

MAYIS 2023

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

OSMAN AKSU

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARİTMETİK İNDEKSLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL
VE PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN AKSU
MAYIS 2023

**ARİTMETİK İNDEKSLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ PELL
VE PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Şükran UYGUN

Osman AKSU

Mayıs 2023



©2023[Gaziantep Üniversitesi]



İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yeraldığını beyan ederim.

Osman AKSU

ABSTRACT

ARITHMETIC INDEXES k - PELL VE k - PELL LUCAS NUMBERS SEQUENCES

AKSU, Osman

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şükran UYGUN

May 2023

45 pages

Special integer sequences are among the extensively studied topics in number theory. The thesis consists of five chapters. The fourth chapter constitutes the original part of the thesis. Research has been conducted on arithmetic-indexed generalized Pell and Pell Lucas number sequences. The first chapter provides a historical overview of the golden ratio, Pell number sequences, Fibonacci number sequences, Pell-Lucas number sequences, k -Pell, and k -Pell Lucas number sequences. The second and third chapters cover topics that contribute to the derivation of the thesis's fundamental findings. Some of these topics include arithmetic-indexed k -Fibonacci numbers, arithmetic-indexed k -Lucas numbers, arithmetic-indexed k -Jacobsthal numbers, arithmetic-indexed k -Jacobsthal Lucas numbers, and arithmetic-indexed k -Pell and k -Pell Lucas number sequences. In the fourth chapter, utilizing these topics, the definition, Binet formula, summation formula, generating function, alternative summation formulas, and proofs of several theorems are provided for arithmetic-indexed (s,t) -Pell and (s,t) -Pell Lucas number sequences, as well as arithmetic-indexed modified (s,t) -Pell number sequences. The fifth and final chapter of this thesis presents the conclusions and recommendations.

Key Words: Fibonacci number sequence, Pell and Pell Lucas number sequence, k -Pell and k -Pell Lucas number sequence, Jacobsthal number sequence, (s,t) -Pell and (s,t) -Pell Lucas number sequence, arithmetic index (s,t) -Pell and (s,t) -Pell Lucas number sequence, arithmetic index k -Pell and k -Pell Lucas number sequence.

ÖZET

ARİTMETİK İNDEKSİLİ k - PELL VE k - PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ

AKSU, Osman

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Doç. Dr. Şükran UYGUN

Mayıs 2023

45 sayfa

Özel tamsayı dizileri, sayılar teoresinde yoğun çalışma alanına sahip konulardan birisidir. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Dördüncü bölüm tezin özgün kısmını oluşturmaktadır. Aritmetik indeksli genelleştirilmiş Pell ve Pell Lucas sayı dizileri üzerine çalışma yapılmıştır. Birinci bölümde altın oran, Pell sayı dizileri, Fibonacci sayı dizileri, Pell-Lucas sayı dizileri k -Pell ve k -Pell Lucas sayı dizilerinin tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde ise tezin temel bulgularının elde edilmesine yardımcı olacak konulara yer verilmiştir. Bu konulardan bazıları aritmetik indeksli k -Fibonacci sayıları, aritmetik indeksli k -Lucas sayıları, aritmetik indeksli k -Jacobsthal sayıları, aritmetik indeksli k -Jacobsthal Lucas sayıları, aritmetik indeksli k -Pell ve k -Pell Lucas sayı dizileri gibi konulara değinilmiştir. Dördüncü bölümde ise bu konulardan faydalanarak aritmetik indeksli (s,t) -Pell ve (s,t) -Pell Lucas sayı dizileri ve aritmetik indeksli modifiye (s,t) -Pell sayı dizilerinin tanımı, binet formülü, toplam formülü, üreteç fonksiyonu, alterne toplam formülleri ve birçok teorem ispatları elde edilmiştir. Bu tezin son bölümü olan beşinci bölümünde ise sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

AnahtarKelimeler: Fibonacci sayı dizisi, Pell ve Pell Lucas sayı dizisi, k -Pell ve k -Pell Lucas sayı dizisi, Jacobsthal sayı dizisi, (s,t) -Pell ve (s,t) -Pell Lucas sayı dizisi, aritmetik indeksli (s,t) -Pell ve (s,t) -Pell Lucas sayı dizisi, aritmetik indeksli k -Pell ve k -Pell Lucas sayı dizisi.



'Canum aileme'

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. ŞÜKRAN UYGUN'a ve Doç. Dr. SERKAN ARACI'ya sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, preparasyonunda ve teşhislerinde desteklerini benden esirgemeyen değerli arkadaşlarım FATİH GÜLMAYA ve EMEL AKSU'ya çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 ARİTMETİK İNDEKSLİ SAYI DİZİLERİ	3
2.1. Aritmetik İndeksli k -Fibonacci Sayıları	3
2.2. Aritmetik İndeksli k -Lucas Sayıları	5
2.3. Aritmetik İndeksli k -Jacobsthal Sayıları	7
2.4. Aritmetik İndeksli k - Jacobsthal Lucas Dizileri.....	10
BÖLÜM 3 ARİTMETİK İNDEKSLİ k -PELL ve k -PELL LUCAS DİZİLERİ	14
3.1. Aritmetik indeksli k -Pell Sayı Dizileri.....	14
3.2 Aritmetik indeksli k -Pell Lucas Sayı Dizileri	20
BÖLÜM 4 ARİTMETİK İNDEKSLİ (s,t) -PELL ve (s,t) -PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ	26
4.1. Aritmetik indeksli (s,t) -Pell Sayı Dizileri	26
4.2. (s,t) -Pell, (s,t) - Pell Lucas Sayı Dizileri	26
4.3. Aritmetik indeksli (s,t) -Pell Lucas Sayı Dizileri.....	33
4.4. Aritmetik indeksli Modifiye (s,t) -Pell Sayı Dizileri	37
BÖLÜM 5 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	42
KAYNAKLAR	43
ÖZ GEÇMİŞ.....	45

SEMBOLLER LİSTESİ

$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$	Fibonacci sayı dizisi
$\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$	Pell Lucas dizisi
$\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$	Modifiye Pell dizisi
$\{P_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$	k -Pell dizisi
$\{Q_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$	k -Pell Lucas dizisi
$\{q_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$	Modifiye k -Pell dizisi
$\{P_n(s, t)\}_{n=0}^{\infty}$	(s, t) -Pell dizisi
$\{Q_n(s, t)\}_{n=0}^{\infty}$	(s, t) -Pell Lucas dizisi
$\{q_n(s, t)\}_{n=0}^{\infty}$	Modifiye (s, t) -Pell dizisi
$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$	Jacobsthal Lucas sayı dizisi
$\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$	Jacobsthal sayı dizisi
$\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$	Lucas sayı dizisi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fibonacci sayıları, bir sayının kendisinden önce gelen iki sayının toplamıyla oluşan bir ardışık tam sayı dizisidir. İlk terimleri genellikle 0 ve 1 olarak kabul edilir ve ardışık terimler bu ilişkiyi sürdürerek devam eder: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,... Bu sayılar, doğal fenomenlerde, matematiksel modellemelerde ve sanatsal yapılarda belirli düzenliliklerle ilişkilendirilmiştir. Fibonacci sayıları ile yakından ilişkili olan Altın oran, matematiksel hesaplamalar, finansal analizler ve algoritma tasarımlarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Fibonacci dizisi teorik olarak sonsuza kadar genişler ve her bir terim, kendinden önce gelen iki terimin toplamına eşittir. Spiral yapılar, bitki dallanmaları ve dikdörtgen alanları gibi birçok doğal ve yapay olgunun Fibonacci sayıları ile uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Bu benzersiz sayı dizisi, matematiksel araştırmalar, bilimsel analizler ve yaratıcı sanat çalışmaları için ilgi çekici bir konu olmuştur.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618$ olarak bilinen Altın oran sayısı M.Ö. 300 yıllarında Euclid'in elementler adlı eserinde ilk kez ortaya konmuştur. Daha sonra, İtalyan matematikçi Fibonacci Altın oran sayısı üzerine çalışmalar yapmıştır. Fibonacci sayı dizisinin özellikleri matematikçileri hala büyülemektedir. Bu sayı dizilerinin özellikleri birçok matematik alanında kullanım bulmaktadır. Ayarica, Avrupa'da Rönesans dönemi sırasında birçok mimar ve sanatçı eserlerini oluştururken "Altın oran" adı verilen bir sayıyı kullanmışlardır.

Son zamanlarda Fibonacci, Pell, Pell Lucas, modifiye Pell, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, dizileri herhangi bir pozitif k reel sayısı için genelleştirilmiştir. Bu reel sayıyı kullanarak Falcon k - Fibonacci ve k -Lucas sayı dizilerini tanımlamıştır. Zamanla, sayı dizilerinin genelleştirilmesi konusundaki çalışmalar literatüre kazandırılmıştır. Örneğin; 2005 yılında Öcal, Tuğlu ve Altınışık k -genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamışlardır. 2014 yılında Catarino ve Vasco k -Pell, modifiye k -Pell ve k -Pell Lucas dizileri hakkında çalışmalar yapmışlardır. Hatta, bu sayı dizilerinin çeşitli özelliklerini elde etmek amacıyla bu dizilerin matris gösterimi tanımlanmıştır.

Aritmetik indeksli sayı dizileri, ilk kez 2009 yılında Falcon ve Plaza tarafından "Aritmetik İndeksli k -Fibonacci Sayıları" başlığı altında literatüre kazandırılmıştır. 2012 yılında Falcon, aritmetik indeksli k -Lucas sayılarıyla ilgili çalışmasını yayımlamıştır. Jhala, D Rathore ve Sisodiya ise 2014 yılında aritmetik indeksli k -Jacobsthal sayı dizilerini incelemişlerdir. Aynı yıl içerisinde Singh ve arkadaşları, aritmetik indeksli k -Lucas sayılarının toplam formüllerini incelemişlerdir. Uygun ise 2016 yılında aritmetik indeksli k -Jacobsthal Lucas sayı dizilerini ele almıştır. Catarino

ve ekibi, aritmetik indeksli k -Pell, k -Pell Lucas ve modifiye k -Pell sayı dizilerini incelemişlerdir. 2016 yılında Somnuk Sriprad, Pell ve Pell Lucas sayı dizilerinin iki parametreye bağlı genelleştirilmiş hallerini matris kullanarak oluşturmuştur. Bu genelleştirilmiş dizilere “ (s,t) -Pell” ve “ (s,t) -Pell Lucas” dizileri adını vermiştir. Aynı yıl içerisinde Güleç ve Taşkara da “ (s,t) -Pell” ve “ (s,t) -Pell Lucas” dizilerinin özelliklerini ve matris gösterimlerini çalışmışlardır.

Bu çalışmamızda, çeşitli özel sayı dizileri kısaca tanımlanmış ve temel özellikleri sunulmuştur. Bu sayı dizileri temel alınarak oluşturulan aritmetik indeksli özel sayı dizileri ile ilgili literatürde yer alan bazı özellikler verilmiştir. Özellikle, Pell sayı dizilerinin bir genelleştirmesi olan k -Pell sayı dizileriyle üretilen aritmetik indeksli dizilerin özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışma aynı zamanda k -Pell Lucas sayı dizileri için de gerçekleştirilmiştir. Bununla birlikte, Pell sayı dizilerinin başka bir genelleştirmesi olan (s,t) -Pell sayı dizileriyle elde edilen aritmetik indeksli dizilerin özellikleri de ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışma aynı zamanda (s,t) -Pell Lucas ve modifiye (s,t) -Pell Lucas sayı dizileri için de geniş kapsamlı olarak gerçekleştirilmiştir.

BÖLÜM 2

ARİTMETİK İNDEKSİLİ SAYI DİZİLERİ

2.1. Aritmetik İndeksli k -Fibonacci Sayıları

Tezin bu kısmında aritmetik indeksli k -Fibonacci sayı dizileri için çeşitli toplam formülleri ve bazı bağıntılar incelenmiştir. Aritmetik indeksli k -Fibonacci sayıları dizisi tanımlanıp ilgili temel bazı özellikleri verilmiştir. Bu bölümdeki bilgiler [10] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 2.1.1. Başlangıç şartları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

yineleme bağıntısına sahip $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ diziye Fibonacci sayı dizisi denir.

Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$F_n = \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}$ şeklinde tanımlanır. Bu formülden yararlanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = z_1$ olduğu

aşıkardır. $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ değerine “Altın oran” denir.

Tanım 2.1.2. $k, n \in \mathbb{Z}^+$ ve başlangıç şartı $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ olmak üzere yineleme bağıntısı

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1} \quad (n \geq 1)$$

ile gösterilen sayı dizisine k -Fibonacci sayı dizisi denir. (Falcon, Plaza 2009)

k -Fibonacci dizisi için Binet formülü $z_{k,1} = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $z_{k,2} = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere

$$F_{k,n} = \frac{z_{k,1}^n - z_{k,2}^n}{z_{k,1} - z_{k,2}}$$

ile verilir. Burada kökler arasındaki bağıntı şöyledir.

$$z_{k,1} + z_{k,2} = k, \quad z_{k,1}z_{k,2} = -1$$

(Falcon, Plaza 2009)

Lemma 2.1.3. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$z_{k,1}^n + z_{k,2}^n = F_{k,n+1} + F_{k,n-1}$$

sağlanır. (Falcon, Plaza 2009)

İspat: Lemma'nın ispatı için Binet formülü kullanılırsa:

$$\begin{aligned} F_{k,n+1} + F_{k,n-1} &= \frac{1}{z_{k,1} - z_{k,2}} (z_{k,1}^{n+1} - z_{k,2}^{n+1} + z_{k,1}^{n-1} - z_{k,2}^{n-1}) \\ &= \frac{1}{z_{k,1} - z_{k,2}} \left(z_{k,1}^n \left(z_{k,1} + \frac{1}{z_{k,1}} \right) - z_{k,2}^n \left(z_{k,2} + \frac{1}{z_{k,2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{z_{k,1} - z_{k,2}} (z_{k,1}^n (z_{k,1} - z_{k,2}) + z_{k,2}^n (z_{k,1} - z_{k,2})) = z_{k,1}^n + z_{k,2}^n \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da ispat için istenilen eşitliktir.

Lemma 2.1.4. $a, r, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$F_{k,a(n+2)+r} = (F_{k,a-1} + F_{k,a+1})F_{k,a(n+1)+r} - (-1)^a F_{k,an+r}$$

aritmetik indeksli k -Fibonacci dizileri yukarıdaki eşitliği sağlar. (Falcon, Plaza 2009)

Teorem 2.1.5. Aritmetik indeksli k -Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,an+r} x^n = \frac{F_{k,r} + (-1)^r F_{k,a-r} x}{1 - L_{k,a} x + (-1)^a x^2}$$

şeklinde tanımlanır. (Falcon, Plaza 2009)

Teorem 2.1.6. Aritmetik indeksli k -Fibonacci sayıları için toplam formülü

$$\sum_{i=0}^n F_{k,ai+r} = \frac{F_{k,a(n+1)+r} - (-1)^a F_{k,an+r} - F_{k,r} - (-1)^r F_{k,a-r}}{F_{k,a+1} + F_{k,a-1} - (-1)^a - 1}$$

ile verilir. (Falcon, Plaza 2009)

“ a ” indisinin tek veya çift olması durumunda aşağıdaki eşitlikler türetilmiştir:

Sonuç 2.1.7. $a=2p+1$ için aritmetik indeksli k -Fibonacci sayıları için toplam formülü

$$\sum_{i=0}^n F_{k,(2p+1)i+r} = \frac{F_{k,(2p+1)(n+1)+r} - (-1)^{2p+1} F_{k,(2p+1)n+r} - F_{k,r} - (-1)^r F_{k,(2p+1)-r}}{F_{k,2p+2} + F_{k,2p}}$$

şeklinde verilir.

$a=2p$ için aritmetik indeksli k -Fibonacci sayıları toplam formülü

$$\sum_{i=0}^n F_{k,2pi+r} = \frac{F_{k,2p(n+1)+r} - (-1)^{2p} F_{k,2pn+r} - F_{k,r} - (-1)^r F_{k,2p-r}}{F_{k,2p+1} + F_{k,2p-1} - 2}$$

Teorem 2.1.8. Aritmetik indeksli k -Fibonacci sayıları için alterne toplam formülü

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i F_{k,ai+r} = \frac{(-1)^n F_{k,a(n+1)+r} - (-1)^{a+n} F_{k,an+r} + F_{k,r} + (-1)^{r+1} F_{k,a-r}}{F_{k,a+1} + F_{k,a-1} + (-1)^a + 1}$$

ile verilir. (Falcon, Plaza 2009)

2.2. Aritmetik İndeksli k -Lucas Sayıları

Bu bölümde aritmetik indeksli k - Lucas sayıları incelenecektir. Bu dizinin elemanlarının toplamı hesaplanacak ve ardından tek ve çift indisli aritmetik indeksli k -Lucas sayıları için formüller bulunacaktır. Daha sonra bu sayıların üreteç fonksiyonunu elde edilecektir. Alterne aritmetik indeksli k -Lucas sayıları içinde aynı formüller türetilenektir.

Bu bölüm [12] nolu referans kullanılarak oluşturulmuştur.

Tanım 2.2.1. $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ başlangıç şartları için $l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$ yineleme bağıntısına sahip $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ diziye Lucas sayı dizisi denir.

Lucas dizisinin Binet formülü $m_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $m_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$l_n = m_1^n + m_2^n \text{ şeklindedir.}$$

Binet formülünden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = m_1$ elde edilebilir.

Tanım 2.2.2. $k, n \in \mathbb{Z}^+$ ve başlangıç şartları $l_{k,0} = 2$, $l_{k,1} = k$ olmak üzere yineleme bağıntısı

$$l_{k,n+1} = kl_{k,n} + l_{k,n-1}$$

ile ifade edilen diziye k -Lucas dizisi denir.

k -Lucas dizisinin elemanları için Binet formula $l_{k,n} = m_{k,1}^n + m_{k,2}^n$ dir.

Karakteristik denklemi $m^2 - km - 1 = 0$ şeklinde olan denklemin kökleri

$$m_{k,1} = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}, \quad m_{k,2} = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olup kökler arasında aşağıdaki gibi bağıntılar mevcuttur:

$$m_{k,1} + m_{k,2} = k, \quad m_{k,1}m_{k,2} = -1, \quad m_{k,1} - m_{k,2} = \sqrt{k^2 + 4}$$

k -Fibonacci ile k -Lucas sayıları arasında

$$l_{k,n} = F_{k,n-1} + F_{k,n+1}$$

bağıntısı sağlanır. (Falcon 2012)

Teorem 2.2.3. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Lucas sayıları için yineleme bağıntısı

$$l_{k,a(n+1)+r} = l_{k,n}l_{k,an+r} + (-1)^a l_{k,a(n-1)+r}$$

ile verilir. (Falcon 2012)

Teorem 2.2.4. k -Lucas sayıları için üreteç fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_{k,n} x^n = \frac{(l_{k,r} + l_{k,a+r} - l_{k,a}l_{k,r})x}{1 - l_{k,a}x + (-1)^a x^2}$$

şeklinde tanımlanır.(Falcon 2012)

Teorem 2.2.5. (Aritmetik indeksli k -Lucas sayıları için toplam formülü)

$a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ o halde aritmetik indeksli k -Lucas sayıları için toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n l_{k,aj+r} = \frac{l_{k,a(n+1)+r} - (-1)^a l_{k,an+r} + (-1)^r l_{k,a-r} - l_{k,r}}{l_{k,a} - (-1)^a - 1}$$

ile verilir. (Falcon 2012)

Sonuç 2.2.6.

$r=0$ ve $a=2p+1$ olsun.

$$\sum_{j=0}^n l_{k,(2p+1)j} = \frac{l_{k,(2p+1)(n+1)} + l_{k,(2p+1)n} - 2}{l_{k,2p+1}} + 1$$

$r=0$ ve $a=2p$ seçilsin.

$$\sum_{j=0}^n l_{k,2pj} = \frac{l_{k,2p(n+1)} - l_{k,2pn}}{l_{k,2p} - 2} + 1$$

Teorem 2.2.7. $a, r, n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Lucas sayıları için alterne toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j l_{k,aj+r} = \frac{(-1)^{a+n} l_{k,an+r} + (-1)^n l_{k,a(n+1)+r} + (-1)^r l_{k,a-r} + l_{k,r}}{l_{k,a} - (-1)^a + 1}$$

(Falcon 2012)

Teorem 2.2.8. (k -Fibonacci sayıları ve k -Lucas sayıları arasındaki ilişki)

$r \geq 1$ olsun. k -Fibonacci sayıları ve k -Lucas sayıları arasındaki çarpım ilişkisi aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$\frac{F_{k,2^r n}}{F_{k,n}} = \prod_{j=0}^{r-1} l_{k,2^j n}$$

(Falcon 2012)

Teorem 2.2.9. $a, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Fibonacci ve aritmetik indeksli k -Lucas sayıları arasındaki ilişki

$$l_{k,(a+4)n} - l_{k,an} = (k^2 + 4)F_{k,(a+2)n}F_{k,2n}$$

(Falcon 2012)

2.3. Aritmetik İndeksli k -Jacobsthal Sayıları

Bu bölüm [15] nolu kaynak kullanılarak oluşturulmuştur. İlk olarak Horadam tarafından tanımlanmıştır. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının verilen özelliklerine ek olarak bazı özellikler de elde edilmiştir.

Tanım 2.3.1. Başlangıç şartları $j_0 = 0$, $j_1 = 1$ olmak üzere; $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$

yineleme bağıntısına sahip diziye $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ Jacobsthal sayı dizisi denir.

$x^2 - x - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri; $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ olmak üzere, Jacobsthal sayıları için Binet formülü, $j_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ şeklinde verilir. Dizinin ardışık iki teriminin birbirine oranı için limit değeri, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j_{n+1}}{j_n} = 2$ dir.

Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir (Horadam, 1996).

Tanım 2.3.2. $k \in R^+$ ve $n \geq 1$ ve başlangıç şartı $j_{k,0} = 0$, $j_{k,1} = 1$ olmak üzere

yineleme bağıntısı $j_{k,n+1} = kj_{k,n} + 2j_{k,n-1}$ ile gösterilen sayı dizisine k -Jacobsthal sayı dizisi denir.

Karakteristik denklemi $\lambda^2 = k\lambda + 2$ olan denklemin kökleri

$$\lambda_{k,1} = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}, \lambda_{k,2} = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$$

dir. Kökleri arasındaki bağıntı

$$\lambda_{k,1} > \lambda_{k,2}, \lambda_{k,1} + \lambda_{k,2} = k, \lambda_{k,1}\lambda_{k,2} = -2, \lambda_{k,1} - \lambda_{k,2} = \sqrt{k^2 + 8}$$

ile verilir. k -Jacobsthal sayıları için Binet Formülü

$$J_{k,n} = \frac{\lambda_{k,1}^n - \lambda_{k,2}^n}{\lambda_{k,1} - \lambda_{k,2}}$$

şeklindedir.

Lemma 2.3.3. $n \in Z^+$ olmak üzere

$$\lambda_{k,1}^n + \lambda_{k,2}^n = j_{k,n+1} + 2j_{k,n-1}$$

eşitliği elde edilir. (Vasco, Catarino 2014)

İspat: Binet formülünden ve $\lambda_{k,1}\lambda_{k,2} = -2$ yararlanalım.

$$j_{k,n+1} + 2j_{k,n-1} = \frac{1}{\lambda_{k,1} - \lambda_{k,2}} (\lambda_{k,1}^{n+1} - \lambda_{k,2}^{n+1} + 2\lambda_{k,1}^{n-1} - 2\lambda_{k,2}^{n-1}) = \lambda_{k,1}^n + \lambda_{k,2}^n$$

Buradan da istenilen eşitlik elde edilir.

$$j_{k,n+1} + 2j_{k,n-1} = \lambda_{k,1}^n + \lambda_{k,2}^n$$

Lemma 2.3.4. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Jacobsthal sayıları için yineleme bağıntısı

$$j_{k,a(n+2)+r} = (2j_{k,a-1} + j_{k,a+1})j_{k,a(n+1)+r} - (-2)^a j_{k,an+r}$$

şeklindedir. (Vasco, Catarino 2014)

Teorem 2.3.5. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k - Jacobsthal sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_{k,an+r} x^n = \frac{j_{k,r} + (-2)^r j_{k,a-r} x}{(1 - j_{k,a} x + (-2)^a x^2)}$$

şeklinde verilir. (Vasco, Catarino 2014)

Teorem 2.3.6. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Jacobsthal sayıları için toplam formülü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{i=0}^n j_{k,ai+r} = \frac{j_{k,a(n+1)+r} - (-2)^a j_{k,an+r} - j_{k,r} - (-2)^r j_{k,a-r}}{j_{k,a+1} + 2j_{k,a-1} - (-2)^a - 1}$$

(Vasco, Catarino 2014)

Sonuç 2.3.7. Eğer $a=2p+1$ ise

$$\sum_{i=0}^n j_{k,(2p+1)i+r} = \frac{j_{k,(2p+1)(n+1)+r} - (-2)^{2p+1} j_{k,(2p+1)n+r} - j_{k,r} - (-2)^r j_{k,(2p+1)-r}}{j_{k,2p+2} + 2j_{k,2p} - (-2)^{2p+1} - 1}$$

Eğer $a=2p$ ise

$$\sum_{i=0}^n j_{k,2pi+r} = \frac{j_{k,2p(n+1)+r} - (-2)^{2p} j_{k,2pn+r} - j_{k,r} - (-2)^r j_{k,2p-r}}{j_{k,2p+1} + 2j_{k,2p-1} - (-2)^{2p} - 1}$$

(Vasco, Catarino 2014)

Teorem 2.3.8. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k - Jacobsthal sayıları için alterne toplam formülü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i j_{k,ai+r} = \frac{(-1)^n j_{k,a(n+1)+r} + (-1)^n (-2)^a j_{k,an+r} + j_{k,r} + (-2)^r j_{k,a-r}}{j_{k,a} + (-2)^a + 1}$$

eşitlikleri gerçekleşir. (Vasco, Catarino 2014)

2.4. Aritmetik İndeksli k - Jacobsthal Lucas Dizileri

Bu bölüm [20] nolu kaynak kullanılarak oluşturulmuştur. Bu bölümde k - Jacobsthal Lucas sayılarının tanımları bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Tanım 2.4.1. Başlangıç şartları $c_0 = 2$ ve $c_1 = 1$ seçilerek;

$$c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1} \quad n \geq 1$$

yineleme bağıntısına sahip $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ diziye Jacobsthal Lucas dizisi denir.

Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü, $c_n = 2^n + (-1)^n$ olur. Dizinin ardışık iki teriminin birbirine oranının limit değeri $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 2$ şeklindedir.

Jacobsthal Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1996).

Tanım 2.4.2. $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç koşulları $c_0 = 2, c_1 = k$ olan k -Jacobsthal Lucas dizisinin yineleme bağıntısı

$$c_{k,n} = kc_{k,n-1} + 2c_{k,n-2}$$

şeklindedir. k -Jacobsthal Lucas sayıları için Binet Formülü aşağıdaki

$$c_{k,n} = t_{k,1}^n + t_{k,2}^n$$

şeklindedir.

Teorem 2.4.3. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k - Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki yineleme bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$c_{k,a(n+1)+r} = c_{k,a} c_{k,an+r} - (-2)^a c_{k,a(n-1)+r}$$

(Ş. Uygun 2016)

Teorem 2.4.4. Aritmetik indeksli k -Jacobsthal Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{k,a+j+r} x^j = \frac{c_{k,r} + x(c_{k,a+r} - c_{k,a}c_{k,r})}{1 - c_{k,a}x + (-2)^a x^2}$$

şeklindedir. (Ş. Uygun 2016)

İspat: Aritmetik indeksli k -Jacobsthal Lucas sayıları için üreteç fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterelim.

$$C(k, x, a, r) = c_{k,r} + c_{k,a+r}x + c_{k,2a+r}x^2 + \dots$$

Bu eşitliği sırasıyla $c_{k,a}x$ ve $(-2)^a x^2$ ifadeleri ile çarpalım. Aşağıdaki eşitliklere sahip oluruz.

$$-c_{k,a}xC(k, x, a, r) = -c_{k,a}c_{k,r}x - c_{k,a}c_{k,a+r}x^2 - c_{k,a}c_{k,2a+r}x^3 - \dots$$

$$(-2)^a x^2 C(k, x, a, r) = (-2)^a c_{k,r}x^2 + (-2)^a c_{k,a+r}x^3 + (-2)^a c_{k,2a+r}x^4 + \dots$$

$C(k, x, a, r)$ ortak parentezine alırsak ispat elde edilir:

$$(1 - c_{k,a}x + (-2)^a x^2) C(k, x, a, r) = c_{k,r} + x(c_{k,a+r} - c_{k,a}c_{k,r}) + x^2(c_{k,2a+r} - c_{k,a}c_{k,a+r} - (-2)^a c_{k,r}) + \dots$$

$$(1 - c_{k,a}x + (-2)^a x^2) C(k, x, a, r) = c_{k,r} + x(c_{k,a+r} - c_{k,a}c_{k,r}) + 0x^2 + 0 + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{k,a+j+r} x^j = \frac{c_{k,r} + x(c_{k,a+r} - c_{k,a}c_{k,r})}{1 - c_{k,a}x + (-2)^a x^2}$$

Teorem 2.4.5. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Jacobsthal Lucas sayıları toplam formülü:

$$\sum_{j=0}^n c_{k,a+j+r} = \frac{c_{k,r} - (-2)^r c_{k,a-r} - c_{k,a(n+1)+r} + (-2)^a c_{k,an+r}}{1 - c_{k,a} + (-2)^a}$$

ile verilir. (Ş. Uygun 2016)

Sonuç 2.4.6. Özel bir durum olarak $r = 0, a = 2p + 1$ alalım. k -Jacobsthal Lucas sayılarının tek terimlerinin toplamı aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{j=0}^n c_{k,(2p+1)j} = \frac{2 - c_{k,2p+1} - c_{k,(2p+1)(n+1)} + (-2)^{2p+1} c_{k,(2p+1)n}}{1 - c_{k,2p+1} + (-2)^{2p+1}}$$

Özel bir durum olarak $r = 0, a = 2p$ alalım. k -Jacobsthal Lucas sayılarının çift terimlerinin toplamı aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{j=0}^n c_{k,(2p)j} = \frac{2 - c_{k,2p} - c_{k,2p(n+1)} + (-2)^{2p} c_{k,2pn}}{1 - c_{k,2p} + (-2)^{2p}}$$

Özel olarak $p = 1$ alındığında çift indeksli k -Jacobssthal Lucas sayıları için toplam formülü aşağıdaki gibi olur.

$$\sum_{j=0}^n c_{k,2j} = \frac{-2 - k^2 - c_{k,2(n+1)} + 4c_{k,2n}}{1 - k^2}$$

Teorem 2.4.7. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Jacobssthal Lucas sayılarının alterne toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j c_{k,aj+r} = \frac{c_{k,r} + (-2)^r c_{k,a-r} + (-1)^n c_{k,a(n+1)+r} + (-1)^n (-2)^a c_{k,an+r}}{1 + c_{k,a} + (-2)^a}$$

şeklindedir. (Ş. Uygun 2016)

Teorem 2.4.8. $a, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ alalım.

$$\frac{c_{k,2^r n}}{c_{k,n}} = \prod_{j=0}^{r-1} c_{k,2^j n}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} \frac{c_{k,2^r n}}{c_{k,n}} &= \frac{t_{k,1}^{2^r n} - t_{k,2}^{2^r n}}{t_{k,1}^n - t_{k,2}^n} = (t_{k,1}^{2^{r-1}n} + t_{k,2}^{2^{r-1}n}) \frac{t_{k,1}^{2^{r-1}n} - t_{k,2}^{2^{r-1}n}}{t_{k,1}^n - t_{k,2}^n} \\ &= c_{k,2^{r-1}n} (t_{k,1}^{2^{r-2}n} + t_{k,2}^{2^{r-2}n}) \frac{t_{k,1}^{2^{r-2}n} - t_{k,2}^{2^{r-2}n}}{t_{k,1}^n - t_{k,2}^n} \\ &= c_{k,2^{r-1}n} c_{k,2^{r-2}n} \cdots \frac{t_{k,1}^{2n} - t_{k,2}^{2n}}{t_{k,1}^n - t_{k,2}^n} \\ &= c_{k,2^{r-1}n} c_{k,2^{r-2}n} \cdots (t_{k,1}^n + t_{k,2}^n) \\ &= \prod_{j=0}^{r-1} c_{k,2^j n} \end{aligned}$$

Sonuç 2.4.9. Özel olarak $r = 1$ için

$$\frac{c_{k,2n}}{c_{k,n}} = c_{k,n}$$

eşitliği geçerlidir. (Ş. Uygun 2016)

Teorem 2.4.10. $a, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas sayıları için aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$c_{k,(a+4)n} - c_{k,an} = c_{k,(a+2)n+1} [c_{k,2n-1} - c_{k,2n+1}] + c_{k,(a+2)n} (k^2 + 8).$$

(Ş. Uygun 2016)

Teorem 2.4.11. $\left| t_{k,1}^{ak} t_{k,2}^{a(r-k)} x \right| < 1$ olmak üzere k -Jacobsthal Lucas sayıları için yakınsaklık yarıçapı

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,ai+r}^r x^i = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{1}{1 - t_{k,1}^k t_{k,2}^{r-k} x}$$

toplam formülü sağlanır. (Ş. Uygun 2016)

BÖLÜM 3

ARİTMETİK İNDEKSİLİ k -PELL ve k -PELL LUCAS DİZİLERİ

3.1. Aritmetik indeksli k -Pell Sayı Dizileri

Bu bölümde aritmetik indeksli k -Pell ve k -Pell Lucas sayı dizileri tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir. Birçok teorem ve lemma ispatları ile verilmiştir. Bu bölüm [8] nolu referans göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur.

Tanım 3.1.1.Başlangıç şartları $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere;

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

yineleme bağıntısına sahip $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ diziye Pell sayı dizisi denir.

Pell dizisinin Binet formülü $\mu_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\mu_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$P_n = \frac{\mu_1^n - \mu_2^n}{\mu_1 - \mu_2}$ şeklindedir. Negatif indisli Pell sayı dizisi $P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n$ şeklinde tanımlanır. Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde olup Simpson formülü

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

bağıntısı ile verilir. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=0}^n P_k = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n - 1)$$

şeklinde verilir (Koshy, 2014).

Tanım 3.1.2.Başlangıç şartları $P_{k,0} = 0$, $P_{k,1} = 1$ olmak üzere; $P_{k,n+1} = 2P_{k,n} + kP_{k,n-1}$ yineleme bağıntısına sahip $\{P_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ diziye k -Pell dizisi denir.

Pell dizisinin Binet formülü $\mu_{k,1} = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $\mu_{k,2} = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere

$$P_{k,n} = \frac{\mu_{k,1}^n - \mu_{k,2}^n}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \text{ şeklindedir.}$$

Negatif indisli k -Pell sayı dizisi $P_{k,-n} = (-1)^{n+1} P_{k,n}$ şeklinde tanımlanır.

k -Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n} x^n = \frac{x}{1 - 2x - kx^2}$$

şeklinde verilir (Catarino, 2013).

Lemma 3.1.3. $k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mu_{k,1}^n + \mu_{k,2}^n = P_{k,n+1} + kP_{k,n-1}$$

sağlanır. (Catarino, Campos, Vasco 2020)

İspat: Bu eşitliği Binet formülü ve $\mu_{k,1}\mu_{k,2} = -k$ kullanarak gösterelim

$$\begin{aligned} P_{k,n+1} + kP_{k,n-1} &= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} (\mu_{k,1}^{n+1} - \mu_{k,2}^{n+1} + k\mu_{k,1}^{n-1} - k\mu_{k,2}^{n-1}) \\ &= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} (\mu_{k,1}^{n+1} - \mu_{k,2}^{n+1} - (\mu_{k,1}\mu_{k,2})\mu_{k,1}^{n-1} + (\mu_{k,1}\mu_{k,2})\mu_{k,2}^{n-1}) \\ &= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} (\mu_{k,1}^n(\mu_{k,1} - \mu_{k,2}) + \mu_{k,2}^n(\mu_{k,1} - \mu_{k,2})) \\ &= \mu_{k,1}^n + \mu_{k,2}^n \end{aligned}$$

eşitliği gerçekleştirmiş olur.

Lemma 3.1.4. $k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere

$$P_{k,a(n+2)+r} = (P_{k,a+1} + kP_{k,a-1})P_{k,a(n+1)+r} - (-k)^a P_{k,an+r}$$

sağlanır. (Catarino, Campos, Vasco 2020)

İspat: Bu eşitliği Binet formülü ve $\mu_{k,1}\mu_{k,2} = -k$ kullanarak gösterelim:

$$\begin{aligned} (P_{k,a+1} + kP_{k,a-1})P_{k,a(n+1)+r} &= (\mu_{k,1}^n + \mu_{k,2}^n) \left(\frac{\mu_{k,1}^{a(n+1)+r} - \mu_{k,2}^{a(n+1)+r}}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} (\mu_{k,1}^{a(n+2)+r} - \mu_{k,2}^{a(n+2)+r} + (-k)^a (\mu_{k,1}^{an+r} - \mu_{k,2}^{an+r})) \\ &= P_{k,a(n+2)+r} + (-k)^a P_{k,an+r} \end{aligned}$$

Teorem 3.1.5. $k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı $0 \leq r \leq a - 1$ aritmetik indeksli

k -Pell sayıları için toplam formülü ile verilir

$$\sum_{i=0}^n P_{k,ai+r} = \frac{(-k)^a P_{k,an+r} - P_{k,a(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,a-r}}{(-k)^a - (P_{k,a+1} + kP_{k,a-1}) + 1}$$

(Catarino, Campos, Vasco 2020)

İspat: k -Pell dizisinin Binet formülünü ve geometrik seri açılımını kullanarak ispatı yapalım.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n P_{k,ai+r} &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\mu_{k,1}^{ai+r} - \mu_{k,2}^{ai+r}}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \left(\sum_{i=0}^n \mu_{k,1}^{ai+r} + \sum_{i=0}^n \mu_{k,2}^{ai+r} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \left(\frac{\mu_{k,1}^{a(n+1)+r} - \mu_{k,1}^r}{\mu_{k,1}^a - 1} - \frac{\mu_{k,2}^{a(n+1)+r} - \mu_{k,2}^r}{\mu_{k,2}^a - 1} \right) \\ &= \frac{(-k)^a P_{k,an+r} - P_{k,a(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,a-r}}{(-k)^a - (P_{k,a+1} + kP_{k,a-1}) + 1} \end{aligned}$$

Sonuç 3.1.6. Eğer $a=2p+1$ ise aritmetik indeksli k -Pell sayılarının tek indisli terimlerinin toplamını aşağıdaki gibi buluruz.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n P_{k,(2p+1)i+r} &= \frac{(-k)^{2p+1} P_{k,(2p+1)n+r} - P_{k,(2p+1)(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,(2p+1)-r}}{(-k)^{2p+1} - (P_{k,2p+2} + kP_{k,2p}) + 1} \end{aligned}$$

(Catarino, Campos, Vasco 2020)

Özel olarak da $p=0, a=1$ ve $r=0$ alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n P_{k,i} &= \frac{(-k)^1 P_{k,n} - P_{k,n+1} + P_{k,0} + (-k)^0 P_{k,1}}{(-k)^1 - (P_{k,2} + kP_{k,0}) + 1} \\ &= \frac{(-k)P_{k,n} - P_{k,n+1} + 1}{-k - 2 + 1} \\ &= \frac{kP_{k,n} + P_{k,n+1} - 1}{k + 1} \end{aligned}$$

Sonuç 3.1.7. Eğer $a=2p$ ise aritmetik indeksli k -Pell sayılarının çift indisli terimlerinin toplamını aşağıdaki gibi veririr.

$$\sum_{i=0}^n P_{k,2pi+r} = \frac{(-k)^{2p}P_{k,2pn+r} - P_{k,2p(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,2p-r}}{(-k)^{2p} - (P_{k,2p+1} + kP_{k,2p-1}) + 1}$$

Özel olarak $p=1$ ve $a=2$ alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n P_{k,2i+r} &= \frac{(-k)^2 P_{k,2n+r} - P_{k,2(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,2-r}}{(-k)^2 - (P_{k,3} + kP_{k,1}) + 1} \\ &= \frac{(-k)^2 P_{k,2n+r} - P_{k,2(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,2-r}}{(-k)^2 - (k+4+k) + 1} \\ &= \frac{k^2 P_{k,2n+r} - P_{k,2(n+1)+r} + P_{k,r} + (-k)^r P_{k,2-r}}{k^2 - 2k - 3} \end{aligned}$$

$r=0$ ve $r=1$ olduğunda denklemimiz aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n P_{k,2i} &= \frac{k^2 P_{k,2n} - P_{k,2n+2} + P_{k,r} + 2}{k^2 - 2k - 3} \\ \sum_{i=0}^n P_{k,2i+1} &= \frac{k^2 P_{k,2n+1} - P_{k,2n+3} + P_{k,r} + 1 - k}{k^2 - 2k - 3} \end{aligned}$$

Teorem 3.1.8. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a-1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Pell sayılarının alterne toplam formülü aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,ai+r} = \frac{P_{k,r} + (-1)^n P_{k,a(n+1)+r} - (-k)^r P_{k,a-r} + (-k)^a (-1)^n P_{k,an+r}}{(-k)^a + (P_{k,a+1} + kP_{k,a-1}) + 1}$$

(Catarino, Campos, Vasco 2020)

İspat: Bu eşitliği ispatlamak için Binet formülünü, aritmetik indeksli k -Pell sayıları, $\mu_{k,1}\mu_{k,2} = -k$, $\mu_{k,1}^{-1} = -\mu_{k,2}k^{-1}$, $\mu_{k,2}^{-1} = -\mu_{k,1}k^{-1}$ ve geometrik serinin özelliğinden

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,ai+r} = \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (\mu_{k,1}^{ai+r} - \mu_{k,2}^{ai+r}) \right)$$

$$= \frac{1}{\mu_{k,1} - \mu_{k,2}} \left(\frac{\mu_{k,1}^r (1 + (-1)^n \mu_{k,1}^{a(n+1)})}{1 + \mu_{k,1}^a} - \frac{\mu_{k,2}^r (1 + (-1)^n \mu_{k,2}^{a(n+1)})}{1 + \mu_{k,2}^a} \right)$$

$$= \frac{P_{k,r} + (-1)^n P_{k,a(n+1)+r} - (-k)^r P_{k,a-r} + (-k)^a (-1)^n P_{k,an+r}}{(-k)^a + (P_{k,a+1} + kP_{k,a-1}) + 1}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.1.9. Eğer $a=2p+1$ ise aritmetik indeksli k -Pell sayılarının tek indisli terimlerinin alterne toplamını aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,(2p+1)i+r}$$

$$= \frac{P_{k,r} + (-1)^n P_{k,(2p+1)(n+1)+r} - (-k)^r P_{k,2p+1-r} + (-k)^{2p+1} (-1)^n P_{k,(2p+1)n+r}}{(-k)^{2p+1} + (P_{k,2p+2} + kP_{k,2p}) + 1}$$

(Catarino, Campos, Vasco 2020)

$p=0, a=1$ ve $r=0$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,i} = \frac{(-1)^n (P_{k,n+1} - kP_{k,n}) - 1}{3 - k}$$

$p=1, a=3, r=0$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,3i} = \frac{(-1)^n (P_{k,3(n+1)} - k^3 P_{k,3n}) - k - 4}{-k^3 + 6k + 9}$$

$a=2p$ ise aritmetik indeksli k -Pell sayılarının tek indisli terimlerinin alterne toplamını aşağıdaki gibi buluruz

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,2pi+r}$$

$$= \frac{P_{k,r} + (-1)^n P_{k,2p(n+1)+r} - (-k)^r P_{k,2p-r} + (-k)^{2p} (-1)^n P_{k,2pn+r}}{(-k)^{2p} + (P_{k,2p+1} + kP_{k,2p-1}) + 1}$$

$p=1$ alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{k,2i+r} = \frac{P_{k,r} + (-1)^n P_{k,2(n+1)+r} - (-k)^r P_{k,2-r} + (-k)^2 (-1)^n P_{k,2n+r}}{k^2 + 2k + 5}$$

Teorem 3.1.10. $k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı ve $0 \leq r \leq a - 1$

olmak üzere aritmetik indeksli k -Pell dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{k,an+r} x^n = \frac{P_{k,r} - x(2P_{k,r} - P_{k,a+r})}{(1 - 2x - kx^2)}$$

(Catarino, Campos, Vasco 2020)

İspat: k -Pell dizisinin üreteç fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} f_{a,r}(k, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,an+r} x^n = P_{k,r} + P_{k,a+r} x + \sum_{n=2}^{\infty} P_{k,an+r} x^n \\ &= P_{k,r} + P_{k,a+r} x + \sum_{n=2}^{\infty} (2P_{k,a(n-1)+r} + kP_{k,a(n-2)+r}) x^n \\ &= P_{k,r} + P_{k,a+r} x \\ &\quad + 2x \sum_{n=2}^{\infty} P_{k,a(n-1)+r} x^{n-1} + kx^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{k,a(n-2)+r} x^{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. $j=n-2$ ve $l=n-1$ olduğu zaman

$$\begin{aligned} f_{a,r}(k, r) &= P_{k,r} + P_{k,a+r} x + 2x \left(\sum_{l=0}^{\infty} P_{k,al+r} x^l - P_{k,r} \right) + kx^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{k,aj+r} x^j \\ &= P_{k,r} + P_{k,a+r} x - 2xP_{k,r} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,an+r} x^n + kx^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,an+r} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,an+r} x^n &= \frac{P_{k,r} - x(2P_{k,r} - P_{k,a+r})}{(1 - 2x - kx^2)} \end{aligned}$$

3.2 Aritmetik indeksli k -Pell Lucas Sayı Dizileri

Bu bölüm [8] nolu referans göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur. Bu bölümde, aritmetik indeksli k -Pell Lucas sayı dizileri tanımı ve bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.2.1. Başlangıç şartları $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere;

$$Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ kümeye Pell Lucas sayı dizisi denir. Pell Lucas sayı dizisinin terimleri pozitif tamsayılardan oluşmaktadır.

Pell Lucas sayı dizisinin Binet formülü $\gamma_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $Q_n = \gamma_1^n + \gamma_2^n$ tanımlanır. Negatif indisli Pell Lucas sayı dizisi $Q_{-n} = (-1)^{n+1}Q_n$ şeklindedir.

Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklinde tanımlandıktan sonra Simpson formülü

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8(-1)^{n-1}$$

bağıntısı ile verilir. Kısmi toplam formülü

$$\sum_{k=0}^n Q_k = \frac{1}{2}(Q_{n+1} + Q_n - 2)$$

şeklinde verilir (Koshy, 2014).

Pell ve Pell Lucas sayıları arasında bazı eşitlikler aşağıdaki gibidir. Bu eşitlikleri Pell ve Pell Lucas sayı dizilerinin Binet formüllerini kullanarak elde edebiliriz.

$$P_{m+n} = 2P_m P_n - (-1)^n P_{m-n}$$

$$Q_m^2 = 2P_m^2 + (-1)^m$$

$$Q_{2m} = 2Q_m^2 - 2(-1)^m$$

$$P_n P_m = P_{n+m} + (-1)^m P_{n-m} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$P_{2n} = P_n P_n$$

$$\begin{aligned}
P_{2n+1} &= P_n Q_{n+1} + (-1)^n \\
P_{2n+1} &= \frac{1}{2} (P_n Q_{n+1} + P_{n+1} Q_n) \\
Q_{2n+1} &= \frac{1}{2} (8P_n Q_{n+1} + Q_{n+1} Q_n) \\
P_n P_{n+1} &= \frac{1}{8} (Q_{2n+1} + 2(-1)^{n+1})
\end{aligned}$$

(Halıcı 2011).

Tanım 3.2.2. Başlangıç şartları $Q_{k,0} = 2$, $Q_{k,1} = 2$ olmak üzere;

$$Q_{k,n+1} = 2Q_{k,n} + kQ_{k,n-1} \quad (n \geq 1)$$

yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ kümeye k -Pell Lucas sayı dizisi denir.

k -Pell Lucas dizisinin Binet formülü $\gamma_{k,1} = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $\gamma_{k,2} = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere $Q_{k,n} = \gamma_{k,1}^n + \gamma_{k,2}^n$ şeklindedir. Negatif indisli k -Pell Lucas sayı dizisi

$Q_{k,-n} = (-1)^{n+1} Q_n$ şeklinde formülüne edilir.

k -Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,n} x^n = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - kx^2}$$

şeklinde tanımlanır (Catarino, Vasco, 2013).

Teorem 3.2.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere k -Pell Lucas sayı dizisinin toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n Q_{k,j} = \frac{Q_{k,n+1} + kQ_{k,n}}{k + 1}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.4. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere

Pell Lucas dizisi için alterne toplam formülü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i Q_{ai+r} = \frac{Q_r + (-1)^n Q_{a(n+1)+r} - Q_{a-r} + (-1)^n Q_{an+r}}{(Q_{a+1} + Q_{a-1}) + 1}$$

Teorem 3.2.5. $k \in \mathbb{R}$ ve $n, a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Pell Lucas dizisi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$Q_{k,a(n+1)+r} = Q_{k,a}Q_{k,an+r} - (-k)^a Q_{k,a(n-1)+r}$$

İspat: Aritmetik indeksli k -Pell sayı dizisi için elde edilen aşağıdaki eşitliği kullanalım.

$$P_{k,a(n+1)+r} = (kP_{k,a-1} + P_{k,a+1})P_{k,an+r} - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r}$$

Bu eşitliği ispatlamak için şu eşitlikleri kullanabiliriz.

$$\gamma_{k,1}^n + \gamma_{k,2}^n = P_{k,n+1} + kP_{k,n-1} \text{ ve } \gamma_{k,1}\gamma_{k,2} = -k$$

$$\begin{aligned} & (kP_{k,a-1} + P_{k,a+1})P_{k,an+r} - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r} \\ &= (\gamma_{k,1}^a + \gamma_{k,2}^a) \left(\frac{\gamma_{k,1}^{an+r} - \gamma_{k,2}^{an+r}}{\gamma_{k,1} - \gamma_{k,2}} \right) - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r} \\ &= \left(\frac{\gamma_{k,1}^{a(n+1)+r} - \gamma_{k,2}^{a(n+1)+r} + \gamma_{k,2}^a \gamma_{k,1}^{an+r} - \gamma_{k,1}^a \gamma_{k,2}^{an+r}}{\gamma_{k,1} - \gamma_{k,2}} \right) - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r} \\ &= \frac{\gamma_{k,1}^{a(n+1)+r} - \gamma_{k,2}^{a(n+1)+r}}{\gamma_{k,1} - \gamma_{k,2}} + \frac{\gamma_{k,2}^a \gamma_{k,1}^{an+r} - \gamma_{k,1}^a \gamma_{k,2}^{an+r}}{\gamma_{k,1} - \gamma_{k,2}} - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r} \\ &= P_{k,a(n+1)+r} + (-k)^a P_{k,a(n-1)+r} - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r} \\ &= P_{k,a(n+1)+r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{k,a(n+1)+r} &= kP_{k,a(n+1)+r-1} + P_{k,a(n+1)+r+1} \\ &= k[(kP_{k,a-1} + P_{k,a+1})P_{k,an+r-1} - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r-1}] \\ &\quad + P_{k,an+r+1} - (-k)^a P_{k,a(n-1)+r+1} \\ &= (kP_{k,a-1} + P_{k,a+1})(kP_{k,an+r-1} + P_{k,an+r+1}) \\ &\quad - (-k)^a (kP_{k,a(n-1)+r-1} + P_{k,a(n-1)+r+1}) \\ &= Q_{k,a}Q_{k,an+r} - (-k)^a Q_{k,a(n-1)+r} \end{aligned}$$

Teorem 3.2.6. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Pell Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,an+r}x^n = \frac{Q_{k,r} + x(Q_{k,a+r} - Q_{k,a}Q_{k,r})}{1 - Q_{k,a}x + (-k)^a x^2}$$

şeklinde verilir.

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,an+r}x^n = Q_{k,r} + Q_{k,a+r}x + Q_{k,2a+r}x^2 + Q_{k,3a+r}x^3 + \dots$$

eşitliğini $-Q_{k,a}x$ ve $(-k)^a x^2$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} Q_{k,a}x \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,an+r}x^n &= Q_{k,a}Q_{k,r}x + Q_{k,a}Q_{k,a+r}x^2 + Q_{k,a}Q_{k,2a+r}x^3 + Q_{k,a}Q_{k,3a+r}x^4 + \dots \\ (-k)^a x^2 \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,an+r}x^n &= (-k)^a Q_{k,r}x^2 + (-k)^a Q_{k,a+r}x^3 + (-k)^a Q_{k,2a+r}x^4 \\ &\quad + (-k)^a Q_{k,3a+r}x^5 + \dots \end{aligned}$$

eşitlikleri ortak paranteze alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,an+r}x^n (1 - Q_{k,a}x + (-k)^a x^2) &= Q_{k,r} + x(Q_{k,a+r} - Q_{k,a}Q_{k,r}) \\ &\quad + x^2(Q_{k,2a+r} - Q_{k,a}Q_{k,a+r} + (-k)^a Q_{k,r}) \dots \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece istenen sonuca ulaşırız.

Teorem 3.2.7. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Pell Lucas dizisi için toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n Q_{k,aj+r} = \frac{Q_{k,a} - Q_{k,a(n+1)+r} - (-k)^r Q_{k,a-r} + (-k)^a Q_{k,an+r}}{1 - Q_{k,a} + (-k)^a}$$

şeklinde verilir.

İspat: k -Pell Lucas dizisinde bu eşitliği göstermek için Binet formülünden

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n Q_{k,aJ+r} &= \sum_{j=0}^n \gamma_{k,1}^{aJ+r} + \gamma_{k,2}^{aJ+r} \\
&= \gamma_{k,1}^r \sum_{j=0}^n \gamma_{k,1}^{aJ} + \gamma_{k,2}^r \sum_{j=0}^n \gamma_{k,2}^{aJ} \\
&= \gamma_{k,1}^r \left(\frac{1 - (\gamma_{k,1}^a)^{n+1}}{1 - \gamma_{k,1}^a} \right) + \gamma_{k,2}^r \left(\frac{1 - (\gamma_{k,2}^a)^{n+1}}{1 - \gamma_{k,2}^a} \right) \\
&= \left(\frac{\gamma_{k,1}^r - \gamma_{k,1}^{a(n+1)+r}}{1 - \gamma_{k,1}^a} \right) + \left(\frac{\gamma_{k,2}^r - \gamma_{k,2}^{a(n+1)+r}}{1 - \gamma_{k,2}^a} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte paydaları eşitleyelim.

$$\begin{aligned}
&\gamma_{k,1}^r - \gamma_{k,1}^{a(n+1)+r} + \gamma_{k,2}^r - \gamma_{k,2}^{a(n+1)+r} \\
&= \frac{-\gamma_{k,1}^r \gamma_{k,2}^a - \gamma_{k,2}^r \gamma_{k,1}^a + \gamma_{k,1}^a \gamma_{k,2}^{a(n+1)+r} + \gamma_{k,2}^a \gamma_{k,1}^{a(n+1)+r}}{1 - \gamma_{k,1}^a - \gamma_{k,2}^a + (\gamma_{k,1} \gamma_{k,2})^a}
\end{aligned}$$

$\gamma_{k,1} \gamma_{k,2} = -k$ ve $Q_{k,a} = \gamma_{k,1}^a + \gamma_{k,2}^a$ eşitliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\gamma_{k,1}^r + \gamma_{k,2}^r - (\gamma_{k,1}^{a(n+1)+r} + \gamma_{k,2}^{a(n+1)+r}) \\
&= \frac{-(-k)^r (\gamma_{k,1}^{a-r} - \gamma_{k,2}^{a-r}) + (-k)^a (\gamma_{k,1}^{an+r} + \gamma_{k,2}^{an+r})}{1 - Q_{k,a} + (-k)^a}
\end{aligned}$$

Sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sum_{j=0}^n Q_{k,aJ+r} = \frac{Q_{k,a} - Q_{k,a(n+1)+r} - (-k)^r Q_{k,a-r} + (-k)^a Q_{k,an+r}}{1 - Q_{k,a} + (-k)^a}$$

Teorem 3.2.8. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli k -Pell Lucas dizisi için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{P_{k,2^r n}}{P_{k,n}} = \prod_{j=0}^{r-1} Q_{k,2^j n}$$

İspat: Aritmetik indeksli k -Pell dizisinin Binet formülü ve iki kare farkından

$$\frac{P_{k,2^r n}}{P_{k,n}} = \frac{\gamma_{k,1}^{2^r n} - \gamma_{k,2}^{2^r n}}{\gamma_{k,1}^n - \gamma_{k,2}^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\gamma_{k,1}^{2^{r-1}n} + \gamma_{k,2}^{2^{r-1}n})(\gamma_{k,1}^{2^{r-1}n} - \gamma_{k,2}^{2^{r-1}n})}{\gamma_{k,1}^n - \gamma_{k,2}^n} \\
&= Q_{k,2^{r-1}n} \frac{(\gamma_{k,1}^{2^{r-2}n} - \gamma_{k,2}^{2^{r-2}n})(\gamma_{k,1}^{2^{r-1}n} + \gamma_{k,2}^{2^{r-1}n})}{\gamma_{k,1}^n - \gamma_{k,2}^n} \\
&= Q_{k,2^{r-1}n} Q_{k,2^{r-2}n} \frac{\gamma_{k,1}^{2^{r-2}n} - \gamma_{k,2}^{2^{r-2}n}}{\gamma_{k,1}^n - \gamma_{k,2}^n} \\
&= Q_{k,2^{r-1}n} Q_{k,2^{r-2}n} \dots \frac{\gamma_{k,1}^{2n} - \gamma_{k,2}^{2n}}{\gamma_{k,1}^n - \gamma_{k,2}^n} \\
&= \prod_{j=0}^{r-1} Q_{k,2^j n}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

BÖLÜM 4

ARİTMETİK İNDEKSİLİ (s,t) -PELL ve (s,t) -PELL LUCAS SAYI DİZİLERİ

4.1. Aritmetik indeksli (s,t) -Pell Sayı Dizileri

Bu bölümde aritmetik indekli (s,t) -Pell ve (s,t) -Pell Lucas sayı dizilerinin tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Birçok teorem ve lemmanın ispatına da yer verilmiştir.

4.2. (s,t) -Pell, (s,t) -Pell Lucas Sayı Dizileri

Tanım 4.2.1. Başlangıç şartları $P_0(s,t) = 0$ ve $P_1(s,t) = 1$ olmak üzere; α

$$P_{n+1}(s,t) = 2sP_n(s,t) + tP_{n-1}(s,t)$$

yineleme bağıntısı ile verilen $\{P_n(s,t)\}_{n=1}^{\infty}$ kümeye (s,t) -Pell sayı dizisi denir.

(s,t) -Pell dizisinin Binet formülü $\alpha_1(s,t) = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $\alpha_2(s,t) = s - \sqrt{s^2 + t}$ olmak üzere

$$P_n(s,t) = \frac{\alpha_1^n(s,t) - \alpha_2^n(s,t)}{\alpha_1(s,t) - \alpha_2(s,t)}$$

şeklindedir.

Negatif indisli (s,t) -Pell sayı dizisi $P_{-n}(s,t) = \frac{-P_n(s,t)}{(-t)^n}$ şeklinde tanımlanır.

(s,t) -Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(s,t) x^n = \frac{x}{1 - 2sx - tx^2}$$

şeklindedir (Gulec, Taskara 2012).

Lemma 4.2.2. $s, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\alpha_1^n(s,t) + \alpha_2^n(s,t) = P_{n+1}(s,t) + tP_{n-1}(s,t)$$

sağlanır.

İspat: Bu eşitliği Binet formülü ve $\alpha_1(s, t)\alpha_2(s, t) = -t$ kullanarak gösterelim.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(s, t) + tP_{n-1}(s, t) &= \frac{1}{\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)} (\alpha_1^{n+1}(s, t) - \alpha_2^{n+1}(s, t) \\
&+ t\alpha_1^{n-1}(s, t) - t\alpha_2^{n-1}(s, t)) \\
&= \frac{1}{\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)} (\alpha_1^{n+1}(s, t) - \alpha_2^{n+1}(s, t) - (\alpha_1(s, t)\alpha_2(s, t))\alpha_1^{n-1}(s, t) \\
&\quad + (\alpha_1(s, t)\alpha_2(s, t))\alpha_2^{n-1}(s, t)) \\
&= \frac{1}{\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)} (\alpha_1^n(s, t)(\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)) \\
&\quad + \alpha_2^n(s, t)(\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t))) \\
&= (\alpha_1^n(s, t)(\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)) + \alpha_2^n(s, t)(\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t))) \\
&= \alpha_1^n(s, t) + \alpha_2^n(s, t)
\end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşmiş olur.

Lemma 4.2.3. $s, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere

$$P_{a(n+2)+r}(s, t) = (P_{a+1}(s, t) + tP_{a-1}(s, t))P_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^a P_{an+r}(s, t)$$

eşitliği ile sağlanır.

İspat: Bu eşitliği Binet formülü ve $\alpha_1(s, t)\alpha_2(s, t) = -t$ kullanarak gösterelim:

$$\begin{aligned}
&(P_{a+1}(s, t) + tP_{a-1}(s, t))P_{a(n+1)+r}(s, t) \\
&= (\alpha_1^n(s, t) + \alpha_2^n(s, t)) \left(\frac{\alpha_1^{a(n+1)+r}(s, t) - \alpha_2^{a(n+1)+r}(s, t)}{\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha_1(s, t) - \alpha_2(s, t)} \left(\alpha_1^{a(n+2)+r}(s, t) - \alpha_2^{a(n+2)+r}(s, t) + (-t)^a (\alpha_1^{an+r}(s, t) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_2^{an+r}(s, t)) \right) \\
&= P_{a(n+2)+r}(s, t) + (-t)^a P_{an+r}(s, t)
\end{aligned}$$

böylece istenen eşitlik sağlanır.

Teorem 4.2.4. $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı $0 \leq r \leq a - 1$ aritmetik indeksli (s, t) - Pell sayıları için toplam formülü

$$\sum_{i=0}^n P_{ai+r}(s, t) = \frac{(-t)^a P_{an+r}(s, t) - P_{a(n+1)+r}(s, t) + P_r(s, t) + (-t)^r P_{a-r}(s, t)}{(-t)^a - (P_{a+1}(s, t) + tP_{a-1}(s, t)) + 1}$$

şeklinde verilir.

İspat: Aritmetik indeksli (s,t) -Pell sayı dizilerinin Binet formülü kullanılarak ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n P_{ai+r}(s,t) &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\alpha_1^{ai+r}(s,t) - \alpha_2^{ai+r}(s,t)}{\alpha_1(s,t) - \alpha_2(s,t)} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha_1(s,t) - \alpha_2(s,t)} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_1^{ai+r}(s,t) - \sum_{i=0}^n \alpha_2^{ai+r}(s,t) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha_1(s,t) - \alpha_2(s,t)} \left(\frac{\alpha_1^{a(n+1)+r}(s,t) - \alpha_1^r(s,t)}{r_1^a(s,t) - 1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_2^{a(n+1)+r}(s,t) - \alpha_2^r(s,t)}{\alpha_2^a(s,t) - 1} \right) \\
&= \frac{(-t)^a P_{an+r}(s,t) - P_{a(n+1)+r}(s,t) + P_r(s,t) + (-t)^r P_{a-r}(s,t)}{(-t)^a - (P_{a+1}(s,t) + tP_{a-1}(s,t)) + 1}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.2.5. $a=2p+1$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^n P_{(2p+1)i+r}(s,t) \\
&= \frac{(-t)^{2p+1} P_{(2p+1)n+r}(s,t) - P_{(2p+1)(n+1)+r}(s,t) + P_r(s,t) + (-t)^r P_{(2p+1)-r}(s,t)}{(-t)^{2p+1} - (P_{2p+2}(s,t) + tP_{2p}(s,t)) + 1}
\end{aligned}$$

Özel olarak da $p=0$, $a=1$ ve $r=0$ alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n P_i(s,t) &= \frac{(-t)^1 P_n(s,t) - P_{n+1}(s,t) + P_0 + (-t)^0 P_1}{(-t)^1 - (P_2(s,t) + tP_0(s,t)) + 1} \\
&= \frac{(-t)P_n(s,t) - P_{n+1}(s,t) + 1}{-t - 2 + 1} \\
&= \frac{tP_n(s,t) + P_{n+1}(s,t) - 1}{t + 1}
\end{aligned}$$

$a=2p$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{i=0}^n P_{2pi+r}(s, t) = \frac{(-t)^{2p} P_{2pn+r}(s, t) - P_{2p(n+1)+r}(s, t) + P_r(s, t) + (-t)^r P_{2p-r}(s, t)}{(-t)^{2p} - (P_{2p+1}(s, t) + tP_{2p-1}(s, t)) + 1}$$

Özel olarak $p=1$ ve $a=2$ alalım.

$$\sum_{i=0}^n P_{2i+r}(s, t) = \frac{(-t)^2 P_{2n+r}(s, t) - P_{2(n+1)+r}(s, t) + P_r(s, t) + (-t)^r P_{2-r}(s, t)}{(-t)^2 - (P_3 + tP_1) + 1}$$

$$= \frac{(-t)^2 P_{2n+r}(s, t) - P_{2(n+1)+r}(s, t) + P_r(s, t) + (-t)^r P_{2-r}(s, t)}{(-t)^2 - (t + 4 + t) + 1}$$

$$= \frac{t^2 P_{2n+r}(s, t) - P_{2(n+1)+r}(s, t) + P_r(s, t) + (-t)^r P_{2-r}(s, t)}{t^2 - 2t - 3}$$

$r=0$ ve $r=1$ olduğunda denklemimiz aşağıdaki gibi olur.

$$\sum_{i=0}^n P_{2i}(s, t) = \frac{t^2 P_{2n}(s, t) - P_{2n+2}(s, t) + P_0(s, t) + 2}{t^2 - 2t - 3}$$

$$\sum_{i=0}^n P_{2i+1}(s, t) = \frac{t^2 P_{2n+1}(s, t) - P_{2n+3}(s, t) + P_1(s, t) + 1 - t}{t^2 - 2t - 3}$$

Teorem 4.2.6. $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere

aritmetik indeksli (s, t) -Pell dizilerinin alterne toplamı aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{ai+r}(s, t) = \frac{P_r(s, t) + (-1)^n P_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r P_{a-r}(s, t) + (-t)^a (-1)^n P_{an+r}(s, t)}{(-t)^a + (P_{a+1}(s, t) + tP_{a-1}(s, t)) + 1}$$

İspat: Bu eşitliği ispatlamak için Binet formülünü, (s,t) -Pell sayılarını ve $\alpha_1(s,t)\alpha_2(s,t) = -t$, $\alpha_1^{-1}(s,t) = -\alpha_2(s,t)t^{-1}$, $\alpha_2^{-1}(s,t) = -\alpha_1(s,t)t^{-1}$ eşitliklerini kullanacağız.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{ai+r}(s,t) &= \frac{1}{\alpha_1(s,t) - \alpha_2(s,t)} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (\alpha_1^{ai+r}(s,t) - \alpha_2^{ai+r}(s,t)) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha_1(s,t) - \alpha_2(s,t)} \left(\frac{\alpha_1^r(s,t) (1 + (-1)^n \alpha_1^{a(n+1)}(s,t))}{1 + r_1^a(s,t)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_2^r(s,t) (1 + (-1)^n \alpha_2^{a(n+1)}(s,t))}{1 + \alpha_2^a(s,t)} \right) \\
&= \frac{P_r(s,t) + (-1)^n P_{a(n+1)+r}(s,t) - (-t)^r P_{a-r}(s,t) + (-t)^a (-1)^n P_{an+r}(s,t)}{(-t)^a + (P_{a+1}(s,t) + tP_{a-1}(s,t)) + 1}
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 4.2.7. $a=2p+1$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{(2p+1)i+r}(s,t) \\
&= \frac{P_r(s,t) + (-1)^n P_{(2p+1)(n+1)+r}(s,t) - (-t)^r P_{2p+1-r}(s,t) + (-t)^{2p+1} (-1)^n P_{(2p+1)n+r}(s,t)}{(-t)^{2p+1} + (P_{2p+2}(s,t) + tP_{2p}(s,t)) + 1}
\end{aligned}$$

$p=0, a=1$ ve $r=0$ ise

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_i(s,t) = \frac{(-1)^n (P_{n+1}(s,t) - tP_n(s,t)) - 1}{3 - t}$$

elde edilir.

$p=1, a=3, r=0$ ise

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{3i}(s,t) = \frac{(-1)^n (P_{3(n+1)}(s,t) - t^3 P_{3n}(s,t)) - t - 4}{-t^3 + 6t + 9}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.8. $a=2p$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{2pi+r}(s, t) = \frac{P_r(s, t) + (-1)^n P_{2p(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r P_{2p-r}(s, t) + (-t)^{2p} (-1)^n P_{2pn+r}(s, t)}{(-t)^{2p} + (P_{2p+1}(s, t) + tP_{2p-1}(s, t)) + 1}$$

$p=1$ için

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{2i+r}(s, t) = \frac{P_r(s, t) + (-1)^n P_{2(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r P_{2-r}(s, t) + (-t)^2 (-1)^n P_{2n+r}(s, t)}{t^2 + 2t + 5}$$

sonucu görülür.

Teorem 4.2.9. $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve a, r sabit tamsayı ve $0 \leq r \leq a-1$ olmak üzere aritmetik indeksli (s, t) -Pell dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{t,an+r}(s, t) x^n = \frac{P_{t,r}(s, t) - x(2P_{t,r}(s, t) - P_{t,a+r}(s, t))}{(1 - 2x - tx^2)}$$

İspat: (s, t) -Pell dizisinin üreteç fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_{an+r}(s, t) x^n &= P_r(s, t) + P_{a+r}(s, t)x + \sum_{n=2}^{\infty} P_{an+r}(s, t) x^n \\ &= P_r(s, t) + P_{a+r}(s, t)x + \sum_{n=2}^{\infty} (2P_{a(n-1)+r}(s, t) + tP_{a(n-2)+r}(s, t)) x^n \\ &= P_r(s, t) + P_{a+r}(s, t)x \\ &\quad + 2x \sum_{n=2}^{\infty} P_{a(n-1)+r}(s, t) x^{n-1} + tx^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{a(n-2)+r}(s, t) x^{n-2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$j=n-2$ ve $l=n-1$ olsun.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} P_{t,an+r}(s, t)x^n \\
&= P_r(s, t) + P_{t,a+r}(s, t)x \\
&+ 2x \left(\sum_{l=0}^{\infty} P_{al+r}(s, t)x^l - P_r(s, t) \right) + tx^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{aj+r}(s, t)x^j \\
&= P_r(s, t) + P_{a+r}(s, t)x - 2xP_r(s, t) \\
&+ 2x \sum_{n=0}^{\infty} P_{an+r}(s, t)x^n + tx^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{an+r}(s, t)x^n \\
&\sum_{n=0}^{\infty} P_{an+r}(s, t)x^n = \frac{P_r(s, t) - x(2P_r(s, t) - P_{a+r}(s, t))}{(1 - 2x - tx^2)}
\end{aligned}$$

bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.10. (s, t) -Pell ve (s, t) -Pell Lucas sayı dizisinin toplam formülü

$n \in \mathbb{N}$ ve $m, k \in \mathbb{Z}$ $(-t)^m - Q_m \neq -1$ olduğu zaman

$$\sum_{j=0}^n P_{mj+k}(s, t) = \frac{P_k(s, t) - P_{m(n+1)+k}(s, t) + (-t)^m (P_{mn+k}(s, t) - P_{k-m}(s, t))}{1 + (-t)^m - Q_m(s, t)}$$

ve

$$\sum_{j=0}^n Q_{mj+k}(s, t) = \frac{Q_k(s, t) - Q_{m(n+1)+k}(s, t) + (-t)^m (Q_{mn+k}(s, t) - Q_{k-m}(s, t))}{1 + (-t)^m - Q_m(s, t)}$$

şeklinde tanımlanır (Güleç, Taşkara 2012).

Teorem 4.2.11. (s, t) -Pell ve (s, t) -Pell Lucas sayı dizisinin alterne toplam formülü

$n \in \mathbb{N}$ ve $m, k \in \mathbb{Z}$ $(-t)^m + Q_m \neq -1$ olduğu zaman

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^n (-1)^j P_{mj+k}(s, t) \\
&= \frac{P_k(s, t) + P_{m(n+1)+k}(s, t) + (-t)^m (P_{mn+k}(s, t) + P_{k-m}(s, t))}{1 + (-t)^m + Q_m(s, t)}
\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j Q_{mj+k}(s, t) = \frac{Q_k(s, t) + Q_{m(n+1)+k}(s, t) + (-t)^m (Q_{mn+k}(s, t) + Q_{k-m}(s, t))}{1 + (-t)^m + Q_m(s, t)}$$

şeklinde tanımlanır (Güleç, Taşkara 2012).

4.3. Aritmetik indeksli (s,t)-Pell Lucas Sayı Dizileri

Tanım 4.3.1. $Q_0(s, t) = 2$ ve $Q_1(s, t) = 2s$ $s, t \in \mathbb{R}, s^2 + t > 0, n \geq 1, s > 0, t \neq 0$ olmak üzere;

$$Q_{n+1}(s, t) = 2sQ_n(s, t) + tQ_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n(s, t)\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine (s,t)-Pell Lucas sayı dizisi denir.

$\beta_1 = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $\beta_2 = s - \sqrt{s^2 + t}$ olmak üzere (s,t)-Pell Lucas dizisinin Binet formülü $Q_n(s, t) = r_1^n + r_2^n$ şeklindedir.

Teorem 4.3.2. $t \in \mathbb{R}$ ve $a, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (s,t)-Pell Lucas dizisi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$Q_{a(n+1)+r}(s, t) = Q_a(s, t)Q_{an+r}(s, t) - (-t)^a Q_{a(n-1)+r}(s, t)$$

İspat: İspat için (s,t)-Pell dizisi için verilen aşağıdaki eşitliği kullanacağız.

$$P_{a(n+1)+r}(s, t) = (tP_{a-1}(s, t) + P_{a+1}(s, t))P_{an+r}(s, t) - (-t)^a P_{a(n-1)+r}(s, t)$$

$$\beta_1^n + \beta_2^n = P_{n+1}(s, t) + tP_{n-1}(s, t) \text{ ve } \beta_1\beta_2 = -t$$

eşitlikleri göz önünde bulundurularak

$$(tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))P_{t,an+r}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}$$

$$= (\beta_1^a + \beta_2^a) \left(\frac{\beta_1^{an+r} - \beta_2^{an+r}}{\beta_1 - \beta_2} \right) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t)$$

$$= \left(\frac{\beta_1^{a(n+1)+r} - \beta_2^{a(n+1)+r} + \beta_2^a \beta_1^{an+r} - \beta_1^a \beta_2^{an+r}}{\beta_1 - \beta_2} \right) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_1^{a(n+1)+r} - \beta_2^{a(n+1)+r}}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{\beta_2^a \beta_1^{an+r} - \beta_1^a \beta_2^{an+r}}{\beta_1 - \beta_2} - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) \\
&= P_{t,a(n+1)+r}(s, t) + (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) \\
&= P_{t,a(n+1)+r}(s, t)
\end{aligned}$$

elde edilir. (s, t) -Pell dizisi ve (s, t) -Pell Lucas dizisi arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned}
&Q_{t,a(n+1)+r}(s, t) \\
&= tP_{t,a(n+1)+r-1}(s, t) + P_{t,a(n+1)+r+1}(s, t) \\
&= t[(tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))P_{t,an+r-1}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r-1}(s, t)] \\
&\quad + (tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))P_{t,an+r+1}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r+1}(s, t) \\
&= (tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))(tP_{t,an+r-1}(s, t) + P_{t,an+r+1}(s, t)) - (-t)^a (tP_{t,a(n-1)+r-1}(s, t) + P_{t,a(n-1)+r+1}(s, t)) \\
&= Q_{t,a}(s, t)Q_{t,an+r}(s, t) - (-t)^a Q_{t,a(n-1)+r}(s, t)
\end{aligned}$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Teorem 4.3.3. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli (s, t) -Pell Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{t,an+r}(s, t)x^n = \frac{Q_{t,r}(s, t) + x(Q_{t,a+r}(s, t) - Q_{t,a}(s, t)Q_{t,r}(s, t))}{1 - Q_{t,a}(s, t)x + (-t)^a x^2}$$

şeklinde verilir.

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{t,an+r}(s, t)x^n = Q_{t,r}(s, t) + Q_{t,a+r}(s, t)x + Q_{t,2a+r}(s, t)x^2 + Q_{t,3a+r}(s, t)x^3 + \dots$$

eşitliğini $-Q_{t,a}(s, t)x$ ve $(-t)^a x^2$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
Q_a(s, t)x \sum_{n=0}^{\infty} Q_{,an+r}(s, t)x^n \\
= Q_a(s, t)Q_r(s, t)x + Q_a(s, t)Q_{a+r}(s, t)x^2 + Q_a(s, t)Q_{2a+r}(s, t)x^3 \\
+ Q_a(s, t)Q_{3a+r}(s, t)x^4 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-t)^a x^2 \sum_{n=0}^{\infty} Q_{,an+r}(s, t)x^n \\
= (-t)^a Q_r(s, t)x^2 + (-t)^a Q_{a+r}(s, t)x^3 + (-t)^a Q_{2a+r}(s, t)x^4 \\
+ (-t)^a Q_{3a+r}(s, t)x^5 + \dots
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikleri ortak paranteze alırsak

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} Q_{,an+r}(s, t)x^n (1 - Q_a(s, t)x + (-t)^a x^2) \\
&= Q_r(s, t) + x(Q_{a+r}(s, t) - Q_a(s, t)Q_r(s, t)) \\
& \quad + x^2(Q_{2a+r}(s, t) - Q_a(s, t)Q_{a+r}(s, t) + (-t)^a Q_r(s, t)) \dots \\
& \sum_{n=0}^{\infty} Q_{,an+r}(s, t)x^n = \frac{Q_r(s, t) + x(Q_{a+r}(s, t) - Q_a(s, t)Q_r(s, t))}{1 - Q_a(s, t)x + (-t)^a x^2}
\end{aligned}$$

aritmetik indeksli (s, t) -Pell Lucas dizisi için üreteç fonksiyonunu elde edilmiştir.

Teorem 4.3.4. $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli (s, t) -Pell Lucas dizisi için toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n Q_{aj+r}(s, t) = \frac{Q_a(s, t) - Q_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r Q_{a-r}(s, t) + (-t)^a Q_{an+r}(s, t)}{1 - Q_a(s, t) + (-t)^a}$$

şeklindedir.

İspat: Aritmetik indeksli (s, t) -Pell Lucas dizisi için Binet formülü kullanılarak

$$\sum_{j=0}^n Q_{aj+r}(s, t) = \sum_{j=0}^n \beta_1^{aj+r} + \beta_2^{aj+r}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1^r \sum_{j=0}^n r_1^{aj} + \beta_2^r \sum_{j=0}^n \beta_2^{aj} \\
&= \beta_1^r \left(\frac{1 - (\beta_1^a)^{n+1}}{1 - \beta_1^a} \right) + \beta_2^r \left(\frac{1 - (\beta_2^a)^{n+1}}{1 - \beta_2^a} \right) \\
&= \left(\frac{\beta_1^r - \beta_1^{a(n+1)+r}}{1 - \beta_1^a} \right) + \left(\frac{\beta_2^r - \beta_2^{a(n+1)+r}}{1 - \beta_2^a} \right)
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu eşitlikte paydaları eşitlenirse

$$\begin{aligned}
&\beta_1^r - \beta_1^{a(n+1)+r} + \beta_2^r - \beta_2^{a(n+1)+r} \\
&= \frac{-\beta_1^r \beta_2^a - \beta_2^r \beta_1^a + \beta_1^a \beta_2^{a(n+1)+r} + \beta_2^a \beta_1^{a(n+1)+r}}{1 - \beta_1^a - \beta_2^a + (\beta_1 \beta_2)^a}
\end{aligned}$$

ve $\beta_1 \beta_2 = -t$, $Q_a(s, t) = \beta_1^a + \beta_2^a$ eşitliklerinden.

$$\begin{aligned}
&\beta_1^r + \beta_2^r - (\beta_1^{a(n+1)+r} + \beta_2^{a(n+1)+r}) \\
&= \frac{-(-t)^r (\beta_1^{a-r} - \beta_2^{a-r}) + (-t)^a (\beta_1^{an+r} + \beta_2^{an+r})}{1 - Q_{t,a}(s, t) + (-t)^a}
\end{aligned}$$

aşağıdaki sonuca varılır..

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n Q_{aj+r}(s, t) &= \frac{Q_a(s, t) - Q_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r Q_{a-r}(s, t) + (-t)^a Q_{an+r}(s, t)}{1 - Q_a(s, t) + (-t)^a} \\
\sum_{i=0}^n (-1)^i P_{ai+r}(s, t) &= \frac{P_r(s, t) + (-1)^n P_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r P_{a-r}(s, t) + (-t)^a (-1)^n P_{an+r}(s, t)}{(-t)^a + (P_{a+1}(s, t) + t P_{a-1}(s, t)) + 1}
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.5. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli (s, t) -Pell Lucas dizisi için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{P_{2^r n}(s, t)}{P_n(s, t)} = \prod_{j=0}^{r-1} Q_{2^j n}(s, t)$$

İspat: Aritmetik indeksli (s, t) -Pell dizisinin Binet formülü ve iki kare farkından

$$\frac{P_{2^r n}(s, t)}{P_n(s, t)} = \frac{\beta_1^{2^r n} - \beta_2^{2^r n}}{\beta_1^n - \beta_2^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta_1^{2^{r-1}n} + \beta_2^{2^{r-1}n})(\beta_1^{2^{r-1}n} - \beta_2^{2^{r-1}n})}{\beta_1^n - \beta_2^n} \\
&= c_{2^{r-1}n}(s, t) \frac{(\beta_1^{2^{r-2}n} - \beta_2^{2^{r-2}n})(\beta_1^{2^{r-1}n} + \beta_2^{2^{r-1}n})}{\beta_1^n - \beta_2^n} \\
&= Q_{2^{r-1}n}(s, t) Q_{2^{r-2}n}(s, t) \frac{\beta_1^{2^{r-2}n} - \beta_2^{2^{r-2}n}}{\beta_1^n - \beta_2^n} \\
&= Q_{2^{r-1}n}(s, t) Q_{2^{r-2}n}(s, t) \dots \frac{\beta_1^{2^n} - \beta_2^{2^n}}{\beta_1^n - \beta_2^n} \\
&= \prod_{j=0}^{r-1} Q_{2^j n}(s, t)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

4.4. Aritmetik indeksli Modifiye (s,t)-Pell Sayı Dizileri

Tanım 4.4.1 $s, t \in \mathbb{R}, s^2 + t > 0, n \geq 1, s > 0, t \neq 0$ olmak üzere; $q_0(s, t) = 1$ ve $q_1(s, t) = s$ başlangıç şartlarıyla ve

$$q_{n+1}(s, t) = 2sq_n(s, t) + tq_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısı ile verilen $\{q_n(s, t)\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki kümeye modifiye (s,t)-Pell dizisi denir.

$r_1 = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $r_2 = s - \sqrt{s^2 + t}$ olmak üzere modifiye (s,t)-Pell Lucas dizisinin Binet formülü $q_n(s, t) = \frac{r_1^n - r_2^n}{2}$ şeklindedir.

Teorem 4.4.2. $t \in \mathcal{R}$ ve $a, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere modifiye (s,t)-Pell Lucas dizisi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$q_{a(n+1)+r}(s, t) = 2q_a(s, t)q_{an+r}(s, t) - (-t)^a q_{a(n-1)+r}(s, t)$$

İspat: İspat için (s,t)-Pell dizisi için verilen aşağıdaki eşitliği kullanacağız.

$$P_{a(n+1)+r}(s, t) = (tP_{a-1}(s, t) + P_{a+1}(s, t))P_{an+r}(s, t) - (-t)^a P_{a(n-1)+r}(s, t)$$

$$r_1^n + r_2^n = P_{n+1}(s, t) + tP_{n-1}(s, t) \text{ ve } r_1 r_2 = -t$$

eşitlikleri göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} & (tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))P_{t,an+r}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r} \\ &= (r_1^a + r_2^a) \left(\frac{r_1^{an+r} - r_2^{an+r}}{r_1 - r_2} \right) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) \\ &= \left(\frac{r_1^{a(n+1)+r} - r_2^{a(n+1)+r} + r_2^a r_1^{an+r} - r_1^a r_2^{an+r}}{r_1 - r_2} \right) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) \\ &= \frac{r_1^{a(n+1)+r} - r_2^{a(n+1)+r}}{r_1 - r_2} + \frac{r_2^a r_1^{an+r} - r_1^a r_2^{an+r}}{r_1 - r_2} - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) \\ &= P_{t,a(n+1)+r}(s, t) + (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r}(s, t) \\ &= P_{t,a(n+1)+r}(s, t) \end{aligned}$$

elde edilir. (s, t) -Pell dizisi ve modifiye (s, t) -Pell dizisi arasındaki bağıntıdan

$$\begin{aligned} & 2sq_{t,a(n+1)+r}(s, t) \\ &= tP_{t,a(n+1)+r-1}(s, t) + P_{t,a(n+1)+r+1}(s, t) \\ &= t[(tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))P_{t,an+r-1}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r-1}(s, t)] \\ &+ (tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))P_{t,an+r+1}(s, t) - (-t)^a P_{t,a(n-1)+r+1}(s, t) \\ &= (tP_{t,a-1}(s, t) + P_{t,a+1}(s, t))(tP_{t,an+r-1}(s, t) + \\ &P_{t,an+r+1}(s, t)) - (-t)^a (tP_{t,a(n-1)+r-1}(s, t) + P_{t,a(n-1)+r+1}(s, t)) \\ &= 4q_{t,a}(s, t)q_{t,an+r}(s, t) - 2(-t)^a q_{t,a(n-1)+r}(s, t) \end{aligned}$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Teorem 4.4.3 $a, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli modifiye (s, t) -Pell dizisi için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{an+r}(s, t)x^n = \frac{q_r(s, t) + x(q_{a+r}(s, t) - 2q_a(s, t)xq_r(s, t))}{1 - 2q_a(s, t)x + (-t)^a x^2}$$

şeklinde verilir.

İspat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{an+r}(s, t)x^n$$

üreteç fonksiyonunu sırasıyla $-2q_a(s, t)x$ ve $(-t)^a x^2$ ile çarpalım.

Eşitlikleri ortak paranteze alırsak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} q_{an+r}(s, t)x^n (1 - 2q_a(s, t)x + (-t)^a x^2) \\ &= q_r(s, t) + x(q_{a+r}(s, t) - 2q_a(s, t)q_r(s, t)) + x^2(q_{2a+r}(s, t) - \\ & 2q_a(s, t)q_{a+r}(s, t) + (-t)^a q_r(s, t)) \dots \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{an+r}(s, t)x^n = \frac{q_r(s, t) + x(q_{a+r}(s, t) - 2q_a(s, t)xq_r(s, t))}{1 - 2q_a(s, t)x + (-t)^a x^2}$$

aritmetik indeksli modifiye (s, t) -Pell dizisi için üreteç fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

Teorem 4.4.4. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli modifiye (s, t) -Pell dizisi için toplam formülü

$$\sum_{j=0}^n q_{aj+r}(s, t) = \frac{q_a(s, t) - Q_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r Q_{a-r}(s, t) + (-t)^a Q_{an+r}(s, t)}{1 - Q_a(s, t) + (-t)^a}$$

şekilindedir.

İspat: Aritmetik indeksli modifiye (s, t) -Pell dizisi için Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n q_{aj+r}(s, t) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (r_1^{aj+r} + r_2^{aj+r}) \\ &= \frac{r_1^r}{2} \sum_{j=0}^n r_1^{aj} + \frac{r_2^r}{2} \sum_{j=0}^n r_2^{aj} \\ &= \frac{r_1^r}{2} \left(\frac{1 - (r_1^a)^{n+1}}{1 - r_1^a} \right) + \frac{r_2^r}{2} \left(\frac{1 - (r_2^a)^{n+1}}{1 - r_2^a} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^r - r_1^{a(n+1)+r}}{1 - r_1^a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_2^r - r_2^{a(n+1)+r}}{1 - r_2^a} \right)$$

sağlanır. Bu eşitlikte paydaları eşitlenirse

$$\begin{aligned} & r_1^r - r_1^{a(n+1)+r} + r_2^r - r_2^{a(n+1)+r} \\ &= \frac{-r_1^r r_2^a - r_2^r r_1^a + r_1^a r_2^{a(n+1)+r} r_2^a r_1^{a(n+1)+r}}{2(1 - r_1^a - r_2^a + (r_1 r_2)^a)} \end{aligned}$$

ve $r_1 r_2 = -t$, $Q_a(s, t) = r_1^a + r_2^a$ eşitliklerinden.

$$\begin{aligned} & r_1^r + r_2^r - (r_1^{a(n+1)+r} + r_2^{a(n+1)+r}) \\ &= \frac{-(-t)^r (r_1^{a-r} - r_2^{a-r}) + (-t)^a (r_1^{an+r} + r_2^{an+r})}{1 - Q_{t,a}(s, t) + (-t)^a} \end{aligned}$$

aşağıdaki sonuca varılır.

$$\sum_{j=0}^n q_{aj+r}(s, t) = \frac{q_r(s, t) - q_{a(n+1)+r}(s, t) - (-t)^r q_{a-r}(s, t) + (-t)^a q_{an+r}(s, t)}{1 - Q_a(s, t) + (-t)^a}$$

Teorem 4.4.5. $a, r \in N$ ve $0 \leq r \leq a - 1$ olmak üzere aritmetik indeksli modifiye (s, t) -Pell dizisi için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{P_{2^r n}(s, t)}{P_n(s, t)} = \prod_{j=0}^{r-1} q_{2^j n}(s, t)$$

İspat: Aritmetik indeksli modifiye (s, t) -Pell dizisinin Binet formülü ve iki kare farkından

$$\begin{aligned} & \frac{P_{2^r n}(s, t)}{P_n(s, t)} = \frac{r_1^{2^r n} - r_2^{2^r n}}{r_1^n - r_2^n} \\ &= \frac{(r_1^{2^{r-1}n} + r_2^{2^{r-1}n})(r_1^{2^{r-1}n} - r_2^{2^{r-1}n})}{r_1^n - r_2^n} \\ &= 2q_{2^{r-1}n}(s, t) \frac{(r_1^{2^{r-2}n} - r_2^{2^{r-2}n})(r_1^{2^{r-1}n} + r_2^{2^{r-1}n})}{r_1^n - r_2^n} \\ &= 2^2 q_{2^{r-1}n}(s, t) q_{2^{r-2}n}(s, t) \frac{r_1^{2^{r-2}n} - r_2^{2^{r-2}n}}{r_1^n - r_2^n} \end{aligned}$$

$$= 2^r q_{2^{r-1}n}(s, t) q_{2^{r-2}n}(s, t) \dots \frac{r_1^{2n} - r_2^{2n}}{r_1^n - r_2^n}$$

$$= \prod_{j=0}^{r-1} q_{2^j n}(s, t)$$

sonucu elde edilir.



BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Fibonacci sayı dizisinin temel tanımı üzerinden hareketle başlangıç koşulları çeşitlendirilerek çeşitli sayı dizileri elde edilmiştir. Bu elde edilen özellikler kullanılarak, aritmetik indeksli k -Fibonacci, k -Lucas ve k -Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin karakteristik özellikleri incelenmiş ve bu diziler arasındaki ilişkiler, Binet formülleri, üreteç fonksiyonlar, toplam formülleri gibi önemli teoremler ve ispatlar ortaya konulmuştur.

Bu özelliklerin ışığında, üçüncü bölümde aritmetik indeksli k -Pell ve k -Pell Lucas sayı dizilerinin yineleme bağıntıları türetilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde sunulan tanımlar ve özellikler, dördüncü bölümdeki özgün çalışmanın temelini oluşturmuştur. Bu bölümde, (s,t) -Pell ve (s,t) -Pell Lucas sayı dizileri üzerine yoğunlaşmış; yinelemeli bağıntıları, binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve toplam formülleri gibi konular ele alınmıştır.

Bu araştırmanın yöntemleri ve bulguları, (s,t) -Pell ve (s,t) -Pell Lucas sayı dizilerinin daha birçok özelliğine ulaşma potansiyelini ortaya koymaktadır. Gelecekteki çalışmalarda, bu özellikler ve yöntemler kullanılarak bu sayı dizilerinin daha geniş bir yelpazede incelenebileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Bicknell, N. (1975). A primer on the Pell Sequence and Related Sequence, *The Fibonacci Quarterly*. **13(4)**, 345-349.
- [2] Catarino, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k - Pell Numbers, *Int. Journal of Math. Analysis*. **7(38)**, 1877-1884.
- [3] Catarino, P. Vasco, P. (2013). Modified k - Pell Sequence: Some Identities and Ordinary Generating Function. *Applied Mathematical Sciences*. **7(121)**, 6031-6037.
- [4] Catarino, P., Vasco, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k - Pell –Lucas Sequences *Applied Mathematical Sciences*. **7(98)**, 4867-4873.
- [5] Catarino, P. (2013). A Note Involving Two-by-Two matrices of the k - Pell Lucas Sequences, *Int. Math. Forum*. **7(45)**, 2209-2215.
- [6] Catarino, P. (2014). On Generating Matrices of the k - Pell, k - Pell-Lucas and Modified k - Pell Sequences, *Pure Math. Sci*. **3(2)**, 71-77.
- [7] Catarino, P., Vasco, P. (2013). Some Basic Properties and a Two-by-Two Matrix Involving the k - Pell numbers, *Int. Journal Math. Analysis*. **7(45)**, 2209-2215.
- [8] Catarino, P., Campos, H., Vasco, P. (2020). A Note on k - Pell- Lucas and Modified k -Pell Numbers with Arithmetic Indexes, *Acta Math Univ. Commeniae*. **89(1)**, 97-107.
- [9] Falcon, S. (2007). On The Fibonacci k - Numbers Chaos, *Solitons&Fractals*. **32(5)**, 1615-1624.
- [10] Falcon, S., Plaza, A. (2009). On k -Fibonacci Numbers of Arithmetic Indexes, *Applied Mathematics and Computation*. **208**, 180-185.
- [11] Falcon, S. (2011). On the k -Lucas Numbers, *International Journal of Contemporary mathematical Sciences*. **6(21)**, 1039-1050.

- [12] Falcon, S. (2012). On the k - Lucas Numbers of Aritmetic Indexes, *Applied Mathematics*. **3**, 1202-1206. Güleç, H.H., Taşkara, N. (2012). On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell Lucas Sequences and Their Matrix Representations, *Applied Mathematics Letters*. **25**, 1554-1559.
- [13] Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal Representation Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, **34(1)**, 40-54.
- [14] Jhala, D., Rathore, G.P.S, Sisodiya, K. (2014). Some Properties of k -Jacobsthal Numbers with Aritmetic Indexes, *Turkish Journal of Analysis and numberTheory*. **2(4)**, 119-124.
- [15] Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *JohnWiley and Sons Inc.*, New York.
- [16] Koshy, T. (2014). Pell and Pell Lucas Numbers with Applications, Springer, Berlin.
- [17] Singh, B., Bhadouria, P., Sikhwal, O.(2014). Sum Properties for the k - Lucas Numbers with Aritmetic Indexes, *J. Math. Comput. Sci*. **4(1)**, 105-117.
- [18] Somnuk, S., Sriprad, W. (2016). On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell –Lucas Numbers by Matrix Methods, *Annales Mathematicae et Informaticae*. **46**, 195-204.
- [19] Uygun, Ş. (2016). On the k - Jacobsthal Lucas Numbers of Aritmetic Indexes *Internation Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **11(4)**, 173-183.
- [20] Vasco, P., Catarino, P. (2014). Sums and Products Involving Terms of k - Pell, k - Pell Lucas and Modified k - Pell Sequence, *J. Algebra, Numbers Theory Appl*. **32(2)**, 87-98.

ÖZGEÇMİŞ

İlkokul Gökçepayam köyü ilkokulunda bitirdim. Ortaokulu taşınalı eğitim ile Yaylacık ortaokulunda okudum. Lise öğretimimi Gaziantep Arif Nihat Asya Lisesinde bitirdim. 2011 yılında Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 2015 yılında bitirdiğim bölümde 2021 yılında yüksek lisans kabul edildim. 2023 yılında daha önce öğrenci olduğum Arif Nihat Asya Lisesine atandım.

