

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI DÜZ VE TERS PROBLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF ÖZSOY

NİSAN 2023

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI DÜZ VE TERS PROBLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ÖZSOY

DANIŞMAN: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Nisan 2023

KABUL:

Elif ÖZSOY tarafından hazırlanan “Kinetik Denklemler için Bazı Düz ve Ters Problemlerin Çözümlerinin Tekliğinin Araştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 13/04/2023

Danışman: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Yüksel SOYKAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Tufan TURACI

Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../2023

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Elif ÖZSOY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KINETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI DÜZ VE TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Elif ÖZSOY

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Nisan 2023, 55 sayfa

Bu tezde ilk olarak, genelleşmiş fonksiyon, genelleşmiş türev ve Sobolev uzayı kavramları tartışılmıştır. İkinci olarak, kinetik denklemler için bazı ters problemlere ve bu problemlerle bağlantılı olan integral geometri problemlerinin tıptaki uygulamalarına yer verilmiştir. Son olarak, saçılım terimi içeren durağan olmayan bir kinetik denklem için bazı düz ve ters problemler ele alınmıştır. Bu problemlerin aralarındaki ilişki incelenmiş ve çözümlerinin tekliği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kinetik denklem, düz problem, ters kaynak problemi, çözümün tekliği

Bilim Kodu: 403.06.00.



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF SOME DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR KINETIC EQUATIONS

Elif ÖZSOY

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

April 2023, 55 pages

In this thesis, firstly, the concepts of generalized function, generalized derivative and Sobolev spaces are discussed. Secondly, the applications of inverse problems for kinetic equations and related integral geometry problems in medicine are given. Finally, some direct and inverse problems are discussed for a non-stationary kinetic equation with a scattering term. The relationship between these problems was examined and the uniqueness of their solutions was investigated.

Keywords: Kinetic equation, direct problem, inverse source problem, uniqueness of solution.

Science Code:403.06.00.



TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile desteğini esirgemeyen, beni yönlendiren, öğrencisi olduğum için her daim gurur duyacağım, değerli danışman hocam Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yaşamım boyunca maddi manevi destekleriyle her zaman yanımda olan sevgili annem Sadiye ÖZSOY ve sevgili babam Muhammet ÖZSOY'a şükranlarımı bir borç bilirim. Bu tezi, varlığı ile hayatımı anlamlandıran sevgili oğlum Doruk ÇAKIR'a ithaf ediyorum.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
KABUL:	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
BÖLÜM 1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
1.1 FREDHOLM ALTERNATİF TEOREMLERİ	1
1.2 GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLARIN GELİŞİM SÜRECİ	2
1.2.1 D Test Fonksiyonlar Uzayı.....	3
1.2.2 D' Genelleşmiş Fonksiyon Uzayı	4
1.2.3 Regüler Genelleşmiş Fonksiyon	5
1.2.4 Singüler Genelleşmiş Fonksiyon	5
1.2.5 Genelleşmiş Fonksiyonların Türevi	6
1.2.6 Genelleşmiş Türevin Özellikleri	7
1.3 BAZI FONKSİYON UZAYLARI	8
1.3.1 $C^k(\Omega)$ Uzayı.....	8
1.3.2 $L_p(\Omega)$ Uzayı.....	8
1.3.3 $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı.....	8
1.3.4 Yoğun Küme	10
BÖLÜM 2 TERS PROBLEMLERİN TIPTAKİ UYGULAMALARI.....	11

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
2.1 BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ	11
2.2 ELEKTRİKSEL EMPEDANS TOMOGRAFİ	12
2.3 OPTİK TOMOGRAFİ.....	13
2.4 MİKRODALGA TOMOGRAFİ	13
2.5 MANYETOENSEFALOGRAFİ.....	14
2.6 X-RAY TOMOGRAFİ.....	14
2.7 FLORESAN MİKROSKOBİ	16
 BÖLÜM 3 KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI DÜZ PROBLEMLER.....	 17
3.1 NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİ	 17
3.2 KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ.....	 22
 BÖLÜM 4 KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER	 31
 BÖLÜM 5 SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BAZI DÜZ VE TERS PROBLEMLER.....	 37
 BÖLÜM 6 SONUÇ	 49
 KAYNAKLAR.....	 51
 ÖZGEÇMİŞ	 55

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bir bölge
$\bar{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı k . mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{D}(\Omega)$	: Ω bölgesinde sonsuz defa diferensiyellenebilen ve kompakt supporta sahiptir fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{D}'(\Omega)$	: Ω bölgesinde verilen genelleşmiş fonksiyonların kümesi
$L_{1,loc}(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve Ω nın her iç alt bölgesinde integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^m(\Omega)$	: Kendisi ve m . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı

KISALTMALAR

EET	: Elektriksel Empedans Tomografi
FMRI	: Fonksiyonel Manyetik Rezonans Görüntüleme
MT	: Mikrodalga Tomografi
MEG	: Manyetoensefalografi
PET	: Pozitron Emisyon Tomografi
SPECT	: Tek Foton Emisyon Tomografi



BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1 FREDHOLM ALTERNATİF TEOREMLERİ

Bir $Ly = f$ denklemi verildiğinde çözümün hangi şartlar altında bulunabileceği doğal bir sorudur. Ayrıca bu çözüm tek midir? Bu sorular, Fredholm alternatif teoremi ile cevap bulmuştur. Bu teoremin farklı formlarda ifadesi mevcuttur: Cebirsel denklem sistemlerinin çözümleri, sınır değer problemleri ve integral denklemlerinin çözümleri bunlara örnektir. Bu teorem iki bölümden oluşmaktadır bu nedenle alternatif kelimesi kullanılmaktadır. Verilen denklem, her f için ya bir çözüme sahip ya da bazı f ' ler için çok sayıda çözüme sahip değildir.

A bir $n \times n$ tipinde matris olmak üzere $Ax = b$ sisteminin çözümü için aşağıdaki teorem verilebilir. Burada A^* , A matrisinin adjointi olup $\forall x, y \in C^n$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ eşitliği sağlanmaktadır.

Teorem 1.1 (Birinci Alternatif) $Ax = b$ denklemi bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $A^*v = 0$ şartını sağlayan her v için $\langle b, v \rangle = 0$ dır.

Teorem 1.2 (İkinci Alternatif) $Ax = b$ denkleminin çözümü eğer varsa tektir ancak ve ancak $Ax = 0$ denkleminin sadece sıfır çözümü vardır yani $x = 0$ dır.

İkinci alternatif daha yaygın olarak şöyle ifade edilmektedir: n tane denklem ve n tane bilinmeyen içeren bir homojen olmayan sistemin çözümü tektir, eğer ilgili homojen problemin çözümü sadece sıfır çözümtüyse.

Fredholm alternatif teoremi lineer operatörler için aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

Teorem 1.3 Eğer L bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı, sınırlı lineer operatör ise bu durumda $Ly = f$ denklemi bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $L^\dagger v = 0$ şartını sağlayan her v için $\langle f, v \rangle = 0$ dır. Burada $L^\dagger$, L operatorünün adjointi olup L ' nin tanım bölgesindeki

her v ve $L^\dagger$ 'nın tanım bölgesindeki her u için

$$\langle u, Lv \rangle = \langle L^\dagger u, v \rangle$$

eşitliği sağlanır.

1.2 GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLARIN GELİŞİM SÜRECİ

Kinetik denklemler, çok sayıda parçacık içeren bir sistemin zamana göre evrimini tasvir etmek için bir yol ortaya koyar. Bunu yaparken de bir $u(x, v, t)$ dağılım fonksiyonundan yani diğer bir ifadeyle genelleşmiş fonksiyonundan yararlanılır. Çünkü bu fonksiyon, faz uzayındaki yoğunluğu ifade eder. Daha açık bir şekilde $f dx dv$, bu uzayın (x, v) noktası civarındaki konum-hız uzayının $dx dv$ hacmindeki parçacıklarının sayısını belirtmektedir, (Amirov 2001, Anikonov 2001, Cercignani and Gabetta 2007, Degond et al. 2004). Bu nedenle, bu bölümde genelleşmiş fonksiyonlar ve ilgili kavramlar Griffel (2002), Vladimirov (1984, 2002) eserleri esas alınarak tartışılacaktır.

Genelleşmiş fonksiyonlar teorisi, Dirac delta fonksiyonunun matematiksel temellerini oluşturmak için geliştirilmiştir. Bu fonksiyon 1930 yılında matematikçi Paul Dirac tarafından Kuantum mekaniğinin matematiksel formülasyonunda kullanılmak üzere tanımlanmıştır. Bilindiği üzere sürekli kütle dağılımlarında toplam kütle $m = \int \rho(x) dx$ ile elde edilir. Ayrıca kütle merkezi ve eylemsizlik momenti, ρ fonksiyonuna göre ifade edilebilir. Eğer kütle sürekli şekilde dağılmak yerine sonlu sayıda noktada toplanmışsa, yukarıdaki tanım geçerli olmaz. Şimdi kütlesi ihmal edilebilir, orta noktasında ($x = 0$) küçük ve ağır bir boncuk olan bir tel düşünelim. Kabul edelim ki bu boncuk birim kütleye sahip ve öyle küçük olsun ki matematiksel olarak bir nokta ile gösterilebilsin. Bu durumda, eğer sıfır aralığın dışında ise toplam kütle sıfırdır ve sıfır aralığın içindeyse toplam kütle birdir.

Bu kütle dağılımını temsil eden bir ρ fonksiyonu yoktur. Eğer olsaydı her $x \neq 0$ için $\rho(x) = 0$ olurdu. Çünkü birim uzunluktaki kütle $x = 0$ dışında sıfırdır. Fakat, eğer bir fonksiyon tek bir nokta dışında her yerde sıfır ise klasik anlamda bu fonksiyonun integralinin herhangi bir aralık üzerinde sıfır olması gerektiği açıktır. Bu nedenle orijini içeren bir aralık üzerinde bu fonksiyonun integralinin alınması doğru değeri yani 1' i vermez:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx = \int_a^0 \rho(x) dx + \int_0^b \rho(x) dx = 0.$$

Fiziksel açıdan kütle yoğunluk fonksiyonu $x = 0$ dışında her yerde 0' dır, $x = 0$ ' da ise sonsuzdur. Çünkü sonlu bir kütle sıfır uzunluğundaki bir alanda toplanmıştır. Burada, yani $x = 0$ ' da $\rho(x)$ öyle sonsuz büyüktür ki integrant çok küçük bir alanda sadece pozitif olmasına rağmen integral sıfırdan farklıdır. Bu fiziksel olarak anlamlıdır fakat matematiksel olarak anlamlı değildir.

Bu nedenle Dirac aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\delta(x)$ fonksiyonu tanımlamıştır:

i) $x = 0$ için $\delta(x) = 0$,

ii) $a < 0 < b$ ise $\int_a^b \delta(x) dx = 1$.

Dirac' ın yukarıda tanımladığı fonksiyon birçok fizikçi, mühendis ve uygulamalı matematikçi tarafından kullanılmıştır. Ancak teorik matematikçilere göre bu tanım büyük bir sorundur. Daha açık bir ifade ile matematiksel olarak anlamlı olmayan ancak faydalı ve doğru sonuçlar veren bir fikir olarak ortaya çıkmıştır. Bu nedenle $\delta(x)$ fonksiyonunun doğru matematik temeller üzerine oturtulması için bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur. Bu durum, tıpkı 16. yy da cebirsel denklemlerin çözümü için kompleks sayıların kullanılmasına benzemektedir. Dirac Delta fonksiyonu ile ilgili bu teori 1936 yılında S. L Sobolev ve 1950 yılında da L. Schwartz tarafından geliştirilmiştir. Onların geliştirdiği genelleşmiş fonksiyonlar teorisi önemli avantajlar sağlamıştır. Örneğin, her genelleşmiş fonksiyon diferensiyellenebilir ayrıca serilerin düzgün yakınsaklığı gözardı edilerek terim terim türev ve integral alınabilir.

1.2.1 $\mathcal{D}$ Test Fonksiyonlar Uzayı

Bir genelleşmiş fonksiyon, klasik fonksiyon kavramının genelleştirilmesidir. Bu genelleştirme bize noktasal maddelerin yoğunluğunu, noktasal yüklerin, anlık noktasal kaynakların şiddetini ve bir noktaya uygulanan kuvvetin yoğunluğunu matematiksel olarak modelleme imkanı tanır.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$ test fonksiyonlar kümesi, Ω bölgesinde sonsuz olarak diferansiyellenebilen ve kompakt supporta sahip fonksiyonlardan oluşur. Şimdi $\mathcal{D}$ kümesinde aşağıdaki yakınsaklığı tanımlayalım: $\mathcal{D}$ kümesinin elemanlarından oluşan $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ fonksiyonlar dizisi $\mathcal{D}'$ de bir φ elemanına yakınsar, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa:

i) Bir $\Omega' \subseteq \Omega$ kümesi vardır öyleki $\text{supp } \varphi_k \subset \Omega'$ dir.

ii) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ için $\mathcal{D}^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{x \in \Omega} \mathcal{D}^\alpha \varphi(x)$, $k \rightarrow \infty$ dir.

Bu durumda $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ olarak gösterilir. Bu yakınsaklık ile donatılmış $\mathcal{D}(\Omega)$ kümesine test fonksiyonlar uzayı denir.

1.2.2 $\mathcal{D}'$ Genelleşmiş Fonksiyon Uzayı

Bir Ω kümesi üzerinde verilen genelleşmiş fonksiyon, $\mathcal{D}(\Omega)$ test fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlanan sürekli, lineer, fonksiyonellere denir.

Başka bir ifadeyle bir genelleşmiş fonksiyon $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}$ sürekli, lineer, fonksiyonellerdir. Burada $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ dır. f genelleşmiş fonksiyonunun φ test fonksiyonu üzerindeki değeri (f, φ) ile gösterilir. Ω bölgesinde verilen genelleşmiş fonksiyonların kümesi $\mathcal{D}'(\Omega)$ ile gösterilir.

O halde genelleşmiş fonksiyonlar için aşağıdakileri söyleyebiliriz:

i) $\mathcal{D}$ üzerinde bir fonksiyoneldir; her $\varphi \in \mathcal{D}$ için (f, φ) bir kompleks sayıdır.

ii) f genelleşmiş fonksiyonu, $\mathcal{D}$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir, yani

$\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

iii) f genelleşmiş fonksiyonu süreklidir:

Eğer $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ ise $k \rightarrow \infty$ için $(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi)$ dır.

Ayrıca her $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ ise f ve g genelleşmiş fonksiyonları eşittir denir.

Bu durumda Ω da $f = g$ veya $x \in \Omega$ için $f(x) = g(x)$ yazılır.

1.2.3 Regüler Genelleşmiş Fonksiyonlar

Genelleşmiş fonksiyonların en basit örneği Ω bölgesinde lokal olarak integrallenebilen bir f fonksiyonu tarafından üretilen fonksiyonellerdir:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Diğer tüm genelleşmiş fonksiyonlar singüler genelleşmiş fonksiyonlar olarak adlandırılır.

Lemma 1.4 (*Du Bois Reymond*)

Bir Ω bölgesinde lokal integrallenebilen $f(x)$ fonksiyonunun hemen hemen her yerde sıfır olması için gerek ve yeter şart onun tarafından üretilen f genelleşmiş fonksiyonunun Ω da sıfır olmasıdır:

$$f(x) = 0 \text{ hhh} \iff \int_{\Omega} f \varphi dx = 0, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Yukarıdaki lemmadan Ω daki her regüler genelleşmiş fonksiyonun bir tek lokal integrallenebilen fonksiyon tarafından tanımlandığı görülür. Sonuç olarak, Ω da lokal integrallenebilen fonksiyonlar ile regüler genelleşmiş fonksiyon arasında birebir eşleme vardır. Bu nedenle bundan sonra Ω da ki bir $f(x)$ lokal integrallenebilen fonksiyonunu, onun tarafından üretilen $\mathcal{D}'(\Omega)$ ya ait olan genelleşmiş fonksiyonlarla özleştireceğiz. İşte bu anlamda $f(x)$ fonksiyonları regüler genelleşmiş fonksiyonlardır.

1.2.4 Singüler Genelleşmiş Fonksiyon

Singüler genelleşmiş fonksiyonların en basit örneği Dirac delta fonksiyonudur:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \varphi \in \mathcal{D}.$$

Açıktır ki $\delta \in \mathcal{D}'$ için $x \neq 0$, $\delta(x) = 0$ böylece $\text{supp } \delta(x) = \{0\}$ ' dir. Şimdi $\delta(x)$ ' in bir singüler genelleşmiş fonksiyon olduğunu gösterelim:

Tersine kabul edelimki Ω da lokal integrallenebilen bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \varphi \in \mathcal{D} \tag{1.2}$$

olsun. Eğer $\varphi \in \mathcal{D}$ ise $x\varphi_1 \in \mathcal{D}$ olur. Bu durumda (1.2) den

$$\int f(x) x_1 \varphi(x) dx = x_1 \varphi(x)|_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi) \text{ ise hhh } x_1 f(x) = 0 \text{ dir.}$$

Buradan da hhh $f(x) = 0$ olur. O halde bir çelişki ortaya çıkar, demekki kabulümüz yanlıştır. Yani Dirac delta fonksiyonu lokal integrallenebilen bir fonksiyon tarafından üretilemez.

1.2.5 Genelleşmiş Fonksiyonların Türevi

Bir $f \in C^k(\Omega)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda her α , $|\alpha| \leq k$ ve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için kısmi integrasyon formülü yardımıyla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha f, \varphi) &= \int_{\Omega} \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \\
&= \partial^{\alpha-1} f(x) \varphi(x) |_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \partial^{\alpha-1} f(x) \varphi'(x) dx \\
&= - \int_{\Omega} \partial^{\alpha-1} f(x) \varphi'(x) dx \\
&= -\partial^{\alpha-2} f(x) \varphi'(x) |_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \partial^{\alpha-2} f(x) \varphi''(x) dx \\
&\vdots \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlik, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonunun $\partial^\alpha f$ genelleşmiş türevinin tanımı olarak alınır:

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.3)$$

Burada $\varphi \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi$ işlemi $\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ için lineer ve sürekli olduğundan (1.3)'ün sağ tarafı ile tanımlı $\partial^\alpha f$ fonksiyoneli $\mathcal{D}'(\Omega)$ da bir genelleşmiş fonksiyondur.

Özel olarak $f = \delta$ olduğunda (1.3) eşitliği

$$(\partial^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

formunu alır.

1.2.6 Genelleşmiş Türevin Özellikleri

i) Eğer $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonu bir $\Omega_1 \subset \Omega$ bölgesinde $C^k(\Omega_1)$ sınıfından ise bu durumda fonksiyonun klasik türevi ile $\partial^\alpha f$ genelleşmiş türevi Ω_1 'de çakışır.

ii) Her $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonu (özel olarak Ω da lokal olarak integrallenebilen fonksiyonlar) sonsuz defa diferensiyellenebilirdir (genelleşmiş anlamda).

iii) Genelleşmiş türevin sonucu, türevin sırasına bağlı değildir:

$$\partial^{\alpha+\beta} f = \partial^{\alpha}(\partial^{\beta} f) = \partial^{\beta}(\partial^{\alpha} f).$$

iv) Eğer $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ve $a \in C^{\infty}(\Omega)$ ise bu durumda af çarpımının türevi için Leibniz formülü sağlanır:

$$\partial^{\alpha}(af) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\beta} a \partial^{\alpha-\beta} f.$$

Örnek 1.1 $f(x) = |x_1|$ fonksiyonu $Q = \{|x| < 1\}$ yuvarında $f_{x_1} = \text{sgn} x_1$, $f_{x_i} = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$) birinci genelleşmiş türevlerine sahiptir.

Her $g(x) \in C_0^1(\overline{Q})$ için

$$\int_Q |x_1| \bar{g}_{x_1} dx = \int_{Q^+} x_1 \bar{g}_{x_1} dx - \int_{Q^-} x_1 \bar{g}_{x_1} dx$$

yazılabilir. Burada $Q^+ = Q \cap (x_1 > 0)$, $Q^- = Q \cap (x_1 < 0)$ olarak tanımlıdır. Ostrogradskii formülünden ∂Q üzerinde $x_1 \bar{g} = 0$ ve $x_1 = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\int_Q |x_1| \bar{g}_{x_1} dx = - \int_{Q^+} \bar{g} dx - \int_{Q^-} \bar{g} dx = - \int_Q \text{sgn} x_1 \bar{g} dx$$

elde edilir. O halde x_1 bağımsız değişkenine göre $|x_1|$ fonksiyonunun genelleşmiş türevi vardır ve $\text{sgn} x_1$ 'e eşittir. Ayrıca $i \geq 2$ için

$$\int_Q |x_1| \bar{g}_{x_i} dx = \int_Q (|x_1| \bar{g})_{x_i} dx = 0 = - \int_Q 0 \cdot \bar{g} dx = (-1)(f_{x_i}, g)$$

yazılabildiğinden $|x_1|$ fonksiyonunun x_i , ($i = 2, 3, \dots, n$) bağımsız değişkenlerine göre genelleşmiş türevleri var ve sıfıra eşittir, (Mikhailov 1978).

1.3 BAZI FONKSİYON UZAYLARI

1.3.1 $C^k(\Omega)$ Uzayı

Bir Ω bölgesinde tanımlı k . mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. Ek olarak, $C^k(\Omega)$ uzayına ait olan ve kompakt supporta sahip fonksiyonlar sınıfı da $C_0^k(\Omega)$ ile ifade edilmektedir. Ayrıca $C_0^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega)$ şeklinde tanımlanır, (Mikhailov 1978).

1.3.2 $L_p(\Omega)$ Uzayı

Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve p de bir pozitif reel sayı olsun. $L_p(\Omega)$ ile Ω bölgesinde tanımlı ve

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfı ifade edilmektedir. Daha açık olarak $L_p(\Omega)$ uzayının elemanları yukarıdaki şartı sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfları olarak tanımlanır. Böylece iki fonksiyon eğer Ω da hemen hemen her yerde eşit ise denk olarak kabul edilir, (Adams and Fournier 2003).

1.3.3 $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev Uzayı

$W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı kendisi ve m -inci mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_p(\Omega)$ kümesine ait olan fonksiyonlar uzayı olarak tanımlanır, (Adams and Fournier 2003):

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Teorem 1.5 $W^{m,p}(\Omega)$ bir Banach uzayıdır, (Adams and Fournier 2003).

İspat. $\{u_n\}$, $W^{m,p}(\Omega)$ da bir Cauchy dizisi olsun:

$$n, l \longrightarrow \infty \text{ için } \|u_n - u_l\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_l\|_{L_p}^p \longrightarrow 0.$$

Bu durumda $\{D^\alpha u_n\}$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, $L_p(\Omega)$ da bir Cauchy dizisi olur:

$$n, l \longrightarrow \infty \text{ ise } \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_l\|_{L_p} \longrightarrow 0.$$

$L_p(\Omega)$ bir tam uzay olduğundan bir u_α , $0 \leq |\alpha| \leq m$ fonksiyonu vardır öyleki $n \longrightarrow \infty$ için $D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha$, $L_p(\Omega)$ da yakınsar. Özel olarak, $\alpha = 0$ alınırsa $n, l \longrightarrow \infty$ için $\|u_n - u_l\|_{L_p} \longrightarrow 0$ olur. O halde $L_p(\Omega)$ tam olduğundan $u_n \longrightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in L_p(\Omega)$ vardır. Diğer türevlerde benzer şekilde gösterilebilir.

Diğer taraftan $L_p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$ olduğundan u_n fonksiyonları $T_{u_n} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonunu tanımlar:

Her $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|T_{u_n}(\Phi) - T_u(\Phi)| \leq \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)| |\Phi(x)| dx \leq \|\Phi\|_{p'} \|u_n - u\|_p$$

yazılabilir. Burada p' , p nin üstel eşleniğidir. Bu nedenle her $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için $n \rightarrow \infty$ iken $T_{u_n}(\Phi) \rightarrow T_u(\Phi)$ ya yakınsar. Benzer şekilde her $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ için $T_{D^{\alpha}u_n}(\Phi) \rightarrow T_{u_{\alpha}}(\Phi)$ olur. O halde

$$T_{u_{\alpha}}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^{\alpha}u_n}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^{\alpha}\Phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^{\alpha}\Phi)$$

bulunur. Böylece $u \in W^{m,p}(\Omega)$ olduğunda $u_{\alpha} = D^{\alpha}u$ olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$ olduğundan $W^{m,p}(\Omega)$ tamdır yani Banach uzayıdır.

Eğer $p = 2$ alınırsa $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ elde edilir. O halde, $H^m(\Omega)$, m . mertebeye kadar genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ dan olan fonksiyonlar uzayını göstermektedir:

$$H^m(\Omega) = \{u : u \in L_2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L_2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

■

Teorem 1.6 $H^m(\Omega)$ uzayı

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} f D^{\alpha} \bar{g} dx \quad (1.4)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, (Mikhailov 1978).

Bunun için $H^m(\Omega)$ nın (1.4) iç çarpımı tarafından üretilen

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 dx} \quad (1.5)$$

normuna göre tam olduğunu göstermemiz gerekir.

f_k , ($k = 1, 2, \dots$) $H^m(\Omega)$ ' nin elemanlarından oluşan bir Cauchy dizisi olsun:

$$\|f_s - f_k\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f_s - D^{\alpha} f_k|^2 dx \rightarrow 0 ; k, s \rightarrow \infty.$$

Bu durumda, her α , $|\alpha| \leq m$ için $k, s \rightarrow \infty$ iken

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha} f_s - D^{\alpha} f_k|^2 dx \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

yazılabilir.

Özel olarak $\alpha = 0$ alırsa,

$$\int_{\Omega} |f_s - f_k|^2 dx \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $L_2(\Omega)$ uzayının tamlığı, f_k ($k = 1, 2, \dots$) dizisinin yakınsadığı bir $f \in L_2(\Omega)$ fonksiyonun varlığını gösterir. Ayrıca (1.6)' dan her α , $|\alpha| \leq m$ için $D^\alpha f_k$, ($k = 1, 2, \dots$) dizisinin yakınsadığı $f^\alpha \in L_2(\Omega)$ fonksiyonun varlığı görülür.

Tüm $f_k(x)$ fonksiyonlarının m .mertebeeye kadar genelleşmiş türevleri L_2 ' ye ait olduğundan her α , $|\alpha| \leq m$ ve her $g \in C_0^m(\bar{\Omega})$ için

$$(f_k, D^\alpha g)_{L_2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha f_k, g)_{L_2(\Omega)}$$

yazılabilir. Bu özdeşlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa f^α 'nin f 'in α ' ncı genelleşmiş türevi olduğunu buluruz. Böylece $f \in H^m(\Omega)$ ve $\|f_k - f\|_{H^m(\Omega)} \rightarrow 0$, $k, s \rightarrow \infty$ olup ispat tamamlanır.

1.3.4 Yoğun Küme

X bir normlu uzay ve $S \subset X$ olmak üzere, eğer her $x \in X$, S ' nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise S alt kümesi X de her yerde yoğundur denir. (Adams and Fournier 2002, s.5)

Teorem 1.7 *Bir $\bar{\Omega}$ bölgesinde sürekli olan fonksiyonların kümesi, $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ uzaylarında her yerde yoğundur. Benzer şekilde $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ kümesinde bu uzaylarda her yerde yoğundur. Ek olarak $C^\infty(\bar{\Omega})$ fonksiyonlar kümesi ve dolayısıyla $C^k(\bar{\Omega})$ kümesi, $H^m(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur, (Mikhailov 1978).*

Bu teorem, $H^m(\Omega)$ uzayında ele alınan problemleri $C^k(\bar{\Omega})$ uzayına taşıma imkanı sağlamaktadır. Diğer bir ifade ile $u \in H^m(\Omega)$ fonksiyonuna $C^k(\bar{\Omega})$ kümesinin elemanlarından oluşan bir u_k fonksiyon dizisiyle yaklaşım yapılarak hedeflenen çalışmalar yeni uzayda daha klasik bir tarzda gerçekleştirilmiş olur.

BÖLÜM 2

TERS PROBLEMLERİN TIPTAKİ UYGULAMALARI

Kinetik denklemler, seyreltik gaz dinamiğinin yanı sıra plazmalar, yarı iletkenler, nötron taşımını ve kuantum gazlarının modellenmesinde önemli bir rol oynar. Ayrıca bu denklemler ile integral geometri problemleri arasında sıkı bir ilişki vardır. Bir çok integral geometri problemi, kinetik denklemler için ters problemlere indirgenebilmektedir. İntegral geometri problemleri ise bilgisayarlı tomografinin matematiksel alt yapısını oluşturmaktadır. Bu bölümde, Bertero and Piana (2006) eseri esas alınarak bu tür problemlerin tıpta ortaya çıkan uygulamalarına yer verilmiştir.

2.1 BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ

Tıptaki görüntüleme teknikleri, insan organlarının ve biyolojik sistemlerin analizi için güçlü bir araçtır. Bu teknikler; farklı tomografi türlerinden, farklı mikroskopi türlerine kadar çeşitlilik gösterir. Bunların ortak özelliği, veri ile bilinmeyen nesneyi ilişkilendiren bir matematik modele ve buradaki denklemlerin çözümü için sayısal yöntemlere ihtiyaç duymalarıdır. Bu problemler genellikle ters problemler olarak adlandırılır ve temel özelliği Hadamard anlamında kötü konulmuş olmasıdır. Bu nedenle çözümleri özel bir dikkat gerektirir.

Tıbbi görüntülemede temel bir gereklilik, görüntülenecek dokuların özellikleri ile tıbbi cihazlar tarafından sağlanan veriler arasında doğrusal bir ilişkinin bulunmasıdır. Günümüzde kullanılan cihazlar, uygulanan tüm algoritmalar böyle bir varsayıma dayanmaktadır. Çünkü bilgisayarlar artan güçlerine rağmen sadece doğrusal problemler için büyük ölçekli problemlerin çözümünü elde edebilmektedir. Bu noktada radyasyon-vücut etkileşiminin daha doğru bir tanımını sağlayan doğrusal olmayan modellerin araştırılması önemli bir konudur.

Görüntü işlemenin matematiğindeki nesne, bir hacime dağılan ve dolaylı ölçümlerle tahmin edilmesi gereken bir özelliktir; bunu $x \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $f(x)$ ile gösterelim; bu

fonksiyonun bir fonksiyon uzayına (örneğin Hilbert uzayına) ait olduğu kabul edilir. Diğer taraftan görüntü (g ile gösterelim), görüntüleme cihazı tarafından sağlanan ve nesneyi en iyi temsil ettiği kabul edilen Hilbert uzayında bir ölçümdür. g görüntüsü, ζ ile gösterilen parametrelerin bir fonksiyonudur. Bu parametreler farklı fiziksel anlam taşıyabilirler. X-ışını bilgisayarlı tomografide, bu parametreler dedektörün konumunu ve gelen radyasyonun yönünü karakterize eder.

Mikroskopi durumunda ise nesnenin hacmindeki bir noktanın kordinatları ile tanımlanabilirler. Birinci durumda elde edilen üç boyutlu görüntü, hacmin her bir bölümü için bir tane olmak üzere bir dizi sinogramdır; ikinci durumda nesnenin “bulanık” bir versiyonudur.

Görüntü oluşturma sürecinin temelini teşkil eden, nesne ile görüntü arasındaki ilişkinin bir matematik modeli elde edilebilir. Böyle bir sürecin en genel temsili aşağıdaki lineer olmayan integral denklemiyle verilir:

$$g(\zeta) = \int h(\zeta, x, f(x))dx, \quad (2.1)$$

burada h tüm bileşenlerine göre sürekli bir fonksiyondur. Bu denklem direkt problemin çözümünü verir. Daha açık bir ifadeyle verilen bir f nesnesine ilişkin, g verileri için çözülmesi gereken problemidir. Bu problem iyi konulmuş olduğundan f 'e bir sürekli bağımlılık söz konusudur, yani çözüm vardır, tektir, verilere sürekli bağımlıdır.

Ters problem veri ve çözümün rolleri değiştirilerek elde edilir. Böyle bir durumda verilen bir g görüntüsünden f nesnesinin bulunması gerekir.

(2.1)' in çözümü hem teorik hemde pratik açıdan çok zordur. Böyle lineer olmayan bir integral denklem için genel bir teori yoktur; her problem özel analiz gerektirir. Ayrıca problem kötü konulmuş olabilir.

2.2 ELEKTRİKSEL EMPEDANS TOMOGRAFİ (EET)

EET temelindeki ters problem, sınırdaki elektriksel akımları ve voltaj ölçümleri verilen bir vucudun içindeki elektriksel özelliklerin görüntülenmesi problemidir. Dahili elektriksel özelliklerin yararlı olduğu tıbbi problemlere örnek olarak; akciğer pulmaner embolilerinin veya kan pıhtılaşmalarının, kalp fonksiyonlarının ve meme kanserinin tahribatsız şekilde saptanması verilebilenir.

Burada Ω bölgesindeki u elektriksel potansiyeli aşağıdaki sınır değer problemini sağlar:

$$\nabla \cdot \gamma(x, w) \nabla u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\gamma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = j(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

burada

$$\gamma(x, w) = \sigma(x, w) + iw\epsilon(x, w),$$

olup σ elektriksel iletkenliği, i sanal birimi, w uygulanan akımın açısal frekansını, ϵ elektriksel geçirgenliği, j yüzey akım yoğunluğunu ve ν iç birim normal vektörü göstermektedir. Bu Neumann Problemi, γ için genel koşullar altında, yük korunumunun sağlanması ve $\int_{\partial\Omega} u$ integrali için bir seçim yapılması şartıyla iyi konulmuştur. Buradaki ters problem daha karmaşık olup yüzeydeki voltaj ve akım arasındaki Dirichlet-Neumann dönüşümü bilindiğinde γ 'nın belirlenmesi problemi olarak ifade edilir.

2.3 OPTİK TOMOGRAFİ

Optik tomografi 700 ile 1000 nm arasındaki kızılötesi bantta ışık kullanarak ışık iletiminin sınır ölçümlerinden doku absorpsiyonu gibi optik katsayıların görüntülerini elde etmeyi amaçlayan fonksiyonel tıbbi görüntüleme yöntemidir. Bu tekniğin temel tıbbi uygulama alanı, beyin fonksiyonlarının izlenmesidir. Ayrıca beyin ve meme kanserlerinin saptanması ile ilgili olarak yapısal görüntülerin elde edilmesidir. Optik tomografinin matematiksel modeli foton transport teorisi için bir integro diferansiyel denkleme dayanmaktadır. Bu denklem frekans bölgesinde aşağıdaki eliptik denkleme indirgenir:

$$\nabla \cdot (A \nabla \hat{\Phi}) - (B + iC) \hat{\Phi} = \hat{q}.$$

Burada $\hat{\Phi}$ ve $\hat{q}$ sırasıyla izotropik foton yoğunluğu Φ ve kaynak dağılımını ifade eden uzay ve zamanın bir fonksiyonu olan q 'nin Fourier dönüşümleridir. A ve B doku soğurumu ve saçılım özellikleri ile ilgili katsayılardır, C ışık hızının tersidir. Optik tomografideki ters problem, C verildiğinde A ve B 'nin belirlenmesi ve iki farklı frekans için sınırlardaki verinin tamamlanmasıdır.

2.4 MİKRODALGA TOMOGRAFİ (MT)

MT; dokuların elektriksel parametrelerini, saçılan elektromanyetik alanların ölçümlerden elde edilmesini amaçlayan yapısal bir görüntüleme tekniğidir.

Bu düşük çözünürlüklü yüksek kontrastlı yöntem, özellikle mamografideki gibi düşük bir invazivite gerektiğinde ve kemik iliği kanserinin tanısında olduğu gibi kanserli dokular kırılma indeksinde önemli değişikliklere neden olduğundan özellikle yararlıdır. Matematiksel bir açıdan Mikrodalga Tomografi' nin iki boyutlu durumundaki tasviri saçılım problemiyle verilir, 3 boyutlu durumda ise Maxwell denklemi için bir ters problemle verilir.

2.5 MANYETOENSEFALOGRAFİ (MEG)

MEG, hem sağlıklı hemde epilepsi ve disleksiden etkilenen hastalar için özellikle işitsel ve görsel korteks çalışmasında serebral fonksiyonel davranışı araştırmak amacıyla, nöral akımlarla ilgili zayıf manyetik alanları ölçen bir beyin görüntüleme tekniğidir.

Diğer fonksiyonel yöntemlerle (PET, SPECT, FMRI) ile karşılaştırıldığında (MEG) çok düşük yoğunluklu ve yüksek zamansal çözünürlük ile karakterize edilir, bu da bize fizyolojik tepkilerin zamansal hiyerarşisi hakkında bilgi edinmemize yardımcı olur.

MEG için direkt problem, verilen sürekli $J(r)$ akımının, $B(r)$ manyetik alanının hesaplanmasıdır. Burada $J(r)$ ve $B(r)$ aşağıdaki Biot-Savort yasası ile verilmiştir:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} J(r') \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dr'.$$

Burada Ω insan beynine karşılık gelen sınırlı bir alandır. MEG ters problemi Hadamard anlamında kötü konulmuş olup bir lineer olmayan problemidir.

2.6 X-RAY TOMOGRAFİ

X ışını yayan bir S kaynağımızın olduğunu kabul edelim. Bu kaynaktan çıkan ışınlar görüntülenecek cisimden geçer ve çıkışta yoğunluğu bir D dedektörü tarafından ölçülür. Cisim boyunca X ışınının zayıflaması aşağıdaki basit modelle tanımlanır:

$f(x)$ fonksiyonu x noktasındaki zayıflama katsayısı olsun. Bu durumda u , S ve D ' yi birleştiren L doğrusu boyunca bir kordinat olmak üzere x noktasındaki yoğunluk kaybı şöyle verilir;

$$\frac{dI}{du}(x) = -f(x)I(x),$$

burada I , D tarafından ölçülen yoğunluktur.

O halde eğer I_0 , S tarafından yayılan yoğunluk ise bu durumda

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_L f(x) dx \right\},$$

yazılabilir. Buradan görüldüğü ki yayılan ve tespit edilen radyasyon yoğunlukları arasındaki oranın logaritması zayıflama katsayısının integraline eşittir:

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \int_L f(x) dx.$$

Bu $S - D$ sistemi iki paralel doğru üzerinde hareket ettirilerek görüntülenecek düzlem tanımlanır ve tüm noktalarda yoğunluk ölçülerek bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonunun projeksiyonu elde edilir. Daha açık olarak eğer θ , $S - D$ sisteminin hareket yönünde bir birim vektör; S , L ' nin kordinat sisteminin başlangıcından uzaklığı ve θ' dik yöndeki birim vektör ise bu durumda f ' nin θ yönündeki projeksiyonu

$$(P_\theta f)(s) = \int f(s\theta + u\theta') du_x.$$

ile verilir.

$S - D$ sistemi döndürülerek ve tüm mümkün açılarda lineer tarama tekrar edilerek, mümkün olan tüm projeksiyonlar elde edilir ve sonuç olarak f fonksiyonunun 2-boyutlu Radon dönüşümü elde edilir:

$$f : (Rf)(s, \theta) = (P_\theta f)(s).$$

Bunlar X ışını bilgisayarlı tomografi verileri olup yukarı ifade edilen doğrusal ve açısal taramanın sonucunda elde edilmiştir. O halde, f fonksiyonunu elde etmek için

$$g(s, \theta) = (Rf)(s, \theta),$$

doğrusal denklemi çözülmelidir. Burada $g(s, \theta)$ ölçüm verileridir. Bu problem, Radon tarafından 1917 yılında çözülmüştür. 2 boyutlu durumda

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} P \int_{R^1} \frac{1}{x \cdot \theta - s} \frac{\partial g}{\partial s}(s, \theta) ds d\theta$$

yazılabilir. Burada P baş değerdir. Bu formül açıkça gösteriyorki Radon dönüştürümünün tersi kötü konulmuştur. Çünkü gürültülü verilerin türevine ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca filtrelenmiş geri projeksiyon algoritması ilk olarak Bracewell ve Riddle (1967) tarafından radyo astronomisinde tanımlanmış ve şu anda tıbbi görüntülemede yaygın olarak kullanılmaktadır. Aslında bu formülün zekice bir uygulamasıdır.

3-boyutlu görüntü farklı düzlemlerde yani görüntü düzlemine dik z yönünde tarama yapılarak önceki işlemlerin tekrarlanmasıyla elde edilir. Bu nedenle problemin verileri $S - D$ sisteminin konumunu karakterize eden $\{s, \theta, z\}$ değişkenlerine bağlıdır. Bu veriler bilgisayarlı tomografi tarayıcısından elde edildiğinden f' nin görüntüsü olarak adlandırılır. Verilen bir z için g' nin $\{s, \theta\}$ düzlemindeki temsiline sinogram denir.

2.7 FLORESAN MİKROSKOBİ

Yaşayan hücrelerin araştırılması için kullanılan bir tekniktir. Hücre bir floresan işaretleyici ile belirlenir ve 3-boyutlu görüntüsü optik kesitleme olarak bilinen bir teknik vasıtasıyla oluşturulur.

Tüm durumlarda 3D görüntü, farklı odak düzlemlerine karşılık gelen iki boyutlu görüntülerinin bir dizisi ile geometrik optik sayesinde dedektörün bulunduğu görüntü düzleminin noktaları ile görüntülenecek nesnenin bölümünün bulunduğu odak düzleminin noktaları arasında birebir eşleme söz konusudur. Bu eşleme nedeni ile görüntü düzleminin bir noktasını odak düzleminin bir noktası ile özdeşleştirebiliriz. Bu şekilde 3D görüntü X' in bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Ancak bir noktadaki görüntü sadece odak düzlemine karşılık gelen noktadan değil, hem odak düzlemindeki hem de diğer düzlemlerdeki komşu noktalar kullanılarak oluşturulur. Sonuç olarak görüntü ve nesne arasındaki bir integral ilişkisi söz konusudur.

Bazı özel kabuller altında $g(x)$ görüntüsü $f(x)$ nesnesi ile bir noktasal kaynağın görüntüsü olan $h(x)$ fonksiyonunun konvolüsyon çarpımı olarak tanımlanır:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} h(x - x') f(x') dx'. \quad (2.2)$$

Sonuç olarak bir nesnenin görüntüsünün elde edilmesi problemi, (2.2) konvolüsyon denkleminin çözümüne denktir. Bu problem kötü konulmuş bir problemidir.

BÖLÜM 3

KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI DÜZ PROBLEMLER

3.1 NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİ

Transport denklemler 1930'lu yıllardan itibaren fisyon ve füzyon reaktörlerinin inşa edilmesi gibi teknolojideki ihtiyaçlar nedeniyle yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Bu denklemlerin yapısı, klasik matematiksel fizikteki denklemlerden (elektromagnetik teori gibi) daha farklı ve daha karmaşıktır. Bunun iki temel sebebi vardır (Case and Zweifel 1967):

- i) Kapalı formda çözülebilen problemler sınıfı son derece sınırlıdır. Aslında kapalı formdaki çözümler sadece çok basit ve idealize edilmiş durumlar için mümkündür. Bu nedenle pratik problemler için farklı, çoğu zamanda kontrolsüz yaklaşımlar uygulanmıştır.
- ii) Klasik sınır değer problemleri ile ilgili iyi bilinen fikir ve yöntemler bu problemlere aktarılırken dikkatli olunması gerekir.

Lineer transport denklemler, ışımsal aktarım, nötron difüzyonu plazma teorisi, ses yayılım teorisi gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır. Tarihsel olarak ilk çalışmalar ışımsal aktarım (radyatif transfer) ile ilgilidir. Bu denklemler basit bir nötron difüzyon durumu ile ortaya çıkanlarla aynıdır.

Nötron transport teorisi geliştirilirken, ilk adım nötron dağılımının ifade edileceği büyüklükleri tanımlamaktır. Burada hiçbir kuvvetin söz konusu olmadığı bu nedenle nötronlar arasında herhangi bir çarpışmanın ortaya çıkmadığı kabul edilmektedir. Diğer bir ifade ile nötronlar daha çok ideal bir gaz gibi davranmaktadır. Onların dağılımı, tam olarak tek parçacıklı dağılım fonksiyonu $\psi(r, v, t)$ ile ifade edilmektedir ve açısal yoğunluk olarakta adlandırılmaktadır.

Bu bölümde, olası karışıklıkları önlemek amacıyla Case and Zweifel (1967) de yer alan gösterim ve terminoloji orijinaline sadık kalınarak aynen kullanılacaktır.

Burada $\psi(r, v, t)d^3rd^3v$, r noktasında d^3r hacim elemanındaki nötronların sayısını gösterir. Bu nötronların t anındaki hızları d^3v hız uzayında yer alır.

Aşağıda, N sembolü, nötron hızının yönündeki birim vektörü göstermektedir. Daha açık olarak, v skaler nötron hızı olmak üzere $N = \frac{v}{\nu}$ ’dır. Değişken olarak v yerine N ’nin seçimi tek hızlı nötron taşınım problemleri için daha uygun olur. Farklı kaynaklardan ortama giren ve mevcut nötron popülasyonundan, bağımsız olan nötronlar bir açısal kaynak yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilir. Burada $q = (r, v, t)d^3rd^3vdt$, $t + dt$ zaman aralığında r noktasında d^3r ’ye, v ’de d^3v ’ye giren nötronların sayısı olarak tanımlanır.

Eğer söz konusu bölgede, atom çekirdeği varsa bu durumda nötronlar çarpışmalara maruz kalacaktır. v hızında ki bir nötron için çarpışmalar arasındaki ortalama serbest yolun $l(v)$ olduğunu varsayalım. Bu hızdaki bir nötron, saniyede ortalama $\frac{\nu}{l}$ çarpışmasına maruz kalacağından, r konumunda ve v hızındaki nötronlar için çarpışma sayısı:

$$\frac{\nu}{l(r, v)}\psi(r, v, t)d^3rd^3v$$

dır. Burada nükleer reaktörlerin uzun vadeli reaktivite etkileri içeren problemlerle ilgilenmediğimiz için l zamana göre sabit alınmıştır. Ters ortalama serbest yola makroskobik kesit denir ve $\sigma(r, v)$ ile gösterilir:

$$\sigma(r, v) = l^{-1}(r, v).$$

Diğer yandan, bir çarpışma olduğunda $c(r, v)$ ikincil nötronlar açığa çıkar. Daha açık bir ifade ile $c(r, v)$, v hızındaki bir nötron tarafından r ’de üretilen çarpışmada açığa çıkan ikincil nötronların ortalama sayısıdır. Açık ki bir soğurma çarpışmasında $c = 0$, bir saçılım çarpışmasında $c = 1$, bir fisyon çarpışmasında $c = \nu$, bir fisyon çarpışmasında üretilen nötronların sayısıdır. Verilen bir r noktasında c ’nin değeri r ’de materyale ve kesitlerine bağlıdır.

Bu bölümde

$$\frac{\partial \psi(r, v, t)}{\partial t} + v \cdot \nabla \psi(r, v, t) + \nu \sigma(r, v) \psi(r, v, t) = q(r, v, t) + \int d^3v' \sigma v' \psi(r, v', t) \quad (3.1)$$

nötron transport denklemi ele alınacaktır.

Problem 3.1 (3.1) denkleminin

$$\psi(r, N, 0) = \phi_0,$$

$$\psi(\rho, N, t) = \phi_1, \quad \rho \in S, \quad n_0 \cdot N < 0,$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım:

Yukarıda yer alan $\sigma(N' \cdot N, r, \nu)$ fonksiyonu yerine

$$f(N' \cdot N, r, \nu) = \frac{\sigma(N' \cdot N, r, \nu)}{c(r, \nu)\sigma(r, \nu)},$$

şeklinde tanımlı bir $f(N' \cdot N, r, \nu)$ fonksiyonunun alınması daha uygun olur. Eğer

$$\begin{aligned} c(r, \nu)\sigma(r, \nu) &= \int dN \sigma(N' \cdot N, r, \nu) \\ &= \int dN' \sigma(N' \cdot N, r, \nu), \end{aligned}$$

denklemini göz önünde bulundurulursa f ' in birime normalize olduğu görülür.

Buna göre tek hızlı transport denklemi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(r, N, t)}{\partial t} + \nu N \cdot \nabla \psi + \nu \sigma(r, \nu) \psi &= q(r, N, t) + \nu \sigma(r, \nu) c(r, \nu) \\ &\times \int \psi(r, N', t) f(N' \cdot N, r, \nu) dN'. \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1 *S yüzeyi ile sınırlı uzayın V hacminde nötron açısal yoğunluğu aşağıda verilenler ile tek türlü belirlenir:*

- i) V' deki başlangıç açısal yoğunluğu
- ii) V' deki kaynaklar
- iii) S yüzeyi üzerinde ki gelen açısal yoğunluk

İspat. ($c \leq 1$) Kabul edelim ki ψ_1 ve ψ_2 transport denkleminin verilen koşullarını sağlayan iki çözümü olsun. Bu durumda $\psi = \psi_1 - \psi_2$ olmak üzere ψ , V bölgesinde

$$\frac{\partial \psi(r, N, t)}{\partial t} + \nu N \cdot \nabla \psi + \nu \sigma \psi = \nu \sigma(r) c(r) \int \psi(r, N', t) f(N' \cdot N, r) dN', \quad (3.2)$$

denklemini ve

$$\psi(r, N, 0) = 0, \quad r \in V, \quad (3.3)$$

$$\psi(\rho, N, t) = 0, \quad \rho \in S, \quad n_0 \cdot N < 0, \quad (3.4)$$

koşullarını sağlar. Amacımız $\psi \equiv 0, r \in V$ olduğunu göstermek. Şimdi (3.2), denklemini

ψ ile çarpıp integralini alalım:

$$\begin{aligned} \int d^3r dN \int_0^{t_0} \frac{1}{2} (\psi^2)_t dt &= \int_0^{t_0} -\nu N \frac{1}{2} \nabla_{x_i} (\psi^2)_t dt \\ &\quad - \int_0^{t_0} dt \int dN \int d^3r \nu \sigma \psi^2 \\ &\quad + \int_0^{t_0} dt \int dN \int d^3r \int dN' \nu \sigma c \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int d^3r dN \frac{1}{2} \{ \psi^2(r, N, t_0) - \psi^2(r, N, 0) \} &= - \int_0^{t_0} dt \int dN \int dS_{n_0} \cdot N \frac{1}{2} \psi^2(\rho, N, t) \nu \\ &\quad - \int_0^{t_0} dt \int dN \int d^3r \nu \sigma \psi^2(r, N, t) \\ &\quad + \int_0^{t_0} dt \int dN \int d^3r \int dN' \nu \sigma(r) c(r) \\ &\quad \times f(N' \cdot N, r) \psi(r, N, t) \psi(r, N', t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Sağ taraftaki birinci terim Gauss teoreminin uygulaması olarak elde edilir.

Diğer yandan, (3.3) şartından dolayı (3.5) denkleminin sol tarafı

$$\int d^3r dN \frac{1}{2} \psi^2(r, N, t_0) \geq 0 \quad (3.6)$$

olarak bulunur ve dikkat edilirse bu terim pozitiftir.

Şimdi (3.5)' in sağ tarafının ise pozitif olmayacağını yani sıfır veya negatif olabileceğini göstereceğiz. Bu da aslında ispatın temelini oluşturmaktadır.

Sağ taraftaki birinci terimin pozitif olmadığı açıktır çünkü ψ , $n_0 \cdot N$ pozitif olmadığı durumda sıfır olur.

(3.5)'in sağ tarafındaki son terimi düşünelim. Bunun için

$$\int \int dN dN' [\psi(r, N', t) - \psi(r, N, t)]^2 f(N' \cdot N, r) \geq 0, \quad (3.7)$$

ifadesini ele alalım. Kare ifadeyi açarak ve f ' nin normalize edildiği düşünülerek

$$\int f(N' \cdot N, r) dN' = \int f(N' \cdot N, r) dN = 1, \quad (3.8)$$

(3.7) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int dN \psi^2(r, N, t) \geq \int \int dN dN' \psi(r, N', t) f(N' \cdot N, r) \psi(r, N, t). \quad (3.9)$$

Böylece (3.5)' nin sağ tarafındaki üçüncü terim aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$3.terim \leq \int_0^{t_0} dt \int d^3r c(r) \nu \sigma(r) \int \psi^2(r, N, t) dN. \quad (3.10)$$

(3.5) denkleminin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler birleştirilerek sol tarafın sıfırdan daha büyük veya sıfıra eşit olduğu, sağ tarafın ise iki terim toplamı olduğu görülür:

$$\begin{aligned} \text{sağ taraf} &\leq - \int_0^{t_0} dt \int dN \int dS \nu_{n_0} \cdot N \frac{1}{2} \psi^2(\rho, N, t) \\ &\quad - \int_0^{t_0} dt \int dN \int d^3r [1 - c(r)] \nu \sigma(r) \psi^2(r, N, t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Daha önce ifade edildiği gibi birinci terim pozitif değildir. O halde ikinci terim de pozitif değildir çünkü $c(r) \leq 1$ alınmıştır. Böylece (3.5)'in sağ tarafının tamamı pozitif olmayan bir ifade iken, sol taraf negatif olmayan bir ifadedir. Dolayısıyla her iki tarafta özdeş olarak sıfır olur. Sonuç olarak r ve t için verilen integrasyon bölgeleri keyfi olduğundan

$$\psi(r, \Omega, t) \equiv 0, \quad r \in V, \quad t \geq 0, \quad (3.12)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin sonucu $c(r) \leq 1$ kısıtlaması dışında oldukça geneldir. Bu kısıtlama da kolayca ortadan kaldırılabilir.

Şimdi

$$c(r) \leq M < \infty, \quad r \in V,$$

olarak alalım. Eğer tekrar iki farklı çözümün farkını, ψ ile gösterirsek ve

$$\Phi(r, N, t) = e^{-\gamma v t} \psi(r, N, t),$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlarsak

$$\begin{aligned} &\partial \Phi(r, N, t) / \partial t + \nu N \cdot \nabla \Phi + \nu [\sigma(r) + \gamma] \Phi(r, N, t) \\ &= \nu c(r) \sigma(r) \int \Phi(r, N', t) f(N' \cdot N, r) dN', \end{aligned} \quad (3.13)$$

denklemini (3.3) ve (3.4) şartlarıyla birlikte sağlar.

Daha sonra yukarıda yapılan işlemler aynen tekrar edilirse

$$\frac{1}{2} \int d^3r \int dN \Phi^2(r, N, t_0) = -\frac{v}{2} \int_0^{t_0} dt \int dN \int dS n_0 \cdot N \Phi^2(\rho, N, t) - \Lambda \quad (3.14)$$

elde edilir. Burada

$$\Lambda \geq \nu \int_0^{t_0} dt \int d^3r \{ \sigma(r)[1 - c(r)] + \gamma \} \int dN \Phi^2(r, N, t) \quad (3.15)$$

olup açıkça γ yeterince büyük seçilerek $\Lambda \geq 0$ olur. Böylece teorem tüm $c < \infty$ ve $t < \infty$ için ispatlanır. Çünkü $\Phi(r, N, t) = 0$ olduğunda $t < \infty$ içinde $\psi(r, N, t) = 0$ bulunur. ■

3.2 KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde, Amirov (2001) de verilen bazı düz problemlerin çözümlerinin tekliği araştırılacaktır. Burada $Q \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ ($n \geq 1$), (x, v, t) değişkenlerinin bir bölgesi, $(x, v) \equiv p \in \Omega = D \times G$ ve Ω , sınırı C^1 den olan sınırlı bir bölge, $t \in (0, T)$; $\bar{n}$, ∂Q ya ait birim dış normal vektör olup $\bar{n} = (n_x, n_v, n_t)$, $n_x = (n_{x_1}, \dots, n_{x_n})$, $n_v = (n_{v_1}, \dots, n_{v_n})$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$ ve

$$\Gamma_- = \{(p, t) : (p, t) \in \Gamma, (v, n_x) + (f, n_v) < 0\},$$

olarak verilmiştir.

İlk olarak, Q bölgesinde

$$u_t + \langle v, \nabla_x u \rangle + \langle f, \nabla_v u \rangle + \beta u = \mu \quad (3.16)$$

denklemini ele alalım. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sembolü $\mathbb{R}^n$ de skaler çarpımı göstermektedir ve $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dir.

Problem 3.2 (3.16) denkleminin Q bölgesinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir çözümünü bulalım:

$$u = \varphi_1(p, t), (p, t) \in \Gamma_-, \quad (3.17)$$

$$u(p, 0) = \varphi_2(p). \quad (3.18)$$

Teorem 3.2 Kabul edelim ki $f \in C^1(\bar{Q})$ ve $\beta \in C(\bar{Q})$ olsun. Bu durumda Problem 3.2 $C^1(Q)$ uzayında en çok bir çözüme sahiptir.

İspat. Problemin çözümünün tekliğini göstermek için ilgili homojen problemi ele alalım:

$\mu = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ olsun. Ayrıca

$$2\lambda > \max_{(p,t) \in Q} \left(\sum_{i=1}^n |f_{i_{v_i}}| + 2|\beta| \right) \quad (3.19)$$

olmak üzere $z = u \exp(-\lambda t)$ şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım.

Bu durumda z fonksiyonu için elde edilen

$$\begin{aligned} z_t &= u_t e^{-\lambda t} + u(-\lambda) e^{-\lambda t} = u_t e^{-\lambda t} - \lambda z, \\ z_{x_i} &= u_{x_i} e^{-\lambda t}, \quad z_{v_i} = u_{v_i} e^{-\lambda t}, \quad u = z e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$u_t = (z_t + \lambda z) e^{\lambda t}, \quad u_{x_i} = z_{x_i} e^{\lambda t}, \quad u_{v_i} = z_{v_i} e^{\lambda t},$$

ve buna bağlı olarak (3.16) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} & u_t + \langle v, \nabla_x u \rangle + \langle f, \nabla_v u \rangle + \beta u \\ &= (z_t + \lambda z) e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} e^{\lambda t} + \beta u \\ &= (z_t + \lambda z + \langle v, \nabla_x z \rangle + \langle f, \nabla_v z \rangle) e^{\lambda t} + \beta z e^{\lambda t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup

$$z_t + \langle v, \nabla_x z \rangle + \langle f, \nabla_v z \rangle + (\lambda + \beta) z = 0, \quad (3.20)$$

denklemini

$$u = z e^{\lambda t} = 0, \quad (p, t) \in \Gamma_-, \quad (3.21)$$

$$u(p, 0) = z(p, 0) = 0 \quad (3.22)$$

ve koşulları elde edilir.

(3.20) eşitliğini $2z$ ile çarpalım:

$$2z(z_t) + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} 2z + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} 2z + 2(\lambda + \beta) z^2 = 0,$$

buradan

$$(z^2)_t + \sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} + \sum_{i=1}^n ((f_i z^2)_{v_i} - f_{i_{v_i}} z^2) + 2(\lambda + \beta) z^2 = 0,$$

ve dolayısıyla

$$(z^2)_t + \sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} + \sum_{i=1}^n (f_i z^2)_{v_i} + (2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}}) z^2 = 0$$

elde edilir. Son eşitlik Q bölgesi üzerinde integrallenirse ve (3.21)-(3.22) şartları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_Q (z^2)_t dQ + \int_Q \sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} dQ + \int_Q \sum_{i=1}^n (f_i z^2)_{v_i} dQ \\ & + \int_Q (2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}}) z^2 dQ = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $Q = D \times G \times (0, T)$ tanımını göz önünde bulundurarak Gauss-Green formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_D \int_G \int_0^T (z^2)_t dQ + \int_D \int_G \int_0^T \sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} dQ + \int_D \int_G \int_0^T \sum_{i=1}^n (f_i z^2)_{v_i} dQ \\ & + \int_D \int_G \int_0^T (2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}}) z^2 dQ = 0, \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} & \int_D \int_G (z^2(p, T) - z^2(p, 0)) + \int_G \int_0^T \int_{\partial D} \sum_{i=1}^n v_i z^2 n_{x_i} dS_x dv dt \\ & + \int_D \int_0^T \int_{\partial G} \sum_{i=1}^n (f_i z^2) n_{v_i} dS_v dx dt + \int_Q \left(2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} \right) z^2 dQ = 0, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & \int_D \int_G (z^2(p, T) dx dv) + \int_G \int_0^T \int_{\partial D} z^2 \langle v, n_x \rangle dS_x dv dt \\ & + \int_D \int_0^T \int_{\partial G} z^2 \langle f, n_v \rangle dS_v dx dt + \int_Q \left(2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} \right) z^2 dQ = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3.21)-(3.22) koşullarından

$$\int_Q \left(2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} \right) z^2 dQ \leq 0$$

olduğu görülmür. Son olarak, (3.19) eşitsizliğinden $z^2 = 0$ böylece $z = 0$ ve sonuç olarak $u = 0$ olarak bulunur.

Fredholm alternatif teoreminden, homojen problemin sadece sıfır çözümü olduğundan homojen olmayan problemin tek çözümü vardır. ■

Problem 3.3 Bir $\Omega = D \times G$ bölgesinde verilen

$$\langle v, \nabla_x u \rangle + \langle f, \nabla_v u \rangle + \beta u = \mu,$$

denkleminin

$$u = \varphi_1(x, v), \quad (x, v) \in \Gamma_-,$$

şartını sağlayan çözümünü bulalım.

Teorem 3.3 Kabul edelim ki $f \in C^1(\Omega)$, $\beta \in C(\bar{\Omega})$ olsun. Ayrıca bir i_0 için Ω bölgesinde $f_{i_0} > 0$ olsun. Bu durumda Problem 3.3, $C^1(\Omega)$ sınıfında en çok bir çözüme sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki $\mu = \varphi_1 = 0$ olsun. Ayrıca $z = u \exp(-\lambda v_{i_0})$ şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. Öyle ki Ω bölgesi üzerinde $f_{i_0} > 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} z_{x_i} &= u_{x_i} e^{-\lambda v_{i_0}}, \quad z_{v_i} = u_{v_i} e^{-\lambda v_{i_0}}, \\ z_{v_{i_0}} &= u_{v_{i_0}} e^{-\lambda v_{i_0}} - \lambda u e^{\lambda v_{i_0}}, \quad i \neq i_0, \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= z_{x_i} e^{\lambda v_{i_0}}, \quad u_{v_i} = z_{v_i} e^{\lambda v_{i_0}}, \\ z_{v_{i_0}} &= u_{v_{i_0}} e^{-\lambda v_{i_0}} - \lambda z, \quad (z_{v_{i_0}} + \lambda z) e^{\lambda v_{i_0}} = u_{v_{i_0}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_{i=1}^n v_i u_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i u_{v_i} + \beta u = \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} e^{\lambda v_{i_0}} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} e^{\lambda v_{i_0}} + f_{i_0} \lambda z e^{\lambda v_{i_0}} + \beta z e^{\lambda v_{i_0}} = 0$$

elde edilir. Daha sade bir ifade ile

$$\langle v, \nabla_x z \rangle + \langle f, \nabla_v z \rangle + f_{i_0} \lambda z + \beta z = 0 \quad (3.23)$$

denklemini ve Γ_- sınır parçasında

$$u = z e^{\lambda v_{i_0}} = 0, \quad (3.24)$$

yani

$$z(x, v) = 0, \quad (x, v) \in \Gamma_-,$$

elde edilir.

Şimdi (3.23) denklemini $2z$ ile çarpalım:

$$\sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} 2z + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} 2z + 2\lambda f_{i_0} z^2 + 2\beta z^2 = 0,$$

olup

$$\sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} + \sum_{i=1}^n ((f_i z^2)_{v_i} - f_{i_{v_i}} z^2) + (2\lambda f_{i_0} + 2\beta) z^2 = 0$$

elde edilir. Son eşitliğin Ω üzerinde integrali alınırsa

$$\int_D \int_G \sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} dx dv + \int_D \int_G \sum_{i=1}^n (f_i z^2)_{v_i} dx dv + \int_D \int_G \left((2\lambda f_{i_0} + 2\beta) - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} z^2 \right) dx dv = 0$$

ve dolayısıyla

$$\int_Q \int_{\partial D} \sum_{i=1}^n v_i z^2 n_x dS_x dv + \int_D \int_{\partial G} \sum_{i=1}^n f_i z^2 n_v dS_v dx + \int_D \int_G \left(2\lambda f_{i_0} + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} \right) z^2 dx dv = 0$$

bulunur.

(3.24) koşulu ve

$$2\lambda f_{i_0} > \max_{(x,v) \in D \times G} \left(\sum_{i=1}^n |f_{i_{v_i}}| + 2|\beta| \right)$$

şartı göz önünde bulundurularak

$$\int_D \int_G \left(2\lambda f_{i_0} + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} \right) z^2 dx dv \leq 0$$

eşitsizliğinden $z = 0$ olur. Sonuç olarak, $u = 0$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

Problem 3.4 (3.16) denkleminin Q bölgesinde tanımlı, (3.17) sınır şartını ve

$$u_t(p, 0) = \varphi_3(p) \tag{3.25}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulalım..

Teorem 3.4 Kabul edelim ki $f \in C^1(\bar{\Omega})$ ve $\beta \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonları t ' den bağımsız olsun. Ayrıca $\bar{\Omega}$ üzerinde $f_1 > 0$ olsun. Bu durumda Problem 3.4, $C^2(Q)$ uzayında en çok bir çözüme sahiptir.

İspat. İlk olarak $\mu = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$ olmak üzere (3.16) denkleminin ve (3.17) şartının t' ye göre türevini alalım:

$$u_{tt} + \sum_{i=1}^n v_i u_{x_i t} + \sum_{i=1}^n f_i u_{v_i t} + \beta u_t = 0,$$

$$u_t = 0, \quad (p, t) \in \Gamma_-.$$

Burada $z = u_t$ gösterimi kullanılırsa z fonksiyonunun (3.16) denklemini, (3.17) ve (3.18) şartlarını sağladığını görürüz:

$$z_t + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} + \beta z = 0,$$

$$z = 0, \quad (p, t) \in \Gamma_-.$$

Buradan

$$z(p, 0) = u_t(p, 0) = 0$$

olup Teorem 3.2 yardımıyla ispat tamamlanır. ■

Problem 3.5 Q bölgesinde

$$Lu + \beta u + \int_G K(p, v', t) u(x, v', t) dv' = \mu \quad (3.26)$$

denkleminin

$$u = \varphi_1(p, t), \quad (p, t) \in \Gamma_-, \quad (3.27)$$

$$u(p, 0) = \varphi_2(p) \quad (3.28)$$

koşullarını sağlayan bir çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Teorem 3.5 Kabul edelim ki $f \in C^1(\bar{Q})$ ve $\beta, K \in C(\bar{Q})$ olsun. Bu durumda Problem 3.5, $C^1(Q)$ uzayında en çok bir çözüme sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki $\mu = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ olsun. Yeni bir bilinmeyen fonksiyon $z = ue^{-\lambda t}$ tanımlayalım. Böylece

$$u_t = (z_t + \lambda z) e^{\lambda t}, \quad u_{x_i} = z_{x_i} e^{\lambda t}, \quad u_{v_i} = z_{v_i} e^{\lambda t}$$

bağıntıları kullanarak

$$Lu + \beta u + \int_G K(p, v', t)u(x, v', t)dv' = 0$$

denkleminde

$$Lz + (\lambda + \beta)z + \int_G K(p, v', t)z(x, v', t)dv' = 0$$

ve (3.27), (3.28) şartlarından

$$z = 0, (p, t) \in \Gamma_-, \quad (3.29)$$

$$z(p, 0) = 0 \quad (3.30)$$

yazılabilir. (3.26) denklemini $2z$ ile çarpalım:

$$(z^2)_t + \sum_{i=1}^n (v_i z^2)_{x_i} + \sum_{i=1}^n (f_i z^2)_{v_i} + \left(2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}}\right) z^2 + 2z \int_{Q_v} K(p, v', t)z(x, v', t)dv' = 0.$$

Bu eşitliğin Q üzerinde integrali alınırsa ve (3.29)-(3.30) şartları göz önünde bulundurulursa

$$\int_Q \left(2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}}\right) z^2 dQ + \int_Q 2z \int_{Q_v} K(p, v', t)z(x, v', t)dv' dQ = 0$$

elde edilir. Burada $2ab \geq -a^2 - b^2$ eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_Q 2z \int_{Q_v} K(p, v', t)z(x, v', t)dv' dQ &\geq \int_Q \left(-z^2 - \left(\int_{Q_v} K(p, v', t)z(x, v', t)dv'\right)^2\right) dQ \\ &\geq -\int_Q z^2 dQ - \int_Q \int_{Q_v} K^2(p, v', t)dv' \int_{Q_v} z^2(x, v', t)dv' dQ \\ &\geq -\int_Q z^2 dQ - \max_{(p, v', t) \in \bar{Q}} \{K^2\} \int_Q z^2(x, v', t)dQ \end{aligned}$$

bulunur. Burada $c = \max_{(p, v', t) \in \bar{Q}} \{K^2\}$ dir. O halde

$$\int_Q \left(2\lambda + 2\beta - \sum_{i=1}^n f_{i_{v_i}} - 1 - c\right) z^2 dQ \leq 0$$

olduğu görülür. Eğer

$$2\lambda > \max_{(p,t) \in Q} \left(\sum_{i=1}^n |f_{i_{v_i}}| + 2|\beta| + 1 + c \right)$$

olarak seçilirse $z^2 = 0$ olduğundan $z = 0$ ve böylece $u = 0$ ' dir. ■

Problem 3.6 (3.26) denkleminin Q bölgesinde tanımlı, (3.27) ve

$$u_t(p, 0) = \varphi_3(p) \tag{3.31}$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Teorem 3.6 Kabul edelim ki $f \in C^1(\bar{\Omega})$ ve $\beta, K \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonları t ' den bağımsız olsun. Ayrıca $\bar{\Omega}$ bölgesinde $f_1 > 0$ olsun. Bu durumda Problem 3.6, $C^2(Q)$ uzayında en çok bir çözüme sahiptir.

Homojen problemi ele alacağımız için $\mu = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$ olsun.

(3.26) denkleminin t ' ye göre türevi alınır ve $z = u_t$ gösterimi kullanılırsa

$$Lz + \beta z + \int_G K(p, v') z(x, v', t) dv' = 0$$

bulunur. Benzer şekilde Γ_- üzerinde $z = 0$ ve $z(p, 0) = 0$ şartlarının da sağlandığı görülür.

O halde Teorem 3.6 gereği Q bölgesinde $z = u_t = 0$ bulunur. Buna göre, problemin zamandan bağımsız olduğu görülür ve Teorem 3.3'den ispat tamamlanır.



BÖLÜM 4

KİNİTİK DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER

Bu bölümde,

$$Lu = u_t + \langle v, \nabla_x u \rangle + \langle f, \nabla_v u \rangle + \beta u = \mu$$

ve $g(p, t)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere

$$Lu + \beta u = g(p, t)\lambda(p) \quad (4.1)$$

denklemini için aşağıdaki ters problem incelenecektir.

Problem 4.1 (4.1) denkleminin Q bölgesinde tanımlı ve

$$u = \varphi_1(p, t), \quad (p, t) \in \Gamma_-, \quad (4.2)$$

$$u_t(p, 0) = \varphi_3(p) \quad (4.3)$$

şartlarını sağlayan bir (u, λ) çözümünün

$$u(p, T) = \varphi_4(p), \quad (4.4)$$

ek bilgisi yardımıyla bulunması problemini ele alalım.

Teorem 4.1 Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

i) f, β, g fonksiyonları $\bar{Q}$ bölgesinde sürekli diferensiyellenebilir olsun ve f, t' ye bağlı olmasın.

ii) $\bar{Q}'$ da $f_1 > 0$ ve $g \neq 0$ olsun.

Bu durumda Problem 4.1, en çok bir $(u, \lambda) \in C^2(\bar{Q}) \times C^1(\bar{\Omega})$ çözümüne sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ olsun. İlk olarak $u = gz$ bağıntısı ile yeni bir bilinmeyen z fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda (4.1)' den z fonksiyonu

$$Lz + g^{-1}(Lg + \beta)z = \lambda(p) \quad (4.5)$$

denklemini sağlar. Gerçekten de

$$u_t = g_t z + g z_t, \quad u_{x_i} = g_{x_i} z + g z_{x_i}, \quad u_{v_i} = g_{v_i} z + g z_{v_i}$$

eşitliklerinden

$$g_t z + g z_t + \sum_{i=1}^n v_i (g_{x_i} z + g z_{x_i}) + \sum_{i=1}^n f_i (g_{v_i} z + g z_{v_i}) + \beta g z = g(p, t) \lambda(p)$$

ve dolayısıyla

$$g \left(z_t + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} \right) + z \left(g_t + \sum_{i=1}^n v_i g_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i g_{v_i} + \beta g \right) = g(p, t) \lambda(p)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafını g^{-1} ile işleme tabi tutarsak

$$Lz + g^{-1}(Lg + \beta g)z = \lambda(p) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6)'nın t 'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lz) + \frac{\partial (g^{-1}(Lg + \beta g))}{\partial t} z + g^{-1}(Lg + \beta g)z_t = 0$$

veya daha basit bir gösterimle $h = g^{-1}(Lg + \beta g)$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lz) = -(h_t z + h z_t) \tag{4.7}$$

olur. Burada

$$\omega = z \exp(-\lambda v_1), \quad \psi = -r(t+1)$$

yardımcı fonksiyonlarından elde edilen

$$\begin{aligned} z_t &= \omega_t e^{\lambda v_1}, \quad z_{x_i} = \omega_{x_i} e^{\lambda v_1}, \\ z_{v_i} &= \omega_{v_i} e^{\lambda v_1}, \quad i \neq 1, \quad z_{v_1} = \omega_{v_1} e^{\lambda v_1} + \omega \lambda e^{\lambda v_1} \end{aligned}$$

bağıntıları yardımıyla, $\lambda > 1$ ve $r > \max_{(p,t) \in \bar{Q}} (g_t/g)^2$ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}
Lz &= z_t + \langle v, \nabla_x z \rangle + \langle f, \nabla_v z \rangle \\
&= z_t + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} \\
&= z_t + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} + f_1 z_{v_1} + \sum_{i=2}^n f_i z_{v_i} \\
&= z_t + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} + \omega_{v_1} e^{\lambda v_1} + \omega \lambda e^{\lambda v_1} + \sum_{i=2}^n f_i z_{v_i} \\
&= w_t e^{\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n v_i \omega_{x_i} e^{\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{v_i} e^{\lambda v_1} + f_1 \omega \lambda e^{\lambda v_1} \\
&= e^{\lambda v_1} \left(w_t + \sum_{i=1}^n v_i \omega_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{v_i} + f_1 \omega \lambda \right) \\
&= e^{\lambda v_1} L\omega + e^{\lambda v_1} f_1 \omega \lambda
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde (4.7) denkleminde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(Lz) &= e^{\lambda v_1} \frac{\partial}{\partial t}(L\omega) + e^{\lambda v_1} (f_1 \omega_t \lambda) = -h_t z - h z_t, \\
\frac{\partial}{\partial t}(L\omega) + f_1 \omega_t \lambda + \psi \omega &= ((\psi - h_t) z - h z_t) e^{-\lambda v_1}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. (4.8)'in her iki tarafının karesi alındığında

$$f_1^2 \omega_t^2 \lambda^2 + 2f_1 \omega_t \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t}(L\omega) + \psi \omega \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}(L\omega) + \psi \omega \right)^2 = [(\psi - h_t) z - h z_t]^2 e^{-2\lambda v_1}$$

olup $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ eşitsizliği kullanılarak

$$f_1^2 \omega_t^2 \lambda^2 + 2f_1 \omega_t \lambda \frac{\partial}{\partial t}(L\omega + \psi \omega) \leq 2((\psi - h_t)^2 z^2 + h^2 z_t^2) e^{-2\lambda v_1} \tag{4.9}$$

elde edilir. ■

f_1 'in t 'ye bağlı olmadığı dikkate alınarak

$$\left(\omega_t + \sum_{i=1}^n v_i \omega_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{v_i} \right)_t 2\lambda f_1 \omega_t$$

ifadesinden

i)

$$2\lambda \omega_{tt} f_1 \omega_t = \lambda f_1 (\omega_t^2)_t = (\lambda f_1 \omega_t^2)_t,$$

ii)

$$\begin{aligned} 2\lambda \sum_{i=1}^n v_i \omega_{x_i t} f_1 \omega_t &= \lambda \sum_{i=1}^n v_i f_1 (\omega_t^2)_{x_i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n (v_i f_1 \omega_t^2)_{x_i} - \lambda \sum_{i=1}^n v_i f_1 \omega_t^2, \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} 2\lambda \sum_{i=1}^n f_i f_1 \omega_t \omega_{v_i t} &= \lambda \sum_{i=1}^n f_i f_1 (\omega_t^2)_{v_i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n (f_i f_1 \omega_t^2)_{v_i} - \lambda \sum_{i=1}^n (f_i f_1)_{v_i} \omega_t^2, \end{aligned}$$

iv)

$$2f_1 \omega_t \lambda \psi \omega = 2f_1 \omega_t \omega \lambda \psi = \lambda f_1 (\omega^2)_t \psi = \lambda (f_1 \omega^2 \psi)_t - \lambda f_1 \psi_t \omega^2$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 2\lambda f_1 \omega_t \frac{\partial}{\partial t} (L\omega + \psi \omega) &= \lambda f_1 (\omega_t^2 + \psi \omega)_t - \lambda f_1 \psi_t \omega^2 \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^n ((v_i f_1 \omega_t^2)_{x_i} + (f_i f_1 \omega_t^2)_{v_i}) \\ &\quad - \lambda \omega_t \sum_{i=1}^n ((f_i f_1)_{v_i} + v_i f_1 \omega_t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir.

(4.10) eşitsizliği (4.9) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &f_1^2 \omega_t^2 \lambda^2 + \lambda f_1 (\omega_t^2 + \psi \omega)_t - \lambda f_1 \psi_t \omega^2 + \lambda \sum_{i=1}^n ((v_i f_1 \omega_t^2)_{x_i} + (f_i f_1 \omega_t^2)_{v_i}) \\ &\quad - \lambda \omega_t \sum_{i=1}^n ((f_i f_1)_{v_i} + v_i f_1 \omega_t) \\ &\leq 2 \left((\psi - h_t)^2 z^2 + h^2 z_t^2 \right) e^{-2\lambda v_1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

olduğu görülür. Şimdi (4.11)' in sol tarafında z fonksiyonuna geri dönelim. Bunun için

$$w = z e^{-\lambda v_1}, \quad w_t = z_t e^{-\lambda v_1},$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w_t^2 &= (z_t)^2 e^{-2\lambda v_1}, \quad w_{x_i} = z_{x_i} e^{-\lambda v_1}, \\ w_{v_i} &= z_{v_i} e^{-\lambda v_1}, \quad \omega_{v_1} = z_{v_1} e^{-\lambda v_1} + z(-\lambda) e^{-\lambda v_1}, \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(L\omega) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(w_t + \sum_{i=1}^n v_i \omega_{x_i} + \sum_{i=1}^n f_i \omega_{v_i} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(z_t e^{-\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i} e^{-\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i} e^{-\lambda v_1} - z f_1 \lambda e^{-\lambda v_1} \right) \\
&= z_{tt} e^{-\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n v_i z_{x_i t} e^{-\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n f_i z_{v_i t} e^{-\lambda v_1} - z f_1 \lambda e^{-\lambda v_1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&2\lambda f_1 z_t e^{-\lambda v_1} \left(z_{tt} e^{-\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n v_i (z_{x_i})_t e^{-\lambda v_1} + \sum_{i=1}^n f_i (z_{v_i})_t e^{-\lambda v_1} - f_1 \lambda e^{-\lambda v_1} \right) \\
&= \lambda f_1 (z_t^2)_t e^{-2\lambda v_1} + \lambda f_1 \sum_{i=1}^n v_i (z_t^2)_{x_i} e^{-2\lambda v_1} + \lambda f_1 \sum_{i=1}^n f_i (z_t^2)_{v_i} e^{-2\lambda v_1} - \lambda^2 f_1^2 (z^2)_t e^{-2\lambda v_1} \\
&= \lambda f_1 (z_t^2)_t e^{-2\lambda v_1} + \lambda \sum_{i=1}^n (f_1 v_i z_t^2 e^{-2\lambda v_1})_{x_i} - \lambda \sum_{i=1}^n f_{1x_i} v_i z_t^2 e^{-\lambda v_1} + \lambda \sum_{i=1}^n (f_1 f_i z_t^2)_{v_i} e^{-2\lambda v_1} \\
&\quad - \lambda \sum_{i=1}^n (f_1 f_i)_{v_i} z_t^2 e^{-2\lambda v_1} - \lambda^2 f_1^2 (z^2)_t e^{-2\lambda v_1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca (4.10)'nun sol tarafındaki ikinci terim için

$$\begin{aligned}
2\lambda f_1 \omega_t \psi \omega &= 2\lambda f_1 z_t e^{-\lambda v_1} \psi z e^{-\lambda v_1}, \\
2\lambda f_1 z_t z e^{-2\lambda v_1} &= \lambda f_1 (z^2)_t e^{-2\lambda v_1} \psi \\
&= \lambda (f_1 \psi z^2)_t e^{-2\lambda v_1} - \lambda f_1 \psi_t z^2 e^{-2\lambda v_1}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
&\lambda f_1 (z_t^2 + \psi z^2)_t e^{-2\lambda v_1} + \lambda \sum_{i=1}^n \left((f_1 v_i z_t^2)_{x_i} e^{-2\lambda v_1} + (f_i f_1 z_t^2)_{v_i} e^{-2\lambda v_1} \right) \\
&+ \left\{ \lambda^2 f_1^2 - \lambda \sum_{i=1}^n ((f_1 f_i)_{v_i} + v_i f_{1x_i}) - 2h^2 \right\} z_t^2 e^{-2\lambda v_1} \\
&- (\lambda f_1 \psi_t + 2(\psi - h_t)^2) z^2 e^{-2\lambda v_1} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(4.12) eşitsizliğinin Q bölgesi üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \int_0^T \lambda f_1 (z_t^2 + \psi z^2)_t e^{-2\lambda v_1} dt dp + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (f_1 v_i z_t^2)_{x_i} e^{-2\lambda v_1} + (f_1 f_i z_t^2)_{v_i} e^{-2\lambda v_1} dp dt \right) \\
&+ \int_{\Omega} \int_0^T \left\{ \lambda^2 f_1^2 - \lambda \sum_{i=1}^n ((f_1 f_i)_{v_i} + v_i f_{1x_i}) - 2h^2 \right\} z_t^2 e^{-2\lambda v_1} dt dp
\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \int_0^T (\lambda f_1 \psi_t + 2(\psi - h_t)^2) z_t^2 e^{-2\lambda v_1} dt dp \leq 0$$

olduğu görülür. Diğer yandan $u = gz$ olduğundan

$$(z_t^2 + \psi z^2) = g^{-2} (u_t^2 + 2ug^{-1}u_t g_t + (\psi + g^{-2}g_t^2) u^2)$$

yazabiliriz. $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ olduğundan

$$(z_t^2 + \psi z^2)|_{t=0} = g^{-2} (\psi + g^{-2}g_t^2) u^2 \leq 0 \quad (4.13)$$

ve ayrıca $r > \max_{(p,t) \in \bar{Q}} (g^{-1}g_t)^2$ olduğundan

$$(z_t^2 + \psi z^2)|_{t=T} = g^{-2} u_t^2 \geq 0 \quad (4.14)$$

bulunur. Buradan (4.12) eşitsizliğindeki ilk terim atılırsa eşitsizlik bozulmaz. Ek olarak $\varphi_1 = 0$ olduğundan Γ_- sınır parçasında $z_t = 0$ bulunur. Böylece (4.12) eşitsizliğindeki ikinci terim de ihmal edilebilir.

Son olarak $\lambda > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, ($\lambda > 1$) ve

$$\max_{(p,t) \in \bar{Q}} \left(\frac{1 - 2(\psi - h_t)^2}{-f_1 \psi_t} \right)^{1/2} < \max_{(p,t) \in \bar{Q}} \frac{1 + 2(\psi - h_t)}{f_1 r} = \lambda_1,$$

$$\lambda_2 = \max_{(p,t) \in \bar{Q}} \frac{1}{f_1^2} \left(\sum_{i=1}^n (|(f_1 f_i)_{v_i}| + |v_1 f_{1x_i}|) + 2h^2 \right)$$

alınarak üçüncü terim ihmal edilebilir ve

$$\int_Q z^2 e^{-2\lambda v_1} dQ \leq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan $z = 0$ ve dolayısıyla $u = 0$ elde edilir. (4.5) eşitsizliğinden ise $\lambda = 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

BÖLÜM 5

SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BAZI DÜZ VE TERS PROBLEMLER

Kinetik denklemler, birinci mertebeden kısmi türevli denklemler olup gaz dinamiği ve plazma fiziğinden, biyoloji ve sosyoekonomiğe kadar birçok alanda karşımıza çıkmaktadır (Liboff 2003, Cercignani and Gabetta 2007, Anikonov 2001). Bu denklemler doğadaki çok parçacıklı sistemlerin zamansal evriminin istatistiksel bir modeli olarak kullanılmaktadır. Örneğin, sosyal bilimlerde bir etnik sistemin nitel ve nicel olarak matematik modelinin oluşturulması büyük önem taşımaktadır. Burada söz konusu model etnik kinetik denklemdir:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} * \frac{\partial W}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} * \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \sigma * W = 0.$$

Yukarıdaki denklemde $W(x, p, t, y)$ fonksiyonu fiziksel (t, y) ve sosyal (x, p) değişkeninin faz uzayındaki bireylerin dağılımını, $H(x, p, y)$ biyokimyasal enerjiyi, x bireyin potansiyel imkanını, p bir işi yapmadaki istegini, t zaman değişkenini, y uzay değişkenini, $*$ işareti ise (t, y) değişkenlerine göre konvolüsyonu göstermektedir (Anikonov 2001).

Diğer taraftan tomografinin matematiksel temeli olarak kabul edilen integral geometri problemlerinin önemli bir kısmı kinetik denklemler için çeşitli ters problemlere indirgenebilmektedir (Amirov 2001). Bilgisayarlı tomografinin çalışma prensibi kısaca şöyle ifade edilebilir: incelenen nesne farklı açılardan radyasyona maruz bırakılır ve gözlem noktasında radyasyon parametreleri ölçülür. Elde edilen sonuçlar bilgisayarda işlenerek nesnenin nicel fiziksel parametrelerinin uzaysal dağılımı hesaplanır. Bilgisayarlı tomografinin matematiksel modelinin temel denklemi:

$$\int_{M(r)} \mu(x) d\sigma = J(r)$$

şeklinde verilir. Burada $M(r)$ radyasyon kaynağı ile gözlem noktasını bağlayan ışını, $\mu(x)$ ise ele alınan nesnenin karakterini ifade etmektedir. İntegral geometri problemi, yukarıdaki integral verildiğinde $\mu(x)$ fonksiyonunun bulunması olarak ifade edilmektedir. Bu

problem uygun türev alma işlemleri ve geodezik denklem yardımıyla bir kinetik denkleme dönüştürülebilir (Amirov 1987, Lavrentiev et al. 1986, Romanov 1974). Bu konudaki ilk çalışmalar Radon (1917) ve John (1934) tarafından yapılmıştır.

Bu bölümde bir

$$Q = \{(x, v, t) : x \in D \subset \mathbb{R}^n, v \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in (0, T)\}$$

bölgesinde

$$lu \equiv u_t + \langle \nabla_v H, \nabla_x u \rangle - \langle \nabla_x H, \nabla_v u \rangle$$

olmak üzere

$$lu + \int_G K(x, v, v', t) u(x, v', t) dv' = F(x, v, t) \quad (5.1)$$

kinetik denklemi ele alınmaktadır. (5.1) denkleminde $u(x, v, t)$ fonksiyonu (x, v, t) noktasının komşuluğundaki faz uzayında birim hacimdeki parçacıkların sayısını göstermektedir. $H(x, v)$ Hamilton fonksiyonu, $K(x, v, v', t)$ saçılım çekirdeği ve onu içeren integralli terim de saçılım terimi olarak adlandırılır. Bu terim, ilgilenilen fiziksel modeldeki parçacıkların birbiriyle veya ortamla etkileşimi sonucu ortaya çıkan saçılım olaylarını ifade eder. Burada $\langle ., . \rangle$ sembolü $\mathbb{R}^n$ de skaler çarpım için kullanılmaktadır.

Kinetik denklemler için düz problem, bir büyüklüğün verilen başlangıç ve sınır koşullarına göre bir t anındaki dağılım fonksiyonunun bulunması olarak ifade edilir. Ters problem ise verilen bir ek bilgiden, dağılım fonksiyonuna ilaveten denklemdaki bazı fonksiyonların da eş zamanlı olarak belirlenmesini içerir. Kinetik denklemler için çeşitli ters problemlerin çözülebilirliği Anikonov (2001), Amirov (1987, 2001), Amirov and Gölgeleyen (2011) de, sayısal çözümleri ise Amirov et al. (2011), Gölgeleyen and Amirov (2011), Gölgeleyen and Albuz (2020), Yıldız et al. (2010) da çalışılmıştır. Hiperbolik, parabolik ve eliptik denklemler için değişik tipte ters problemler Bellassoued and Yamamoto (2017), Isakov (1998), Klivanov and Timonov (2004) tarafından ele alınmıştır.

Bu çalışmada (5.1) denklemi için iki düz problem, yani Problem 5.1 ve Problem 5.2 ve bir de ters problem ele alınacaktır. Bu problemlerin çözümlerinin tekliği için gerekli şartlar araştırılacaktır. Tez boyunca ∂Q , Q bölgesinin sınırmı, $\bar{n}$ vektörü ise ∂Q nun birim dış normal vektörünü ifade etmektedir ve $\bar{n} = (n_x, n_v, n_t)$, $n_x = (n_{x_1}, \dots, n_{x_n})$, $n_v = (n_{v_1}, \dots, n_{v_n})$ olarak tanımlıdır. Kolaylık açısından $(x, v) \equiv p \in \Omega = D \times G$ gösterimi

kullanılmış olup Ω sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega \in C^1$ olarak kabul edilmektedir. Ayrıca

$$\Gamma = \partial\Omega \times (0, T),$$

$$\Gamma_- = \{(p, t) \in \Gamma : \langle \nabla_v H, n_x \rangle - \langle \nabla_x H, n_v \rangle < 0\}$$

gösterimi kullanılmıştır.

Problem 5.1 (5.1) denkleminin Q bölgesinde tanımlı ve

$$u = \varphi_1(p, t), (p, t) \in \Gamma_-, \quad (5.2)$$

$$u(p, 0) = \varphi_2(p) \quad (5.3)$$

koşullarına sağlayan bir $u(p, t)$ çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Teorem 5.1 $H \in C^2(\overline{\Omega})$ ve $K \in C(\overline{Q})$ olmak üzere Problem 5.1'in $C^1(Q)$ sınıfında en çok bir çözümü vardır.

İspat. Kabul edelim ki $F = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ olsun. İlk olarak $z = u \exp(-\lambda t)$ şeklinde yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. Burada $C = \max_{(p,t) \in \overline{Q}} \{K^2\}$ olmak üzere λ sayısı

$$\lambda > \frac{CmesG + 1}{2} \quad (5.4)$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde

$$u = ze^{\lambda t}, \quad u_t = (z + \lambda z)e^{\lambda t}, \quad u_{x_i} = z_{x_i}e^{\lambda t}, \quad u_{v_i} = z_{v_i}e^{\lambda t}$$

eşitlikleri (5.1)' de yerine yazılırsa

$$(z_t + \lambda z)e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^n H_{v_i} z_{x_i} e^{\lambda t} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} z_{v_i} e^{\lambda t} + \int_G K z e^{\lambda t} dv' = 0,$$

$$e^{\lambda t} \left((z_t + \lambda z) + \sum_{i=1}^n H_{v_i} z_{x_i} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} z_{v_i} + \int_G K z dv' = 0 \right),$$

ve böylece

$$z_t + \lambda z + \sum_{i=1}^n H_{v_i} z_{x_i} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} z_{v_i} + \int_G K z dv' = 0$$

olur. O halde

$$(lz)e^{\lambda t} + \lambda ze^{\lambda t} + \int_G K z dv' e^{\lambda t} = 0, \quad (5.5)$$

$$z = 0, (p, t) \in \Gamma_-, \quad (5.6)$$

$$z(p, 0) = 0, \quad (5.7)$$

bağıntıları sağlanır. Eğer (5.5) denklemini $2z$ ile çarpılırsa

$$2z_t z + 2\lambda z^2 + \sum_{i=1}^n H_{v_i} 2z z_{x_i} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} 2z z_{v_i} + 2z \int_G K z dv' = 0$$

ve böylece

$$(z^2)_t + 2\lambda z^2 + \sum_{i=1}^n H_{v_i} (z^2)_{x_i} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} (z^2)_{v_i} + 2z \int_G K z dv' = 0$$

elde edilir. Bu eşitliğin Q bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_Q (z^2)_t dQ + \int_Q 2\lambda z^2 dQ + \int_Q \sum_{i=1}^n H_{v_i} (z^2)_{x_i} dQ - \int_Q \sum_{i=1}^n H_{x_i} (z^2)_{v_i} dQ + \int_Q 2z \int_G K z dv' dQ = 0$$

veya diğer bir şekilde

$$\int_{\Omega} \int_0^T (z^2)_t dt d\Omega + \int_Q 2\lambda z^2 dQ + \int_Q \sum_{i=1}^n [(H_{v_i} z^2)_{x_i} - H_{v_i x_i} z^2] dQ$$

$$- \int_Q \sum_{i=1}^n [(H_{x_i} z^2)_{v_i} - H_{x_i v_i} z^2] dQ + \int_Q 2z \int_G K z dv' dQ = 0$$

olduğu görülür. Burada (5.6)-(5.7) şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_Q 2\lambda z^2 dQ + \int_Q \sum_{i=1}^n (H_{v_i} z^2)_{x_i} dQ - \int_Q \sum_{i=1}^n (H_{x_i} z^2)_{v_i} dQ \\ & + \int_Q \sum_{i=1}^n (H_{x_i v_i} - H_{v_i x_i}) z^2 dQ + \int_Q 2z \int_G K z dv' dQ \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Gauss-Green teoremi kullanılırsa

$$\int_Q 2\lambda z^2 dQ + \sum_{i=1}^n \int_{\partial Q} H_{v_i} z^2 n_x dS - \sum_{i=1}^n \int_{\partial Q} H_{x_i} z^2 n_v dS + \int_Q 2z \int_G K z dv' dQ \leq 0$$

yazılabilir. İlgili sınır şartından

$$\int_Q 2\lambda z^2 dQ + \int_Q 2z \int_G K z dv' dQ \leq 0 \quad (5.8)$$

bulunur. Bu eşitliğin solundaki ikinci terim için $2ab \leq a^2 + b^2$ ve Cauchy-Schwartz eşitsizlikleri yardımıyla aşağıdaki değerlendirme yapılabilir, burada $C = \max_{(x,v) \in \bar{Q}} \{K^2\}$ olarak tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
\int_Q 2z \int_G Kz dv' dQ &\leq \int_Q \left(z^2 + \left(\int_G Kz dv' \right)^2 \right) dQ \\
&\leq \int_Q z^2 dQ + \int_Q \int_G K^2 z^2 dv' dQ \\
&\leq \int_Q z^2 dQ + C \int_Q \int_G z^2 dv' dQ \\
&\leq \int_Q \left(z^2 + C \int_G z^2 dv' \right) dQ.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\int_Q \int_G z^2(x, v, v', t) dv' dQ &= \int_0^T \int_D \int_G z^2 dv' \int_G dv dx dt \\
&= \text{mes}G \int_0^T \int_D \int_G z^2 dv' dx dt \\
&= \text{mes}G \int_Q z^2 dQ
\end{aligned}$$

olduğundan (5.9) eşitsizliği

$$\int_Q 2z \int_G Kz dv' dQ \leq \int_Q z^2 dQ + C \text{mes}G \int_Q z^2 dQ \tag{5.10}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (5.8) eşitsizliği

$$\int_Q (2\lambda - 1 - C \text{mes}G) z^2 dQ \leq 0$$

halini alır. Son olarak (5.4) eşitsizliğinden $z = 0$ elde edilir ve böylece $u = 0$ olup ispat tamamlanır.

■

Problem 5.2 (5.1) denkleminin Q bölgesinde tanımlı ve (5.2) sınır şartı ile

$$u_t(p, 0) = \varphi_3(p) \tag{5.11}$$

başlangıç şartını sağlayan bir $u(p, t)$ çözümünün bulunması problemi ele alalım.

Teorem 5.2 *Kabul edelim ki $H \in C^2(\overline{\Omega})$, $K \in C(\overline{\Omega})$ olsun. Ayrıca K fonksiyonu t değişkeninden bağımsız ve Ω bölgesinde $H_{v_1} > 0$ olsun. Bu durumda Problem 5.2, $C^2(Q)$ uzayında en çok bir çözüme sahiptir.*

İspat. İlk olarak $F = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$ olsun. Eğer (5.1) denkleminin ve (5.2) şartının t ye göre türevini alırsak, $z = u_t$ olmak üzere

$$lz + \int_G K(p, v') z(x, v', t) dv' = 0, \quad (5.12)$$

$$z = 0, \quad (p, t) \in \Gamma_-, \quad (5.13)$$

$$z(p, 0) = 0 \quad (5.14)$$

bağıntıları sağlanır. O halde Teorem 5.1 kullanılarak Q bölgesinde $z = u_t = 0$ olduğu görülür. Diğer bir ifade ile (5.1) denklemini durağan denkleme, Problem 5.1 ise homojen bir probleme indirgenmiş olur. Daha açık olarak

$$\langle \nabla_v H, \nabla_x u \rangle - \langle \nabla_x H, \nabla_v u \rangle + \int_G K(p, v') u(x, v') dv' = 0, \quad (5.15)$$

$$u = 0, \quad p \in \Gamma_-, \quad (5.16)$$

yazılabilir. Şimdi $\tilde{z} = u \exp(-\lambda x_1)$ şeklinde yeni bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. Burada $\lambda > \frac{1+CmesG}{2H_{v_1}}$ eşitsizliği sağlanmaktadır. O halde

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{x_1} &= u_{x_1} e^{-\lambda x_1} + u(-\lambda) e^{-\lambda x_1} \\ &= u_{x_1} e^{-\lambda x_1} - u\lambda e^{-\lambda x_1} \\ &= u_{x_1} e^{-\lambda x_1} - \lambda \tilde{z}, \end{aligned}$$

$$\tilde{z}_{x_i} = u_{x_i} e^{-\lambda x_1} \quad (i \neq 1), \quad \tilde{z}_{v_i} = u_{v_i} e^{-\lambda x_1},$$

olacağından

$$u_{x_1} = (\tilde{z}_{x_1} + \lambda \tilde{z}) e^{\lambda x_1}, \quad u_{x_i} = \tilde{z}_{x_i} e^{\lambda x_1}, \quad u_{v_i} = \tilde{z}_{v_i} e^{\lambda x_1},$$

bulunur. Bu durumda

$$H_{v_1} (\tilde{z}_{x_1} + \lambda \tilde{z}) e^{\lambda x_1} + \sum_{i=2}^n H_{v_i} \tilde{z}_{x_i} e^{\lambda x_1} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} \tilde{z}_{v_i} e^{\lambda x_1} + \int_G K \tilde{z} e^{\lambda x_1} dv' = 0$$

ve dolayısıyla

$$\langle \nabla_v H, \nabla_x \tilde{z} \rangle + H_{v_1} \tilde{z} \lambda - \langle \nabla_x H, \nabla_v \tilde{z} \rangle + \int_G K(p, v') \tilde{z}(x, v') dv' = 0, \quad (5.17)$$

$$\tilde{z} = 0, \quad p \in \Gamma_- \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.17) denklemini $2\tilde{z}$ ile çarparsak

$$\langle \nabla_v H, \nabla_x(\tilde{z}^2) \rangle + 2H_{v_1}\tilde{z}\lambda - \langle \nabla_x H, \nabla_v(\tilde{z}^2) \rangle + 2\tilde{z} \int_G K(p, v') \tilde{z}(x, v') dv' = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} ((H_{v_i}\tilde{z}^2)_{x_i} - H_{v_i x_i}\tilde{z}^2) dp - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} ((H_{x_i}\tilde{z}^2)_{v_i} - H_{x_i v_i}\tilde{z}^2) dp \\ & + 2 \int_{\Omega} H_{v_1}\tilde{z}^2 \lambda dp + 2 \int_{\Omega} \tilde{z} \int_G K \tilde{z} dv' dp = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlikte Gauss-Green formülü kullanılırsa

$$\int_{\Omega} (H_{v_i}\tilde{z}^2)_{x_i} dp = \int_{\partial\Omega} H_{v_i}\tilde{z}^2 n_{x_i} dS,$$

$$\int_{\Omega} (H_{x_i}\tilde{z}^2)_{v_i} dp = \int_{\partial\Omega} H_{x_i}\tilde{z}^2 n_{v_i} dS$$

olacağından

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (H_{v_i}\tilde{z}^2)_{x_i} dp - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (H_{x_i}\tilde{z}^2)_{v_i} dp &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \tilde{z}^2 (H_{v_i} n_{x_i} - H_{x_i} n_{v_i}) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \tilde{z}^2 (\langle \nabla_v H, n_x \rangle - \langle \nabla_x H, n_v \rangle) dS \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (5.18) şartı dikkate alındığında

$$2 \int_{\Omega} H_{v_1}\tilde{z}^2 \lambda d\Omega + 2 \int_{\Omega} \tilde{z} \int_G K \tilde{z} dv' d\Omega \leq 0$$

ve (5.10) değerlendirmesinden

$$\int_{\Omega} (2\lambda H_{v_1} - 1 - CmesG)\tilde{z}^2 d\Omega \leq 0$$

olur ki buradan da $\tilde{z} = 0$ ve sonuç olarak $u = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu bölümde, $g(p, t)$ bilinen fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ters problem incelenecektir.

■

Problem 5.3 (5.1) denkleminde $F(p, t) = g(p, t)\mu(p)$ olarak verilsin. Bu durumda (5.1) denkleminin (5.2) ve (5.11) koşullarına sağlayan bir (u, μ) fonksiyonlar çiftinin

$$u(p, T) = \varphi_4(p), \quad (5.19)$$

ek bilgisi yardımıyla bulunması problemini ele alalım.

Aşağıdaki teoremden Problem 5.3'ün çözümünün tekliği ispatlanacaktır.

Teorem 5.3 Kabul edelim ki $H(x, v) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\overline{Q}$ bölgesinde $H_{v_1} > 0$ ve $g \neq 0$ olsun. Bu durumda Problem 5.3, en çok bir $(u, \mu) \in C^2(\overline{Q}) \times C^1(\overline{\Omega})$ çözümüne sahiptir.

İspat. İlk olarak $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ alalım. Daha sonra $u = gz$ bağıntısı yardımıyla yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. O halde

$$u_t = g_t z + g z_t, \quad u_{x_i} = g_{x_i} z + g z_{x_i}, \quad u_{v_i} = g_{v_i} z + g z_{v_i}$$

eşitliklerini (5.1) denkleminde yerine yazarak

$$g_t z + g z_t + \sum_{i=1}^n H_{v_i} (g_{x_i} z + g z_{x_i}) - \sum_{i=1}^n H_{x_i} (g_{v_i} z + g z_{v_i}) + \int_G K g z dv' = g(p, t)\mu(p),$$

eşitliğine ulaşılır. Daha açık olarak

$$g_t z + \sum_{i=1}^n H_{v_i} g_{x_i} z - \sum_{i=1}^n H_{x_i} g_{v_i} z + g \left(z_t + \sum_{i=1}^n H_{v_i} z_{x_i} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} z_{v_i} \right) + \int_G K g z dv' = g\mu$$

bulunur. O halde

$$lgz + glz + \int_G K(x, v, v') z(x, v') g(x, v) dv' = g\mu$$

olur. Burada g^{-1} ile işleme tabi tutalım

$$lz + g^{-1} lgz + \int_G K(p, v', t) z(x, v', t) dv' = \mu(p). \quad (5.20)$$

Burada $a = g^{-1}lg$ olmak üzere

$$az + lz + \int_G K z dv' = \mu(p)$$

yazılabilir. (5.20) denkleminin t 'ye göre türevi alınırsa

$$a_t z + az_t + \frac{\partial}{\partial t}(lz) + \int_G K_t z dv' + \int_G K z_t dv' = 0$$

bulunur. Diğer bir ifadeyle

$$\frac{\partial}{\partial t}(lz) = -(az_t + a_tz) - \int_G K_t z dv' - \int_G K z_t dv'$$

elde edilir. Şimdi $\lambda > 1$ olmak üzere $w = ze^{-\lambda x_1}$ ve $s > \max\left(\frac{g_t}{g}\right)^2$ olmak üzere $\psi = -s(t+1)$ şeklinde iki yeni fonksiyon tanımlayalım. O halde

$$z_{tt} + \sum_{i=1}^n H_{v_i} z_{x_i t} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} z_{v_i t} = -(az_t + a_tz) - \int_G K_t z dv' - \int_G K z_t dv'$$

denkleminde

$$\begin{aligned} z &= we^{\lambda x_1}, \quad z_t = w_t e^{\lambda x_1}, \quad z_{x_1} = w_{x_1} e^{\lambda x_1} + \lambda w e^{\lambda x_1}, \\ z_{x_i} &= w_{x_i} e^{\lambda x_1} \quad (i > 1), \quad z_{v_i} = w_{v_i} e^{\lambda x_1} \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(w_t + \sum_{i=1}^n H_{v_i} w_{x_i} - \sum_{i=1}^n H_{x_i} w_{v_i} \right) e^{\lambda x_1} + \lambda H_{v_1} w_t e^{\lambda x_1} \\ &= -(az_t + a_tz) - \int_G K_t z e^{\lambda x_1} dv' - \int_G K z_t e^{\lambda x_1} dv' \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde bu eşitliğin her iki yanına ψw eklenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(lw) + \lambda H_{v_1} w_t + \psi w &= \psi z e^{-\lambda x_1} - (az_t e^{-\lambda x_1} + a_t z e^{-\lambda x_1}) - \int_G K_t z e^{-\lambda x_1} dv' - \int_G K z_t e^{-\lambda x_1} dv' \\ &= ((\psi - a_t)z - az_t) e^{-\lambda x_1} - \int_G K_t z e^{-\lambda x_1} dv' - \int_G K z_t e^{-\lambda x_1} dv' \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının karesi alınır, sol taraftaki $\left(\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \psi w\right)^2$ pozitif terimi ihmal edilip

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\lambda^2 H_{v_1}^2 w_t^2 + 2\lambda H_{v_1} w_t \left(\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \psi w \right) \\ &\leq 4 \left((\psi - a_t)^2 z^2 + a^2 z_t^2 + \left(\int_G K_t z dv' \right)^2 + \left(\int_G K z_t dv' \right)^2 \right) e^{-2\lambda x_1} \end{aligned} \quad (5.21)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
& 2\lambda H_{v_1} w_t \left(\frac{\partial}{\partial t}(lw) + \psi w \right) \\
&= 2\lambda H_{v_1} w_t w_{tt} + 2\lambda H_{v_1} w_t \sum_{i=1}^n H_{v_i} w_{x_i t} + 2\lambda H_{v_1} w_t \sum_{i=1}^n H_{x_i} w_{v_i t} + 2\lambda H_{v_1} w_t \psi w \\
&= \lambda H_{v_1} (w_t^2)_t + \lambda H_{v_1} \sum_{i=1}^n H_{v_i} (w_t^2)_{x_i} + \lambda H_{v_1} \sum_{i=1}^n H_{x_i} (w_t^2)_{v_i} + \lambda H_{v_1} \psi (w^2)_t \\
&= \lambda H_{v_1} (w_t^2 + \psi w^2)_t - \lambda H_{v_1} \psi_t w^2 + \lambda \sum_{i=1}^n \left((H_{v_i} H_{v_1} w_t^2)_{x_i} + (H_{x_i} H_{v_1} w_t^2)_{v_i} \right) \\
&\quad - \lambda w_t^2 \sum_{i=1}^n \left((H_{v_i} H_{v_1})_{x_i} + (H_{x_i} H_{v_1})_{v_i} \right) \tag{5.22}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. O halde (5.22) eşitliği de göz önünde bulundurularak (5.21) eşitiğinin sol tarafında tekrar z fonksiyonuna geçilir ve integralli terimler için de Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
& \lambda H_{v_1} (z_t^2 + \psi z^2)_t e^{-2\lambda x_1} + \left(\lambda^2 H_{v_1}^2 - \lambda \sum_{i=1}^n \left((H_{v_i} H_{v_1})_{x_i} + (H_{x_i} H_{v_1})_{v_i} \right) - 4a^2 \right) z_t^2 e^{-2\lambda x_1} \\
& + \lambda \sum_{i=1}^n \left((H_{v_i} H_{v_1} z_t^2 e^{-2\lambda x_1})_{x_i} + (H_{x_i} H_{v_1} z_t^2 e^{-2\lambda x_1})_{v_i} \right) \\
& - (\lambda H_{v_1} \psi_t + 4(\psi - a_t)^2) z^2 e^{-2\lambda x_1} - 4M \left(\int_G z^2 dv' + \int_G z_t^2 dv' \right) e^{-2\lambda x_1} \leq 0 \tag{5.23}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $M = \max_{(p,t) \in \overline{Q}} \{K^2, K_t^2\}$ olarak tanımlıdır. Ayrıca $u = gz$ ve buna bağlı olarak

$$z = ug^{-1}, \quad z_t = u_t g^{-1} - ug^{-2} g_t$$

bağıntıları yardımıyla

$$\begin{aligned}
z_t^2 + \psi z^2 &= (u_t g^{-1} - ug^{-2} g_t)^2 + \psi u^2 g^{-2}, \\
u_t^2 g^{-2} - 2u_t g^{-1} u g^{-2} g_t + u^2 g^{-4} g_t^2 + \psi u^2 g^{-2}, \\
&= g^{-2} (u_t^2 - 2u_t g^{-1} u g_t + u^2 g^{-2} g_t^2 + \psi u^2)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$z_t^2 + \psi z^2 = g^{-2} (u_t^2 - 2u_t g^{-1} u g_t) + u^2 (g^{-2} g_t^2 + \psi)$$

bulunur. O halde (5.23) eşitsizliğinin Q bölgesi üzerinde integral alınır ve (5.11), (5.19) şartları kullanılırsa

$$(z_t^2 + \psi z^2)|_{t=0} = g^{-2}(\psi + g^{-2}g_t^2)u^2 \leq 0,$$

$$(z_t^2 + \psi z^2)|_{t=T} = g^{-2}u_t^2 \geq 0$$

eşitsizlikleri bulunur. Ayrıca Γ_- sınır parçası üzerinde $z_t = 0$ olması dikkate alınarak

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\lambda^2 H_{v_1}^2 - \lambda \sum_{i=1}^n ((H_{v_i} H_{v_1})_{x_i} + (H_{x_i} H_{v_1})_{v_i}) - 4a^2 - 4MmesG \right) z_t^2 e^{-2\lambda x_1} dQ \\ & - \int_Q (\lambda H_{v_1} \psi_t + 4(\psi - a_t)^2 - 4MmesG) z^2 e^{-2\lambda x_1} dQ \leq 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

elde edilir. Burada $\psi = -s$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\lambda_1 = \max_{(p,t) \in \bar{Q}} \frac{1}{H_{v_1}^2} \left(\sum_{i=1}^n (|(H_{v_i} H_{v_1})_{x_i}| + |(H_{x_i} H_{v_1})_{v_i}|) + 4a^2 + 4MmesG \right),$$

$$\lambda_2 = \max_{(p,t) \in \bar{Q}} \frac{1 + 4(\psi - a_t)^2 + 4MmesG}{H_{v_1} s} > \max_{(p,t) \in \bar{Q}} \frac{1 - 4(\psi - a_t)^2 + 4MmesG}{-H_{v_1} \psi_t}$$

olmak üzere $\lambda > \max \{\lambda_1, \lambda_2\}$ seçimi yapılarak

$$\int_Q z^2 e^{-2\lambda x_1} dQ \leq 0$$

bulunur. O halde Q bölgesinde $z = 0$ ve buna bağlı olarak $u = 0$ olduğu görülür. Son olarak (5.20) eşitliğinden $\mu = 0$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■



BÖLÜM 6

SONUÇ

Bu tezde matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden olan ve kuantum mekaniğinden sosyolojiye kadar geniş bir sahada uygulamaları bulunan kinetik denklemler ele alınmıştır. Durağan olmayan formda alınan yani zamana bağlı bir dağılımın ve saçılımın modellendiği bu denklemler için bazı düz ve ters problemlerin çözümlerinin tekliği, Hamilton fonksiyonu ve saçılım çekirdeği ile ilgili verilen bazı koşullar altında ispatlanmıştır.



KAYNAKLAR

- Adams R A and Fournier J J F** (2003) *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York.
- Amirov A Kh** (1987) Uniqueness of the solution of an inverse problem for kinetic equation. *Sibirsk. Math. J.*, 28 (5): 695-696.
- Amirov A Kh** (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. VSP, Utrecht.
- Amirov A, Gölgeleyen F and Rahmanova A** (2009) An inverse problem for the general kinetic equation and a numerical method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 43 (2): 131.
- Amirov A and Gölgeleyen F** (2010) Solvability of an inverse problem for the kinetic equation and a symbolic algorithm. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 65 (2): 179-191.
- Amirov A and Gölgeleyen F** (2011) On the approximate solution of a coefficient inverse problem for the kinetic equation. *Mathematical Communications*, 16 (1): 283-298.
- Amirov A, Ustaoglu Z and Heydarov B** (2011) Solvability of a two dimensional coefficient inverse problem for transport equation and numerical method. *Transport Theory and Statistical Physics*, 40 (1): 1-22.
- Anikonov Yu E** (2001) *Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations*. VSP, Utrecht, The Netherlands, 270 pp.
- Bellassoued M and Yamamoto M** (2017) *Carleman Estimates and Applications to Inverse Problems for Hyperbolic Systems*. Springer, Tokyo Japan.
- Bertero M and Piana M** (2006) Inverse problems in biomedical imaging: modeling and methods of solution. *Complex Systems in Biomedicine*, 1-33.
- Bracewell R N and Riddle A C** (1967) Inversion of fan-beam scans in radio astronomy. *Astrophys J.*, 150: 427-434.
- Case K M and Zweifel P F** (1967) *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley Publishing Company.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Cercignani C and Gabetta E** (2007) *Transport Phenomena and Kinetic Theory Applications to Gases, Semiconductors, Photons and Biological Systems*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA.
- Degond P, Pareschi L and Russo G** (2004) Modeling and computational methods for kinetic equations. *Springer Science and Business Media*.
- Dimarco G and Pareschi L** (2014) *Numerical Methods for Kinetic Equations*. Acta Numerica, 369-520.
- Gölgeleyen I ve Albuz N** (2020) Saçılım terimi içeren durağan kinetik denklem için bir ters problemin yaklaşık çözümünün araştırılması. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 10 (1): 113-120.
- Griffel D H** (2002) *Applied Functional Analysis*. Courier Corporation.
- Herman R L** (2014) *A Course in Mathematical Methods for Physicists*. CRC.
- Isakov V** (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer vol. 127, New York.
- John F** (1934) Bestimmung einer funktion aus ihren integralen über gewisse mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 109 (1): 488-520.
- Klibanov M V and Timonov A A** (2004) *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications*. VSP, Utrecht.
- Lavrentiev M M, Romanov V G and Shishatskii S P** (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. 1 st edition. ISBN:0-82180896-6, American Mathematical Society, Providence, 291 pp.
- Liboff R L** (2003) *Kinetic Theory: Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*. Springer-Verlag, New York, Inc.
- Mikhailov V P** (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow.
- Özsoy E ve Gölgeleyen F** (2023) Durağan olmayan bir kinetik denklem için bazı düz ve ters problemler. *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 11 (2): 1014-1024.
- Romanov V G** (1974) *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*. Springer-Verlag.
- Radon J** (1917) Über die bestimmungvon funktionen durch ihre integralwerte longs gewisser mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl.*, 262-277.
- Schwartz L** (1950/51) *Théorie Des Distributions à Valeurs Vectorielles. I*. In Annales de l'institut Fourier, 1-141 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Sobolev S L (1936) Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. *Matematicheskii Sbornik*, 43 (1): 39-72.

Vladimirov V P (1984) *Equations of Mathematical Physics*. MIR, Moscow.

Vladimirov V P (2002) *Methods of the Theory of Generalized Functions*. CRC.

Yıldız M, Gölgeleyen İ and Heydarov B (2010) Approximate solution of an inverse problem for a non-stationary general kinetic equation. *CMES-Computer Modeling in Enginnerring and Sciences*, 62 (3): 255-264.





ÖZGEÇMİŞ

Elif ÖZSOY, ilk ve orta öğrenimini İstanbul’da tamamladı. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2013 yılında mezun oldu. 2020 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Van’ın Erciş ilçesinde Milli Eğitim Bakanlığı’na bağlı bir devlet okulunda Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

