

83370

**GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE SABİT
KATSAYILI ADI DİSCRETE DENKLEM
SİSTEMİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER
PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Nurettin DOĞAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

1999

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
TANTASİYON MÜHÜRÜ**

Prof. Dr. Ömer AKIN danışmanlığında Nurettin DOĞAN tarafından hazırlanan bu çalışma14./ ...05./ ...1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Abdullah ALTIN

İmza : 

Üye : Prof.Dr. Elgiz BAYRAMOV

İmza : 

Üye : Prof.Dr. Mehmet CAN

İmza : 

Üye : Prof.Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN

İmza : 

Üye : Prof.Dr. Ömer AKIN

İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Esmâ KILIÇ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE SABİT KATSAYILI ADI DİSCRETE DENKLEM SİSTEMİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Nurettin DOĞAN

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof.Dr. Ömer AKIN

Jüri : Prof.Dr. Abdullah ALTIN

Prof.Dr. Elgiz BAYRAMOV

Prof.Dr. Mehmet CAN

Prof.Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN

Prof.Dr. Ömer AKIN

Bu tez beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, tezle ilgili temel kavramlar verilmiş ve garanti yaklaşım yöntemi tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, lineer, cebirsel, homogen olmayan bir sistem için garanti yaklaşım yöntemi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sabit katsayılı lineer discrete denklem sistemleri tanıtılmış, Cauchy probleminin çözümü temel(fundamental) matris kavramı yardımıyla verilmiştir. Homogen olmayan ayrık(discrete) denklem sistemlerin çözümü verilmiş ayrıca çözümlerin sürekliliği incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, sabit katsayılı lineer ayrık denklem sistemleri için iki-nokta sınır değer problemine ait varlık ve teklik teoremi verilmiştir. Homogen olmayan iki-nokta sınır değer probleminin çözümü Green matris dizileri yardımıyla verilmiştir. Ayrıca bir matrisin şart sayısına dayanarak problemin hassasiyeti incelenmiş bununla ilgili üç teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde, dördüncü bölümdeki teoremlerden önemli ölçüde yararlanılmıştır. Ayrıca garanti yaklaşım yöntemi ile sabit katsayılı lineer ayrık denklem sistemi için iki-nokta sınır değer probleminin nümerik çözümüne ait iki çözüm algoritması ortaya konulmuştur.

1999, 67 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Garanti yaklaşım yöntemi, şart sayısı, format, ayrık(discrete) denklem, iki-nokta sınır değer problemi, temel matris.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NUMERICAL SOLUTION BY GUARANTEED ACCURACY METHOD OF TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DISCRETE EQUATION SYSTEM WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Nurettin DOĞAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ömer AKIN

Jury : Prof.Dr. Abdullah ALTIN
Prof.Dr. Elgiz BAYRAMOV
Prof.Dr. Mehmet CAN
Prof.Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN
Prof.Dr. Ömer AKIN

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, fundamental concepts are introduced. Furthermore the definition of guaranteed accuracy method is given

In the second chapter, guaranteed accuracy process for a nonhomogeneous linear algebraic system is given.

In the third chapter, the system of linear discrete equations are introduced. The solution of the Cauchy problem is given by using the notion of the fundamental matrix. The solutions of the nonhomogeneous systems of discrete equations are given. Moreover the continuity of the solutions are examined.

In the fourth chapter, the existence and uniqueness theorem for the two-point boundary value problem for the systems of linear discrete equations with constant coefficients is given. The solution of the nonhomogeneous two-point boundary value problem is given with the help of the Green matrix sequences. Furthermore by relying on the matrix condition number three theorems for the accuracy of the problem are proved.

In the fifth and the final chapter of the thesis especially the theorems of the chapter four are used. Moreover, two algorithms for the two-point boundary value problem of the linear systems of discrete equations with constant coefficients is established according to the guaranteed accuracy method.

1999, 67 pages

KEY WORDS: Guaranteed accuracy method, condition number, format, two-point boundary value problem, fundamental matrix.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömer AKIN'a ve Sayın Prof.Dr. Haydar BULGAK'a, ayrıca çalışmalarım boyunca bana destek olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nurettin DOĞAN
Ankara, Mayıs 1999

ÖNSÖZ

Bilgisayar çağı adını verdiğimiz çağımızda bilgisayarın kullanımı her alanda yaygınlaşmıştır. Bilgisayarın gelişmesine paralel olarak, matematik problemlerinin bilgisayar yardımıyla çözülmesi için yapılan çalışmalar da artmıştır. Bilgisayarın matematik problemlerini çözmede kullanılması zaman ve para tasarrufu sağlayacaktır. Başlangıçta sadece sayısal çözüm veren metodlar ve bilgisayar yazılımları mevcuttu. Ancak günümüzde analitik olarak çözüm yapabilen Mathematica, Mathcad, Matlab gibi yazılımlar da mevcuttur.

Bilgisayar sayısal çözüm yaptığından dolayı problemin bilgisayara aktarılması ve çözülmesi esnasında çeşitli hatalar ortaya çıkar. Bu hatalar kullanıcının yaptığı, veri aktarma hataları olabileceği gibi bilgisayardan kaynaklanan kesme, yuvarlama hataları da olabilir. Bir problemi bilgisayarda çözmeden önce, problemin teorisi iyi kurulmalı meydana gelebilecek hatalar göz önüne alınmalıdır. Kullanıcıya problemin çözülüp çözilemeyeceğini, çözümün olup olmadığını bildiren yazılımlar yapılmalıdır. Bu da ancak incelenen problemin teorik yapısının çok iyi kurulmasına bağlıdır. Problem teorik olarak incelenirken, problemin ne zaman çözülebildiği ne zaman çözilemediği iyice belirlenmelidir. Problemlerin, verilerinin değişimine göre çözümü olabilir veya olmayabilir.

Tek çözümü olan ve bu tek çözümü verilerdeki küçük değişikliğe küçük tepki, verilerdeki büyük bir değişikliğe büyük tepki veren yani verilere sürekli bağımlı olan problemlere iyi konulmuş veya iyi şartlı (well conditioned) problemler aksi halde kötü konulmuş veya kötü şartlı (ill conditioned) problemler denir. Verilen bir problemde veriler biraz değiştiğinde iyi şartlı bir problem kötü şartlı bir problem haline gelebilir. Problemi iyi şartlı veya kötü şartlı yapan verilerin sınırı yani bu verilerin birbirinden ne kadar farklı olabileceği araştırılmalıdır. Bilgisayarda yapılan işlemlerin hassasiyeti ve doğruluğu işlemcisine bağlıdır. Bilgisayarların gelişimine göre işlemcilerin kapasitesi de gittikçe artmaktadır. Bilgisayarlar tüm reel sayılar kümesi üzerinde işlem yapamazlar. Rasyonel sayıların bir alt kümesi olan ve tezde de belirtilen format kümesi üzerinde işlem yaparlar. Her bilgisayar için format kümesinin elemanları farklıdır. Bu bilgisayarın mikroişlemcisine bağlıdır. Bilgisayarda yapılan hesaplama esnasında

veriler format kümesindeki kendine en yakın sayı ile temsil edilir. Bu da, biz istemediğimiz halde verilerin değişmesine neden olur. Böylece, aslında iyi şartlı bir problem bilgisayarda hesaplama esnasında kötü şartlı bir problem haline gelebilir.

Tezde, sabit katsayılı adi discrete denklem sistemi için iki-nokta sınır değer problemine ait garanti yaklaşım yöntemi verilmiştir. Garanti yaklaşım yöntemi dünyada yeni gelişmeye başlayan bir yöntemdir. Matris işlemlerinde garanti yaklaşık çözüm metodu matematikte $Ax=f$ sisteminin; kararlılık teorisindeki Lyapunov denklemi; optimal kontrol teorisinde kullanılan Riccati denklemi gibi fen ve mühendislikte matris formuna getirilebilen problemlerin bilgisayarla çözümünde son yıllarda uygulanan bir yöntemdir .

Bu yöntemle yukarıdaki problemlerin bilgisayar çözümlerinde oluşan yuvarlama hatalarının (round -off -errors) etkisi minimuma indirgenerek, problemin çözüm hatası, bilgisayarın işlem hatasından daha büyük olmayacak şekilde elde edilir.

Kötü şartlı problemlerde verilen veri ve giriş hataları problemi çözilemeyen duruma getirmektedir. Bu metodla bu tür problemlerin veri ve giriş hataları kontrol edilir, hataya sebep olan değerler tespit edilerek, problem iyi şartlı duruma getirilebilir.

İçindekiler	Sayfa
Özet	i
Abstract	ii
Teşekkür	iii
Önsöz	iv
Simgeler	vii
1. Giriş	1
1.1. Format Kümesi	2
1.2. Garanti Yaklaşım Yöntemleri	4
2. Garanti Yaklaşım Yönteminin $Ax=f$ Denklem Sistemi İçin Kurulması	5
2.1. Format	6
2.2. Şart Sayısı ve Giriş Verilerindeki Hataların Sonuca Etkisi	6
2.3. Şart Sayısı Bütün Normlara Göre Eşdeğerdir	11
2.4. Kalıntı (rezidü) Problemi	11
2.5. Pratik İyi Şartlı Problem	12
2.6. Algoritma	13
2.7. Hassas İterasyon İşlemi	14
3. Sabit Katsayılı Lineer Ayrık Denklem Sistemlerin Çözümleri	17
3.1. Cauchy Problemi	17
3.2. Lineer N Boyutlu Homogen Ayrık Denklem Sistemlerinin Genel Çözümünün Bulunması	22
3.2.1. Taban	22
3.2.2. Bazı Özellikler	24
3.2.3. Temel Matris ve Kuvvet Matris Fonksiyonu	26
3.2.4. Genel Çözüm	28
3.3. Lineer Homogen Olmayan Ayrık Denklem Sistemlerinin Çözümü	29
3.3.1. Özel Çözüm	29
3.3.2. Genel Çözüm	30
3.3.3. Cauchy Problemi	30
3.3.4. Çözümlerin Sürekliliği (Çözümün Verilere Sürekli Bağımlılığı)	31
4. Sabit Katsayılı Lineer Ayrık Denklem Sistemi İçin İki-Nokta Sınır Değer Problemi	36
4.1. Tanım	36
4.2. Varlık ve Teklik Teoremi	38
4.3. Homogen Olmayan İki-Nokta Sınır Değer Problemi ve Green Matris Dizileri	40
4.4. Sabit Katsayılı Lineer Ayrık Denklem Sistemlerin İki-Nokta Sınır Değer Probleminin Hassasiyetinin Bir Matrisin Şart Sayısına Dayanarak Ölçülmesi	43
5. Ayrık İki-Nokta Sınır Değer Problemi İçin Garanti Yaklaşım Yöntemi	57
5.1. Format	57
5.2. Şart Sayısı	57
5.3. Giriş Verilerindeki Hataların Sonuca Etkisi	58
5.4. Kalıntı (rezidü) Problemi	59
5.5. Pratik İyi Şartlı Problem	62
5.6. Algoritma	62
5.7. Hassas İterasyon İşlemi	67
Kaynaklar	68
Özgeçmiş	70

SİMGELER

$\lambda_1(A)$	: A matrisinin en küçük öz değeri
$\lambda_N(A)$	: A matrisinin en büyük öz değeri
$\sigma_1(A)$	: A matrisinin en küçük tekil değeri
$\sigma_N(A)$	: A matrisinin en büyük tekil değeri
$\ A\ $	: A matrisinin normu
$\mu(A)$	: $\mu(A) = \ A\ \ A^{-1}\ $, A matrisinin şart sayısı
$\Psi(n)$	: Temel Matris
$F(\gamma, P, P_+, K)$	: Format Kümesi
$\tilde{A}$	: A matrisine yakın matris
μ^*	: Bir matrisin terslenebilmesi için kabul edilen üst sınır
A^*	: A matrisinin transpozu
$\mathfrak{I}(A)$	: $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin çözümü olan vektör dizilerinin vektör uzayı
Ψ^{++}	: Yarı ters matris
$\hat{y}$	: Özel çözüm

1. GİRİŞ

Günümüzde hayatımızın her alanında (maliye, uçak ve diğer rezervasyon işlerinde, müzikte, sanatta, tıpta, fabrika üretim hatlarında v.b.) bilgisayarın kullanımı çok hızlı bir şekilde artmaktadır. Başlangıçta ve günümüzde de en çok bilgisayarların, bilim ve mühendislikte ve daha özel olarak bazı fiziksel olaylara karşı gelen matematiksel modellerin çözümünü elde etmek için kullanımı daha yaygındır. Bu şekildeki çözümleri elde etmek için kullanılan teknikler, bilimsel hesaplamalar olarak adlandırılan genel alanın bir parçasıdır. Bu tekniklerin bilimsel ve mühendislik problemlerinde kullanılmasına literatürde “Computational Science” adı verilir. Bilgisayarlar havacılıkta, uçak ve diğer cihazların tasarımında simülasyonda, mimarlıkta, meteorolojide ve daha birçok alanda kullanılmaktadır ve kullanımı daha da artacaktır.

Bütün bu problemlerin, daha çok bilim ve mühendislikte kullanılan diğer problemlerin matematiksel modelleri diferensiyel ve fark denklem sistemleridir [Golup ve Ortega 1992]. Bu denklem sistemlerinin bilgisayarda doğru ve güvenilir olarak çözümü, asıl problemin çözümü için gereklidir. Bilgisayarda hesaplanan çözümün güvenilirliği ve doğruluğu kullanılan bilgisayara, işletim sistemine, algoritmaya, kullanılan bilgisayar diline ve çözüm için hazırlanan bilgisayar programına bağlıdır. Ancak bilimsel hesaplamalarda en önemli rolü matematik üstlenmektedir. Problem bilgisayarda çözülmenden önce matematik teori iyi kurulmalı, çözümün varlığı, tekliği verilere sürekli bağımlı olup olmadığı iyice araştırıldıktan sonra bilgisayar devreye girmelidir.

Tanım 1.1. Eğer verilen bir problemin tek bir çözümü varsa ve giriş verilerindeki küçük bir değişime karşı problemin tek olan çözümü küçük tepki, büyük değişime karşı büyük tepki verir ise yani çözüm verilere sürekli bağımlı ise bu probleme iyi şartlı (well-conditioned) problem, aksi halde kötü şartlı (ill-conditioned) problem denir.

Verilen problem kötü şartlı bir problem ise çözüme devam edilmez, iyi şartlı bir problem ise çözüme devam edilebilir. Bilgisayarlar tüm reel sayılar kümesi üzerinde işlem yapamazlar. Reel sayılar yerine rasyonel sayıların bir alt kümesi olan ve format adı verilen kümeye ait sayılarla işlem yaparlar. Problemin bilgisayarda çözümü esnasında veriler,

bilgisayarda kendisine en yakın format kümesinin elemanı ile temsil edilirler. Bu durumdan dolayı iyi şartlı bir problem bilgisayarda kötü şartlı olarak değerlendirilebilir.

1.1. Format Kümesi

Bilgisayarlar tüm reel sayılar kümesi üzerinde işlem yapamazlar. Reel sayılar yerine rasyonel sayıların bir alt kümesi olan ve format adı verilen kümeye ait sayılarla işlem yaparlar.

Format kümesi

$$F(\gamma, P_-, P_+, K) = \{0\} \cup \{z : z = \pm \gamma^{P(z)} m(z), m(z) = a_1/\gamma + a_2/\gamma^2 + \dots + a_K/\gamma^K \\ a_1 \neq 0, 0 \leq a_j \leq \gamma-1, \gamma \in Z^+, j = 1, 2, \dots, K, P_- \leq P(z) \leq P_+, P_- \in Z^-, P_+ \in Z^+\}$$

şeklinde tanımlıdır [Akın ve Bulgak 1998]. Format kümesi seçilen γ, P_-, P_+, K değerlerine göre değişir. Kullanıcının hesaplama yaparken hangi format kümesinde işlem yaptığını bilmesi önemlidir. Format kümesi her bilgisayarda aynı değildir ve bilgisayarın işlemcisine göre değişir.

γ, P_-, P_+ sabit olarak alınırsa format kümesi

$$F_K = F(\gamma, P_-, P_+, K)$$

olur. Bu kümenin en büyük sayısı $\epsilon_\infty = \gamma^{P_+} (1 - \gamma^{-K})$ dir ve format kümesinin bütün elemanları $[-\epsilon_\infty, \epsilon_\infty]$ kapalı aralığındadır.

Bir sayının bilgisayarda temsili sırasında yaklaşıklıkı karakterize eden iki bilgisayar sabiti vardır. Bu sabitler ϵ_1 ve ϵ_0 ile gösterilir. ϵ_1 bilgisayarda 1 sayısına yaklaşım için, $\epsilon_0 \cdot 0$ sayısına yaklaşım için gösterilen sabitlerdir. Bilgisayarda $(0, \epsilon_0)$ ve $(1, 1 + \epsilon_1)$ aralıklarında başka hiçbir sayı yoktur.

Verilen bir x sayısı bilgisayarın hafızasına yerleşirken üç durum ile karşılaşılabilir.

1. Eğer x seçilen format kümesinin bir elemanı ise hafızaya aynen yani, hatasız olarak yerleşir.

2. Eğer x seçilen format kümesinin bir elemanı değil ancak format kümesinde x 'e yakın elemanlar varsa x yerine format kümesinin x 'e en yakın elemanı olan $fl(x)$, hafızaya yerleşir. Bu durumda hata

$$|x - fl(x)| \leq \varepsilon_1 |x| + \varepsilon_0$$

eşitsizliğini sağlar.

3. Eğer x seçilen format kümesinin dışında ise, bu durumda bilgisayar overflow hatası verir ve kilitlenir.

A matrisi reel $N \times N$ tipinde bir matris ve f vektörü N boyutlu reel bir vektör olsun. A ve f bilgisayarın hafızasına yerleşirken overflow hatası meydana gelmezse ve $\|A\| > \varepsilon_0$ ve $\|f\| > \varepsilon_0$ ise bilgisayarın hafızasına A yerine $fl(A)$ matrisi ve f yerine $fl(f)$ vektörü yerleşir. Bu durumda hata için

$$\|A - fl(A)\| \leq \varepsilon_1 \|A\|, \quad \|f - fl(f)\| \leq \varepsilon_1 \|f\|$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu hatalara giriş hataları denir. Burada $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$; A

matrisinin spektral normunu ve $\|f\|$; f vektörünün Euclid normunu göstermektedir.

[Akın ve Bulgak 1998]. A matrisinin normu $\lambda_j(A)$ özdeğerleri yardımıyla

$\|A\| = \max_j \sqrt{\lambda_j(A^*A)}$ şeklinde de hesaplanabilir. Karesel bir A matrisinin tekil

değerleri olarak adlandırılan $\sigma_j(A)$ ' lar ise $\sigma_j(A) = \sqrt{\lambda_j(A^*A)}$ şeklinde hesaplanabilir.

Böylece A matrisinin en büyük tekil değeri yardımıyla $\|A\| = \sigma_N(A)$ yazılabilir.

$\|A^{-1}\| = 1/\sigma_1(A)$ dır. Burada $\sigma_1(A)$, A matrisinin en küçük tekil değeridir. A matrisinin tekil değerleri için

$$\sigma_1(A) \leq \sigma_2(A) \leq \dots \leq \sigma_N(A)$$

sıralaması geçerlidir [Godunov vd. 1993].

Örnek olarak $Ax = f$ problemi ele alınsın. Bu problemin bilgisayarda çözümü esnasında A matrisi ve f vektörü bilgisayarın hafızasına $\tilde{A}$ ve $\tilde{f}$ olarak yerleşirse

$$\|A - \tilde{A}\| \leq \varepsilon \|A\|, \quad \|f - \tilde{f}\| \leq \varepsilon \|f\| \quad (1.1)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada ε pozitif bir reel sayı veya hesaplama işlemleri için seçilen formatı karakterize eden veya verilen problemin verilerinin doğruluğunu gösteren sayıdır.

1.2. Garanti Yaklaşım Yöntemleri

İyi şartlı bir problem, bilgisayarın hafızasına yerleşirken kötü şartlı bir problem gibi algılanabilir. Bu nedenle verilen bir problemin verilerin değişimine göre hassasiyeti incelenmelidir.

Hassasiyet incelendikten sonra verilen problemin çözümü için problemi kötü şartlı yapmayacak uygun bir algoritma seçilmelidir. Bu algoritma ile verilen problemin iyi şartlı olduğu tespit edilirse problemin çözümüne devam edilebilir ve çözüm elde edilir. Eğer problemin kötü şartlı olduğu tespit edilirse çözüm esnasında “Problem kötü şartlıdır” mesajı verilerek işlemler kesilir. Böylece yanlış bir çözüm bulma veya bilgisayarın kilitlenme ihtimali ortadan kalkar. Bunu sağlayan algoritmalara ve programlara “garanti yaklaşım algoritmaları ve programları” denir. Bu konu [Bulgakov 1993, Godunov vd. 1993, Bulgakov 1995, Aydın 1995, Merdan 1996, Bulgakov 1997, Akın ve Bulgakov 1998, Cıvık 1998] kaynaklarında da ele alınmıştır.

Bilgisayarda çözüm esnasında hesaplanan çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğu önemlidir. Yukarıda açıklanan garanti yaklaşım yönteminin oluşturulabilmesi için aşağıdaki kavramların açıklanması gerekmektedir [Bulgakov, 1993].

- 1- Problemin hangi format kümesinde ele alınacağı belirlenmelidir,
- 2- Probleme ait şart sayısı belirlenmelidir,
- 3- Giriş verilerindeki hataların sonuca etkisi araştırılmalıdır,
- 4- Kalıntı (rezidü) problemi ele alınmalıdır,
- 5- Pratik iyi şartlı problem araştırılmalıdır,
- 6- Formata bağlı bir algoritma yazılmalıdır,
- 7- Hassas iterasyon işlemi yapılmalıdır.

Bu algoritma ile ilgili olarak daha ayrıntılı bilgi için [Bulgakov 1995, Aydın 1995, Bulgakov 1993, Godunov vd. 1993, Akın ve Bulgakov 1998, Bulgakov A. 1997, Merdan 1996, Cıvık 1998] eserlerine bakılabilir. Garanti yaklaşım yönteminde şart sayısı kavramı önemli bir yere sahiptir. Her problemin şart sayısı farklıdır. Örnek olarak $Ax = f$ sistemi için belirlenen şart sayısı $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ dır. A matrisinin tekil değerleri yardımıyla $\mu(A) = \frac{\sigma_N(A)}{\sigma_1(A)}$ şeklinde de yazılabilir.

İkinci bölümde $Ax = f$ sisteminin çözümü için garanti yaklaşım yönteminin kurulması örnek olarak verilecektir.

2. GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİNİN $Ax=f$ DENKLEM SİSTEMİ İÇİN KURULMASI

Bu bölümde A reel $N \times N$ tipinde bir matris, f N -boyutlu bir sütun vektörü ve x N -boyutlu bilinmeyen bir sütun vektörü olmak üzere $Ax=f$ denklem sistemi için garanti yaklaşım yönteminin nasıl oluşturulduğu üzerinde durulacaktır. $Ax=f$ denklem sistemine ait garanti yaklaşım yönteminin oluşturulabilmesi için birinci bölümde bahsedilen yedi madde açıklanacaktır [Bulgakov 1991].

2.1. Format

Bilgisayarın, rasyonel sayıların bir alt kümesi olan format kümesindeki sayılarla çalıştığı önceki bölümde ifade edilmişti. Bilgisayarda bir problemi ele alırken hangi format kümesinde çalışılacağı da belirtilmelidir. Burada, Kısım 1.1. de ele alındığı gibi tüm hesaplamaların γ , P_- , P_+ ve k parametrelerine bağlı olan rasyonel sayıların $F(\gamma, P_-, P_+, k)$ alt kümesinde yapıldığı kabul edilmektedir.

2.2. Şart Sayısı ve Giriş Verilerindeki Hataların Sonuca Etkisi

$Ax = f$ sisteminin çözümünün bulunması için bilinen klasik test $\det A \neq 0$ olup olmadığıdır. Ancak bu problem bilgisayar ile çözülürken $\det A = 0$ olabilir. Örneğin;

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. $\det A = \varepsilon \neq 0$ olup her f için çözüm vardır ve tektir. Bu matris bilgisayarın hafızasına yerleştiğinde A matrisi

$$B = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|B\| = \varepsilon$$

matrisi kadar değişikliğe uğrasın. Bu durumda sistemin yeni hali $(A + B)y = f$ olur. Ancak $\det(A + B) = 0$ olduğundan bazı f 'ler için sonsuz çözüm varken bazı f 'ler için ise çözüm olmayacaktır. Yani; $(A + B)y = f$ sisteminin çözülmesi problemi iyi konulmuş bir problem değildir. Çünkü çözümün varlığı ve tekliği f 'nin elemanlarına göre değişkenlik arz etmektedir.

Bu durum çözümün olup olmadığının araştırılması için yeni kriterler aranmasını gerektirmiştir. Bu konuda çalışmalar John von Neumann ve H.H. Goldstine (1947) ve Turing (1948) tarafından başlatılmıştır. Daha sonra [Golup vd. 1989, Wilkinson 1965, Godunov vd. 1993, Trefethen 1995, Demmel 1997] çalışmaları ile verilen problem için $\mu(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$ şart sayısı olarak belirlenmiş ve $\mu(A)$ ' ya göre problemler ele alınarak değerlendirilmiştir. Tekil matrisler için $\mu(A) = \infty$ olarak kabul edilir.

Bu tür problemlerde problemin iyi tanımlı olmayan bölgeye olan uzaklığı ne kadardır ve acaba A 'nın elemanları ne kadar değiştirilirse problem yine iyi tanımlı olacaktır soruları akla gelebilir. Bu sorunun cevabı bir matrisin şart sayısı yardımıyla verilebilir. Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 bu sorunun cevabını veren teoremlerdir.

Şimdi $Ax = f$ denklem sistemi bilgisayarda çözülürken iyi konulmuş olup olmadığı araştırılacaktır. İlk olarak f yerine $f + \delta f$ alındığı kabul edilsin. Burada δf , f format kümesine yerleştirilirken ortaya çıkan hata olabilir. Eğer $x + \delta x$, $f + \delta f$ sağ tarafına karşılık gelen çözüm ise

$$A(x + \delta x) = f + \delta f \quad (2.2.1)$$

yazılabilir. Bir lineer sistemin iyi şartlı olup olmadığı çözümdeki bağıl hata ve sağ taraftaki bağıl hata arasındaki oran ile ilgilidir. Eğer δx , δf ' e göre daha büyükse sistem kötü şartlıdır. (2.2.1) sisteminin şartlılığını analiz etmek için δx , δf cinsinden ifade edilsin. $Ax = f$ olduğundan (2.2.1)' deki Ax ve f terimleri kaldırılarak

$$A\delta x = \delta f \quad (2.2.2)$$

elde edilir. Eşitlik A^{-1} ile soldan çarpılırsa

$$\delta x = A^{-1}\delta f \quad (2.2.3)$$

elde edilir. c_i , A^{-1} matrisinin i -inci sütununu göstermek üzere (2.2.3)' ten

$$\delta x = \sum_{i=1}^n \delta f_i . c_i \quad (2.2.4)$$

yazılabilir. Böylece f nin i -inci bileşeninde bir δf_i değişikliği çözümde bir $\delta f_i \cdot c_i$ değişikliği üretir ve eğer A^{-1} matrisinin i -inci sütunu büyükse bu takdirde küçük bir δf_i , büyük bir δx üretecektir.

(2.2.4) denkleminin δf ' nin her bileşeni üzerinde küçük bir δx farkını verecektir.(2.2.4)' ün normu alınır ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\| \delta x \| \leq \sum_{i=1}^n |\delta f_i| \cdot \| c_i \|$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlik, $|\delta f_i|$ ile A^{-1} in i -inci sütununun normu olan $\| c_i \|$ nin çarpımı her i için küçük ise norm anlamında δx ' in küçük olduğunu gösterir. $\| \delta x \|$ için diğer büyük bir sınır (2.2.3)' ün normundan

$$\| \delta x \| = \| A^{-1} \delta f \| \leq \| A^{-1} \| \cdot \| \delta f \| \quad (2.2.5)$$

elde edilir. Böylece çözümdeki $\| \delta x \|$ değişikliği $\| A^{-1} \| \cdot \| \delta f \|^$ değişikliği ile sınırlıdır.

Sık sık hatanın $\| \delta x \|$ büyüklüğü ile değil x ve $x + \delta x$ arasındaki bağıntının kaç basamaklı alındığı ile ilgilenilir. $\| \delta x \| / \| x \|$ bağıl hatası x ve δx arasındaki bağıntının basamak sayısı ile ölçülür. Bir lineer sistemin şartlılığı(iyi konulup konulmadığının araştırılması) bağıl hata ve sağ taraftaki $\| \delta f \| / \| f \|$ bağıl hata arasındaki oran ile bağlantılıdır. Eğer bu oran büyükse bu takdirde sağ taraftaki küçük bir değişiklik çözümde buna bağlı olarak büyük bir değişikliği üretebilir. Çözümdeki bağıl hata ve sağ taraftaki bağıl hata arasındaki oranı tahmin etmek için

$$f = Ax \text{ ve } \delta x = A^{-1} \delta f$$

yazılır. Böylece

$$\frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta f\|/\|f\|} = \frac{\|A^{-1}\delta f\|/\|x\|}{\|\delta f\|/\|Ax\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \frac{\|A^{-1}\delta f\|}{\|\delta f\|} \quad (2.2.6)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{ve} \quad \|A^{-1}\delta f\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta f\|$$

olur. Böylece (2.2.6) özdeşliği

$$\frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta f\|/\|f\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (2.2.7)$$

şeklinde yazılır. Burada $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ büyüklüğü A matrisinin şart sayısı olarak adlandırılır. $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ çarpımını $\mu(A)$ ile gösterilecek olursa (2.2.7) eşitsizliği

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \quad (2.2.8)$$

olarak yazılabilir.

Böylece çözümdeki bağıl hata, şart sayısı kere sağ taraftaki bağıl hata ile sınırlıdır. Şart sayısı ve sağ taraftaki bağıl hatanın çarpımı küçük olduğunda çözümdeki bağıl hata da küçük olur.

f değişmeden kalmak üzere A katsayılar matrisinin yerine $A+\delta A$ yazıldığında meydana gelen etki benzer şekilde analiz edilebilir. Buradaki δA değişimi katsayılar format kümesine yerleşirken meydana gelen hata olabilir. Eğer $x + \delta x$ çözümü $A + \delta A$ katsayı matrisine karşılık gelirse bu takdirde

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = f \quad (2.2.9)$$

yazılabilir.

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = Ax + A\delta x + \delta A(x + \delta x) \quad \text{ve} \quad Ax = f \quad \text{olduğundan} \quad (2.2.9)$$

sistemi

$$A\delta x = -\delta A(x + \delta x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu A^{-1} ile çarpılırsa

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x)$$

yazılabilir. Norm alınır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\| \delta x \| &= \| A^{-1} \delta A (x + \delta x) \| \\
&\leq \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \| \cdot (\| x \| + \| \delta x \|) \\
&= \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \| \cdot \| x \| + \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \| \| \delta x \|
\end{aligned}$$

olur. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\| \delta x \| (1 - \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \|) &\leq \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \| \| x \| \\
\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} &\leq \frac{\| A^{-1} \| \| \delta A \|}{1 - \| A^{-1} \| \| \delta A \|} = \frac{\| A^{-1} \| \| A \| \| \delta A \| / \| A \|}{1 - \| \delta A \| \| A^{-1} \|} \\
\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} &\leq \frac{\mu(A) \| \delta A \| / \| A \|}{1 - \| \delta A \| \| A^{-1} \|} \quad (2.2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\| \delta A \| \cdot \| A^{-1} \|$ çarpımı 1' den çok küçükse (2.2.10)'da payda 1'e yakın olur. Sonuç olarak $\| \delta A \| \cdot \| A^{-1} \|$ çarpımı 1'den çok küçük olduğunda (2.2.10) çözümündeki bağıl hatanın $\mu(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$ şart sayısı ile katsayı matrisindeki bağıl hatanın çarpımı olduğunu ifade eder[Hager 1988].

Teorem 2.2.1. $Ax = f$ sistemi ve $(A + B)y = f + g$ sistemi göz önüne alınsın. Burada g , $Ax=f$ sisteminin sağ tarafının değişimini B ise A katsayılar matrisinin değişimini göstermektedir. Bu durumda

$$\frac{\| B \|}{\| A \|} \leq \alpha, \frac{\| g \|}{\| f \|} \leq \gamma, \mu(A) = \frac{\sigma_N(A)}{\sigma_1(A)}$$

olsun. Eğer $\alpha\mu(A) < 1$ ise bu takdirde

$$\frac{\| y - x \|}{\| x \|} \leq (\alpha + \gamma) \frac{\mu(A)}{1 - \alpha\mu(A)}$$

olur. [Godunov vd 1993]

İspat.

$$\begin{aligned}
\| (A + B)^{-1} \| &= \sigma_N((A + B)^{-1}) = \frac{1}{\sigma_1(A + B)} \\
&\leq \frac{1}{\sigma_1(A) \cdot \| B \|} \leq \frac{1}{\sigma_1(A) [1 - \alpha\mu(A)]} \\
(A + B)^{-1} &= (A + B)^{-1} [(A + B) - B] \cdot A^{-1} \\
&= A^{-1} - (A + B)^{-1} B A^{-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}(A+B)^{-1}f - x &= (A+B)^{-1}f - A^{-1}f \\ &= -(A+B)^{-1}Bx \\ \|(A+B)^{-1}f - x\| &\leq \|(A+B)^{-1}\| \|B\| \|x\|\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|(A+B)^{-1}g\| &\leq \|(A+B)^{-1}\| \|g\| \\ \|y - x\| &= \|(A+B)^{-1}(f+g) - x\| \leq \|(A+B)^{-1}\| \cdot (\|g\| + \|B\| \|x\|)\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\|y-x\|}{\|x\|} &\leq \|(A+B)^{-1}\| \left(\frac{\|g\|}{\|f\|} \frac{\|f\|}{\|x\|} + \|B\| \right) \\ &\leq \|(A+B)^{-1}\| \left(\gamma \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \alpha \|A\| \right) \\ &\leq (\alpha + \gamma) \|A\| \|(A+B)^{-1}\| \\ &\leq (\alpha + \gamma) \frac{\mu(A)}{1 - \alpha\mu(A)}\end{aligned}$$

olur. Böylece teorem ispat edilmiş oldu.

Teorem 2.2.2. A tekil olmayan bir matris olsun. Bir B matrisi için

$$2\mu(A)\|B\|/\|A\| < 1$$

eşitsizliği geçerli ise bu taktirde (A+B) matrisi de tekil değildir ve

$$|\mu(A) - \mu(A+B)| \leq 3\mu^2(A)\|B\|/\|A\|$$

eşitsizliği geçerlidir. [Godunov vd 1993]

Teorem 2.2.3. Eğer A tekil olmayan bir matris ve bir B matrisi için $2\mu(A)\|B\|/\|A\| < 1$ eşitsizliği geçerli ise bu taktirde $Ax = f$ problemi ve ona yakın olan $(A+B)y = f+g$ probleminin çözümleri arasında

$$\|x - y\|/\|x\| \leq 3\mu(A)(\|B\|/\|A\| + \|g\|/\|f\|)$$

eşitsizliği geçerlidir. [Godunov vd 1993]

Teorem 2.2.3, verilerin bağıl hatası ile çözümün bağıl hatasının $\mu(A)$ parametresi ile bağıllığını verir. Yani $\mu(A)$ ne kadar küçük ise verilen $Ax = f$ problemi o kadar iyi konulmuştur.

2.3. Şart Sayısı Bütün Normlara Göre Eşdeğerdir

Normlu bir uzayda tüm normlar birbirine eşdeğer olduğundan farklı normlar birbirleri ile yakın ilişkilidirler ve eğer şart sayısı bir norma göre büyükse diğer bir norma göre de büyüktür. Üstelik her norm için şart sayısı en az 1'dir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Eğer A bir skaler ise bu takdirde $A^{-1} = 1/A$ ve $\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = |A| / |A| = 1$ dir. Böylece sadece bir denklem söz konusu olduğunda $\mu(A) = 1$ olur. Birden fazla denklem söz konusu olduğunda denklem sistemleri için

$$I = A \cdot A^{-1}$$

olduğundan

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \mu(A)$$

sonucu ortaya çıkar. Yani $\mu(A) \geq 1$ dir.

2.4. Kalıntı (rezidü) Problemi

Bir lineer sistem için hesaplanan sonuçtaki doğruluk şart sayısı ve kalıntı yardımı ile tahmin edilebilir. $\tilde{x}$, $Ax = f$ için bilgisayarda hesaplanan çözüm olsun. Kalıntı $r = f - A\tilde{x}$ şeklinde yazılır. Buradan $A\tilde{x} = f - r$ olur bu da

$$A(x + \tilde{x} - x) = f - r \quad (2.4.1)$$

denklemine eşdeğerdir. Eğer $\delta x = \tilde{x} - x$ ve $\delta f = -r$ denilirse bu takdirde (2.4.1)

$$A(x + \delta x) = f + \delta f$$

şeklinde yazılabilir. (2.2.8) de $\delta x = \tilde{x} - x$ ve $\delta f = -r$ yazılırsa bu takdirde

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \frac{\|r\|}{\|f\|} \quad (2.4.2)$$

yazılabilir.

Böylece $\tilde{x}$ daki bağıl hata şart sayısı ile $\|r\| / \|f\|$ (bağıl kalıntı)'nın çarpımından küçük veya eşittir. Bir lineer sistem, eğer $\mu(A)$ küçükse hesaplama hassasiyetine göre iyi şartlıdır (iyi konulmuştur) [Hager 1988].

Teorem 2.4.1. Eğer A tekil olmayan bir matris ise bu taktirde keyfi seçilen y vektörü ile verilen $Ax = f$ probleminin tek çözümü olan x vektörü arasında

$$\|x - y\| / \|x\| \leq \mu(A) \|Ay - f\| / \|f\|.$$

eşitsizliği geçerlidir [Godunov vd. 1993].

2.5. Pratik İyi Şarhl Problem

Garanti yaklaşım yönteminde şart sayısı kavramının önemli bir yere sahip olduğu söylenmişti. $Ax = f$ sisteminin çözülebilmesi için A matrisinin tersinin alınabilmesi gerekir. Burada matrislerin terslenebilmesinde bir üst sınır olarak kabul edilen μ^* parametresi göz önüne alınacak $\mu(A)$ ile μ^* karşılaştırılarak ne zaman A matrisinin tersinin alınabileceği belirlenecektir [Aydın 1995]. Bu sayı pratik terslenebilme parametresi olarak ifade edilebilir. Bu parametre yardımıyla Teorem 2.2.2 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 2.5.1. Eğer $\mu(A) < \mu^*$ ve $2\mu^* \|B\| / \|A\| < 1$ ise bu taktirde $\mu(A+B) < 1.5 \mu^*$ ve

$$|\mu(A) - \mu(A+B)| \leq \mu^2(A) \|B\| / \|A\|$$

olur.

Bu teorem, μ^* değeri yardımı ile giriş elemanlarının ne derecede doğru verildiğini ortaya koyar. Bu teoreme göre $\mu^* < \|A\| / (2\|B\|)$ olarak seçilmelidir.

Böylece μ^* 'ın seçimi aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Eğer $Ax = f$ problemi için $20\mu(A)\epsilon_1 < 1$ ise $\|y - x\| < \epsilon_1 \|x\|$ eşitsizliği sağlanır ve bilgisayara göre "tam" çözüm bulunabilir. Böylece $\mu^* = 1/(20\epsilon_1)$ olarak seçilebilir.

2.6. Algoritma

Verilen problem için veriler; N doğal sayısı , μ^* reel pratik terslenebilme parametresi, $N \times N$ tipinde reel A matrisi ve N boyutlu f sütun vektörüdür.

Adım 1. Householder dönüşümleri kullanılarak A matrisi iki köşegenli matris haline getirilir. Yani, Q, V ortogonal matrisler olmak üzere $A = QWV$ olacak şekilde yazılır ve W iki köşegenli matrisi bulunur.

Adım 2. Sturm yöntemi yardımıyla elde edilen W iki köşegenli matrisinin en büyük $\sigma_N(A)$ ve en küçük $\sigma_1(A)$ tekil değerleri hesaplanır.

Adım 3. $\sigma_N(A) > \sigma_1(A)\mu^*$ eşitsizliği yardımıyla verilen $Ax = f$ probleminin pratik iyi konulmuş olup olmadığı kontrol edilir. Eğer pratik iyi konulmamış oluğu tespit edilirse hesap işlemleri durdurularak $\mu(A) > \mu^*$ sonuç olarak verilir. Aksi halde 4. Adıma geçilir.

Adım 4. $Ax = f$ sisteminden x vektörü hesaplanır.

Burada $\mu(A)$ 'nın yeterince küçük olduğu garanti altına alınmıştır. Böylece Householder dönüşümleri yardımıyla Q, V ortogonal W iki köşegenli matris olmak üzere $A = QWV$ şeklinde yazılabilir. Böylece $QWVx = f$ sistemi $W(Vx) = Q^*f$ şeklinde yazılabilir. W iyi konulmuş iki köşegenli bir matris olduğundan eliminasyon yöntemi yardımıyla

$$Ws = Q^*f$$

ifadesinden s hesaplanır daha sonrada $y = V^*s$ elde edilir. Eğer bütün işlemlerde yuvarlatma işleminin hatasız olarak yapıldığı kabul edilirse $y = x$ olurdu. Ancak verilen algoritma seçilen format ve μ^* sayısına göre herhangi bir f vektörü için

$$\|Ay - f\| < 0.5 \|f\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde hesaplama yapmaktadır [Godunov vd. 1993]. İstenilen x vektörünü seçilen formatın giriş hatası duyarlılığında hesaplamak için hassas iterasyon işlemi kullanılmalıdır.

2.7. Hassas İterasyon İşlemi

Sadece iyi konulmuş problemler için kullanılan hassas iterasyon işleminin amacı, bir önceki algoritma ile, iyi konulmuş olduğu belirlenen problemin elde edilen yaklaşık y çözümünü yardımıyla daha iyi bir yaklaşım elde etmektir [Wilkinson 1965].

Bir önceki algoritmada keyfi seçilen bir f için

$$\|Ay - f\| \leq 0.5 \|f\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir y vektörü hesaplanmıştır.

Böylece hassas iterasyon işlemi aşağıdaki şekilde gerçekleştirilebilir.

Adım 0. $u_0 = y$ ve $v_0 = f - Ay$ olarak alınır.

Adım 1. Adım 0 da belirlenen u_0 ve v_0 kullanılarak,

Adım 1.1. $v = v_0$ alınarak $Aw = v$ probleminin yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır.

Householder yöntemiyle

$$\|Aw_1 - v_0\| \leq 0.5 \|v_0\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir w_1 bulunur.

Adım 1.2. u_1 ve v_1

$$u_1 = u_0 + w_1;$$

$$v_1 = v_0 - Aw_1.$$

yardımıyla hesaplanır. Burada $\|v_1\| \leq 0.5 \|v_0\|$ eşitsizliği sağlanır.

Adım 1.3. Eğer $\|v_1\| < 1/(\mu(A)\epsilon_1)$ eşitsizliği sağlanırsa bu taktirde hesaplama işlemleri durdurulur ve kalıntı teoremine dayanarak u_1 istenilen x vektörünü ϵ_1 bağıl hatayla temsil eder.

Adım k. ($k > 1$). Önceki adımda hesaplanan u_{k-1} ve v_{k-1} kullanılarak,

Adım k.1. $v = v_{k-1}$ alınarak $Aw = v$ probleminin yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır.

Householder yöntemiyle

$$\|Aw_k - v_{k-1}\| \leq 0.5 \|v_{k-1}\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde w_k bulunur.

Adım k.2. $u_k = u_{k-1} + w_k$;

$$v_k = v_{k-1} - Aw_k.$$

olarak hesaplanır . Burada $\|v_k\| \leq 0.5 \|v_{k-1}\|$ eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Adım k.3. Eğer $\|v_k\| < \epsilon_1 / \mu(A)\|f\|$ ise bu taktirde hesaplama işlemleri durdurulur ve kalıntı teoremine dayanarak u_k , istenilen x vektörünü ϵ_1 bağıl hatayla temsil eder.

Uyarı 1. Burada Adım k.2’ de yapılan işlemleri daha ince formatları kullanarak yapmak gerekmektedir [Merdan 1996].

Uyarı 2. k. adımdan sonra yapılan işlemlerden aşağıdakiler elde edilir.

$$v_0 = f - Ay, \quad \|v_0\| \leq 0.5 \|f\|;$$

$$v_1 = v_0 - Aw_1, \quad \|v_1\| \leq 0.5 \|v_0\|;$$

$$v_2 = v_1 - Aw_2, \quad \|v_2\| \leq 0.5 \|v_1\|;$$

$$v_3 = v_2 - Aw_3, \quad \|v_3\| \leq 0.5 \|v_2\|.$$

$$\dots\dots\dots$$
$$v_{k-1} = v_{k-2} - Aw_{k-1}, \quad \|v_{k-1}\| \leq 0.5 \|v_{k-2}\|;$$

$$v_k = v_{k-1} - Aw_k, \quad \|v_k\| \leq 0.5 \|v_{k-1}\|.$$

Böylece

$$\|v_k\| \leq 0.5 \|v_{k-1}\| \leq (0.5)^2 \|v_{k-2}\| \leq (0.5)^3 \|v_{k-3}\| \leq \dots \leq (0.5)^k \|v_0\| = (0.5)^k \|f\|$$

olur. Ayrıca,

$$v_k = f - A u_k = f - A[y + w_1 + w_2 + \dots + w_k]$$

yazılabilir. Dolayısıyla $(0.5)^k \leq \epsilon_1 / \mu(A)$ şartını sağlayan bir k değeri her zaman bulunabilir.

Uyarı: Yukarıdaki bilgilerden kolayca görüleceği gibi garanti yaklaşım metodu hangi tür problem için verilirse verilsin daima bu bölüm boyunca açıklanan yedi temel unsuru kapsamalıdır.

3. SABİT KATSAYILI LİNEER AYRIK DENKLEM SİSTEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sabit katsayılı lineer ayrik denklem sistemlerinin çözümünün bulunması üzerinde durulmuştur. Önce sabit katsayılı lineer, homogen, ayrik denklem sistemlerinin çözümü, daha sonra da sabit katsayılı lineer homogen olmayan ayrik denklem sistemlerinin çözümü araştırılmıştır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}; \quad x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{pmatrix}$$

a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$) - reel sayılar, $x_j(n)$ ($j = 1, 2, \dots, N, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - reel sayılar olmak üzere

$$x(n+1) = A x(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

denklem sistemine sabit katsayılı lineer homogen ayrik denklem sistemi adı verilir.

$$F(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \vdots \\ f_N(n) \end{pmatrix}$$

$f_j(n)$ ($j = 1, 2, \dots, N, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - reel sayılar olmak üzere

$$x(n+1) = A x(n) + F(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

denklem sistemine sabit katsayılı lineer homogen olmayan ayrik denklem sistemi adı verilir [Rubio 1971, Elaydi 1996].

3.1. Cauchy Problemi

Tanım 3.1.1.

$$x(n+1) = Ax(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.1)$$

N boyutlu sabit katsayılı lineer ayrık denklem sistemi göz önüne alınsın. (3.1.1) sistemi, keyfi seçilen bir m noktası için verilen $x(m) = a$ şartı ile birlikte ele alınırsa elde edilen

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x(m) &= a \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

problemine Ayrık Cauchy Problemi adı verilir [Elaydi 1996, Akın ve Bulgak 1998].

Teorem 3.1.1. A tekil olmayan $N \times N$ tipinde bir matris, a N bileşenli bir vektör ve m bir tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x(m) &= a \end{aligned}$$

Cauchy probleminin $x(n) = A^{n-m} a$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ şeklinde $\{x(n)\}$ N bileşenli vektör dizisi çözümü vardır ve bu çözüm tektir [Elaydi 1996, Akın ve Bulgak 1998].

İspat. Verilen denklemde $x(n) = A^{n-m} a$ yerine yazılırsa

$$Ax(n) = A A^{n-m} a = A^{n-m+1} a = x(n+1)$$

olduğundan verilen çözüm ayrık denklem sistemini sağlar.

$$x(m) = A^{m-m} a = a$$

olduğundan başlangıç koşulu da sağlanır. Dolayısıyla problemin bir çözümünün olduğu gösterilmiş oldu.

Problemin $\{x(n)\}$ ve $\{y(n)\}$ gibi iki çözümünün olduğu kabul edilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned} x(n+1) - y(n+1) &= A[x(n) - y(n)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ x(m) - y(m) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan A matrisinin tekil olmadığını da göz önüne alarak $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için $x(n) - y(n) = 0$ eşitliğinin sağlandığı söylenebilir. Yani iki çözüm birbirine eşittir. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Tanım 3.1.2. Farz edelim ki $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ A matrisinin özdeğerlerinin kümesi olsun ve bu küme $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ ile $\{\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_N\}$ ayrık kümelerinin birleşimi olarak yazılabilsin. Eğer tekil olmayan bir T matrisi için

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

eşitliği sağlanıyorsa ve $m \times m$ tipinde olan B matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ise bu taktirde T matrisinin ilk m sütunu tarafından tanımlanan W alt vektör uzayına A matrisinin m tane ayrık öz değerlerine karşı gelen maksimal invaryant öz alt vektör uzay denir [Akın ve Bulgak 1998].

Teorem 3.1.2. (Schur Teoremi 1) A reel terimli N boyutlu karesel bir matris olsun. İlk 2k tane öz değer kompleks olmak üzere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ A matrisinin öz değerleri olsun. Yani

$$\lambda_{2j-1} = \eta_j + i \xi_j, \lambda_{2j} = \eta_j - i \xi_j, j = 1, 2, \dots, k$$

olsun. Burada η_j, ξ_j reel sayılar ve $\xi_j \neq 0$ dır. Bu durumda aşağıdaki eşitliği sağlayan ortogonal bir U matrisi vardır.

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & * & * & \dots & * & * & * & * & \dots & * \\ c_1 & d_1 & * & * & \dots & * & * & * & * & \dots & * \\ & & a_2 & b_2 & \dots & * & * & * & * & \dots & * \\ & & c_2 & d_2 & \dots & * & * & * & * & \dots & * \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & & a_k & b_k & * & * & \dots & * \\ & & & & & c_k & d_k & * & * & \dots & * \\ & & & & & & & \lambda_{2k+1} & * & \dots & * \\ & & & & & & & & \lambda_{2k+2} & \dots & * \\ & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Burada U^*AU matrisine sözde üç köşegenli matris denir, ayrıca

$$\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, k$$

2x2 tipinde matrislerinin öz değerleri $\lambda_{2j-1} = \eta_j + i \xi_j$, $\lambda_{2j} = \eta_j - i \xi_j$ dir [Bellman 1970, Strikwerda 1989].

Schur teoreminin bir uygulaması da aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.1.3. (Schur Teoremi 2) A matrisinin N_0 katlı sıfır öz değerine sahip olduğunu ve öz değerler sıralandığında bu öz değerlerin son N_0 tane öz değer olduğu kabul edilsin, yani

$$\lambda_{N-N_0+1} = \lambda_{N-N_0+2} = \dots = \lambda_N = 0$$

olsun. Bu durumda

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

denklemini sağlayan ortogonal bir U matrisi vardır. Burada A_0 $N_0 \times N_0$ tipinde bütün öz değerleri 0 olan bir matristir ve $\det A_1 \neq 0$ dir [Demmel 1997, Akın ve Bulgak 1998].

Teorem 3.1.4. (Cayley-Hamilton Teoremi) Her kare matris kendi karakteristik polinomunu sağlar [Bellman 1970, Fraleigh ve Beauregard 1990, Demmel 1997].

A_0 matrisinin karakteristik polinomu

$$\det (\lambda I - A_0) = \lambda^{N_0} = 0$$

dır. Dolayısıyla $A_0^{N_0} = 0$ olur.

Teorem 3.1.5. A tekil karesel N boyutlu bir matris, a da N bileşenli bir vektör ve m bir tamsayı olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x(m) = a$$

şeklinde verilen Cauchy probleminin $\{x(n)\}$, N bileşenli vektör dizisi çözümünün var ve tek olması için gerek ve yeter şart verilen a başlangıç vektörünün, A matrisinin sıfır

olmayan öz değerlerine karşılık gelen L maksimal invaryant öz alt vektör uzayına ait olmasıdır [Demmel 1997, Akın ve Bulgak 1998].

İspat. A tekil bir matris ve onun N_0 tane öz değeri sıfır olsun. Bu durumda Schur teoremine göre aşağıdaki denklemi sağlayan ortogonal bir U matrisi vardır.

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

Burada A_0 $N_0 \times N_0$ tipinde bütün öz değerleri 0 olan bir matris ve A_1 $\det A_1 \neq 0$ olacak şekilde bir matristir. U_{22} $N_0 \times N_0$ tipinde matris olmak üzere U ortogonal matrisi

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada U ortogonal matrisinin ilk $M = N - N_0$ sütunları $\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$ A matrisinin sıfır olmayan öz değerlerine karşılık gelen L maksimal invaryant öz alt vektör uzayında bir tabandır.

$$U^*x(n+1) = U^*AUU^*x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

olacağı açıktır. Böylece

$$x(n) = U \begin{pmatrix} u(n) \\ v(n) \end{pmatrix}$$

kabul edilerek (3.1.1) sistemi

$$u(n+1) = A_1u(n) + Bv(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(3.1.3)

$$v(n+1) = A_0v(n)$$

olarak yazılabilir.

Gerek Şartın İspatı. (3.1.2) ve dolayısıyla (3.1.3) ayrık sistemlerinin çözümlerinin var olduğu kabul edilsin. A_0 matrisinin tüm öz değerleri sıfır olduğundan $A_0^{N_0} = 0$ dır. Böylece her bir n tam sayısı için $v(n) = 0$ olması zorunludur. Buradan

$$x(m) = a = U \begin{pmatrix} u(m) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(m) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} u(m)$$

olur. Yani a vektörü L alt uzayının elemanıdır.

Yeter şartın ispatı. a vektörü L alt uzayının elemanı olsun. Dolayısıyla M boyutlu bir b vektörü var ve

$$a = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} b$$

dir. Yani

$$a = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix} 0$$

olduğundan verilen (3.1.3) problemlerinde başlangıç şartları $u(m) = b$ ve $v(m) = 0$ olur. Bu taktirde (3.1.2) sistemi ile ilgili olan (3.1.3) sistemi

$$\begin{aligned} u(n+1) &= A_1 u(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ v(n) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A_1 matrisi tekil olmayan bir matris ve Teorem 3.1.1. 'e göre onun çözümü her hangi bir b vektörü ve m tam sayısı için var ve tektir. Böylece teorem ispat edilmiştir.

3.2. Lineer N Boyutlu Homogen Ayırık Denklem Sistemlerinin Genel Çözümünün Bulunması

Katsayılar matrisi $N \times N$ reel A matrisi olan

$$x(n+1) = Ax(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.1)$$

lineer homogen ayırık denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sisteminin çözümü olan

$$\mathfrak{I}(A) = \{x(n); x(n+1) = Ax(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

vektör fonksiyon dizilerinin kümesi N boyutlu bir vektör uzayıdır [Akın ve Bulgak 1998].

3.2.1. Taban

Reel sayı dizileri kümesi, R - reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için $\{x(n)\}$, $\{y(n)\}$ verilen (3.2.1) sisteminin iki çözümü, verilen $\mathfrak{I}(A)$ kümesinin elemanlarıdır. a herhangi bir reel sayı olmak üzere $\{x(n) + y(n)\}$ ve $\{ax(n)\}$ de $\mathfrak{I}(A)$ 'nın elemanlarıdır. Böylece $\mathfrak{I}(A)$ kümesi toplama ve reel sayıların çarpma işlemine göre kapalı olduğundan $\mathfrak{I}(A)$, reel diziler uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Şimdi bu alt vektör uzayın boyutunun, $M = N - N_0$ olduğu gösterilecektir. Burada N_0 verilen A matrisinin sıfır öz değerinin katını gösteren bir sayıdır. Bunun için lineer bağımsızlık ve germe aksiyomlarını sağlayan M tane vektör dizilerinin olduğu gösterilmelidir.

Önce A matrisinin tekil olmadığı kabul edilsin.

$$A^k = S(k, A) = \begin{pmatrix} (S(k, A))_{11} & (S(k, A))_{12} & \dots & (S(k, A))_{1N} \\ (S(k, A))_{21} & (S(k, A))_{22} & \dots & (S(k, A))_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (S(k, A))_{N1} & (S(k, A))_{N2} & \dots & (S(k, A))_{NN} \end{pmatrix}$$

matris dizisinin sütunları yardımıyla $\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_N(k)$ vektör dizileri için

$$\varphi_j(k) = \begin{pmatrix} (S(k, A))_{1j} \\ (S(k, A))_{2j} \\ \vdots \\ (S(k, A))_{Nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_N(k)$ vektör dizilerinin (2.2.1) sisteminin çözümleri olduğu açıktır ve A tekil olmadığından bu vektör dizileri lineer bağımsızdır.

Şimdi $\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_N(k)$ vektör dizilerinin $\mathfrak{I}(A)$ da bir baz oluşturdukları gösterilecektir. $\mathfrak{I}(A)$ cümlesinin herhangi bir $z(k)$ elemanı

$$z(k) = \alpha_1 \varphi_1(k) + \alpha_2 \varphi_2(k) + \dots + \alpha_N \varphi_N(k)$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ katsayıları bulunabilir. Seçilen $\{z(k)\}$ bir vektör dizisidir.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

N boyutlu bir sütun vektörü olmak üzere, $k=0$ noktasında $z(0) = a$ dır. Varlık ve teklik teoremine göre $z(k) = S(k, A)a$ dır. Bundan dolayı

$$z(k) = [\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_N(k)]a$$

veya

$$z(k) = a_1 \varphi_1(k) + a_2 \varphi_2(k) + \dots + a_N \varphi_N(k)$$

olur.

Böylece, $x(n+1) = Ax(n)$ denklemiyle tanımlanan $\mathfrak{I}(A)$ kümesinin bir N boyutlu vektör uzayı olduğu anlaşılır. $A^k = S(k,A)$ kuvvet matris dizisinin sütunları ise bu uzayın bir tabanıdır.

Şimdi A nın bir tekil matris ve onun N_0 tane öz değerinin sıfır olduğu kabul edilsin. Bu takdirde Schur teoremine göre

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

denklemini sağlayan ortogonal bir U matrisi vardır. Burada A_0 , $N_0 \times N_0$ tipinde bütün öz değerleri 0 olan bir matris ve A_1 $\det A_1 \neq 0$ olacak şekilde bir matristir. U_{22} , $N_0 \times N_0$ tipinde bir matris olmak üzere

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

alınsın. Burada U matrisinin birinci $M = N - N_0$ sütunları $\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$ A matrisinin sıfır olmayan öz değerlere karşılık gelen L maksimal invaryant öz alt vektör uzayında bir tabanıdır. Kısım 3.1 de verilen ispatlar ve önceki işlemler göz önüne alınarak $x(n+1)=Ax(n)$ denklemiyle tanımlanan $\mathfrak{I}(A)$ kümesinin bir M boyutlu vektör uzayı olduğu anlaşılır. Ayrıca,

$$[\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_M(k)] = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} (A_1)^k$$

matrisinin sütunları bu uzayın bir tabanı olur.

3.2.2. Bazı Özellikler

3.2.2.1. $\{\varphi_1(k)\}, \{\varphi_2(k)\}, \dots, \{\varphi_M(k)\}$ vektör dizileri $\mathfrak{I}(A)$ nın önceki paragrafta tanımlanan bir tabanı olmak üzere her hangi bir n_0 noktası için $\varphi_1(n_0), \varphi_2(n_0), \dots, \varphi_M(n_0)$ vektörleri de lineer bağımsızdır. A_1 tekil olmayan bir matris olduğundan ve kuvvet matrislerinin özelliğinden her hangi bir n_0 noktası için

$$[\varphi_1(n_0), \varphi_2(n_0), \dots, \varphi_M(n_0)]$$

tekil olmayan bir matris ve böylece $\varphi_1(n_0), \varphi_2(n_0), \dots, \varphi_M(n_0)$ lineer bağımsız vektörlerdir. Yani $\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_M(k)$ 'nin lineer bağımsızlığı seçilen noktadan bağımsızdır.

3.2.2.2). $\{\omega_1(k)\}, \{\omega_2(k)\}, \dots, \{\omega_M(k)\}$ vektör dizileri $\mathfrak{I}(A)$ nın bir tabanı olmak üzere her hangi bir n_0 noktası için $\omega_1(n_0), \omega_2(n_0), \dots, \omega_M(n_0)$ lineer bağımsız vektörlerdir.

Bu vektörlerin lineer bağımsız olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Bir vektör uzayının her hangi iki tabanı tekil olmayan bir matris ile bir birine bağlıdır. Bundan dolayı tekil olmayan bir $Q = [Q_{ij}]_{M \times M}$ matrisi için

$$[\varphi_1(k), \varphi_2(k), \dots, \varphi_M(k)] = [\omega_1(k), \omega_2(k), \dots, \omega_M(k)] Q$$

sağlanır, yani $(j = 1, 2, \dots, M)$ için $\varphi_j(k) = Q_{1j}\omega_1(k) + Q_{2j}\omega_2(k) + \dots + Q_{Mj}\omega_M(k)$ dir.

Buradan $(j = 1, 2, \dots, M)$ için

$$\varphi_j(n_0) = Q_{1j}\omega_1(n_0) + Q_{2j}\omega_2(n_0) + \dots + Q_{Mj}\omega_M(n_0)$$

dır. Buradan her hangi bir n_0 noktası için lineer bağımsız olan $\{\varphi_j(n_0)\}$ $(j = 1, 2, \dots, M)$ vektörleri elde edilir. $\{\varphi_j(n_0)\}$ $(j = 1, 2, \dots, M)$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından $\{\omega_j(n_0)\}$ $(j = 1, 2, \dots, M)$ vektörleri de lineer bağımsız olmak zorundadır. Çünkü her bir $\varphi_j(n_0)$ vektörü $\omega_1(n_0), \omega_2(n_0), \dots, \omega_M(n_0)$ vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilmektedir.

3.2.3. Temel Matris ve Kuvvet Matris Fonksiyonu

Tanım 3.2.1.

Eğer bir $\mathfrak{I}(A)$ vektör dizileri uzayının $\{\psi_1(n)\}, \{\psi_2(n)\}, \dots, \{\psi_M(n)\}$ gibi bir tabanı varsa, o zaman

$$\Psi(n) = [\psi_1(n), \psi_2(n), \dots, \psi_M(n)]$$

matrisine $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin “Temel matrisi” denir [Akın ve Bulgak 1998].

Yani, eğer $\{\Psi(n)\}$ $N \times M$ matris dizisi ise ve $\Psi(n+1) = A\Psi(n)$, $\sigma_1(\Psi(n)) \neq 0$ ise o zaman $\Psi(n)$ verilen (3.2.1) sisteminin temel matrisidir. Burada $\sigma_1(\Psi(n))$ verilen dikdörtgen matrisin en küçük tekil değeridir [Godunov vd 1993]. Eğer $\sigma_1(\Psi(n)) \neq 0$ ise bu taktirde $\Psi(n)$ matrisinin sütunlarının lineer bağımsız olacağı açıktır.

A tekil olmayan bir matris olsun.

$$\{\psi_1(n)\}, \{\psi_2(n)\}, \dots, \{\psi_N(n)\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

vektör dizileri $\mathfrak{I}(A)$ vektör uzayının bir bazı olmak üzere

$$\Psi(n) = [\psi_1(n), \psi_2(n), \dots, \psi_N(n)], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$N \times N$ matrislerinin bir dizisini alalım. $\{\Psi(n)\} = \{\Psi(A, n)\}$ matris dizisine (3.2.1) sisteminin temel matrisi denir. Aşağıdakilerin sağlandığı açıktır.

1) $\Psi(n+1) = A\Psi(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ve bir m noktasında $\Psi(m)$ tekil değil ise bu taktirde $\{\Psi(n)\}$ verilen ayrık denklemin temel matrisidir.

2) $\Psi(n, A) = \Psi(n) = A^n$ kuvvet matris fonksiyonu verilen $\Psi(0) = I$

$$\Psi(n+1) = A\Psi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ayrık Cauchy probleminin tek çözümüdür. Dolayısıyla da sistemin temel matrisidir.

3) $\Psi(n) = A^n$ kuvvet matris fonksiyonu ise bu taktirde $\Psi(n)\Psi(m) = \Psi(n+m)$;

4) $\Psi(n, A) = \Psi(n) = A^n$ kuvvet matris fonksiyonu ve Q tekil olmayan bir matris olmak üzere

$$Q^{-1}\Psi(A, n)Q = \Psi(Q^{-1}AQ, n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dir.

5) Q tekil olmayan bir matris olmak üzere $\Psi(n)$ verilen $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin temel matrisi ise $\Psi(n)Q$ da bu sistemin temel matrisi olur.

Eğer $\{\Psi(n)\}$ bir temel matris ise (tekil olmayan A için) bu taktirde herhangi n için $\det \Psi(n) \neq 0$ olduğu gösterilebilir. Aynı zamanda $\{\psi_1(n)\}, \{\psi_2(n)\}, \dots, \{\psi_N(n)\}$ vektör dizileri $\{\Psi(n)\}$ matris dizisinin sütunları olursa ve her hangi bir n için $\det \Psi(n) \neq 0$ ise bu taktirde $\{\Psi(n)\}$ verilen (3.2.1) ayrık denkleminin bir temel matrisi olur.

Teorem 3.1.3' e göre aşağıdaki denklemi sağlayan ortogonal bir U matrisi vardır

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

Burada $A_0, N_0 \times N_0$ tipinde bütün öz değerleri 0 olan bir matris ve A_1 $\det A_1 \neq 0$ olacak şekilde bir matristir. Ayrıca, Cayley-Hamilton teoremine göre $A_0^{N_0} = 0$ dir.

Bu taktirde $\mathfrak{I}(A)$ alt vektör uzayının bir tabanı $\phi_1(A, k), \phi_2(A, k), \dots, \phi_{N-N_0}(A, k)$ olacaktır. Bu taban vektörleri

$$y(n+1) = A_1 y(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sisteminin $\phi_1(A_1, k), \phi_2(A_1, k), \dots, \phi_{N-N_0}(A_1, k)$ taban vektörleri ve U matrisinin yardımı ile tanımlanabilir. Yani

$$\phi_j(A, k) = U \begin{pmatrix} \phi_j(A_1, k) \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, N - N_0.$$

olacaktır.

3.2.4. Genel Çözüm

Her hangi bir $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin çözümü $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_M \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$y(n) = C_1 \psi_1(n) + C_2 \psi_2(n) + \dots + C_M \psi_M(n) = \Psi(n) C$$

şeklinde yazılabilir ve buna $y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin genel çözümü denir.

Şimdi

$$y(n+1) = A y(n), y(n_0) = a$$

Cauchy problemi ele alınsın. a , Cauchy teoreminin (Teorem 3.1.5.) şartlarını sağlarsa o zaman bu Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğu bilinmektedir.

Eğer $\psi_1(n), \psi_2(n), \dots, \psi_M(n); y(n+1) = Ay(n)$ sisteminin çözüm uzayının bir tabanı ise, o zaman

$$y(n) = C_1 \psi_1(n) + C_2 \psi_2(n) + \dots + C_M \psi_M(n)$$

bu denklemin genel çözümüdür. $C_1, C_2, \dots, C_N$ katsayıları başlangıç şartı yardımıyla

$$C_1 \psi_1(n_0) + C_2 \psi_2(n_0) + \dots + C_M \psi_M(n_0) = a$$

olarak bulunabilir. Son denklem matris-vektör denklemi olarak $\Psi(n_0) C = a$, şeklinde yazılabilir. Burada $\Psi(t_0) = [\psi_1(n_0), \psi_2(n_0), \dots, \psi_M(n_0)]$ tekil olmayan matristir. Bundan dolayı $C = \Psi^{++}(n_0)a$ dir. Burada $\Psi^{++}(n_0)$ “yarı ters” matristir. Bu matris

$$\Psi^{++}(n_0) \Psi(n_0) = I_M$$

matris denkleminin tek çözümüdür.

Sonuç olarak verilen Cauchy probleminin çözümü

$$y(n) = \Psi(n-n_0) \Psi^{++}(n_0) a$$

şeklinde yazılabilir.

3.3. Lineer Homogen Olmayan Ayrık Denklem Sistemlerinin Çözümü

3.3.1. Özel Çözüm

A reel karesel N boyutlu tekil olmayan bir matris ve $\{F(n)\}$ reel vektör dizisi olmak üzere

$$y(n+1) = Ay(n) + F(n) \quad (3.3.1)$$

lineer homogen olmayan ayrık denklem sistemi ele alınsın.

Eğer $\Psi(n)$, $x(n+1) = A x(n)$ sisteminin bir temel matrisi ise bu takdirde

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(n-k-1, A) \Psi^{-1}(0) F(k) \quad (3.3.2)$$

verilen denklemin bir özel çözümüdür[Akın ve Bulgak 1998]. Gerçekten

$$\begin{aligned} \hat{y}(n+1) &= \sum_{k=0}^n \Psi(n-k, A) \Psi^{-1}(0) F(k) \\ &= A \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(n-k-1, A) \Psi^{-1}(0) F(k) + F(n) \\ &= A \hat{y}(n) + F(n) \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece, eğer $\{F(n)\}$ bir vektör dizisi ise bu takdirde (3.3.1) probleminin en az bir çözümünün olduğu ispat edildi. Verilen (3.3.1) homogen olmayan denklem sisteminin genel çözümü $z(n+1) = Az(n)$ homogen kısmının çözümü ile elde edilen $\hat{y}(n)$ özel çözümünün toplamına eşittir.

Yani $\{y(n)\}$, (3.3.1) sisteminin her hangi bir çözümü ise bu takdirde $z(n+1) = Az(n)$ homogen sisteminin çözümü olan bir $\{z(n)\}$ vektör dizisi vardır ve

$$y(n) = z(n) + \hat{y}(n)$$

şeklinde yazılabilir.

3.3.2. Genel Çözüm

Verilen (3.3.1) sistemi için, $\{F(n)\}$ sürekli bir vektör dizisi olmak üzere kısım 3.3.1' den bu sistemin çözümü vardır ve her bir çözüm

$$y(n) = z(n) + \hat{y}(n)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $z(n+1) = Az(n)$ ve $\hat{y}(t)$ (3.3.1) sisteminin bir özel çözümüdür. Dolayısıyla, eğer $\Psi(n) = [q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n)]$, $z(n+1) = Az(n)$ homogen sisteminin temel matrisi ise o zaman (3.3.1) sisteminin her bir çözümü

$$y(n) = C_1 q_1(n) + C_2 q_2(n) + \dots + C_N q_N(n) + \hat{y}(n)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $C_1, C_2, \dots, C_N$ reel katsayılarıdır. Bu ifadeye (3.3.1) sisteminin genel çözümü denir.

3.3.3. Cauchy Problemi

Verilen

$$y(n+1) = Ay(n) + F(n)$$

$$y(\tau) = a$$

Cauchy problemi ele alınsın. Burada verilen $F(n)$ reel vektör dizisi, a N boyutlu sabit bir vektör, τ herhangi bir tam sayıdır. Kısım 3.3.1.den bu denklemin çözümü var, tek ve

$$y(n) = \Psi(n-\tau) \Psi^{-1}(0) a + \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(n-k-1) \Psi^{-1}(0) F(k). \quad (3.3.3)$$

şeklinde verilmektedir. Burada $\Psi(n)$, $x(n+1) = Ax(n)$ homogen sisteminin bir temel matrisidir. $A^n = \Psi(n) \Psi^{-1}(0)$ olduğundan kuvvet matris fonksiyonu ile verilen formül

$$y(n) = A^{(n-\tau)} a + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} F(k) \quad (3.3.4)$$

şeklinde yazılabilir[Akın ve Bulgak 1998].

3.4. Çözümlerin Sürekliliği (Çözümün Verilere Sürekli Bağımlılığı)

Verilen problemin bilgisayarda çözüldüğünü düşünelim. Verilerin seçilen format kümesine yerleşmesinden dolayı problem bilgisayarda tam olarak belirtilemez. Acaba gerçek çözümle bilgisayarda hesaplanan çözüm birbirine ne kadar yakındır ?

$$y(n+1) = Ay(n) + F(n) \quad (3.4.1)$$

$$y(\tau) = a$$

Cauchy problemi için, $F(n)$ sınırlı bir dizi (herhangi bir n tam sayısı için $\|F(n)\| < C$ dir), a N boyutlu sabit bir vektör ve τ herhangi bir tam sayı olmak üzere kısım 3.3.1 den bu denklemin çözümünün var ve tek olduğu ve $y(n)$ çözümünün

$$y(n) = A^{n-\tau} a + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} F(k) \quad (3.4.2)$$

formülüyle verildiği bilinmektedir.

Bu kısımda, $y(n) = y(n, \tau, A, a, F(n))$ çözümünün A , a , $F(n)$ giriş verilerine sürekli bağımlı olduğu gösterilecektir. Bunun için (3.4.1) problemine yakın olan

$$z(n+1) = \hat{A} z(n) + \hat{F}(n) \quad (3.4.3)$$

$$z(\tau) = \hat{a}$$

problemi ele alınsın. Burada $\hat{A}$, $\hat{a}$, $\hat{F}(n)$ değerlerinin yeteri kadar A , a , $F(n)$ değerlerine yakın olduğu kabul edilmektedir. Bu taktirde, (3.4.1) in çözümü $y(n)$ ve (3.4.3) probleminin çözümü

$$z(n) = \hat{A}^{n-\tau} \hat{a} + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{A}^{(n-k-1)} \hat{F}(k) \quad (3.4.4)$$

çözümleri de bir birine yeteri kadar yakın olur. Yakınlık kavramı kullanılacağından bir metrik uzayı tanıtmak gerekmektedir. Bunun için T bir pozitif tam sayı olarak ele alınsın ve $|n| \leq T$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonların kümesi $\mathcal{A} = \mathcal{A}(T)$ olarak seçilsin. Bu kümede iki $u(n)$, $v(n)$ dizileri arasındaki uzaklık da

$$\rho(u, v) = \max_{-T \leq n \leq T} \|u(n) - v(n)\|$$

olarak seçilsin. $y(n)$, $z(n)$, $\hat{F}(n)$ ve $F(n)$ ifadelerinin bu metrik uzayın elemanları olduğu açıktır.

Teorem 3.4.1. Eğer

$$\|\hat{A} - A\|, \|\hat{a} - a\|, \rho(\hat{F}(k), F(k))$$

yeteri kadar küçük ise o zaman (3.4.1) ve (3.4.3) problemlerinin çözümleri için sabit bir C katsayısı vardır ve aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\rho(y(k), z(k)) \leq C \{ \|\hat{A} - A\| + \|\hat{a} - a\| + \rho(\hat{F}(k), F(k)) \}.$$

[Akın ve Bulgak 1998].

Bu teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki lemma ifade ve ispat edilmelidir.

Lemma 3.4.1. A ve B , $N \times N$ tipinde iki matris olmak üzere

$$\|(A+B)^n - A^n\| \leq \|B\| \|A\| \|A\|^n e^{\|B\| \|A\|}$$

eşitsizliği doğrudur [Akın ve Bulgak 1998].

İspat.

$$X(n+1) = AX(n) + BX(n),$$

$$X(0) = I$$

Cauchy probleminin bir tek çözümü $X(n) = (A+B)^n$ olduğundan

$$X(n) = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} BX(k)$$

dir. Dolayısıyla

$$(A+B)^n - A^n = \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} B(A+B)^k$$

yani

$$\|(A+B)^n - A^n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\| \|B\| \|(A+B)^k\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|B\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\| \| (A+B)^k \| \leq \|B\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A\|^{(n-k-1)} (\|A\| + \|B\|)^k \\
&\leq \|B\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A\|^{(n-1)} (1 + \|B\|/\|A\|)^k \leq \|B\| \|A\|^{(n-1)} e^{\|B\|/\|A\|}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\| (A+B)^n - A^n \| \leq \|B\| \|A\|^{(n-1)} e^{\|B\|/\|A\|}$$

ifadesi geçerli olur. Bu da Lemma 3.4.1 in ispatını tamamlar.

Şimdi teoremin ispatına geçilebilir.

İspat. (3.4.2) ve (3.4.4) ten

$$y(n) - z(n) = A^{(n-\tau)} a - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a} + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} F(k) - \hat{A}^{(n-k-1)} \hat{F}(k) \quad (3.4.5)$$

yazılabilir. Burada önce $A^{(n-\tau)} a - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a}$ matris fonksiyonu ele alınsın.

$$A^{(n-\tau)} a - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a} = A^{(n-\tau)} a - A^{(n-\tau)} \hat{a} + A^{(n-\tau)} \hat{a} - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a}$$

ifadesinin doğruluğu açıktır. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\| A^{(n-\tau)} a - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a} \| \leq \| A^{(n-\tau)} a - A^{(n-\tau)} \hat{a} \| + \| A^{(n-\tau)} \hat{a} - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a} \| \quad (3.4.6)$$

$$\leq \| A^{(n-\tau)} \| \| a - \hat{a} \| + \| A^{(n-\tau)} - \hat{A}^{n-\tau} \| \| \hat{a} \|$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Lemma 3.4.1' e göre

$$\| A^{(n-\tau)} - \hat{A}^{n-\tau} \| \leq \|A - \hat{A}\|/\|A\| \|A\|^n \exp\{\|A - \hat{A}\|/\|A\|\}$$

dir. Dolayısıyla

$$\| A^{(n-\tau)} a - \hat{A}^{n-\tau} \hat{a} \| \leq \| A^{(n-\tau)} \| \| a - \hat{a} \| + \|A - \hat{A}\|/\|A\| \|A\|^{n-\tau} \exp\{\|A - \hat{A}\|/\|A\|\} \| \hat{a} \|$$

olur. Yani (3.4.5) teki birinci terimin üst sınırı hesaplanmış oldu. Şimdi formülün kalan ikinci terimine geçilebilir. Aşağıdaki ifadeler kolayca yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} F(k) - \hat{A}^{(n-k-1)} \hat{F}(k) \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)} F(k) - \hat{A}^{(n-k-1)} \hat{F}(k)\| \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)} F(k) - A^{(n-k-1)} \hat{F}(k) + A^{(n-k-1)} \hat{F}(k) - \hat{A}^{(n-k-1)} \hat{F}(k)\| \\
& \leq \sum_{k=0}^{n-1} \{ \|A^{(n-k-1)}\| \|F(k) - \hat{F}(k)\| + \|A^{(n-k-1)} - \hat{A}^{(n-k-1)}\| \|\hat{F}(k)\| \} \\
& \leq \sum_{k=0}^{n-1} \{ \|A^{(n-k-1)}\| \rho(\hat{F}(k), F(k)) + \|A^{(n-k-1)} - \hat{A}^{(n-k-1)}\| \max_{-T \leq k \leq T} \|\hat{F}(k)\| \} \\
& \leq \rho(\hat{F}(k), F(k)) \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\| + \max_{-T \leq k \leq T} \|\hat{F}(k)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)} - \hat{A}^{(n-k-1)}\|
\end{aligned}$$

Lemma 3.4.1'e göre

$$\|A^{(n-k)} - \hat{A}^{(n-k)}\| \leq \|A - \hat{A}\| \|A\| \|A\|^{n-k} \exp\{\|A - \hat{A}\| \|A\|\}$$

dir. Bu taktirde yukarıdaki eşitsizlikler

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-k-1)} F(k) - \hat{A}^{(n-k-1)} \hat{F}(k) \right\| \\
& \leq \rho(\hat{F}(k), F(k)) \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\| + \max_{-T \leq s \leq T} \|\hat{F}(s)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)} - \hat{A}^{(n-k-1)}\| \\
& \leq \rho(\hat{F}(k), F(k)) \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\| \\
& \quad + \max_{-T \leq s \leq T} \|\hat{F}(s)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A - \hat{A}\| \|A\| \|A\|^{n-k-1} \exp\{\|A - \hat{A}\| \|A\|\}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Yani, (3.4.5) formülünde ikinci terim için de üst sınır bulunmuştur. Bu ise

$$\begin{aligned}
\|y(n) - z(n)\| & \leq \|A^{(n-\tau)}\| \|a - \hat{a}\| + \rho(\hat{F}(k), F(k)) \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\| \\
& \quad + \|A - \hat{A}\| \|A\| \exp\{\|A - \hat{A}\| \|A\|\} \max_{-T \leq s \leq T} \|\hat{F}(s)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A\|^{n-k-1}
\end{aligned}$$

sonucunu verir. Dolayısıyla eğer

$$C = \max_{-T \leq n \leq T} \max \{ \|A^{(n-\tau)}\|, \sum_{k=0}^{n-1} \|A^{(n-k-1)}\|, \}$$

$$\frac{1}{\|A\|} \exp\{\|A - \hat{A}\|/\|A\|\} \max_{-T \leq s \leq T} \|\hat{F}(s)\| \sum_{k=0}^{n-1} \|A\|^{n-k-1}\}$$

seçilirse teoremin ispatı tamamlanmış olur.



4. SABİT KATSAYILI LİNEER AYRIK DENKLEM SİSTEMİ İÇİN İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde sabit katsayılı lineer ayrik denklem sistemi için iki-nokta sınır değer probleminin tanımı yapıldı. Verilen iki-nokta sınır değer probleminin çözümü için bir varlık ve teklik teoremi verildi. Homogen olmayan iki-nokta sınır değer problemi ve Green matris dizileri incelendi. Ayrıca sabit katsayılı lineer adi ayrik denklem sistemlerin iki-nokta sınır değer probleminin bir matrisin şart sayısına dayanarak hassasiyetinin ölçülmesi incelendi.

4.1. Tanım

Ayrik denklem sistemi için iki-nokta sınır değer probleminin tanımı diferensiyel denklem sistemleri için verilen iki-nokta sınır değer problemi kavramı yardımıyla verilebilir [Murty ve Lakshmi 1990, Pandey 1996].

Tanım 4.1.1. $\{ n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1 \}$ kümesinde

$$x(n+1) = Ax(n); n_0 \leq n \leq n_1$$

ayrik denklem sistemi ile birlikte

$$Lx(n_0) = \varphi; Rx(n_1) = \psi.$$

sınır koşulları da göz önüne alınsın. Burada A, L, R sırasıyla $N \times N, k \times N, (N-k) \times N$ - reel matrislerdir. Ayrıca φ, ψ vektörleri sırasıyla k ve $N-k$ bileşenli vektörlerdir. Yani,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{k1} & L_{k2} & \cdots & L_{kN} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_{(N-k)1} & R_{(N-k)2} & \cdots & R_{(N-k)N} \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{(N-k)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu sınır koşulları ile birlikte tanımlanan probleme homogen iki-nokta sınır değer problemi adı verilir.

Tanım 4.1.2. $\{ n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1 \}$ kümesinde

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n) ; n_0 \leq n \leq n_1$$

$$Lx(n_0) = \varphi ; \quad Rx(n_1) = \psi .$$

şeklinde tanımlanan probleme homogen olmayan iki-nokta sınır değer problemi adı

verilir. Burada $f(n) = \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \vdots \\ f_N(n) \end{bmatrix}$ dir.

Aşağıdaki örnek bu tanımın daha iyi anlaşılmasını sağlar:

Örnek 4.1.1.

$$x_1(n+1) = 7x_1(n) - 2x_2(n)$$

$$x_2(n+1) = 15x_1(n) - 4x_2(n)$$

sistemi

$$x_1(0) + 2x_2(0) = 19$$

$$x_1(2) + x_2(2) = 32$$

sınır şartları ile göz önüne alınırsa elde edilen problem homogen bir iki-nokta sınır değer problemidir. Bu problemde $n_0 = 0$, $n_1 = 2$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Bu problemin çözümü ise

$$x_1(n) = 1 + 2^{n+1}$$

$$x_2(n) = 3 + 5 \cdot 2^n$$

dir.

4.2. Varlık ve Teklik Teoremi

Bu kısımda verilen iki-nokta sınır değer problemi için bir varlık ve teklik teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.2.1. $\{ n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1 \}$ kümesinde aşağıdaki ayrık homogen iki-nokta sınır değer problemi göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n); n_0 \leq n \leq n_1 \\ Lx(n_0) &= \varphi; \quad Rx(n_1) = \psi. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Burada A, L, R sırasıyla $N \times N, k \times N, (N-k) \times N$ - reel matrislerdir. Ayrıca φ, ψ fonksiyonları sırasıyla k ve $N-k$ bileşenli vektörlerdir.

1) A tekil olmayan bir matris ise ve $\Phi(n), x(n+1) = Ax(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ in bir temel matrisi ise

$$W = \Phi(n_1 - n_0) \Phi^{-1}(0) \tag{4.2.2}$$

olsun.

2) A tekil bir matris ise aşağıdaki eşitliği sağlayan ortogonal bir U matrisi vardır.

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Burada $A_0, N_0 \times N_0$ tipinde bütün özdeğerleri 0 olan bir matris ve $\det A_1 \neq 0$ dır. $\{\Psi(A_1, n)\}$ bir A_1 katsayılı lineer ayrık denklem sisteminin bir temel matrisi ve

$$W = \Psi(A, n_1 - n_0) \begin{pmatrix} \Psi^{-1}(A_1, 0) & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{4.2.3}$$

olsun. Eğer

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RW \end{pmatrix} \tag{4.2.4}$$

tekil olmayan bir matris ise ($\det H \neq 0$) bu durumda herhangi bir N bileşenli $f(n)$ vektörü için ve sırasıyla k ve $N-k$ bileşenli φ, ψ vektörleri için iki-nokta sınır değer probleminin çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

İspat. A tekil olmayan bir matris ve $\Phi(n)$ temel matris olduğundan verilen ayrık sistemin genel çözümü

$$x(n) = \Phi(n-m) \Phi^{-1}(0)x(m)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$x(n_1) = \Phi(n_1-n_0) \Phi^{-1}(0)x(n_0)$$

da sağlanacaktır. Sınır şartlarının da sağlanması için

$$Lx(n_0) = \varphi ; \quad R\Phi(n_1-n_0) \Phi^{-1}(0)x(n_0) = \psi$$

olmalıdır. Dolayısıyla $W = \Phi(n_1-n_0) \Phi^{-1}(0)$ gösterimini kullanarak verilen problemin çözümünün tek olabilmesi için (4.2.3), (4.2.4) formülleri ile tanımlanan H için $\det H \neq 0$ olması gerekir.

Böylece tekil olmayan A için teorem ispat edilmiş oldu.

Eğer A tekil matris ise o zaman verilen ayrık problemin genel çözümü

$$x(n) = \Psi(A, n-m) \begin{pmatrix} \Psi^{-1}(A_1, 0) & 0 \end{pmatrix} U^* x(m), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

şeklinde verilebilir. Dolayısıyla

$$x(n_1) = \Psi(A, n_1-n_0) \begin{pmatrix} \Psi^{-1}(A_1, 0) & 0 \end{pmatrix} U^* x(n_0).$$

Yani sınır şartlarını sağlamak için

$$Lx(n_0) = \varphi ; \quad R\Psi(A, n_1-n_0) \begin{pmatrix} \Psi^{-1}(A_1, 0) & 0 \end{pmatrix} U^* x(n_0) = \psi$$

olmalıdır. Dolayısıyla $W = \Psi(A, n_1-n_0) \begin{pmatrix} \Psi^{-1}(A_1, 0) & 0 \end{pmatrix} U^*$ gösterimini kullanarak verilen problemin çözümünün tek olabilmesi için (4.2.4) formülü ile tanımlanan H için $\det H \neq 0$ şartı sağlanmalıdır.

Böylece tekil A için de teorem ispat edilmiş oldu.

Uyarı : $[n_0, n_1]$ aralığında aşağıdaki ayrık homogen olmayan iki- nokta sınır değer problemi göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} z(n+1) &= Az(n) + f(n); \quad n_0 \leq n \leq n_1 \\ Lz(n_0) &= \varphi ; \quad Rz(n_1) = \psi . \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Burada A, L, R sırasıyla $N \times N$, $k \times N$, $(N-k) \times N$ - reel matrislerdir, $\{f(n)\}$ N boyutlu vektörlerin bir dizisidir. Ayrıca φ , ψ sırasıyla k ve $N-k$ bileşenli vektörlerdir. Bu taktirde (4.2.5) problemine karşılık gelen homogen (4.2.1) sisteminin çözümü var ve tek ise (4.2.5) probleminin çözümü var ve tektir.

İspat. Gerçekten, (4.2.5) sisteminin bir özel çözümü her zaman vardır, örnek olarak

$$\begin{aligned} b(n_0) &= f(n_0); \\ b(n_0+1) &= Ab(n_0) + f(n_0); \\ b(n_0+2) &= Ab(n_0+1) + f(n_0+1); \\ &\dots\dots\dots \\ b(n_1) &= Ab(n_1-1) + f(n_1-1). \end{aligned}$$

bir özel çözümdür. Bu taktirde (4.2.5) aşağıdaki homogen hale dönüşebilir.

$$\begin{aligned} z(n+1) - b(n+1) &= A[z(n) - b(n)]; \quad n_0 \leq n \leq n_1 \\ L[z(n_0) - b(n_0)] &= \varphi - Lb(n_0); \quad R[z(n_1) - b(n_1)] = \psi - Rb(n_1). \end{aligned}$$

Böylece uyarı ispat edilmiş olur.

4.3. Homogen Olmayan İki-Nokta Sınır Değer Problemi ve Green Matris Dizileri

Bu kısımda $\{n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1\}$ kümesinde aşağıdaki ayrık iki-nokta sınır değer probleminin üzerinde çalışılacaktır.

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + f(n); \quad n_0 \leq n \leq n_1 \\ Lx(n_0) &= \varphi; \quad Rx(n_1) = \psi \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Burada A, L, R sırasıyla $N \times N$, $k \times N$, $(N-k) \times N$ tipinde reel matrislerdir ve $\{f(n)\}$, N boyutlu vektörlerin bir dizisidir. Ayrıca φ , ψ sırasıyla k ve $N-k$ bileşenli vektörlerdir.

Teorem 4.3.1.

$$x(n+1) = Ax(n) + f(n); n_0 \leq n \leq n_1$$

$$Lx(n_0) = \varphi; \quad Rx(n_1) = \psi$$

homogen olmayan iki-nokta sınır değer probleminin çözümü

$$x(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \end{pmatrix} + \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k)$$

dir.

İspat. Homogen olmayan

$$x(n+1) = A x(n) + f(n)$$

sisteminin özel çözümü

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} f(k)$$

dır. Ayrıca

$$x(n) = A^{n-n_0} x(n_0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} f(k), n > n_0$$

sağlanır.

$$Lx(n_0) = \varphi$$

$$Rx(n_1) = \psi$$

sınır şartları da uygulanırsa

$$Lx(n_0) = \varphi$$

$$Rx(n_1) = RA^T x(n_0) + R \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} f(k)$$

olur. Buradan

$$Lx(n_0) = \varphi$$

$$RA^T x(n_0) = \psi - R \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} f(k)$$

olur. Bu takdirde

$$H.x(n_0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - \sum_{k=n_0}^{n_1} RA^{n-k-1} f(k) \end{pmatrix}$$

$$x(n_0) = H^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi - \sum_{k=n_0}^{n_1} R A^{n-k-1} f(k) \end{array} \right)$$

olur. Bu takdirde

$$x(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \psi - R \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} f(k)$$

sağlanır.

Homogen olmayan iki-nokta sınır değer probleminin çözümü Green matris dizileri yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilebilir. Bu denkleme karşılık gelen homogen denklemin çözümünün var ve tek olduğu kabul edilsin.

(4.3.1) denkleminin bir özel çözümü aşağıdaki formül ile verilebilir.

$$\begin{aligned} b(n_0) &= f(n_0); \\ b(n_0+1) &= Ab(n_0) + f(n_0); \\ &\dots\dots\dots \\ b(n_1) &= Ab(n_1-1) + f(n_1-1). \end{aligned}$$

Bu taktirde (4.3.1) aşağıdaki homogen hale dönüşebilir

$$\begin{aligned} x(n+1) - b(n+1) &= A[x(n) - b(n)]; \quad n_0 \leq n \leq n_1 \\ L[x(n_0) - b(n_0)] &= \varphi - Lb(n_0); \quad R[x(n_1) - b(n_1)] = \psi - Rb(n_1). \end{aligned}$$

ve onun tek çözümü

$$y(n) = b(n) + G_0(n) [\varphi - Lb(n_0)] + G_1(n) [\psi - Rb(n_1)]. \quad (4.3.2)$$

formülü ile verilebilir. Burada $G_0(n)$, $G_1(n)$ ayrı green matris dizileridir. Bu diziler aşağıdaki iki tane iki-nokta sınır değer problemlerin çözümleridir. (I_k , $k \times k$ tipinde birim matris, $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots, n_1-1$)

$$G_0(n+1) = AG_0(n), \quad (4.3.3)$$

$$L G_0(n_0) = I_m, \quad R G_0(n_1) = 0;$$

$$G_1(n+1) = AG_1(n), \quad (4.3.4)$$

$$L G_1(n_0) = 0, \quad R G_1(n_1) = I_{N-m}.$$

4.4. Sabit Katsayılı Lineer Ayırık Denklem Sistemlerinin İki-Nokta Sınır Değer Probleminin Hassasiyetinin Bir Matrisin Şart Sayısına Dayanarak Ölçülmesi

Bu kısımda sabit katsayılı, lineer, ayırık denklem sistemleri için önce Cauchy probleminin daha sonra da iki-nokta sınır değer probleminin hassasiyeti bir matrisin şart sayısı yardımıyla çeşitli durumlar için incelendi. Ancak burada, tüm verilerin değişmesi halinde hassasiyetin incelenmesi daha fazla öneme sahiptir. Bu durumu aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.4.1. $\{ n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1 \}$ kümesinde

$$x(n+1) = Ax(n) \quad (4.4.1)$$

$$L x(n_0) = \varphi, \quad R x(n_1) = \psi$$

ve

$$y(n+1) = \tilde{A} y(n) \quad (4.4.2)$$

$$\tilde{L} y(n_0) = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{R} y(n_1) = \tilde{\psi}$$

problemleri ele alınsın. Burada $\tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{R}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ sırasıyla A, L, R, φ ve ψ matris ve vektörleri norm olarak birbirlerine çok yakın matris ve vektörlerdir. Ayrıca $\|R - \tilde{R}\| \leq 0.1 \|R\|$ sağlansın. Onların bir birine yakınlığı $T = n_1 - n_0$ ve

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RA^T \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

olmak üzere $\mu(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$ sayısına bağlıdır.

$$S_1 = \|x(n)\| \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \mu(H) \left[\|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + 1.1 \|R\| \right]$$

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \left[\frac{1}{\|H\| - \mu(H) \left[\|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + 1.1 \|R\| \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \right]} \right]$$

$$S_2 = \mu(A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|} \|x(n)\|$$

$$S_3 = \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^{n-n_0} e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \|\tilde{H}^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|$$

olsun. Bu takdirde

$$\|y(n) - x(n)\| \leq S_1 + S_2 + S_3 \quad (4.4.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teoremin ispatı bölüm sonunda verilecektir.

İlk olarak Cauchy probleminde başlangıç verileri değiştiğinde çözümün ne kadar değiştiği aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.4.2.

$$x(n+1) = Ax(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.4.5)$$

$$x(0) = a$$

$$y(n+1) = \tilde{A} y(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.4.6)$$

$$y(0) = \tilde{a}$$

iki Cauchy problemi göz önüne alınsın. Burada $\tilde{A}$ matrisi A matrisine yeterince yakın seçilen bir matris ve $\tilde{a}$ vektörü a vektörüne yeterince yakın seçilen bir vektördür. Bu takdirde bu Cauchy problemlerinin çözümü için

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^n e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} [\|a\| + \|a - \tilde{a}\|] \|A^n\| \|a - \tilde{a}\| \quad (4.4.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

Ele alınan (4.4.5) ve (4.4.6) problemlerinin çözümleri verilen varlık ve teklik teoreminden(Teorem 3.1.1) var, tek ve

$$x(n) = A^n a, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y(n) = \tilde{A}^n \tilde{a}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla bu problemlerin çözümlerinin farkı için

$$x(n) - y(n) = (A^n - \tilde{A}^n) a + \tilde{A}^n (a - \tilde{a})$$

ifadesi geçerli olur. Böylece her iki tarafın normu alınarak

$$\begin{aligned} \|x(n) - y(n)\| &\leq \|A^n - \tilde{A}^n\| \|a\| + (\|A^n\| + \|\tilde{A}^n\|) \|a - \tilde{a}\| \\ &\leq \|A^n - \tilde{A}^n\| \|a\| + \|A^n\| \|a - \tilde{a}\| + \|\tilde{A}^n\| \|a - \tilde{a}\| \\ &\leq \|A^n - \tilde{A}^n\| [\|a\| + \|a - \tilde{a}\|] \|A^n\| \|a - \tilde{a}\| \end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 3.4.1' den

$$\|A^n - \tilde{A}^n\| \leq \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^n e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}}$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu takdirde

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^n e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} [\|a\| + \|a - \tilde{a}\|] \|A^n\| \|a - \tilde{a}\|$$

yazılabilir. Bu formül (4.4.5) ve (4.4.6) problemlerinin çözümlerinin birbirine ne kadar yakın olduğunu gösteriyor. Görüldüğü gibi bu fark giriş verilerine bağlıdır.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Cauchy probleminin hassasiyeti kavramının daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örnekler faydalı olacaktır.

Örnek 4.4.1.

$$x(n+1) = 0.5 x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x(0) = 1$$

Cauchy problemi ve katsayı ile başlangıç şartı biraz değiştirilmiş

$$y(n+1) = (0.5 + \varepsilon), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y(0) = 1 + \delta$$

Cauchy problemi göz önüne alınsın. Bu problemlerin çözümleri sırasıyla

$$x(n) = (0.5)^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ve

$$y(n) = (0.5 + \varepsilon)^n (1 + \delta), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dir.

$$x(n) - y(n) = (0.5)^n - (0.5 + \varepsilon)^n (1 + \delta), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dir.

$$(0.5 + \varepsilon)^n = (0.5)^n + C_n^1 (0.5)^{n-1} \varepsilon + C_n^2 (0.5)^{n-2} \varepsilon^2 + \dots + C_n^k (0.5)^{n-k} \varepsilon^k + \dots + C_n^n \varepsilon^n$$

$$(0.5 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (0.5)^{n-k} \varepsilon^k$$

$$x(n) - y(n) = (0.5)^n - (1 + \delta) \left[(0.5)^n + \sum_{k=1}^n C_n^k (0.5)^{n-k} \varepsilon^k \right]$$

$$= - (1 + \delta) \sum_{k=1}^n C_n^k (0.5)^{n-k} \varepsilon^k - \delta (0.5)^n$$

$$|x(n) - y(n)| \leq |1 + \delta| \left| \sum_{k=1}^n C_n^k (0.5)^{n-k} \varepsilon^k - \delta (0.5)^n \right| + \delta (0.5)^n$$

$$\sum_{k=1}^n C_n^k (0.5)^{n-k} \varepsilon^k = \sum_{k=1}^n \frac{n! \varepsilon^k}{(n-k)! k! 2^{n-k}}$$

olur.

$$S(k, n) = \sum_{k=1}^n \frac{n! \varepsilon^k}{(n-k)! k! 2^{n-k}}, n \geq 1, 1 \leq k \leq n$$

olsun. $S(k, n) < S(1, n) = \frac{n}{2^{n-1}}$ sağlanır.

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{n! \varepsilon^k}{(n-k)! k! 2^{n-k}} \right| = \sum_{k=1}^n |S(k, n)| |\varepsilon|$$

$$\leq |\varepsilon| \sum_{k=1}^n |S(1, n)|$$

$$\leq n \varepsilon \frac{n}{2^{n-1}}$$

Bu takdirde

$$|x(n) - y(n)| \leq (1 + \delta) \frac{n^3 \varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\delta}{2^n}$$

Mutlak hatanın oldukça küçük olduğu görülüyor. Bağıl hata için

$$|x(n) - y(n)| / |x(n)| \leq 2^n \left[(1 + \delta) \frac{n^3 \varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\delta}{2^n} \right]$$

$$|x(n) - y(n)| / |x(n)| \leq (1 + \delta) 2^n \varepsilon + \delta$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi bağıl hata n büyüdükçe büyüyor.

Örnek 4.4.2.

$$x(n+1) = x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x(0) = 1$$

Cauchy problemi ve

$$y(n+1) = (1 + \varepsilon) y(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y(0) = 1 + \delta$$

Cauchy problemi göz önüne alınsın. Bu problemlerin çözümleri sırasıyla

$$x(n) = 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ve

$$y(n) = (1 + \varepsilon)^n (1 + \delta), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dir. Bu çözümlerin $\varepsilon > 0$ ve $\varepsilon < 0$ durumlarında incelenmesi faydalı olur.

$\varepsilon > 0$ olması durumu :

$$|x(n) - y(n)| = |1 - (1 + \varepsilon)^n (1 + \delta)| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \text{ için}$$

olur. Buradan $\varepsilon > 0$ durumunda n büyüdükçe hata gittikçe büyüyor.

$\varepsilon < 0$ olması durumu :

$$|x(n) - y(n)| = |1 - (1 + \varepsilon)^n (1 + \delta)| \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \text{ için}$$

olur. Bu durumda n büyüdükçe hata 1'e daha yakın oluyor.

Örnek 4.4.3.

$$x(n+1) = 2 x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x(0) = 1$$

Cauchy problemi ve

$$y(n+1) = (2 + \varepsilon), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y(0) = 1 + \delta$$

Cauchy problemi göz önüne alınsın. Bu problemlerin çözümleri sırasıyla

$$x(n) = 2^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ve

$$y(n) = (2 + \varepsilon)^n (1 + \delta), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dir.

$$(2 + \varepsilon)^n = 2^n + C_n^1 2^{n-1} \varepsilon + C_n^2 2^{n-2} \varepsilon^2 + \dots + C_n^k 2^{n-k} \varepsilon^k + \dots + C_n^n \varepsilon^n$$

$$\begin{aligned} |x(n) - y(n)| &= |2^n - (2 + \varepsilon)^n (1 + \delta)| \\ &= |2^n - (1 + \delta) \{ 2^n + C_n^1 2^{n-1} \varepsilon + C_n^2 2^{n-2} \varepsilon^2 + \dots + C_n^k 2^{n-k} \varepsilon^k + \dots + C_n^n \varepsilon^n \}| \\ &= |2^n - (1 + \delta) \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} \varepsilon^k| \\ &\leq |1 + \delta 2^n| \sum_{k=1}^n |C_n^k 2^{n-k} \varepsilon^k| \end{aligned}$$

Burada mutlak hatanın n büyüdükçe daha da büyüdüğü görülüyor. Bağıl hata için

$$\begin{aligned} \frac{|x(n) - y(n)|}{|x(n)|} &\leq \frac{1}{2^n} |1 + \delta 2^n| \sum_{k=1}^n \left| \frac{n! 2^{n-k} \varepsilon^k}{(n-k)! k!} \right| \\ &= \left(\frac{1}{2^n} + \delta \right) \sum_{k=1}^n \left| \frac{n! 2^{n-k} \varepsilon^k}{(n-k)! k!} \right| \end{aligned}$$

olur. Burada da bağıl hatanın n büyüdükçe daha da büyüdüğü görülüyor.

Şimdi İki-nokta sınır değer probleminde sadece φ ve ψ verileri değiştiğinde problemin hassasiyeti ile ilgili aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.4.3.

$$x(n+1) = Ax(n); n_0 \leq n \leq n_1 \quad (4.4.8)$$

$$Lx(n_0) = \varphi; \quad Rx(n_1) = \psi.$$

ve

$$y(n+1) = Ay(n); n_0 \leq n \leq n_1 \quad (4.4.9)$$

$$Ly(n_0) = \tilde{\varphi}; \quad Ry(n_1) = \tilde{\psi}$$

iki nokta sınır değer problemleri göz önüne alınsın. Bu takdirde

$$\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} \leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|}, n_0 \leq n \leq n_1 \quad (4.4.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

A tekil olmayan bir matris olmak üzere (4.4.8) ve (4.4.9) iki nokta sınır değer problemlerinin çözümleri

$$x(n) = \Phi(A, n-n_0) \Phi^{-1}(A, 0) H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

$$y(n) = \Phi(A, n-n_0) \Phi^{-1}(A, 0) H^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

şeklinde veya

$$x(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

$$y(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RW \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} L \\ RA^{n_1-n_0} \end{pmatrix}$$

dır. Bu durumda

$$x(n) - y(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right], n_0 \leq n \leq n_1 \quad (4.4.11)$$

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \|A^{n-n_0} H^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|, n_0 \leq n \leq n_1$$

$$= \|A^{n-n_0} H^{-1}\| \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \|A^{n-n_0} H^{-1}\| \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \|A^{n-n_0} H^{-1} (A^{n-n_0} H^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\|$$

$$\leq \|A^{n-n_0} H^{-1}\| \|(A^{n-n_0} H^{-1})^{-1}\| \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \|A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\|$$

$$\leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \|x(n)\|$$

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|} \|x(n)\|, n_0 \leq n \leq n_1$$

$$\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} \leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|}, n_0 \leq n \leq n_1$$

olur. Elde edilen bağıl hata için üst sınırdaki $\mu(A^{n-n_0} H^{-1})$ şart sayısının etkili olduğu görülüyor. $\mu(A^{n-n_0} H^{-1})$ şart sayısı büyüdükçe bağıl hata büyüyecektir. Elde edilen bu

hata lokal bağıl hata için bir üst sınırdır. Eğer seçilen normun sonunda n' ye bağlı olmayan bir sonuç elde edilebilirse global bağıl hata için bir üst sınır elde edilmiş olur. Şimdi İki-nokta sınır değer probleminde sadece L ve R verileri değiştiğinde problemin hassasiyeti ile ilgili aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.4.4.

$$x(n+1) = Ax(n); n_0 \leq n \leq n_1 \quad (4.4.12)$$

$$Lx(n_0) = \varphi; \quad Rx(n_1) = \psi.$$

ve

$$y(n+1) = Ay(n); n_0 \leq n \leq n_1 \quad (4.4.13)$$

$$\tilde{L}y(n_0) = \varphi; \quad \tilde{R}y(n_1) = \psi$$

iki-nokta sınır değer problemleri göz önüne alınsın. Bu taktirde

$$\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} \leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \left(\mu(H) \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|R\|} \mu(A^{n_1 - n_0}) \right) \cdot \frac{1}{1 - \mu(H) \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|R\|} \mu(A^{n_1 - n_0})} \quad (4.4.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (4.4.12) ve (4.4.13) problemlerinin çözümleri sırasıyla

$$x(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

ve

$$y(n) = A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

dır. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$x(n) - y(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, n_0 \leq n \leq n_1$$

$$= A^{n-n_0} (H^{-1} - \tilde{H}^{-1}) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (4.4.15)$$

$$= -A^{n-n_0} (\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$= -A^{n-n_0} (\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) (A^{n-n_0} H^{-1})^{-1} A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

$$= -A^{n-n_0} (\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) (A^{n-n_0} H^{-1})^{-1} x(n)$$

$$\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} \leq \|A^{n-n_0} (\tilde{H}^{-1} - H^{-1})\| \|(A^{n-n_0} H^{-1})^{-1}\|$$

$$= \|A^{n-n_0} H^{-1} H (\tilde{H}^{-1} - H^{-1})\| \|(A^{n-n_0} H^{-1})^{-1}\|$$

$$\leq \|A^{n-n_0} H^{-1}\| \|H (\tilde{H}^{-1} - H^{-1})\| \|(A^{n-n_0} H^{-1})^{-1}\|$$

$$= \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \|H (\tilde{H}^{-1} - H^{-1})\|$$

Ayrıca $H (\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) = H \tilde{H}^{-1} - I = H (H + \tilde{H}^{-1} - H - I)$ olur. Şimdi

$(A+B)^{-1} = -A^{-1}B(A+B)^{-1} + A^{-1}$ eşitliğinde $A = H$ ve $B = \tilde{H} - H$ olarak alınırsa,

$$(H + \tilde{H} - H)^{-1} = -H^{-1}(\tilde{H} - H)(H + \tilde{H} - H)^{-1} + H^{-1}$$

$$H(\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) = -H(H^{-1}(\tilde{H} - H)\tilde{H}^{-1} + H^{-1}) - I$$

$$H(\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) = -(\tilde{H} - H)\tilde{H}^{-1} + I - I$$

$$H(\tilde{H}^{-1} - H^{-1}) = -(\tilde{H} - H)\tilde{H}^{-1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\|H(\tilde{H}^{-1} - H^{-1})\| \leq \|\tilde{H} - H\| \|\tilde{H}^{-1}\|$$

$$= \|\tilde{H} - H\| \frac{1}{\sigma_1(\tilde{H})}$$

$$\leq \|\tilde{H} - H\| \frac{1}{\sigma_1(H) - \|H - \tilde{H}\|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|H\|} \|\tilde{H} - H\| \frac{1}{\frac{\sigma_1(H)}{\|H\|} - \frac{\|H - \tilde{H}\|}{\|H\|}} \\
&= \frac{1}{\|H\|} \|\tilde{H} - H\| \frac{1}{\frac{1}{\mu(H)} - \frac{\|H - \tilde{H}\|}{\|H\|}} \\
\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} &\leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \mu(H) \frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|H\|} \frac{1}{1 - \mu(H) \frac{\|H - \tilde{H}\|}{\|H\|}} \quad (4.4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H - \tilde{H} &= \begin{pmatrix} L - \tilde{L} \\ (R - \tilde{R}) A^{n_1 - n_0} \end{pmatrix} \\
\|H - \tilde{H}\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} L - \tilde{L} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ (R - \tilde{R}) A^{n_1 - n_0} \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|L - \tilde{L}\| + \|(R - \tilde{R}) A^{n_1 - n_0}\| \\
\frac{\|H - \tilde{H}\|}{\|H\|} &\leq \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|H\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|H\|} \|A^{n_1 - n_0}\| \\
&\leq \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|RA^{n_1 - n_0}\|} \|A^{n_1 - n_0}\| \\
&\leq \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|R\|} \frac{\|A^{n_1 - n_0}\|}{\sigma_1(A^{n_1 - n_0})} \\
&\leq \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|R\|} \mu(A^{n_1 - n_0}) \\
\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} &\leq \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \left(\mu(H) \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|R\|} \mu(A^{n_1 - n_0}) \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{1 - \mu(H) \frac{\|L - \tilde{L}\|}{\|L\|} + \frac{\|R - \tilde{R}\|}{\|R\|} \mu(A^{n_1 - n_0})}
\end{aligned}$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

Bu teoremlerin ispatı tamamlandıktan sonra şimdi Teorem 4.4.1.'in ispatı verilebilir.

Teorem 4.4.1' in ispatı

$$x(n+1) = Ax(n)$$

$$L x(n_0) = \varphi, \quad R x(n_1) = \psi$$

ve

$$y(n+1) = \tilde{A} y(n)$$

$$\tilde{L} y(n_0) = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{R} y(n_1) = \tilde{\psi}$$

problemleri ele alınsın. Bu problemlerin çözümleri sırasıyla

$$x(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad n_0 \leq n \leq n_1, \quad H = \begin{pmatrix} L \\ RA^{n_1-n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ RA^T \end{pmatrix}$$

$$y(n) = \tilde{A}^{n-n_0} \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}, \quad n_0 \leq n \leq n_1, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{R}\tilde{A}^{n_1-n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{R}\tilde{A}^T \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} x(n) - y(n) &= A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \tilde{A}^{n-n_0} \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \\ &= A^{n-n_0} \left[H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right] + \left[A^{n-n_0} - \tilde{A}^{n-n_0} \right] \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \\ &= A^{n-n_0} \left[\left[H^{-1} - \tilde{H}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \tilde{H}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right] \right] + \left[A^{n-n_0} - \tilde{A}^{n-n_0} \right] \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \\ &= A^{n-n_0} \left[H^{-1} - \tilde{H}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right] + \left[A^{n-n_0} - \tilde{A}^{n-n_0} \right] \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \\ C_1 &= A^{n-n_0} \left[H^{-1} - \tilde{H}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \\ C_2 &= A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right] \\ C_3 &= \left[A^{n-n_0} - \tilde{A}^{n-n_0} \right] \tilde{H}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olsun. Bu takdirde

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \|C_1\| + \|C_2\| + \|C_3\|$$

olacaktır.

C_3 ifadesi için Lemma 3.4.1' de $A=\tilde{A}$ ve $B=\tilde{A}-A$ alınırsa

$$\|C_3\| \leq \|A^{n-n_0} - \tilde{A}^{n-n_0}\| \|\tilde{H}^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|$$

$$\|C_3\| \leq \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^{n-n_0} e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \|\tilde{H}^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|$$

eşitsizliği elde edilir.

C_2 ifadesi için Teorem 4.4.3' den

$$\|C_2\| \leq \mu(A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|} \|x(n)\|$$

eşitsizliği geçerli olur.

C_1 ifadesi için Teorem 4.4.4 'den

$$\|C_1\| \leq \|x(n)\| \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \mu(H) \frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|H\|} \frac{1}{1 - \mu(H) \frac{\|H - \tilde{H}\|}{\|H\|}}$$

$$\|C_1\| \leq \|x(n)\| \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \mu(H) \|\tilde{H} - H\| \frac{1}{\|H\| - \mu(H) \|H - \tilde{H}\|}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Ancak burada

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RA^{n_1-n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ RA^T \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{R}\tilde{A}^{n_1-n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{R}\tilde{A}^T \end{pmatrix}$$

dır. Bu takdirde

$$H - \tilde{H} = \begin{pmatrix} L - \tilde{L} \\ RA^T - \tilde{R}\tilde{A}^T \end{pmatrix}$$

$$\|H - \tilde{H}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} L - \tilde{L} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ RA^T - \tilde{R}\tilde{A}^T \end{pmatrix} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|L - \tilde{L}\| + \|RA^T - \tilde{R} \tilde{A}^T\| \\
RA^T - \tilde{R} \tilde{A}^T &= RA^T - \tilde{R} A^T + \tilde{R} A^T - \tilde{R} \tilde{A}^T \\
&= (R - \tilde{R}) A^T + \tilde{R} (A^T - \tilde{A}^T) \\
\|H - \tilde{H}\| &\leq \|L - \tilde{L}\| + \|(R - \tilde{R}) A^T + \tilde{R} (A^T - \tilde{A}^T)\| \\
&\leq \|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + \|\tilde{R}\| \|A^T - \tilde{A}^T\|
\end{aligned}$$

Lemma 3.4.1' den

$$\|A^T - \tilde{A}^T\| \leq \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}}$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu takdirde

$$\|H - \tilde{H}\| \leq \|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + \|\tilde{R}\| \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= R - R + \tilde{R} \\
\|\tilde{R}\| &\leq \|R\| + \|R - \tilde{R}\|
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|H - \tilde{H}\| \leq \|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + [\|R\| + \|R - \tilde{R}\|] \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}}$$

ifadesi geçerli olur. $\|R - \tilde{R}\| \leq 0.1 \|R\|$ olduğundan

$$[\|R\| + \|R - \tilde{R}\|] \leq 1.1 \|R\|$$

sağlanır. Bu takdirde

$$\|C_1\| \leq \|x(n)\| \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \mu(H) \left[\|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + 1.1 \|R\| \right]$$

$$\left[\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \right] \frac{1}{\|H\| - \mu(H) \left[\|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + 1.1 \|R\| \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \right]}$$

olur.

5. AYRIK İKİ-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN GARANTİ YAKLAŞIM YÖNTEMİ

$$y(n+1) = Ay(n) \quad (5.1)$$

$$Ly(n_0) = \varphi, \quad Ry(n_1) = \psi$$

sabit katsayılı adi ayrık denklem sistemi için iki-nokta sınır değer problemi ele alınsın. Bu bölümde tezin esas amacı olan garanti yaklaşım yöntemini (5.1) problemi için kurmaktır. Bu tür algoritma için ikinci bölümde bir örnek verilmişti. Verilen bir problemle ilgili olan garanti yaklaşım algoritmasını oluşturmak için gerekli olan yedi temel kavram da aynı bölümde verilmişti. Bu yedi temel kavramın (5.1) problemi için aldığı şekil aşağıda ortaya konulacaktır:

5.1. Format

Burada bütün hesaplamaların γ , P_- , P_+ ve K parametrelerine bağlı olan rasyonel sayıların $F(\gamma, P_-, P_+, K)$ alt kümesi olan formatta yapılacağı kabul edilmektedir.

5.2. Şart Sayısı

Şart sayısı kavramı, $Ax = f$ sisteminin çözümünün bulunması problemi için, problemin iyi konulup konulmadığını belirlemekte kullanılan $\det A \neq 0$ olup olmadığının belirlenmesi yerine kullanılan alternatif bir kavramdı. Hatırlanacağı üzere $Ax = f$ sistemi için şart sayısı olarak $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ alınmıştı. Bu şart sayısı A matrisinin tekil matrislerin kümesinden ne kadar uzak olduğunu gösteren bir sayıdır. Bu ikinci bölümde açıklanmıştı özellikle Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 A matrisinin tekil matrislerin kümesinden ne kadar uzak olduğunu şart sayısı yardımıyla gösteren teoremlerdir.

Bir önceki bölümde (5.1) probleminin çözümünün var ve tek olması için

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RA^{(n_1-n_0)} \end{pmatrix}$$

matrisinin tekil olmamasının gerek ve yeter şart olduğu gösterilmişti. Demek ki $Ax = f$ sisteminde olduğu gibi burada da çözümün varlığı ve tekliği için kriter H matrisi ile ilgilidir. Benzer şekilde (5.1) problemi için şart sayısı olarak $\mu(H) = \|H\| \|H^{-1}\|$ sayısı bir önceki bölümde de kullanılmış ve burada da kullanılacaktır. Şart sayısı kavramı bilimsel hesaplamalarda bir problemin çözümünün hassasiyetinin belirlenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Yani şart sayısının büyüklüğü problemin iyi veya kötü konulmuş olup olmadığı hakkında bilgi verir[Aydın 1995].

5.3. Giriş Verilerindeki Hataların Sonuca Etkisi

Garanti yaklaşım yöntemine göre bir problemin çözümü için giriş verilerinin hatalarının çözüme etkisi ayrıntılı şekilde incelenmelidir. Bir önceki bölümde verilen iki-nokta sınır değer problemi için, giriş verilerinin hatalarının çözüme etkisi ayrıntılı şekilde ele alınmıştı. Teorem 4.4.1 de elde edilen sonuç burada hatırlatılabilir.

$\{n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1\}$ kümesinde

$$x(n+1) = Ax(n)$$

$$Lx(n_0) = \varphi, \quad Rx(n_1) = \psi$$

ve

$$y(n+1) = \tilde{A} y(n)$$

$$\tilde{L} y(n_0) = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{R} y(n_1) = \tilde{\psi}$$

problemleri ele alınsın. Burada $\tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{R}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ sırasıyla A, L, R, φ ve ψ matris ve vektörleri norm olarak birbirlerine çok yakın matris ve vektörlerdir. Ayrıca $\|R - \tilde{R}\| \leq 0.1 \|R\|$ sağlansın. Bu takdirde çözümlerin birbirine yakınlığı $T = n_1 - n_0$ ve

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RA^T \end{pmatrix}$$

olmak üzere seçilen $\mu(H) = \|H\| \|H^{-1}\|$ şart sayısına bağlıdır.

$$S_1 = \|x(n)\| \mu(A^{n-n_0} H^{-1}) \mu(H) [\|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + 1.1 \|R\|$$

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \Big] \frac{1}{\|H\| - \mu(H) \left[\|L - \tilde{L}\| + \|R - \tilde{R}\| \|A^T\| + 1.1 \|R\| \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^T e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \right]}$$

$$S_2 = \mu(A^{n-n_0} \tilde{H}^{-1}) \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|} \|x(n)\|$$

$$S_3 = \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \|A\|^{n-n_0} e^{\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \|\tilde{H}^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \right\|$$

olsun. Bu takdirde

$$\|y(n) - x(n)\| \leq S_1 + S_2 + S_3$$

eşitsizliği sağlanır.

Elde edilen üst sınırdaki yer alan $\|A^T\|$ problemin daha küçük aralıklarda çalışılması zorunluluğunu getirmektedir. Çünkü $T \rightarrow \infty$ için $\|A^T\| \rightarrow \infty$ olabilir. Ancak $T \rightarrow \infty$ için $\|A\|^T \rightarrow 0$ olabilir. Böylece $T = n_1 - n_0$ farkının küçük olabilmesi için aralık daha küçük seçilmelidir.

5.4. Kalıntı (rezidü) Problemi

$$x(n+1) = Ax(n)$$

$$Lx(n_0) = \varphi, \quad Rx(n_1) = \psi$$

İki-nokta sınır değer probleminin seçilen format kümesinde bilgisayarda hesaplanan çözümü $y(n)$ olsun. Bu takdirde çözümün kalıntısı

$$f(n) = y(n+1) - Ay(n)$$

olur. Aynı şekilde

$$Ly(n_0) = \tilde{\varphi}, \quad Ry(n_1) = \tilde{\psi}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} y(n+1) &= Ay(n) + f(n) \\ Ly(n_0) &= \tilde{\varphi}, \quad Ry(n_1) = \tilde{\psi} \end{aligned}$$

İki-nokta sınır değer problemi bilgisayarda hesaplanan çözümün sağladığı problemidir.

Bilgisayarda hesaplanan bu çözüm

$$\|y(n+1) - Ay(n) - f(n)\| \leq \varepsilon_1,$$

$$\|Ly(n_0) - \varphi\| \leq \varepsilon_1, \quad \|Ry(n_1) - \psi\| \leq \varepsilon_1,$$

eşitsizliklerini sağlarsa problem iyi şartlıdır. Eğer bu eşitsizlikler sağlanmazsa verilen problemin kötü şartlı olduğu kesinlik kazanır. Burada kullanılan $1+\varepsilon_1$ seçilen formatta 1'e en yakın olan sayıdır. Burada aşağıdaki teoremi vermek mümkündür.

Teorem 5.4.1. $\{n : n \in \mathbb{Z}, n_0 \leq n \leq n_1\}$ kümesinde

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) \\ Lx(n_0) &= \varphi, \quad Rx(n_1) = \psi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y(n+1) &= Ay(n) + f(n) \\ Ly(n_0) &= \tilde{\varphi}, \quad Ry(n_1) = \tilde{\psi} \end{aligned}$$

problemleri ele alınsın. Burada $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ sırasıyla φ ve ψ vektörleri norm olarak birbirlerine çok yakın vektörlerdir. Ayrıca $\{f(n)\}$ küçük bir vektör dizisidir. Çözümlerin birbirine yakınlığı $T = n_1 - n_0$ ve

$$H = \begin{pmatrix} L \\ RA^T \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\mu(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$ sayısına bağlıdır. Bu taktirde

$$\theta(A) = \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|A^{n-n_0}\|$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \|x(n) - y(n)\| &\leq \frac{\|A^{n-n_0}\|}{\|H\|} \cdot \mu(H) \cdot \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \|\psi - \tilde{\psi}\| + \|R\|(n_1 - n_0) \cdot \theta(A) \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\| \right) \\ &\quad + \theta(A)(n_1 - n_0) \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$x(n+1) = Ax(n)$$

$$Lx(n_0) = \varphi, \quad Rx(n_1) = \psi$$

ve

$$y(n+1) = Ay(n) + f(n)$$

$$Ly(n_0) = \tilde{\varphi}, \quad Ry(n_1) = \tilde{\psi}$$

problemleri ele alınsın.

Birinci problemin çözümü

$$x(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

ve ikinci problemin çözümü

$$y(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \left(\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} - R \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \end{pmatrix} + \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \right)$$

dir.

$$x(n) - y(n) = A^{n-n_0} H^{-1} \left(\begin{pmatrix} \varphi - \tilde{\varphi} \\ \psi - \tilde{\psi} + R \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \end{pmatrix} - \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \right)$$

olur.

$$\left\| \sum_{k=n_0}^{n_1} A^{n-k-1} f(k) \right\| \leq \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\| \sum_{k=n_0}^{n_1} \|A^{n-k-1}\| = \|F(n)\|$$

dersek

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \|A^{n-n_0}\| \cdot \|H^{-1}\| \cdot (\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \|\psi - \tilde{\psi}\| + \|R\| \|F(n)\| + \|F(n)\|)$$

olur.

$$\theta(A) = \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|A^{n-n_0}\|$$

olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|x(n) - y(n)\| &\leq \|A^{n-n_0}\| \cdot \|H^{-1}\| \cdot \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \|\psi - \tilde{\psi}\| + \|R\| (n_1 - n_0) \theta(A) \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\| \right) \\ &\quad + \theta(A) (n_1 - n_0) \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\| \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|x(n) - y(n)\| \leq \frac{\|A^{n-n_0}\|}{\|H\|} \cdot \mu(H) \cdot \left(\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \|\psi - \tilde{\psi}\| + \|R\|(n_1 - n_0) \cdot \theta(A) \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\| \right) + \theta(A)(n_1 - n_0) \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} \|f(n)\|$$

elde edilir.

5.5. Pratik İyi Şartlı Problem

İyi şartlı ve kötü şartlı problemlerin şart sayısı kavramıyla belirlenebileceğini, probleme ait verilerin ne kadar değiştiğinde problemin kötü şartlı olacağı ile ilgili bilgi $Ax = f$ sistemi için verilmişti. $Ax = f$ sisteminin çözümünün bulunması problemi için matrislerin pratik terslenebilme parametresi μ^* ile gösterilmişti. Bu sayı Formata ve algoritmaya dayanarak seçilen bir sayıdır. Burada iki-nokta sınır değer problemi için de bu sayı pratik iyi şartlı problemleri tanıtan sınır olarak alınacaktır. Yani $\mu(H) > \mu^*$ olduğu tespit edilirse verilen iki-nokta sınır değer problemi pratik kötü şartlı demektir. Yani seçilen formata ve algoritmaya göre H matrisinin değişimi kabul edilebilir sınırlar içinde kalmamaktadır. Böylece önceden belirlenen μ^* ' a göre $\mu(H) > \mu^*$ olması problemin çözümüne devam edilmesine gerek olmadığını gösterir. Bu durum algoritmada belirtilmelidir. Aksi halde verilen iki-nokta sınır değer problemi pratik iyi şartlı bir problemidir. Yani problemde verilerin değişimi kabul edilebilir sınırlardadır ve problemin çözümüne devam edilebilir.

5.6. Algoritma

Garanti yaklaşım yönteminin oluşturulabilmesi için bir algoritma verilmesi şarttır. Verilen bir algoritmanın garanti yaklaşım algoritması olabilmesi için mutlaka yuvarlama hata analizi yapılmalıdır. Yani, seçilen formatta işlemler yapılırken biriken yuvarlama hatalarının üst sınırı seçilen şart sayısına bağlı olarak bulunmalıdır. Burada (5.1) problemini çözmek için 2 değişik algoritma verilecektir. Hata analizi yapıldıktan sonra bu algoritmalarından birisi amaç algoritması olarak kullanılabilir.

Algoritma 1. Bu algoritma için veriler; N ve k doğal sayılar, $T = n_1 - n_0$ reel sayı, A reel karesel N boyutlu matris, L reel dikdörtgen $k \times N$ tipinde bir matris, R reel dikdörtgen $(N-k) \times N$ bir matris, ϕ reel k bileşenli vektör ve ψ reel $N-k$ bileşenli vektördür.

Adım 1. Çözüme önce sol sınır şartından başlanır. Sol sınır şartlarını sağlayan vektörler

$$Ly = \phi$$

homogen olmayan lineer cebirsel denklem sistemini çözerek elde edilir. L matrisinin satırları lineer bağımsız ise bu taktirde verilen sistemin sonsuz çözümü vardır [Şimşek 1999]. Bu denklem sisteminin çözümü homogen kısmın genel çözümü ve homogen olmayan kısmın $\hat{y}$ özel çözümünün toplamı yardımıyla verilebilir. Homogen kısmın genel çözümünü bulmak için homogen denklemlerin çözümlerinin alt uzayını tanıtan $N-k$ bileşenli $g_1, g_2, \dots, g_{N-k}$ reel vektörlere ihtiyaç vardır. Yani ;

$$L\hat{y} = \phi$$

den homogen olmayan kısmın özel çözümü olan $\hat{y}$ vektörü ve

$$Lg_j = 0, j = 1, 2, \dots, N-k$$

eşitliklerini sağlayan $N-k$ tane $g_1, g_2, \dots, g_{N-k}$ vektörleri bulunur. Böylece $N-k$ tane vektör bulunmuş olur.

Nümerik analizin klasik problemlerinden olan bu problem, hataların etkisini kontrol eden SVD (Singular Value Decomposition ,Tekil Değer Ayrışım) algoritması ile çözülür. [Golup ve Loan 1989, Françoise 1996, Godunov vd. 1993, Trefethan 1995].

Böylece $Ly = \phi$ sisteminin genel çözümü

$$y = \hat{y} + c_1g_1 + c_2g_2 + \dots + c_{N-k}g_{N-k}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada $c_j, j = 1, 2, \dots, N-k$ reel sayılardır.

Adım 2. Adım 1 de bulunan $\hat{y}, g_1, g_2, \dots, g_{N-k}$ vektörleri yardımıyla aşağıdaki ayrık Cauchy problemleri $[0, T]$ ayrık aralığında hesaplanır.

$$h_1(n+1) = Ah_1(n); \quad h_1(0) = g_1;$$

$$h_2(n+1) = Ah_2(n); \quad h_2(0) = g_2;$$

.....

$$h_{N-k}(n+1) = Ah_{N-k}(n); \quad h_{N-k}(0) = g_{N-k};$$

$$z(n+1) = Az(n); \quad z(0) = \hat{y};$$

Buradan $\{h_1(n)\}, \{h_2(n)\}, \dots, \{h_{N-k}(n)\}$ ve $\{z(n)\}$ vektör dizileri ve $h_1(T), h_2(T), \dots, h_{N-k}(T)$ ve $z(T)$ vektörleri hesaplanır.

Adım 3. Sol sınır şartını sağlayan ve sağ sınır şartına kadar sağlanan çözümler

$$y(n) = z(n) + c_1 h_1(n) + c_2 h_2(n) + \dots + c_{N-k} h_{N-k}(n)$$

dir. Buradaki $c_1, c_2, \dots, c_{N-k}$ katsayılarını hesaplamak için sağ taraftaki sınır şartı kullanılır. Bu hesabı yapmak için

$$R[z(T) + c_1 h_1(T) + c_2 h_2(T) + \dots + c_{N-k} h_{N-k}(T)] = \psi$$

homogen olmayan lineer sistemi 1. Adımda olduğu gibi SVD (Tekil Değer Ayrışım) algoritması kullanılarak çözülür ve $c_1, c_2, \dots, c_{N-k}$ bulunur.

Adım 4. 3. Adımda hesaplanan $c_1, c_2, \dots, c_{N-k}$ katsayıları ve 2. Adımda hesaplanan $\{h_1(n)\}, \{h_2(n)\}, \dots, \{h_{N-k}(n)\}$ ve $\{z(n)\}$ vektör dizileri yardımıyla verilen (5.1) probleminin tek olan $\{x(n)\}$ çözümü

$$x(n) = z(n) + c_1 h_1(n) + c_2 h_2(n) + \dots + c_{N-k} h_{N-k}(n)$$

şeklinde bulunur.

Burada hata kontrolü hakkında yorum yapılmamaktadır. Verilen bu algoritma iyi şartlı olduğu bilinen problemler için kullanılmalıdır.

Şimdi verilen (5.1) problemi için bir algoritma daha verilecektir.

Algoritma 2. Bu algoritma için veriler; N ve k doğal sayılar, $T = n_1 - n_0$ reel sayı, A reel karesel N boyutlu matris, L reel dikdörtgen $k \times N$ tipinde bir matris, R reel dikdörtgen $(N-k) \times N$ bir matris, ϕ reel k bileşenli vektör ve ψ reel $N-k$ bileşenli vektördür.

Adım 1.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, g_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1(n+1) = Ah_1(n); \quad h_1(0) = g_1;$$

$$h_2(n+1) = Ah_2(n); \quad h_2(0) = g_2;$$

.....

$$h_{N-1}(n+1) = Ah_{N-1}(n); \quad h_{N-1}(0) = g_{N-1};$$

$$h_N(n+1) = Ah_N(n); \quad h_N(0) = g_N;$$

olarak $A^n = [h_1(n), h_2(n), \dots, h_N(n)]$, $n = 1, 2, \dots, T$ hesaplanır. Sonuç olarak N tane $\{h_1(n)\}, \{h_2(n)\}, \dots, \{h_N(n)\}$ vektör dizileri ve N tane $h_1(T), h_2(T), \dots, h_N(T)$ vektörleri hesaplanır.

$$A^T = [h_1(T), h_2(T), \dots, h_N(T)]$$

olduğu açıktır.

Adım 2. $H = \begin{pmatrix} L \\ RA^T \end{pmatrix}$ matrisi ele alınır.

Adım 2.1. Householder dönüşümleri kullanılarak Q ve V ortogonal matrisler ve W iki köşegenli matris olmak üzere $H = QWV$ şeklinde yazılabilir.

Adım 2.2. Sturm yöntemi yardımıyla elde edilen iki köşegenli matrisin en büyük $\sigma_N(H)$ ve en küçük $\sigma_1(H)$ tekil değerleri hesaplanır

Adım 2.3. $\sigma_N(H) > \sigma_1(H)\mu^*$ eşitsizliği yardımıyla verilen problemin pratik iyi şartlı olup olmadığı kontrol edilir. Eğer pratik kötü şartlı oluşu tespit edilirse hesap işlemleri durdurularak $\mu(H) > \mu^*$ sonuç olarak verilir. Aksi halde 4. Adıma geçilerek çözüme devam edilir.

Adım 3. $Ha = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sistemi yardımıyla a vektörü hesaplanır. $\mu(H)$ yeterince küçük olduğundan Householder dönüşümleri ile elde edilen matrisler kullanılarak bu işlem güvenli şekilde yapılır. $QWVa = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ sistemi $W(Va) = Q^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir.

W iyi şartlı iki köşegenli matris olduğuna göre yok etme yöntemiyle $s = Va$ diyerek

$$Ws = Q^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

sistemi bulunur. Buradan s hesaplandıktan sonra $s = Va$ dan $a = V^*s$ elde edilir.

Buradan verilen (5.1) probleminin tek olan çözümü

$$x(n) = a_1 h_1(n) + a_2 h_2(n) + \dots + a_N h_N(n)$$

şeklinde elde edilir.

5.7. Hassas İterasyon İşlemi

Garanti yaklaşım yönteminin son aşaması, verilen problem için hassas iterasyon işlemini yapmaktır. Sadece iyi konulmuş problemler için kullanılan hassas iterasyon işleminin amacı, bir önceki algoritma ile iyi konulmuş olduğu belirlenen problemin elde edilen yaklaşık y çözümü yardımıyla daha iyi bir yaklaşım elde etmektir. Burada hassas iterasyon işleminin gerçekleştirilebilmesi için homogen olmayan iki-nokta sınır değer problemlerinin çözümünün duyarlı biçimde bulunması gerekmektedir. Bu nedenle şimdilik verilen problem için hassas iterasyon işlemi verilmeyecektir. Ancak hassas iterasyon işlemi için daha ayrıntılı çalışmanın [Böhner vd. 1994] çalışmasına dayanarak yapılacağı ümit edilmektedir.



KAYNAKLAR

- 1 Akın Ö. Bulgak H., 1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi Yayınları No: 2, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- 2 Aydın K., Bulgak H., Quality of Stability Parameter of Linear Ordinary Differential Equations with Periodic Coefficients, Siberian J. Of Differential Equations, New-York , Nova Sci. Publ. (to appear).
- 3 Aydın, K., “Adi Lineer Periyodik Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Asimtotik Kararlılığı için Şart Sayısı”, Doktora Tezi, 1995.
- 4 Bellman R., Introduction to matrix analysis, Mc Graww-Hill Book Company, New york, 1970.
- 5 Böhner K., Henker P., Stetter H.J., The Defect Correction Approach, Computing Suppl. 5, 1-32, By Springer – Verlag , 1994.
- 6 Bulgakov A. Ya., Matrix Computations With Guaranteed Accuracy in Stability Theory, Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi yayını, Konya.1995.
- 7 Bulgakov A., The Basis of Guaranteed Accuracy in the Problem of Separation of Invariant Subspaces for Non-self-adjoint Matrices, J. Sib. Advances in Math., New-York, N.1 (part 1) , pp. 64-108 and N.2 (part 2) pp. 1-56, 1991.
- 8 Bulgakov A.Ya., The quaranteed accuracy algorithm for solving Lourier-Riccati matrix equation, Teoreticheskiye Vychislitelniye Problemi Matematich-eskoi Fiziki, Institute of Mathematics of Siberian Division Russian Academy of Science, Novosibirsk, 63-104,1994.
- 9 Bulgakov A.Ya., The quaranteed accuracy in matrix computations, Sib. J. Diff.Equations, New-York, Nova Sci. Publ., vol.2, No.2, 1-16,1993.
- 10 Cıvıck L., 1998 “Matris Problemlerine Bilgisayar Destekli Bazı Çözümler”, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,, Yüksek Lisans Tezi, Konya
- 11 Demmel J.W., Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997.
- 12 Elaydi S.N., An Introduction to Difference Equations, Springer Verlag, New York, 1996
- 13 Fraleigh J.B., Beauregard R.A., Linear Algebra, Addison- Wesley Publishing Company, New York, 1990.

- 14 Françoise Chaitin-Chatelin, Valerie Fraysse, Lectures on Finite Precision Computations, Software-Enviroments-Tools , SIAM, Philadelphia, 1996
- 15 Godunov S.K. (1994), Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients and Boundary Problems, Novosibirsk University 263 p.
- 16 Godunov S.K., Antonov A.G., Kiriluk O.P., Kostin V.I., Guaranteed Accuracy in Numerical Linear Algebra, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1993.
- 17 Golub G., Van Loan C., Matrix Computations, Second edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- 18 Golup G.H., Ortega J.M., Scientific Computing and Differential Equations, Academic Press Inc., London 1992.
- 19 Hager W.W., Numerical Linear Algebra, Prentice-Hall International Inc., U.S.A., 1988.
- 20 J. von Neumann , Goldstine H.H. , Numerical inverting of matrices of high order , Bull. Amer. Math Soc., 1947, v. 53, no. 11 1021-1099.
- 21 Merdan Y., 1996 “Lourier – Riccati Matris Denklemlerin Garanti Yaklaşım Metoduyla Bilgisayarda Çözümü”, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya
- 22 Murthy K.N., Lakshmi P.V.S., On Two-Point Boundary Value Problems, J. Of Math. An. and App. 153, 217-225 (1990).
- 23 Pandey R.K., On a Class of Weakly Regular Singular Two-Point Boundary Value Problems, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, Vo:27, No.1, pp.1-12, 1996
- 24 Rubio J.E., The Theory of Linear Systems, Academic Press, New York, 1971.
- 25 Strikwerda J.C., Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Wadsworth & Brooks, U.S.A., 1989.
- 26 Şimşek D., 1999 “ $Ax = f$ Probleminin SVD Algoritması ile Çözümü”, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,, Yüksek Lisans Tezi, Konya
- 27 Trefethen L.N., David Bau III, Numerical Linear Algebra, Cornell University (Book in Preparation), 1995.
- 28 Turing A.M. Rounding-off errors in matrix processes. Quart. J. Mech., 1, 1948, 287-308
- 29 Wilkinson J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press Oxford; 1965.

ÖZGEÇMİŞ

Karabük'te 1969 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1986 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden Şubat 1991 de Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ocak 1992'de T.C. Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir okulda Matematik öğretmenliğine başladı. Haziran 1994'te Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. Aynı yıl yüksek lisansını tamamladı. 1995'te Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başladı. Halen Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki görevine devam etmektedir.

TC. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
DOKÜMANTASYON MERKEZİ