Benzer şekilde

$$(\nabla_{E_2} \phi) E_1 = -\beta \xi \quad 4.2.(11)$$

Şimdi

$$\Phi(E_1, E_2) = g(E_1, \phi E_2) = g(E_1, \phi^2 E_1) = -1 \quad 4.2.(12)$$

3.2.(9) da $E_1 = X$, $E_2 = Y$ koyarak ve 3.2.(10) , 3.2.(11) ve 3.2.(12) yi kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$g(\nabla_{E_1} \text{grad} \alpha, E_1) + g(\nabla_{E_2} \text{grad} \alpha, E_2) = 2\beta \xi \alpha - 2\alpha(\lambda - \alpha^2 + \beta^2) \quad 4.2.(13)$$

1.3.(9) 'ü de kullanarak aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$g(\text{grad} \alpha, \xi) = -2\alpha\beta \quad 4.2.(14)$$

3.2.(14)'ün ξ ye göre covaryant olarak diferansiyeli alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$g(\nabla_{\xi} \text{grad} \alpha, \xi) + g(\text{grad} \alpha, \nabla_{\xi} \xi) = -2\beta \xi \alpha - 2\alpha \xi \beta \quad 4.2.(15)$$

$\xi \beta = -(\lambda - \alpha^2 + \beta^2)$ yi yerleştirerek yukarıdaki denklemi yeniden yazarız:

$$g(\nabla_{\xi} \text{grad} \alpha, \xi) = -2\beta \xi \alpha + 2\alpha(\lambda - \alpha^2 + \beta^2) \quad 4.2.(16)$$

Yukardaki eşitlikle 3.2.(13) beraber kullanılırsa $\Delta \alpha = 0$ elde edilir ki burada Δ aşağıdaki gibi tanımlanan Laplace operatörüdür:

$$\Delta \alpha = \sum_{i=0}^2 g(\nabla_{E_i} \text{grad} \alpha, E_i)$$

M kompakt olduğundan α nın sabit olduğu sonucuna varılır. İki durum söz konusudur:

Durum 1 : α sıfırdan farklı bir sayı olursa o zaman 1.3.(9) dan M üzerinde her yerde $\beta = 0$ olur.

Durum 2: Bu durumda $\alpha = 0$ olsun. O zaman 2.4.(4) ten aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$X\beta + (\lambda + \beta^2)\eta(X) = 0$$

yani

$$g(\text{grad}\beta, X) + (\lambda + \beta^2)g(X, \xi) = 0$$

Bunun sonucunda aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\text{grad}\beta + (\lambda + \beta^2)\xi = 0 \quad 4.2.(17)$$

3.2.(17) ' nin X 'e göre kovaryant olarak diferansiyeli alınırsa aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\nabla_X \text{grad}\beta + (X\beta^2)\xi + (\lambda + \beta^2)\nabla_X \xi = 0$$

1.3.(7) ' yi kullanarak yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\nabla_X \text{grad}\beta + (X\beta^2)\xi + (\lambda + \beta^2)(-\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi)) = 0$$

Yukarıdaki denklemin X ile iç çarpımını alarak aşağıdaki denklem bulunur:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \text{grad}\beta, X) &= -g((X\beta^2)\xi, X) - (\lambda + \beta^2)(g(-\alpha\phi X, X) \\ &\quad + \beta g(X - \eta(X)\xi, X)) \end{aligned} \quad 4.2.(18)$$

Yukarıdaki denklemde $X = E_i$ konulur $i = 0, 1, 2$ için i üzerinde toplam alınırsa aşağıdaki denklem bulunur:

$$\Delta\beta = -2\beta(\xi\beta + \lambda + \beta^2)$$

$\alpha = 0$ için $\xi\beta = -(\lambda - \alpha^2 + \beta^2)$ eşitliği $\xi\beta = -(\lambda + \beta^2)$ şekline dönüşür. Yukarıdaki denklemde bunu kullanarak $\Delta\beta = 0$ bulunur. Bundan dolayı $\beta = \text{sabit}$, M kompakttır. Bu sonuçlar ile aşağıdaki teoreme ulaşılır(De, Sarkar 2008).

Teorem 3.2.1. Eğer bir 3-boyutlu kompakt konnekt trans-Sasakian manifold sabit eğriliğe sahip ise o zaman bu manifold ya α -Sasakian ya da β -Kenmotsudur.

4.3. Sasakian Manifoldlarla Homotetik Olan Trans- Sasakian Manifoldlar

Bu bölümde kompakt ve konnekt 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlar ve onların Sasakian manifoldlarla homotetik olma koşulları tartışılacaktır.

Teorem 4.3.1. (Okumura, 1964) (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M aşağıdaki denklemi sağlayan sabit uzunlukta bir ξ Killing vektör uzayını kabul ediyorsa,

$$k^2(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi) = g(Y, \xi)X - g(X, Y)\xi$$

M manifoldu bir Sasakian manifoldda homotetiktir. Burada k sıfır olmayan sabit bir sayı, X ve Y her hangi iki vektör uzayıdır.

Teorem 4.3.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ bir 3-boyutlu kompakt ve konnekt trans-Sasakian manifold olsun. Eğer $\text{Ric}(\xi, \xi)$ Ricci eğriliği aşağıdaki eşitsizliği sağlarsa

$$0 < \text{Ric}(\xi, \xi) \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

o zaman M , bir Sasakian manifoldda homotetiktir denir.

İspat

1.3.(7) 'yi kullanarak

$$\delta\eta = \text{div}\xi = 2\beta \quad 4.3.(1)$$

hesaplanır. Ayrıca $d\eta(X, Y) = -2\alpha g(\varphi X, Y)$ olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\|d\eta\|^2 = 8\alpha^2 \quad 4.3.(2)$$

1.3.(7) 'yi kullanıp bazı hesaplamalar yapılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\|\nabla\xi\|^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) \quad 4.3.(3)$$

3.3.(1) ve 3.3.(3) 'yi integral formülünde kullanarak (Yano, 1970) aşağıdaki integral yazılır:

$$\int_M \left\{ \text{Ric}(\xi, \xi) - \frac{1}{2} \|\text{d}\eta\|^2 + \|\nabla \xi\|^2 - (\delta \eta)^2 \right\} = 0$$

Teoremin hipotezini de kullanırsak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\text{Ric}(\xi, \xi) = 2(\alpha^2 + \beta^2) \quad 4.3.(4)$$

Sonuç 3.2 ‘yi kullanarak aşağıdaki bağıntıyı buluruz:

$$\text{Ric}(\xi, \xi) = -2\xi(\beta) + 2(\alpha^2 - \beta^2)$$

Bu iki eşitliği kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\xi(\beta) = -2\beta^2 \quad 4.3.(5)$$

Bu eşitlikte β ’nın sabit olması gerekir. Eğer β sabit değilse M üzerinde bir $p \in M$ için lokal maximum vardır. O zaman $(\nabla \beta)(p) = 0$ ve bu p noktasında Hessian H_β negatif tanımlıdır. 3.3.(5) ‘i kullanarak aşağıdaki denklemleri elde edilir:

$$\xi(\beta)(p) = -2(\beta(p))^2 = 0$$

$$H_\beta(\xi, \xi)(p) = \xi\xi(\beta)(p) = 4(\beta(p))^3 = 0$$

$\nabla_\xi \xi = 0$ kullandığımızdan, Hessian p ’de negatif tanımlı olduğundan bu durum bir çelişki oluşturur. Bu nedenle β bir sabit sayıdır. Bu sonuç Stokes teoreminin $\text{div}(\xi) = 2\beta$ ya uygulanmasıyla beraber $\beta = 0$ olduğu ispatlanır.

$\beta = 0$ olduğundan Sonuç 3.1 e göre $\xi(\alpha) = 0$ bulunur. α sabit olmalıdır. Eğer α sabit değil ise, α düzgün fonksiyonu bir $p \in M$ için kompakt M üzerinde bir lokal maximuma ulaşır. Bu noktada Hessian H_α negatif tanımlıdır. Fakat ξ birim vektör uzayı için $H_\alpha(\xi, \xi) = 0$ dır. Bu da p noktasında negatif tanımlı olması demektir ki bu da çelişki oluşturur. Bunun sonucunda 1.3.(7) ‘yi kullanarak aşağıdaki eşitliği hesaplarız:

$$\alpha^{-2}(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi) = g(Y, \xi)X - g(X, Y)\xi$$

Bu da Teorem 3.3.1 ' e göre M nin bir Sasakian manifolda homotetik olduğunu ispatlar. Bu teorem $(2n + 1)$ - boyutlu Sasakian manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 'in Ricci operatörü $Q(\xi) = 2n\xi$ eşitliğini sağlar sonucunu ortaya koyar.

Sonuç 4.3.1. 3-boyutlu kompakt ve konnekt trans –Sasakian manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ olsun. Eğer ξ vektör uzayı $Q(\xi) = 2\alpha^2\xi \neq 0$ bağıntısını sağlarsa o zaman manifold M bir Sasakian manifolda homotetiktir.

Teorem 4.3.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \alpha, \beta)$ bir 3-boyutlu kompakt ve konnekt trans-Sasakian manifold olsun. M ' nin bir Sasakian manifolda homotetik olması için gerek yeter koşul ξ vektör uzayının sıfırdan farklı bir λ sabiti için $Q(\xi) = \lambda\xi$ eşitliğini sağlamasıdır.

İspat

Sonuç 4.2 de $Q(\xi) = \lambda\xi$ 'yi kullanarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\varphi(\nabla\alpha) - \nabla\beta = (\lambda + \xi(\beta) - 2(\alpha^2 - \beta^2))\xi \quad 4.3.(6)$$

ξ 'ye göre yukarıdaki eşitliğin iç çarpımı alınarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\xi(\beta) = -\frac{\lambda}{2} + (\alpha^2 - \beta^2) \quad 4.3.(7)$$

Bu eşitlik 4.3.(6) da yerine konularak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\varphi(\nabla\alpha) - \nabla\beta = \left(\frac{\lambda}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)\xi \quad .4.3.(8)$$

φ ' yi yukarıdaki denkleme uygulayarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\nabla\alpha = -2\alpha\beta\xi - \varphi(\nabla\beta) \quad 4.3.(9)$$

Eğer A trans-Sasakian manifold M üzerinde simetrik operatör ise A ' yı diagonalize eden bir lokal orthonormal çatı vardır ve aşağıdaki toplam sıfır olur:

$$\sum g(\varphi(Ae_i), e_i) = 0 \quad 4.3.(10)$$

$X \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlik hesaplanır:

$$\nabla_X(\varphi(\nabla\beta) + 2\alpha\beta\xi) = (\nabla_X\varphi)(\nabla\beta) + \varphi(A_\beta X) + 2X(\alpha\beta)\xi + 2\alpha\beta\nabla_X\xi$$

Burada $A_\beta X = \nabla_X \nabla_\beta$ bir simetrik operatör ve $A_\beta : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$. Yukarıdaki denklemin X 'e göre iç çarpımını alarak ve 1.3.(6) ve 1.3.(7) 'yi kullanarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(\varphi(\nabla\beta), X)) &= \alpha X(\beta)\eta(X) - \alpha\xi(\beta)g(X, X) \\ &+ \beta g(\varphi X, \nabla\beta)\eta(X) \\ &+ g(\varphi(A_\beta X), X) + 2X(\alpha\beta)\eta(X) \\ &+ 2\alpha\beta^2 g(X, X) - 2\alpha\beta^2 (\eta(X))^2 \end{aligned}$$

4.3.(11) 'i ve yukarıdaki denklemleri kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\operatorname{div}(\varphi(\nabla\beta) + 2\alpha\beta\xi) = -2\alpha\xi(\beta) + 2\xi(\alpha\beta) + 4\alpha\beta^2 = 0 \quad 4.3.(11)$$

Yukarıdaki denklem 3.3.(10) 'da yerine konularak kompakt M üzerinde $\Delta\alpha = \operatorname{div}(\nabla\alpha) = 0$ bulunur ki bu da α 'nın sabit olduğunu ispatlar. α sabitini 3.3.(8) de kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-\nabla\beta = \left(\frac{\lambda}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)\xi$$

Bu denklemle 4.3.(7) beraber ele alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= -2\beta\xi(\beta) - \left(\frac{\lambda}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)\operatorname{div}\xi \\ &= -2\beta\left(-\frac{\lambda}{2} + (\alpha^2 - \beta^2)\right) - 2\beta\left(\frac{\lambda}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right) = 0 \end{aligned}$$

Burada $\operatorname{div}\xi = 2\beta$ olduğu kullanıldı. β 'nın sabit olması, Stokes teoremi ve $\operatorname{div}\xi = 2\beta$ olması sonucunda $\beta = 0$ olduğu ispatlanır. Eğer $\alpha = 0$ ise 3.3.(6) dan $\lambda = 0$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak α sıfırdan farklı bir sabittir ve 3.3.(1) denklemini sağlar:

$$\alpha^{-2}(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi) = g(X, Y)\xi$$

Bu sonuç M manifoldunun bir Sasakian manifoldda homotetik olduğunu ispatlar. Bu sonucun tersinin de doğru olduğu açıktır.

4.4. Trans-Sasakian Manifolddlarda Ricci Soliton

Bir Ricci soliton Einstein metriğinin genelleştirilmesidir. (M, g) gibi bir Riemann manifoldunda $\mathcal{L}$, Lie türevi ; S Ricci tensörü ; V, M üzerinde bir vektör uzayı ve λ bir sabit olmak üzere

$$\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \quad 4.4.(1)$$

eşitliği sağlanıyorsa g ' ye Ricci soliton denir(Hamilton, 1988).

Sabit λ sayısının pozitif, sıfır veya negatif olmasına göre Ricci soliton sırasıyla daralan, istikrarlı ve genişleyen olarak adlandırılır. Eğer V vektör uzayı bir f potansiyel fonksiyonunun gradyanı ise g , gradyan Ricci soliton olarak adlandırılır ve 4.4.(1) denklemi

$$\nabla \nabla f = S + \lambda g$$

formuna girer.

Kompakt manifold üzerinde bir Ricci soliton 2 boyutta ve 3 boyutta sabit eğriliğe sahiptir(Chave ; Valent, 1996).

4.4.(1) denklemini sağlayan metrikler fizikte sıkça kullanılır ve quasi-Einstein olarak ta adlandırılırlar. Teorik fizikte 4.4.(1) denklemi Sicim teorisi ile ilişkilendirilir. Kompakt Ricci solitonlar Ricci akışı üzerinde belirli noktalardır ve kompakt manifoldlar üzerinde Ricci akışı için patlama limitleri olarak ta ortaya çıkarlar. Bu konu, diğer matematik alanlarıyla ve mekanik, optik, dinamik sistemler uzayı, termodinamik ve kontrol teorisi gibi uygulamalı alanlardaki uygulamalarla bağlantılıdır.

V , noktasal olarak ξ ile doğrudan olsun. Yani b , 3-boyutlu trans-Sasakian manifold üzerinde bir fonksiyon olmak üzere $V = b\xi$ olsun. O zaman;

$$(\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g)(X, Y) = 0$$

olur ve bu denklem aşağıdaki denklemi gerektirir:

$$g(\nabla_X b\xi, Y) + g(\nabla_Y b\xi, X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad \text{veya,}$$

$$bg(\nabla_X \xi, Y) + (Xb)\eta(Y) + bg(\nabla_Y \xi, X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

3.(2)' yi kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$bg(-\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), Y) + (Xb)\eta(Y) + bg(-\alpha\phi Y + \beta(Y - \eta(Y)\xi), X) + (Yb)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$2b\beta g(X, Y) - 2b\beta\eta(X)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad 4.4.(2)$$

Yukarıdaki denklemde Y için ξ yerleştirilerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$Xb + (\xi b)\eta(X) + 2(2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)) + 2\lambda\eta(X) = 0 \quad 4.4.(3)$$

Bu sefer de 4.(3) te X için ξ yerleştirilerek $\xi b = -2(\alpha^2 - \beta^2) - \lambda$ elde edilir. Bu değer 4.(3) te yerine konularak aşağıdaki denklem oluşturulur:

$$db = -\{\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2)\}\eta \quad 4.4.(4)$$

Yukarıdaki denklemde d' yi uygulayarak $\{\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2)\}d\eta = 0$ bulunur.

$d\eta \neq 0$ olduğundan $\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$ olmak zorundadır. Bu eşitlik 3.3.(4) ' e konulursa b' nin sabit olması gerektiği ortaya çıkar. 4.(2) ' den dolayı aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S(X, Y) = -(\lambda + b\beta)g(X, Y) + b\beta\eta(X)\eta(Y)$$

Bu sonuç β ' nın sabit olması durumunda M' nin sabit skaler eğrilikli olduğunu gösterir. Bu sonuç aşağıdaki teorem ile ifade edilir. Bu çalışmanın ana konusu teşkil ettiğinden 4.bölümde ayrıntılı olarak bahsedilecektir.

Teorem 4.4.1. Eğer bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold içindeki g metriği bir Ricci soliton ve V, ξ ile doğrudan ise V, ξ ' nin bir sabit katıdır ve $\beta = \text{sabit}$ olduğu sürece g sabit skaler eğriliklidir (Turan; De; Yıldız, 2012).

Konformal Ricci Flow ve Konformal Ricci Soliton

A.E. Fischer 2003-2004 yıllarında konformal Ricci (Flow) akış kavramını geliştirdi. Konformal Ricci akışı klasik Ricci flow denkleminin bir varyasyonudur. Ve denklemin birim hacim kısıtlamasını skaler eğrilik kısıtlamasıyla değiştirir. M 'nin düzgün, kapalı, konnekt yönelimli n -manifoldu olarak kabul edildiği M üzerinde konformal Ricci flow, aşağıdaki denklem ile tanımlanır:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + 2(S + \frac{g}{n}) = -pg \quad \text{ve} \quad r(g) = -1$$

Burada p zamana bağlı skaler uzaydır, $r(g)$ manifoldun skaler eğriliğidir ve n , manifoldun boyutudur(Fischer, 2004).

Konformal Ricci soliton denklemini λ bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır(Basu; Bhattacharyya, 2015):

$$\mathcal{L}_X g + 2S = [2\lambda - (p + \frac{2}{n})]g \quad 4.4.(5)$$

Bu denklem Ricci soliton denkleminin genelleştirilmesidir ve konformal Ricci flow denklemini de sağlar.

Hemen Hemen Ricci Soliton

Hemen hemen Ricci soliton kavramı ilk kez S.Pigola, M. Rigola, M. Rimoldi, ve A.G. Setti tarafından tanıtıldı (Pigola; Rigoli; Rimoldi; Setti, 2010). R.Sharma hemen hemen Ricci soliton üzerinde önemli çalışmalar yapan diğer bir bilim insanıdır(Sharma, 2104).

Eğer X gibi bir tam vektör uzayı ve $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir düzgün soliton fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlayacak şekilde mevcut ise ;

$$R_{ij} + \frac{1}{2}(X_{ij} + X_{ji}) = \lambda g_{ij}$$

(M^n, g) Riemann manifoldu bir hemen hemen Ricci solitondur. Burada R_{ij} Ricci tensörü ve $X_{ij} + X_{ji}$ toplamı Lie türevi $\mathcal{L}_X g$ 'yi lokal koordinatlarda temsil eder.

λ nın negatif, sıfır veya pozitif olmasına bağlı olarak hemen hemen Ricci soliton sırasıyla genişleyen, istikrarlı veya daralan olarak adlandırılır(Barros; Batista; Ribeiro Jr, 2014). Hemen hemen Ricci soliton aşağıdaki denklemle tanımlanır:

$$\mathcal{L}_X g + 2S = [2\lambda - (p + \frac{2}{n})]g$$

Burada $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyondur.

Gradyant Ricci Soliton (Cao, 2007)

Bir Riemann manifoldu (M^n, g_{ij}) üzerinde bir gradyant Ricci solitonu M üzerinde herhangi bir ρ sabiti ve f düzgün fonksiyonu için aşağıdaki denklemle tanımlanır:

$$S + \nabla \nabla f = \rho g$$

Burada f , Ricci solitonun potansiyel fonksiyonu ve ∇ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur. Özel olarak daralan gradyant Ricci soliton aşağıdaki denklemi sağlar:

$$S + \nabla \nabla f - \frac{1}{2\tau} g = 0$$

Burada $\tau = T - t$ ve T solitonun maximal zamanıdır.

Konformal Gradyant Daralan Ricci Soliton

Eğer bir Konformal Ricci solitonun vektör alanı bir f fonksiyonunun gradyantı ise o zaman bu soliton Konformal Gradyant Daralan Ricci Soliton olarak adlandırılır (Bhattacharyya; Basu, 2015). Konformal gradyant daralan Ricci soliton için denklem aşağıdaki gibidir:

$$S + \nabla \nabla f = (\frac{1}{2\tau} - \frac{2}{n} - p)g$$

Burada $\tau = T - t$, T solitonun maximal zamanı ve f , Ricci potansiyel fonksiyondur.

Ricci Soliton Üzerine Bazı Sonuçlar (Dutta; Basu; Bhattacharyya, 2016)

M gibi bir Riemann manifoldu üzerinde, vektör uzayı V olan konformal Ricci soliton denklemleri:

$$\mathcal{L}_V g + 2S = [2\lambda - (p + \frac{2}{n})]g$$

Vektör uzayı V , noktasal olarak ξ ile doğrudan olsun. Yani bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold üzerinde γ bir fonksiyon olmak üzere $V = \gamma\xi$ dir.

$$(\mathcal{L}_V g + 2S - [2\lambda - (p + \frac{2}{3})]g)(X, Y) = 0$$

Denklemden $V = \gamma\xi$ yazılırsa:

$$(\mathcal{L}_{\gamma\xi} g)(X, Y) + 2S(X, Y) - [2\lambda - (p + \frac{2}{3})]g(X, Y) = 0$$

elde edilir. Lie türevi ve Levi-Civita konneksiyon özelliğini uygulayarak;

$$\begin{aligned} \gamma g(\nabla_X \xi, Y) + (X\gamma)g(\xi, Y) + (Y\gamma)g(\xi, X) + \gamma g(\nabla_Y \xi, X) + 2S(X, Y) \\ - [2\lambda - (p + \frac{2}{3})]g(X, Y) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. 2.3.(3) ve 2.7.(3) yi kullanılarak ;

$$\begin{aligned} 2\beta\gamma g(X, Y) + 2\gamma\beta\eta(X)\eta(Y) + (X\gamma)\eta(Y) + (Y\gamma)\eta(X) \\ + 2S(X, Y) - [2\lambda - (p + \frac{2}{3})]g(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad 4.4.(6)$$

Yine burada Y yerine ξ yazılırsa, 1.3.(10) 'da α ve β sabit alınır;

$$X\gamma + (\xi\gamma)\eta(X) + 2[2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)] - [2\lambda - (p + \frac{2}{3})]\eta(X) = 0 \quad 4.4.(7)$$

elde edilir. Bu denklemde X yerine ξ yazılırsa;

$$\xi\gamma = \frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})] - 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

olur. Bu denklem 3.4.(7)' de yerine yazılırsa;

$$X\gamma + \left(\frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})] - 2(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X) + 2(2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X))$$

$$-[2\lambda - (p + \frac{2}{3})]\eta(X) = 0$$

elde edilir. Bu denklem aşağıdaki denklemi gerektirir:

$$X\gamma = \frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})]\eta(X) - 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)$$

Yukarıdaki denkleme dış diferansiyel uygulanarak ve λ sabit alınarak ;

$$\frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})] - 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

denklemini elde edilir. Son iki denklemden $X\gamma = 0$ bulunur ki bu da γ nin sabit olduğunu gösterir. Bunun sonucu olarak 3.4.(6) dan ;

$$2\beta\gamma g(X, Y) - 2\gamma\beta\eta(X)\eta(Y) + 2S(X, Y) - [2\lambda - (p + \frac{2}{3})]g(X, Y) = 0$$

olur. Bu denklem,

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})]g(X, Y) - \beta\gamma g(X, Y) + \gamma\beta\eta(X)\eta(Y)$$

şeklinde yazılabilir. $\{e_i\}$ ortonormal taban olmak üzere, $X = Y = e_i$ yazılarak i ' ye göre toplam alınarak ;

$$r = \frac{3}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})] - 3\beta\gamma + \gamma\beta$$

eşitliği bulunur. Bu denklemde konformal Ricci soliton için $r = -1$ alınırsa

$$\lambda = \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}\beta\gamma$$

olarak bulunur. Bu sonuç aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 4.4.2. (Dutta; Basu; Bhattacharyya, 2016) Konformal Ricci solitonu kabul eden bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold için eğer V , noktasal olarak ξ ile doğrudan ise o zaman V , ξ 'nin bir sabit katıdır. Buna ek olarak α ve β sabit olması durumunda

$$\lambda = \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}\beta\gamma$$

değerini alır.

Hemen hemen konformal Ricci soliton için λ nın düzgün fonksiyon olduğu düşünülerek

$$X\gamma = \frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})]\eta(X) - 2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X) \quad 4.4.(8)$$

ifadesine dışsal türev alarak

$$\frac{1}{2}[2\lambda - (p + \frac{2}{3})] - 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \quad 4.4.(9)$$

ve $d\lambda = 0$ elde edilir.

Bu nedenle λ sabit bir fonksiyondur ve 3.4.(8) ile 3.4.(9) dan γ sabittir(Dutta; Basu; Bhattacharyya, 2016).

Teorem 4.4.4. Eğer bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold hemen hemen konformal Ricci solitonu kabul ederse ve eğer V , noktasal olarak ξ ile doğrudan ise o zaman V , ξ 'nin bir sabit katı ve λ bir sabit fonksiyondur. Yani hemen hemen konformal Ricci soliton bir konformal Ricci soliton olur.

Konformal Ricci soliton denklemi kullanılarak;

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = 2\beta[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)]$$

elde edilir. 1.3.(11) , 3.4.(5) ile yukarıdaki denklemi kullanarak;

$$2\beta[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + 2\left[\left(\frac{r}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(X, Y) - \left(\frac{r}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Y)\right] \\ - \left[(2\lambda - (p + \frac{2}{3}))g(X, Y)\right] = 0$$

elde edilir. Konformal Ricci soliton için $r = -1$ olduğundan;

$$[2\beta + 2\left(\frac{-1}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right) - (2\lambda - (p + \frac{2}{3}))]g(X, Y) \\ - [2\beta + 2\left(\frac{-1}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)]\eta(X)\eta(Y) = 0$$

olur. Bu denklemde $X = Y = \xi$ yazılırsa;

$$2\beta + 2\left(\frac{-1}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right) - (2\lambda - (p + \frac{2}{3})) - 2\beta \\ - 2\left(\frac{-1}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right) = 0$$

olur. Bu denklemden de;

$$\lambda = \frac{1}{2}[4(\alpha^2 - \beta^2) + (p + \frac{2}{3})]$$

elde edilir. $\alpha^2 \neq \beta^2$ olduğundan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha^2 > \beta^2$ ise $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) > 0$ olur ki bu α nın β dan büyük olmasını gerektirir. O zaman $\lambda > 0$ olur ve konformal Ricci soliton daralandır.

2. $\alpha^2 < \beta^2$ ve $(p + \frac{2}{3}) > 4(\alpha^2 - \beta^2)$ ise $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0$ olur ki bu α nın $-\beta$ dan küçük olmasını gerektirir. O zaman $\lambda > 0$ olur ve konformal Ricci soliton daralandır.

3. $\alpha^2 < \beta^2$ ve $(p + \frac{2}{3}) < 4(\alpha^2 - \beta^2)$ ise $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0$ olur ki bu α nın $-\beta$ dan küçük olmasını gerektirir. O zaman $\lambda < 0$ olur ve konformal Ricci soliton genişleyendir.

Teorem 4.4.5. (g, ξ, λ) ile gösterilen bir konformal Ricci solitonu kabul eden bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold aşağıdaki bağıntıları sağlar:

1. $\alpha > \beta$ için konformal Ricci soliton daralandır.
2. $\alpha < -\beta$ ve $(p + \frac{2}{3}) > 4(\alpha^2 - \beta^2)$ için konformal Ricci soliton daralandır.
3. $\alpha < -\beta$ ve $(p + \frac{2}{3}) < 4(\alpha^2 - \beta^2)$ için konformal Ricci soliton genişleyendir.



5. ÜÇ BOYUTLU TRANS- SASAKIAN MANİFOLDLARDA RİCCİ SOLİTONLAR VE GRADİENT RİCCİ SOLİTONLAR

5.1. Ön Bilgiler

Bir Ricci soliton, Einstein metriğinin genellemesidir. Riemannian manifoldunda (M, g) aşağıdaki eşitlik sağlanırsa g bir Ricci Solitondur.

$$\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \quad 5.1.(1)$$

Burada $\mathcal{L}$ Lie türevidir, S bir Ricci tensördür, V ise M üzerinde tam vektör alanıdır ve λ sabittir. 5.(1) i sağlayan metrikler ilginçtir ve fizikte oldukça faydalıdır ve bunlara genellikle sözde – Einstein denir. Kompakt Ricci solitonlar, metrikler alanından kendi oransal modül difeomorfizmleri ve seviyelerine yansıtılan Ricci akış $\frac{\partial}{\partial t} g = -2S$ 'in sabit noktalarıdır. Teorik bilimciler de bu zorlu teori ile bağlantılı olarak Ricci soliton denklemini araştırmaktadır. Bu yöndeki ilk katkı, teorinin bazı yönlerini tartışan Fridean'dan kaynaklanmaktadır.

Ricci solitonun, λ değerinin negatif, sıfır ve pozitif oluşuna göre sırayla daralan, istikrarlı ve genişleyen olduğu söylenmektedir. Vektör alanı V potansiyel fonksiyon $-f$ nin gradienti ise, bu durumda g 'ye gradient Ricci soliton adı verilir ve 5.1.(1) denklemi

$$\nabla \nabla f = S + \lambda g$$

formunu alır. Kompakt manifold üzerindeki Ricci solitonun 2. Boyutta ve aynı zamanda 3. Boyutta sabit bir eğriliği vardır (Hacısalıhoğlu, 1993). Diğer yandan metrik geometrinin kökleri, diferansiyel denklem sistemlerini çalışmak için bir geometrik araç olarak metrik dönüşümü tanıtan 1872 Sophus Lie'da olduğu gibi diferansiyel denklemlerde yer almaktadır. Bu konunun soyut matematik, mekanik, optik, dinamik sistem faz aralığı, termodinamik ve kontrol teorisi gibi uygulamalı alanlardaki temel uygulamaların diğer alanları ile manifold bağlantıları vardır.

Trans – Sasakian manifoldları, Chinae ve Gonzales tarafından tanıtılan hemen hemen değme metrik yapıların sınıflandırılmasından ortaya çıkar ve hem Sasakian hem de Kenmotsu manifoldlarının doğal genellemesi olarak görülür. Yine hemen hemen Hermitian manifoldlarının Gray-Hervella sınıflandırmasında, yerel olarak uyumlu Kaehler manifoldları ile yakından bağlantılı Hermitian manifoldlarının bir sınıfı ortaya çıkar (Yano ve Kon, 1983).

Manifoldun üzerindeki hemen hemen değme metrik yapı eğer W4 sınıfına ait ise bir trans-Sasakian yapıdır. $M \times R$ çarpım manifoldu $C_6 \oplus C_5$ sınıfı (α, β) tipin trans – Sasakian yapılarının sınıfı ile eşleşir. Trans – sasakian'ın iki alt sınıfı C5 ve C6 nın lokal yapısı tamamen karakterize edilir. Bazı curvature kimlikleri ve C5, C6 için kesit eğrilikleri ve trans-sasakian manifoldları elde edilir. (Pokhariyal, 1982b). $(0,0)$, $(0,\beta)$ ve $(\alpha,0)$ tip trans- Sasakian yapılarının cosymplectic, β -Kenmotsu (8) ve α -Sasakian olduğu bilinmektedir (Pokhariyal, 1982a).

$n \geq 5$ boyutunda trans-Sasakian manifoldlarının lokal yapısı tamamen J.C.Marrero tarafından karakterize edilmiştir. $n \geq 5$ trans – Sasakin manifoldunun cosymplectic ya da β -Kenmotsu ya da α -Sasakian olduğunu kanıtlamıştır(Marrero, 1992). Sharma K- değme manifoldlarındaki Ricci solitonlarına çalışmaya başlamıştır. K- değme manifoldlarında vektör alanı ξ yapısı Killingdir, yani $\mathcal{L}_\xi g = 0$ dir ve bu, bir trans – Sasakian manifoldunda genel değildir (Sharma, 1990). Bu şartlardan yola çıkarak üç boyutlu trans – Sasakian manifoldlarında Ricci solitonlar ve gradient Ricci solitonları çalışılmıştır. Çalışma boyunca $\alpha, \beta =$ sabit olarak alınmıştır.

Bu çalışma şu şekilde organize edilmiştir: Bölüm 1'de, öncelikli bilgilerin ardından $\alpha, \beta =$ sabit ile 3 boyutlu trans – Sasakian manifolduna bir örnek verilmiştir. Bölüm 3.4 de Ricci solitonları 3 boyutlu trans – Sasakian manifoldunda çalışılmış ve V vektör uzayının ξ vektör alanındaki Reeb vektörü ile doğrudan olması halinde V, ξ' nin sabit çarpanı olduğunu ve manifoldun da sabit skaler eğrilikli olduğu ispatlanmıştır. Aynı zamanda g bir Ricci soliton ise ve $V = \xi$ ise, bu durumda Ricci soliton daralmadığı. Skaler eğrilikli 3- boyutlu trans-Sasakian manifold Ricci solitonu kabul ederse, bu durumda manifold ya Einstein manifoldu ya da β -Kenmotsu manifolddur.

5.2. 3-Boyutlu Trans- Sasakian Manifold

M , hemen hemen değme bir metrik yapısı olan (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme bir metrik manifold olsun, yani ϕ bir $(1,1)$ - tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η bir 1-form ve g ise Riemannian metrik olsun, şöyle ki;

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X) \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \phi\xi = 0, \quad \eta g \phi = 0, \quad (5.2.1)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (5.2.2)$$

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y), g(X, \xi) = \eta(X) \quad 5.2.(3)$$

$$\text{Manifoldun } \phi \text{ temel 2 formu, her } X, Y \in TM \text{ için } \phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad 5.2.(4)$$

olarak tanımlanır. M manifoldu üzerindeki (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı $(M \times R, J, G)$ eğer W4 sınıfına aitse trans – Sasakian yapı olarak adlandırılır, burada J,

$$J(X, f d/dt) = (\phi X - f \xi, \eta(X) d/dt)$$

ile tanımlanan $M \times R$ üzerinde hemen hemen kompleks bir yapıya sahiptir. M üzerindeki tüm X vektör alanları ve $M \times R$ üzerindeki f düzgün fonksiyonlar ve G, $M \times R$ üzerindeki çarpım metriğidir. M üzerindeki düzgün fonksiyonlar α ve β için;

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X), \quad 5.2.(5)$$

Burada trans Sasakian yapısı (α, β) - tipindedir. 4.2.(5) formülden

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), \quad 5.2.(6)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = -\alpha g(\phi X, Y) + \beta g(\phi X, \phi Y). \quad 5.2.(7)$$

yazılabilir.

3 boyutlu trans Sasakian manifoldunun somut bir örneği M. Turan ve arkadaşlarının çalışmalarında yapılandırılmıştır (Turan ve ark. 2012). Bagewadi ve Ingalahalli Ricci tensor ve 3 boyutlu trans-Sasakian manifoldları için eğrilik tensör üzerinde çalışmış ve bunların açık formüllerini vermiştir (Bagewadi ve Ingalahalli, 2013).

3 boyutlu trans Sasakian manifoldu için;

$$2\alpha\beta + \xi\alpha = 0, \quad 5.2.(8)$$

$$S(X, \xi) = (2(\alpha^2 - \beta^2) - \xi\beta)\eta(X) - X\beta - (\phi X)\alpha \quad 5.2.(9)$$

$$S(X, Y) = \left(\frac{\tau}{2} + \xi\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(X, Y) - \left(\frac{\tau}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Y) - Y\beta + (\phi Y)\alpha\eta(X) \\ - (X\beta + (\phi X)\alpha)\eta(Y) \quad 5.2.(10)$$

ve

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z = & \left(\frac{\tau}{2} + 2\xi\beta - 2(\alpha^2 - \beta^2)\right)g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(Y,Z)\left[\left(\frac{\tau}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\xi \right. \\
& - \eta(X)(\phi\text{grad}\alpha - \text{grad}\beta) + (X\beta + (\phi X)\alpha)\xi] + g(X,Z)\left[\left(\frac{\tau}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(Y)\xi \right. \\
& - \eta(Y)(\phi\text{grad}\alpha - \text{grad}\beta) + (Y\beta + (\phi Y)\alpha)\xi] - [(Z\beta + (\phi Z)\alpha)\eta(Y) + (Y\beta + (\phi Y)\alpha)\eta(Z) \\
& + \left(\frac{\tau}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(Y)\eta(Z)]X + [(Z\beta + (\phi Z)\alpha)\eta(X) + (X\beta + (\phi X)\alpha)\eta(Z) \\
& + \left(\frac{\tau}{2} + \xi\beta - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Z)]Y
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

olur. Burada S , $(0,2)$ tipinde bir Ricci tensörü; R , $(1,3)$ tipinde eğrilik tensörü ve τ , M manifoldunun skaler eğriliğidir. α, β = sabit için yukarıdaki denklemler şöyle düzenlenir:

$$S(X,Y) = \left(\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(X,Y) - \left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Y), \tag{5.2.12}$$

$$S(X,\xi) = (2(\alpha^2 - \beta^2))\eta(X), \tag{5.2.13}$$

$$R(X,Y)\xi = (\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)X - \eta(X)Y), \tag{5.2.14}$$

$$QX = \left(\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)X - \left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\xi \tag{5.2.15}$$

Bu denklemlerden anlaşılmaktadır ki, α, β sabit ise manifold ya α - Sasakian ya da β -Kenmotsu ya da cosymplectictir.

Önerme 5.2.1. α, β sabit olan 3 boyutlu bir trans- Sasakian manifoldu ya α - Sasakian ya da β - Kenmotsu ya da cosymplectictir.

α -Sasakian manifoldlarının quasi Sasakian olduğu bilinmektedir. Bunlar $\lambda > 0$ ile $C(\lambda)$ manifoldu örnekleri verilmektedir.

β - Kenmotsu manifoldu bir $C(-\beta^2)$ - manifoldudur.

Cosymplectic manifoldlar, zamana bağlı mekanik sistemler için doğal bir ortam oluşturur çünkü bunlar Kaehler manifoldunun ve gerçek doğru ya da çember lokal çarpımlarıdır (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Örneğin,

3 boyutlu trans- Sasakian manifold la ilgili olarak,

$\alpha, \beta =$ sabit olarak 3 boyutlu trans- Sasakian manifolduna bir örnek veriyoruz.

3 boyutlu manifold $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$ olsun, burada (x,y,z) , $\mathbb{R}^3$ 'te bulunan standart koordinatlardır. Vektör alanları

$$e_1 = z \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = z \frac{\partial}{\partial z}$$

M 'nin her noktasında lineer bağımsızdır. g , Riemannian metriği;

$$g(e_1, e_3) = g(e_2, e_3) = g(e_1, e_2) = 0,$$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$$

olsun.

Burada η , her $Z \in \chi(M)$ için $\eta(Z) = g(Z, e_3)$ olarak tanımlanan 1- formdur. ϕ ise $\phi(e_1) = -e_2$,

$\phi(e_2) = e_1$, $\phi(e_3) = 0$ ile tanımlanan $(1,1)$ tensör alanıdır. Bu durumda ϕ ve g lineerliğini kullanarak her $Z \in \chi(M)$ için şunu elde ederiz:

$$\eta(e_3) = 1, \quad \phi^2 Z = -Z + \eta(Z)e_3,$$

$$g(\phi Z, \phi W) = g(Z, W) - \eta(Z)\eta(W)$$

Bu nedenle $e_3 = \xi$, (ϕ, ξ, η, g) , M üzerindeki hemen hemen değme metrik yapıyı tanımlar. Şimdi direkt hesaplamalar ile ;

$$[e_1, e_2] = 0 \quad [e_2, e_3] = -e_2 \quad [e_1, e_3] = -e_1$$

elde edilir. g metrik tensörün ∇ Riemannian konneksiyonu Koszul formülü ile;

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])$$

5.2.(16)

verilir.

Burada 4.2.(16) kullanılarak;

$$2g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) = 2g(-e_1, e_1),$$

$$2g(\nabla_{e_1}e_3, e_2) = 0 = 2g(-e_1, e_2),$$

$$2g(\nabla_{e_1}e_3, e_3) = 0 = 2g(-e_1, e_3),$$

elde edilir.

Bu nedenle $\nabla_{e_1}e_3 = -e_1$ benzer şekilde $\nabla_{e_2}e_3 = -e_2$ ve $\nabla_{e_3}e_3 = 0$ olur. 4.2.(14) denklemi aynı zamanda;

$$\nabla_{e_1}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1}e_1 = e_3$$

$$\nabla_{e_2}e_2 = e_3, \quad \nabla_{e_2}e_1 = 0,$$

$$\nabla_{e_3}e_2 = 0, \quad \nabla_{e_3}e_1 = 0$$

sonucunu verir.

$$(\nabla_{e_1}\phi)e_1 = \nabla_{e_1}\phi e_1 - \phi \nabla_{e_1}e_1 = -\nabla_{e_1}e_2 - \phi e_3 = -\nabla_{e_1}e_2 = 0 \quad 5.2.(17)$$

$$= 0(g(e_1, e_1) e_3 - \eta(e_1)e_1) - 1(g(\phi e_1, e_1) e_3 - \eta(e_1) \phi e_1)$$

$$(\nabla_{e_1}\phi)e_2 = \nabla_{e_1}\phi e_2 - \phi \nabla_{e_1}e_2 = -\nabla_{e_1}e_1 - 0 = e_3 \quad 5.2.(18)$$

$$= 0(g(e_1, e_2) e_3 - \eta(e_2)e_1) - 1(g(\phi e_1, e_2) e_3 - \eta(e_2) \phi e_1)$$

$$(\nabla_{e_1}\phi)e_3 = \nabla_{e_1}\phi e_3 - \phi \nabla_{e_1}e_3 = 0 + \phi e_1 = -e_2$$

$$= 0(g(e_1, e_3) e_3 - \eta(e_3)e_1) - 1(g(\phi e_1, e_3) e_3 - \eta(e_3) \phi e_1) \quad 5.2.(19)$$

4.2.(17), 4.2.(18) ve 4.2.(19) denklemlerinde $X = e_1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ve $e_3 = \xi$ için manifoldun 4.2.(5)' i karşıladığını gördük. Benzer şekilde $X = e_2$ ve $X = e_3$ için manifoldun $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ve $e_3 = \xi$ ile de (2) yi sağladığı görülür. Bu nedenle manifold (0,1) tipte bir trans-Sasakian manifoldudur.

5.3. Ricci Soliton

M , g metriği ile 3 boyutlu bir trans- Sasakian manifold olsun.. Bir Ricci soliton, Einstein metriğinin genellemesidir ve Riemannian manifoldunda (M, g) şöyle tanımlanır:

$$\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g = 0$$

Şimdi V , ξ ile lineer bağımlı olsun, yani $V = b\xi$. Burada b , 3 boyutlu bir trans-Sasakian manifoldu üzerinde fonksiyondur.

$$(\mathcal{L}_V g + 2S + 2\lambda g)(X, Y) = 0$$

şunu gösterir:

$$g(\nabla_X b\xi, Y) + g(\nabla_Y b\xi, X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0,$$

ya da

$$bg((\nabla_X \xi, Y) + (Xb)\eta(Y) + bg(\nabla_Y \xi, X) + (Yb)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

3.2.(6)'yı kullanarak şunları elde ederiz:

$$bg(-\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi), Y) + (Xb)g(Y) + bg(-\alpha\phi Y + \beta(Y - \eta(Y)\xi), X) + (Yb)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

Bunun sonucunda;

$$2b\beta g(X, Y) - 2b\beta\eta(X)\eta(Y) + (Xb)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad 5.3.(1)$$

olur.

5.3.(1)'de Y yerine ξ yazılırsa;

$$Xb + (\xi b)\eta(X) + 2(2(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)) + 2\lambda\eta(X) = 0 \quad 5.3.(2)$$

olur.

5.3.(2)'de $X = \xi$ tekrar alınır

$$\xi b = -2(\alpha^2 - \beta^2) - \lambda$$

olur. Bu değer 5.3.(2)'de yerine yazılırsa,

$$Xb + (-2(\alpha^2 - \beta^2) - \lambda)\eta(X) + 2(2(\alpha^2 - \beta^2))\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0 \quad 5.3.(3)$$

ya da

$$db = -\{\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2)\}\eta \quad 5.3.(4)$$

elde edilir.

5.3.(4) için d uygulanırsa,

$$\{\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2)\}d\eta = 0 \quad 5.3.(5)$$

elde edilir. $d\eta \neq 0$ olduğundan elimizdeki

$$\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \quad 5.3.(6)$$

olur.

5.3.(6) denklemi 5.3.(5)'de kullanmak b'nin sabit olduğu sonucuna götürür. Bu nedenle 5.3.(3)

$$S(X,Y) = -(\lambda + b\beta)g(X,Y) + b\beta\eta(X)\eta(Y)$$

olur ve bu da $\beta = \text{sabit}$ olduğu sürece M 'nin sabit skaler eğrilikli olduğunu gösterir.

Teorem 5.3.1. 3 boyutlu trans- Sasakian manifoldunda metrik g bir Ricci solitondur ve V , ε ile lineer bağımlı olsun. Bu durumda V , ε 'nin sabit çarpanıdır ve g de, $\beta = \text{sabit}$ olduğu sürece sabit skaler eğriliklidir.

$V = \xi$ olsun. Bu durumda denklem 4.3.(2) şuna indirgenir:

$$\mathcal{L}_\xi g + 2S + 2\lambda g = 0 \quad 5.3.(7)$$

5.1.(6)'yı kullanarak;

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) = 2\beta\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\} \quad 5.3.(8)$$

elde edilir. Bu nedenle;

$$A(X,Y) = (\mathcal{L}_\xi g + 2S)(X,Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) + 2S(X,Y) \quad 5.3.(9)$$

elde edilir. 5.3.(8) ve 5.3.(9) kullanılarak;

$$A(X,Y) = 2\beta\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\} + 2\left\{\left(\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)g(X,Y) - \left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(X)\eta(Y)\right\} \quad 5.3.(10)$$

5.3.(9), 5.3.(6)'da yerine yazılırsa;

$$2(\beta - (\alpha^2 - \beta^2) + \lambda)g(X,Y) - 2\left\{\beta - \frac{\tau}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2)\right\}\eta(X)\eta(Y) = 0 \quad 5.3.(11)$$

elde edilir.

Şimdi 5.3.(11)'de $X = Y = \xi$ alınırsa $\lambda = 2(\beta^2 - \alpha^2)$ elde edilir.

$\alpha^2 \neq \beta^2$ olduğundan $\lambda > 0$ olur ve Ricci soliton daralmadır.

Teorem 5.3.2. 3 boyutlu trans- Sasakian manifoldu (g, ξ, λ) bir Ricci solitonu ise, bu durumda Ricci soliton daralmadır.

5.4. Gradient Ricci Soliton

Eğer V vektör uzayı $-f$ potansiyel fonksiyonunun gradienti ise g 'ye gradient Ricci Soliton denir ve (13) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\nabla \nabla f = S + \lambda g \quad 5.4.(1)$$

Bu denklem;

$$\nabla_Y Df = QY \lambda Y \quad 5.4.(2)$$

şeklinde yazılır.

Burada D , g 'nin gradient operatörüdür. 4.4.(2) den;

$$R(X, Y)Df = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X \quad 5.4.(3)$$

olur. 5.2.(15)'ten

$$\begin{aligned} (\nabla_W Q)(X) &= \frac{d\tau(W)}{2} (X - \eta(X)\xi) - \left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)(-\alpha g(\phi W, X) + \beta(g(W, X) \\ &\quad - \eta(X)\eta(W)) + \eta(X)\nabla_W \xi) \end{aligned} \quad 5.4.(4)$$

5.4.(4)' te W ile ξ yerini değiştirmekle;

$$(\nabla_\xi Q)(X) = \frac{d\tau(\xi)}{2} (X - \eta(X)\xi) \quad 5.4.(5)$$

elde edilir. Bu durumda;

$$g(\nabla_\xi Q)(X) - (\nabla_X Q)(\xi, \xi) = g\left(\frac{d\tau(\xi)}{2} (X - \eta(X)\xi), \xi\right) = \frac{d\tau(\xi)}{2} (g(X, \xi) - \eta(X)) = 0 \quad 5.4.(6)$$

5.4.(6)'yı kullanarak,

$$g(R(\xi, X)Df, \xi) = 0 \quad 5.4.(7)$$

elde edilir. 5.2.(14)'ten ise;

$$g(R(\xi, Y)Df, \xi) = (\alpha^2 - \beta^2)(g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df))$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemden 4.4.(7) kullanarak;

$$(\alpha^2 - \beta^2)(g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)) = 0$$

ya da

$$(\alpha^2 - \beta^2)(g(Y, Df) - \eta(Y)g(Df, \xi)) = 0$$

elde edilir.

Bu da

$$\alpha^2 \neq \beta^2 \text{ olduğundan } Df = (\xi f)\xi, \quad 5.4.(8)$$

gösterir.

5.4.(2) denkleminde 5.4.(8)'i kullanarak;

$$\begin{aligned} S(X, Y) + \lambda g(X, Y) &= g(\nabla_Y Df, X) = g(\nabla_Y (\xi f)\xi, X) \\ &= (\xi f)g(\nabla_Y \xi, X) + Y(\xi f)\eta(X) \\ &= (\xi f)g((- \alpha \phi Y + \beta(Y - \eta(X)\xi), X) + Y(\xi f)\eta(X) \\ &= -\alpha(\xi f)g(\phi Y, X) + \beta(\xi f)g(Y, X) - \beta(\xi f)\eta(Y)\eta(X) + Y(\xi f)\eta(X) \end{aligned} \quad 5.4.(9)$$

5.4.(9)' da $X = \xi$ olursa ve 5.2.(13) kullanılarak;

$$S(Y, \xi) + \lambda \eta(Y) = Y(\xi f) = \{\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2)\}\eta(Y) \quad 5.4.(10)$$

5.4.(9) da X ve Y yerleri değiştirilerek;

$$S(X, Y) + \lambda g(X, Y) = -\alpha(\xi f)g(Y, \phi X) + \beta(\xi f)g(X, Y) - \beta(\xi f)\eta(X)\eta(Y) + X(\xi f)\eta(Y) \quad 5.4.(11)$$

elde edilir.

5.4.(9) ve 5.4.(11) toplanınca:

$$2S(X,Y) + 2\lambda g(X,Y) = 2\beta(\xi f)g(X,Y) - 2\beta(\xi f)\eta(X)\eta(Y) + Y(\xi f)\eta(X) + X(\xi f)\eta(Y) \quad 5.4.(12)$$

ve 5.4.(2)'yi kullanarak;

$$\nabla_Y Df = \beta(\xi f)(Y - \eta(Y)\xi) + (\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2))\eta(Y)\xi \quad 5.4.(13)$$

elde edilir. 5.4.(13) kullanılarak;

$$\begin{aligned} R(X,Y)Df &= \nabla_X \nabla_Y Df - \nabla_Y \nabla_X Df - \nabla_{[X,Y]} Df \\ &= \beta X(\xi f)Y - \beta Y(\xi f)X + \beta Y(\xi f)\eta(X)\xi - \beta X(\xi f)\eta(Y)\xi \\ &\quad + (\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f))((\nabla_X \eta)(Y)\xi - (\nabla_Y \eta)(X)\xi) \\ &\quad + (\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f))((\nabla_X \xi)\eta(Y) - (\nabla_Y \xi)\eta(X)). \end{aligned} \quad 5.4.(14)$$

5.4.(14)'te ξ ile iç çarpımından;

$$0 = g(R(X,Y)Df, \xi) = 2\alpha(\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f))g(\phi Y, X)$$

elde edilir.

Bu nedenle

$$2\alpha(\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f)) = 0$$

olur.

Şimdi şu durumları göz önünde bulundurabiliriz:

Durum i) $\alpha = 0$ ya da

Durum ii) $\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f) = 0$

Durum iii) $\alpha = 0$ and $\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f) = 0$

Durum i) $\alpha = 0$ ise manifold β -Kenmotsu manifolduna indirgenir.

Durum ii) $\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f) = 0$ olsun. Bu 4.4.(10)'da kullanılırsa;

$$Y(\xi f) = \beta(\xi f)\eta(Y)$$

olur. Bu değer 5.4.(12)'de yerine yazılırsa;

$$S(X, Y) + \lambda g(X, Y) = \beta(\xi f)g(X, Y)$$

dir. Bu denklemi çıkararak,

$$\tau + 3\lambda = 3\beta(\xi, f)$$

elde edilir. Bu da

$$(\xi f) = \frac{\tau}{3\beta} + \frac{\lambda}{\beta}$$

olur. Eğer $\tau = \text{sabit}$ ise bu durumda $(\xi f) = \text{sabit} = c$ olur. Bu nedenle 5.4.(8)'den

$$Df = (\xi f)\xi = c\xi$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$g(Df, X) = c\eta(X)$$

olur. Bunun anlamı;

$$df(X) = c\eta(X)$$

dir. Burada d uygulanarak $cd\eta = 0$ elde edilir. $d\eta \neq 0$ olduğundan $c = 0$ dır. $Df = 0$ olur. Bunun anlamı $f = \text{sabittir}$. Bu nedenle 5.4.(1) denklemde

$$S(X, Y) = 2(\alpha^2 - \beta^2)g(X, Y)$$

indirgenir, yani M bir Einstein manifoldudur.

Durum iii) 5.4.(10) denklemde $\alpha = 0$ ve $\lambda + 2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\xi f) = 0$ alınarak

$$Y(\xi f) = \beta(\xi f)\eta(Y) \text{ elde edilir.}$$

Durum ii'deki gibi manifoldun bir Einstein manifoldu olduğu sonucuna varırız.

Teorem 5.4.6. Sabit skaler eğrilikli bir 3 boyutlu trans- Sasakian manifoldu graident Ricci solitonu kabul ederse, bu durumda $\alpha, \beta = \text{sabit}$ ise manifold ya β - Kenmotsu manifoldu ya da bir Einstein manifoldudur.

Son çalışmalarında De ve Sarkar 3 boyutlu bir kompakt bağlantılı bir trans- Sasakian manifoldunun sabit eğrilikli olduğunu kanıtlamıştır, bu durumda manifold, α - Sasakian ya da β - Kenmotsudur. Bir 3 boyutlu sabit eğrilikli Riemannian manifoldu ve Einstein manifoldu eşdeğerdir.

Sonuç 5.1. Sabit skaler eğrilikli bir 3 boyutlu trans- Sasakian manifoldu graident Ricci solitonu kabul ederse, bu durumda $\alpha, \beta = \text{sabit}$ ise manifold ya β - Kenmotsu manifoldu ya da bir Einstein manifoldudur.

Bir 3 boyutlu bağlı bir trans- Sasakian manifold lokal olarak ϕ - simetrik olması için gerek ve yeter koşul α ve β 'nin sabit olması halinde skaler eğriliklidir.

Sonuç 5.2. Lokal olarak ϕ - simetrik olan 3 boyutlu bağlı trans- Sasakian manifoldu Ricci solitonu kabul ederse, bu durumda $\alpha, \beta = \text{sabit}$ ise manifold ya β - Kenmotsu manifoldu ya da bir Einstein manifoldudur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Manifold teorisi modern diferensiyel geometrinin en geniş ve en önemli başlıklarındandır. Manifoldlar üzerindeki yapıları daha basit ve kolay anlaşılabilir uzaylar cinsinden ifade edilebilir kılarlar, bu nedenle bu kavram bilim dünyası için oldukça ilginç bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Bu çalışmada 3-boyutlu trans-Sasakian manifold türleri incelenmiş, bu manifoldlarda Ricci tensörü incelenmiş, Ricci solitonun genişleyen (expanding), durgun (steady) ya da daralan (shrinking) olduğu sonuçları elde edilmiştir. Bu çalışmanın Ricci soliton kavramının fizik başta olmak üzere birçok disiplin ve disiplinler arası çalışmada kullanımı ile ilgili araştırmalara yol açacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aarts, J. M. ve Lutzer, D. J., (1973). Pseudo-completeness and the product of Baire spaces, *Pacific J. Math.* 48, 1–10.
- Agashe, N.S. ve Chafle, M.R., (1992). A semi-symmetric non-metric connection, *Indian J. Pure Math.* 23, 399-409.
- Al-Solamy, F. R., Kim, J. S. ve Tripathi, M. M., (2011). On η -Einstein trans-Sasakian manifolds, *An. Stiint. Univ. "Al.I.Cuza" din Iasi* 57(2), 417–440.
- Aris, R., (1989). *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Dover pub. New York.
- Aull, C.E. ve Lowen, R., (1997). *Handbook of the History of General Topology*, Cilt. 1, Kluwer, Dordrecht.
- Bagewadi, C. S. ve Ingalahalli G. (2012). Ricci solitons in Lorentzian α –Sasakian manifolds. *Acta Mathematica Academia Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 28(1), 59-68.
- Bagewadi, C. S. ve Ingalahalli G. (2013). Certain Results on Ricci Solitons in Trans-Sasakian Manifolds. *Hindawi Publishing Corporation 3 of Math.*, 1- 10.
- Bagewadi, C. S. ve Venkatesha, (2007). Some curvature tensors on a trans-sasakian manifolds, *Turkish J. Math.* 31(2), 111–121.
- Bagewadi, C. S., Ingalahalli, G. ve Ashoka, S. R. (2013). A Study on Ricci Solitons in Kenmotsu Manifolds. *Hindawi Publishing Corporation, ISRN Geometry*, Article ID 412593, 6 pages.
- Beltrami, E. (1868a). Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giornale di Matematiche* 6, 284-312. *Opere Matematiche*, Cilt 1, Milano, 1902, 262-280.
- Beltrami, E. (1868b). Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, *Annali di Matematica* (2) 2, 232-255. *Opere Matematiche*, Cilt 1, Milano, 1902, 262-280.
- Betti, E. (1871). Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, *Annali di Matematica* (2) 4, 140-158. *Opere Matematiche*, Cilt 2, Milano, 1913, 273-290.
- Betti, E. (1913). *Opere Matematiche*, Cilt 2, Milano.
- Betti, E. (1915). Correspondence with Placido Tardy, *Atti Accademia dei Lincei* 24(5), 517-519.
- Blair, D. E. ve Oubina, J. A., (1990). Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, *Publ. Mat.* 34(1), 199–207.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Blair, D. E., (1976). Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Note in Mathematics, 509, Springer-Verlag, Berlin-New York.
- Bollinger, M., (1972). Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs, Archive for History of Exact Sciences 9, 94-170.
- Bottazzini, U., (1977). Riemanns Einfluss auf Betti und Casorati, Archive for the History of Exact Sciences 18, 27-37.
- Bottazzini, U., (1985). Dinis Arbeiten auf dem Gebiet der Analysis, Mathemata. Festschrift ftir Helmuth Gericke, M. Folkerts and U. Lindgren, eds, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 591-605.
- Bottazzini, U., (1986). The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass, Springer, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo.
- Camci, C., (2003). Kontak Geometride Legendre Eğrileri, Doktora Semineri, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Cauchy, A., (1891). Memoire sur les lieux analytiques, Comptes Rendus 24, 885. (Euvres 10(1), 292-295.
- Chave, T. ve Valent, G., (1996a). On a class of compact and non-compact quasi- Einstein metrics and their renoirmalizability properties, Nuclear Phys. B 478, 758–778.
- Chave, T. ve Valent, G., (1996b). Quasi-Einstein metrics and their renoirmalizability properties, Helv. Phys. Acta. 69, 344–347.
- China, D. ve Gonzales, C., (1990). A classification of almost contact metric manifolds, Ann. Mat. Pura Appl. (4)156, 15–36.
- Clebsch, A. (1864), Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie, Journal für Mathematik 63, 189-243.
- De, U. C. ve Sarkar, A., (2008). On three-dimensional trans-Sasakian manifolds, Extracta Math. 23(3), 265–277.
- De, U. C. ve Tripathi, M. M., (2003). Ricci tensor in 3-dimensional trans-Sasakian manifolds, Kyungpook Math. J. 43(2), 247–255.
- De, U.C. ve De, K., (2012). On A Class of Three-Dimensional Trans-Sasakian Manifolds, Commun. Korean Math. Soc. 27(4), 795–808.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

De, U.C. ve De, K., (2016). Projective Curvature Tensorin 3-dimensional Connected Trans-Sasakian Manifolds, *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica*, 55(2), 29–40

Dutta, T., Basu, N., ve Bhattacharyya, A., (2016). Almost conformal Ricci solituons on 3-dimensional trans-Sasakian manifold Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 45(5), 1379 - 1392

Friedan, D., (1985). Non linear models in $2+\epsilon$ -dimensions, *Ann. Phys.* 163i 318–419.

Gray, A. ve Hervella, L. M., (1980a). The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* 123(4), 35–58.

Gray, A. ve Hervella, L. M., (1980b). The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* 123(4), 35–58.

Hacısalısoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N., (2003). *Tensör Geometri*, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hacısalısoğlu, H. H., (1993). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hall, G. S., (2004). *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, 46, of World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd.

Hamilton, R. S., (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, 17, 255–306.

Hamilton, R. S., (1988). The Ricci flow on surfaces, *Mathematics and general relativity*, *Contemp. Math.*, 71, American Math. Soc., 237–262.

Hawking, S. W. ve Ellis, G. F. R., (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1902a), *Über die Grundlagen der Geometrie*, *Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen*, 233-241. Also in *Anhang IV of Grundlagen der Geometrie*, 2nd ed., 1903, 121ff.; 7th ed. 178-230.

Hilbert, D. (1902b), *Über die Grundlagen der Geometrie*, *Mathematische Annalen* 56, 381-422. [Abbreviated version of (1902a).]

History (<http://en.wikipedia.org/wiki/tensor#history>)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Jacobi, C.G.J., (1834). De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis quae solis quadratis variabilium constant; Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 12, 1-69. Gesammelte Werke 3, Berlin, 191-268.

Kim, J. S., Prasad, R. ve Tripathi, M. M., (2002). On generalized Ricci-recurrent trans-Sasakian manifolds, J. Korean Math. Soc. 39 (6), 953–961.

Klein, F. (1871). Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Mathematische Annalen 4, 573-625. [GMA1, 244-253].

Klein, F. (1926). Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 2 Bde: 1 (1926), 2(1927), Springer, Berlin. Nachdruck: Chelsea, New York, 1967; Springer, Berlin, 1979.

Kobayashi, S. ve Nomizu, K., (1963). Foundations of Differential Geometry.

Kocayigit, H., (2004). Lorentz 3-manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak geometri, Doktora tezi, Ankara üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kon, M., (1976). Invariant submanifolds in Sasakian manifolds, Math. Ann. 219 (3), 277 - 290.

Lagrange, J. L., (1788). Mécanique Analytique, 2, Paris. Euvres 11, 12, Paris.

Lagrange, J. L., (1797). Théorie des Fonctions Analytiques, Paris; 2nd ed. 1813.

Lee, J. M., (1997). Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature, Springer-Verlag, New York, Inc.

Marrero, J. C., (1992). The local structure of trans-Sasakian manifolds, Ann. Mat. Pura Appl. 162(4), 77–86.

Neumann, C. (1865). Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, Leipzig; 2nd ed. 1884.

O'Neill, B., (1983). Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, New York, 21- 91.

Okumura, M., (1964). Certain almost contact hypersurfaces in Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvatures, Tohoku Math. J. (2) 16, 270–284.

Oubina, J. A., (1985). New classes of almost contact metric structures, Publ. Math. Debrecen 32 (3-4), 187–193.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Petrov, A. Z., (1954). Classification of spaces defined by gravitational fields, Uch. Zapiski Kazan Gos. Univ.

Poincare, H., (1895). L'Analysis situs. Journal Ecole Polytechnique 1, 1-121. [(Euvres 6, 193-288)].

Poincare, H., (1899). Complement a L'Analysis situs, Rendiconti del Circolo Matematico Palermo 13, 285-343. [(Euvres 6, 290-337)]

Poincare, H., (1902a). Sur certaines surfaces algebriques, troisieme complement a L' Analysis situs. Bulletin Societe Mathematique de France 30. [CEuvres 6, 373-392].

Poincare, H., (1902b). Sur les cycles des surfaces algebriques, quatrieme complement a a' L'Analysis situs, Journal de Mathematique 8. [CEuvres 6, 397-434].

Poincare, H., (1902c). Du role de L'intuition et de la logique en mathematiques, Compte Rendu du Deuxieme Congres International de Mathematique, Gauthier-Villars, Paris, 115-130. Reprinted as first chapter in: La Valeur de la Science, Flammarion, Paris.

Pokhariyal, G. P., (1982). Relative Significance of curvature tensors, Internet. Journal Math&Math.Sci., 5(1), 133-139.

Pokhariyal, G. P., (1982). Study of a new curvature tensor in a Sasakian manifold, Tensor, N.S, 36, 222-226.

Pokhariyal, G. P., (2001). Curvature Tensors on A- Einstein Sasakian Manifolds, Balkan Journal of Geometry and its applications, 6(1), 45-50.

Pokhariyal, G. P., ve Mishra, R. S., (1970). Curvature tensors and their relatives signifiante, Yokohoma Math. Journal, 18, 105-108.

Ricci, M. G. ve Civita T. L., (1900). Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications Mathematische Annalen 1900, 54(1-2), 125-201.

Riemann, B., (1861). Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Par is iens i propo sitae: "Trouver quel doit etre Vetat calorifique d'un corps solide homogene indefini..." [Gym 391-404].

Riemann, B., (1876). Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Par is iens i propo sitae: "Trouver quel doit etre Vetat calorifique d'un corps solide homogene indefini..." [Gym 391-404].

Scholz, E. (1999). The Concept of Manifold, 1850-1950, Fachbereich Mathematik, Bergische Universitat Gesamthochschule Wuppertal, Gausstrasse 20, 42097 Wuppertal, Germany.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Shaikh, A. A. ve Matsuyama, Y., (2007). SUT Journal of Mathematics, 45(1), 25-41.
- Sharma, R., (1990). Second order parallel tensors on contact manifolds. Algebras, Groups and Geometries, 7:145-152.
- Shukla, S. S. ve Singh, D. D., (2010). On (ϵ) -trans-Sasakian manifolds, Int. J. Math. Anal. (Ruse) 4 (49-52), 2401–2414.
- Takahashi, T., (1977). Sasakian ϕ -symmetric spaces, Tohoku Math. J. 29(1), 91-113.
- Turan, M., De, U. C., ve Yıldız, A., (2012). Ricci solitons and gradient Ricci solitons in three-dimensional trans-Sasakian manifolds, Published by Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia.
- Uday, C.D. ve Krishnendu, D., (2012). Commun. Korean Math. Soc. 27(4), 795–808 <http://dx.doi.org/10.4134/CKMS.2012.27.4.795>
- Veblen, O. ve Whitehead, J. H. C., (1931). A Set of Axioms for Differential Geometry, Proceedings of the National Academy of Sciences, 17(10), 551-561.
- Veblen, O. ve Whitehead, J. H. C., (1932). Foundations of Differential Geometry, Cambridge Tracts in Mathematical Physics n.29, Cambridge University Press, London.
- Von Dyck, W. (1888), Beitrage zur Analysis Situs I, Mathematische Annalen 32, 457- 512.
- Von Dyck, W. (1890), Beitrage zur Analysis Situs II, Mathematische Annalen 37, 273-316.
- Von Helmholtz, H. (1868). Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Gottinger Nachrichten 1868. Wissenschaftliche Abhandlungen 2, Leipzig, 618-639.
- Wald, R. M., (1984). General Relativity, The University of Chicago Press.
- Weinstein, G., (2012). Einstein the Stubborn: Correspondence between Einstein and Levi-Civita
- Weyl, H. (1955). Die Idee der Riemannschen Fläche, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913 (English translation: The Concept of a Riemann Surface, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts).
- Weyl, H., (1918). Raum, Zeit, Materie, Springer, Berlin.
- Whitney, H., (1936). Differentiable manifolds, Annals of Mathematics, 37(3), 645-680.
- Whitney, H., (1936). The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds, Annals of Mathematics, 37(4), 865-878.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yamata, M., (1990). On a η –Einstein Sasakian manifold satisfying the certain conditions, Tensor, N.S. 49, 305-309.

Yano, K. ve Kon, M., (1983). Structres on Manifolds, Series in pure Mathematics, 3, Singapure.

Yano, K., (1970). Integral formulas in Riemannian Geometry, Marcel Dekker.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,adı : Harun DEMİR
Doğum tarihi ve yeri : 05.02.1976 Adıyaman
e-mail : demirharun46@gmail.com

Eğitim

<u>Derece</u>	<u>Eğitim Birimi</u>	<u>Mezuniyet Tarihi</u>
Doktora	:	
Yüksek lisans	: Bahçeşehir Üniversitesi SBE Küresel Siyaset ve Uluslararası İlişkiler	2018
Lisans	: İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	1999
Lise	: Afşin Lisesi	1993

İş Deneyimi

<u>Yıl</u>	<u>Yer</u>	<u>Görev</u>
2016-...	ANKARA	Gençlik ve Spor Bakanlığı-Genel Sekreter
2013-2016	ANKARA	Bahçeşehir Uğur Eğitim Kurumları - Eğitim Koordinatörü-Okul Müdürü- Bölge Müdürü
2005-2013	ANKARA	Final Eğitim Kurumları- Matematik Öğretmeni
2003-2005	MALATYA	Uğur Dershaneleri- Matematik Öğretmeni
2001-2003	MUĞLA	MEB- Matematik Öğretmeni
1999-2001	MALATYA	Hamle Dershaneleri -Matematik Öğretmeni
Yabancı Dil	İngilizce,Arapça	
Yayınlar	9,10,11. Sınıflar Matematik - Geometri Konu Anlatımı ve Soru Bankası kitapları- 12 adet- Final yayınları	