

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINSAKLIK YAPILARI VE YAKLAŞMA UZAYLARININ
BİR GENİŞLEMESİ: CAP KATEGORİSİ

Esra ALKAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Esra ALKAYA tarafından hazırlanan " **Yakınsaklık Yapıları ve Yaklaşma Uzaylarının Bir Genişlemesi: Cap Kategorisi** " adlı tez çalışması 24/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Çetin VURAL
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24/12/2018



Esra ALKAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKINSAKLIK YAPILARI VE YAKLAŞMA UZAYLARININ BİR GENİŞLEMESİ: CAP KATEGORİSİ

Esra ALKAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar iki alt başlıkta verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yakınsaklık yapıları ve yakınsama uzaylarına yer verilmiştir. Nesneleri sonlu derinlikli yakınsama uzayları, morfizmleri bu uzaylar arasında tanımlı yakınsama dönüşümleri olan kategori Conv ile gösterilir. Conv kategorisinin temel özellikleri verilmiştir ve Top kategorisi ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, yaklaşma uzaylarını karakterize eden temel yapılar ve bu uzaylar arasında tanımlı büzülme dönüşümleri ifade edilerek Ap kategorisinin temel özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde, nesneleri yakınsama-yaklaşma uzayları, morfizmleri bu uzaylar arasında tanımlı büzülme dönüşümleri olan Cap kategorisi ifade edilerek temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Cap kategorisinin Conv ve Ap kategorileri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son bölümde ise tez ile ilgili genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Aralık 2018, 81 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık yapıları, yakınsama uzayları, yaklaşma uzayları, uzaklık fonksiyonu, limit operatörü, yakınsama-yaklaşma uzayları, kartezyen kapalı kategori

ABSTRACT

Master Thesis

CONVERGENCE STRUCTURES AND AN EXTENSION OF APPROACH SPACES: CATEGORY CAP

Esra ALKAYA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER

This thesis consists of five chapters. The first chapter is designated as the introduction. In the second chapter, some basic terms and concepts which shall be used throughout this study are provided under two sub-headings.

The third chapter addresses convergence structures and convergence spaces. The category whose objects are finitely deep convergence spaces, whose morphisms are convergence morphisms defined between these spaces is denoted by Conv . The main features of the category Conv are specified and its relations with the category Top are examined.

In the fourth chapter, the main features of the category Ap are explained by specifying the essential structures characterizing approach spaces and the contractions defined between these spaces. In the fifth chapter, the category Cap , the objects of which are convergence-approach spaces and the morphisms of which are the contractions defined between such spaces, are explained and their main features are specified. In addition, the relations between the category Cap and the categories Conv and Ap are examined.

The last chapter serves as a general assessment of the thesis.

December 2018, 81 pages

Key Words: Convergence structures, convergence spaces, approach spaces, distance, limit operator, convergence-approach spaces, cartesian closed category

TEŞEKKÜR

Benden bu çalışma boyunca değerli zamanını ve hoşgörüsünü esirgemeyen, her konuda desteğini ve güvenini hissettiren, gerçek doğruyu öğreten danışman hocam Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER'e, eğitim hayatım boyunca arkamda olan anne ve babama en içten saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Esra ALKAYA
Ankara, Aralık 2018



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Topolojik Uzaylar, Metrik Uzaylar ve Süzgeç Teoriye İlişkin Bazı Temel Kavramlar	4
2.2 Kategori Teoriye İlişkin Bazı Temel Kavramlar	10
3. YAKINSAMA UZAYLARI	16
3.1 Yakınsaklık Yapıları	16
3.2 Yakınsama Uzayları ve Temel Özellikleri	25
3.3 Conv Kategorisi ve Temel Özellikleri.....	39
4. YAKLAŞMA UZAYLARI	49
5. YAKINSAMA-YAKLAŞMA UZAYLARI	61
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	78
KAYNAKLAR.....	79
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{P}$	$[0, \infty]$
$\mathbf{F}(X)$	X kümesi üzerinde tanımlı tüm süzgeçlerin ailesi
$\mathbf{U}(X)$	X kümesi üzerinde tanımlı tüm ultrasüzgeçlerin ailesi
$\mathfrak{F} \longrightarrow x$	$\mathfrak{F}$ süzgeci x noktasına yakınsar
$\mathbf{F}(\mathfrak{F})$	$\mathfrak{F}$ süzgecinden daha ince olan süzgeçlerin ailesi
$\mathbf{U}(\mathfrak{F})$	$\mathfrak{F}$ süzgecinden daha ince olan ultrasüzgeçlerin ailesi
$\mathcal{N}_\tau(x)$	x noktasının τ topolojisine göre komşuluklar süzgeci
$cl_\tau(A)$	A kümesinin τ topolojisine göre kapamışı
$\mathcal{V}_\xi(x)$	x noktasının ξ bağıntısına göre yöresel süzgeci
$B_d(x, \varepsilon)$	d metriğine göre x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
2^X	X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi
δ	Uzaklık fonksiyonu
λ	Limit operatörü (veya Cap-limit)
$\lim_\xi \mathfrak{F}$	$\mathfrak{F}$ süzgecinin ξ bağıntısına göre limit noktalarının kümesi
Set	Nesneleri kümeler, morfizmleri fonksiyonlar olan kategori
Top	Nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan kategori
$X^{<\omega}$	X kümesinin sonlu elemanlı alt kümelerinin ailesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^\omega$	Reel terimli dizilerin kümesi
p	Noktasal yakınsaklık yapısı (Örnek 3.12)
v	Standart yakınsaklık yapısı (Örnek 3.2)
$C(X, Y)$	X ve Y topolojik uzayları arasında tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
$ \mathcal{D} $	$\mathcal{D}$ kategorisinin nesnelerinin sınıfı
$Mor_{\mathcal{D}}(X, Y)$	$\mathcal{D}$ kategorisinin X ve Y nesneleri arasında tanımlı morfizmlerinin kümesi
$C(\xi, \sigma)$	$(X, \xi), (Y, \sigma)$ yakınsama uzayları arasında tanımlı morfizmlerin kümesi
$\mathbf{c}$	$C(v, v)$ üzerinde tanımlı sürekli yakınsaklık yapısı (Örnek 3.16)
$[\xi, \sigma]$	$C(\xi, \sigma)$ üzerinde tanımlı sürekli yakınsaklık yapısı

1. GİRİŞ

Genel topoloji, analiz alanında bilinen yakınsaklık ve süreklilik kavramlarının daha geniş bir çerçeve içerisinde incelenmesi isteğinden doğmuştur. İlk adım, Frechet tarafından 1906 yılında ifade edilen metrik uzay kavramıdır. Metrik uzaylar; analizin yakınsaklık ve süreklilik gibi temel kavramları üzerine çalışılırken oldukça kullanışlı olmasına rağmen, örneğin fonksiyon uzaylarında noktasal yakınsaklığı ifade etmek için yeterli olmamıştır. Bu sorun, metrik uzayları içeren daha geniş bir sınıf olan topolojik uzayların, Hausdorff ve Kuratowski tarafından tanımlanması ile kısmen ortadan kaldırılmıştır. Tychonoff tarafından tanımlanan çarpım topoloji ise, noktasal yakınsaklığı karakterize ederek sorunu çözmüştür. Fonksiyon uzaylarında yakınsaklığa ilişkin çalışmalar geliştirilirken, topolojik olarak karakterize edilemeyen yakınsaklık kavramlarının varlığı fark edilmiştir. Örneğin, 1921 de Hahn tarafından tanımlanan sürekli yakınsaklık kavramı topolojik olarak karakterize edilememektedir. X ve Y iki topolojik uzay olsun, ve

$$\begin{aligned} e : X \times C(X, Y) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. $\mathfrak{F}$, $C(X, Y)$ üzerinde bir süzgeç ve $f \in C(X, Y)$ olduğunda, herhangi bir $x \in X$ ve X üzerinde x noktasına yakınsak herhangi bir $\mathcal{G}$ süzgeci için, $e(\mathcal{G} \times \mathfrak{F}) = \{e(G \times F) \mid G \in \mathcal{G}, F \in \mathfrak{F}\}$ ailesinin ürettiği süzgeç Y içinde $f(x)$ noktasına yakınsıyor ise, $\mathfrak{F}$ süzgeci f fonksiyonuna **sürekli yakınsaktır** denir (Hahn 1921). Herhangi bir X topolojik uzayı için, $C(X, Y)$ kümesi üzerinde, sürekli yakınsaklığı karakterize eden bir topolojinin mevcut olmadığı gösterilmiştir (Arens, Dugundji 1951). Sonsuz boyutlu analizde, sürekli yakınsaklık kavramı, topolojik uzaylar çerçevesinde ifade edilememektedir. 1951 de, Arens ve Dugundji, özel olarak, X topolojik uzayının lokal kompakt bir Hausdorff uzayı olması durumunda, $C(X, Y)$ kümesi üzerinde, sürekli yakınsaklığı karakterize eden topolojinin kompakt açık topoloji olduğunu göstermiştir. Sürekli yakınsaklık kavramının yanı sıra, topolojik olarak karakterize edilemeyen başka yakınsaklık yapıları da mevcuttur. Örneğin, $[0, 1]$ kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir reel değerli fonksiyonların uzayı

üzerinde tanımlı hemen hemen her yerde yakınsaklığı üretecek bir topoloji mevcut değildir. Bu nedenlerle yakınsaklık, topolojiden bağımsız olarak ele alınmaya başlanmıştır.

Frechet ve Urysohn, topolojik uzaylarda, dizilerin yakınsaklığına ilişkin pek çok çalışma yapmıştır. Ancak topolojik uzaylarda yakınsaklık kavramı üzerine yapılan çalışmalarda Cartan tarafından tanımlanan süzgeçler önemli rol oynar. Çünkü, bir topolojik uzayda dizilerin ve ağların yakınsaklığı süzgeçler ile karakterize edilebilmektedir. 1950'li yılların başlarında, Kowalsky ve Fischer, **Yakınsaklık Yapısı (Convergence Structure)** kavramını ortaya koymuşlardır. Yakınsaklık teorisi; yakınsaklık yapıları ile donatılmış kümeler üzerindeki matematiksel özellikleri, topolojik uzaylarda olduğu üzere açık ve kapalı kümeleri kullanmak yerine, süzgeçlere ilişkin yakınsaklık kavramını kullanarak inceler.

1948 yılında Choquet, bir süzgecin yakınsaklığının aksiyomlar halinde ifade edildiği pseudo-topolojik ve pretopolojik yapılara ilişkin teorisini sunmuştur. 1954 yılında Kowalsky, bir süzgecin yakınsaklığını, Choquet'nin aksiyomlarından daha az sınırlayıcı aksiyomlar ile ifade ederek teorinin gelişimine katkı sağlamıştır. 1965 yılında Cook ve Fischer, Hahn tarafından tanımlanan sürekli yakınsaklık kavramının **topolojik olmayan bir yakınsaklık yapısına** karşılık geldiğini göstermiştir. Dolayısıyla yakınsaklık teorisi, bir topoloji tarafından üretilmeyen yakınsaklık yapılarını inceleyebilme yeterliliğine ek olarak, topolojik uzaylar üzerinde de önemli sonuçlar vermektedir. 2016 da Dolecki ve Mynard yakınsaklık teorisine ilişkin kavramları “Convergence Foundations of Topology” adlı kitapta derlemiştir.

Nesneleri sonlu derinlikli yakınsama uzayları, morfizmleri sonlu derinlikli yakınsama uzayları arasında tanımlı yakınsama dönüşümleri olan **Conv kategorisi, Top kategorisinin bir süperkategorisidir**. Kategori teorisi; bir $\mathcal{D}$ kategorisinin, nesneleri üzerinde herhangi bir koşul olmaksızın, nesneleri arasında tanımlı morfizmler kümesi üzerinde, $X, Y \in |\mathcal{D}|$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} e : X \times Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu morfizm kılacak biçimde en kaba yapıya sahip olan kategorileri, **kartezyen kapalı** kategoriler adı altında sınıflandırmıştır. **Top kategorisi kartezyen kapalı değildir**, ancak **Conv kategorisi kartezyen kapalıdır** (Preuss 1987). Kartezyen kapalılık, homotopi teori, cebirsel topoloji ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda oldukça kullanışlı olduğundan, bu alanlarda yakınsaklık üzerine yapılan çalışmalar için Conv kategorisi, Top kategorisine kıyasla daha uygundur. Bir topolojik kategorinin, kartezyen kapalı olmamasının birçok uygulamada dezavantajı olduğu görülmüştür. Steenrod, topolojik cebir ve homotopi teoride Top kategorisi yerine, Top kategorisinin kartezyen kapalı bir altkategorisi olan kompakt üretilmiş Hausdorff uzaylarının oluşturduğu Haus kategorisi ile çalışılmasını önermiştir (Steenrod 1967). Dubuc ve Porta, topolojik cebir alanında, kartezyen kapalı bir kategori ile çalışmanın önem ve avantajlarını ifade etmiştir (Dubuc ve Porta 1971)

Yakınsama uzayları ile ilişkili bir kavram olan “Yaklaşma Uzayları (Approach Spaces)”, ilk olarak 1987 yılında Lowen tarafından ortaya konmuştur. Bu uzayların tanımlanmasında ana fikir, bir nokta ve bir küme arasındaki uzaklık kavramıdır. Lowen, bu teorisinde, uzaklık fonksiyonu adını verdiği ve belli özellikleri sağlayan bir fonksiyon yardımıyla, metrik yapının bulunmadığı herhangi bir topolojik uzayda da bir noktanın bir kümeye olan uzaklığının ölçülebileceğini ifade etmiştir. Yaklaşma uzayları, uzaklık fonksiyonu kavramının yanı sıra, bu kavrama matematiksel olarak eş ve yakınsaklık yapıları ile ilişkili olan, limit operatörü kavramı ile de karakterize edilebilmektedir. Nesneleri yaklaşma uzayları, morfizmleri yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri olan kategori **Ap** ile gösterilir. **Ap** kategorisi bir topolojik kategoridir. **Top** kategorisinin bir süperkategorisi olup kartezyen kapalı değildir (Lowen 1987). 1988 yılında Lowen ve Colebunders limit operatörlerini zayıflatarak elde ettikleri yeni yapılarla donattıkları kümeleri nesne kabul eden ve morfizmleri bu nesneler arasında tanımlı büzülme dönüşümleri olan **Cap** kategorisini tanımlamıştır. **Cap** kategorisi **Conv** ve **Ap** kategorilerinin bir süperkategorisi olup kartezyen kapalıdır.

Bu tez çalışmasında; **Conv** kategorisinin nesnelerinin ve morfizmlerinin bazı özellikleri; ayrıca **Conv** kategorisinin **Ap** ve **Cap** kategorileri ile ilişkileri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm iki kısma ayrılmıştır. Birinci bölümde; topolojik uzaylar, metrik uzaylar ve süzgeç teoriye ilişkin bazı temel kavramlar, ikinci bölümde; kategori teoriye ilişkin bazı temel kavramlar ifade edilecektir.

2.1 Topolojik Uzaylar, Metrik Uzaylar ve Süzgeç Teoriye İlişkin Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer, X kümesinin iki elemanlı her alt kümesi, X içinde infimum ve supremum değerlerine sahip ise, $(X, \leq)$ ikilisine **latis** denir. X kümesinin her alt kümesi, X içinde infimum ve supremum değerlerine sahip ise, $(X, \leq)$ ikilisine **tam latıs** adı verilir.

Eğer, X kümesinin iki elemanlı her alt kümesi, X içinde yalnızca infimum(supremum) değerine sahip ise, $(X, \leq)$ ikilisine **inf-yarı latıs(sup-yarı latıs)** adı verilir. Özel olarak, X kümesinin her alt kümesi, X içinde yalnızca infimum(supremum) değerine sahip ise, $(X, \leq)$ inf-yarı latisine(sup-yarı latisine) **infimuma(supremuma) göre kapalıdır** denir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.2 X bir küme ve $\mathfrak{F} \subset 2^X$ olsun. $\mathfrak{F}$ ailesi

F1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

F2) $F \subset G$ ve $F \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$

F3) $F, G \in \mathfrak{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathfrak{F}$

özelliklerini sağlıyor ise $\mathfrak{F}$ ailesine X kümesi üzerinde bir **süzgeç** adı verilir. X kümesi üzerinde tanımlı süzgeçlerin ailesi $\mathbf{F}(X)$ ile gösterilecektir. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere;

$$\mathfrak{F} \leq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathfrak{F} \subset \mathcal{G}$$

biçiminde tanımlanan “ $\leq$ ” bağıntısı, $\mathbf{F}(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Eğer; $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ise, $\mathcal{G}$ süzgeci $\mathfrak{F}$ süzgecinden **daha incedir** ya da $\mathfrak{F}$ süzgeci $\mathcal{G}$ süzgecin-

den **daha kabadır** denir. Ayrıca, $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere;

$$\mathfrak{F} \subset \mathcal{G} \text{ ve } \exists G \in \mathcal{G} : G \notin \mathfrak{F}$$

oluyor ise, $\mathfrak{F} < \mathcal{G}$ yazılır ve $\mathcal{G}$ süzgeci $\mathfrak{F}$ süzgecinden **kesin incedir** ya da $\mathfrak{F}$ süzgeci $\mathcal{G}$ süzgecinden **kesin kabadır** denir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.3 X bir küme ve $\mathcal{B} \subset 2^X$ olsun. $\mathcal{B}$ ailesi,

i) $\emptyset \notin \mathcal{B}$

ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} : \exists C \in \mathcal{B} \ni C \subset B_1 \cap B_2$

özelliklerini sağlıyor ise, $\mathcal{B}$ ailesine X kümesi üzerinde bir **süzgeç tabanı** adı verilir.

$\mathcal{B}$ ailesinin X kümesi üzerinde ürettiği süzgeç $\mathcal{B}^\uparrow$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{B}^\uparrow := \{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}$$

biçiminde tanımlanır (Bourbaki 1966).

Tanım 2.4 X bir küme ve $\mathcal{A} \subset 2^X$ ise,

$$\mathcal{A}^\uparrow := \{B \subset X \mid \exists A \in \mathcal{A} : A \subset B\}$$

biçiminde tanımlanır ve bu aileye $\mathcal{A}$ ailesinin yığını adı verilir (Mynard 2016).

$\mathcal{A}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise, Tanım 2.3 gereğince, $\mathcal{A}^\uparrow$ ailesi, X kümesi üzerinde bir süzgeç olacaktır. Özel olarak, $\mathcal{A}$ ailesi yerine $A \subset X$ alınırsa, $A^\uparrow := \{B \subset X \mid A \subset B\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir süzgeçtir. Benzer şekilde, bir $x \in X$ noktasının X kümesi üzerinde ürettiği süzgeç $\dot{x}$ ile gösterilir ve

$$\dot{x} := \{A \subset X \mid x \in A\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 X bir küme olsun ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ ile, terimleri X kümesine ait olan bir dizi gösterilsin. Bu durumda; $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ dizisinin X kümesi üzerinde ürettiği süzgeç $(x_n)^\uparrow$ ile gösterilir ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $A_n := \{x_k \mid n \leq k \in \mathbb{Z}^+\}$ olmak üzere;

$$(x_n)^\uparrow := \{B \subset X \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ : A_n \subset B\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan süzgeçlere **dizisel süzgeç** adı verilir (Mynard 2016).

X kümesi üzerinde tanımlı tüm dizisel süzgeçlerin kümesi $\mathbf{E}(X)$ ile gösterilir,

$$\mathbf{E}(X) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \mid (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \in X^\omega \right\}$$

dir.

Tanım 2.6 X bir küme, $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi olsun ve $\mathcal{D} = (\mathfrak{F}_j)_{j \in J}$ ile, X kümesi üzerinde tanımlı süzgeçlerin bir ailesi gösterilsin. Bu durumda; $\mathcal{D}$ ailesinin öğelerinin infimumu $\bigwedge_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ ile gösterilir. $\bigwedge_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, X kümesi üzerinde bir süzgeçtir ve

$$\bigwedge_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

dir (Bourbaki 1966).

$(\mathbf{F}(X), \leq)$ bir inf-yarı latıs olup infimuma göre kapalıdır. Ancak, $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $\mathfrak{F}$ ve $\mathcal{G}$ süzgeçlerini içeren en dar aile $\mathfrak{F} \cup \mathcal{G}$ olup bu aile bir süzgeç olmak zorunda değildir.

Tanım 2.7 X bir küme ve $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Bu durumda;

$$\forall F \in \mathfrak{F}, \forall G \in \mathcal{G} : F \cap G \neq \emptyset$$

oluyor ise $\mathfrak{F}$ ve $\mathcal{G}$ süzgeçleri iç içedir denir ve bu durum $\mathfrak{F} \# \mathcal{G}$ biçiminde gösterilir (Mynard 2016).

Önerme 2.1 X bir küme ve $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $\mathfrak{F}$ ve $\mathcal{G}$ süzgeçlerinin supremumunun mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{F} \# \mathcal{G}$ olmasıdır. $\mathfrak{F} \# \mathcal{G}$ olması durumunda;

$$\mathfrak{F} \vee \mathcal{G} = \{F \cap G \mid F \in \mathfrak{F}, G \in \mathcal{G}\}$$

dir (Bourbaki 1966).

Önerme 2.2 X bir küme, $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi ve $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J} \subset \mathbf{F}(X)$ olsun. Bu durumda;

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j \in I} F_j \mid I \subset J^{<\omega}, j \in I, F_j \in \mathfrak{F}_j \right\}$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{B}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise, $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J}$ ailesinin supremumu mevcut olup $\bigvee_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \mathcal{B}^\uparrow$ dır (Bourbaki 1966).

Tanım 2.8 X ve Y iki küme, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; $\mathfrak{F}$ süzgecinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü $f(\mathfrak{F})$ ile gösterilir ve

$$f(\mathfrak{F}) := \{f(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

biçiminde tanımlanır (Mynard 2016).

$f(\mathfrak{F})$ ailesi Y kümesi üzerinde bir süzgeç olmak zorunda değildir ancak bir süzgeç tabanıdır. $f(\mathfrak{F})$ ailesinin ürettiği süzgeç $f[\mathfrak{F}]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.9 X bir küme ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. $\mathfrak{F}$ süzgecinin keseni $\text{sec } \mathfrak{F}$ ile gösterilir ve

$$\text{sec } \mathfrak{F} := \{A \subseteq X \mid \forall F \in \mathfrak{F} : A \cap F \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlanır (Mynard 2016).

$\mathfrak{F} \subset \text{sec } \mathfrak{F}$ olup $\text{sec } \mathfrak{F}$ ailesi süzgeç olmak zorunda değildir.

Tanım 2.10 X bir küme, $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \sigma : J &\longrightarrow \mathbf{F}(X) \\ j &\longrightarrow \sigma(j) \end{aligned}$$

bir fonksiyon olmak üzere; σ fonksiyonunun $\mathfrak{F}$ süzgecine göre **köşegen süzgeci**,

$$\sum \sigma(\mathfrak{F}) := \bigvee_{\mathcal{A} \in \sigma(\mathfrak{F})} \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}} \mathcal{G} = \bigvee_{F \in \mathfrak{F}} \bigcap_{j \in F} \sigma(j)$$

biçiminde tanımlanır (Kowalsky 1954).

Yukarıda tanımlanan σ fonksiyonu, her bir $j \in J$ indisine $\mathbf{F}(X)$ ailesinin bir tek ögesini karşılık getirmektedir. Bu nedenle; $\{\sigma(j)\}_{j \in J}$ ailesi, X kümesi üzerinde tanımlı süzgeçlerin bir seçimi olarak adlandırılır.

Örnek 2.1 (X, τ) bir topolojik uzay olsun ve

$$\begin{aligned}\sigma : X &\longrightarrow \mathbf{F}(X) \\ x &\longrightarrow \sigma(x) := \mathcal{N}_\tau(x)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda; $\{\mathcal{N}_\tau(x)\}_{x \in X}$ ailesi, X kümesi üzerinde tanımlı süzgeçlerin bir seçimidir.

Tanım 2.11 $L \neq \emptyset$ herhangi bir indis kümesi olmak üzere; her $\lambda \in L$ için $J_\lambda \neq \emptyset$ ve $(X_{\lambda_j})_{j \in J_\lambda, \lambda \in L}$ bir kümeler ailesi olsun. Bu durumda; $I = \prod_{\lambda \in L} J_\lambda$ olmak üzere; aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda \in L} \left(\bigcap_{j \in J_\lambda} X_{\lambda_j} \right) &= \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right) \\ \bigcap_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{j \in J_\lambda} X_{\lambda_j} \right) &= \bigcup_{f \in I} \left(\bigcap_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right)\end{aligned}$$

(Bourbaki 1966).

Tanım 2.12 (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda; $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathfrak{F}$ ise, x noktası $\mathfrak{F}$ süzgecinin τ topolojisine göre bir limit noktasıdır denir ve bu durum $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x$ biçiminde gösterilir (Bourbaki 1966).

Önerme 2.3 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; aşağıdaki önermeler denktir.

i) f fonksiyonu süreklidir

ii) $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x$ ise, $f[\mathfrak{F}] \xrightarrow{\tau'} f(x)$ dir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.13 X bir küme ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Eğer, X kümesi üzerinde $\mathfrak{F}$ süzgecin-den kesin ince bir süzgeç bulunamıyor ise $\mathfrak{F}$ süzgecine **ultrasüzgeç** adı verilir (Bourbaki 1966).

X kümesi üzerinde tanımlı tüm ultrasüzgeçlerin ailesi $\mathbf{U}(X)$ ile gösterilecektir. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $\mathfrak{F}$ süzgecinden ince olan tüm süzgeçlerin (ultrasüzgeçlerin) ailesi $\mathbf{F}(\mathfrak{F})(\mathbf{U}(\mathfrak{F}))$ ile, $A \subset X$ olmak üzere $A^\uparrow$ süzgecinden ince tüm süzgeçlerin (ultrasüzgeçlerin) ailesi $\mathbf{F}(A)(\mathbf{U}(A))$ ile gösterilecektir.

Önerme 2.4 (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olsun. $\mathfrak{F}$ süzgecinin x noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{F}$ süzgecinden ince olan tüm ultrasüzgeçlerin x noktasına yakınsak olmasıdır (Bourbaki 1966).

Lemma 2.1 X bir küme, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun ve her $\mathcal{U} \in \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ için en azından bir $S_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ seçilebilsin. Bu durumda; sonlu elemanlı bir $U_s \subseteq \mathbf{U}(\mathfrak{F})$ kümesi, $\bigcup_{\mathcal{U} \in U_s} S_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}$ olacak biçimde mevcuttur (Lowen 1987).

Önerme 2.5 J, L ve X boş kümeden farklı üç küme, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(J)$, $\sigma : J \rightarrow \mathbf{F}(X)$ ve $\gamma : L \rightarrow \mathbf{F}(J)$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda; aşağıdaki eşitlikler mevcuttur;

$$(i) \sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} \bigcap_{j \in F} \sigma(j),$$

$$(ii) \sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{\rho \in \prod_{j \in J} U(\sigma(j))} \sum \rho(\mathfrak{F}),$$

$$(iii) \sum \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{\rho \in \prod_{j \in J} U(\sigma(j))} \bigcap_{\mathcal{U} \in U(\mathfrak{F})} \sum \rho(\mathcal{U}),$$

(iv) Her $j \in J$ için $\sigma(j)$ ve $\mathfrak{F}$ ultrasüzgeç ise, $\sum \sigma(\mathfrak{F})$ de bir ultrasüzgeçtir (Lowen 1997).

Tanım 2.14 X bir küme, I herhangi bir indis kümesi olmak üzere; $\{(Y_\theta, \tau_\theta)\}_{\theta \in I}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun ve $\{f_\theta : X \rightarrow (Y_\theta, \tau_\theta)\}_{\theta \in I}$ fonksiyon ailesi verilsin. Bu durumda;

$$\mathcal{S}_\theta := \{f_\theta^{-1}(U_\theta) \mid U_\theta \in \tau_\theta\}$$

biçiminde tanımlı olmak üzere, $\mathcal{S} = \bigcup_{\theta \in I} \mathcal{S}_\theta$ ailesi, X kümesi üzerinde bir topoloji için alt tabandır. X kümesi üzerinde $\mathcal{S}$ ailesi tarafından üretilen topolojiye, $\{f_\theta\}_{\theta \in I}$ ailesine karşılık gelen **başlangıç topolojisi** adı verilir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.15 $I \neq \emptyset$ herhangi bir indis kümesi ve $\sum$ belirli tipte matematiksel yapıların bir ailesi olsun. $(Y_i)_{i \in I}$ ile, her $i \in I$ için $\sum$ ailesine ait bir θ_i yapısı ile donatılmış kümelerin ailesi, ve $\mathcal{S}$ ile $\sum$ ailesine eşlik eden fonksiyon ailesi gösterilsin. X bir küme olmak üzere; $\{f_i \mid X \longrightarrow (Y_i, \theta_i)\}_{i \in I}$ fonksiyon ailesi verilsin. Bu durumda; her X' kümesi ve X' üzerinde tanımlı her θ' yapısı için, X üzerinde, $\sum$ ailesine ait bir θ yapısı;

i) $g : X' \longrightarrow X$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ ailesine aittir

ii) Her $i \in I$ için $f_i \circ g : X' \longrightarrow Y_i$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ ailesine aittir

önermeleri denk olacak biçimde tanımlanabiliyor ise, θ yapısına, $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesine karşılık gelen **başlangıç yapısı** adı verilir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.16 X bir küme olmak üzere; $\star : X \times X \longrightarrow X$ fonksiyonu; her $x, y, z \in X$ için $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ özelliğini sağlıyor ise $(X, \star)$ ikilisine **yarıgrup** adı verilir (Halıcıoğlu 2014).

2.2 Kategori Teoriye İlişkin Bazı Temel Kavramlar

Bir küme üzerinde tanımlanabilen matematiksel yapıların sınıflandırılması, ortak özelliklerinin ve aralarındaki ilişkilerin irdelenmesi kategori teorisinin araçları ile mümkündür.

Tanım 2.17 Bir $\mathcal{D}$ kategorisi aşağıda verilen parçalardan oluşur:

- i) Elemanları $\mathcal{D}$ -nesnelerden oluşan ve $|\mathcal{D}|$ biçiminde ifade edilen bir sınıf,
- ii) $\mathcal{D}$ -nesnelerin herhangi bir (X, Y) çifti için X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm morfizmleri içeren ve $Mor_{\mathcal{D}}(X, Y)$ biçiminde gösterilen morfizmler kümesi,
- iii) Her $X \in |\mathcal{D}|$ için $I_X : X \longrightarrow X$ biçiminde tanımlı birim dönüşümler,
- iv) $\mathcal{D}$ -nesnelerden oluşan her (X, Y, Z) üçlüsü için,

$$\begin{aligned} \circ : Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) \times Mor_{\mathcal{D}}(Y, Z) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(X, Z) \\ (f, g) &\longrightarrow f \circ g \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı ve

$$\forall X, Y, T \in |\mathcal{D}|, \forall f \in Mor_{\mathcal{D}}(X, Y), \forall g \in Mor_{\mathcal{D}}(T, X) : f \circ I_X = f \text{ ve } I_X \circ g = g$$

özellikliğini sağlayan bileşke işlemi. (Adamek 1990).

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin tüm morfizmleri $Mor(\mathcal{C})$ ile gösterilecektir. Nesneleri kümeler, morfizmleri kümeler arasında tanımlı fonksiyonlar olan kategori **Set** ile, nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasında tanımlı sürekli fonksiyonlar olan kategori **Top** ile gösterilir.

Tanım 2.18 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{C}$ iki kategori olsun. Bu durumda; aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin bir **alt kategorisi**dir denir.

- i) $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$
- ii) $\forall A, B \in |\mathcal{A}| : Mor_{\mathcal{A}}(A, B) \subset Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$
- iii) $\mathcal{A}$ kategorisi üzerinde tanımlı bileşke işlemi, $\mathcal{C}$ kategorisi üzerinde tanımlı bileşke işleminin $\mathcal{A}$ ya kısıtlamasıdır.
- iv) Her $A \in |\mathcal{A}|$ için I_A birim morfizmi, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{C}$ kategorilerinde aynı morfizmdir (Adamek 1990).

Top kategorisi **Set** kategorisinin bir alt kategorisi

Tanım 2.19 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü,

$$\forall A \in |\mathcal{C}| : F(A) \in |\mathcal{D}|,$$

$$\forall A, B \in |\mathcal{C}|, \forall f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B) : F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

olacak biçimde tanımlı bir dönüşüm olsun. F dönüşümü,

- i) $\forall A \in |\mathcal{C}| : F(I_A) = I_{F(A)}$
- ii) $\forall f, g \in Mor(\mathcal{C}) : F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

özelliklerini sağlıyor ise, F dönüşümüne $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorisine tanımlı bir **funktor** adı verilir (Adamek 1990).

Tanım 2.20 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tanımlı bir funktor olsun. Bu durumda;

- i) F , morfizmler üzerinde birebir ise F funktoruna **gömülme (embedding) funktor** denir.

ii) $\forall A, B \in |\mathcal{C}|$ için $F : Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ dönüşümü birebir ise F fonktoru **düzenli (faithful) fonktor** denir.

iii) $\forall A, B \in |\mathcal{C}|$ için $F : Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ dönüşümü örten ise F fonktoru **dolu (full) fonktor** denir (Adamek 1990).

$\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorisine tanımlı en azından bir dolu fonktor bulunabiliyor ise, $\mathcal{C}$ kategorisine $\mathcal{D}$ kategorisinin **dolu alt kategorisi** adı verilir. **Top** kategorisi **Set** kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

Tanım 2.21 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori, $\mathcal{C}$ kategorisi $\mathcal{D}$ kategorisinin bir alt kategorisi olsun. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonktoru, her $C \in |\mathcal{C}|$ için $F(C) := C$ ve her $f \in Mor(\mathcal{C})$ için $F(f) := f$ biçiminde tanımlı ise, F fonktoru **içerme fonktoru** denir (Adamek 1990).

Tanım 2.22 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tanımlı bir fonktor olsun. Bu durumda; $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ biçiminde tanımlı, $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ ve $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$ olacak biçimde bir G fonktoru var ise, F fonktoru **izomorfizm** adı verilir. Ayrıca, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri **izomorf kategorilerdir** denir (Adamek 1990).

Tanım 2.23 Bir $\mathcal{D}$ kategorisinin nesneleri; kümeler ve bu kümeler üzerinde tanımlı belirli tipte matematiksel yapılardan oluşan ikililer ise, yani; $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ biçiminde tanımlı en azından bir düzenli fonktor bulunabiliyor ise $\mathcal{D}$ kategorisine **belirli (concrete) kategori**, U dönüşümüne ise **unutkan (forgetful) fonktor** adı verilir (Adamek 1990).

Set ve **Top** kategorileri belirli kategoridir.

Kategori teorisinin kavramları kullanılarak, Tanım 2.15 aşağıdaki şekilde güncellenmiştir.

Tanım 2.24 $\mathcal{D}$ bir belirli kategori, X bir küme, I herhangi bir indis kümesi olsun. Bu durumda; $\mathcal{D}$ -nesnelerin bir $(X_i, \xi_i)_{i \in I}$ ailesi ve $\{f_i : X \rightarrow (X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ fonksiyon ailesi için, X üzerinde bir tek ξ $\mathcal{D}$ -yapısı,

i) $\forall (Y, \sigma) \in |\mathcal{D}|$ için $g : (Y, \sigma) \longrightarrow (X, \xi)$ $\mathcal{D}$ -morfizmdir

ii) $\forall i \in I$ için $f_i \circ g : (Y, \sigma) \longrightarrow (X_i, \xi_i)$ dönüşümü $\mathcal{D}$ -morfizmdir

önergeleri denk olacak biçimde tanımlanabiliyor ise, ξ $\mathcal{D}$ -yapısına $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesine karşılık gelen **başlangıç yapısı** adı verilir (Preuss 1987).

Tanım 2.25 $\mathcal{D}$ bir belirli kategori olmak üzere; aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise, $\mathcal{D}$ kategorisine **topolojik kategori** adı verilir.

i) $\mathcal{D}$ kategorisinin başlangıç yapıları mevcuttur.

ii) Her X kümesi için, X üzerinde tanımlanabilen $\mathcal{D}$ -yapıların ailesi kısmi sıralı bir kümedir.

iii) Tek elemanlı bir küme üzerinde bir tek $\mathcal{D}$ -yapı tanımlıdır (Preuss 1987).

Top kategorisi topolojik kategoridir. Ayrıca, nesneleri metrik uzaylar, morfizmleri metrik uzaylar arasında tanımlı genişlemeyen dönüşümler olan kategori **Met** ile gösterilir. **Met** kategorisi başlangıç yapılarına sahip olmadığından bir topolojik kategori değildir.

Tanım 2.26 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{C}$ iki kategori, $\mathcal{A}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin bir alt kategorisi ve $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ bir içirme fonktörü olsun. Bu durumda;

i) $\mathcal{C}$ kategorisinin her X nesnesi için, $\mathcal{A}$ kategorisinin bir $X_{\mathcal{A}}$ nesnesi ve bir $r_X : X \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$ morfizmi, $\mathcal{A}$ kategorisinin her Y nesnesi ve her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ için, bir tek

$$f^* : X_{\mathcal{A}} \longrightarrow Y$$

$\mathcal{A}$ -morfizmi, $f^* \circ r_X = f$ olacak biçimde tanımlanabiliyor ise, $\mathcal{A}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **yansımali alt kategorisi** denir. Bu durumda; $X_{\mathcal{A}}$ nesnesine X nesnesinin **$\mathcal{A}$ -yansıması** adı verilir.

ii) $\mathcal{C}$ kategorisinin her X nesnesi için, $\mathcal{A}$ kategorisinin bir $X_{\mathcal{A}}$ nesnesi ve bir $m_X : X_{\mathcal{A}} \longrightarrow X$ morfizmi, $\mathcal{A}$ kategorisinin her Y nesnesi ve her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ için, bir tek

$$f_* : Y \longrightarrow X_{\mathcal{A}}$$

$\mathcal{A}$ -morfizmi, $m_x \circ f_* = f$ olacak biçimde tanımlanabiliyor ise, $\mathcal{A}$ kategorisine $\mathcal{C}$

kategorisinin **ko-yansımali alt kategorisi** denir. Bu durumda; $X_{\mathcal{A}}$ nesnesine X nesnesinin **$\mathcal{A}$ -ko-yansımali** adı verilir (Herrlich 1983).

Met kategorisi **Top** kategorisinin ko-yansımali bir alt kategorisidir.

Tanım 2.27 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{C}$ iki kategori, $\mathcal{A}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi olsun. Bu durumda, “ $\preceq$ ” ile $\mathcal{C}$ -yapıların ailesi üzerinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı gösterilmek üzere;

i) Her $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$ için $\xi_{\mathcal{A}} \preceq \xi$ olacak biçimde en azından bir $\xi_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ -yapısı bulunabiliyor ve her $(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|$, her $f : (X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$ $\mathcal{C}$ -morfizmi için

$$\begin{aligned} f^* : (X, \xi_{\mathcal{A}}) &\longrightarrow (Y, \eta) \\ x &\longrightarrow f^*(x) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir $\mathcal{A}$ -morfizm oluyor ise $\mathcal{A}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **bi-yansımali alt kategorisi** denir.

ii) Her $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$ için $\xi \preceq \xi_{\mathcal{A}}$ olacak biçimde en azından bir $\xi_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ -yapısı bulunabiliyor ve her $(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|$, her $f : (Y, \eta) \longrightarrow (X, \xi)$ $\mathcal{C}$ -morfizmi için

$$\begin{aligned} f_* : (Y, \eta) &\longrightarrow (X, \xi_{\mathcal{A}}) \\ x &\longrightarrow f_*(x) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir $\mathcal{A}$ -morfizm oluyor ise $\mathcal{A}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **bi-ko-yansımali alt kategorisi** denir (Preuss 2002).

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin bi-yansımali her alt kategorisi, yansımali bir alt kategorisidir. Benzer şekilde, bi-ko-yansımali her alt kategorisi, ko-yansımali bir alt kategorisidir.

Tanım 2.28 $\mathcal{C}$ bir topolojik kategori, $\mathcal{A}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi, X bir küme, I herhangi bir indis kümesi ve $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ $\mathcal{A}$ -nesnelerin bir ailesi olsun. Bu durumda; $\{f_i : X \longrightarrow (X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ bir fonksiyon ailesi ve ξ , X kümesi üzerinde tanımlı $\{f_i\}_{i \in I}$ fonksiyon ailesine karşılık gelen başlangıç $\mathcal{C}$ -yapı olmak üzere; (X, ξ) ikilisi bir $\mathcal{A}$ -nesne oluyor ise, $\mathcal{A}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisi içinde **başlangıç yapılarına göre kapalıdır** denir (Preuss 2002).

Önerme 2.6 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{C}$ iki kategori, $\mathcal{A}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi olsun. Bu durumda; $\mathcal{A}$ kategorisinin $\mathcal{C}$ kategorisinin bi-yansımali bir alt kategorisi olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$ kategorisinin $\mathcal{C}$ kategorisi içinde başlangıç yapılarına göre kapalı olmasıdır (Preuss 2002).

Tanım 2.29 $\mathcal{D}$ bir topolojik kategori olsun. Bu durumda; her (X, Y) $\mathcal{D}$ -nesne çifti için $Mor_{\mathcal{D}}(X, Y)$ kümesi üzerine, X ve Y üzerinde tanımlı $\mathcal{D}$ -yapılar yardımıyla bir $[X, Y]$ $\mathcal{D}$ -yapısı; aşağıdaki özellikleri sağlayacak biçimde inşa edilebiliyor ise, $\mathcal{D}$ kategorisi **kartezyen kapalıdır** denir.

CC₁)

$$\begin{aligned} e : X \times Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longrightarrow e(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir $\mathcal{D}$ -morfizmdir.

CC₂) Her $Z \in |\mathcal{D}|$ ve her $f : X \times Z \longrightarrow Y$ $\mathcal{D}$ -morfizmi için

$$\begin{aligned} f^* : Z &\longrightarrow Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) \\ z &\longrightarrow f^*(z) := f(x, z) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı bir $\mathcal{D}$ -morfizmi; $f = e \circ (id_X \times f^*)$ olacak biçimde mevcuttur (Preuss 2002).

3. YAKINSAMA UZAYLARI

Bu bölümde; yakınsaklık yapısı kavramı ve bu kavram yardımıyla tanımlanan yakınsama uzayları ifade edilecek ve bu uzayların temel özellikleri incelenecektir.

3.1 Yakınsaklık Yapıları

X bir küme, $\xi \subseteq \mathbf{F}(X) \times X$ ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Bu durumda; $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ olması durumu,

$$x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F}$$

biçiminde ifade edilir ve x noktası $\mathfrak{F}$ süzgecinin ξ bağıntısına göre limit noktasıdır ya da $\mathfrak{F}$ süzgeci ξ bağıntısına göre x noktasına yakınsaktır denir. $\mathfrak{B} \subset 2^X$ bir süzgeç tabanı ise,

$$\lim_{\xi} \mathfrak{B} := \lim_{\xi} \mathfrak{B}^{\uparrow}$$

biçiminde tanımlanır. Diğer yandan, ξ bağıntısına göre bir x noktasına yakınsayan tüm süzgeçlerin ailesi $\lim_{\xi}^{-1}(x)$ ile gösterilir,

$$\lim_{\xi}^{-1}(x) = \{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) \mid (\mathfrak{F}, x) \in \xi\}$$

dir (Mynard 2016).

Tanım 3.1 X bir küme, $\xi \subseteq \mathbf{F}(X) \times X$ olsun. Bu durumda;

i) $\forall \mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X) \ni \mathfrak{F} \leq \mathcal{G} : \lim_{\xi} \mathfrak{F} \subset \lim_{\xi} \mathcal{G}$

ii) $\forall x \in X : x \in \lim_{\xi}^{\bullet} x$ (merkezi)

özelliklerinden ilkinin sağlayan ξ bağıntısına X kümesi üzerinde bir **önyakınsaklık yapısı**, her ikisini sağlayan ξ bağıntısına X kümesi üzerinde bir **yakınsaklık yapısı** adı verilir. ξ bağıntısı X kümesi üzerinde bir (ön)yakınsaklık yapısı ise (X, ξ) ikilisine **(ön)yakınsama uzayı** adı verilir (Kowalsky 1954, Fischer 1959, Mynard 2016).

Bir ξ (ön)yakınsaklık yapısının, üzerinde tanımlı olduğu X kümesi özel olarak belirtilmek istendiğinde ξ_X gösterimi kullanılacaktır.

Örnek 3.1 X bir küme olmak üzere; X üzerinde,

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \lim_{\emptyset_X} \mathfrak{F} = \emptyset$$

biçiminde tanımlanan $\emptyset_X$ bağıntısı bir önyakınsaklık yapısı olup bu yapıya **boş önyakınsaklık yapısı** adı verilir. $\mathfrak{F} = \dot{x}$ için, $\lim_{\emptyset_X} \dot{x} = \emptyset$ olduğundan $x \notin \lim_{\emptyset_X} \dot{x}$ olup $\emptyset_X$ bağıntısı, X kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı değildir (Dolecki 2009).

Örnek 3.2 $\mathbb{R}$ üzerinde,

$$v := \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid \left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq \mathfrak{F} \right\}$$

biçiminde tanımlanan v bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup bu yapıya $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı **standart yakınsaklık yapısı** adı verilir (Dolecki 2009).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $(\mathfrak{F}, x) \in v$ olsun. Bu durumda;

$$\left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq \mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$$

olup $(\mathcal{G}, x) \in v$ dir. Diğer yandan, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq \dot{x}$$

olduğundan $(\dot{x}, x) \in v$ dir. ■

Örnek 3.3 $\mathbb{R}$ üzerinde, Örnek 3.2 de tanımlanan standart yakınsaklık yapısı ele alınsın.

$$\mathbf{E}(\mathbb{R}) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \mid (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \in \mathbb{R}^\omega \right\}$$

olmak üzere; $\mathbb{R}$ üzerinde,

$$Seqv := \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \in \mathbb{R}^\omega \ni (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \leq \mathfrak{F}, x \in \lim_v (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \right\}$$

biçiminde tanımlanan $Seqv$ bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup bu yapıya **dizisel yakınsaklık yapısı** adı verilir (Dolecki 2009).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $(\mathfrak{F}, x) \in Seqv$ olsun. Bu durumda;

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \in \mathbb{R}^\omega \ni (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \leq \mathfrak{F} \leq \mathcal{G} \text{ ve } x \in \lim_v (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow$$

olduğundan, $(\mathcal{G}, x) \in Seqv$ dir. Diğer yandan, sayılabilir bir kümenin ürettiği süzgeç dizisel olduğundan $\dot{x} \in \mathbf{E}(\mathbb{R})$ dir. O halde, $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow = \dot{x}$ olarak ele alınırsa $v, \mathbb{R}$ üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğundan $x \in \lim_v \dot{x}$ olup $x \in \lim_{Seqv} \dot{x}$ elde edilir.

■

Örnek 3.4 X bir küme olmak üzere, X üzerinde,

$$\iota := \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} = \dot{x} \right\}$$

biçiminde tanımlanan ι bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup bu yapıya **diskre yakınsaklık yapısı** adı verilir (Dolecki 2009).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $(\mathfrak{F}, x) \in \iota$ olsun. Bu durumda; $\mathfrak{F} = \dot{x}$ olup $\dot{x}, X$ kümesi üzerinde bir ultrasüzgeç olduğundan, $\mathcal{G} = \dot{x}$ olmalıdır. Dolayısıyla, $(\mathcal{G}, x) \in \iota$ dir. Ayrıca, ι bağıntısının tanımından, her $x \in X$ için $(\dot{x}, x) \in \iota$ olacağı açıktır. ■

Örnek 3.5 X bir küme olmak üzere, X üzerinde,

$$o := \{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X), x \in X \}$$

biçiminde tanımlanan o bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup bu yapıya **düzensiz yakınsaklık yapısı** adı verilir (Dolecki 2009).

Tanım 3.2 X bir küme ve ξ, X kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı olsun. Bu durumda; $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve herhangi bir $x \in X$ için, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ ve $(\mathcal{G}, x) \in \xi$ olduğunda, $(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}, x) \in \xi$ oluyor ise ξ bağıntısına **sonlu derinlikli** denir. (X, ξ) ikilisine **sonlu derinlikli yakınsama uzayı** adı verilir (Dolecki 2009).

Örnek 3.2, Örnek 3.3, Örnek 3.4 ve Örnek 3.5 de verilen her bir yakınsaklık yapısının sonlu derinlikli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Örnek 3.6 X bir küme, $x_\infty \notin X$ olsun ve $\mathfrak{F}, \mathcal{G}$ ile, X kümesi üzerinde tanımlı, iç içe olmayan iki süzgeç gösterilsin. Bu durumda; $Y = X \cup \{x_\infty\}$ ve $\mathcal{H} \in \mathbf{F}(Y)$ olmak üzere; Y kümesi üzerinde,

$$x \in X \text{ ve } (\mathcal{H}, x) \in \xi \iff \mathcal{H} = \dot{x} \quad (3.1)$$

ve

$$(\mathcal{H}, x_\infty) \in \xi \iff \mathfrak{F} \cap (\dot{x}_\infty) \leq \mathcal{H} \text{ veya } \mathcal{G} \cap (\dot{x}_\infty) \leq \mathcal{H} \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanan ξ bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup sonlu derinlikli değildir (Mynard 2016).

İspat. ξ bağıntısının, Y üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ancak, ξ yakınsaklık yapısı sonlu derinlikli değildir. $\mathfrak{F}$ ve $\mathcal{G}$, X kümesi üzerinde tanımlı, iç içe olmayan iki süzgeç olmak üzere; $\mathcal{H} := \{F \cup \{x_\infty\} \mid F \in \mathfrak{F}\}$ ve $\mathcal{K} := \{G \cup \{x_\infty\} \mid G \in \mathcal{G}\}$ olarak alınırsa, $\mathfrak{F} \wedge (\dot{x}_\infty) \leq \mathcal{H}$ ve $\mathcal{G} \wedge (\dot{x}_\infty) \leq \mathcal{K}$ olacaktır. Bu durumda; (3.2) den, $x_\infty \in \lim_\xi \mathcal{H} \cap \lim_\xi \mathcal{K}$ dir. Ancak, $x_\infty \notin \lim_\xi \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ dir. Gerçekten, $\mathfrak{F}$ ve $\mathcal{G}$, iç içe olmayan iki süzgeç olduğundan, Tanım 2.7 den,

$$\exists F_0 \in \mathfrak{F} \text{ ve } \exists G_0 \in \mathcal{G} \text{ için } F_0 \cap G_0 = \emptyset$$

dir. Bu durumda; $A = F_0 \cup \{x_\infty\} \in \mathfrak{F} \cap (\dot{x}_\infty)$ ve $B = G_0 \cup \{x_\infty\} \in \mathcal{G} \cap (\dot{x}_\infty)$ olarak alınırsa, $A \notin \mathcal{K}$ ve $B \notin \mathcal{H}$ olacaktır. Dolayısıyla, $A \notin \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ ve $B \notin \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ olup $x_\infty \notin \lim_\xi \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ elde edilir. ■

Tanım 3.3 X bir küme olsun. ξ ve σ ile X kümesi üzerinde tanımlı iki (ön)yakınsaklık yapısı gösterilsin. Bu durumda;

$$\xi \succeq \sigma \iff \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \lim_\xi \mathfrak{F} \subseteq \lim_\sigma \mathfrak{F}$$

biçiminde tanımlanan “ $\succeq$ ” bağıntısı, X üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olup $\xi \succeq \sigma$ olması durumunda, ξ yapısı σ yapısından daha incedir (σ yapısı ξ yapısından daha kabadır) denir (Dolecki 2009).

Örnek 3.7 X bir küme ve I bir indis kümesi olmak üzere, $\{\xi_i\}_{i \in I}$ ile, X üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi gösterilsin. Bu durumda;

$$\forall i \in I : o_X \preceq \xi_i \preceq \emptyset_X \quad (3.3)$$

dir. Ayrıca, $\mathbb{R}$ üzerinde, v ve $Seqv$ yakınsaklık yapıları ele alınırsa $v \preceq Seqv$ dir (Mynard 2016).

İspat. (3.4) sıralamasının gerçekleştiği açıktır. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$ ve $x \in \lim_{Seqv} \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; Örnek 3.3 den,

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} \in \mathbb{R}^\omega \ni (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \leq \mathfrak{F} \text{ ve } x \in \lim_v (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow$$

dir. $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow \leq \mathfrak{F}$, $x \in \lim_v (x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}^\uparrow$ ve v , $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğundan, Tanım 3.1 (i) den, $x \in \lim_v \mathfrak{F}$ elde edilir. ■

Önerme 3.1 X bir küme ve $\xi \subseteq \mathbf{F}(X) \times X$ bir önyakınsaklık yapısı olsun. ξ bağıntısının X kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı olması için gerek ve yeter koşul ξ bağıntısının ι diskre yakınsaklık yapısından kaba olmasıdır (Mynard 2016).

İspat. ξ , X kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_\iota \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; Örnek 3.4 de açıklandığı üzere, $\mathfrak{F} = \dot{x}$ dir. ξ bir yakınsaklık yapısı olduğundan, $x \in \lim_\xi \dot{x}$ elde edilir. O halde, (3.3) den, $\xi \preceq \iota$ elde edilir. Diğer yandan, ξ , X kümesi üzerinde bir önyakınsaklık yapısı ve $\xi \preceq \iota$ olsun. Bu durumda; (3.3) den, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lim_\iota \mathfrak{F} \subset \lim_\xi \mathfrak{F}$ dir. $\mathfrak{F} := \dot{x}$ alınırsa, $\lim_\iota \dot{x} \subset \lim_\xi \dot{x}$ olup $x \in \lim_\iota \dot{x}$ olduğundan, $x \in \lim_\xi \dot{x}$ elde edilir. ■

Tanım 3.4 (X, ξ) bir yakınsama uzayı ve $x \in X$ olsun. Bu durumda; x noktasının ξ yakınsaklık yapısına göre **yöresel süzgeci** $\mathcal{V}_\xi(x)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{V}_\xi(x) := \bigwedge_{x \in \lim_\xi \mathfrak{F}} \mathfrak{F} \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır (Dolecki 2009).

Örnek 3.8 a) $\mathbb{R}$ üzerinde, Örnek 3.2 de verilen standart yakınsaklık yapısı v ele alınırsa,

$$\mathcal{V}_v(x) = \left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow$$

olup her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \lim_v \mathcal{V}_v(x)$ dir.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde, Örnek 3.3 de tanımlanan $Seqv$ bağıntısı ele alınsın. Bu durumda; her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\mathcal{V}_{Seqv}(x) = \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}}} \mathcal{E}$$

dir (Mynard 2016).

İspat. (a) da verilen eşitlik kolaylıkla gösterilebilir. (b) de verilen eşitliği gösterelim.

$\mathcal{V}_{Seqv}(x) \leq \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}}} \mathcal{E}$ olduğunu göstermek için, $\mathcal{A} := \{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \mid \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}\}$ olmak üzere;

$\mathcal{A} \subset \{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) \mid x \in \lim_{Seqv} \mathfrak{F}\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ ise,

$\mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}$ dir. Ayrıca, her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \lim_v \mathcal{V}_v(x)$ olduğundan, $x \in \lim_v \mathcal{E}$ olacaktır. O halde, $\mathcal{E} \in \{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) \mid x \in \lim_{Seqv} \mathfrak{F}\}$ dir. Diğer yandan, $A \in \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}}} \mathcal{E}$

olsun. Bu durumda; $\mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}$ olacak biçimdeki her $\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R})$ için $A \in \mathcal{E}$ dir.

$x \in \lim_{Seqv} \mathfrak{F}$ olacak biçimde herhangi bir $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$ alınırsa,

$$\exists \mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \ni \mathcal{E} \leq \mathfrak{F} \text{ ve } x \in \lim_v \mathcal{E}$$

olup $\mathcal{E} \leq \mathfrak{F}$ olduğundan $A \in \mathfrak{F}$ elde edilir. O halde, $\bigcap_{\substack{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}}} \mathcal{E} \leq \mathcal{V}_{Seqv}(x)$ dir. ■

(X, ξ) bir yakınsama uzayı ve $x \in X$ olmak üzere; (3.5) ile ifade edilen $\mathcal{V}_\xi(x)$ süzgeci, ξ yakınsaklık yapısına göre **x noktasına yakınsamak zorunda değildir.**

Örnek 3.9 $\mathbb{R}$ üzerinde $Seqv$ yakınsaklık yapısı ele alınırsa, her $x \in \mathbb{R}$ için $x \notin \lim_{Seqv} \mathcal{V}_{Seqv}(x)$ dir (Mynard 2016).

İspat. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \notin \lim_{Seqv} \mathcal{V}_{Seqv}(x)$ olduğunu göstermek için

$$\mathcal{V}_{Seqv}(x) = \mathcal{V}_v(x)$$

eşitliğine ihtiyacımız vardır. Örnek 3.7 den, $v \preceq Seqv$ olup

$$\lim_{Seqv}^{-1}(x) = \{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) \mid x \in \lim_{Seqv} \mathfrak{F}\} \subset \{\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) \mid x \in \lim_v \mathfrak{F}\} = \lim_v^{-1}(x)$$

olduğundan,

$$\mathcal{V}_v(x) = \bigwedge_{\mathfrak{F} \in \lim_v^{-1}(x)} \mathfrak{F} \subset \bigwedge_{\mathfrak{F} \in \lim_{Seqv}^{-1}(x)} \mathfrak{F} = \mathcal{V}_{Seqv}(x)$$

elde edilir. Diğer yandan, $\bigcap_{\substack{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}}} \mathcal{E} \leq \mathcal{V}_v(x)$ olduğu gösterilirse, Örnek 3.8 b) gereğince

$\mathcal{V}_{Seqv}(x) \leq \mathcal{V}_v(x)$ olacaktır. $U \in \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}}} \mathcal{E}$ olsun ve $U \notin \mathcal{V}_v(x)$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda;

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\not\subset U$$

olacaktır. Böylece,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists y_n \in \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cap (X - U)$$

seçilebilir. $A_n = \{y_k \mid k \geq n \in \mathbb{Z}^+\}$ olmak üzere; $\mathcal{E}_y := \{A_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}^\uparrow$ biçiminde tanımlanırsa, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $A_n \cap U = \emptyset$ olup $U \notin \mathcal{E}_y$ dir. Diğer yandan, $x \in \lim_v \mathcal{E}_y$ yani $\mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}_y$ olur. Ancak, $\mathcal{V}_v(x) \leq \mathcal{E}$ olacak biçimdeki her $\mathcal{E} \in \mathbf{E}(\mathbb{R})$ için $U \in \mathcal{E}$ olduğundan, bu bir çelişkidir. Böylece eşitliğin ispatı tamamlanır. Şimdi, bir $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \lim_{Seqv} \mathcal{V}_v(x)$ olduğunu kabul edelim. Örnek 3.3 de verilen $Seqv$ bağıntısının tanımından, $\mathcal{V}_v(x)$ süzgeci en azından bir sayılabilir küme içermelidir. Böylece çelişki elde edilir. ■

Örnek 3.10 (X, d) bir metrik uzay, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$, $x \in X$ olsun ve $\mathcal{N}_d(x)$ ile, x noktasının d metriğine göre komşuluklar süzgeci gösterilsin. Bu durumda;

$$x \in \lim_{\tilde{d}} \mathfrak{F} \iff \mathcal{N}_d(x) \leq \mathfrak{F} \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanan $\tilde{d}$ bağıntısı, X kümesi üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısıdır. Ayrıca, $\mathcal{V}_{\tilde{d}}(x) = \mathcal{N}_d(x)$ dir (Mynard 2016).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $x \in \lim_{\tilde{d}} \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; (3.6) dan, $\mathcal{N}_d(x) \leq \mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ olup $x \in \lim_{\tilde{d}} \mathcal{G}$ dir. Ayrıca, her $x \in X$ için, $\mathcal{N}_d(x) \leq \dot{x}$ olup (3.6) dan,

$x \in \lim_{\tilde{d}}^\bullet x$ elde edilir. O halde, $\tilde{d}$ bağıntısı X üzerinde bir yakınsaklık yapısıdır. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_{\tilde{d}} \mathfrak{F} \cap \lim_{\tilde{d}} \mathcal{G}$ ise, $\mathcal{N}_d(x) \leq \mathfrak{F}$ ve $\mathcal{N}_d(x) \leq \mathcal{G}$ olup $\mathcal{N}_d(x) \leq \mathfrak{F} \cap \mathcal{G}$ dir. Dolayısıyla, $x \in \lim_{\tilde{d}} (\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})$ olup $\tilde{d}$ sonlu derinliklidir. Son olarak, $\mathcal{V}_{\tilde{d}}(x) = \mathcal{N}_d(x)$ eşitliğini gösterelim. $x \in X$ olmak üzere; (3.6) dan, X üzerinde tanımlı bir $\mathfrak{F}$ süzgecinin $\tilde{d}$ bağıntısına göre x noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{N}_d(x)$ süzgecinden ince olmasıdır. Bu durumda; (3.5) den, x noktasına yakınsayan bütün süzgeçlerin infimumu $\mathcal{V}_{\tilde{d}}(x) = \mathcal{N}_d(x)$ olacağı açıktır. ■

Tanım 3.5 (X, ξ) bir yakınsama uzayı olsun. Eğer; X kümesi üzerinde $\xi = \tilde{d}$ olacak biçimde bir d metriği mevcut ise ξ yakınsaklık yapısına **metrikleşebilir** denir (Mynard 2016).

Örnek 3.11 i) $\mathbb{R}$ üzerinde Örnek 3.2 de verilen standart yakınsaklık yapısı v ele alınsın ve d ile $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı standart metrik gösterilsin. Bu durumda; $\tilde{d} = v$ olup v yakınsaklık yapısı metrikleşebilir.

ii) Bir X kümesi üzerinde Örnek 3.4 de verilen diskre yakınsaklık yapısı ι ele alınsın ve d ile, X üzerinde tanımlı diskre metrik gösterilsin. Bu durumda; $\iota = \tilde{d}$ olup ι yakınsaklık yapısı metrikleşebilir (Mynard 2016).

İspat. i) d metriğine göre herhangi bir x reel sayısının komşuluklar ailesi,

$$\mathcal{N}_d(x) := \{V \subset \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0 : B_d(x, \varepsilon) \subset V\}$$

dir. $\tilde{d} = v$ eşitliğini gösterelim: $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$ ve $x \in \lim_v \mathfrak{F}$ ise,

$$\left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq \mathfrak{F} \quad (3.6)$$

dir. Ayrıca, $U \in \mathcal{N}_d(x)$ ise

$$\exists \delta > 0 : B_d(x, \delta) \subset U$$

olup $\frac{1}{n_0} < \delta$ olacak biçimde en azından bir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda;

$$B_d\left(x, \frac{1}{n_0}\right) = \left[x - \frac{1}{n_0}, x + \frac{1}{n_0} \right] \subset B_d(x, \delta) \subset U$$

ve (3.7) den, $U \in \mathfrak{F}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathcal{N}_d(x) \leq \mathfrak{F}$ olup $x \in \lim_{\tilde{d}} \mathfrak{F}$ dir. O halde, $\tilde{d} \preceq v$ dir. Diğer yandan,

$$\left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right] \right\}^\uparrow \leq \mathcal{N}_d(x)$$

olduğundan $v \preceq \tilde{d}$ dir.

ii) d ile, X üzerinde tanımlı diskre metrik gösterildiğine göre, $x \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ için,

$$B_d(x, r) := \begin{cases} \{x\} & , \quad 0 < r \leq 1 \text{ ise} \\ \mathbb{R} & , \quad r > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olup $\mathcal{N}_d(x) = \dot{x}$ dir. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_i \mathfrak{F}$ ise, Örnek 3.4 den, $\mathfrak{F} = \dot{x}$ olup (3.6) dan, $x \in \lim_{\tilde{d}} \mathfrak{F}$ elde edilir. Diğer yandan, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $x \in \lim_{\tilde{d}} \mathfrak{F}$ yani $\mathcal{N}_d(x) \leq \mathfrak{F}$ ise, $\mathfrak{F} = \dot{x}$ olup $x \in \lim_i \mathfrak{F}$ dir. ■

Örnek 3.12 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde tanımlı τ_p noktasal yakınsaklık topolojisine göre bir f fonksiyonunun komşuluklar ailesi,

$$\mathcal{N}_{\tau_p}(f) := \left\{ V \mid \exists F \subset \mathbb{R}^{<\omega}, \exists r > 0 \text{ için } \max_{x \in F} |f(x) - g(x)| < r \Rightarrow g \in V \right\}$$

dir. Bu durumda; $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde,

$$p := \{ (f, \mathfrak{F}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) \mid \mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F} \}$$

biçiminde tanımlı p bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup bu yapıya **noktasal yakınsaklık yapısı** adı verilir. p sonlu derinliklidir ve metrikleşemeyen bir yakınsaklık yapısıdır (Mynard 2016).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $f \in \lim_p \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; p bağıntısının tanımından, $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ olup $f \in \lim_p \mathcal{G}$ dir. Ayrıca, her $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ için, $\dot{f} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ ve $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \dot{f}$ olduğundan $f \in \lim_p \dot{f}$ dir. O halde, p bağıntısı $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde bir yakınsaklık yapısıdır. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ ve $f \in \lim_p \mathfrak{F} \cap \lim_p \mathcal{G}$ ise, $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F}$ ve $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathcal{G}$ olup $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F} \cap \mathcal{G}$ dir. Dolayısıyla, $f \in \lim_p (\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})$ olup p sonlu derinliklidir. ■

3.2 Yakınsama Uzayları ve Temel Özellikleri

Bir X kümesi üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi, (3.3) ile verilen “ $\preceq$ ” kısmi sıralama bağıntısına göre bir latistir. $\mathfrak{C}$ ile, X üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi gösterilmek üzere; $\xi, \sigma \in \mathfrak{C}$ için,

$$\begin{aligned}\xi \vee \sigma & : = \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F} \text{ ve } x \in \lim_{\sigma} \mathfrak{F}\} \\ \xi \wedge \sigma & : = \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F} \text{ veya } x \in \lim_{\sigma} \mathfrak{F}\}\end{aligned}$$

dir. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ olmak üzere;

$$\bigvee_{\xi \in \mathfrak{D}} \xi := \bigvee \xi = \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \forall \xi \in \mathfrak{D} : x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F}\} \quad (3.7)$$

ve

$$\bigwedge_{\xi \in \mathfrak{D}} \xi := \bigwedge \xi = \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \exists \xi \in \mathfrak{D} : x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F}\} \quad (3.8)$$

dir. Ayrıca,

$$\lim_{\bigvee_{\xi \in \mathfrak{D}} \xi} \mathfrak{F} = \bigcap_{\xi \in \mathfrak{D}} \lim_{\xi} \mathfrak{F} \text{ ve } \lim_{\bigwedge_{\xi \in \mathfrak{D}} \xi} \mathfrak{F} = \bigcup_{\xi \in \mathfrak{D}} \lim_{\xi} \mathfrak{F} \quad (3.9)$$

eşitlikleri gerçekleşir (Mynard 2016).

Teorem 3.1 Bir X kümesi üzerinde tanımlı **yakınsaklık yapılarının ailesi**, “ $\preceq$ ” kısmi sıralama bağıntısına göre tam latistir. Özel olarak, X kümesi üzerinde tanımlı **sonlu derinlikli yakınsaklık yapılarının ailesi** latis olup herhangi bir alt ailesinin supremumunu içerir (Mynard 2016).

İspat. $\mathfrak{C}$, X üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi olsun. Herhangi bir $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ için (3.8) ve (3.9) da tanımlanan $\bigvee_{\xi \in \mathfrak{D}} \xi$ ve $\bigwedge_{\xi \in \mathfrak{D}} \xi$ bağıntılarının X üzerinde yakınsaklık yapısı olduğu açıktır. $\mathcal{A}$ ile, $\mathfrak{C}$ ailesinin sonlu derinlikli ögelerinin herhangi bir alt ailesi gösterilsin. Bu durumda; $\bigvee_{\sigma \in \mathcal{A}} \sigma$ sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısıdır. Gerçekten, $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_{\bigvee_{\sigma \in \mathcal{A}} \sigma} \mathfrak{F} \cap \lim_{\bigvee_{\sigma \in \mathcal{A}} \sigma} \mathcal{G}$ ise (3.10) ile verilen ilk eşitlikten, her $\sigma \in \mathcal{A}$ için $x \in \lim_{\sigma} \mathfrak{F} \cap \lim_{\sigma} \mathcal{G}$ olup $\mathcal{A}$ ailesinin ögeleri sonlu derinlikli olduğundan, $x \in \lim_{\sigma} \mathfrak{F} \cap \mathcal{G}$ dir. Dolayısıyla, $x \in \lim_{\bigvee_{\sigma \in \mathcal{A}} \sigma} \mathfrak{F} \cap \mathcal{G}$ dir. ■

Tanım 3.6 (X, ξ) , (Y, σ) iki yakınsama uzayı ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $f(\lim_{\xi} \mathfrak{F}) \subset \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$ oluyor ise f fonksiyonuna **yakınsama dönüşümü** adı verilir (Dolecki 2009).

Tanım 3.6 dan,

$$f \text{ yakınsama dönüşümü} \iff [(\mathfrak{F}, x) \in \xi \Rightarrow (f[\mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma]$$

önermesinin gerçekleştiği açıktır. İki yakınsama dönüşümünün bileşkesinin de bir yakınsama dönüşümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (X, ξ) uzayından (Y, σ) uzayına tanımlı tüm yakınsama dönüşümlerinin kümesi $C(\xi, \sigma)$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.2 (X, ξ) ve (X, σ) iki yakınsama uzayı olsun. Bu durumda; $\sigma \preceq \xi$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned} id_X : (X, \xi) &\longrightarrow (X, \sigma) \\ x &\longrightarrow id(x) := x \end{aligned}$$

birim fonksiyonunun yakınsama dönüşümü olmasıdır (Dolecki 2009).

Örnek 3.13 $\mathbb{R}$ üzerinde, Örnek 3.2 ve Örnek 3.3 de verilen v ve $Seqv$ yakınsaklık yapıları ele alınsın. Bu durumda; Örnek 3.7 de açıklandığı üzere; $v \preceq Seqv$ olup Önerme 3.3 den, $id : (\mathbb{R}, Seqv) \longrightarrow (\mathbb{R}, v)$ fonksiyonu bir yakınsama dönüşümüdür (Dolecki 2009).

Örnek 3.14 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\xi_{\tau} := \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x \right\}$$

ve

$$\xi_{\tau'} := \left\{ (\mathcal{G}, y) \in \mathbf{F}(Y) \times Y \mid \mathcal{G} \xrightarrow{\tau'} y \right\}$$

sırasıyla X ve Y üzerinde sonlu derinlikli iki yakınsaklık yapısıdır, ve $f \in C(\xi_{\tau}, \xi_{\tau'})$ dir (Mynard 2016).

Önerme 3.3 (X, ξ) ve (Y, τ) iki yakınsama uzayı olsun ve $\mathfrak{D}$ ile, bir Z kümesi üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının bir ailesi gösterilsin. Bu durumda;

$$C(\xi, \bigvee_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma) = \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{D}} C(\xi, \sigma) \text{ ve } C(\bigwedge_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma, \tau) = \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{D}} C(\sigma, \tau) \quad (3.10)$$

eşitlikleri gerçekleşir. Ayrıca,

$$\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{D}} C(\xi, \sigma) \subset C(\xi, \bigwedge_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma) \text{ ve } \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{D}} C(\sigma, \tau) \subset C(\bigvee_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma, \tau) \quad (3.11)$$

dir (Mynard 2016).

İspat. $f \in C\left(\xi, \bigvee_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma\right)$ olsun. Bu durumda; sırasıyla Tanım 3.6 ve (3.10) ile verilen ilk eşitlik kullanılırsa, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için

$$f(\lim_{\xi} \mathfrak{F}) \subset \lim_{\sigma \in \mathfrak{D}} \bigvee_{\sigma \in \mathfrak{D}} f[\mathfrak{F}] = \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{D}} \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}] \subset \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]; \forall \sigma \in \mathfrak{D}$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $\sigma \in \mathfrak{D}$ için $f \in C(\xi, \sigma)$ dır. Tersine, her $\sigma \in \mathfrak{D}$ için $f \in C(\xi, \sigma)$ ise, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $f(\lim_{\xi} \mathfrak{F}) \subset \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$ olacaktır. Böylece,

$$f(\lim_{\xi} \mathfrak{F}) \subset \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{D}} \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$$

olup (3.10) ile verilen ilk eşitlikten, $f \in C\left(\xi, \bigvee_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma\right)$ elde edilir. (3.11) ile verilen ikinci eşitlik benzer şekilde gösterilebilir. Diğer yandan; $f \in \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{D}} C(\xi, \sigma)$ ise, en azından bir $\sigma \in \mathfrak{D}$ için $f \in C(\xi, \sigma)$ dır. Bu durumda;

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : f(\lim_{\xi} \mathfrak{F}) \subset \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$$

olur. Ayrıca, $\lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}] \subset \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{D}} \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$ olduğundan, (3.10) ile verilen ikinci eşitlikten, $f \in C(\xi, \bigwedge_{\sigma \in \mathfrak{D}} \sigma)$ dir. (3.12) ile verilen ikinci kapsama benzer şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 3.4 X bir küme, (Y, β) bir yakınsama uzayı ve $f : X \longrightarrow (Y, \beta)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; β yakınsaklık yapısına karşılık, X kümesi üzerinde, f fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kılan yakınsaklık yapılarının en kabası mevcuttur (Dolecki 2009).

İspat. $I(X)$ ile, X kümesi üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi gösterilsin ve

$$S_I := \{\sigma \in I(X) \mid f \in C(\sigma, \beta)\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda; $\iota \in S_I$ olduğundan $S_I \neq \emptyset$ dir. Diğer yandan, Teorem 3.1 den $\bigwedge_{\sigma \in S_I} \sigma \in I(X)$ olup (3.11) ile verilen ikinci eşitlikten,

$$f : \left(X, \bigwedge_{\sigma \in S_I} \sigma \right) \longrightarrow (Y, \beta)$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu yakınsama dönüşümüdür. Dolayısıyla, $\bigwedge_{\sigma \in S_I} \sigma \in S_I$ dir. ■

Tanım 3.7 X bir küme, (Y, σ) bir yakınsama uzayı ve $f : X \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; f fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kılacak biçimde X kümesi üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının **en kabasına**, (f, σ) ikilisine karşılık gelen **başlangıç yakınsaklık yapısı** adı verilir ve f_σ^- ile gösterilir (Dolecki 2009). Tanımın anlamlı olduğu aşağıdaki önermeden açıktır.

Önerme 3.5 X bir küme, (Y, σ) bir yakınsama uzayı ve $f : X \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$f_\sigma^- = \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid (f[\mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma\}, \quad (3.12)$$

her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için

$$\lim_{f_\sigma^-} \mathfrak{F} = f^{-1}(\lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]) \quad (3.13)$$

ve f_σ^- , f için başlangıç yakınsaklık yapısıdır (Dolecki 2009).

İspat. $\eta := \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid (f[\mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma\}$ olarak alınsın. η bir yakınsaklık yapısıdır. Gerçekten, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ise, $f[\mathfrak{F}] \leq f[\mathcal{G}]$ dir. Dolayısıyla, $(\mathfrak{F}, x) \in \eta$ ise, σ , Y kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğundan $(\mathcal{G}, x) \in \eta$ olacaktır. Diğer yandan, σ , Y kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğundan her $x \in X$ için, $(\{f(x)\}^\bullet, f(x)) \in \sigma$ dir. Ayrıca, $\{f(x)\}^\bullet = f[\dot{x}]$ olduğundan $(\dot{x}, x) \in \eta$ olur. (3.13)

eşitliğini gösterelim. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olmak üzere; $(\mathfrak{F}, x) \in \eta$ ise, $(f[\mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma$ dir. Bu durumda; $f \in C(\eta, \sigma)$ olup Tanım 3.7 de,

$$f_{\sigma}^{-} := \inf \{ \xi \subseteq \mathbf{F}(X) \times X \mid f \in C(\xi, \sigma) \}$$

biçiminde tanımlandığından, $f_{\sigma}^{-} \preceq \eta$ dir. Diğer yandan, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $x \in \lim_{f_{\sigma}^{-}} \mathfrak{F}$ ise, f fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kılacak biçimde, X üzerinde tanımlı en azından bir ξ yakınsaklık yapısı için $x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F}$ dir. Bu durumda; $(f[\mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma$ olup $(\mathfrak{F}, x) \in \eta$ yani, $x \in \lim_{\eta} \mathfrak{F}$ olur. Dolayısıyla $\eta \preceq f_{\sigma}^{-}$ dir. Şimdi (3.14) eşitliğini gösterelim. Tanım 3.7 den, $f \in C(f_{\sigma}^{-}, \sigma)$ olduğundan, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $f(\lim_{f_{\sigma}^{-}} \mathfrak{F}) \subset \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$ elde edilir. Diğer yandan, $x \in f^{-1}(\lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}])$ ise, $f(x) \in \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$ olup (3.13) eşitliğinden, $x \in \lim_{f_{\sigma}^{-}} \mathfrak{F}$ elde edilir. Son olarak, f_{σ}^{-} bağıntısının başlangıç yapısı olduğunu gösterelim. (Z, τ) bir yakınsama uzayı ve $g \in C(\tau, f_{\sigma}^{-})$ olsun. Bu durumda;

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(Z) \text{ için } g(\lim_{\tau} \mathfrak{F}) \subset \lim_{f_{\sigma}^{-}} g[\mathfrak{F}]$$

dir. $f \in C(f_{\sigma}^{-}, \sigma)$ ve $g[\mathfrak{F}] \in \mathbf{F}(X)$ olduğundan,

$$f(\lim_{f_{\sigma}^{-}} g[\mathfrak{F}]) \subset \lim_{\sigma} f[g[\mathfrak{F}]]$$

olup

$$(f \circ g)(\lim_{\tau} \mathfrak{F}) \subseteq f(\lim_{f_{\sigma}^{-}} g[\mathfrak{F}]) \subseteq \lim_{\sigma} (f \circ g)[\mathfrak{F}]$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f \circ g \in C(\tau, \sigma)$ dir. Tersine, $f \circ g \in C(\tau, \sigma)$ ve $x \in g(\lim_{\tau} \mathfrak{F})$ olsun. Bu durumda; $x = g(z)$ olacak biçimde en azından bir $z \in \lim_{\tau} \mathfrak{F}$ vardır. Hipotezden, $(f \circ g)(\lim_{\tau} \mathfrak{F}) \subset \lim_{\sigma} (f \circ g)[\mathfrak{F}]$ olduğundan,

$$(f \circ g)(z) \in \lim_{\sigma} (f \circ g)[\mathfrak{F}] = \lim_{\sigma} f[g[\mathfrak{F}]]$$

olup $f(x) \in \lim_{\sigma} f[g[\mathfrak{F}]]$ dir. Bu durumda; (3.14) den, $x \in \lim_{f_{\sigma}^{-}} g[\mathfrak{F}]$ elde edilir. Dolayısıyla $g \in C(\tau, f_{\sigma}^{-})$ dir. Tanım 2.15 gereğince f_{σ}^{-} başlangıç yapısıdır. ■

Önerme 3.6 X ve Y iki küme, σ, Y kümesi üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısı, $f : X \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu

durumda; f_σ^- sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısıdır (Mynard 2016).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_{f_\sigma^-} \mathfrak{F} \cap \lim_{f_\sigma^-} \mathcal{G}$ olsun. Bu durumda; (3.14) eşitliğinden, $f(x) \in \lim_{f_\sigma} f[\mathfrak{F}] \cap \lim_{f_\sigma} f[\mathcal{G}]$ dir. σ, Y kümesi üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısı olduğundan, $f(x) \in \lim_{f_\sigma} (f[\mathfrak{F}] \cap f[\mathcal{G}])$ olacaktır. Diğer yandan,

$$f[\mathfrak{F}] \cap f[\mathcal{G}] \leq f[\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}]$$

olduğundan $f(x) \in \lim_{f_\sigma} f[\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}]$ olup (3.14) den, $x \in \lim_{f_\sigma^-} (\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})$ elde edilir. ■

Önerme 3.7 X ve Y iki küme olsun, σ ve ξ ile, Y kümesi üzerinde tanımlı iki yakınsaklık yapısı gösterilsin. Bu durumda; $\xi \preceq \sigma$ ise, $f_\xi^- \preceq f_\sigma^-$ dır (Mynard 2016).

İspat. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $x \in \lim_{f_\sigma^-} \mathfrak{F}$ ise, (3.14) eşitliğinden, $x \in f^{-1}(\lim_{f_\sigma} f[\mathfrak{F}])$ dir. $\xi \preceq \sigma$ olduğundan,

$$f^{-1}(\lim_{f_\sigma} f[\mathfrak{F}]) \subseteq f^{-1}(\lim_{f_\xi} f[\mathfrak{F}]) = \lim_{f_\xi^-} \mathfrak{F}$$

olup $x \in \lim_{f_\xi^-} \mathfrak{F}$ elde edilir. ■

Önerme 3.8 $(X, \xi), (Y, \sigma)$ iki yakınsama uzayı ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$f \in C(\xi, \sigma) \iff f_\sigma^- \preceq \xi$$

dir (Mynard 2016).

Tanım 3.8 X bir küme, $I \neq \emptyset$ bir indis kümesi, $\{(Y_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ sonlu derinlikli yakınsama uzaylarının bir ailesi olsun ve $\{f_i \mid X \longrightarrow (Y_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ fonksiyon ailesi verilsin. Bu durumda; $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesinin her bir ögesini yakınsama dönüşümü kılacak biçimde, X kümesi üzerinde tanımlı en kaba yakınsaklık yapısı mevcut olup bu yapıya $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesine karşılık gelen başlangıç yakınsaklık yapısı adı verilir. Bu yapı S_η^- ile gösterilir ve

$$S_\eta^- := \bigvee_{i \in I} (f_i)_{\eta_i}^-$$

biçiminde tanımlanır (Mynard 2016).

Tanımın anlamlı olduğu aşağıdaki önermede görülecektir.

Önerme 3.9 X bir küme, $I \neq \emptyset$ bir indis kümesi, $\{(Y_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ sonlu derinlikli yakınsama uzaylarının bir ailesi olsun ve $\{f_i \mid X \longrightarrow (Y_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ fonksiyon ailesi verilsin. Bu durumda; $\mathbf{S}_\eta^- = \bigvee_{i \in I} (f_i)_\eta^-$ bağıntısı, $\{f_i \mid X \longrightarrow (Y_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ ailesi için başlangıç yakınsaklık yapısıdır. Ayrıca, herhangi bir $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için,

$$x \in \lim_{\mathbf{S}_\eta^-} \mathfrak{F} \iff \forall i \in I : f_i(x) \in \lim_{\eta_i} f_i[\mathfrak{F}] \quad (3.14)$$

dir. Her $i \in I$ için η_i bağıntıları sonlu derinlikli olduğunda $\mathbf{S}_\eta^-$ bağıntısı sonlu derinliklidir (Dolecki 2009).

İspat. Tanım 3.7, (3.8) ve (3.13) eşitlikleri kullanılarak, (3.15) ile verilen denklik kolaylıkla gösterilebilir. (Z, τ) bir yakınsama uzayı ve $g \in C(\tau, \mathbf{S}_\eta^-)$ olsun. Bu durumda; Tanım 3.6 dan, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(Z)$ için

$$g(\lim_\tau \mathfrak{F}) \subset \lim_{\mathbf{S}_\eta^-} g[\mathfrak{F}] \quad (3.15)$$

dir. $g[\mathfrak{F}] \in \mathbf{F}(X)$ ve her $i \in I$ için $f_i \in C((f_i)_\eta^-, \eta_i)$ olduğundan,

$$f_i(g(\lim_\tau \mathfrak{F})) \subset \lim_{\eta_i} f_i[g[\mathfrak{F}]]$$

dir. Böylece,

$$(f_i \circ g)(\lim_\tau \mathfrak{F}) \subset \lim_{\eta_i} (f_i \circ g)[\mathfrak{F}]$$

olup her $i \in I$ için $f_i \circ g \in C(\tau, \eta_i)$ elde edilir. Diğer yandan, (Z, τ) bir yakınsama uzayı ve her $i \in I$ için $f_i \circ g \in C(\tau, \eta_i)$ olsun. Bu durumda; $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(Z)$ olmak üzere, $x \in g(\lim_\tau \mathfrak{F})$ ise, $x = g(z)$ olacak biçimde en azından bir $z \in \lim_\tau \mathfrak{F}$ vardır. Her $i \in I$ için $(f_i \circ g)(\lim_\tau \mathfrak{F}) \subset \lim_{\eta_i} (f_i \circ g)[\mathfrak{F}]$ olduğundan,

$$(f_i \circ g)(z) \in \lim_{\eta_i} (f_i \circ g)[\mathfrak{F}]$$

dir. (3.15) kullanılırsa, $g \in C(\tau, \mathbf{S}_\eta^-)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbf{S}_\eta^-$ bağıntısı, $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesine karşılık gelen başlangıç yakınsaklık yapısıdır. Her $i \in I$ için η_i bağıntıları sonlu derinlikli olduğunda, (3.15) ile verilen $\mathbf{S}_\eta^-$ bağıntısının sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısı olduğu, Teorem 3.1 ve Önerme 3.6 dan açıktır. ■

Tanım 3.9 $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ yakınsama uzaylarının bir ailesi ve $\mathbf{X} := \prod_{i \in I} X_i$ olsun. Bu durumda; $\mathbf{X}$ kümesi üzerinde, her $i \in I$ için

$$\begin{aligned} p_i : \mathbf{X} &\longrightarrow X_i \\ z &\longrightarrow p_i(z) := z_i \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı koordinat fonksiyonlarını yakınsama dönüşümü kılacak biçimde tanımlı en kaba yakınsaklık yapısına **çarpım yakınsaklık yapısı** denir, $\prod_{i \in I} \xi_i$ ile gösterilir ve Tanım 3.8 gereğince

$$\prod_{i \in I} \xi_i := \bigvee_{i \in I} (p_i)_{\xi_i}^-$$

biçiminde tanımlanır. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbf{X})$ olmak üzere, (3.15) den

$$z \in \lim_{\prod_{i \in I} \xi_i} \mathfrak{F} \iff \forall i \in I : p_i(z) \in \lim_{\xi_i} p_i[\mathfrak{F}]$$

önermesi gerçekleşir (Dolecki 2009).

(X, ξ) , (Y, σ) iki yakınsama uzayı ise, $X \times Y$ kümesi üzerinde tanımlı çarpım yakınsaklık yapısı $\xi \times \sigma$ ile gösterilir ve

$$\xi \times \sigma := (p_1)_{\xi}^- \vee (p_2)_{\sigma}^-$$

biçiminde tanımlanır. $\mathcal{H} \in \mathbf{F}(X \times Y)$ olmak üzere;

$$(x, y) \in \lim_{\xi \times \sigma} \mathcal{H} \iff x \in \lim_{\xi} p_1[\mathcal{H}] \text{ ve } y \in \lim_{\sigma} p_2[\mathcal{H}] \quad (3.16)$$

dir.

Önerme 3.10 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde, noktasal yakınsaklık yapısı p ele alınsın. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $\mathbb{R}_x := \mathbb{R}$ ve $v_x := v$ olmak üzere; $\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_x$ kümesi üzerinde tanımlı çarpım yakınsaklık yapısı, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde tanımlı noktasal yakınsaklık yapısı ile çakışır (Mynard 2016).

İspat.

$$id \in C \left(p, \prod_{x \in \mathbb{R}} v_x \right) \text{ ve } id \in C \left(\prod_{x \in \mathbb{R}} v_x, p \right)$$

olduğu gösterilirse, Önerme 3.2 gereğince ispat tamamlanır. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ ve $f \in \lim_p \mathfrak{F}$ olsun.

$$\begin{aligned} e_x : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ f &\longrightarrow e_x(f) := f(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı olmak üzere; Tanım 3.9 gereğince, $\prod_{x \in \mathbb{R}} v_x$ bağıntısı, $\{e_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ fonksiyon ailesine karşılık gelen çarpım yakınsaklık yapısı olup $\prod_{x \in \mathbb{R}} v_x = \bigvee_{x \in \mathbb{R}} (e_x)_{v_x}^-$ dir. Bu durumda; $f \in \lim_{\bigvee_{x \in \mathbb{R}} (e_x)_{v_x}^-} \mathfrak{F}$ olduğunu göstermek için, (3.15) gereğince,

$$\forall x \in \mathbb{R} : e_x(f) = f(x) \in \lim_{v_x} e_x[\mathfrak{F}]$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $f \in \lim_p \mathfrak{F}$ olduğundan, $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F}$ olup

$$\forall K \in \mathcal{N}_{\tau_p}(f) : \exists F \in \mathfrak{F} \ni F \subset K \quad (3.17)$$

dir. Örnek 3.12 den faydalanılırsa, $S := \{x\} \in \mathbb{R}^{<\omega}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere; $r := \frac{1}{n} > 0$ seçimi için,

$$K_{x,n} = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |f(x) - g(x)| < \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{N}_{\tau_p}(f)$$

olacaktır. (3.18) den, $K_{x,n} \in \mathfrak{F}$ olduğundan,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists K_{x,n} \in \mathfrak{F} \ni e_x(K_{x,n}) \subset \left[f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n} \right]$$

olup $\left\{ \left[f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq e_x[\mathfrak{F}]$ olacaktır. Dolayısıyla, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in \lim_{v_x} e_x[\mathfrak{F}]$ olup istenilen elde edilir. Diğer yandan, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ ve $f \in \lim_{\prod_{x \in \mathbb{R}} v_x} \mathfrak{F}$ ise, $\prod_{x \in \mathbb{R}} v_x = \bigvee_{x \in \mathbb{R}} (e_x)_{v_x}^-$ eşitliği ve (3.15) den,

$$\forall x \in \mathbb{R} : e_x(f) = f(x) \in \lim_{v_x} e_x[\mathfrak{F}]$$

dir. Böylece,

$$\left\{ \left[f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq e_x[\mathfrak{F}]$$

olup

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists F_{x,n} \in \mathfrak{F} \ni e_x(F_{x,n}) \subset \left[f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n} \right] \quad (3.18)$$

dir. $f \in \lim_p \mathfrak{F}$ olduğunu göstermek için, $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F}$ olduğunu göstermemiz gerekir. $K \in \mathcal{N}_{\tau_p}(f)$ olsun. Bu durumda;

$$\exists S \in \mathbb{R}^{<\omega}, \exists r > 0 \ni \max_{x \in S} |f(x) - g(x)| < r \Rightarrow g \in K \quad (3.19)$$

önermesi gerçekleşir. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere; $S := \{x_1, \dots, x_k\}$ ve bir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ için S kümesinin her bir ögesine, (3.19) kullanılarak bir $F_{x_i, n_0} \in \mathfrak{F}$ karşılık getirilebilir. $F := \bigcap_{i=1}^k F_{x_i, n_0} \in \mathfrak{F}$ olarak alınırsa, $F \subset K$ olup $\mathcal{N}_{\tau_p}(f) \leq \mathfrak{F}$ elde edilir. Gerçekten, $h \in F$ ise,

$$(\forall i)(1 \leq i \leq k) : h \in F_{x_i, n_0}$$

ve

$$(\forall i)(1 \leq i \leq k) : e_{x_i}(h) = h(x_i) \in e_{x_i}(F_i) \subset \left[f(x_i) - \frac{1}{n_0}, f(x_i) + \frac{1}{n_0} \right]$$

olur. Dolayısıyla, her $i \in \{1, \dots, k\}$ için $|h(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n_0}$ olup

$$\max_{1 \leq i \leq k} |h(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n_0}$$

dır. Bu durumda; (3.20) den, $h \in K$ elde edilir. ■

Önerme 3.11 Her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}_x := \mathbb{R}$, $v_x := v$ ve

$$\begin{aligned} e_x : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R}_x \\ f &\longrightarrow e_x(f) := f(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı olmak üzere; $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde tanımlı noktasal yakınsaklık yapısı p , $\{e_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ fonksiyon ailesinin öğelerini yakınsama dönüşümü kılan **en kaba** yakınsaklık yapısıdır. Yani;

$$p = \bigvee_{x \in \mathbb{R}} (e_x)_{v_x}^-$$

dir (Mynard 2016).

İspat. Tanım 3.9 ve Önerme 3.10 dan açıktır. ■

$\mathbb{R}$ üzerinde, Örnek 3.2 de verilen standart yakınsaklık yapısı v ele alındığında, $(\mathbb{R}, v)$ metrikleşebilir bir yakınsama uzayı olmasına rağmen, $\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_x$ üzerinde, Örnek 3.12

de verilen noktasal yakınsaklık yapısı p ele alındığında, $\left(\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_x, p\right)$ metrikleşebilir değildir. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde tanımlı noktasal yakınsaklık yapısı; $\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_x$ üzerinde tanımlı çarpım yakınsaklık yapısı ile çakıştığından, metrikleşebilen yakınsama uzaylarının çarpımı metrikleşebilir olmak zorunda değildir.

Örnek 3.15 v , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı standart yakınsaklık yapısı, $\mathcal{V}_v(x)$, x noktasının v bağıntısına göre yöresel süzgeci olsun ve

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, f) &\longrightarrow e(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda; her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}] := \left\{ \bigcup_{g \in F} g(V_x) \mid V_x \in \mathcal{V}_v(x), F \in \mathfrak{F} \right\}^{\uparrow} \quad (3.20)$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir süzgeçtir. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde,

$$s := \{(\mathfrak{F}, f) \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}]\} \quad (3.21)$$

biçiminde tanımlanan s bağıntısı, bir önyakınsaklık yapısıdır (Mynard 2016).

İspat. $e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}]$ ailesinin süzgeç olduğunu göstermek için

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{g \in F} g(V_x) \mid V_x \in \mathcal{V}_v(x), F \in \mathfrak{F} \right\}$$

ailesinin süzgeç tabanı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\emptyset \notin \mathcal{S}$ olduğu açıktır.

Diğer yandan, $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ ise,

$$\exists V_x^{(1)}, V_x^{(2)} \in \mathcal{V}_v(x), \exists F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \ni S_1 = \bigcup_{g \in F_1} g(V_x^{(1)}) \text{ ve } S_2 = \bigcup_{g \in F_2} g(V_x^{(2)})$$

dir. O halde, $S_3 = \bigcup_{g \in F_1 \cap F_2} g(V_x^{(1)} \cap V_x^{(2)}) \in \mathcal{S}$ ve böylece $S_3 \subset S_1 \cap S_2$ dir. Şimdi, s bağıntısının bir önyakınsaklık yapısı olduğunu gösterelim: $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $f \in \lim_s \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; (3.22) den, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}]$ olur. Diğer yandan, $U \in e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}]$ ise,

$$\exists V_x \in \mathcal{V}_v(x), \exists F \in \mathfrak{F} : \bigcup_{f \in F} f(V_x) \subset U$$

dir. Ayrıca, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ olduğundan, $\bigcup_{f \in F} f(V_x) \in e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G}]$ olup $U \in e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G}]$ dir. O halde, v bağıntısı $\mathbb{R}$ üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğundan, $f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G}]$ olup $f \in \lim_s \mathcal{G}$ elde edilir. ■

Örnek 3.15 in bir özel hali, aşağıdaki örnek ile ifade edilir.

Örnek 3.16 v ve $\mathcal{V}_v(x)$, Örnek 3.15 de verildiği gibi alınsın ve

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \mathbb{R} \times C(v, v) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, f) &\longrightarrow \mathbf{e}(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu ele alalım. Her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(C(v, v))$ için,

$$\mathbf{e}[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}] := \left\{ \bigcup_{g \in F} g(V_x) \mid V_x \in \mathcal{V}_v(x), F \in \mathfrak{F} \right\}^{\uparrow}$$

ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir süzgeçtir. $C(v, v)$ üzerinde,

$$\mathbf{c} := \{(\mathfrak{F}, f) \in \mathbf{F}(C(v, v)) \times C(v, v) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}]\} \quad (3.22)$$

biçiminde tanımlı c bağıntısı, bir yakınsaklık yapısıdır (Mynard 2016).

İspat. Her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(C(v, v))$ için, $e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathfrak{F}]$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir süzgeç olduğu ve c bağıntısının bir önyakınsaklık yapısı olduğu Örnek 3.13 ün ispatına benzer şekilde gösterilebilir. O halde,

$$\forall f \in C(v, v) : f \in \lim_{\mathbf{c}}^{\bullet} f$$

önermesinin gerçekleştiğini göstermemiz yeterli olacaktır. Aşağıda verilen,

- (i) $\forall f \in C(v, v) : f \in \lim_{\mathbf{c}}^{\bullet} f$
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) \in \lim_v f[\mathcal{V}_v(x)]$
- (iii) $f \in C(v, v)$

önergelerinin denk olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. (i) $\Rightarrow$ (ii) önermesinin gerçekleştiğini gösterelim. Her $f \in C(v, v)$ için $f \in \lim_{\mathbf{c}}^{\bullet} f$ ise, (3.23) den,

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \dot{f}]$$

olacaktır. Bu durumda; $e[\mathcal{V}_v(x) \times \dot{f}] \leq f[\mathcal{V}_v(x)]$ olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. $K \in e[\mathcal{V}_v(x) \times \dot{f}]$ olsun. Bu durumda;

$$\exists V_x \in \mathcal{V}_v(x), \exists F \in \dot{f} \ni \bigcup_{g \in F} g(V_x) \subset K$$

dir. $f \in F$ olduğundan,

$$f(V_x) \subset \bigcup_{g \in F} g(V_x) \subset K$$

olur. Böylece, $V_x \in \mathcal{V}_v(x)$ olduğundan, $K \in f[\mathcal{V}_v(x)]$ elde edilir. (ii) $\Rightarrow$ (i) önermesini ispatlamak için her $x \in \mathbb{R}$ ve her $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ için $f(x) \in \lim_v f[\mathcal{V}_v(x)]$ olsun. Bu durumda; $f[\mathcal{V}_v(x)] \leq e[\mathcal{V}_v(x) \times \dot{f}]$ olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. $K \in f[\mathcal{V}_v(x)]$ ise, $f(V_x) \subset K$ olacak biçimde en azından bir $V_x \in \mathcal{V}_v(x)$ vardır. $F := \{f\}$ olarak alınırsa, $F \in \dot{f}$ ve

$$\bigcup_{f \in F} f(V_x) = f(V_x) \subset K$$

olduğundan $K \in e[\mathcal{V}_v(x) \times \dot{f}]$ elde edilir. Dolayısıyla, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \dot{f}]$ olup (3.23) den, $f \in \lim_c \dot{f}$ elde edilir. Şimdi, (ii) önermesinin gerçekleştiğini ve $f \notin C(v, v)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$\exists \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(\mathbb{R}) : f(\lim_v \mathfrak{F}) \not\subset \lim_v f[\mathfrak{F}]$$

dir. Dolayısıyla,

$$\exists x \in \lim_v \mathfrak{F} : f(x) \notin \lim_v f[\mathfrak{F}]$$

olacaktır. (3.5) den, $\mathcal{V}_v(x) \leq \mathfrak{F}$ olup $f[\mathcal{V}_v(x)] \leq f[\mathfrak{F}]$ elde edilir. Böylece, $f(x) \notin \lim_v f[\mathcal{V}_v(x)]$ olur. Bu ise (ii) önermesi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. (iii) $\Rightarrow$ (ii) önermesinin gerçekleştiğini gösterelim. $f \in C(v, v)$ ve $x \in X$ ise, $x \in \lim_v \mathcal{V}_v(x)$ olacağından $f(x) \in \lim_v f[\mathcal{V}_v(x)]$ elde edilir. ■

Önerme 3.12 $C(v, v)$ kümesi üzerinde tanımlı sürekli yakınsaklık yapısı $\mathbf{c}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \mathbb{R} \times C(v, v) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, f) &\longrightarrow e(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kılan en kaba yakınsaklık yapısıdır (Mynard 2016).

İspat. $\mathcal{S} := \{\theta_i\}_{i \in I}$ ile, her $i \in I$ için, $\mathbf{e} \in C(v \times \theta_i, v)$ koşulunu sağlayan, $C(v, v)$ üzerinde tanımlı yakınsaklık yapılarının ailesi gösterilsin. $\bigwedge_{i \in I} (v \times \theta_i) = v \times \bigwedge_{i \in I} \theta_i$

olduğundan ve (3.11) ile verilen ikinci eşitlikten, $\mathbf{e} \in C \left(v \times \bigwedge_{i \in I} \theta_i, v \right)$ dir. O halde,

$\mathbf{c} = \bigwedge_{i \in I} \theta_i$ olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır.

(i) $\mathcal{G} \in \mathbf{F}(C(v, v))$ ve $f \in \lim_{i \in I} \bigwedge_{i \in I} \mathcal{G}$ olsun. Bu durumda; (3.9) dan, $f \in \lim_{\theta_{i_0}} \mathcal{G}$ olacak biçimde en azından bir $i_0 \in I$ vardır. Her $i \in I$ için $e \in C(v \times \theta_i, v)$ olduğundan, her $x \in X$ için

$$e(\lim_{v \times \theta_{i_0}} (\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G})) \subset \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G}] \quad (3.23)$$

dir. $f \in \lim_{\theta_{i_0}} \mathcal{G}$ ve $x \in \lim_v \mathcal{V}_v(x)$ olduğundan, (3.17) den,

$$(x, f) \in \lim_{v \times \theta_{i_0}} (\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G})$$

dir. (3.24) kullanılırsa,

$$e(x, f) = f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times \mathcal{G}]$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.23) den, $f \in \lim_c \mathcal{G}$ olup $c \preceq \bigwedge_{i \in I} \theta_i$ olduğu görülür.

(ii) $e_v^- \preceq v \times c$ sıralaması ispatlanarak; Önerme 3.8 den, $e \in C(v \times c, v)$ yani, $c \in \mathcal{S}$ olduğu görülürse, $\bigwedge_{i \in I} \theta_i \preceq c$ elde edilir. $e_v^- \preceq v \times c$ olduğunu gösterelim: $\mathcal{G} \in \mathbf{F}(\mathbb{R} \times C(v, v))$ ve $(x, f) \in \lim_{v \times c} \mathcal{G}$ olsun. Bu durumda; (3.17) den,

$$x \in \lim_v p_1[\mathcal{G}] \text{ ve } f \in \lim_c p_2[\mathcal{G}]$$

dir. Buradan,

$$\left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}^\uparrow \leq p_1[\mathcal{G}] \quad (3.24)$$

ve

$$f(x) \in \lim_v e[\mathcal{V}_v(x) \times p_2[\mathcal{G}]] \quad (3.25)$$

elde edilir. Diğer yandan, (3.25) den,

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \exists A \in \mathcal{G} \ni p_1(A) \subset \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right]$$

dir. $K \in e[\mathcal{V}_v(x) \times p_2[\mathcal{G}]]$ ise,

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ : \exists G \in \mathcal{G} \ni e \left(\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \times p_2(G) \right) \subset K$$

olacaktır. Bu durumda;

$$e(p_1(A) \times p_2(G)) \subset e\left(\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] \times p_2(G)\right) \subset K$$

olur. $S := G \cap A$ biçiminde tanımlanırsa, $S \in \mathcal{G}$ ve $e(S) \subset K$ olup $K \in e[\mathcal{G}]$ dir. O halde,

$$e[\mathcal{V}_v(x) \times p_2[\mathcal{G}]] \leq e[\mathcal{G}] \quad (3.26)$$

olduğu açıktır. (3.26) kullanılırsa, $e(x, f) \in \lim_v e[\mathcal{G}]$ olup (3.14) eşitliğinden, $(x, f) \in \lim_{e_v^-} \mathcal{G}$ elde edilir. ■

3.3 Conv Kategorisi ve Temel Özellikleri

Nesneleri sonlu derinlikli yakınsama uzayları, morfizimleri sonlu derinlikli yakınsama uzayları arasında tanımlı yakınsama dönüşümleri olan kategori **Conv** ile gösterilecektir. Bu bölümde; **Conv** kategorisinin bazı temel özellikleri ve **Top** kategorisi ile arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Teorem 3.2 **Conv** kategorisi bir topolojik kategoridir (Mynard 2016).

İspat. **Conv** kategorisi belirli kategoridir ve başlangıç yapılarına göre kapalı olduğu Önerme 3.9 da gösterilmiştir. Ayrıca, $X := \{a\}$ kümesi üzerinde tanımlanabilecek tek yakınsaklık yapısı düzensiz yakınsaklık yapısı olup bu yapı sonlu derinliklidir. I bir indis kümesi olmak üzere; herhangi bir X kümesi üzerinde tanımlı sonlu derinlikli yakınsaklık yapılarının ailesi $\{\xi_i\}_{i \in I}$, $j \in I$ olmak üzere;

$$\xi_i \preceq \xi_j \iff id_X : (X, \xi_j) \longrightarrow (X, \xi_i) \text{ yakınsama dönüşümü}$$

biçiminde tanımlanan “ $\preceq$ ” bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Dolayısıyla, Tanım 2.25 den, **Conv** kategorisinin topolojik bir kategori olduğu açıktır. ■

Önerme 3.13 (X, ξ) sonlu derinlikli bir yakınsama uzayı olsun. Bu durumda;

$$\tau_\xi := \{O \subset X \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : O \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset \Rightarrow O \in \mathfrak{F}\} \quad (3.27)$$

biçiminde tanımlanan τ_ξ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir (Mynard 2016).

İspat. $I \neq \emptyset$ bir indis kümesi ve $(O_i)_{i \in I} \subset \tau_\xi$ olsun. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset$ ise,

$$\exists x \in X \ni x \in \lim_\xi \mathfrak{F} \text{ ve } x \in \bigcup_{i \in I} O_i$$

dir. Bu durumda; $O_{i_0} \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset$ olacak biçimde en azından bir $i_0 \in I$ vardır. $O_{i_0} \in \tau_\xi$ olduğundan (3.28) den, $O_{i_0} \in \mathfrak{F}$ olup $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathfrak{F}$ dir. Diğer yandan, J sonlu elemanlı bir indis kümesi ve $(O_i)_{i \in J} \subset \tau_\xi$ olsun. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $\left(\bigcap_{i \in J} O_i\right) \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset$ ise,

$$\exists z \in X \ni z \in \lim_\xi \mathfrak{F} \text{ ve } z \in \bigcap_{i \in J} O_i$$

dir. Bu durumda; her $i \in J$ için $O_i \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset$ olup (3.28) den, $O_i \in \mathfrak{F}$ ve J sonlu elemanlı olduğundan, $\bigcap_{i \in J} O_i \in \mathfrak{F}$ elde edilir. τ_ξ ailesi keyfi birleşim ve sonlu arakesite göre kapalı olduğundan $\emptyset$ ve $X \in \tau_\xi$ dir. ■

Tanım 3.10 (X, ξ) bir yakınsama uzayı olmak üzere;

$$\tau_\xi = \{O \subset X \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) \ni O \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset \Rightarrow O \in \mathfrak{F}\}$$

biçiminde tanımlanan topolojiye, ξ **bağıntısının ürettiği topoloji** denir (Mynard 2016).

Önerme 3.14 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda;

$$\xi_\tau := \left\{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x\right\} \quad (3.28)$$

biçiminde tanımlanan ξ_τ bağıntısı, X kümesi üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısıdır (Herrlich, Bentley ve Lowen 1991).

İspat. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ve $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_\tau$ olsun. Bu durumda; Tanım 2.12 ve (3.29) dan, $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ olup $(\mathcal{G}, x) \in \xi_\tau$ elde edilir. Diğer yandan, her $x \in X$ için $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \dot{x}$ olduğundan $x \in \lim_{\xi_\tau} \dot{x}$ dir. Son olarak, ξ_τ bağıntısının sonlu derinlikli olduğunu gösterelim. $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_\tau$ ve $(\mathcal{G}, x) \in \xi_\tau$ olsun. Bu durumda; $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathfrak{F}$ ve $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathcal{G}$ olup $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathfrak{F} \cap \mathcal{G}$ dir. Dolayısıyla, $\mathfrak{F} \cap \mathcal{G} \xrightarrow{\tau} x$ olup $(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}, x) \in \xi_\tau$ elde edilir. ■

Tanım 3.11 (X, ξ) bir yakınsama uzayı olsun. Bu durumda; X kümesi üzerinde, $\xi = \xi_\tau$ olacak biçimde bir τ topolojisi mevcut ise, ξ bağıntısına **topolojik yakınsaklık yapısı**, (X, ξ) ikilisine **topolojik yakınsama uzayı** adı verilir (Mynard 2016).

Örnek 3.17 X bir küme olsun ve $\tau := \{\emptyset, X\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda; (3.29) dan, τ topolojisinin ürettiği topolojik yakınsaklık yapısı,

$$\xi_\tau := \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \{X\} \leq \mathfrak{F}\}$$

biçiminde tanımlıdır. Örnek 3.5 de tanımlanan düzensiz yakınsaklık yapısı ξ_τ ile çakıştığından, düzensiz yakınsaklık yapısı topolojiktir (Mynard 2016).

Tanım 3.12 (X, ξ) bir yakınsama uzayı ve $x \in X$ olsun. Bu durumda; x noktasının ξ bağıntısına göre komşuluklar ailesi $\mathcal{N}_\xi(x)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{N}_\xi(x) := \{V \subset X \mid \exists O \in \tau_\xi \ni x \in O \subset V\} \quad (3.29)$$

biçiminde tanımlanır (Mynard 2016).

Önerme 3.15 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. ξ_τ ile, X üzerinde τ topolojisinin ürettiği topolojik yakınsaklık yapısı gösterilsin. Bu durumda;

$$\tau = \{O \subset X \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : O \cap \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F} \neq \emptyset \Rightarrow O \in \mathfrak{F}\},$$

yani $\tau = \tau_{\xi_\tau}$ dir.

İspat. $U \in \tau$ olsun. Her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için, $U \cap \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F} \neq \emptyset$ ise, $x \in U$ ve $x \in \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F}$ olacak biçimde en azından bir $x \in X$ vardır. Bu durumda; sırasıyla $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ ve (3.29) gereğince $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathfrak{F}$ elde edilir. Dolayısıyla, $U \in \mathfrak{F}$ yani, $U \in \tau_{\xi_\tau}$ dur. Diğer yandan, $U \in \tau_{\xi_\tau}$ ve $U \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda; (3.28) den,

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) \ni U \cap \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F} \neq \emptyset \Rightarrow U \in \mathfrak{F}$$

önermesi gerçekleşir. Herhangi bir $x \in U$ için, $\mathfrak{F} = \mathcal{N}_\tau(x)$ alınırsa, $\mathcal{N}_\tau(x) \xrightarrow{\tau} x$ olduğundan (3.29) gereğince, $x \in U \cap \lim_{\xi_\tau} \mathcal{N}_\tau(x)$ olur. Dolayısıyla, $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ elde edilir. Sonuç olarak $U \in \tau$ olur. ■

Önerme 3.16 (X, ξ) bir topolojik yakınsama uzayı olsun ve τ_ξ ile, X üzerinde, ξ bağıntısına karşılık gelen topoloji gösterilsin. Bu durumda;

$$\xi = \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_\xi} x \right\},$$

yani $\xi = \xi_{\tau_\xi}$ dir.

İspat. ξ topolojik yakınsaklık yapısı olduğundan, $\xi = \xi_\kappa$ olacak biçimde bir κ topolojisi mevcuttur, ve (3.29) dan,

$$\xi = \xi_\kappa := \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} \xrightarrow{\kappa} x \right\}$$

biçiminde tanımlanır. $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ alınırsa; $\mathcal{N}_\kappa(x) \leq \mathfrak{F}$ dir. O halde $\mathcal{N}_{\tau_\xi}(x) \leq \mathcal{N}_\kappa(x)$ olduğu gösterilirse $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_{\tau_\xi}$ olacaktır. $U \in \mathcal{N}_{\tau_\xi}(x)$ ise, $x \in O \subset U$ olacak biçimde en azından bir $O \in \tau_\xi$ vardır. Bu durumda;

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : O \cap \lim_\xi \mathfrak{F} \neq \emptyset \Rightarrow O \in \mathfrak{F}$$

önermesi gerçekleşir. $\mathfrak{F} = \mathcal{N}_\kappa(x)$ seçilirse, $(\mathcal{N}_\kappa(x), x) \in \xi$ olduğundan, $x \in O \cap \lim_\xi \mathcal{N}_\kappa(x)$ ve böylece $O \in \mathcal{N}_\kappa(x)$ olup $U \in \mathcal{N}_\kappa(x)$ elde edilir. Böylece, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_{\tau_\xi}$ olduğu görülür. Diğer yandan, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_{\tau_\xi}$ olsun. Bu durumda; (3.29) dan, $\mathcal{N}_{\tau_\xi}(x) \leq \mathfrak{F}$ dir. ξ topolojik yakınsaklık yapısı olduğundan, $\xi = \xi_\kappa$ olacak biçimde, X üzerinde bir κ topolojisi mevcuttur. Önerme 3.15 kullanılırsa, $\tau_\xi = \kappa$ olacaktır. Bu durumda; $\mathcal{N}_{\tau_\xi}(x) = \mathcal{N}_\kappa(x)$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ dir. ■

Önerme 3.17 X bir küme olmak üzere; τ ve τ' ile X üzerinde tanımlı iki topoloji gösterilsin. Bu durumda;

$$\tau \subseteq \tau' \iff \xi_\tau \preceq \xi_{\tau'}$$

önermesi gerçekleşir.

İspat. $\tau \subseteq \tau'$, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; (3.29) dan, $\mathcal{N}_{\tau'}(x) \leq \mathfrak{F}$ dir. $\mathcal{N}_\tau(x) \leq \mathcal{N}_{\tau'}(x)$ olduğundan (3.29) dan, $x \in \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\xi_\tau \preceq \xi_{\tau'}$ dir. Diğer yandan, $\xi_\tau \preceq \xi_{\tau'}$ olsun. Önerme 3.15 gereğince, $\tau_{\xi_\tau} = \tau$ ve $\tau_{\xi_{\tau'}} = \tau'$ olduğundan, $\tau_{\xi_\tau} \subseteq \tau_{\xi_{\tau'}}$ sıralaması gösterilirse ispat tamamlanır. $O \in \tau_{\xi_\tau}$, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $O \cap \lim_{\xi_\tau} \mathfrak{F} \neq \emptyset$ olsun. $\xi_\tau \preceq \xi_{\tau'}$ olduğundan, $O \cap \lim_{\xi_{\tau'}} \mathfrak{F} \neq \emptyset$ olacaktır. Böylece (3.28) kullanılırsa, $O \in \mathfrak{F}$ elde edilir. O halde, $O \in \tau_{\xi_{\tau'}}$ dir. ■

Örnek 3.18 X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, X üzerinde tanımlı diskre yakınsaklık yapısı topolojiktir (Mynard 2016).

Örnek 3.19 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde tanımlı noktasal yakınsaklık topolojisi, Örnek 3.12 de tanımlanan p noktasal yakınsaklık yapısını üretir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ üzerinde tanımlı noktasal yakınsaklık yapısı topolojiktir (Mynard 2016).

Önerme 3.18 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere; aşağıdaki önermeler denktir.

- i) $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ fonksiyonu süreklidir.
- ii) $f \in C(\xi_{\tau}, \xi_{\tau'})$ dir.

İspat. Önerme 2.3 ve Tanım 3.6 dan açıktır. ■

Önerme 3.19 X bir küme, (Y, σ) bir topolojik yakınsama uzayı ve $f : X \longrightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; X kümesi üzerinde tanımlı, (f, σ) ikilisine karşılık gelen başlangıç yapısı f_{σ}^{-} topolojiktir (Mynard 2016).

İspat. (Y, σ) bir topolojik yakınsama uzayı ise Tanım 3.11 den, Y kümesi üzerinde, $\sigma = \sigma_{\tau}$ olacak biçimde bir τ topolojisi mevcuttur. X üzerinde, f fonksiyonuna karşılık gelen başlangıç topolojisi

$$\tau_{in} := \{f^{-1}(W) \subseteq X \mid W \in \tau\}$$

ele alınırsa, $f_{\sigma}^{-} = \xi_{\tau_{in}}$ dir. Gerçekten, Tanım 2.14 den,

$$f : (X, \tau_{in}) \longrightarrow (Y, \tau)$$

fonksiyonu sürekli olup Önerme 3.18 den, $f \in C(\xi_{\tau_{in}}, \sigma_{\tau})$ dir. Dolayısıyla, Önerme 3.8 den, $f_{\sigma}^{-} \preceq \xi_{\tau_{in}}$ elde edilir. Son olarak, $\xi_{\tau_{in}} \preceq f_{\sigma}^{-}$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_{f_{\sigma}^{-}} \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; (3.14) eşitliğinden, $f(x) \in \lim_{\sigma} f[\mathfrak{F}]$ olup, $\sigma = \sigma_{\tau}$ olduğundan ve (3.29) dan, $\mathcal{N}_{\tau}(f(x)) \leq f[\mathfrak{F}]$ dir. $x \in \lim_{\xi_{\tau_{in}}} \mathfrak{F}$ olduğunu göstermek için $\mathcal{N}_{\tau_{in}}(x) \leq \mathfrak{F}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $U \in \mathcal{N}_{\tau_{in}}(x)$ ise, $x \in f^{-1}(W) \subset U$ olacak biçimde en azından bir $W \in \tau$ vardır.

Bu durumda; $W \in \mathcal{N}_\tau(f(x))$ olup $W \in f[\mathfrak{F}]$ elde edilir. Dolayısıyla, $F \subset f^{-1}(W)$ olacak biçimde en azından bir $F \in \mathfrak{F}$ vardır. Ayrıca, $f^{-1}(W) \subset U$ olduğundan $U \in \mathfrak{F}$ dir. ■

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere; (3.29) ile verilen,

$$\xi_\tau := \left\{ (\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x \right\}$$

bağıntısı, X kümesi üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısı olup Önerme 3.14 ve Önerme 3.18 gereğince

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Conv} \\ f & \longrightarrow & f \\ \tau & \longrightarrow & \xi_\tau \end{array}$$

biçiminde tanımlı F fonktoru bir dolu fonktordur. O halde, **Top** kategorisi **Conv** kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

Teorem 3.3 **Top** kategorisi **Conv** kategorisinin bi-yansımalı bir alt kategorisidir (Preuss 1987).

İspat. **Top** kategorisinin **Conv** kategorisinin bir dolu alt kategorisi olduğu açıktır. (X, ξ) sonlu derinlikli bir yakınsama uzayı olsun ve J bir indis kümesi olmak üzere; $\mathcal{S} := \{\tau_j\}_{j \in J}$ ile, her $j \in J$ için $\xi_{\tau_j} \preceq \xi$ koşulunu sağlayan, X kümesi üzerinde tanımlı topolojilerin ailesi gösterilsin. Örnek 3.5 den, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ dir. ξ bağıntısının Top-yansıması ξ^{tr} ile gösterilir ve $\{id_j : X \longrightarrow (X, \tau_j)\}_{j \in J}$ ailesine karşılık gelen başlangıç topolojisi $\tau_{in} = \bigvee_{j \in J} \tau_j$ olmak üzere; $\xi^{tr} := \xi_{\tau_{in}}$ biçiminde tanımlanır. Gerçekten,

$$id_X : (X, \xi) \longrightarrow (X, \xi^{tr})$$

bir yakınsama dönüşümüdür: $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_\xi \mathfrak{F}$ olsun, $x \in \lim_{\xi^{tr}} \mathfrak{F}$ olduğunu göstermek için, (3.29) gereğince, $\mathcal{N}_{\tau_{in}}(x) \leq \mathfrak{F}$ olduğunu göstermemiz gerekir. $V \in \mathcal{N}_{\tau_{in}}(x)$ ise,

$$\exists J' \in J^{<w} \ni \forall j \in J' : W_j \in \tau_j \text{ ve } x \in \bigcap_{j \in J'} W_j \subset V$$

dir. Diğer yandan, her $j \in J$ için $\xi_{\tau_j} \preceq \xi$ ve $x \in \lim_{\xi} \mathfrak{F}$ olduğundan, her $j \in J$ için $x \in \lim_{\xi_{\tau_j}} \mathfrak{F}$ elde edilir. Bu durumda; (3.29) dan, her $j \in J$ için $\mathcal{N}_{\tau_j}(x) \leq \mathfrak{F}$ ve dolayısıyla her $j \in J'$ için $W_j \in \mathfrak{F}$ olacaktır. J' sonlu elemanlı olduğundan, $\bigcap_{j \in J'} W_j \in \mathfrak{F}$ olup $V \in \mathfrak{F}$ elde edilir. O halde id_X bir yakınsama dönüşümüdür. Son olarak, (Y, τ') herhangi bir topolojik uzay ve

$$\begin{aligned} f : (X, \xi) &\longrightarrow (Y, \xi_{\tau'}) \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı bir yakınsama dönüşümü olmak üzere;

$$\begin{aligned} f^* : (X, \tau_{in}) &\longrightarrow (Y, \tau') \\ x &\longrightarrow f^*(x) = f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermemiz gerekir. Önerme 3.18 gereğince, $f^* \in C(\xi^{tr}, \xi_{\tau'})$ olduğunu yani, $f_{\xi_{\tau'}}^- \preceq \xi_{\tau_{in}}$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $f \in C(\xi, \xi_{\tau'})$ olduğundan, Önerme 3.8 den, $f_{\xi_{\tau'}}^- \preceq \xi$ dir. Ayrıca, Önerme 3.19 gereğince $f_{\xi_{\tau'}}^-$ topolojik bir yakınsaklık yapısı olduğundan, X üzerinde, $f_{\xi_{\tau'}}^- = \xi_{\sigma}$ olacak biçimde bir σ topolojisi mevcuttur. $\mathcal{S}$ ile ξ yakınsaklık yapısından daha kaba yakınsaklık yapısı üreten topolojilerin ailesi gösterildiğine göre, $\sigma \in \mathcal{S}$ dir. Bu durumda; $\sigma \subseteq \tau_{in}$ olup Önerme 3.17 den, $f_{\xi_{\tau'}}^- \preceq \xi_{\tau_{in}}$ elde edilir. ■

Tanım 3.13 (X, ξ) ve (Y, σ) sonlu derinlikli yakınsama uzayları olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : X \times C(\xi, \sigma) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longrightarrow \mathbf{e}(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kılan, $C(\xi, \sigma)$ üzerinde tanımlı **en kaba** yakınsaklık yapısına **sürekli yakınsaklık yapısı** adı verilir ve $[\xi, \sigma]$ ile gösterilir (Preuss 1987).

Önerme 3.20 (X, ξ) ve (Y, σ) sonlu derinlikli yakınsama uzayları ve

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : X \times C(\xi, \sigma) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longrightarrow \mathbf{e}(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$[\xi, \sigma] = \{(\mathfrak{F}, f) \in \mathbf{F}(C(\xi, \sigma)) \times C(\xi, \sigma) \mid \forall x \in X, \forall \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X) \ni (\mathcal{G}, x) \in \xi : (e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma\} \quad (3.30)$$

eşitliği gerçekleşir ve $[\xi, \sigma]$ sonlu derinliklidir (Preuss 1987).

İspat. $\mathcal{Q} := (\theta_i)_{i \in I}$ ile, $C(\xi, \sigma)$ kümesi üzerinde tanımlı ve $\mathbf{e}$ fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kılan tüm yakınsaklık yapılarının ailesi gösterilsin. Bu durumda; $\iota \in \mathcal{Q}$ olduğundan $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ dir. Her $i \in I$ için $e_\sigma^- \preceq \xi \times \theta_i$ olduğundan, $e_\sigma^- \preceq \bigwedge_{i \in I} (\xi \times \theta_i)$ dir. O halde; Önerme 3.8 den, $\bigwedge_{i \in I} (\xi \times \theta_i)$ bağıntısının, $X \times C(\xi, \sigma)$ kümesi üzerinde $\mathbf{e}$ fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kıldığı açıktır. Ayrıca,

$$\bigwedge_{i \in I} (\xi \times \theta_i) = \xi \times \bigwedge_{i \in I} \theta_i \quad (3.31)$$

olduğundan, $C(\xi, \sigma)$ kümesi üzerinde $\bigwedge_{i \in I} \theta_i$ bağıntısı ele alındığında, $\mathbf{e}$ fonksiyonu bir yakınsama dönüşümü olacaktır. Bu durumda; Tanım 3.13 göz önüne alınırsa, $[\xi, \sigma] := \bigwedge_{i \in I} \theta_i$ dir. O halde, (3.31) eşitliğini göstermek için,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} \theta_i = \{(\mathfrak{F}, f) \mid \forall x \in X, \forall \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X) \ni \\ (\mathcal{G}, x) \in \xi : (e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma\} \end{aligned}$$

eşitliğini göstermemiz gerekir. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(C(\xi, \sigma))$ ve $f \in \lim_{i \in I} \bigwedge_{\theta_i} \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; (3.9) dan, $f \in \lim_{\theta_{i_0}} \mathfrak{F}$ olacak biçimde en azından bir $i_0 \in I$ vardır. $\mathcal{Q}$ ailesinin tanımı gereği $\mathbf{e} \in C(\xi \times \theta_{i_0}, \sigma)$ olduğundan, her $x \in X$ ve $x \in \lim_\xi \mathcal{G}$ olacak biçimdeki her $\mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ için, Tanım 3.6 dan,

$$e(\lim_{\xi \times \theta_{i_0}} (\mathcal{G} \times \mathfrak{F})) \subset \lim_{\sigma} e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}]$$

yazılabilir. Bu durumda; (3.17) den, $(x, f) \in \lim_{\xi \times \theta_{i_0}} (\mathcal{G} \times \mathfrak{F})$ olacağından, $f(x) \in \lim_{\sigma} e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}]$ elde edilir. Diğer yandan, her $x \in X$ ve $x \in \lim_\xi \mathcal{G}$ olacak biçimdeki her $\mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ için $f(x) \in \lim_{\sigma} e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}]$ olsun. Bu durumda; $(x, f) \in e^{-1}(\lim_{\sigma} e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}])$ dir. (3.32) den, $\mathbf{e}$ fonksiyonu için başlangıç yapısı $\xi \times \bigwedge_{i \in I} \theta_i$ olduğundan, (3.14) den,

$(x, f) \in \lim_{\xi \times \bigwedge_{i \in I} \theta_i} (\mathcal{G} \times \mathfrak{F})$ olup (3.17) den, $f \in \lim_{i \in I} \bigwedge_{\theta_i} \mathfrak{F}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $[\xi, \sigma]$ bağıntısının sonlu derinlikli olduğunu göstereyim. $(\mathfrak{F}, f) \in [\xi, \sigma]$ ve $(\mathcal{H}, f) \in [\xi, \sigma]$ olsun. Bu durumda;

$$\forall x \in X, \forall \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X) \ni (\mathcal{G}, x) \in \xi : (e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}], f(x)) \in \sigma$$

ve

$$\forall x \in X, \forall \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X) \ni (\mathcal{G}, x) \in \xi : (e[\mathcal{G} \times \mathcal{H}], f(x)) \in \sigma$$

olup σ sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısı olduğundan,

$$(e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}] \cap e[\mathcal{G} \times \mathcal{H}], f(x)) \in \sigma$$

dır. Ayrıca,

$$e[\mathcal{G} \times \mathfrak{F}] \cap e[\mathcal{G} \times \mathcal{H}] = e[(\mathcal{G} \times \mathfrak{F}) \cap (\mathcal{G} \times \mathcal{H})]$$

ve

$$(\mathcal{G} \times \mathfrak{F}) \cap (\mathcal{G} \times \mathcal{H}) \subset \mathcal{G} \times (\mathfrak{F} \cap \mathcal{H})$$

oldüğundan, $(e[\mathcal{G} \times (\mathfrak{F} \cap \mathcal{H})], f(x)) \in \sigma$ olup $(\mathfrak{F} \cap \mathcal{H}, f) \in [\xi, \sigma]$ elde edilir. ■

Teorem 3.4 **Conv** kategorisi kartezyen kapalıdır (Preuss 1987).

İspat. Önerme 3.20 de (X, ξ) ve (Y, σ) sonlu derinlikli yakınsama uzayları verildiğinde, (3.31) eşitliği ile ifade edilen $[\xi, \sigma]$ bağıntısının $C(\xi, \sigma)$ kümesi üzerinde,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : X \times C(\xi, \sigma) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longrightarrow e(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonunu yakınsama dönüşümü kıldığı gösterilmiştir. Bu durumda; **Conv** kategorisinin kartezyen kapalı olduğunu göstermek için, $[\xi, \sigma]$ bağıntısının, Tanım 2.29 da verilen (CC_2) koşulunu sağladığını göstermek yeterli olacaktır. (Z, η) bir yakınsama uzayı olsun ve

$$\begin{aligned} f : X \times Z &\longrightarrow Y \\ (x, z) &\longrightarrow f(x, z) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı yakınsama dönüşümünü ele alalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} f^* : Z &\longrightarrow C(\xi, \sigma) \\ z &\longrightarrow f^*(z) : (X, \xi) \longrightarrow (Y, \sigma) \\ x &\longrightarrow f^*(z)(x) := f(x, z) \end{aligned}$$

fonksiyonu için, $f = e \circ (id_X \times f^*)$ eşitliği gerçekleşir. $f^* \in C(\eta, [\xi, \sigma])$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır: $\mathcal{W} \in \mathbf{F}(Z)$ ve $s \in f^*(\lim_\eta \mathcal{W})$ olsun. Bu durumda;

$$\exists x \in X, \exists z \in \lim_\eta \mathcal{W} \ni s(x) := f^*(z)(x) = f(x, z)$$

dir. $(\mathcal{G}, x) \in \xi$ olacak biçimde herhangi bir $\mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ alınırsa, (3.17) den, $(x, z) \in \lim_{\xi \times \eta} (\mathcal{G} \times \mathcal{W})$ olacaktır. Diğer yandan, f fonksiyonu yakınsama dönüşümü olduğundan,

$$f(\lim_{\xi \times \eta} (\mathcal{G} \times \mathcal{W})) \subset \lim_\sigma f[\mathcal{G} \times \mathcal{W}]$$

olup $f^*(z)(x) = f(x, z) \in \lim_\sigma f[\mathcal{G} \times \mathcal{W}]$ elde edilir. Ayrıca, $f[\mathcal{G} \times \mathcal{W}] \subset e[\mathcal{G} \times f^*[\mathcal{W}]]$ olduğundan, $s(x) = f^*(z)(x) \in \lim_\sigma e[\mathcal{G} \times f^*[\mathcal{W}]]$ dir. Bu durumda; (3.31) den, $s \in \lim_{[\xi, \sigma]} f^*[\mathcal{W}]$ olur. Dolayısıyla, f^* fonksiyonu bir yakınsama dönüşümüdür. ■

4. YAKLAŞMA UZAYLARI

Yaklaşma uzayları; matematiksel olarak birbirine eş kavramlar olan birçok yapı ile karakterize edilebilir. Bu kavramlardan en çok kullanılanlar; uzaklık fonksiyonu ve limit operatörüdür. Bu bölümde; ilk olarak, uzaklık fonksiyonu ve limit operatörü kavramları tanımlanarak temel özellikleri verilecek ve bu kavramların matematiksel olarak birbirine eş yapılar olduğu açıklanacaktır. Daha sonra, bu kavramlar yardımıyla yaklaşma uzayları ve yaklaşma uzayları arasında tanımlı morfizmler ifade edilerek **Ap** kategorisi tanımlanacak ve temel özellikleri verilecektir.

Bu çalışma boyunca $[0, \infty]$ kapalı aralığı $\mathbb{P}$ ile gösterilecektir. $\mathbb{P}$, üzerinde tanımlı alışılmış sıralama bağıntısı, tam latis ve toplamsal yarıgrup yapısı ile ele alınacaktır. $x \in [0, \infty)$ olmak üzere;

$$x + \infty = \infty, \infty - \infty = 0, \infty + \infty = \infty$$

$$\infty - x = \infty \text{ ve } \infty + x = \infty$$

olarak kabul edilecektir. $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde bir çıkarma işlemine ihtiyaç duyulduğunda,

$$\forall a, b \in \mathbb{P} : a \ominus b = (a - b) \vee 0$$

biçiminde tanımlı “ $\ominus$ ” işlemi kullanılacaktır. Lowen, metrik ve quasimetrik kavramlarını alışıldan daha genel fonksiyonlar için kullanır. X bir küme olmak üzere, $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu; her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$ koşulunu ve üçgen eşitsizliğini sağlıyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir **quasimetrik**, d quasimetriğinin simetri koşulunu sağlaması durumunda ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir **metrik** adı verilir. Bu bölümden itibaren metrik ve quasimetrik ifadeleri Lowen-anlamında kullanılacaktır.

Tanım 4.1 X boş kümeden farklı bir küme ve

$$\delta : X \times 2^X \longrightarrow \mathbb{P}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $A \subseteq X$ ve her $\varepsilon \in \mathbb{P}$ için,

$$A^{(\varepsilon)} := \{z \in X \mid \delta(z, A) \leq \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlı olmak üzere;

$$\mathbf{D_1}) \quad \forall x \in X, \forall A \subseteq X : x \in A \Rightarrow \delta(x, A) = 0,$$

$$\mathbf{D_2}) \quad \forall x \in X : \delta(x, \emptyset) = \infty,$$

$$\mathbf{D_3}) \quad \forall x \in X, \forall A, B \subseteq X : \delta(x, A \cup B) = \min \{\delta(x, A), \delta(x, B)\},$$

$$\mathbf{D_4}) \quad \forall x \in X, \forall A \subseteq X, \forall \varepsilon \in \mathbb{P} : \delta(x, A) \leq \delta(x, A^{(\varepsilon)}) + \varepsilon$$

özellikleri sağlamıyor ise, δ fonksiyonuna **uzaklık fonksiyonu** adı verilir (Lowen 1987).

Önerme 4.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\delta : X \times 2^X \rightarrow \mathbb{P}$ biçiminde tanımlı bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere; aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\mathbf{(i)} \quad \forall x \in X, \forall A, B \subseteq X \text{ için } A \subseteq B \Rightarrow \delta(x, B) \leq \delta(x, A)$$

$$\mathbf{(ii)} \quad \forall x \in X, \forall \mathcal{A} \subset 2^X \ni \mathcal{A} \text{ sonlu elemanlı} : \delta(x, \bigcup \mathcal{A}) = \min_{A \in \mathcal{A}} \delta(x, A),$$

$$\mathbf{(iii)} \quad \forall x \in X, \forall A, B \subseteq X : \delta(x, A) \leq \delta(x, B) + \sup_{b \in B} \delta(b, A)$$

dır (Lowen 1987).

Örnek 4.1 (X, d) bir metrik uzay olmak üzere;

$$\delta_d : X \times 2^X \longmapsto \mathbb{P}$$

$$(x, A) \longmapsto \delta_d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

biçiminde tanımlı δ_d fonksiyonu, bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen 1987).

Örnek 4.2 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere;

$$\delta_\tau : X \times 2^X \longmapsto \mathbb{P}$$

$$(x, A) \longmapsto \delta_\tau(x, A) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in cl_\tau(A) \text{ ise} \\ \infty & , \quad x \notin cl_\tau(A) \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı δ_τ fonksiyonu, bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen 2015).

İspat. Her $A \subseteq X$ için, $A \subset cl_\tau(A)$ olduğundan $\delta_\tau(x, A) = 0$ dır. $cl_\tau(\emptyset) = \emptyset$ olduğundan $x \notin cl_\tau(\emptyset)$ olup $\delta_\tau(x, \emptyset) = \infty$ dur. $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\delta_\tau(x, A \cup B) = 0 &\Leftrightarrow x \in cl_\tau(A \cup B) \\ &\Leftrightarrow x \in (cl_\tau(A) \cup cl_\tau(B)) \\ &\Leftrightarrow \min\{\delta_\tau(x, A), \delta_\tau(x, B)\} = 0\end{aligned}$$

ve benzer şekilde, $\delta_\tau(x, A \cup B) = \infty$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\min\{\delta_\tau(x, A), \delta_\tau(x, B)\} = \infty$$

olmasıdır. Son olarak, $(\mathbf{D}_4)$ özelliğinin gerçekleştiğini gösterelim. $\varepsilon = \infty$ durumu açıktır. $\varepsilon < \infty$ ise, δ_τ fonksiyonunun tanımından,

$$A^{(\varepsilon)} = \{x \in X \mid \delta_\tau(x, A) = 0\} = cl_\tau(A)$$

olup $cl_\tau(A) = cl_\tau(cl_\tau(A))$ olduğundan, $\delta_\tau(x, A) = \delta_\tau(x, cl_\tau(A))$ elde edilir. Bu durumda; $\delta_\tau(x, A) \leq \delta_\tau(x, A^{(\varepsilon)}) + \varepsilon$ eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla, δ_τ bir uzaklık fonksiyonudur. ■

Örnek 4.3

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_{\mathbb{P}}(x, y) := x \ominus y\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $d_{\mathbb{P}}$ quasimetriği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \times 2^{\mathbb{P}} &\longmapsto \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta_{\mathbb{P}}(x, A) := \begin{cases} x \ominus \sup A & , \quad A \neq \emptyset \text{ ise} \\ \infty & , \quad A = \emptyset \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\delta_{\mathbb{P}}$ fonksiyonu, bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen 2015).

İspat. $A \subseteq \mathbb{P}$ ve $x \in A$ ise, $A \neq \emptyset$ olup (4.1) den,

$$\delta_{\mathbb{P}}(x, A) = x \ominus \sup A = (x - \sup A) \vee 0$$

dır. $x \in A$ olduğundan, $x \leq \sup A$ olup $\delta_{\mathbb{P}}(x, A) = 0$ dır. $(\mathbf{D}_2)$ özelliğinin gerçekleştiği açıktır. $(\mathbf{D}_3)$ özelliğinin gerçekleştiğini gösterelim: $A, B \subseteq \mathbb{P}$ olsun. $x = \infty$

durumu açıktır. $x \in [0, \infty[$ olsun. $A \cup B \neq \emptyset$ ise, $A \neq \emptyset$ veya $B \neq \emptyset$ olacaktır. $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ ise,

$$\min \{ \delta_{\mathbb{P}}(x, A), \delta_{\mathbb{P}}(x, B) \} = \min \{ (x - \sup A) \vee 0, (x - \sup B) \vee 0 \}$$

olacaktır. $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ ve $\sup B \leq \sup(A \cup B)$ olduğundan,

$$x - \sup(A \cup B) \leq (x - \sup A) \wedge (x - \sup B)$$

dir. O halde,

$$(x - \sup A) \wedge (x - \sup B) \leq x - \sup(A \cup B)$$

eşitsizliği gösterilirse ispat tamamlanır. $x - \sup(A \cup B) = x - \sup_{c \in A \cup B} c < \alpha$ olsun.

Bu durumda; $\sup_{c \in A \cup B} c > x - \alpha$ olup en azından bir $c_0 \in A \cup B$ için $c_0 > x - \alpha$ ve dolayısıyla

$$\exists c_0 \in A : c_0 > x - \alpha \text{ veya } \exists c_0 \in B : c_0 > x - \alpha$$

dır. O halde, $x - \sup A < \alpha$ veya $x - \sup B < \alpha$ olup $\min \{ x - \sup A, x - \sup B \} < \alpha$ olacaktır. $A \neq \emptyset$ ve $B = \emptyset$ ise,

$$\delta_{\mathbb{P}}(x, A \cup B) = \delta_{\mathbb{P}}(x, A) = x \ominus \sup A$$

olup eşitlik gerçekleşir. $A \cup B = \emptyset$ ise, $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olup eşitlik gerçekleşir.

Dolayısıyla, $\delta_{\mathbb{P}}$ fonksiyonu $(\mathbf{D}_3)$ koşulunu sağlar. Son olarak $(\mathbf{D}_4)$ özelliğinin gerçekleştiğini gösterelim: $A \subseteq \mathbb{P}$ olmak üzere; $\varepsilon = \infty$ ya da $\delta_{\mathbb{P}}(x, A^{(\varepsilon)}) = \infty$ durumu açıktır. $\varepsilon < \infty$ ve $x = \infty$ olduğunda eşitsizliğin gerçekleştiği kolaylıkla gösterilebilir. $\varepsilon < \infty$ ve $A = \emptyset$ ise $A^{(\varepsilon)} = \emptyset$ olup eşitsizlik gerçekleşir. $\varepsilon < \infty$, $A \neq \emptyset$ ve $\delta_{\mathbb{P}}(x, A) = \infty$ ise, $x = \infty$ ve $\sup A < \infty$ olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} A^{(\varepsilon)} &= \{ z \mid \delta_{\mathbb{P}}(z, A) \leq \varepsilon \} \\ &= \{ z \mid (z - \sup A) \vee 0 \leq \varepsilon \} = [0, \sup A + \varepsilon] \end{aligned}$$

olup $\sup A < \infty$ olduğundan eşitsizlik gerçekleşir. $\varepsilon < \infty$, $x \in [0, \infty[$ ve $\delta_{\mathbb{P}}(x, A^{(\varepsilon)}) < \infty$ olsun. $x \leq \sup A$ ise, $\delta_{\mathbb{P}}(x, A) = 0$ olup eşitsizlik gerçekleşir. $x \geq \sup A^{(\varepsilon)}$ ise, $x - \sup A = x - \sup A^{(\varepsilon)} + \varepsilon$ olup eşitsizlik gerçekleşir. $\sup A < x < \sup A^{(\varepsilon)}$ ise, $\sup A^{(\varepsilon)} - \sup A = \varepsilon$ olduğundan

$$0 \leq x - \sup A \leq (x - \sup A^{(\varepsilon)}) \vee 0 + \varepsilon$$

olup eşitsizlik gerçekleşir. ■

Örnek 4.4

$$\begin{aligned} d_E : \mathbb{P} \times \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (x, y) &\longrightarrow d_E(x, y) := |x - y| \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d_E metriği yardımıyla,

$$\begin{aligned} \delta_E : \mathbb{P} \times 2^{\mathbb{P}} &\longmapsto \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta_E(x, A) := \begin{cases} 0 & , \quad x = \infty, A \text{ sınırsız ise} \\ \infty & , \quad x = \infty, A \text{ sınırlı ise} \\ \inf_{a \in A} |x - a| & , \quad x \in \mathbb{R}^+ \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanan δ_E fonksiyonu, bir uzaklık fonksiyonudur (Lowen 2015).

İspat. $A \subseteq \mathbb{P}$ olsun. $x = \infty \in A$ ise, A kümesi sınırsız olacaktır. Bu durumda; $\delta_E(x, A) = 0$ dır. $x \in [0, \infty[$ ve $x \in A$ ise, $\delta_E(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a| = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, δ_E fonksiyonu **(D₁)** koşulunu sağlar. $\emptyset$ sınırlı kabul edildiğinden, $x = \infty$ ise, $\delta_E(x, \emptyset) = \infty$ olacağı tanımdan açıktır. $x \in [0, \infty[$ ise,

$$\delta_E(x, \emptyset) = \inf_{a \in \emptyset} |x - a| = \infty$$

dur. Dolayısıyla, δ_E fonksiyonu **(D₂)** koşulunu sağlar. $x \in \mathbb{P}$ ve $A, B \subseteq \mathbb{P}$ olsun. $x = \infty$ olmak üzere; A ve B kümeleri sınırlı ise, $A \cup B$ kümesi sınırlı olup eşitlik gerçekleşir. $x = \infty$ olmak üzere; A ve B kümelerinden en az biri sınırsız ise, $A \cup B$ kümesi sınırsız olup eşitlik gerçekleşir. $x \in [0, \infty[$ olması durumunda, infimum tanımı gereği

$$\delta_E(x, A \cup B) = \inf_{c \in A \cup B} |x - c| \leq \inf_{a \in A} |x - a| \wedge \inf_{b \in B} |x - b|$$

olacaktır. Diğer yandan, $\delta_E(x, A \cup B) < \beta$ ise,

$$\exists c \in A \cup B : |x - c| < \beta$$

dır. Bu durumda; $c \in A$ veya $c \in B$ olacağından,

$$\delta_E(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a| < \beta \text{ veya } \delta_E(x, B) = \inf_{b \in B} |x - b| < \beta$$

olup eşitsizlik gerçekleşir. Dolayısıyla, δ_E fonksiyonu, **(D₃)** koşulunu sağlar. Son olarak, **(D₄)** özelliğinin gerçekleştiğini gösterelim: A kümesi sınırsız ise, her $\varepsilon \in \mathbb{P}$

için $A^{(\varepsilon)}$ sınırsız olup $x = \infty$ olduğunda eşitsizlik gerçekleşir. A kümesi sınırlı, $x = \infty$ ve $\varepsilon < \infty$ olması durumunda,

$$A^{(\varepsilon)} = \{y \mid \delta_E(y, A) < \varepsilon\} = \left\{y \mid \inf_{a \in A} |y - a| < \varepsilon\right\}$$

olacaktır. Herhangi bir $y \in A^{(\varepsilon)}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} |y - a| < \varepsilon &\Rightarrow \exists a_y \in A : |y - a_y| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \exists a_y \in A : y < a_y + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. A sınırlı olduğundan, her $a \in A$ için $a < M$ olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}^+$ mevcuttur. $\delta = M + \varepsilon$ alınırsa;

$$\forall y \in A^{(\varepsilon)} : y < M + \varepsilon$$

olup $A^{(\varepsilon)}$ sınırlıdır. Bu durumda eşitsizlik gerçekleşir. $x \in \mathbb{R}^+$ olsun. Herhangi bir $b \in A^{(\varepsilon)}$ için,

$$\begin{aligned} \delta_E(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a| &= \inf_{a \in A} |x - b + b - a| \\ &\leq \inf_{a \in A} (|x - b| + |b - a|) \\ &= |x - b| + \inf_{a \in A} |b - a| \\ &= |x - b| + \delta_E(b, A) \leq |x - b| + \varepsilon \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \delta_E(x, A) &\leq \inf_{b \in A^{(\varepsilon)}} |x - b| + \varepsilon \\ &= \delta_E(x, A^{(\varepsilon)}) + \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Yaklaşma uzaylarını karakterize eden bir diğer kavram olan limit operatörü, yakınsaklık yapılarına benzer özelliklere sahiptir ve bir noktanın, bir süzgecin limit noktası olmaya ne kadar yakın olduğunu ölçen bir fonksiyon olarak değerlendirilebilir.

Tanım 4.2 X bir küme olmak üzere, $\lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise λ fonksiyonuna X üzerinde bir **limit operatörü** adı verilir.

L₁) $\forall x \in X$ için $\lambda(\dot{x})(x) = 0$,

L₂) $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi olmak üzere; her $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J} \subset \mathbf{F}(X)$ için

$$\lambda \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = \sup_{j \in J} \lambda \mathfrak{F}_j,$$

L₃) Her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve her $\sigma : X \longrightarrow \mathbf{F}(X)$ fonksiyonu için,

$$\lambda \left(\sum \sigma(\mathfrak{F}) \right) \leq \lambda \mathfrak{F} + \sup_{x \in X} \lambda(\sigma(x))(x)$$

dir (Lowen 1987).

Örnek 4.5 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(X) &\longmapsto \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda \mathfrak{F} : X \longmapsto \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \lambda \mathfrak{F}(x) := \begin{cases} 0 & , \mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x \text{ ise} \\ \infty & , \mathfrak{F} \not\xrightarrow{\tau} x \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlı λ fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir limit operatörüdür (Lowen 1987).

İspat. Her $x \in X$ için $N_\tau(x) \leq \dot{x}$ olduğundan, $\lambda(\dot{x})(x) = 0$ dir. (**L₂**) koşulunun gerçekleştiğini gösterelim: $J \neq \emptyset$ bir indis kümesi, $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J} \subset \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olmak üzere; $\lambda \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)(x) = 0$ yani, $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \xrightarrow{\tau} x$ olsun. Bu durumda; her $j \in J$ için $N_\tau(x) \leq \mathfrak{F}_j$ dolayısıyla her $j \in J$ için $\lambda \mathfrak{F}_j(x) = 0$ olup

$$\lambda \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right) = \sup_{j \in J} \lambda \mathfrak{F}_j$$

eşitliği gerçekleşir. $\lambda \left(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)(x) = \infty$ olması durumunda da eşitliğin gerçekleştiği benzer şekilde gösterilebilir. (**L₃**) koşulunun gerçekleştiğini gösterelim: $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$, $x \in X$ ve $\sigma : X \longrightarrow \mathbf{F}(X)$ bir fonksiyon olsun. $\lambda \left(\sum \sigma(\mathfrak{F}) \right)(x) = 0$ olması durumunda eşitsizlik gerçekleşir. $\lambda \left(\sum \sigma(\mathfrak{F}) \right)(x) = \infty$ ise (4.3) den, $\sum \sigma(\mathfrak{F})$ süzgeci, (X, τ) topolojik uzayında x noktasına yakınsak değildir. O halde,

$$\exists V \in N_\tau(x) \ni V \notin \sum \sigma(\mathfrak{F})$$

olup Önerme 2.5 (i) den,

$$\forall F \in \mathfrak{F} \text{ için } V \notin \bigcap_{x \in F} \sigma(x)$$

ve dolayısıyla,

$$\forall F \in \mathfrak{F} \text{ için } \exists x_0 \in F \ni V \notin \sigma(x_0)$$

olduğu görülür. Bu durumda; $N_\tau(x_0) \not\leq \sigma(x_0)$ olup $\lambda(\sigma(x_0))(x_0) = \infty$ olacağından, eşitsizliğin sağ tarafı ∞ olarak elde edilir. Böylece $(\mathbf{L}_3)$ koşulu sağlanır. ■

Örnek 4.6 X bir küme ve her $A \subseteq X$ için,

$$\begin{aligned} \theta_A : X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \theta_A(x) := \begin{cases} 0 & , \ x \in A \text{ ise} \\ \infty & , \ x \notin A \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmak üzere;

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda\mathfrak{F} := \begin{cases} \theta_{\{x\}} & , \ \mathfrak{F} = \dot{x} \text{ ise} \\ \infty & , \ \mathfrak{F} \neq \dot{x} \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

biçiminde tanımlı λ fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir limit operatörüdür (Lowen 1987).

İspat. $(\mathbf{L}_1)$ koşulunun sağlandığı açıktır. $(\mathbf{L}_2)$ koşulunun sağlandığını gösterelim:

$J \neq \emptyset$ bir indis kümesi, $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J} \subset \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda; $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \dot{x}$

ise, her $j \in J$ için $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \leq \mathfrak{F}_j$ ve $\dot{x}$ ultrasüzgeç olduğundan, her $j \in J$ için $\mathfrak{F}_j = \dot{x}$

olmalıdır. Dolayısıyla, $\sup_{j \in J} \lambda\mathfrak{F}_j = \theta_{\{x\}}$ elde edilir. Diğer yandan, $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \neq \dot{x}$ ise,

$$\exists B \in \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j \ni x \notin B$$

dir. Bu durumda; her $j \in J$ için $\mathfrak{F}_j \neq \dot{x}$ olup $\sup_{j \in J} \lambda\mathfrak{F}_j(x) = \infty$ elde edilir. Dolayısıyla,

λ fonksiyonu $(\mathbf{L}_2)$ koşulunu sağlar. Son olarak, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $\sigma : X \longrightarrow \mathbf{F}(X)$ fonksiyonu için,

$$\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) \leq \lambda\mathfrak{F} + \sup_{x \in X} \lambda(\sigma(x))(x)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini göstermemiz gerekir. $x \in X$ ve $\sum \sigma(\mathfrak{F}) = \dot{x}$ ise, $\lambda(\sum \sigma(\mathfrak{F})) = \theta_{\{x\}}$ olup eşitsizliğin sol tarafı 0 olacaktır. $x \in X$ ve $\sum \sigma(\mathfrak{F}) \neq \dot{x}$ olsun. Bu durumda; bir $G \in \sum \sigma(\mathfrak{F})$ için $x \notin G$ dir. Önerme 2.5 (i) den,

$$G \in \sum \sigma(\mathfrak{F}) \iff \exists F_0 \in \mathfrak{F} \ni \forall z \in F_0 : G \in \sigma(z)$$

dir. Bu durumda; $x \in F_0$ ise,

$$\sup_{x \in X} \sigma(x)(x) \geq \sup_{z \in F_0} \sigma(z)(z) = \infty$$

ve $x \notin F_0$ ise, $\mathfrak{F} \neq \dot{x}$ olup $\lambda \mathfrak{F}(x) = \infty$ olacağından eşitsizlik gerçekleşir, $(\mathbf{L}_3)$ koşulu sağlanır. ■

Bir X kümesi üzerinde, uzaklık fonksiyonu veya limit operatörü verildiğinde, verilen yapı yardımıyla diğer yapı elde edilebilir. Aşağıda verilen teoremler yardımıyla, uzaklık fonksiyonu ve limit operatörü kavramlarının eş matematiksel kavramlar olduğu elde edilmiştir.

Teorem 4.1 $(\delta \Rightarrow \lambda)$ X bir küme ve δ , X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(X) &\longmapsto \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda \mathfrak{F} := \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}} \delta_U \end{aligned}$$

fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir limit operatörüdür. Ayrıca,

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall A \subseteq X \text{ için } \delta(x, A) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U}(x)$$

dir (Lowen 1987).

Teorem 4.2 $(\lambda \Rightarrow \delta)$ X bir küme ve λ , X üzerinde bir limit operatörü olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \delta : X \times 2^X &\longmapsto \mathbb{P} \\ (x, A) &\longrightarrow \delta(x, A) := \inf_{\mathcal{U} \in \mathbf{U}(A)} \lambda \mathcal{U}(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu, X üzerinde bir uzaklık fonksiyonudur. Ayrıca,

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X), \forall x \in X \text{ için } \lambda \mathfrak{F}(x) = \sup_{U \in \text{sec } \mathfrak{F}} \delta(x, U)$$

dir (Lowen 1987).

Tanım 4.3 X ve X' iki küme, δ ve δ' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonu ve $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için,

$$\delta'(f(x), f(A)) \leq \delta(x, A)$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise, f fonksiyonuna (X, δ) dan (X, δ') ye tanımlı bir **büzülme dönüşümü** adı verilir (Lowen 1987).

Örnek 4.7 X bir küme olmak üzere; her $A \subseteq X$ için

$$\begin{aligned} \delta_A : (X, \delta) &\longmapsto (\mathbb{P}, \delta_{\mathbb{P}}) \\ x &\longrightarrow \delta_A(x) := \delta(x, A) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı δ_A fonksiyonu bir büzülme dönüşümüdür (Lowen 1987).

İspat. $x \in X$ ve $B \subseteq X$ olsun. $B = \emptyset$ ise $\delta(x, B) = \infty$ olup Tanım 4.3 de verilen eşitsizlik gerçekleşir. $B \neq \emptyset$ olsun. (4.1) den,

$$\delta_{\mathbb{P}}(\delta_A(x), \delta_A(B)) = \delta_A(x) \ominus \sup_{b \in B} \delta_A(b)$$

dir. Bu durumda; Önerme 4.1 (iii) ve $\ominus$ işleminin tanımından,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{P}}(\delta_A(x), \delta_A(B)) &\leq \left(\delta(x, B) + \sup_{b \in B} \delta_A(b) \right) \ominus \sup_{b \in B} \delta_A(b) \\ &= \delta(x, B) \vee 0 = \delta(x, B) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, δ_A fonksiyonu bir büzülme dönüşümüdür. ■

Örnek 4.8 (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere; $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ sürekli bir fonksiyon ise, $f : (X, \delta_{\tau}) \longrightarrow (Y, \delta_{\tau'})$ fonksiyonu bir büzülme dönüşümüdür (Lowen 1987).

Tanım 4.4 X bir küme, δ ve δ' , X üzerinde tanımlı iki uzaklık fonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} id_X : (X, \delta') &\longmapsto (X, \delta) \\ x &\longrightarrow id_X(x) := x \end{aligned}$$

birim fonksiyonu büzülme dönüşümü oluyor ise, δ' fonksiyonu δ fonksiyonundan daha incedir (veya δ fonksiyonu δ' fonksiyonundan daha kabadır) denir. Bu durum $\delta \leq \delta'$ biçiminde gösterilir (Lowen 1987).

Önerme 4.2 X ve X' iki küme, λ ve λ' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı iki limit operatörü ve $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda; f fonksiyonunun büzülme dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul,

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \lambda'(f[\mathfrak{F}]) \circ f \leq \lambda \mathfrak{F}$$

olmasıdır (Lowen 1987).

O halde, uzaklık fonksiyonu veya limit operatörü kavramlarından herhangi biri ile donatılmış bir küme, aynı matematiksel varlığı ifade eder.

Tanım 4.5 X bir küme olmak üzere; $\mathfrak{S}$ ile, X üzerinde tanımlı bir uzaklık fonksiyonu veya bir limit operatörü gösterilsin. Bu durumda; $\mathfrak{S}$, X üzerinde bir **yaklaşma yapısı** olarak adlandırılır. $(X, \mathfrak{S})$ ikilisine ise **yaklaşma uzayı** adı verilir (Lowen 1987).

X bir küme olmak üzere; X üzerinde Örnek 4.2 de tanımlanan δ_τ fonksiyonu ele alındığında, X üzerinde tanımlı her τ topolojisine karşılık bir uzaklık fonksiyonu tanımlanabileceği görülmüştür. (X, δ) bir yaklaşma uzayı olmak üzere; X üzerinde tanımlı bir τ topolojisi için $\delta = \delta_\tau$ oluyor ise (X, δ) ikilisine **topolojik yaklaşma uzayı** adı verilir. Benzer şekilde, X üzerinde tanımlı bir d metriği için $\delta = \delta_d$ oluyor ise (X, δ) ikilisi **metrik yaklaşma uzayı** olarak adlandırılır.

Nesneleri yaklaşma uzayları, morfizmleri yaklaşma uzayları arasında tanımlı büzülme dönüşümleri olan kategori **Ap** ile gösterilir. **Ap** kategorisi bir topolojik kategoridir. (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere; $f : X \rightarrow Y$ biçiminde tanımlı bir f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f : (X, \delta_\tau) \rightarrow (Y, \delta_{\tau'})$ fonksiyonunun büzülme dönüşümü olmasıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Ap} \\ \tau & \longrightarrow & \delta_\tau \\ f & \longrightarrow & f \end{array}$$

biçiminde tanımlı F fonktoru bir dolu fonktor olduğundan **Top** kategorisi **Ap** kategorisinin bir dolu alt kategorisidir. Ayrıca, **Top** kategorisi **Ap** kategorisinin yansımalı ve ko-yansımalı bir alt kategorisidir. **Ap** kategorisi **Conv** kategorisinin aksine

kartezyen kapalı değildir, ancak kartezyen kapalı bir süperkategoriye sahiptir (Lowen 1987). Bu kategori, 5. bölümde incelenecektir.



5. YAKINSAMA-YAKLAŞMA UZAYLARI

Bu bölümde; yakınsama-yaklaşma uzayları ve yakınsama-yaklaşma uzayları arasında tanımlı morfizmler ifade edilerek, sırasıyla 3.3 ve 4. bölümde verilen **Conv** ve **Ap** kategorilerinin bir süperkategorisi tanımlanacaktır. Yakınsama-yaklaşma uzaylarını karakterize eden matematiksel yapılar, yakınsaklık yapılarına benzer özelliklere sahip olup yaklaşma uzaylarını karakterize eden limit operatörlerinin Tanım 4.2 de verilen $(\mathbf{L}_3)$ koşulu kaldırılarak ve $(\mathbf{L}_2)$ koşulu zayıflatılarak tanımlanmıştır. Yakınsama-yaklaşma ifadesi yerine kısalık bakımından **Cap** (convergence-approach) ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 5.1 X bir küme, $\lambda : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbb{P}^X$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

i) $\forall x \in X$ için $\lambda(\overset{\bullet}{x})(x) = 0$

ii) $\forall \mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}) = \lambda\mathfrak{F} \vee \lambda\mathcal{G}$

özellikleri sağlanıyor ise, λ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir **yakınsama-yaklaşma limit operatörü** (kısaca **Cap-limit**), (X, λ) ikilisine ise **yakınsama-yaklaşma uzayı** (kısaca **Cap-uzay**) adı verilir (Lowen 1988).

Her sonlu derinlikli yakınsaklık yapısına karşılık bir Cap-limit tanımlanabileceği, aşağıda verilen önerme ile açıklanmıştır.

Önerme 5.1 (X, ξ) sonlu derinlikli bir yakınsama uzayı olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \lambda_\xi : \mathbf{F}(X) &\longmapsto \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda_\xi \mathfrak{F} : X \longmapsto \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \lambda_\xi \mathfrak{F}(x) := \begin{cases} 0 & , (\mathfrak{F}, x) \in \xi \text{ ise} \\ \infty & , (\mathfrak{F}, x) \notin \xi \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlanan λ_ξ fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir Cap-limittir. λ_ξ fonksiyonuna, ξ **bağıntısına karşılık gelen Cap-limit** adı verilir (Lowen 1988).

İspat. ξ , X kümesi üzerinde bir yakınsaklık yapısı olduğundan, her $x \in X$ için $(\overset{\bullet}{x}, x) \in \xi$ olup (5.1) den, $\lambda_\xi(\overset{\bullet}{x})(x) = 0$ dır. Diğer yandan, $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak

üzere; her $x \in X$ için, $\lambda_\xi \mathfrak{F}(x) \vee \lambda_\xi \mathcal{G}(x) = 0$ ise $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ ve $(\mathcal{G}, x) \in \xi$ olur. ξ , X kümesi üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısı olduğundan, $(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}, x) \in \xi$ olup (5.1) den, $\lambda_\xi(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) = 0$ dır. Ayrıca, her $x \in X$ için, $\lambda_\xi(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) = 0$ ise, (5.1) den, $(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}, x) \in \xi$ olup Tanım 3.1 (i) den, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ ve $(\mathcal{G}, x) \in \xi$ olur. Dolayısıyla, $\lambda_\xi \mathfrak{F}(x) \vee \lambda_\xi \mathcal{G}(x) = 0$ dır. Diğer yandan, her $x \in X$ için,

$$\lambda_\xi \mathfrak{F}(x) \vee \lambda_\xi \mathcal{G}(x) = \infty \Leftrightarrow \lambda_\xi(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) = \infty$$

önermesinin gerçekleştiği benzer şekilde gösterilebilir. O halde, her $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}) = \lambda \mathfrak{F} \vee \lambda \mathcal{G}$ olup ispat tamamlanır. ■

Tanım 5.2 (X, λ) ve (X', λ') iki Cap-uzay ve $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \lambda' (f[\mathfrak{F}]) \circ f \leq \lambda \mathfrak{F}$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise, f fonksiyonuna, Cap-uzaylar arasında tanımlı bir **büzülme dönüşümü** adı verilir (Lowen 1988).

(X, λ) ve (Y, λ') iki Cap-uzay olmak üzere; X ve Y uzayları arasında tanımlı tüm büzülme dönüşümlerinin kümesi, $Mor_{Cap}(X, Y)$ veya $Mor_{Cap}(\lambda, \lambda')$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.3 X bir küme, λ ve λ' , X üzerinde tanımlı iki Cap-limit olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} id_X : (X, \lambda') &\longmapsto (X, \lambda) \\ x &\longrightarrow id_X(x) := x \end{aligned}$$

birim fonksiyonu büzülme dönüşümü oluyor ise, λ' fonksiyonu λ fonksiyonundan daha incedir (veya λ fonksiyonu λ' fonksiyonundan daha kabadır) denir ve $\lambda \leq \lambda'$ biçiminde gösterilir (Lowen 1988).

Tanım 5.4 Nesneleri Cap-uzaylar, morfizmleri Cap-uzaylar arasında tanımlı büzülme dönüşümleri olan kategori **Cap** ile gösterilir (Lowen 1988).

Teorem 5.1 X bir küme, J herhangi bir indis kümesi, $\{(X_j, \lambda_j)\}_{j \in J}$ Cap-uzayların bir ailesi olsun ve $\{f_j : X \longrightarrow (X_j, \lambda_j)\}_{j \in J}$ fonksiyon ailesi verilsin. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \lambda_{in} : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda_{in}\mathfrak{F} := \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\mathfrak{F}]) \circ f_j \end{aligned} \quad (5.2)$$

biçiminde tanımlı λ_{in} fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir Cap-limittir. λ_{in} fonksiyonuna, $\{f_j\}_{j \in J}$ ailesine karşılık gelen **başlangıç Cap-limit** adı verilir (Lowen 1988).

İspat. $\{(X_j, \lambda_j)\}_{j \in J}$ Cap-uzayların bir ailesi ve her $j \in J$, herhangi bir $x \in X$ için $\{f_j(x)\}^\bullet = f_j[x^\bullet]$ olduğundan,

$$\lambda_j(f_j[x^\bullet])(f_j(x)) = 0$$

olur. O halde, (5.2) den, $\lambda_{in}(x^\bullet)(x) = 0$ dır. Diğer yandan, $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere, her $j \in J$ için,

$$f_j[\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}] = f_j[\mathfrak{F}] \cap f_j[\mathcal{G}]$$

ve λ_j, X_j kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan, herhangi bir $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \lambda_{in}(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) &= \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}])(f_j(x)) \\ &= \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\mathfrak{F}] \cap f_j[\mathcal{G}])(f_j(x)) \\ &= \sup_{j \in J} [\lambda_j(f_j[\mathfrak{F}])(f_j(x)) \vee \lambda_j(f_j[\mathcal{G}])(f_j(x))] \\ &= \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\mathfrak{F}])(f_j(x)) \vee \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\mathcal{G}])(f_j(x)) \\ &= \lambda_{in}\mathfrak{F}(x) \vee \lambda_{in}\mathcal{G}(x) \end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşir. O halde, λ_{in} fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir Cap-limittir. Son olarak, λ_{in} fonksiyonunun $\{f_j\}_{j \in J}$ ailesine karşılık gelen başlangıç yapısı olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $(X', \lambda') \in |Cap|$, $g : X' \longrightarrow X$ bir fonksiyon ve her $j \in J$ için $f_j \circ g \in Mor_{Cap}(X', X_j)$ olsun. g fonksiyonunun büzülme dönüşümü olduğunu göstermek için, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X')$ olmak üzere; Tanım 5.2 gereğince,

$$\lambda_{in}(g[\mathfrak{F}]) \circ g \leq \lambda' \mathfrak{F}$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekir. Hipotezden, her $j \in J$ için $\lambda_j((f_j \circ g)[\mathfrak{F}]) \circ (f_j \circ g) \leq \lambda' \mathfrak{F}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda;

$$\sup_{j \in J} \lambda_j(f_j(g[\mathfrak{F}])) \circ (f_j \circ g) \leq \lambda' \mathfrak{F}$$

olup (5.2) den, $\lambda_{in}(g[\mathfrak{F}]) \circ g \leq \lambda' \mathfrak{F}$ elde edilir. Diğer yandan, $(X', \lambda') \in |Cap|$ ve $g \in Mor_{Cap}(X', X)$ olsun. Her $j \in J$ için, $f_j \circ g : X' \longrightarrow X_j$ fonksiyonunun bütülme dönüşümü olduğunu göstermek için, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X')$ olmak üzere;

$$\lambda_j((f_j \circ g)[\mathfrak{F}]) \circ (f_j \circ g) \leq \lambda' \mathfrak{F}$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekir. Hipotezden, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X')$ için $\lambda_{in}(g[\mathfrak{F}]) \circ g \leq \lambda' \mathfrak{F}$ olup (5.2) den,

$$\sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[g[\mathfrak{F}]]) \circ (f_j \circ g) = \sup_{j \in J} \lambda_j((f_j \circ g)[\mathfrak{F}]) \circ (f_j \circ g) \leq \lambda' \mathfrak{F}$$

elde edilir. O halde, her $j \in J$ için

$$\lambda_j((f_j \circ g)[\mathfrak{F}]) \circ (f_j \circ g) \leq \lambda' \mathfrak{F}$$

olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 5.1 (X, λ) ve (Y, λ') iki Cap-uzay olsun. Bu durumda; $\mathcal{H} \in \mathbf{F}(X \times Y)$ ve $(x, y) \in X \times Y$ olmak üzere; $X \times Y$ kümesi üzerinde,

$$(\lambda \times \lambda') \mathcal{H}(x, y) := \lambda(p_1[\mathcal{H}](x)) \vee \lambda'(p_2[\mathcal{H}](y)) \quad (5.3)$$

biçiminde tanımlanan $\lambda \times \lambda'$ fonksiyonuna **çarpım Cap-limit** adı verilir (Lowen 1988).

Teorem 5.2 Cap kategorisi bir topolojik kategoridir (Lowen 1988).

İspat. (X, λ) ve (Y, λ') iki Cap-uzay olmak üzere;

$$\begin{aligned} U : Mor_{Cap}(X, Y) &\longrightarrow Mor_{Set}(X, Y) \\ f &\longrightarrow U(f) := f \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı U dönüşümü morfizmler üzerinde birebir olduğundan düzenli bir fonktor olup Cap kategorisi bir belirli kategoridir. I bir indis kümesi olmak üzere; herhangi bir X kümesi üzerinde tanımlı Cap-limitlerin ailesi $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, $i, j \in I$ olmak üzere;

$$\lambda_i \leq \lambda_j \iff id_X : (X, \lambda_j) \longrightarrow (X, \lambda_i) \text{ bütülme dönüşümü}$$

biçiminde tanımlanan “ $\leq$ ” bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Ayrıca, $X = \{x\}$ olmak üzere; X kümesi üzerinde, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için,

$$\begin{aligned}\lambda\mathfrak{F} : X &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \lambda\mathfrak{F}(x) := 0\end{aligned}$$

biçiminde bir tek Cap-limit tanımlanabilir. Diğer yandan, Teorem 5.1 de, **Cap** kategorisinin başlangıç yapılarına sahip olduğu gösterilmiştir. ■

Önerme 5.2 X ve Y iki Cap-uzay olsun. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$, $\Psi \in \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y))$ ve her $\varphi \in \Psi$, $F \in \mathfrak{F}$ için

$$\varphi(F) := \{g(x) \mid g \in \varphi, x \in F\} = \bigcup_{g \in \varphi} g(F) \quad (5.4)$$

olmak üzere;

$$\Psi_{\mathfrak{F}} := \{\varphi(F) \mid \varphi \in \Psi, F \in \mathfrak{F}\}^{\uparrow} \quad (5.5)$$

biçiminde tanımlı $\Psi_{\mathfrak{F}}$ ailesi Y kümesi üzerinde bir süzgeçtir (Lowen 1988).

İspat. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$, $\Psi \in \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y))$ ve $\mathcal{S} := \{\varphi(F) \mid \varphi \in \Psi, F \in \mathfrak{F}\}$ olmak üzere; $\mathcal{S}$ ailesinin Y kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı olduğunu göstermemiz gerekir. Her $\varphi \in \Psi$ ve her $F \in \mathfrak{F}$ için $\varphi(F) \neq \emptyset$ olup $\emptyset \notin \mathcal{S}$ dir. Diğer yandan, $K, H \in \mathcal{S}$ ise, (5.5) den, $\varphi_1(F_1) = K$ ve $\varphi_2(F_2) = H$ olacak biçimde $\varphi_1, \varphi_2 \in \Psi$ ve $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ vardır. Bu durumda; $\varphi_1 \cap \varphi_2 \in \Psi$ ve $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ için $S := (\varphi_1 \cap \varphi_2)(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{S}$ olup

$$S \subseteq \varphi_1(F_1) \cap \varphi_2(F_2) = K \cap H$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

(X, λ_X) ve (Y, λ_Y) iki Cap-uzay, $\Psi \in \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y))$, $f \in Mor_{Cap}(X, Y)$ olsun, ve

$$L(\Psi, f) := \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X) : \lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha\} \quad (5.6)$$

biçiminde ele alınsın. $\infty \in L(\Psi, f)$ olup $L(\Psi, f) \neq \emptyset$ dir ve tanımı gereği $L(\Psi, f)$ kümeleri, $\mathbb{P}$ kümesinin $[\beta_f, \infty]$ biçiminde alt aralıklarıdır. Eğer, $\{f\} \in \Psi$ ise (5.5) den, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $f[\mathfrak{F}] \subset \Psi_{\mathfrak{F}}$ elde edilir. λ_Y , Y kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan, Tanım 5.1 (ii) den,

$$\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \lambda_Y(f[\mathfrak{F}]) \circ f$$

yazılabilir. Ayrıca, $f \in Mor_{Cap}(X, Y)$ olduğundan, her $\alpha \in \mathbb{P}$ için,

$$\lambda_Y(f[\mathfrak{F}]) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha$$

ve böylece

$$\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha \quad (5.7)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla, $L(\Psi, f) = \mathbb{P}$ olacaktır. Diğer yandan, $f \in Mor_{Cap}(X, Y) \ni \{f\} \notin \Psi$ olsun. Bu durumda; $x \in X$ ve $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $\lambda_X \mathfrak{F}(x) = 0$ ise, $\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}})(f(x)) \neq 0$ olabileceğinden,

$$\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha$$

eşitsizliğinin gerçekleşebilmesi için $\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}})(f(x)) \leq \alpha$ olmalıdır. Dolayısıyla, $L(\Psi, f)$ kümesi içinde bahsi geçen $\alpha \in \mathbb{P}$ ögeleri, Y kümesi üzerinde tanımlı $\Psi_{\mathfrak{F}}$ süzgecinin Ψ süzgecine ait olmayan bir f fonksiyonu için, $f(x)$ değerine yakınsama derecesini sınırlandırır.

Örnek 5.2 (X, λ_X) ve (Y, λ_Y) iki Cap-uzay, $\Psi \in \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y))$ ve $f \in Mor_{Cap}(X, Y)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y)) &\longmapsto \mathbb{P}^{Mor_{Cap}(X, Y)} \\ \Psi &\longrightarrow \lambda\Psi := \inf L(\Psi, \cdot) \end{aligned} \quad (5.8)$$

biçiminde tanımlı λ fonksiyonu, $Mor_{Cap}(X, Y)$ üzerinde bir Cap-limittir (Lowen 1988).

İspat. $f \in Mor_{Cap}(X, Y)$ olsun. Bu durumda; her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve her $\alpha \in \mathbb{P}$ için $\lambda_Y(f[\mathfrak{F}]) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha$ eşitsizliği gerçekleşir. Ayrıca, (5.5) gereğince, $(\dot{f})_{\mathfrak{F}} \in \mathbf{F}(Y)$ ve $f[\mathfrak{F}] = (\dot{f})_{\mathfrak{F}}$ olduğundan, $\lambda_Y((\dot{f})_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha$ eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla, (5.6) dan, $L(\dot{f}, f) = \mathbb{P}$ ve (5.8) den,

$$\lambda(\dot{f})(f) = \inf L(\dot{f}, f) = 0$$

olup λ fonksiyonu için, Tanım 5.1 de verilen (i) koşulu sağlanır. Diğer yandan, $\Psi, \Phi \in \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y))$ ve $\alpha_{\Psi}, \alpha_{\Phi} \geq 0$ olmak üzere;

$$L(\Psi, f) := [\alpha_{\Psi}, \infty] \text{ ve } L(\Phi, f) := [\alpha_{\Phi}, \infty]$$

olarak ele alınırsa, $L(\Psi, f) \cap L(\Phi, f) = [\alpha_\Psi \vee \alpha_\Phi, \infty]$ olacaktır. Bu durumda; (5.8) den,

$$\begin{aligned}\lambda\Psi(f) \vee \lambda\Phi(f) &= \inf L(\Psi, f) \vee \inf L(\Phi, f) \\ &= \alpha_\Psi \vee \alpha_\Phi \\ &= \inf(L(\Psi, f) \cap L(\Phi, f))\end{aligned}$$

dir. O halde,

$$L(\Psi, f) \cap L(\Phi, f) = L(\Psi \cap \Phi, f) \quad (5.9)$$

eşitliği gösterilirse, ispat tamamlanır. (5.9) eşitliğini göstermek için,

$$\Psi_{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\mathfrak{F}} = (\Psi \cap \Phi)_{\mathfrak{F}}$$

olduğunu görmek yeterlidir. $S \in \Psi_{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\mathfrak{F}}$ ise, (5.5) den,

$$\exists \sigma \in \Psi, \exists F_1 \in \mathfrak{F} \ni \sigma(F_1) \subset S$$

ve

$$\exists \psi \in \Phi, \exists F_2 \in \mathfrak{F} \ni \psi(F_2) \subset S$$

dir. $F_3 := F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ ve $\mu := \sigma \cup \psi \in \Psi \cap \Phi$ olarak ele alınırsa, $\mu(F_3) \in (\Psi \cap \Phi)_{\mathfrak{F}}$ olup $\mu(F_3) \subset S$ olduğundan $S \in (\Psi \cap \Phi)_{\mathfrak{F}}$ olacaktır. Tersine, $S \in (\Psi \cap \Phi)_{\mathfrak{F}}$ ise,

$$\exists \mu \in \Psi \cap \Phi, \exists K \in \mathfrak{F} \ni \mu(K) \subset S$$

dir. Bu durumda; $\mu(K) \in \Psi_{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\mathfrak{F}}$ olup $S \in \Psi_{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\mathfrak{F}}$ elde edilir. Dolayısıyla, (5.9) eşitliğinde, eşitliğin her iki tarafının infimumu alınırsa (5.8) den, $\lambda(\Psi \cap \Phi) = \lambda\Psi \vee \lambda\Phi$ elde edilir. O halde λ fonksiyonu için, Tanım 5.1 de verilen (ii) koşulu sağlar. ■

Önerme 5.1 de, sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısına bir Cap-limitin nasıl karşılık getirileceği ifade edilmiştir. Bu durumda, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Önerme 5.3 (X, ξ) ve (Y, σ) iki sonlu derinlikli yakınsama uzayı olsun. Bu durumda; aşağıdaki önermeler denktir.

- i) $f \in C(\xi, \sigma)$
 - ii) $f \in Mor_{Cap}(\lambda_\xi, \lambda_\sigma)$
- (Lowen 1988).

Teorem 5.3 **Conv** kategorisi **Cap** kategorisinin bir dolu alt kategorisidir (Lowen 1988).

İspat. (X, ξ) bir yakınsama uzayı olmak üzere; her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve her $x \in X$ için

$$\lambda_{\xi}\mathfrak{F}(x) := \begin{cases} 0 & , \quad (\mathfrak{F}, x) \in \xi \text{ ise} \\ \infty & , \quad (\mathfrak{F}, x) \notin \xi \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Conv} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Cap} \\ f & \longrightarrow & f \\ \xi & \longrightarrow & \lambda_{\xi} \end{array}$$

F funktoru bir dolu funktordur. ■

Önerme 5.4 (X, λ) bir Cap-uzay olmak üzere;

$$\xi_{\lambda} := \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \lambda\mathfrak{F}(x) < \infty\} \quad (5.10)$$

bağıntısı X üzerinde sonlu derinlikli bir yakınsaklık yapısıdır (Lowen 1988).

İspat. λ , X kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan, her $x \in X$ için $\lambda(\overset{\bullet}{x})(x) = 0$ olup $(\overset{\bullet}{x}, x) \in \xi_{\lambda}$ dır. Diğer yandan, $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$, $\mathfrak{F} \leq \mathcal{G}$ ise, her $x \in X$ için Tanım 5.1 (ii) den, $\lambda\mathcal{G}(x) \leq \lambda\mathfrak{F}(x)$ elde edilir. Bu durumda; $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_{\lambda}$ ise, $\lambda\mathfrak{F}(x) < \infty$ ve böylece $\lambda\mathcal{G}(x) < \infty$ olacağından $(\mathcal{G}, x) \in \xi_{\lambda}$ elde edilir. ξ_{λ} bağıntısının sonlu derinlikli olduğunu gösterelim: $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; $(\mathfrak{F}, x) \in \xi_{\lambda}$ ve $(\mathcal{G}, x) \in \xi_{\lambda}$ ise, $\lambda\mathfrak{F}(x) < \infty$ ve $\lambda\mathcal{G}(x) < \infty$ dir. Bu durumda; $\lambda\mathfrak{F}(x) \vee \lambda\mathcal{G}(x) < \infty$ olup λ , X kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan, $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) < \infty$ olacaktır. Dolayısıyla, $(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G}, x) \in \xi_{\lambda}$ elde edilir. ■

Önerme 5.5 (X, λ) bir Cap-uzay olmak üzere; aşağıdaki önermeler denktir.

i) λ , X kümesi üzerinde tanımlı sonlu derinlikli bir ξ yakınsaklık yapısı tarafından üretilir.

ii) Her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda\mathfrak{F}(X) \subset \{0, \infty\}$ dir.

(Lowen 1988).

İspat. λ , X kümesi üzerinde tanımlı sonlu derinlikli bir ξ yakınsaklık yapısı tarafından üretiliyor ise, $\lambda = \lambda_\xi$ olup (5.1) den, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda\mathfrak{F}(X) \subset \{0, \infty\}$ dir. Diğer yandan; her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda\mathfrak{F}(X) \subset \{0, \infty\}$ ise, (5.10) da verilen ξ_λ için (5.1) gereğince, $\lambda_{\xi_\lambda} = \lambda$ eşitliği gerçekleşir. ■

Teorem 5.4 **Conv** kategorisi **Cap** kategorisinin bi-yansımali bir alt kategorisidir (Lowen 1988).

İspat. **Cap** kategorisi bir topolojik kategoridir ve Teorem 5.3 de, **Conv** kategorisinin **Cap** kategorisinin bir dolu alt kategorisi olduğu gösterilmiştir. (X, λ) bir Cap-uzay olmak üzere;

$$\begin{aligned} \lambda^* : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda^*\mathfrak{F} : X \longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \lambda^*\mathfrak{F}(x) := \begin{cases} 0 & , \lambda\mathfrak{F}(x) < \infty \\ \infty & , \lambda\mathfrak{F}(x) = \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

biçiminde tanımlı λ^* fonksiyonu X kümesi üzerinde bir Cap-limit olup $\lambda^* \leq \lambda$ dir. λ , X kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan, her $x \in X$ için $\lambda(\dot{x})(x) = 0$ olup (5.11) den, $\lambda^*(\dot{x})(x) = 0$ dir. Dolayısıyla λ^* fonksiyonu, Tanım 5.1 de verilen (i) koşulunu sağlar. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olmak üzere;

$$\lambda\mathfrak{F}(x) < \infty \text{ ve } \lambda\mathcal{G}(x) < \infty$$

ise, λ , X kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) < \infty$ olup (5.11) den,

$$\lambda^*\mathfrak{F}(x) \vee \lambda^*\mathcal{G}(x) = 0 = \lambda^*(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x)$$

elde edilir. Eğer,

$$\lambda\mathfrak{F}(x) = \infty \text{ ve } \lambda\mathcal{G}(x) = \infty$$

ise, $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) = \infty$ olup (5.11) den, $\lambda^*\mathfrak{F}(x) \vee \lambda^*\mathcal{G}(x) = \infty = \lambda^*(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x)$ elde edilir. $\lambda\mathfrak{F}(x) = \infty$ ve $\lambda\mathcal{G}(x) < \infty$ olması durumunda da $\lambda^*\mathfrak{F}(x) \vee \lambda^*\mathcal{G}(x) = \lambda^*(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x)$ eşitliği benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla, λ^* fonksiyonu, Tanım 5.1 de verilen (ii) koşulunu sağlar. $\lambda^* \leq \lambda$ olduğunu göstermek için, Tanım 5.3

gereğince,

$$\begin{aligned} id_X : (X, \lambda) &\longrightarrow (X, \lambda^*) \\ x &\longrightarrow id_X(x) := x \end{aligned}$$

fonksiyonun büzülme dönüşümü olduğunu, yani, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve herhangi bir $x \in X$ için $\lambda^*\mathfrak{F}(x) \leq \lambda\mathfrak{F}(x)$ eşitsizliğini göstermemiz gerekir. $\lambda\mathfrak{F}(x) = \infty$ ve $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = 0$ durumları için eşitsizliğin gerçekleştiği açıktır. $\lambda\mathfrak{F}(x) < \infty$ ise, (5.11) den, $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = 0$ dır. $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = \infty$ ise, (5.11) den, $\lambda\mathfrak{F}(x) = \infty$ olup $\lambda^*\mathfrak{F}(x) \leq \lambda\mathfrak{F}(x)$ eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla, $\lambda^* \leq \lambda$ dır. Diğer yandan, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda^*\mathfrak{F}(X) \subset \{0, \infty\}$ olduğundan, Önerme 5.5 gereğince, λ^* , X kümesi üzerinde tanımlı bir ξ yakınsaklık yapısından üretilir. (5.10) dan,

$$\xi := \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \lambda\mathfrak{F}(x) < \infty\}$$

bağıntısı bir yakınsaklık yapısı olup $\lambda^* = \lambda_\xi$ dir. $\lambda^* = \lambda_\xi$ eşitliğini göstermek için, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olmak üzere; $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = \lambda_\xi\mathfrak{F}(x)$ eşitliğini göstermemiz gerekir. $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = 0$ ise, (5.11) den, $\lambda\mathfrak{F}(x) < \infty$ olup ξ bağıntısının tanımından, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ dir. Bu durumda; (5.1) den, $\lambda_\xi\mathfrak{F}(x) = 0$ dır. $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = \infty$ ise, (5.11) den, $\lambda\mathfrak{F}(x) = \infty$ olup ξ bağıntısının tanımından, $(\mathfrak{F}, x) \notin \xi$ dir. Bu durumda; (5.1) den, $\lambda_\xi\mathfrak{F}(x) = \infty$ dır. Son olarak, (Y, σ) herhangi bir yakınsama uzayı ve $f : (X, \lambda) \longrightarrow (Y, \lambda_\sigma)$ bir büzülme dönüşümü olmak üzere;

$$\begin{aligned} f^* : (X, \xi) &\longrightarrow (Y, \sigma) \\ x &\longrightarrow f^*(x) := f(x) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı f^* fonksiyonunun bir yakınsama dönüşümü olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in \lim_\xi \mathfrak{F}$ olsun. Bu durumda; (5.1) den, $\lambda_\xi\mathfrak{F}(x) = 0$ olup $\lambda^* = \lambda_\xi$ olduğundan $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = 0$ dır. Hipotezden, $f \in Mor_{Cap}(X, Y)$ olup $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ için

$$\lambda_\sigma(f[\mathfrak{F}])(f(x)) \leq \lambda\mathfrak{F}(x) \quad (5.12)$$

eşitsizliği gerçekleşir. $\lambda^*\mathfrak{F}(x) = 0$ olduğundan (5.11) gereğince $\lambda\mathfrak{F}(x) < \infty$ olup (5.12) den, $\lambda_\sigma(f[\mathfrak{F}])(f(x)) < \infty$ elde edilir. Bu durumda; λ_σ, σ bağıntısına karşılık gelen Cap-limit olduğundan (5.1) den, $\lambda_\sigma(f^*[\mathfrak{F}])(f^*(x)) = 0$ olur. Dolayısıyla, $f^*(x) \in \lim_\sigma f^*[\mathfrak{F}]$ elde edilir. ■

Teorem 5.5 **Conv** kategorisi **Cap** kategorisinin bi-ko-yansımalı bir alt kategorisidir (Lowen 1988).

İspat. **Cap** kategorisi bir topolojik kategoridir ve Teorem 5.3 de, **Conv** kategorisinin **Cap** kategorisinin bir dolu alt kategorisi olduğu gösterilmiştir. (X, λ) bir Cap-uzay olmak üzere;

$$\begin{aligned} \lambda_* : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda_* \mathfrak{F} : X \longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longrightarrow \lambda_* \mathfrak{F}(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \lambda \mathfrak{F}(x) = 0 \\ \infty & , \quad \lambda \mathfrak{F}(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı λ_* fonksiyonu X kümesi üzerinde bir Cap-limit olup $\lambda \leq \lambda_*$ dir. (X, λ) bir Cap-uzay olduğundan, her $x \in X$ için $\lambda(\dot{x})(x) = 0$ olup $\lambda_*(\dot{x})(x) = 0$ dir. $\mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olsun. $\lambda \mathfrak{F}(x) = 0$ ve $\lambda \mathcal{G}(x) = 0$ ise, λ bir Cap-limit olduğundan $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) = 0$ olup

$$\lambda_* \mathfrak{F}(x) \vee \lambda_* \mathcal{G}(x) = 0 = \lambda_*(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x)$$

elde edilir. $\lambda \mathfrak{F}(x) > 0$ ve $\lambda \mathcal{G}(x) > 0$ ise, λ bir Cap-limit olduğundan $\lambda(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x) > 0$ olup

$$\lambda_* \mathfrak{F}(x) \vee \lambda_* \mathcal{G}(x) = \infty = \lambda_*(\mathfrak{F} \cap \mathcal{G})(x)$$

elde edilir. $\lambda \mathfrak{F}(x) = 0$ ve $\lambda \mathcal{G}(x) > 0$ olması durumunda da eşitlik benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla, λ_* X üzerinde bir Cap-limittir. $\lambda \leq \lambda_*$ olduğunu göstermek için, Tanım 5.3 gereğince, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve herhangi bir $x \in X$ için $\lambda \mathfrak{F}(x) \leq \lambda_* \mathfrak{F}(x)$ eşitsizliğini göstermemiz gerekir. $\lambda \mathfrak{F}(x) = 0$ ve $\lambda_* \mathfrak{F}(x) = \infty$ durumları için eşitsizliğin gerçekleştiği açıktır. $\lambda_* \mathfrak{F}(x) = 0$ ise $\lambda \mathfrak{F}(x) = 0$ ve $\lambda_* \mathfrak{F}(x) = \infty$ ise $\lambda \mathfrak{F}(x) > 0$ olup $\lambda \mathfrak{F}(x) \leq \lambda_* \mathfrak{F}(x)$ eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla, $\lambda \leq \lambda_*$ dir. Diğer yandan, her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için $\lambda_* \mathfrak{F}(X) \subset \{0, \infty\}$ olduğundan, Önerme 5.6 gereğince, λ_* , X üzerinde tanımlı bir ξ yakınsaklık yapısından üretilir. Bu durumda; X üzerinde,

$$\xi := \{(\mathfrak{F}, x) \in \mathbf{F}(X) \times X \mid \lambda \mathfrak{F}(x) = 0\}$$

biçiminde tanımlanan ξ yakınsaklık yapısı için $\lambda_* = \lambda_\xi$ dir. ξ bağıntısının bir yakınsaklık yapısı olduğu açıktır. $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ ve $x \in X$ olmak üzere; $\lambda_* \mathfrak{F}(x) = 0$ ise,

$\lambda_{\mathfrak{F}}(x) = 0$ olup ξ bağıntısının tanımından, $(\mathfrak{F}, x) \in \xi$ dir. Bu durumda; (5.1) den, $\lambda_{\xi}\mathfrak{F}(x) = 0$ dir. $\lambda_{*}\mathfrak{F}(x) = \infty$ ise, $\lambda_{\mathfrak{F}}(x) > 0$ olup $(\mathfrak{F}, x) \notin \xi$ olduğundan $\lambda_{\xi}\mathfrak{F}(x) = \infty$ dur. Dolayısıyla, $\lambda_{*} = \lambda_{\xi}$ dir. Ayrıca, (Y, σ) herhangi bir yakınsama uzayı ve $f : (Y, \lambda_{\sigma}) \longrightarrow (X, \lambda)$ bir büzülme dönüşümü ise,

$$\begin{aligned} f_* : (Y, \sigma) &\longrightarrow (X, \xi) \\ y &\longrightarrow f^*(y) := f(y) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı f_* fonksiyonunun yakınsama dönüşümü olduğu Teorem 5.4 de verilen ispata benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 5.6 **Ap** kategorisi **Cap** kategorisinin bi-yansımalı bir alt kategorisidir (Lowen 1988).

İspat. **Cap** kategorisi bir topolojik kategoridir ve **Ap** kategorisinin **Cap** kategorisinin bir dolu alt kategorisi olduğu açıktır. **Ap** kategorisinin **Cap** kategorisi içinde başlangıç yapılarına göre kapalı olduğu gösterilirse Önerme 2.6 gereğince ispat tamamlanır. **Ap** kategorisinin **Cap** kategorisi içinde başlangıç yapılarına göre kapalı olduğunu göstermek için, Tanım 2.28 den, X bir küme, J herhangi bir indis kümesi, $\{(X_j, \lambda_j)\}_{j \in J}$ yaklaşma uzaylarının bir ailesi ve $\{f_j : X \longrightarrow (X_j, \lambda_j)\}_{j \in J}$ bir fonksiyon ailesi olmak üzere; X kümesi üzerinde (5.2) de,

$$\begin{aligned} \lambda_{in} : \mathbf{F}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}^X \\ \mathfrak{F} &\longrightarrow \lambda_{in}\mathfrak{F} := \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\mathfrak{F}]) \circ f \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan başlangıç Cap-limitin bir limit operatörü olduğunu göstermemiz gerekir. λ_{in} , X kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan her $x \in X$ için $\lambda_{in}(\dot{x})(x) = 0$ dir. Dolayısıyla, λ_{in} fonksiyonu Tanım 4.2 de verilen **(L₁)** koşulunu sağlar. K bir indis kümesi ve her $k \in K$ için $\mathfrak{F}_k \in \mathbf{F}(X)$ olsun. Bu durumda; sırasıyla,

$$f_j \left[\bigcap_{k \in K} \mathfrak{F}_k \right] = \bigcap_{k \in K} f_j[\mathfrak{F}_k]$$

eşitliği ve her $j \in J$ için λ_j fonksiyonunun X_j üzerinde bir limit operatörü olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda_{in} \left(\bigcap_{k \in K} \mathfrak{F}_k \right) &= \sup_{j \in J} \lambda_j \left(f_j \left[\bigcap_{k \in K} \mathfrak{F}_k \right] \right) \circ f_j \\
&= \sup_{j \in J} \lambda_j \left(\bigcap_{k \in K} f_j[\mathfrak{F}_k] \right) \circ f_j \\
&= \sup_{j \in J} \sup_{k \in K} \lambda_j (f_j[\mathfrak{F}_k]) \circ f_j \\
&= \sup_{k \in K} \lambda_{in} \mathfrak{F}_k
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, λ_{in} fonksiyonu $(\mathbf{L}_2)$ koşulunu sağlar. Son olarak, λ_{in} fonksiyonunun $(\mathbf{L}_3)$ koşulunu sağladığını gösterelim: $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$,

$$\begin{aligned}
\sigma : X &\longrightarrow \mathbf{F}(X) \\
y &\longrightarrow \sigma(y)
\end{aligned}$$

bir fonksiyon ve

$$\varepsilon := \sup_{y \in X} \lambda_{in}(\sigma(y)) \quad (5.13)$$

biçiminde tanımlansın. $z \in X_j$ olmak üzere X_j kümesi üzerinde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_j : X_j &\longrightarrow \mathbf{F}(X_j) \\
z &\longrightarrow \mathcal{R}_j(z) := \begin{cases} \bigcap_{y \in f_j^{-1}(z)} f_j[\sigma(y)] & , \quad z \in f_j(X) \\ \dot{z} & , \quad z \notin f_j(X) \end{cases}
\end{aligned}$$

biçiminde bir süzgeç seçimi tanımlayalım. Bu durumda; her $j \in J$ ve her $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ için

$$\sum \mathcal{R}_j(f_j[\mathfrak{F}]) \subset f_j[\sum \sigma(\mathfrak{F})] \quad (5.14)$$

dir. Gerçekten, $W \in \sum \mathcal{R}_j(f_j[\mathfrak{F}])$ ise, Önerme 2.5 (i) den, $W \in \bigcup_{A \in f_j[\mathfrak{F}]} \bigcap_{z \in A} \mathcal{R}_j(z)$ dir. $W \in f_j[\sum \sigma(\mathfrak{F})]$ olduğunu göstermek için,

$$\exists K \in \sum \sigma(\mathfrak{F}) : f_j(K) \subset W$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Hipotezden,

$$\exists A \in f_j[\mathfrak{F}] \text{ ve } \forall z \in A : W \in \mathcal{R}_j(z)$$

dir ve dolayısıyla $f_j(F) \subset A$ olacak biçimde en azından bir $F \in \mathfrak{F}$ vardır. Bu durumda; her $e \in F$ için $W \in \mathcal{R}_j(f_j(e))$ olup

$$\mathcal{R}_j(f_j(e)) = \bigcap_{y \in f_j^{-1}(f_j(e))} f_j[\sigma(y)]$$

olduğundan,

$$\forall e \in F \text{ ve } \forall y \in f_j^{-1}(f_j(e)) : W \in f_j[\sigma(y)]$$

dir. Ayrıca, $e \in f_j^{-1}(f_j(e))$ olduğundan $W \in f_j[\sigma(e)]$ olup $f_j(O_e) \subset W$ olacak biçimde en azından bir $O_e \in \sigma(e)$ vardır. $K := \bigcup_{e \in F} O_e$ biçiminde tanımlanırsa, $K \in \sum \sigma(\mathfrak{F})$ ve $f_j(K) \subset W$ olup (5.14) elde edilir. Diğer yandan, X_j kümesinin $X_j = f_j(X) \cup (X_j - f_j(X))$ biçiminde ifade edilebileceği dikkate alınrsa,

$$z \notin f_j(X) \text{ ise } \lambda_j(\mathcal{R}_j(z))(z) := \lambda_j(\dot{z})(z) = 0 \quad (5.15)$$

ve

$$z \in f_j(X) \text{ ise } \lambda_j(\mathcal{R}_j(z))(z) := \lambda_j \left(\bigcap_{y \in f_j^{-1}(z)} f_j[\sigma(y)] \right) (z) \quad (5.16)$$

dir. Sırasıyla her $j \in J$ için λ_j limit operatörü olduğundan ve (5.13) kullanılarak

$$\begin{aligned} \lambda_j \left(\bigcap_{y \in f_j^{-1}(z)} f_j[\sigma(y)] \right) (z) &= \sup_{y \in f_j^{-1}(z)} \lambda_j(f_j[\sigma(y)])(z) \\ &\leq \sup_{y \in X} \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\sigma(y)])(f_j(y)) \\ &= \sup_{y \in X} \lambda_{in}(\sigma(y)) = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Her $j \in J$ için $\varepsilon_j := \sup_{z \in X_j} \lambda_j(\mathcal{R}_j(z))(z)$ biçiminde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= \sup_{z \in f_j(X) \cup (X_j - f_j(X))} \lambda_j(\mathcal{R}_j(z))(z) \\ &= \sup_{z \in f_j(X)} \lambda_j(\mathcal{R}_j(z))(z) \vee \sup_{z \notin f_j(X)} \lambda_j(\mathcal{R}_j(z))(z) \end{aligned} \quad (5.17)$$

yazılabilir. (5.15) ve (5.16) kullanılırsa, (5.13) den, her $j \in J$ için

$$\varepsilon_j \leq \sup_{y \in X} \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\sigma(y)])(f_j(y)) = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla, $\sup_{j \in J} \varepsilon_j \leq \varepsilon$ elde edilir. Bu durumda;

$$\lambda_{in}[\sum \sigma(\mathfrak{F})] = \sup_{j \in J} \lambda_j(f_j[\sum \sigma(\mathfrak{F})]) \circ f_j$$

olup (5.14) kullanılırsa,

$$\lambda_{in} [\sum \sigma(\mathfrak{F})] \leq \sup_{j \in J} \lambda_j (\sum \mathcal{R}_j(f_j[\mathfrak{F}])) \circ f_j$$

elde edilir. Her $j \in J$ için, λ_j, X_j kümesi üzerinde bir limit operatörü olduğundan,

$$\begin{aligned} \lambda_{in} [\sum \sigma(\mathfrak{F})] &\leq \sup_{j \in J} (\lambda_j (f_j [\mathfrak{F}]) \circ f_j + \varepsilon_j) \\ &\leq \sup_{j \in J} \lambda_j (f_j [\mathfrak{F}]) \circ f_j + \sup_{j \in J} \varepsilon_j \\ &\leq \lambda_{in} \mathfrak{F} + \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 5.7 Cap kategorisi kartezyen kapalıdır (Lowen 1988).

İspat. Cap kategorisinin kartezyen kapalı olduğunu göstermek için, (X, λ_X) ve (Y, λ_Y) iki Cap-uzay olmak üzere; $Mor_{Cap}(X, Y)$ kümesi üzerinde, Tanım 2.29 da ifade edilen (CC_1) ve (CC_2) koşullarını sağlayan bir Cap-limitin mevcut olduğunu göstermemiz gerekir. $Mor_{Cap}(X, Y)$ kümesi üzerinde, (5.8) ile verilen λ fonksiyonu ele alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : (X, \lambda_X) \times (Mor_{Cap}(X, Y), \lambda) &\longrightarrow (Y, \lambda_Y) \\ (x, f) &\longrightarrow \mathbf{e}(x, f) := f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir bütülme dönüşümü olacaktır. Gerçekten, $\mathcal{H} \in \mathbf{F}(X \times Mor_{Cap}(X, Y))$ ise,

$$\mathfrak{F} := p_1[\mathcal{H}] \in \mathbf{F}(X) \text{ ve } \Psi := p_2[\mathcal{H}] \in \mathbf{F}(Mor_{Cap}(X, Y))$$

olur. Ayrıca, $F \times \varphi \in \mathfrak{F} \times \Psi$ ise, $p_1(H_1) \subset F$ ve $p_2(H_2) \subset \varphi$ olacak biçimde $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ vardır. Bu durumda;

$$H_1 \subset p_1^{-1}(F) \text{ ve } H_2 \subset p_2^{-1}(\varphi)$$

olup $H_1 \cap H_2 \subset p_1^{-1}(F) \cap p_2^{-1}(\varphi) = F \times \varphi$ elde edilir. O halde, $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$ olduğundan $F \times \varphi \in \mathcal{H}$ olup $\mathfrak{F} \times \Psi \leq \mathcal{H}$ dir. $(x, f) \in X \times Mor_{Cap}(X, Y)$ ise (5.3) den,

$$\begin{aligned} (\lambda_X \times \lambda) \mathcal{H}(x, f) &= \lambda_X \mathfrak{F}(x) \vee \lambda \Psi(f) \\ &= \lambda_X \mathfrak{F}(x) \vee \inf L(\Psi, f) \\ &= \inf \{ \lambda_X \mathfrak{F}(x) \vee \alpha \mid \alpha \in L(\Psi, f) \} \end{aligned} \tag{5.18}$$

dir. (5.6) gereğince, her $\alpha \in L(\Psi, f)$ için $\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \lambda_X \mathfrak{F} \vee \alpha$ olduğundan,

$$\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq \inf \{ \lambda_X \mathfrak{F}(x) \vee \alpha \mid \alpha \in L(\Psi, f) \} \quad (5.19)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde, (5.18) ve (5.19) dan,

$$\lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}}) \circ f \leq (\lambda_X \times \lambda) \mathcal{H}(x, f) \quad (5.20)$$

olur. $\mathfrak{F} \times \Psi \leq \mathcal{H}$ ve dolayısıyla $e[\mathfrak{F} \times \Psi] \leq e[\mathcal{H}]$ olup, λ_Y , Y kümesi üzerinde bir Cap-limit olduğundan,

$$\lambda_Y(e[\mathcal{H}])(f(x)) \leq \lambda_Y(e[\mathfrak{F} \times \Psi])(f(x))$$

elde edilir. Diğer yandan; $e[\mathfrak{F} \times \Psi] = \Psi_{\mathfrak{F}}$ olduğundan,

$$\lambda_Y(e[\mathcal{H}])(f(x)) = \lambda_Y(\Psi_{\mathfrak{F}})(f(x))$$

olup (5.20) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\lambda_Y(e[\mathcal{H}])(f(x)) \leq (\lambda_X \times \lambda) \mathcal{H}(x, f)$$

elde edilir. Dolayısıyla e fonksiyonu bir büzülme dönüşümüdür. $Mor_{Cap}(X, Y)$ kümesi üzerinde, (5.8) ile verilen λ fonksiyonu ele alındığında, Tanım 2.29 da ifade edilen (CC_2) koşulunun sağlandığını göstermek için, herhangi bir (Z, λ_Z) Cap-uzayı ve

$$\begin{aligned} f : X \times Z &\longrightarrow Y \\ (x, z) &\longrightarrow f(x, z) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı her büzülme dönüşümü için,

$$\begin{aligned} f^* : Z &\longrightarrow Mor_{Cap}(X, Y) \\ z &\longrightarrow f^*(z)(x) := f(x, z) \end{aligned}$$

fonksiyonunun büzülme dönüşümü olduğunu göstermemiz gerekir. $(x, z) \in X \times Z$, $\mathcal{H} \in \mathbf{F}(X \times Z)$ ve $\mathcal{G} \in \mathbf{F}(Z)$ olsun. f fonksiyonu büzülme dönüşümü olduğundan,

$$\lambda_Y(f[\mathcal{H}])(f(x, z)) \leq (\lambda_X \times \lambda_Z) \mathcal{H}(x, z) \quad (5.21)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Ayrıca, $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(X)$ olmak üzere; f^* fonksiyonunun tanımı gereği ve (5.5) den, $f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}} \in \mathbf{F}(Y)$ ve

$$f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}} = f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}] \quad (5.22)$$

dir. (5.22) eşitliğini gösterelim: (5.5) den,

$$f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}} = \{\mathcal{S}(F) \mid \mathcal{S} \in f^*[\mathcal{G}], F \in \mathfrak{F}\}^{\uparrow}$$

dir. $H \in f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}}$ ise,

$$\exists \mathcal{S} \in f^*[\mathcal{G}], \exists F \in \mathfrak{F} \ni \mathcal{S}(F) \subset H$$

olup $\mathcal{S} \in f^*[\mathcal{G}]$ olduğundan $f^*(G) \subset \mathcal{S}$ olacak biçimde en azından bir $G \in \mathcal{G}$ vardır.

Buradan,

$$f^*(G)(F) = \bigcup_{g \in f^*(G)} g(F) \subset \mathcal{S}(F) \subset H$$

yazılabilir. Bu durumda; $f(F \times G) \subset \bigcup_{g \in f^*(G)} g(F)$ olduğu gösterilirse, $H \in f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}]$ olacaktır. Gerçekten, $y \in f(F \times G)$ ise $y = f(x, z)$ olacak biçimde en azından bir $x \in F$ ve en azından bir $z \in G$ vardır. Böylece,

$$\exists g_0 := f^*(z) \in f^*(G) \text{ için } g_0(x) = f^*(z)(x) = f(x, z) = y$$

olup $y \in \bigcup_{g \in f^*(G)} g(F)$ dir. Dolayısıyla, $f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}} \subset f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}]$ elde edilir. Diğer yandan, $H \in f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}]$ ise, $f(F \times G) \subset H$ olacak biçimde en azından bir $F \in \mathfrak{F}$ ve en azından bir $G \in \mathcal{G}$ vardır. $\mathcal{S} := f^*(G) \in f^*[\mathcal{G}]$ olarak alınırsa, $\mathcal{S}(F) = f^*(G)(F) \in f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}}$ olacaktır. $k \in \mathcal{S}(F)$ ise $k = g(y)$ olacak biçimde en azından bir $g \in \mathcal{S}$ ve en azından bir $y \in F$ vardır. Bu durumda; $g \in \mathcal{S}$ olduğundan, $g = f^*(z)$ olacak biçimde en azından bir $z \in G$ vardır. Buradan, $k = f^*(z)(y) = f(y, z) \in f(F \times G)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathcal{S}(F) \subset f(F \times G)$ ve böylece $\mathcal{S}(F) \subset H$ olup $f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}] \subset f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}}$ elde edilir. Yani, $f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}} = f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}]$ dir. Bu eşitlikten,

$$\lambda_Y(f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}})(f^*(z)(x)) = \lambda_Y(f[\mathfrak{F} \times \mathcal{G}])(f(x, z))$$

olup sırasıyla (5.21) eşitsizliği ve (5.3) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda_Y(f^*[\mathcal{G}]_{\mathfrak{F}})(f^*(z)(x)) &\leq (\lambda_X \times \lambda_Z)\mathcal{H}(x, z) \\ &\leq \lambda_X \mathfrak{F}(x) \vee \lambda_Z \mathcal{G}(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda; (5.6) dan, $\lambda_Z \mathcal{G}(z) \in L(f^*[\mathcal{G}], f^*(z))$ olup (5.8) den,

$$\begin{aligned} \lambda(f^*[\mathcal{G}])(f^*(z)) &= \inf L(f^*[\mathcal{G}], f^*(z)) \\ &\leq \lambda_Z \mathcal{G}(z) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir. O halde, f^* fonksiyonu büzülme dönüşümüdür. ■

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yakınsaklık kavramı matematiğin pek çok alanında önem taşımaktadır. Analiz alanında bilinen birçok yakınsaklık örneği, genel topoloji sayesinde daha geniş bir çerçevede içinde incelenebilmektedir. Ancak topoloji, bilinen tüm yakınsaklık kavramlarını ifade edebilmek için yeterli olmamıştır. Yakınsaklık üzerine yapılan çalışmalarda, topolojik olarak karakterize edilemeyen yakınsaklık örneklerinin varlığının fark edilmesiyle birlikte yakınsaklık, topolojiden bağımsız olarak ele alınmaya başlanmış ve yakınsaklık teorisi doğmuştur.

Bu çalışmanın büyük bir kısmını topolojik uzayların daha geniş bir sınıfı olan yakınsama uzaylarına ayırdık. Yakınsaklık teorisinin temel araçları olan yakınsaklık yapılarının özelliklerini inceleyerek yakınsama uzaylarını nesne kabul eden Conv kategorisinin temel özelliklerini, Top ve Cap kategorileri ile arasındaki ilişkileri inceledik. Bundan sonraki çalışmalarımızda, topolojik olarak karakterize edilemeyen yakınsaklık örneklerini ele alarak bu kavramlara yakınsaklık yapıları karşılık getirip getiremeyeceğimizi araştıracağız.

KAYNAKLAR

- Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. 1990. Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats. New York, USA.
- Arens, R.F. 1946. A Topology for Spaces of Transformations. The Annals of Mathematics, 2, 480-495.
- Arens, R. and Dugundji, J. 1951. Topologies for Function Spaces. Pacific H. Math, 1, 5-31.
- Aull, C.E. and Lowen, R. 1997. Handbook of the History of General Topology. Springer.
- Beattie, R. and Butzmann, H.P. 2002. Convergence Structures and Applications to Functional Analysis. Springer-Verlag.
- Bentley, H.L., Herrlich, H. and Lowen-Colebunders, E. 1990. Convergence. Journal of Pure and Applied Algebra, 68, 27-45.
- Bourbaki, N. 1966. General Topology. Springer. Hermann, Paris.
- Bourbaki, N. 1968. Elements of Mathematics, Theory of Sets. Springer. Hermann, Paris.
- Brock, P. and Kent, D. 1997. Approach Spaces, Limit Tower Spaces and Probabilistic Convergence Spaces. Appl. Categ. Struct.
- Brock, P. and Darrell, K. 1998. On Convergence Approach Spaces. Appl. Categ. Struct., 117-125
- Cartan, H. 1937. Theorie Des Filtrés. C. R. Acad. Sci., 205, 595-598.
- Choquet, G. 1947. Convergences. Ann. Univ. Grenoble 23.
- Cook, C. H. and Fischer, H. R. 1965. On equicontinuity and continuous convergence. Math. Ann., 159, 94-104.
- Dolecki, S. 2009. An initiation into convergence theory. Contemporary Mathematics Series A.M.S., 486, 115-162.
- Dolecki, S. and Mynard, F. 2016. Convergence Foundations of Topology. World Scientific.
- Dubuc, E.J. and Porta, H. 1971, Convenient Categories of Topological Algebras and their duality theory. J. Pure Appl. Algebra 3., 281-316.
- Fischer, H.R. 1959. Limesraum, Math. Ann. 137, 269-303.
- Frechet, M. 1946. De l'écart numerique à l'écart abstrait. Port. Math., 5, 121-131.
- Hahn, H. 1921. Theorie der reellen Funktionen. Berlin.

- Halıcıoğlu, S. ve Arıkan, A. 2014. Cebire Giriş. Palme Yayıncılık, Ankara.
- Herrlich, H. 1974. Cartesian Closed Topological Categories, Math. Colloq. Univ., Cape Town 9, 1-16.
- Herrlich, H. 1974. Topological Structures, in: Topological Structures. Math. Centre Tracts 52, Amsterdam, 59-122.
- Herrlich, H. 1983. Categorical Topology 1971-1981, Heldermann Verlag, Berlin
- Herrlich, H., Colebunders, E. and Schwarz, F. 1991. Improving Top: PrTop and PsTop. Category Theory at Work, 21-34, Heldermann Verlag, Berlin
- Herrlich, H., Bentley, H.L. and Lowen, R. 1991. Improving Constructions in Topology. Category Theory at Work, 3-20, Heldermann Verlag, Berlin
- Kowalsky, J. 1954. Limesräume und Komplettierung. Math. Nachr., 12, 301-340.
- Lowen, R. and Colebunders, E. 1988. A quasi-topos containing Conv and Met as full subcategories. Int J. Math. Science, 11, 417-438.
- Lowen, R. 1989. Approach Spaces A common supercategory of Top and Met. Math. Nachr., 141, 183-226.
- Lowen, R. 1997. Approach Spaces: the Missing Link in the Topology Uniformity Metric Triad. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press. New York, United States.
- Lowen, R., Sioen, M. and Verwulgen, S. 2009. Categorical Topology, in Beyond Topology, Contemporary Math. Amer. Math. Soc. Vol 486, 1-36.
- Lowen, R. 2015. Index Analysis, Approach Theory at Work. Springer.
- Munkres, J. R. 1975. A First Course Topology. Prentice Hall. Englewood Cliffs, USA.
- Preuss, G. 1987. Theory of Topological Structures: An approach to categorical topology. Springer.
- Preuss, G. 2002. Foundations of Topology- An Approach to Convenient Topology. Springer.
- Pearl, E. and Mynard, F. 2009. Beyond Topology. American Math. Soc.
- Steenrod, N. E. 1967. A Convenient Category of Topological Spaces. Michigan Math. J. 14.
- Willard, S. 2004. General Topology. Dover Publications. Sydney, Australia.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra ALKAYA

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 24/11/1993

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Elvankent Bilgi Anadolu Lisesi (2007-2011)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
(2011-2016)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı (Şubat 2017-Ocak 2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: