

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PARÇALI SABİT KATSAYILI STURM-LIOUVILLE İKİNCİ
DERECEDEN DEMETİ İÇİN TÜM EKSENDE DÜZ VE TERS
SAÇILMA PROBLEMİ**

Döndü Nurten CÜCEN

**Danışman
Prof. Dr. Anar ADILOĞLU**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2023**



© 2023 [Döndü Nurten CÜCEN]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	10
3. TÜM EKSENDE DÜZ VE TERS PROBLEMLER	13
3.1. Jost Çözümleri	13
3.2. Düz Saçılma Problemi	15
3.3. Ters Problemin Temel İntegral Denklemi	18
3.4. Ters Probleminin Çözümünün Tekliği	21
3.5. Ters Problemin Çözümü	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	28
4.1. Jost Çözümlerinin İntegral Gösterimi	28
4.2. Düz Saçılma Problemi	82
4.3. Ters Problemin Temel İntegral Denklemleri	90
4.4. Teklik	94
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	98
KAYNAKLAR	99
ÖZGEÇMİŞ	105

ÖZET

Doktora Tezi

PARÇALI SABİT KATSAYILI STURM-LIOUVILLE İKİNCİ DERECEDEDEN DEMETİ İÇİN TÜM EKSENDE DÜZ VE TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Döndü Nurten CÜCEN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Anar ADİLOĞLU

Potansiyeli enerji parametresine lineer bağlı olan bir boyutlu Schrödinger denklemi, genelleştirilmiş Schrödinger denklemi veya Sturm-Liouville denkleminin ikinci dereceden demeti olarak da bilinmektedir. Bu türden adi diferansiyel denklemler nonlinear Schrödinger denklemi, Klein-Gordon denklemi, Kortevag de Vries denklemi gibi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için Cauchy problemi çözülürken ortaya çıkmaktadır. Ters saçılma yöntemi olarak bilinen bir yöntem özel operatör çiftlerinin yardımı ile yukarıda ismi geçen lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunması problemini potansiyeli enerji parametresine lineer bağlı olan bir boyutlu Schrödinger denklemi tipinden denklemler için ters saçılma probleminin çözümünün bulunması problemine indirgemektedir. Bu anlamda araştırılan adi diferansiyel denklemler için spektral analizin düz ve ters problemlerinin çözümü önem taşımaktadır. Uygulama açısından önemli olduğu için son yıllarda araştırma nesnesi olan diferansiyel denklemlerin parçalı sabit bir süreksiz katsayıya sahip olması sık sık karşılaşılan bir durumdur ve bu türden çoğu spektral problemler araştırmacıların odak noktasıdır. Süreksiz katsayılı diferansiyel denklemler için çözümlerin yapısında klasik durumdakinden farklı bir etken ortaya çıkmakta ve bu etkenden dolayı problemin çözümüne klasik durumdan farklı bir yaklaşımın geliştirilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denkleminin ikinci dereceden demeti için tüm ekseninde düz ve ters saçılma problemlerinin tam çözümü henüz literatürde yer almamaktadır.

Bu doktora tez çalışmasında bir sınıf azalan potansiyel fonksiyonlarına sahip süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denkleminin ikinci dereceden demeti için saçılma teorisinin düz ve ters problemlerini incelemekteyiz. Öncelikle düz problem ele alınarak, bilinen potansiyel fonksiyonlarına göre süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denkleminin ikinci dereceden demetinin $x \rightarrow +\infty$ ve $x \rightarrow -\infty$ iken Jost koşullarını sağlayan çözümleri için Fourier integrali türünden integral ifadeler elde edilmiş ve problemin spektral özellikleri incelenmiştir. Çözümler için olan bu integral gösterimin çekirdek fonksiyonları süreksizliğe sahip olduğu için denklemin potansiyel fonksiyonları ile çekirdek fonksiyonları arasındaki ilişki çok karmaşık yapıya sahip olmakla birlikte bu ilişkiden yararlanarak ters problemin çözümünde temel rolü olan Fadeev- Marchenko

türünden yeni integral denklemlere ulaşmak mümkün olmuştur. Ters problemin çözümü ise ayrık spektrumun bulunmadığı özel durumda saçılma verilerinden yola çıkarak Faddeev-Marchenko türünden integral denklemlerin tek türlü çözülebilirliğinden elde edilmiş, Sturm-Liouville demetinin birebir rekonstruksiyonu için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: kuantum saçılma teorisi, Schrödinger denklemi, düz ve ters problemler, Jost çözümü, Sturm-Liouville denklemi, Sturm-Liouville denkleminin ikinci dereceden demeti, özdeğer, özfonksiyon, dönüşüm operatörü, spektral veriler.

2023, 105 sayfa



ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DIRECT AND INVERSE SCATTERING PROBLEM ON THE ENTIRE LINE FOR THE QUADRATIC PENCIL OF THE STURM-LIOUVILLE EQUATION WITH A PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENT

Döndü Nurten CÜCEN

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Anar ADİLOĞLU

The one-dimensional Schrödinger equation, the potential of which depends linearly on the energy parameter, is also known as the generalized Schrödinger equation or the quadratic pencil of the Sturm-Liouville equation. This type of ordinary differential equation arises from solving the Cauchy problem for nonlinear partial differential equations such as the nonlinear Schrödinger equation, the Klein-Gordon equation, and the Korteweg-de Vries equation. The method, known as the inverse scattering method, reduces the problem of finding a solution to the above-mentioned nonlinear differential equations using special pairs of operators to the problem of finding a solution to the inverse scattering problem for equations of the type of one-dimensional Schrödinger equation whose potential is linearly dependent on the spectral parameter. In this sense, solving direct and inverse problems of spectral analysis is important for the ordinary differential equations under study. A common situation is that differential equations, which have become the subject of research in recent years due to their importance in terms of application, have a piecewise constant discontinuity coefficient. For differential equations with discontinuous coefficients, a different factor emerges in the structure of the solutions than in the classical case, and due to this factor, a different approach to the solution of the problem than the classical case needs to be developed. In this regard, in the literature there is still no complete solution to the direct and inverse scattering problems on the entire axis for the second-order pencil of the Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficients.

In this thesis, we examine the direct and inverse problems of scattering theory for the second order pencil of the Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficients with a class of decreasing potential functions. First of all, using the known potential functions, by considering the direct problem, integral expressions of the type of Fourier integrals were obtained for solutions of the second-order pencil of the Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficients, satisfying the Jost conditions for $x \rightarrow +\infty$ and $x \rightarrow -\infty$, and the spectral properties of the problem were investigated. Since the kernel functions of this integral representation for the solutions have discontinuity, the relationship between the potential functions of the equation and the kernel functions

has a very complex structure, but by taking advantage of this relationship, it has become possible to reach new integral equations of the Faddeev-Marchenko type, which have a fundamental role in the solution of the inverse problem. The solution of the inverse problem is obtained from the unique solvability of the integral equations of the Faddeev-Marchenko type, based on the scattering data in the special case where there is no discrete spectrum, and the necessary and sufficient conditions are given for the exact reconstruction of the Sturm-Liouville pencil.

Keywords: quantum scattering theory, Schrödinger equation, direct and inverse problems, Jost solution, Sturm-Liouville equation, quadratic pencil of the Sturm-Liouville equation, eigenvalue, eigenfunction, transformation operator, spectral data.

2023, 105 pages



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgilerini ve akademik deneyimlerini benimle paylaşan, her zaman bana kıymetli zamanını ayırıp yol gösteren çok değerli bilim insanı Danışman hocam Prof. Dr. Anar ADİLOĞLU'na, ve Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, 118F309 nolu proje kapsamında doktora öğrencisi olarak maddi destek sağlayan TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

Beni akademik hayata teşvik eden ve her türlü desteğini esirgemeyen değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca sevgili eşime ve canım kızım Aylin'e sonsuz sevgilerimle...

Döndü Nurten CÜCEN

ISPARTA, 2023

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\text{Im } \lambda$	λ karmaşık sayısının imajiner kısmı
$O(f(\lambda)), \lambda \rightarrow \infty$	$ \lambda \rightarrow \infty$ iken $ g(\lambda) \leq C f(\lambda) $ olacak şekilde
$L_1(x, +\infty) \ (L_1(-\infty, x))$	$g(\lambda)$ karmaşık değerli fonksiyonlar ailesi
$L_2(-\infty, \infty)$	$(x, \infty)((-\infty, x))$ aralığında integrallenebilir ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$\text{res}_{\lambda=\lambda_k} f(\lambda)$	$(-\infty, \infty)$ aralığında karesi ile integrallenebilir ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$\widetilde{f(\lambda)}$	$f(\lambda)$ holomorfik fonksiyonunun
$\overline{f(z)}$	$\lambda = \lambda_k$ kutup noktasındaki residüsü
$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_1 + \dots + a_n$	$f(x)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü
$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_1 \dots a_n$	$f(z)$ fonksiyonunun karmaşık eşleniği
	toplam simgesi
	çarpım simgesi

1. GİRİŞ

$$-y'' + j(x)y + 2\rho l(x)y = \rho^2 \kappa(x)y, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (1.1)$$

denklemini ele alalım. Burada

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \omega^2, & x < 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$\omega \neq 1$, $\omega > 0$, ρ spektral parametre, $j(x)$ ve $l(x)$ reel değerli fonksiyonlardır öyleki $l(x)$ gerçel eksenin her kapalı aralığında mutlak süreklidir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |l(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) (|j(x)| + |l'(x)|) dx < +\infty \quad (1.3)$$

koşulları sağlanır. Tez çalışmasında (1.1) denklemi için tüm ekseninde saçılma teorisinin düz ve ters problemleri incelenmiştir. (1.1) denklemi kuantum saçılma teorisinde statik potansiyele ve sıfır yüke sahip Klein-Gordon denklemi için ters problemi çözerken ortaya çıkmaktadır. Bunun dışında iletim hatları teorisi, elektromanyetizma ve elastisite teorilerinde ortaya çıkan saçılma problemleri de (1.1) denkleminde indirgenmektedir. $\kappa(x) = 1$ durumunda (1.1) denklemi için düz ve ters problem ile ilgili literatürde yeteri kadar çalışma vardır. Son yıllarda süresiz katsayılı Sturm-Liouville denklemi ile ilgili ters saçılma problemleri çeşitli tanımlamaları ile ele alınmakta ve uygulanmaktadır. (1.1) denklemi de bu türden denklemlerdendir ve bu denklem için tüm ekseninde düz ve ters saçılma problemi henüz çözülmemiştir. $\kappa(x)$ fonksiyonunun parçalı sabit şeklinden dolayı (1.1) denkleminin çözümlerinin yapısında klasik durumdakinden farklı bir etken ortaya çıkmakta ve bu etkenden dolayı problemin çözümüne klasik durumdan farklı bir yaklaşımın geliştirilmesi gerekmektedir. Bu tez çalışmasındaki amacımız (1.1) denklemi için (1.2) ve (1.3) koşulları altında tüm ekseninde Jost türünden çözümlerin dönüşüm operatörlerine benzer yeni integral gösterilimlerini bulmak, sonrasında çözümlerin bu gösteriliminden faydalanarak düz saçılma probleminin spektral verilerini belirlemek ve özelliklerini incelemek, ardından da ters saçılma probleminin incelenmesinde önemli role sahip olan Faddeev-Marchenko integral denklemlerini elde ederek (1.1) denkleminin potansiyel fonksiyonlarını birebir olarak belirlemektir.

Potansiyeli enerji parametresine bağlı olan bir boyutlu Schrödinger denklemi veya Sturm-Liouville denkleminin kuadratik(ikinci dereceden) demeti, $\kappa(x) = 1$ için (1.1) şeklindeki diferansiyel denkleme denir. Bu şekildeki diferansiyel denklemler lineer olmayan Schrödinger denklemi, Klein-Gordon denklemi, Korteweg de Vries denklemi gibi lineer olmayan kısmı türevli diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünde ortaya çıkmaktadır. Literatürde ters saçılma yöntemi olarak bilinen bir yöntem özel operatör çiftlerinin yardımı ile yukarıda ismi geçen lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunması problemini (1.1) tipinden denklemler için ters saçılma probleminin çözümünün bulunması problemine indirgemektedir. Bu anlamda (1.1) şeklindeki spektral problem için düz ve ters problemlerin çözümü önem taşımaktadır. Düz problem denildiğinde (1.1) denkleminin çözümleri ve spektral özelliklerini, denklemin $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonlarının bilinen kabul ederek inceleyen problem anlaşılmaktadır. Ters problem ise bilinen spektral özelliklerden denklemin $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonlarının belirlenmesi problemidir. $\kappa(x) \neq 1$ durumunda (1.1) denklemi için sonlu aralıkta düz ve ters problemler ile ilgili çalışmalar literatürde yeni yeni yer almasına rağmen yarı eksen ve tüm eksen de ters saçılma problemlerinin tam çözümü henüz yapılmamıştır.

Tez çalışmasında elde edilen sonuçları kısaca özetleyelim. İlk olarak (1.1) denkleminin sonsuzlukta koşulu sağlayan özel çözümleri ile ilgili iki önemli teorem ispatlanmıştır.

Kolaylık için

$$\sigma^+(x) = \left(\int_x^{+\infty} (s-x) |j(t)| + 2 |l(t)| \right) dt$$

ve

$$\sigma^-(x) = \left(\int_{-\infty}^x (x-s) |j(t)| + \frac{2}{\omega} |l(t)| \right) dt$$

şeklinde tanımlayalım. $f_{\pm}(x, \rho)$ ile (1.1) denkleminin

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{\pm}(x, \rho) e^{\mp i \rho \mu(x)} = 1$$

koşulunu sağlayan çözümünü gösterelim. Burada $\mu(x) = x\sqrt{\kappa(x)'} \text{ dir. } f_+(x, \rho)$ ve $f_-(x, \rho)$ çözümleri sırasıyla (1.1)'in sağ ve sol Jost çözümleri olarak adlandırılacaktır.

Teorem 1.1. (Nabiev ve Cucen, 2023) $Imp \geq 0$ kapalı üst yarı düzleminden herhangi bir ρ için (1.1) süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denklemi

$$f_+(x, \rho) = R_+(x) e^{i\rho\mu(x)} + R_-(x) e^{-i\rho\mu(x)} + \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^+(x, t) e^{i\rho t} dt \quad (1.4)$$

şeklinde temsil edilen sağ $f_+(x, \rho)$ Jost çözümüne sahiptir. Burada

$$R_+(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt},$$

$$R_-(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt},$$

$\mu(x) = x\sqrt{\kappa(x)}$ ve $C^+(x, t)$ çekirdek fonksiyonu bir $V > 0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\int_{\mu(x)}^{+\infty} |C^+(x, t)| dt \leq V \left\{ e^{\sigma^+(\mu(x))} - 1 \right\}$$

Ayrıca aşağıdaki özdeşlikler de sağlanır:

$$C^+(x, \mu(x)) = R_+(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) ds + \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{\kappa(s)}}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & C^+(x, -\mu(x) + 0) - C^+(x, -\mu(x) - 0) = \\ & R_-(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) \operatorname{sgn} s ds + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} s \sqrt{\kappa(s)}}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\} \quad (1.6) \end{aligned}$$

Teorem 1.2. (Nabiev ve Cucen, 2023) $\text{Im } \rho \geq 0$ kapalı üst yarı düzleminden herhangi bir ρ için (1.1) süreksiz katsayılı Sturm-Liouville demeti

$$f_{-}(x, \rho) = T_{+}(x) e^{i\rho\mu(x)} + T_{-}(x) e^{-i\rho\mu(x)} + \int_{-\infty}^{\mu(x)} C^{-}(x, t) e^{-i\rho t} dt, \quad (1.7)$$

şeklinde temsil edilen sol $f_{-}(x, \rho)$ Jost çözümüne sahiptir. Burada

$$T_{+}(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t) \text{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt},$$

$$T_{-}(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt},$$

$\mu(x) = x\sqrt{\kappa(x)}$ ve $C^{-}(x, t)$ çekirdek fonksiyonu bir $V > 0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\int_{-\infty}^{\mu(x)} |C^{+}(x, t)| dt \leq V \left\{ e^{\sigma^{-}(\mu(x))} - 1 \right\}.$$

Ayrıca aşağıdaki özdeşlikler de sağlanır:

$$C^{-}(x, \mu(x)) = T_{-}(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) ds - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{\kappa(x)}}{\sqrt{\kappa(s)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\}, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & C^{-}(x, -\mu(x) + 0) - C^{-}(x, -\mu(x) - 0) \\ &= T_{+}(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) \text{sgn} s ds + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x \left[1 + \left(1 - \frac{\text{sgn} s \sqrt{\kappa(x)}}{\sqrt{\kappa(s)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Aşağıdaki teorem $C^{\pm}(x, t)$ hiperbolik türden bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Teorem 1.3. (Nabiev ve Cucen, 2023) (1.4), (1.7) integral gösterimlerinin $C^\pm(x, t)$ çekirdek fonksiyonları birinci ve ikinci mertebeden her iki kısmi türeve sahiptir. Eğer $j(x)$ ve $l'(x)$ diferansiyellenebilir ise $C^+(x, t)$ ve $C^-(x, t)$ çekirdek fonksiyonları sırasıyla (1.5), (1.6) ve (1.8), (1.9) koşullarıyla aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemleri sağlar:

$$\frac{\partial^2 C^\pm(x, t)}{\partial x^2} - \kappa(x) \frac{\partial^2 C^\pm(x, t)}{\partial t^2} = j(x) C^\pm(x, t) \pm 2il(x) \frac{\partial C^\pm(x, t)}{\partial t}, \quad t \neq \mu(x). \quad (1.10)$$

(1.5), (1.6) ve (1.8), (1.9) eşitliklerinden aşağıdakileri de yazabiliriz:

$$\frac{d}{dx} \left(C^+(x, \mu(x)) e^{-i \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} + i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right) \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dx} \left(C^-(x, \mu(x)) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} - i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left((C^+(x, -\mu(x) + 0) - C^+(x, -\mu(x) - 0)) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} - i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left((C^-(x, -\mu(x) + 0) - C^-(x, -\mu(x) - 0)) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} + i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

(1.1), (1.3) ve (1.4), (1.5) ifadelerinde $\text{Re}C^\pm(x, t) = M^\pm(x, t)$ ve $\text{Im}C^\pm(x, t) = N^\pm(x, t)$ yazarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} \right) \\ &= -2 \frac{d}{dx} [M^+(x, \mu(x)) \cos v^+(x) + N^+(x, \mu(x)) \sin v^+(x)], \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_x^{+\infty} \left(1 + \sqrt{\kappa(t)} \right) \sqrt{\kappa(t)} [M^+(t, \mu(t)) \sin v^+(t) - N^+(t, \mu(t)) \cos v^+(t)] dt - \\ & - \int_x^{+\infty} \left(1 - \sqrt{\kappa(t)} \right) \sqrt{\kappa(t)} [(M^+(t, -\mu(t) + 0) - M^+(t, -\mu(t) - 0)) \sin \tilde{v}^+(t) - \\ & (N^+(t, -\mu(t) + 0) - N^+(t, -\mu(t) - 0)) \cos \tilde{v}^+(t)] dt = v^+(x) \end{aligned} \quad (1.16)$$

elde ederiz. Burada

$$v^+(x) = \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt, \quad \tilde{v}^+(x) = \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \text{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt \quad (1.17)$$

şeklindedir ve $x \leq 0$ için

$$\tilde{v}^+(x) = 2v^+(0) - v^+(x) \quad (1.18)$$

sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} \right) \\ &= 2 \frac{d}{dx} [M^-(x, \mu(x)) \cos v^-(x) + N^-(x, \mu(x)) \sin v^-(x)], \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{\sqrt{\kappa(t)}}{\omega} \right) \sqrt{\kappa(t)} [M^-(t, \mu(t)) \sin v^-(t) - N^-(t, \mu(t)) \cos v^-(t)] dt + \\ & + \int_{-\infty}^x \left(1 - \frac{\sqrt{\kappa(t)}}{\omega} \right) \sqrt{\kappa(t)} [(M^-(t, -\mu(t) + 0) - M^-(t, -\mu(t) - 0)) \sin \tilde{v}^-(t) - \\ & - (N^-(t, -\mu(t) + 0) - N^-(t, -\mu(t) - 0)) \cos \tilde{v}^-(t)] dt = v^-(x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

elde ederiz. Burada

$$v^-(x) = \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt, \quad \tilde{v}^-(x) = \int_{-\infty}^x \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt \quad (1.21)$$

şeklindedir ve $x \geq 0$ için

$$\tilde{v}^-(x) = v^-(x) - 2v^-(0) \quad (1.22)$$

sağlanır.

(1.3) ve koşulu sağlandığında (1.1) denklemini aşağıdaki asimptotik ifadeleri sağlayan $u^-(x, \rho)$, $u^+(x, \rho)$ asimptotik çözümlerine sahiptir:

$$u^-(x, \rho) = \frac{r^-(\rho)}{\omega} e^{-i\rho\omega x} + \frac{e^{i\rho\omega x}}{\omega} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty$$

$$u^-(x, \rho) = t(\rho) e^{i\rho x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty$$

$$u^+(x, \rho) = t(\rho) e^{-i\rho\omega x} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty$$

$$u^+(x, \rho) = r^+(\rho) e^{i\rho x} + e^{-i\rho x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty$$

Burada

$$r^+(\rho) = -\frac{\overline{b(\rho)}}{a(\rho)}, \quad r^-(\rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)} \quad (1.23)$$

$$a(\rho) = \frac{1}{2\rho i} W \{f_+(x, \rho), f_-(x, \rho)\}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.24)$$

$$b(\rho) = -\frac{1}{2\rho i} W \left\{ f_+(x, \rho), \overline{f_-(x, \rho)} \right\}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.25)$$

$u^-(x, \rho)$ ve $u^+(x, \rho)$ çözümleri sırasıyla sol ve sağ saçılma problemlerinin özfonksiyonları olarak, $r^-(\rho)$, $r^+(\rho)$ ve $t(\rho)$ katsayıları sırasıyla sol, sağ yansıma katsayıları ve iletim katsayısı olarak adlandırılır.

$a(\rho)$ fonksiyonunun $\operatorname{Im} \rho > 0$ üst yarı düzlemindeki sıfırları $\rho_k (k = 1, 2, \dots, n)$ olsun. $a(\rho) = 0$ denkleminin ρ_k köklerinin katlılığını m_k ile gösterelim. ρ_k köklerinin aşağıdaki özellikleri (1.24) formülünden elde edilebilir (Maksudov ve Guseinov, 1986, 1989).

Yardımcı Teorem 1.4.

$$\left. \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\rho^j} f^\mp(x, \rho) \right|_{\rho=\rho_k} = \sum_{v=0}^j \varkappa_{k,j-v}^\pm \frac{1}{v!} \frac{d^v}{d\rho^v} f^\pm(x, \rho) \Big|_{\rho=\rho_k} \quad (1.26)$$

olacak şekilde $(\varkappa_{k,0}^\pm, \dots, \varkappa_{k,m_k-1}^\pm)$ sayı zinciri mevcuttur. Burada $j = 0, \dots, m_k - 1$, $k = 1, \dots, n$, $\varkappa_{k,0}^\pm \neq 0$ dır.

$a(\rho) = 0$ denkleminin ρ_k köküne karşılık gelen $(\varkappa_{k,0}^+, \dots, \varkappa_{k,m_k-1}^+)$ ve $(\varkappa_{k,0}^-, \dots, \varkappa_{k,m_k-1}^-)$ sayı kümeleri sırasıyla sağ ve sol normalleştirme zinciri olarak adlandırılacaktır.

$$\left\{ r^+(\rho), \rho_k, \varkappa_{k,j}^+, j = 0, \dots, m_k - 1, k = 1, \dots, n \right\}$$

ve

$$\left\{ r^-(\rho), \rho_k, \varkappa_{k,j}^-, j = 0, \dots, m_k - 1, k = 1, \dots, n \right\}$$

(1.1) denkleminin sırasıyla sağ ve sol saçılma verileri olarak adlandırılacaktır. Saçılma verilerinin bulunması problemi düz problem; $u^-(x, \rho)$ ve $u^+(x, \rho)$ dalga fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri yardımıyla (1.1) denklemindeki $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonlarının bulunması problemi ters saçılma problemi olarak adlandırılır.

Bu tezde $j(x)$ ve $l(x)$ fonksiyonları Marchenko-Fadeev yönteminin biraz değiştirilmesi ile belirlenmiştir. Bir başka şekilde özetlenirse

$$F^\pm(x) = \sum_{k=1}^n l_k^\pm(x) e^{\pm i \rho_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r^\pm(\rho) \mp \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{\mp i(\theta \pm v)} \right) e^{\pm i \rho x} d\rho$$

ve

$$l_k^\pm(x) = -ie^{\mp i \rho_k x} \sum_{j=0}^{m_k-1} \varkappa_{k,m_k-1-j}^\pm \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{d\rho^j} \frac{(\rho - \rho_k)^{m_k} e^{\pm i \rho x}}{a(\rho)} \right\}_{\rho=\rho_k}$$

olmak üzere bilinmeyen $C^\pm(x, t)$ fonksiyonları için

$$R_+(x)F^+(\mu(x) + y) + R_-(x)F^+(-\mu(x) + y) + \overline{C^+(x, y)} + \int_{\mu(x)}^{+\infty} F^+(y + t)C^+(x, t)dt +$$

$$+ \frac{1 - \sqrt{\kappa(x)}}{1 + \sqrt{\kappa(x)}} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) = 0, y \geq \mu(x), \quad (1.27)$$

$$T_+(x)F^-(-\mu(x) + y) + T_-(x)F^-(\mu(x) + y) + \overline{C^-(x, y)} + \int_{-\infty}^{\mu(x)} F^-(y+t)C^-(x, t)dt + \\ - \frac{1 - \sqrt{\kappa(x)}}{1 + \sqrt{\kappa(x)}} e^{i(\theta-v)} C^-(x, -y) = 0, y \leq \mu(x) \quad (1.28)$$

integral denklemleri elde edilmiştir. Bu integral denklemlere (1.1) diferansiyel denklemi için saçılma teorisinin ters probleminin temel integral denklemleri adı verilir. Bu temel integral denklemler Marchenko-Fadeev yöntemindeki klasik denklemlerden farklıdır çünkü $\kappa(x)$ fonksiyonunun süreksizliği temel denklemlerin yapısını güçlü bir şekilde etkilemektedir. Bu sebepten (1.27), (1.28) denklemlerini değiştirilmiş Marchenko-Fadeev denklemleri olarak adlandırıyoruz.

Açıkça, (1.27), (1.28) integral denklemini yazmak için saçılma verileriyle tanımlanan $F^\pm(x)$ fonksiyonlarına ihtiyacımız var. Saçılma verileriyle oluşturulan (1.27), (1.28) denklemlerinin $C^\pm(x, y)$ tek çözümleri varsa $j(x)$ ve $l(x)$ fonksiyonları (1.15)-(1.21)'den bulunabilir. Bu nedenle (1.27), (1.28) denklemlerinin çözülebilirliği ve $j(x)$ ve $l(x)$ fonksiyonlarını birebir belirlemek öneme sahiptir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında (1.1) denklemi (1.2), (1.3) koşulları altında ele alınarak düz ve ters saçılma problemlerinin çözülmesi hedeflenmektedir. Öncelikle düz problem ele alınarak, bilinen $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonlarına göre (1.1) denkleminin $x \rightarrow +\infty$ ve $x \rightarrow -\infty$ iken Jost koşullarını sağlayan çözümleri için Fourier integrali türünden integral ifadeler elde edilmiş ve problemin spektral özellikleri incelenmiştir. Çözümler için olan bu integral gösterimin çekirdek fonksiyonu önem arz etmektedir; bu fonksiyonla denklemin $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonları arasındaki ilişkiden yararlanarak ters problemin çözümünde temel rolü olan Fadeev-Marchenko integral denklemine ulaşılmıştır. Ters problemin çözümü ise spektral verilerden yola çıkarak Fadeev-Marchenko integral denkleminin oluşumu ve analizi sürecinden oluşmaktadır. Son olarak da $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonlarının spektral verilere göre belirlenmesi algoritması ve sağ saçılma verilerine göre problemin çözülebilirliği için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

(1.1) denklemi quantum saçılma teorisinde statik potansiyele sahip sıfır yüklü parçacık denklemi olan Klein-Gordon denklemi ile ilgili olarak ortaya çıkmıştır (Weiss ve Scharf, 1971), Cornille (1970), Albeverio vd. (2005). Fizikte bu denkleme indirgenebilir başka saçılma problemleri de vardır, örneğin iletim hatları teorisi, elektromanyetizma ve elastisite teorilerinde ortaya çıkan saçılma problemleri de (1.1) denklemine indirgenmektedir (Jaulent ve Jean, 1976).

İyi bilinmektedir ki ters problem teorisinin önemli bir metodu Marchenko tarafından ortaya çıkarılan dönüşüm operatörleri yöntemidir (Marchenko, 1955). Marchenko bir boyutlu Schrödinger denklemi için sonlu aralıkta ve yarı eksende ters problemlerin çözümüne dönüşüm operatörlerini uygulamıştır. Dönüşüm operatörü aynı zamanda Gelfand ve Levitan (1955) ve Levitan ve Gasymov (1964)'ın temel çalışmalarında kullanılmıştır. Bu çalışmalarda Sturm-Liouville operatörünün spektral karakteristiklerine göre belirlenmesi için gerek ve yeterlilik koşulları elde edilmiştir. Daha sonra Faddeev tüm eksende ters saçılma problemine Marchenko metodunu uygulamıştır (Faddeev, 1958, 1963, 1964; Marchenko, 1986). Bu öncü çalışmalardan sonra bir boyutlu Schrödinger denklemi için tüm eksende ters problem bir kaç yazar tarafından kapsamlı olarak iyileştirilmiş ve geliştirilmiştir (Deift ve Trubowitz, 1979; Newton, 1985, 1983; Guseinov, 1985; Marchenko, 1986; McLaughlin, 1986; Pöschel ve Trubowitz, 1987; Chadani ve Sabatier, 1977; Aktosun ve Klaus, 2001; Freiling ve Yurko, 2001). Marchenko metodunun ters saçılma teorisindeki rölativite saçılma problemlerine uygulanabilirliği ilk olarak Cornille, Weiss ve Scharff tarafından ortaya atılmıştır (Cornille, 1970; Weiss ve Scharf, 1971). $\kappa(x) \equiv 0$ durumunda, bir boyutlu Schrödinger denklemi için spektral ölçüme göre saçılma potansiyelinin belirlenmesi Kay ve Moses (1955, 1956a,b) çalışmalarında incelenmiştir. (1.3) koşulu altında bir boyutlu Schrödinger denklemi için ters saçılma problemi Faddeev (1958, 1963) 'de tamamen çözülmüştür (bkz. Aktosun vd. (1998a); Chadani ve Sabatier (1977); Deift ve Trubowitz (1979); Huseynov ve Osmanli (2013); Levitan (1975); Marchenko (1955); Newton (1985)). Potansiyel üzerindeki farklı azalma veya artma koşulları ile bir boyutlu Schrödinger denklemi için ters saçılma problemi de Anders ve Kotlyarov (1991); Buslaev ve Fomin (1962); Cohen (1984); Hruslov (1976)'de incelenmiştir. Matris

potansiyeline sahip Schrödinger operatörü için tüm eksenlerde ters saçılma problemi Rofe-Beketov ve Zubkova (2009); Zubkova ve Rofe-Beketov (2007a,b, 2009).’de incelenmiştir.

Enerjiye bağlı (veya genelleştirilmiş) Schrödinger denklemi için tüm eksenlerde ters saçılma problemi ilk olarak Jaulent, Jean ve lineer olmayan evrim denklemleriyle ilgili olarak Kaup tarafından incelenmiştir (Kaup, 1975; Jaulent ve Jean, 1976; Alberverio vd., 2005). Daha sonra Kaup (1975)’un çalışmasında ele aldığı denklem için tüm eksenlerde ters saçılma problemi Tsutsumi tarafından enerjiye bağlı matris değerli Schrödinger denkleminin ters saçılma problemine indirgenerek incelendi.

$\kappa(x) = 1$ ve ayrık spektrumun olmadığı durumda $l(x)$ ve $j(x)$ üzerine getirilen belli kısıtlamalar altında (1.1) denklemi için ters saçılma problemi Jaulent ve Jean’ın çalışmalarında incelenmiştir (Jaulent ve Jean, 1976). Daha sistemli bir şekilde aynı problem için (1.3) koşullarını sağlayan $l(x)$ ve $j(x)$ potansiyellerinin spektral verilerden bulunması algoritması Maksudov ve Guseinov tarafından verilmiştir (Maksudov ve Guseinov, 1986, 1989). Yakınlarda ise Jaulent ve Jean (1976) çalışmasında geliştirilen metod Sattinger ve Szmigielski tarafından Kaup denkleminin özel durumu için uygulandı (Sattinger ve Szmigielski, 1995). Potansiyellerin çeşitli sınıflarında genelleştirilmiş Schrödinger denklemi için düz ve ters saçılma problemi Aktosun’nun çalışmalarında detaylı olarak incelenmiş ve ters saçılma probleminin birebir çözülebilirliği için yeterli koşullar elde edilmiştir (Aktosun vd., 1998c,b; Aktosun ve van der Mee, 1991).

Pozitif yük parametrelili genelleştirilmiş Schrödinger denklemi için tüm eksenlerde ters saçılma problemi Mee ve Pivovarchik tarafından Marchenko metodu ile ve Aktosun ve Klaus (1999)’de elde edilen asimptotik özellikler kullanılarak çözülmüştür. $\kappa(x) = 1$ durumunda (1.1) denklemi için tüm eksenlerde ve yarı eksenlerde ters saçılma problemleri $l(x)$ üzerinde türevlenebilirlik koşulu olmadan Kamimura (2007a) tarafından yapılmıştır.

Süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler için düz ve ters problemler birçok yazar tarafından çeşitli varsayımlar altında çalışılmıştır. Bu problemlerden bazıları Hald (1984), Kobayashi (1989), Shepelsky (1994), Aktosun vd. (1995), Guseinov ve Pashaev (2002), Freiling ve Yurko (2001), Yurko (2006), Mamedov (2010), Huseynov

ve Osmanli (2013) çalışmalarında yer almaktadır. Bir iç noktada süreksizliklerin olduğu $l(x) = 0$ ve $\kappa(x) \equiv 1$ durumunda (1.1) denklemi için tüm eksenindeki ters saçılma problemi Huseynov ve Osmanli (2013)'da tamamen çözülmüştür. Bu çalışmada Sturm-Liouville denkleminin Jost çözümleri için dönüşüm operatörlerine benzer yeni integral gösterimler elde edilmiş ve ele alınan problemlerin çözümüne uygulanmıştır. $\kappa(x) = 1$ durumunda süreksizlik koşullarına sahip (1.1) denklemi için (1.3) koşullarını sağlayan potansiyeller sınıfında tüm ekseninde düz ve ters saçılma problemi Nabiev (2014)'in çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada da Jost çözümleri için yeni integral gösterimler elde edilmiştir ve ters problemin çözümüne uygulanmıştır.

$l(x) = 0$ durumda (1.1) denklemi için ters saçılma problemi ilk olarak Gasymov ve Darwish tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda yarı ekseninde ters saçılma probleminin çözümü $[0, a]$ ve $[a, \infty)$ aralıklarındaki iki ters problemin çözümüne indirgenmiştir (Gasymov, 1977; Darwish, 1993). Yine de $l(x) = 0$ durumunda (1.1) denklemi için yarı ekseninde ters saçılma problemi Jost çözümleri için yeni integral gösterimler elde edilerek Guseinov ve Pashaev tarafından yapılmıştır (Guseinov ve Pashaev, 2002). Bu çalışmadaki Jost çözümlerinin yeni integral gösterimleri farklı sınır koşulları altında benzer problemlerin çözümüne uygulanmıştır Mamedov (2010).

$l(x) = 0$ durumda (1.1)-(1.3) problemi için tüm ekseninde düz ve ters saçılma problemleri Jost çözümlerinin yeni integral gösterimleri elde edilerek Nabiev ve Mamedov (2015, 2019) çalışmalarında incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, (1.1) denkleminin (1.3) katsayı sınıfındaki özel çözümleri için yeni integral gösterimleri elde edilmiş ve bu gösterimler hem düz hem de ters saçılma problemlerinin çözümüne uygulanmıştır. Kesikli spektrumun olmadığı varsayımı altında, düz problem incelenmiş, ters problemin temel integral denklemi türetilmiş ve bu denklemin tek çözülebilirliği kanıtlanmıştır. En son olarak ters saçılma probleminin çözümü verilmiş, potansiyellerin rekonstrüksiyonu için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir.

3. TÜM EKSENDE DÜZ VE TERS PROBLEMLER

Enerjiye bağlı (veya genelleştirilmiş) bir Schrödinger denklemi için tüm eksen de ters saçılma problemi, Marchenko yönteminin bir genellemesi gibi doğrusal olmayan bir evrim denklemiyle bağlantılı olarak ilk olarak Jaulent ve Jean (1976) ve Kaup (1975) tarafından incelenmiştir (Cornille, 1970; Weiss ve Scharf, 1971).

Bazı adi diferansiyel operatör demetleri için düz ve ters spektral problemler, spektral teoriye önemli katkılarda bulunan M.G. Gasyimov'un Cowen ve Felder (1981); Gasyimov ve Magerramov (1982, 1987a,b) seri çalışmalarında da incelenmiştir. $l(x)$ ve $j(x)$ fonksiyonlarının kısıtlı bir sınıfı için ayrık spektrumun bulunmadığı durumda (1.1) için ters saçılma problemi Jaulent ve Jean (1976) tarafından incelenmiştir. Yine de ayrık bir spektrum olmaksızın (1.1) için düz ve ters saçılma problemi Maksudov ve Guseinov (1989) tarafından incelenmiştir; burada $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyelleri (1.3) koşulu altında oluşturulan saçılma verilerinden belirlenir. Son zamanlarda bu problem ve (1.1)'in yarım eksen üzerindeki ters saçılma probleminde, $l(x)$ fonksiyonuna ilişkin türevlenebilirlik varsayımlarının gerekli olmadığı Kamimura (2007b) 'de incelenmiştir.

3.1. Jost Çözümleri

$\kappa(x) = 1$ durumunda (1.1) ikinci mertebeden diferansiyel denklemini ele alalım ve $e^{\pm}(x, \rho)$ ile (1.3) sınıfından potansiyele sahip (1.1) denkleminin

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e(x, \rho) e^{\mp i\rho\mu(x)} = 1 \quad (3.1)$$

koşulunu sağlayan çözümünü gösterelim. Açıkça (1.1)-(3.1) problemi

$$e^{\pm}(x, \rho) = e_0^{\pm}(x, \rho) \pm \int_x^{\pm\infty} \frac{\pm \sin \rho(t-x)}{\rho} [j(t) + 2\rho l(t)] e^{\pm}(t, \rho) dt, \quad (3.2)$$

integral denklemine denktir.

Teorem 3.1. (Jaulent ve Jean, 1976) Eğer (1.3) koşulu sağlanırsa (1.1) denkleminin $e^\pm(x, \rho)$ çözümü $\text{Im } \rho \geq 0$ üst yarı düzleminden olan tüm ρ 'lar için

$$e^\pm(x, \rho) = R_1^\pm(x) e^{\pm i \rho x} \pm \int_x^{\pm\infty} C^\pm(x, t) e^{\pm i \rho t} dt, \quad (3.3)$$

şeklinde gösterilir. Burada

$$R_1^\pm(x) = e^{i v_\pm(x)}, \quad (3.4)$$

$$v_\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} l(s) ds$$

olup $C^\pm(x, t)$ fonksiyonu

$$|C^\pm(x, t)| \leq \sigma^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1^\pm(x)}, \quad (3.5)$$

eşitsizliğini sağlar;

$$\sigma^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} (|j(t)| + |l'(t)|) dt, \quad (3.6)$$

$$\sigma_1^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} ((\pm t \mp x) |j(t)| + 2 |l(t)|) dt \quad (3.7)$$

dir. Ayrıca, $C^\pm(x, t)$ sürekli fonksiyon olup

$$C^\pm(x, x) = \left(-\frac{i}{2} l(x) + \theta^\pm(x) \right) e^{i v_\pm(x)}, \quad (3.8)$$

$$\theta^\pm(x) = \left(\pm \frac{1}{2} \int_x^{\pm\infty} (j(t) + l^2(t)) dt \right) \quad (3.9)$$

dir.

Eğer kabul edersek ki $j(x)$ türevlenebilir ve $l(x)$ iki kez türevlenebilir ise, $C^\pm(x, t)$ çekirdek fonksiyonu ikinci mertebeden tüm kısmi türevlerine sahiptir ve

$$D_{xx} C^\pm(x, t) - D_{tt} C^\pm(x, t) = j(x) C^\pm(x, t) \pm 2il(x) D_t C(x, t) \quad (3.10)$$

kısmi türevli denklemini sağlar. Son olarak (3.8) ve (3.9) den

$$l(x) = 2X^{\pm}(x, x) \sin v_{\pm}(x) - 2Y^{\pm}(x, x) \cos v_{\pm}(x), \quad (3.11)$$

$$X^{\pm}(x, x) \cos v_{\pm}(x) + Y^{\pm}(x, x) \sin v_{\pm}(x) = \theta^{\pm}(x), \quad (3.12)$$

bulunur, burada $X^{\pm}(x, x) = \operatorname{Re} C^{\pm}(x, x)$ ve $Y^{\pm}(x, x) = \operatorname{Im} C^{\pm}(x, x)$ dir.

3.2. Düz Saçılma Problemi

$j(x)$, $l(x)$ reel fonksiyonlar olduğundan reel ρ 'lar için $\overline{e^{+}(x, \rho)}$ ve $\overline{e^{-}(x, \rho)}$ fonksiyonları da (1.1) denkleminin çözümleridir. (3.3)'den

$$e^{\pm}(x, \rho) = e^{\pm i \rho x} [1 + o(1)], \quad e^{\pm}(x, \rho)' = e^{\pm i \rho x} [\pm i \rho R_1^{\pm}(x) + o(1)], \quad x \rightarrow \pm \infty \quad (3.13)$$

asimptotik ifadeleri kolaylıkla elde edilir. Buradan

$$W[e^{\pm}(x, \rho), \overline{e^{\pm}(x, \rho)}] =: e^{\pm}(x, \rho)' \overline{e^{\pm}(x, \rho)} - e^{\pm}(x, \rho) \overline{e^{\pm}(x, \rho)'} \quad (3.14)$$

Wronskianının reel ρ 'lar için $\pm 2\rho i$ olduğu elde edilir. Buna göre, $\rho \neq 0$ için $e^{+}(x, \rho)$, $\overline{e^{+}(x, \rho)}$ ve $e^{-}(x, \rho)$, $\overline{e^{-}(x, \rho)}$ çiftleri (1.1) denkleminin iki farklı temel çözümler sistemini oluşturur. Böylece, $\rho \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$e^{+}(x, \rho) = b(\rho) e^{-}(x, \rho) + a(\rho) \overline{e^{-}(x, \rho)} \quad (3.15)$$

yazabiliriz, burada

$$a(\rho) = \frac{1}{2\rho i} W[e^{+}(x, \rho), e^{-}(x, \rho)], \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (3.16)$$

$$b(\rho) = -\frac{1}{2\rho i} W[e^{+}(x, \rho), \overline{e^{-}(x, \rho)}], \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (3.17)$$

dir. (3.16), (3.17) formüllerinden

$$|a(\rho)|^2 - |b(\rho)|^2 = 1, \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (3.18)$$

bulunur. (3.15) denkleminde aynı zamanda

$$e^-(x, \rho) = -\overline{b(\rho)}e^+(x, \rho) + a(\rho)\overline{e^+(x, \rho)} \quad (3.19)$$

elde edilir. Dahası (3.15) ve (3.19) den

$$\frac{1}{a(\rho)}e^+(x, \rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)}e^-(x, \rho) + \overline{e^-(x, \rho)} \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{a(\rho)}e^-(x, \rho) = -\frac{\overline{b(\rho)}}{a(\rho)}e^+(x, \rho) + \overline{e^+(x, \rho)} \quad (3.21)$$

eşitlikleri yazılır.

$$u^\pm(x, \rho) = \frac{e^\mp(x, \rho)}{a(\rho)}, \quad r^-(\rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)}, \quad r^+(\rho) = -\frac{\overline{b(\rho)}}{a(\rho)}, \quad t(\rho) = \frac{1}{a(\rho)} \quad (3.22)$$

ile gösterelim. Bu durumda (3.19) ve (3.21)

$$u^\pm(x, \rho) = r^\pm(\rho)e^\pm(x, \rho) + \overline{e^\pm(x, \rho)} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılır. (3.13) formülünü dikkate alırsak buradan

$$u^\pm(x, \rho) = r^\pm(\rho)e^{\pm i\rho x} + e^{\mp i\rho x} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$u^\pm(x, \rho) = t(\rho)e^{\mp i\rho x} + o(1), \quad x \rightarrow \mp\infty$$

asimptotik formülleri elde edilir. $u^-(x, \rho)$ ve $u^+(x, \rho)$ çözümleri sırasıyla sol ve sağ saçılma problemlerinin özfonksiyonları olarak adlandırılır. Burada $r^-(\rho)$, $r^+(\rho)$ ve $t(\rho)$ katsayıları sırasıyla sol, sağ yansıma katsayıları ve iletim katsayısı olarak adlandırılır. $e^+(x, \rho)$ ve $e^-(x, \rho)$ çözümleri $\text{Im } \rho > 0$ üst yarı düzleminde analitik fonksiyonlar olduğundan $a(\rho)$ fonksiyonu da $\text{Im } \rho > 0$ yarı düzlemine (3.16) formülü ile analitik devam ettirilir. $a(\rho)$ fonksiyonu $\text{Im } \rho > 0$ üst yarı düzleminde sadece sonlu sayıda sıfıra sahip olabilir (Maksudov ve Guseinov (1989)). Fakat biz burada $a(\rho)$ 'nın $\text{Im } \rho > 0$ yarı düzleminde sıfırlarının olmadığını varsayacağız. (3.18) den $\rho \in \mathbb{R}^*$ için $a(\rho) \neq 0$ olduğu elde edilir. Buna göre tüm $\rho \neq 0$ için $a(\rho) \neq 0$ kabul edebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.2. *Maksudov ve Guseinov (1989) (3.16), (3.17) formülleri ile tanımlı $a(\rho)$, $b(\rho)$ fonksiyonları $\rho \in \mathbb{R}^*$ için*

$$a(\rho) = e^{i\omega_0} - \frac{d}{2i\rho} + \frac{1}{2i\rho} \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{i\rho t} dt, \quad (3.24)$$

$$b(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{i\rho t} dt, \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilebilirler, burada

$$\omega_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} l(x) dx, \quad d = e^{i\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (l^2(x) + j(x)) dx,$$

ve $\varphi(t) \in L_1(0, +\infty)$, $\psi(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ dir.

Buradan

$$a(\rho) = e^{i\omega_0} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (\text{Im } \rho \geq 0) \quad (3.26)$$

ve

$$b(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.18) den ise

$$\frac{1}{|a(\rho)|} \leq 1, \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (3.28)$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3.3. *(Marchenko, 1955) $\frac{1}{a(\rho)}$ fonksiyonu sıfırın $D_\delta = \{\rho : |\rho| \leq \delta, \text{Im } \rho \geq 0\}$ ($\delta > 0$) şeklinde bir komşuluğunda sınırlıdır.*

(3.18) ve (3.22) formüllerinden

$$|r^\pm(\rho)| < 1, \quad \rho \in \mathbb{R}^*, \quad (3.29)$$

ve (3.24), (3.25) formüllerinden ise

$$r^\pm(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (3.30)$$

elde edilir. Buradan, $r^\pm(\rho) \in L_2(-\infty, +\infty)$ ve bu nedenle de

$$F_0^\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^\pm(\rho) e^{\pm i\rho x} d\rho \quad (3.31)$$

fonksiyonunun da $L_2(-\infty, +\infty)$ uzayına ait olduğu elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.4. (Maksudov ve Guseinov, 1989) $za(z)$ fonksiyonu kapalı üst yarı düzlemde sürekli olup

$$1 - |r^\pm(\rho)|^2 \geq \frac{V\rho^2}{1+\rho^2}, \quad \rho \in \mathbb{R}^*$$

olacak şekilde bir $V > 0$ bulunur. Ayrıca

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho) [r^\pm(\rho) + 1] = 0$$

dir.

Açıkça $r^\pm(\rho)$ fonksiyonu tüm reel $\rho \neq 0$ için süreklidir. Dahası tüm $\rho \in \mathbb{R}^*$ için

$$r^-(\rho) = -\overline{r^+(\rho)} \frac{\overline{a(\rho)}}{a(\rho)} \quad (3.32)$$

dir. (3.32) formülünden açıktır ki sol yansıma katsayısı sağ yansıma katsayısı cinsinden birebir belirlenir.

Yardımcı Teorem 3.5. $a(z)$ fonksiyonu sağ yansıma katsayısına göre

$$a(z) = \exp \left\{ i\omega_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \left[\left(1 - |r^+(\rho)|^2 \right) \right]}{\rho - z} d\rho \right\} \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilir, burada ω_0 Yardımcı Teorem 3.2' de tanımlı sayıdır.

3.3. Ters Problemin Temel İntegral Denklemleri

(3.21) formülünü

$$\left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{1}{e^{i\omega_0}} \right) e^-(x, \rho) = r^+(\rho) e^+(x, \rho) + \overline{e^+(x, \rho)} - \frac{1}{e^{i\omega_0}} e^-(x, \rho)$$

şeklinde yazalım ve her iki tarafını $y > x$ iken $\frac{1}{2\pi}e^{i\rho y}$ ile çarpıp ρ 'ya göre $-\infty$ dan $+\infty$ 'a integralleyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0} \right) e^{-}(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (r^+(\rho)) e^+(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\overline{e^+(x, \rho)} - e^{-i\omega_0} e^{-}(x, \rho) \right) e^{i\rho y} d\rho \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. $e^+(x, \rho)$ çözümünün (3.3) integral gösteriliminden faydalanırsak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^+(\rho) e^+(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho = R_1^+(x) F_0^+(x+y) + \int_x^{+\infty} C^+(x, t) F_0^+(t+y) dt$$

elde edilir. (3.34) nin sağındaki ikinci integral için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\overline{e^+(x, \rho)} - e^{-i\omega_0} e^{-}(x, \rho) \right] e^{i\rho y} d\rho = \overline{C^+(x, y)}$$

sağlanır, buna göre (3.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0} \right) e^{-}(x, \rho) e^{i\rho y} dy \\ = R_1^+(x) F_0^+(x+y) + \int_x^{+\infty} C^+(x, t) F_0^+(t+y) dt + \overline{C^+(x, y)} \quad (y > x) \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklini alır. Şimdi (3.35) 'in solundaki integrali

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0} \right) e^{-}(x, \rho) e^{i\rho y} dy \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0} \right) e^{-}(x, \rho) e^{i\rho x} e^{i\rho(y-x)} d\rho \end{aligned}$$

şekline getirelim. Açıktır ki

i)

$$e^-(x, \rho) e^{i\rho x} = R_1^-(x) + \int_{-\infty}^x C^-(x, t) e^{i\rho(x-t)} dt$$

fonksiyonu $\text{Im } \rho \geq 0$ yarıdüzleminde düzgün sınırlıdır;

ii) $\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0}$ fonksiyonu $\text{Im } \rho > 0$ için sınırlı olup $|\rho| \rightarrow +\infty$ iken sıfıra yaklaşır;

iii) Yardımcı Teorem 3.3 gereği $\left(\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0}\right) e^-(x, \rho) e^{i\rho y}$ ($y > x$) fonksiyonu sıfırın bir komşuluğunda sınırlıdır.

Buradan Jordan yardımcı teoremi gereği , $y > x$ için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - e^{-i\omega_0} \right) e^-(x, \rho) e^{i\rho y} dy = 0$$

elde edilir. Bu nedenle de $C^+(x, y)$ ($y \geq x$) çekirdek fonksiyonu için

$$F^+(x, y) + \overline{C^+(x, y)} + \int_x^{+\infty} C^+(x, t) F_0^+(t + y) dt = 0, \quad (y \geq x) \quad (3.36)$$

integral denklemini elde ediyoruz, burada

$$F^+(x, y) = R_1^+(x) F_0^+(x + y) \quad (3.37)$$

dır. Benzer şekilde $C^-(x, y)$ ($y \leq x$) çekirdek fonksiyonu için

$$F^-(x, y) + \overline{C^-(x, y)} + \int_{-\infty}^x C^-(x, t) F_0^-(t + y) dt = 0 \quad (y \leq x) \quad (3.38)$$

integral denklemini elde ediyoruz, burada

$$F^-(x, y) = R_1^-(x) F_0^-(x + y) \quad (3.39)$$

dir. (3.36) ve (3.38) denklemlerine (1.1)-(1.3) saçılma probleminin temel integral denklemleri veya Faddeev-Marchenko denklemleri adı verilir.

3.4. Ters Probleminin Çözümünün Tekliği

(3.36) ve (3.38) temel integral denklemlerini

$$R_1^\pm(x)F_0^\pm(x+y) + \overline{C^\pm(x,y)} \pm \int_x^{+\infty} C^\pm(x,t)F_0^\pm(t+y)dt = 0, \quad \pm y > \pm x \quad (3.40)$$

formunda da yazalım. Burada $F_0^\pm(x)$ fonksiyonları (3.31) formülü ile tanımlıdır. $F_0^\pm(x)$ fonksiyonları mutlak sürekli olup tüm $\omega > -\infty$ ve $\beta < \infty$ için

$$\int_\omega^\infty |F_0^+(x)| dx < +\infty, \quad \int_\omega^\infty (1+x) \left| \frac{d}{dx} F_0^+(x) \right| dx < +\infty, \quad (3.41)$$

$$\int_{-\infty}^\beta |F_0^-(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^\beta (1+|x|) \left| \frac{d}{dx} F_0^-(x) \right| dx < +\infty \quad (3.42)$$

koşulları sağlanır. Böylece ele alınan problemin $r^\pm(\rho)$ saçılma verileri aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

I— $r^\pm(\rho)$ yansıma katsayısı reel $\rho \neq 0$ için sürekli, $|r^\pm(\rho)| < 1$ ve $r^\pm(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca

$$F_0^\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [r^\pm(\rho)] e^{\pm i\rho x} d\rho$$

Fourier dönüşümü mutlak sürekli olup $L_2(-\infty, \infty)$ uzayına aittir. Bunların dışında tüm $\omega > -\infty$ ve $\beta < \infty$ için (3.41), (3.42) sağlanır.

Teorem 3.6. (Maksudov ve Guseinov, 1989) **I** koşulu sağlanırsa sırasıyla her sabitlenmiş $x > -\infty$ ve $x < +\infty$ için (3.36) ve (3.38) denklemlerinin sırasıyla tek $C^+(x, \cdot) \in L_1(x, \infty)$ ve $C^-(x, \cdot) \in L_1(-\infty, x)$ çözümleri vardır.

İspat. Her sabitlenmiş $x > -\infty$ için

$$\phi^+ f(y) = \int_x^{+\infty} F_0^+(t+y)f(t)dt, \quad y > x \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlı ϕ^+ operatörünü ele alalım. $\phi^+ L_1(x, \infty)$ (aynı zamanda $L_2(x, \infty)$) uzayında kompakt operatördür (Marchenko, 1986). Buna göre

$$\overline{h_x(y)} + \int_x^{+\infty} h_x(t)F_0^+(t+y)dx = 0, \quad y > x \quad (3.44)$$

homojen denkleminin sadece $h_x(y) \in L_1(x, \infty)$ triviyal çözümünün varlığını ispatlamak yeterlidir. **I** koşulu gereği $F_0^+(y)$ fonksiyonu ve bununla ilgili $h_x(y)$ fonksiyonu $x \leq y < +\infty$ yarı ekseninde sınırlıdır. Buna göre $h_x(\cdot) \in L_2(x, \infty)$ dur. Böylece

$$0 = \int_x^{+\infty} |h_x(y)|^2 dy + \int_x^{+\infty} \int_x^{+\infty} h_x(t)h_x(y)F_0^+(t+y)dt dy \quad (3.45)$$

elde ederiz. $\tilde{h}(\rho) = \int_x^{+\infty} h_x(t)e^{-i\rho t} dt$ olmak üzere (3.45) formülü ve

$$\int_x^{+\infty} |h_x(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(\rho)|^2 d\rho,$$

$$\int_x^{+\infty} \int_x^{+\infty} h_x(t)h_x(y)F_0^+(t+y)dt dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^+(\rho)\tilde{h}^2(\rho)d\rho,$$

Parsevall eşitliklerini kullanırsak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(\rho)|^2 d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^+(\rho)\tilde{h}^2(\rho)d\rho = 0,$$

yani

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(\rho)|^2 d\rho = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^+(\rho)\tilde{h}^2(\rho)d\rho$$

elde ederiz. Buna göre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(\rho)|^2 d\rho = \left| - \int_{-\infty}^{+\infty} r^+(\rho) \tilde{h}^2(\rho) d\rho \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |r^+(\rho)| |\tilde{h}(\rho)|^2 d\rho,$$

yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - |r^+(\rho)|) |\tilde{h}(\rho)|^2 d\rho \leq 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. $\rho \neq 0$ için $|r^+(\rho)| < 1$ olduğundan (3.46)' dan $\tilde{h}(\rho) \equiv 0$ elde edilir. Böylece (3.36) denklemi tek çözüme sahiptir. Benzer şekilde (3.38) denkleminin tek çözüme sahip olduğu gösterilir. $\square$

Bu teroreminden (1.3) koşullarını sağlayan $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyel fonksiyonlarının sağ yansıma katsayısına göre birebir belirlenebileceği elde edilir.

3.5. Ters Problemin Çözümü

Teorem 3.7. (Maksudov ve Guseinov, 1989) $r^+(\rho)$ fonksiyonunun ayırık spektruma sahip olmayan (1.1)-(1.3) probleminin sağ yansıma katsayısı olması için gerek ve yeter koşul

1) $r^+(\rho)$ sürekli fonksiyon olup tüm reel $\rho \neq 0$ için $|r^+(\rho)| < 1$, $r^+(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, $\rho \rightarrow \pm\infty$, $|r^+(0)| = 1$ ise $r^+(0) = -1$,

$$1 - |r^+(\rho)| \geq V \frac{\rho^2}{1 + \rho^2}$$

olacak şekilde $V > 0$ vardır;

2) $za_1(z)$ fonksiyonu kapalı üst yarı düzlemde sürekli, burada

$$a_1(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \left[\left(1 - |r^+(\rho)|^2 \right) \right]}{\rho - z} d\rho \right\} \quad (3.47)$$

3)

$$F_0^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(\rho) e^{i\rho x} d\rho \quad (3.48)$$

ve

$$F_{01}^-(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{r^+(\rho)} \frac{\overline{a_1(\rho)}}{a_1(\rho)} e^{-i\rho x} d\rho \quad (3.49)$$

fonksiyonları mutlak sürekli olup $F_0^{+'}(x)$, $F_{01}^{-'}(x)$ tüm $c > -\infty$ ve $b < +\infty$ için

$$\int_c^{\infty} (1+|x|) |F_0^{+'}(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^b (1+|x|) |F_{01}^{-'}(x)| dx \quad (3.50)$$

dir.

İspat. Gereklik önceki bölümlerde kanıtlanmıştı. Yeterliliği kısaca kanıtlayalım. Rastgele bir ω_0 (sonradan kesin belirlenecek) sayısını seçelim ve verilen $r^+(\rho)$ fonksiyonuna göre $r^-(\rho) = -\overline{r^+(\rho)} \frac{\overline{a(\rho)}}{a(\rho)}$ fonksiyonunu inşa edelim, burada $a(z) = e^{i\omega_0} a_1(z)$ dir. İspatlayalım ki bu iki fonksiyon (1.3) koşullarını sağlayan $j(x), l(x)$ reel potansiyellerine karşılık gelen (1.1) probleminin sırasıyla sağ ve sol yansıma katsayılarıdır.

Öncelikle teoremden 2) koşulu ile tanımlı $a_1(z)$ fonksiyonunu bazı önemli özelliklerini inceleyelim.

$za_1(z)$ fonksiyonu $\text{Im } z \geq 0$ kapalı üst yarı düzlemde sürekli olduğundan

$$\psi(\rho) = \lim_{\substack{z \rightarrow \rho \\ \text{Im } z \geq 0}} za_1(z), \quad (-\infty < \rho < +\infty)$$

limiti mevcuttur ve $\psi(\rho)$ fonksiyonu $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ üzerinde süreklidir. Buna göre tüm $\rho \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$a_1(\rho) =: \lim_{\substack{z \rightarrow \rho \\ \text{Im } z \geq 0}} a_1(z) \quad (3.51)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathbb{R}^*$ üzerinde süreklidir. (3.48) formülünü kullanarak

i) $\exists C > 0 \rightarrow |\rho a_1(\rho)| \leq C, -1 \leq \rho \leq 1$ özelliğini;

ii)

$$|a_1(\rho)|^2 = \frac{1}{1 - |r^+(\rho)|^2}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (3.52)$$

ve buradan çıkan $a_1(\rho) \neq 0, \rho \in \mathbb{R}^*$ ve $a_1(\rho) = 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right), |\rho| \rightarrow \infty$ özelliğini;

iii)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a_1(\rho)[1 + r^+(\rho)] = 0; \quad (3.53)$$

iv)

$$a_1(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0; \quad (3.54)$$

v) Sıfırın bir

$$D_\delta = \{z : |z| \leq \delta, \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad (\delta > 0)$$

komşuluğunda $\frac{1}{a_1(z)}$ sınırlıdır ; özelliklerini elde edebiliriz. Herhangi bir ω_0 sayısı için (bu sayı daha sonra birebir bulunacak)

$$a(z) = e^{i\omega_0} a_1(z), \quad (\operatorname{Im} z \geq 0, z \neq 0), \quad (3.55)$$

$$r^-(\rho) = -\overline{r^+(\rho)} \frac{\overline{a(\rho)}}{a(\rho)}, \quad (3.56)$$

$$F_0^-(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r^-(\rho) e^{-i\rho x} d\rho, \quad (3.57)$$

fonksiyonlarını oluşturalım. Teoremin (i) ve (iii) koşullarından, $r^+(\rho)$ ve $r^-(\rho)$ fonksiyonlarının önceki bölümdeki Teorem 3.1'in koşullarını karşıladığını elde ederiz. Böylece temel integral denklemlerini oluşturabiliriz:

$$R_1^\pm(x) F_0^\pm(x+y) + \overline{C^\pm(x,y)} \pm \int_x^{+\infty} C^\pm(x,t) F_0^\pm(t+y) dt = 0, \quad \pm y > \pm x, \quad (3.58)$$

burada

$$R_1^\pm(x) = e^{iw_\pm(x)} \quad (3.59)$$

olup $w_+(x)$ ve $w_-(x)$ keyfi reel fonksiyonlardır ve bunlar daha sonra bulunacak. Teorem 3.1 'e göre her sabitlenmiş $x \neq -\infty$ ve $x \neq \infty$ için (4.68) denklemleri sırasıyla tek $C^+(x,t)$ ve $C^-(x,t)$ çözümlerine sahiptir. Burada $C^\pm(x,t)$ ve $w_\pm(x)$ fonksiyonları arasında şu

ilişki mevcuttur:

$$C^{\pm}(x, t) = C_{(0)}^{\pm}(x, t) \cos w_{\pm}(x) + C_{(1)}^{\pm}(x, t) \sin w_{\pm}(x), \quad (3.60)$$

burada $C_{(0)}^{\pm}(x, t)$ ve $C_{(1)}^{\pm}(x, t)$

$$F_0^{\pm}(x+y) + \overline{C_{(0)}^{\pm}(x, y)} \pm \int_x^{\pm\infty} C_{(0)}^{\pm}(x, t) F_0^{\pm}(t+y) dt = 0, \quad \pm y \geq \pm x$$

$$iF_0^{\pm}(x+y) \overline{C_{(1)}^{\pm}(x, y)} \pm \int_x^{\pm\infty} C_{(1)}^{\pm}(x, t) F_0^{\pm}(t+y) dt = 0, \quad \pm y \geq \pm x$$

integral denklemlerinin çözümleridir. Şimdi $w_{\pm}(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki Volterra türden integral denklemin çözümü olarak tanımlayalım:

$$w_{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} W_{\pm}(t, w_{\pm}(t)) dt \quad (3.61)$$

burada

$$\begin{aligned} W_{\pm}(t, z) = & \left[\operatorname{Re} C_{(0)}^{\pm}(t, t) - \operatorname{Im} C_{(1)}^{\pm}(t, t) \right] \sin 2z + \\ & + 2 \operatorname{Re} C_{(1)}^{\pm}(t, t) \sin^2 z - 2 \operatorname{Im} C_{(0)}^{\pm}(t, t) \cos^2 z \end{aligned} \quad (3.62)$$

dir. Bu durumda (3.58) denklemlerinin $C^{\pm}(x, t)$ çözümleri ve (3.59) ile tanımlı $R_1^{\pm}(x)$ fonksiyonları yardımıyla oluşan

$$e^{\pm}(x, \rho) = R_1^{\pm}(x) e^{\pm i \rho x} \pm \int_x^{\pm\infty} C^{\pm}(x, t) e^{i \rho t} dt \quad (3.63)$$

fonksiyonları

$$-e^{\pm''}(x, \rho) + [j^{\pm}(x) + 2\rho l^{\pm}(x)] e^{\pm}(x, \rho) = \rho^2 e^{\pm}(x, \rho) \quad (3.64)$$

denklemlerini sağlar, burada

$$l^{\pm}(x) = \pm w'_{\pm}(x), \quad (3.65)$$

$$j^{\pm}(x) = -(l^{\pm}(x))^2$$

$$\pm 2\rho_{\pm}(x) \frac{d}{dx} \{ [\operatorname{Re} C^{\pm}(x, x)] \cos w_{\pm}(x) + [\operatorname{Im} C^{\pm}(x, x)] \sin w_{\pm}(x) \} \quad (3.66)$$

tüm $\pm c > -\infty$ için

$$\int_c^{\pm\infty} |l^{\pm}(x)| dx < \infty, \quad \int_c^{\pm\infty} (1 + |x|) [j^{\pm}(x) + |l^{\pm'}(x)|] dx < \infty \quad (3.67)$$

dir. Reel $\rho \neq 0$ için $e^{+}(x, \rho)$ ve $e^{-}(x, \rho)$ fonksiyonları

$$r^{\pm}(\rho) e^{\pm}(x, \rho) + \overline{e^{\pm}(x, \rho)} = \frac{1}{a(\rho)} e^{\pm}(x, \rho) \quad (3.68)$$

şeklinde bağlantılıdır. Aynı zamanda gösterilebilir ki buradaki $r^{+}(\rho)$ ve $r^{-}(\rho)$ fonksiyonları (1.1)-(1.3) probleminin sırasıyla sağ ve sol yansıma katsayılarıdır (Maksudov ve Guseinov, 1989). Bu aşamada (3.55) formülündeki ω_0 reel sayısını $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho) r^{+}(\rho) = ig$, burada g reel sayı olacak şekilde seçelim. Bu durumda $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho) [1 + r^{-}(\rho)] = 0$ olduğu da elde edilecektir. Şimdi, (3.68) gereği (3.64) 'den

$$e^{-}(x, \rho)'' + [\rho^2 - 2\rho l^{+}(x) - j^{+}(x)] e^{-}(x, \rho) = 0. \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.64) ve (3.69) denklemlerin taraf tarafa çıkartmakla

$$\{2\rho [l^{+}(x) - l^{-}(x)] + j^{+}(x) - j^{-}(x)\} e^{-}(x, \rho) = 0 \quad (3.70)$$

denklemini elde ederiz ki burdan da

$$l^{-}(x) = l^{+}(x) =: l(x), \quad j^{-}(x) = j^{+}(x) =: j(x), \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (3.71)$$

potansiyel fonksiyonları birebir bulunur. (3.67)'den ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |l(x)| dx < \infty \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) [j(x) + |l'(x)|] dx < \infty$$

elde edilir. □

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda, (1.1) denkleminin (1.2) katsayı sınıfındaki özel çözümleri için yeni integral gösterimleri elde edilmiş ve bu gösterimler hem düz hem de ters saçılma problemlerinin çözümüne uygulanmıştır. Kesikli spektrumun olmadığı varsayımı altında, düz problem incelenmiş, ters problemin temel integral denklemi türetilmiş ve bu denklemin tek çözülebilirliği kanıtlanmıştır. Son olarak ters saçılma probleminin çözümü verilmiş, potansiyellerin geri kazanımı için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir.

4.1. Jost Çözümlerinin İntegral Gösterimi

Burada (1.1) ve (1.3) koşulları için $l(x)$ fonksiyonu reel eksenin her kapalı aralığında mutlak sürekli kabul edeceğiz. (1.1) diferansiyel denkleminin süreksiz katsayılı veya parçalı sabit katsayılı Sturm-Liouville ikinci dereceden demeti adı verilmektedir. Bu denklemin

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{\pm}(x, \rho) e^{\pm i\rho\mu(x)} = 1 \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayan çözümlerini $f_{+}(x, \rho)$ ve $f_{-}(x, \rho)$ ile gösterelim. Burada $\mu(x) = x\sqrt{\kappa(x)}$ 'dir. $f_{+}(x, \rho)$ ve $f_{-}(x, \rho)$ çözümlerine sırasıyla (1.1) denkleminin sağ ve sol Jost çözümleri denir. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden biliyoruz ki ; (1.1) denkleminin (4.1) koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemi

$$f_{\pm}(x, \rho) = e_{\pm}(x, \rho) + \int_x^{\pm\infty} g(x, t, \rho) (j(t) + 2\rho l(t)) f_{\pm}(t, \rho) dt$$

integral denkleminin çözümünün bulunması problemine denktir. Burada

$$g(x, t, \rho) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(t)}} - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \frac{\sin \rho (\mu(t) + \mu(x))}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(t)}} + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \frac{\sin \rho (\mu(t) - \mu(x))}{\rho}$$

olup

$$e_{+}(x, \rho) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i\rho\mu(x)} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i\rho\mu(x)} \quad (4.2)$$

ve

$$e_{-}(x, \rho) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i\rho\mu(x)} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i\rho\mu(x)} \quad (4.3)$$

(1.1) denkleminin $j(x) = 0$ ve $l(x) = 0$ durumu için sırasıyla sağ ve sol Jost çözümleridir.

Öncelikle $f_{+}(x, \rho)$ sağ Jost çözümünü ele alalım. $x \geq 0$, $\text{Im } \rho \geq 0$ iken $f_{+}(x, \rho)$ çözümünün

$$f_{+}(x, \rho) = e^{iv_{+}(x) + i\rho x} + \int_x^{+\infty} A^{+}(x, t) e^{i\rho t} dt \quad (4.4)$$

şeklinde temsil edildiği literatürden bilinmektedir (Jaulent ve Jean, 1976; Guseinov, 1985). Burada

$$v_{+}(x) = \int_x^{+\infty} l(s) ds \quad (4.5)$$

olup; $A^{+}(x, t)$ çekirdek fonksiyonu

$$|A^{+}(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma^{+}\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1^{+}(x)}, 0 < x < t \quad (4.6)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A^{+}(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} j(t) e^{iv_{+}(t)} dt - \frac{i}{2} l\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{iv_{+}\left(\frac{x+t}{2}\right)} \\ &+ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} j(s) ds \int_{t-s+x}^{t+s-x} A^{+}(s, \xi) d\xi - i \int_x^{\frac{x+t}{2}} l(s) A^{+}(s, t-s+x) ds \\ &+ i \int_x^{+\infty} l(s) A^{+}(s, t+s-x) ds, t \geq x \end{aligned} \quad (4.7)$$

integral denklemini sağlar. Burada

$$\sigma^{+}(x) = \int_x^{+\infty} \left[|j(t)| + |l'(t)| \right] dt \quad (4.8)$$

$$\sigma_1^{+}(x) = \int_x^{+\infty} [(t-x) |j(t)| + 2 |l(t)|] dt \quad (4.9)$$

dir. Ayrıca $A^+(x, t)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq t$ için sürekli olup,

$$A^+(x, x) = \left(-\frac{i}{2}l(x) + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} [j(t) + l^2(t)] dt \right) e^{iv_+(x)} \quad (4.10)$$

koşulu sağlanmaktadır. $A^+(x, t)$ fonksiyonu aynı zamanda $D_x A^+(x, t)$ ve $D_t A^+(x, t)$, $(0 < x < t)$ kısmi türevlerine de sahiptir. Eğer $j(x)$ türevlenebilir ve $l(x)$ iki kez türevlenebilir fonksiyonlar olursa bu durumda $A^+(x, t)$ ikinci mertebeden türevlerine de sahip olup,

$$D_{xx}A^+(x, t) - D_{tt}A^+(x, t) = j(x)A^+(x, t) + 2il(x)D_t A^+(x, t) \quad (4.11)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar. (4.10) eşitliğinden $A_1^+(x, x) = \operatorname{Re} A^+(x, x)$ ve $A_2^+(x, x) = \operatorname{Im} A^+(x, x)$ olmak üzere

$$l(x) = 2A_1^+(x, x) \sin v_+(x) - 2A_2^+(x, x) \cos v_+(x) \quad (4.12)$$

$$A_1^+(x, x) \cos v_+(x) + A_2^+(x, x) \sin v_+(x) = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} [j(t) + l^2(t)] dt \quad (4.13)$$

eşitliklerinin elde edileceği açıktır.

Bu kesimdeki ilk hedefimiz benzer sonuçları $x < 0$ durumu için de elde etmektir. Bu durumda

$$f_{\pm}(x, \rho) = e_{\pm}(x, \rho) + \int_x^{\pm\infty} g(x, t, \rho) (j(t) + 2\rho l(t)) f_{\pm}(t, \rho) dt \quad (4.14)$$

integral denklemi

$$\begin{aligned} f_+(x, \rho) &= \omega_+ e^{i\omega\rho x} + \omega_- e^{-i\omega\rho x} + \int_x^0 \frac{\sin \omega\rho(t-x)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) f_+(t, \rho) dt + \\ &+ \int_x^{+\infty} \left[\omega_- \frac{\sin \rho(t+\omega x)}{\rho} + \omega_+ \frac{\sin \rho(t-\omega x)}{\rho} \right] [j(t) + 2\rho l(t)] f_+(t, \rho) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklinde yazılacaktır. Burada

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\omega} \right) \quad (4.16)$$

dir. (4.15) integral denleminin çözümünü $\text{Im } \rho \geq 0, x < 0$ iken

$$f_+(x, \rho) = R_+(x)e^{i\omega\rho x} + R_-(x)e^{-i\omega\rho x} + \int_{\omega x}^{+\infty} B^+(x, t)e^{i\rho t} dt \quad (4.17)$$

şeklinde arayacağız. Burada $R_+(x)$, $R_-(x)$ ve $B^+(x, t)$ henüz bilinmeyen fonksiyonlardır. Şimdi (4.15) denkleminde (4.4) ve (4.17) denklemlerini dikkate alalım.

Bu durumda

$$\begin{aligned} & R_+(x)e^{i\omega\rho x} + R_-(x)e^{-i\omega\rho x} + \int_{\omega x}^{+\infty} B^+(x, t)e^{i\rho t} dt = \omega_+ e^{i\omega\rho x} + \omega_- e^{-i\omega\rho x} \\ & + \int_x^0 \frac{\sin \omega\rho(t-x)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) (R_+(t)e^{i\omega\rho t} + R_-(t)e^{-i\omega\rho t}) dt \\ & = \omega_+ e^{i\omega\rho x} + \omega_- e^{-i\omega\rho x} \\ & + \int_x^0 \frac{\sin \omega\rho(t-x)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) (R_+(t)e^{i\omega\rho t} + R_-(t)e^{-i\omega\rho t}) dt \\ & + \int_x^0 \frac{\sin \omega\rho(t-x)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) \int_{\omega t}^{+\infty} B^+(t, s)e^{i\rho s} ds + \int_0^{+\infty} \left[\omega_- \frac{\sin(t+\omega x)}{\rho} + \right. \\ & \left. + \omega_+ \frac{\sin(t-\omega x)}{\rho} \right] [j(t) + 2\rho l(t)] \left(e^{i\rho t + i\nu_+(t)} \int_t^{+\infty} A^+(t, s)e^{i\rho s} ds \right) dt \quad (4.18) \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.18) 'nin sağ tarafındaki integralleri uygun formlara getirelim.

$$\begin{aligned} J_1 &:= \int_x^0 \frac{\sin \omega\rho(t-x)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) R_+(t)e^{i\omega\rho t} dt \\ &= \int_x^0 j(t) R_+(t) \frac{e^{i\rho\omega(2t-x)} - e^{i\rho\omega x}}{2i\rho\omega} dt + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 l(t) R_+(t) \left[e^{i\rho\omega(2t-x)} - e^{i\rho\omega x} \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(t) R_+(t) \int_{\omega x}^{\omega(2t-x)} e^{i\rho \xi} d\xi dt + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) R_+(t) e^{i\rho \omega(2t-x)} dt \\
&\quad - \frac{e^{i\rho \omega x}}{i\omega} \int_x^0 l(t) R_+(t) dt = \frac{1}{2\omega} \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi \int_{\frac{\omega x + \xi}{2\omega}}^0 j(t) R_+(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{2i\omega^2} \int_{\omega x}^{-\omega x} l\left(\frac{\omega x + \xi}{2\omega}\right) R_+\left(\frac{\omega x + \xi}{2\omega}\right) e^{i\rho \xi} d\xi + \frac{i}{\omega} e^{i\rho \omega x} \int_x^0 l(t) R_+(t) dt \\
&= \int_{\omega x}^{-\omega x} \left[\frac{1}{2\omega} \int_{\frac{\omega x + t}{2\omega}}^0 j(s) R_+(s) ds - \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x + t}{2\omega}\right) R_+\left(\frac{\omega x + t}{2\omega}\right) \right] e^{i\rho t} dt \\
&\quad + \frac{i}{\omega} e^{i\rho \omega x} \int_x^0 l(t) R_+(t) dt, \\
J_2 &:= \int_x^0 \frac{\sin \omega \rho (t-x)}{\omega \rho} (j(t) + 2\rho l(t)) R_-(t) e^{-i\omega \rho t} dt \\
&= \int_x^0 j(t) R_-(t) \frac{e^{-i\rho \omega x} - e^{i\rho \omega(x-2t)}}{2i\rho \omega} dt + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) R_-(t) (e^{-i\rho \omega x} - e^{i\rho \omega(x-2t)}) dt \\
&= \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(t) R_-(t) \int_{\omega(x-2t)}^{-\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi dt + \frac{e^{-i\rho \omega x}}{i\omega} \int_x^0 l(t) R_-(t) dt \\
&\quad - \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) R_-(t) e^{i\rho \omega(x-2t)} dt = \frac{1}{2\omega} \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{\omega x - t}{2\omega}}^0 j(s) R_-(s) ds \\
&\quad + \frac{e^{-i\rho \omega x}}{i\omega} \int_x^0 l(t) R_-(t) dt - \frac{1}{2i\omega^2} \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} l\left(\frac{\omega x - t}{2\omega}\right) R_-\left(\frac{\omega x - t}{2\omega}\right) dt \\
&= \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi \int_x^{\frac{\xi + \omega x}{2\omega}} l(t) B^+(t, \xi - \omega(t-x)) dt + \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_x^0 l(t) B^+(t, \xi - \omega(t-x)) dt \\
&\quad + \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_x^0 l(t) B^+(t, \xi - \omega(t-x)) dt = \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_x^{\min(\frac{\xi + \omega x}{2\omega}, 0)} l(t) B^+(t, \xi - \omega(t-x)) dt
\end{aligned}$$

$$= \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^{\min(\frac{\omega x+t}{2\omega}, 0)} l(s) B^+(s, t - \omega(s-x)) ds,$$

$$\begin{aligned} J_3 &:= \int_x^0 \frac{\sin \omega \rho (t-x)}{\omega \rho} (j(t) + 2\rho l(t)) \int_{\omega t}^{+\infty} B^+(t, s) e^{i\rho s} ds \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(t) dt \int_{\omega t}^{+\infty} B^+(t, s) ds \int_{s-\omega(t-x)}^{s+\omega(t-x)} e^{i\rho \xi} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) dt \left[\int_{\omega t}^{+\infty} B^+(t, s) e^{i\rho(s+\omega(t-x))} ds - \int_{\omega t}^{+\infty} B^+(t, s) e^{i\rho(s+\omega(t-x))} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\omega} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^0 j(s) ds \int_{t-\omega(s-x)}^{t+\omega(s-x)} B^+(s, \xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^{\min(\frac{\omega x+t}{2\omega}, 0)} l(s) B^+(s, t - \omega(s-x)) ds \\ &\quad - \frac{1}{i\omega} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^0 l(s) B^+(s, t + \omega(s-x)) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 &:= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_- \sin \rho (t + \omega x)}{\rho} + \frac{\omega_+ \sin \rho (t - \omega x)}{\rho} \right) (j(t) \\ &\quad + 2\rho l(t)) e^{i\rho t + i v_+(t)} dt = \frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{i\rho(2t+\omega x)} - e^{-i\rho\omega t}}{i\rho} \right) j(t) e^{i v_+(t)} dt \\ &\quad + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{i\rho(2t-\omega x)} - e^{i\rho\omega t}}{i\rho} \right) e^{i v_+(t)} j(t) dt + \frac{\omega_-}{i} \int_0^{+\infty} \left(e^{i\rho(2t+\omega x)} - e^{-i\rho\omega t} \right) l(t) e^{i v_+(t)} dt \\ &\quad + \frac{\omega_+}{i} \int_0^{+\infty} \left(e^{i\rho(2t-\omega x)} - e^{i\rho\omega t} \right) l(t) e^{i v_+(t)} dt = \frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} j(t) e^{i v_+(t)} dt \int_{-\omega x}^{2t+\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi \\ &\quad + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(t) e^{i v_+(t)} dt \int_{\omega x}^{2t-\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi + \frac{\omega_-}{2i} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} l \left(\frac{t - \omega x}{2} \right) e^{i v_+ \left(\frac{t - \omega x}{2} \right)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega_+}{2i} \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} l\left(\frac{t+\omega x}{2}\right) e^{iv_+\left(\frac{t+\omega x}{2}\right)} dt + i\omega_- e^{-i\rho\omega x} \int_0^{+\infty} l(t) e^{iv_+(t)} dt \\
& + i\omega_+ e^{i\rho\omega x} \int_0^{+\infty} l(t) e^{iv_+(t)} dt = \frac{\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{t-\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
& - \frac{\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} dt \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
& - \frac{\omega_+}{2} \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^0 j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} l\left(\frac{t-\omega x}{2}\right) e^{iv_+\left(\frac{t-\omega x}{2}\right)} dt \\
& - \frac{i\omega_+}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} l\left(\frac{t+\omega x}{2}\right) e^{iv_+\left(\frac{t+\omega x}{2}\right)} dt + \\
& i\omega_- e^{-i\rho\omega t} \int_0^{+\infty} l(t) e^{iv_+(t)} dt + i\omega_+ e^{i\rho\omega t} \int_0^{+\infty} l(t) e^{iv_+(t)} dt, \\
J_5 &:= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_- \sin \rho(t+\omega x)}{\rho} + \frac{\omega_+ \sin \rho(t-\omega x)}{\rho} \right) j(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t,s) e^{i\rho s} ds \\
&= \int_0^{+\infty} j(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t,s) \left(\frac{\omega_-}{2} \left(\frac{e^{i\rho(t+\omega x+s)} - e^{-i\rho(s-\omega x-t)}}{i\rho} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\omega_+}{2} \left(\frac{e^{i\rho(t-\omega x+s)} - e^{-i\rho(s-t+\omega x)}}{i\rho} \right) ds \right) \\
&= \int_0^{+\infty} j(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t,s) ds \left(\frac{\omega_-}{2} \int_{s-\omega x-t}^{s+\omega x-t} e^{i\rho \xi} d\xi \right. \\
& \left. + \frac{\omega_+}{2} \int_{s-t+\omega x}^{s+t-\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi \right) = \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} j(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t,s) ds \int_{s-\omega x-t}^{s+\omega x-t} e^{i\rho \xi} d\xi \\
& - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{-\omega x} j(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t,s) ds \int_{s+\omega x+t}^{s-\omega x-t} e^{i\rho \xi} d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t, s) ds \int_{s-t+\omega x}^{s+t-\omega x} e^{i\rho \xi} d\xi \\
& = \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} j(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_{\zeta-\omega x-t}^{\zeta+\omega x+t} A^+(t, s) ds \\
& \quad - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{-\omega x} j(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_{\zeta+\omega x+t}^{\zeta-\omega x-t} A^+(t, s) ds \\
& \quad + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_{\zeta+\omega x-t}^{\zeta-\omega x+t} A^+(t, s) ds \\
& = \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_{-\omega x}^{+\infty} j(t) dt \int_{\zeta-\omega x-t}^{\zeta+\omega x+t} A^+(t, s) ds \\
& \quad - \frac{\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_0^{-\omega x} j(t) dt \int_{\zeta+\omega x+t}^{\zeta-\omega x-t} A^+(t, s) ds \\
& \quad + \frac{\omega_+}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_0^{+\infty} j(t) dt \int_{\zeta+\omega x-t}^{\zeta-\omega x+t} A^+(t, s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_6 &:= 2 \int_0^{+\infty} [\omega_- \sin \rho(t + \omega x) + \omega_+ \sin \rho(t - \omega x)] l(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t, s) e^{i\rho s} ds \\
&= \frac{\omega_-}{i} \int_0^{+\infty} l(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t, s) e^{i\rho(s+t+\omega x)} ds \\
& \quad + \frac{\omega_+}{i} \int_0^{+\infty} l(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t, s) e^{i\rho(s+t-\omega x)} ds \\
& \quad - \frac{\omega_-}{i} \int_0^{+\infty} l(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t, s) e^{i\rho(s-t-\omega x)} ds \\
& \quad - \frac{\omega_+}{i} \int_0^{+\infty} l(t) dt \int_t^{+\infty} A^+(t, s) e^{i\rho(s-t+\omega x)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\omega_- \int_0^{+\infty} l(t)dt \int_{\omega x+2t}^{+\infty} A^+(t, \zeta - \omega x - t) e^{i\rho \xi} d\xi \\
&\quad - i\omega_+ \int_0^{+\infty} l(t)dt \int_{2t-\omega x}^{+\infty} A^+(t, \zeta + \omega x - t) e^{i\rho \xi} d\xi \\
&\quad + i\omega_- \int_0^{+\infty} l(t)dt \int_{-\omega x}^{+\infty} A^+(t, \zeta + \omega x + t) e^{i\rho \xi} d\xi \\
&\quad + i\omega_+ \int_0^{+\infty} l(t)dt \int_{\omega x}^{+\infty} A^+(t, \zeta - \omega x + t) e^{i\rho \xi} d\xi \\
&= -i\omega_- \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_0^{\frac{\zeta - \omega x}{2}} l(t) A^+(t, \zeta - \omega x - t) dt \\
&\quad - i\omega_+ \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_0^{\frac{\zeta + \omega x}{2}} l(t) A^+(t, \zeta + \omega x - t) dt \\
&\quad + i\omega_- \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_0^{+\infty} l(t) A^+(t, \zeta + \omega x + t) dt \\
&\quad + i\omega_+ \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho \xi} d\xi \int_0^{+\infty} l(t) A^+(t, \zeta - \omega x + t) dt.
\end{aligned}$$

Şimdi elde edilen bu integrallerin değerlerini (4.18) formülünde yerine yazalım :

$$\begin{aligned}
&R_+(x) e^{i\omega \rho x} + R_-(x) e^{-i\omega \rho x} + \int_{\omega x}^{+\infty} B^+(x, t) e^{i\rho t} dt = \omega_+ e^{i\rho \omega x} + \omega_- e^{-i\rho \omega x} \\
&\quad + \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} dt \left[\frac{1}{2\omega} \int_{\frac{\omega x+t}{2\omega}}^0 j(s) ds R_+(s) ds - \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x+t}{2\omega}\right) R_+\left(\frac{\omega x+t}{2\omega}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{\omega} e^{i\rho\omega x} \int_x^0 l(t) R_+(t) dt + \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} \left[\frac{1}{2\omega} \int_{\frac{\omega x-t}{2\omega}}^0 j(s) R_-(s) ds \right. \\
& \left. + \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x-t}{2\omega}\right) R_-\left(\frac{\omega x-t}{2\omega}\right) \right] dt - \frac{i}{\omega} e^{-i\rho\omega x} \int_x^0 l(t) R_-(t) dt \\
& + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{t-\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{i v_+(s)} ds - \frac{\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{-\omega x} e^{i\rho t} dt \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} j(s) e^{i v_+(s)} ds \\
& + \frac{\omega_+}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{i v_+(s)} ds - \frac{\omega_+}{2} \int_{\omega x}^{\omega x} e^{i\rho t} dt \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^0 j(s) e^{i v_+(s)} ds \\
& - \frac{i\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} l\left(\frac{t-\omega x}{2}\right) e^{i v_+(\frac{t-\omega x}{2})} dt - \frac{i\omega_+}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} l\left(\frac{t+\omega x}{2}\right) e^{i v_+(\frac{t+\omega x}{2})} dt \\
& + i\omega_- e^{-i\rho\omega x} \int_0^{+\infty} l(t) e^{i v_+(t)} dt + i\omega_+ e^{i\rho\omega x} \int_0^{+\infty} l(t) e^{i v_+(t)} dt \\
& + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_{-\omega x}^{+\infty} j(s) ds \int_{t-\omega x-s}^{t+\omega x+s} A^+(s, \zeta) d\zeta \\
& - \frac{\omega_-}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_0^{-\omega x} j(s) ds \int_{t+\omega x+s}^{t-\omega x-s} A^+(s, \zeta) d\zeta \\
& + \frac{\omega_+}{2} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_0^{+\infty} j(s) ds \int_{t+\omega x-s}^{t-\omega x+s} A^+(s, \zeta) d\zeta \\
& - i\omega_- \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} l(s) A^+(s, t-\omega x-s) ds \\
& - i\omega_+ \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_0^{\frac{t+\omega x}{2}} l(s) A^+(s, t+\omega x-s) ds \\
& + i\omega_- \int_{-\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_0^{+\infty} l(s) A^+(s, t+\omega x+s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i\omega_- \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_0^{+\infty} l(s) A^+(s, t - \omega x + s) ds \\
& + \frac{1}{2\omega} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^0 j(s) ds \int_{t-\omega(s-x)}^{t+\omega(s-x)} B^+(s, \zeta) d\zeta \\
& + \frac{1}{i\omega} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^{\min(\frac{\omega x+t}{2\omega}, 0)} l(s) B^+(s, t - \omega(s-x)) ds \\
& - \frac{1}{i\omega} \int_{\omega x}^{+\infty} e^{i\rho t} dt \int_x^0 l(s) B^+(s, t + \omega(s-x)) ds
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$R_+(x)$ ve $R_-(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleyelim :

$$R_+(x) = \omega_+ + \frac{i}{\omega} \int_x^0 l(t) R_+(t) dt + i\omega_+ \int_0^{+\infty} l(t) e^{iv_+(t)} dt$$

$$R_-(x) = \omega_- + \frac{i}{\omega} \int_x^0 l(t) R_-(t) dt + i\omega_- \int_0^{+\infty} l(t) e^{iv_-(t)} dt$$

Buradan

$$R_+(x) = \omega_+ \left(e^{iv_+(0)} \right) e^{\frac{i}{\omega} \int_x^0 l(t) dt}, (x < 0) \tag{4.20}$$

$$R_-(x) = \omega_- \left(e^{iv_-(0)} \right) e^{-\frac{i}{\omega} \int_x^0 l(t) dt}, (x < 0) \tag{4.21}$$

bulunur. (4.19) eşitliğinden Fourier dönüşümünün tekliği özelliği gereği $B^+(x, t)$ çekirdek fonksiyonu için aşağıdaki integral denklem elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
B^+(x, t) &= \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{\omega x+t}{2\omega}}^0 j(s) R_+(s) ds - \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x+t}{2\omega}\right) R_+\left(\frac{\omega x+t}{2\omega}\right) \\
&+ \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{\omega x-t}{2\omega}}^0 j(s) R_-(s) ds + \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x-t}{2\omega}\right) R_-\left(\frac{\omega x-t}{2\omega}\right) - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} j(s) e^{iv_-(s)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{\omega_+}{2} \int_{\frac{\omega x - t}{2\omega}}^0 j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{\omega_+}{2} \int_{\frac{\omega x - t}{2\omega}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \right] \\
& - \frac{i\omega_-}{2} l \left(\frac{t - \omega x}{2} \right) e^{iv_+(\frac{t - \omega x}{2})} - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{-\omega x} j(s) ds \int_{t + \omega x + s}^{t - \omega x - s} A^+(s, \zeta) d\zeta \\
& + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(s) ds \int_{t + \omega x - s}^{t - \omega x + s} A^+(s, \zeta) d\zeta - i\omega_- \int_0^{\frac{t - \omega x}{2}} l(s) A^+(s, t - \omega x - s) ds \\
& + i\omega_+ \int_0^{+\infty} l(s) A^+(s, t - \omega x + s) ds + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) ds \int_{t - \omega(s - x)}^{t + \omega(s - x)} B^+(s, \zeta) d\zeta \\
& + \frac{1}{i\omega} \int_x^{\frac{\omega x + t}{2\omega}} l(s) B^+(s, t - \omega(s - x)) ds \\
& - \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(s) B^+(s, t + \omega(s - x)) ds, \omega x \leq t < -\omega x, \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^+(x, t) &= \frac{\omega_-}{2} \int_{\frac{t - \omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{\frac{t + \omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
& - \frac{i\omega_-}{2} l \left(\frac{t - \omega x}{2} \right) e^{iv_+(\frac{t - \omega x}{2})} - \frac{i\omega_+}{2} l \left(\frac{t + \omega x}{2} \right) e^{iv_+(\frac{t + \omega x}{2})} \\
& + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} j(s) \int_{t - \omega x - s}^{t + \omega x + s} A^+(s, \zeta) d\zeta - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{-\omega x} j(s) \int_{t + \omega x + s}^{t - \omega x - s} A^+(s, \zeta) d\zeta \\
& + \frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} j(s) \int_{t + \omega x - s}^{t - \omega x + s} A^+(s, \zeta) d\zeta - i\omega_- \int_0^{\frac{t - \omega x}{2}} l(s) A^+(s, t - \omega x - s) ds \\
& - i\omega_+ \int_0^{\frac{t + \omega x}{2}} l(s) A^+(s, t + \omega x - s) ds + i\omega_- \int_0^{+\infty} l(s) A^+(s, t + \omega x + s) ds \\
& + i\omega_+ \int_0^{+\infty} l(s) A^+(s, t - \omega x + s) ds + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) ds \int_{t - \omega(s - x)}^{t + \omega(s - x)} B^+(s, \zeta) d\zeta \\
& + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(s) B^+(s, t - \omega(s - x)) ds - \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(s) B^+(s, t + \omega(s - x)) ds, t \geq -\omega x \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Böylece, eğer $B^+(x, t)$ çekirdek fonksiyonu (4.22), (4.23) integral denkleminin bir çözümü ise $f_+(x, \rho)$ ($\text{Im } \rho \geq 0, x < 0$) Jost çözümü (4.17) şeklinde bir gösterime sahiptir. (4.22), (4.23) integral denkleminin çözümünün varlığı ve diğer özelliklerini ilerdeki bölümlerde ele alacağız. Şimdilik ise $f_-(x, \rho)$ sol Jost çözümü için de benzer incelemeleri yapalım. Öncelikle

$$f_-(x, \rho) = e^{iv_-(x)i\rho x} + \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(x, t) e^{-i\rho t} dt, \quad \text{Im } \rho \geq 0, x < 0 \quad (4.24)$$

gösterilimi sağlanır. (4.24) formülünde

$$v_-(x) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^x l(t) dt \quad (4.25)$$

olup $A^-(x, t)$ çekirdek fonksiyonu

$$|A^-(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma^-\left(\frac{\omega x + t}{2}\right) e^{\sigma_1^-(x)} \quad (4.26)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$\sigma^-(x) = \int_{-\infty}^x \left[|j(s)| + \frac{1}{\omega} |l'(s)| \right] ds,$$

$$\sigma_1^-(x) = \int_{-\infty}^s \left[(x-s) |j(s)| + \frac{2}{\omega} |l(s)| \right] ds$$

dir. Bunları ispatlayalım.

$$f_-(x, \rho) = e^{-i\omega\rho t} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin \omega\rho (x-t)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) f_-(t, \rho) dt$$

integral denkleminde

$$f_-(x, \rho) = e^{-i\omega\rho t + iv_-(x)} + \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(x, t) e^{-i\rho t} dt$$

yerine konursa

$$\begin{aligned}
& e^{-i\omega\rho t + i v_-(x)} + \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(x, t) e^{-i\rho t} dt \\
&= e^{-i\omega\rho t} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin \omega\rho (x-t)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) e^{-i\omega\rho t + i v_-(t)} dt \\
&+ \int_{-\infty}^x \frac{\sin \omega\rho (x-t)}{\omega\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho s} ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki integralleri

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^x \frac{\sin \omega\rho (x-t)}{\omega\rho} j(t) e^{-i\omega\rho t + i v_-(x)} dt = \int_{-\infty}^x j(t) e^{+i v_-(t)} \left(\frac{e^{i\omega\rho (x-2t)} - e^{-i\omega\rho x}}{2i\omega\rho} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\omega x} e^{-i\rho t} dt \int_{-\infty}^{\frac{\omega x + t}{2\omega}} j(s) e^{i v_-(s)} ds, \\
& 2 \int_{-\infty}^x \frac{\sin \omega\rho (x-t)}{\omega\rho} l(t) e^{-i\omega\rho t + i v_-(x)} dt = \frac{2}{\omega} \int_{-\infty}^x \left(\frac{e^{-i\omega\rho (2t-x)} - e^{-i\omega\rho x}}{2i} \right) l(t) e^{+i v_-(t)} dt \\
&= \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x e^{-i\omega\rho (2t-x)} l(t) e^{+i v_-(t)} dt - \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega\rho x} \int_{-\infty}^x l(t) e^{+i v_-(t)} dt \\
&= \frac{1}{2i\omega^2} \int_{-\infty}^{\omega x} l \left(\frac{\omega x + t}{2\omega} \right) e^{+i v_-(\frac{\omega x + t}{2\omega})} e^{-i\rho x} dt + e^{-i\omega\rho x} \int_{-\infty}^x i v'_-(t) e^{+i v_-(t)} dt \\
&= \frac{1}{2i\omega^2} \int_{-\infty}^{\omega x} l \left(\frac{\omega x + t}{2\omega} \right) e^{+i v_-(\frac{\omega x + t}{2\omega})} e^{-i\rho x} dt + e^{-i\omega\rho x} \left(e^{+i v_-(x)} - 1 \right), \\
& \int_{-\infty}^x \frac{\sin \omega\rho (x-t)}{\omega\rho} [j(t) + 2\rho l(t)] dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho s} ds \\
&= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^x j(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) ds \frac{e^{-i\rho (s + \omega(t-x))} - e^{-i\rho (s + \omega(x-t))}}{i\rho} ds \\
&+ \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) \left[e^{-i\rho (s + \omega(t-x))} - e^{-i\rho (s + \omega(x-t))} \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^x j(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} A^-(t, s) ds \int_{s-\omega(x-t)}^{s+\omega(x-t)} e^{-i\rho\xi} d\xi \\
&+ \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega(2t-x)} A^-(t, \zeta + \omega(x-t)) e^{-i\rho\xi} d\xi \\
&- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(t, \zeta - \omega(x-t)) e^{-i\rho\xi} d\xi x \\
&= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^x j(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho\xi} d\xi \int_{\xi-\omega(x-t)}^{\xi+\omega(x-t)} A^-(t, s) ds \\
&+ \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega(2t-x)} A^-(t, \zeta + \omega(x-t)) e^{-i\rho\xi} d\xi \\
&- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(t, \zeta - \omega(x-t)) e^{-i\rho\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\omega x} e^{-i\rho\xi} d\xi \int_{-\infty}^x j(t) dt \int_{\zeta-\omega(x-t)}^{\zeta+\omega(x-t)} A^-(t, s) ds \\
&+ \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\omega x} e^{-i\rho\xi} d\xi \int_{\frac{\omega x+\zeta}{2\omega}}^x l(t) A^-(t, \zeta + \omega(x-t)) dt \\
&- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\omega x} e^{-i\rho\xi} d\xi \int_{-\infty}^x l(t) A^-(t, \zeta - \omega(x-t)) dt
\end{aligned}$$

formunda ifade ederek yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
A^-(x, t) &= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\frac{\omega x+t}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{1}{2i\omega^2} l\left(\frac{\omega x+t}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{\omega x+t}{2\omega})} \\
&+ \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^x j(s) ds \int_{t-\omega(x-s)}^{t+\omega(x-s)} A^-(s, \zeta) d\zeta + \frac{1}{i\omega} \int_{\frac{\omega x+t}{2\omega}}^x l(s) A^-(s, t + \omega(x-s)) ds \\
&- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(s) A^-(s, t - \omega(x-s)) ds, t < \omega x
\end{aligned} \tag{4.27}$$

integral denklemi elde edilir. Bu son denklemde

$$\frac{\omega x + t}{2\omega} = u, \frac{\omega x - t}{2\omega} = v$$

dönüşümü yapılırsa u ve v değişkenlerine göre

$$A^-(u+v, \omega(u-v)) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^u j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{1}{2i\omega^2} l(u) e^{iv_-(u)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\frac{\omega x + t}{2\omega}} dr \int_0^{\frac{\omega x - t}{2\omega}} A^-(r+\beta, \omega(r-\beta)) j(r+\beta) d\beta$$

$$+ \frac{1}{i\omega} \int_0^v l(u+\beta) A^-(u+\beta, \omega(u-\beta)) d\beta - \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^u l(r+v) A^-(r+v, \omega(r-v)) dr$$

denklemini elde edeceğiz. Kolaylık için

$$H^-(u, v) = A^-(u+v, \omega(u-v))$$

dersek

$$H^-(u, v) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^u j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{1}{2i\omega^2} l(u) e^{iv_-(u)}$$

$$+ \int_{-\infty}^u dr \int_0^v j(r+\beta) H^-(r, \beta) d\beta + \frac{1}{i\omega} \int_0^v l(u+\beta) H^-(u, \beta) d\beta$$

$$- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^u l(r+v) H^-(r, v) dr$$

denklemini elde ederiz. Jaulent ve Jean (1976); Guseinov (1985) çalışmalarında olduğu gibi ardışık yaklaşımlar metodu ile buradan (4.26) eşitsizliği ile denk olan

$$|H(u, v)| \leq \frac{1}{2\omega} \sigma^-(u) e^{\sigma_1^-(u+v)}$$

eşitsizliği bulunur.

$x > 0$ durumu için $f_-(x, \rho)$ sol Jost çözümünün integral gösterilimini de bulalım. (4.14)

denkleminde $x > 0$ için;

$$f_-(x, \rho) = e_-(x, \rho) + \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\kappa(t)}} \right) \frac{\sin \rho (\mu(t) + \mu(x))}{\rho} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{1}{\sqrt{\kappa(t)}} \right) \frac{\sin \rho (\mu(x) - \mu(t))}{\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) f_-(t, \rho) dt$$

yazabiliriz. $x > 0$ olduğundan buradan

$$f_-(x, \rho) = \frac{1}{2}(1 - \omega)e^{i\rho x} + \frac{1}{2}(1 + \omega)e^{-i\rho x} \\ + \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) \frac{\sin \rho (x + \omega t)}{\rho} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) \frac{\sin \rho (x - \omega t)}{\rho} \right] (j(t) + 2\rho l(t)) f_-(t, \rho) dt \\ + \int_0^x \frac{\sin \rho (x - t)}{\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) f_-(t, \rho) dt \quad (4.28)$$

elde ederiz. (4.27)'un çözümünü

$$f_-(x, \rho) = T_+(x)e^{i\rho x} + T_-(x)e^{-i\rho x} + \int_{-\infty}^x B^-(x, t)e^{-i\rho t} dt \quad (4.29)$$

şeklinde arayacağız. (4.29)'u (4.27)'da yerine yazalım ve bunu yaparken $x < 0$ için

$$f_-(x, \rho) = e^{-i\omega\rho x + i\nu_-(x)} + \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(x, t)e^{-i\rho t} dt$$

olduğunu da dikkate alalım. Bu durumda

$$T_+(x)e^{i\rho x} + T_-(x)e^{-i\rho x} + \int_{-\infty}^x B^-(x, t)e^{-i\rho t} dt = \frac{1}{2}(1 - \omega)e^{i\rho x} + \frac{1}{2}(1 + \omega)e^{-i\rho x} \\ + \int_{-\infty}^0 \left[\omega_- \frac{\sin \rho (x + \omega t)}{\rho} + \omega_+ \frac{\sin \rho (x - \omega t)}{\rho} \right] [j(t)$$

$$\begin{aligned}
& + 2\rho l(t) \left(e^{-i\omega\rho x + iv_-(x)} + \int_{-\infty}^{\omega x} A^-(x,t) e^{-i\rho t} \right) dt \\
& + \int_0^x \frac{\sin \rho (x-t)}{\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) \left[T_+(t) e^{i\rho t} + T_-(t) e^{-i\rho t} + \int_{-\infty}^t B^-(t,s) e^{-i\rho s} ds \right] \\
& + \int_0^x \frac{\sin \rho (x-t)}{\rho} (j(t) + 2\rho l(t)) \left[T_+(t) e^{i\rho t} + T_-(t) e^{-i\rho t} + \int_{-\infty}^t B^-(t,s) e^{-i\rho s} ds \right]
\end{aligned}$$

yazarız. Sağ taraftaki integralleri yine de aşağıdaki gibi yazalım:

$$J_1 = \int_{-\infty}^0 \left[\omega_- \frac{\sin \rho (x + \omega t)}{\rho} + \omega_+ \frac{\sin \rho (x - \omega t)}{\rho} \right] j(t) e^{-i\omega\rho t + iv_-(t)} dt$$

olsun.

$$\frac{\sin \rho x}{\rho} e^{-i\rho \xi} = \frac{e^{-i\rho(\xi-x)} - e^{-i\rho(\xi+x)}}{2i\rho} = \frac{1}{2} \int_{\xi-x}^{\xi+x} e^{-i\rho s} ds$$

olduğundan;

$$\omega_- \frac{\sin \rho (x + \omega t)}{\rho} = \frac{\omega_-}{2} \int_{-x}^{x+2\omega t} e^{-i\rho s} ds$$

ve

$$\omega_+ \frac{\sin \rho (x - \omega t)}{\rho} = \frac{\omega_+}{2} \int_{2\omega t-x}^x e^{-i\rho s} ds$$

şeklindedir. Bu nedenle;

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(t) e^{iv_-(t)} dt \int_{-x}^{x+2\omega t} e^{-i\rho s} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(t) e^{iv_-(t)} dt \int_{2\omega t-x}^x e^{-i\rho s} ds \\
&= \frac{\omega_-}{2} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho s} ds \int_{-\infty}^{\frac{s-x}{2\omega}} j(t) e^{iv_-(t)} dt + \int_{-x}^x e^{-i\rho s} ds \int_{\frac{s-x}{2\omega}}^0 j(t) e^{iv_-(t)} dt \right) \\
&+ \frac{\omega_+}{2} \left(\int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho s} ds \int_{-\infty}^{\frac{s+x}{2\omega}} j(t) e^{iv_-(t)} dt + \int_{-x}^x e^{-i\rho s} ds \int_{-\infty}^0 j(t) e^{iv_-(t)} dt \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$J_1 = \int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho t} \left[-\frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t+x}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds \right] dt \\ + \int_{-x}^x e^{-i\rho t} \left[\frac{\omega_-}{2} \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds \right] dt$$

olur. Şimdi

$$J_2 = 2 \int_{-\infty}^0 [\omega_- \sin \rho (x + \omega t) + \omega_+ \sin \rho (x - \omega t)] l(t) e^{-i\omega \rho t + iv_-(t)} dt$$

olsun. Buna göre;

$$J_2 = \frac{\omega_-}{i} \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\rho x} - e^{-i\rho(x+2\omega t)} \right) l(t) e^{iv_-(t)} dt \\ + \frac{\omega_+}{i} \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\rho(x-2\omega t)} - e^{-i\rho x} \right) l(t) e^{iv_-(t)} dt \\ = i\omega_+ e^{i\rho x} \int_{-\infty}^0 l(t) e^{iv_-(t)} dt - i\omega_- e^{i\rho x} \int_{-\infty}^0 l(t) e^{iv_-(t)} dt \\ + i\omega_- \int_{-\infty}^x e^{i\rho s} l\left(\frac{s-x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{s-x}{2\omega})} ds - i\omega_+ \int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho s} l\left(\frac{s+x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{s+x}{2\omega})} ds.$$

Böylece;

$$J_2 = \left(i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s) e^{iv_-(s)} ds \right) e^{-i\rho x} - \left(i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(s) e^{iv_-(s)} ds \right) e^{i\rho x} \\ + \frac{i\omega_-}{\omega} \int_{-\infty}^x e^{i\rho t} l\left(\frac{t-x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{t-x}{2\omega})} dt - \frac{i\omega_+}{\omega} \int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho t} l\left(\frac{t+x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{t+x}{2\omega})} dt$$

elde edilir.

$$J_3 = \int_{-\infty}^0 \left[\omega_- \frac{\sin \rho (x + \omega t)}{\rho} + \omega_+ \frac{\sin \rho (x - \omega t)}{\rho} \right] j(t) dt * \int_{-\infty}^0 A^-(t, s) e^{-i\rho s} ds$$

olsun. Benzer şekilde

J_3

$$= \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^x e^{-i\rho t} dt \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x-\omega s}^{t+x+\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^x e^{-i\rho t} dt \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x+\omega s}^{t+x-\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta$$

$$\begin{aligned} J_4 &= 2 \int_{-\infty}^0 [\omega_- \sin \rho (x + \omega t) + \omega_+ \sin \rho (x - \omega t)] l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho s} ds \\ &= \frac{\omega_-}{i} \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho(s-x-\omega t)} ds - \frac{\omega_-}{i} \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho(s+x+\omega t)} ds \\ &\quad + \frac{\omega_+}{i} \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho(s-x+\omega t)} ds - \frac{\omega_+}{i} \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{\omega t} A^-(t, s) e^{-i\rho(s+x-\omega t)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{-x} A^-(t, \zeta + x + \omega t) e^{-i\rho \zeta} d\zeta \\ &\quad + i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{x+2\omega t} A^-(t, \zeta - x - \omega t) e^{-i\rho \zeta} d\zeta \\ &\quad + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^x A^-(t, \zeta - x + \omega t) e^{-i\rho \zeta} d\zeta \\ &\quad - i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(t) dt \int_{-\infty}^{2\omega t-x} A^-(t, \zeta + x - \omega t) e^{-i\rho \zeta} d\zeta \\ &= i\omega_- \int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho \zeta} d\zeta \int_{-\infty}^0 l(t) A^-(t, \zeta + x + \omega t) dt \\ &\quad - i\omega_- \int_{-\infty}^x e^{-i\rho \zeta} d\zeta \int_{\frac{\zeta-x}{2\omega}}^0 l(t) A^-(t, \zeta - x - \omega t) dt \end{aligned}$$

$$+i\omega_+ \int_{-\infty}^x e^{-i\rho\zeta} d\zeta \int_{-\infty}^0 l(t) A^-(t, \zeta - x + \omega t) dt$$

$$-i\omega_+ \int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho\zeta} d\zeta \int_{\frac{\zeta+x}{2\omega}}^0 l(t) A^-(t, \zeta + x - \omega t) dt,$$

$$J_5 = \int_0^x \frac{\sin \rho (x-t)}{\rho} j(t) (T_+(t) e^{i\rho t} + T_-(t) e^{-i\rho t}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x j(t) T_+(t) dt \int_{2t-x}^x e^{-i\rho s} ds + \frac{1}{2} \int_0^x j(t) T_-(t) dt \int_{2t-x}^x e^{-i\rho s} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x j(t) T_+(t) dt \int_{-x}^{x-2t} e^{-i\rho s} ds + \frac{1}{2} \int_0^x j(t) T_-(t) dt \int_{2t-x}^x e^{-i\rho s} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{-i\rho s} ds \int_0^{\frac{x-s}{2}} j(t) T_+(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{-i\rho s} ds \int_0^{\frac{x+s}{2}} j(t) T_-(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{-i\rho t} dt \left(\int_0^{\frac{x-t}{2}} j(s) T_+(s) ds + \int_0^{\frac{x+t}{2}} j(s) T_-(s) ds \right),$$

$$J_6 = 2 \int_0^x \sin \rho (x-t) l(t) (T_+(t) e^{i\rho t} + T_-(t) e^{-i\rho t}) dt$$

$$= \frac{1}{i} \int_0^x l(t) T_+(t) e^{i\rho t} dt - \frac{1}{i} \int_0^x l(t) T_+(t) e^{-i\rho(x-2t)} dt$$

$$+ \frac{1}{i} \int_0^x l(t) T_-(t) e^{-i\rho(2t-x)} dt - \frac{1}{i} \int_0^x l(t) T_-(t) e^{-i\rho x} dt$$

$$= ie^{-i\rho x} \int_0^x l(t) T_-(t) dt - ie^{i\rho x} \int_0^x l(t) T_+(t) dt + i \int_{-x}^x l\left(\frac{x-s}{2}\right) T_+\left(\frac{x-s}{2}\right) e^{-i\rho s} ds$$

$$- i \int_{-x}^x l\left(\frac{x+s}{2}\right) T_-\left(\frac{x+s}{2}\right) e^{-i\rho s} ds,$$

$$J_7 = \int_0^x \frac{\sin \rho (x-t)}{\rho} j(t) dt \int_{-\infty}^t B^-(t, s) e^{-i\rho s} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-i\rho t} dt \int_0^x j(s) ds \int_{t-x+s}^{t+x-s} B^-(s, \zeta) d\zeta, \quad B^-(t, s) = 0, \quad s > t, \\
J_8 &= 2\rho \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} l(t) dt \int_{-\infty}^t B^-(t, s) e^{-i\rho s} ds \\
&= \frac{1}{i} \int_0^x l(t) dt \int_{-\infty}^t B^-(t, s) e^{-i\rho(s-x+t)} ds - \frac{1}{i} \int_0^x l(t) dt \int_{-\infty}^t B^-(t, s) e^{-i\rho(s+x-t)} ds \\
&= i \int_0^x l(t) dt \int_{-\infty}^t B^-(t, \zeta - x + t) e^{-i\rho \zeta} d\zeta - i \int_0^x l(t) dt \int_{-\infty}^{2t-x} B^-(t, \zeta + x - t) e^{-i\rho \zeta} d\zeta \\
&= i \int_{-\infty}^t e^{-i\rho \zeta} d\zeta \int_0^x l(t) B^-(t, \zeta - x + t) dt - i \int_{-\infty}^t e^{-i\rho \zeta} d\zeta \int_{\frac{x+s}{2}}^x l(t) B^-(t, \zeta + x - t) dt \\
&= i \int_{-\infty}^t e^{-i\rho \zeta} d\zeta \int_0^x l(t) B^-(t, \zeta - x + t) dt - i \int_{-\infty}^t e^{-i\rho \zeta} d\zeta \int_{\frac{x+s}{2}}^x l(t) B^-(t, \zeta + x - t) dt, \\
&T_+(x) e^{i\rho x} + T_-(x) e^{-i\rho x} + \int_{-\infty}^x B^-(x, t) e^{-i\rho t} dt \\
&= \frac{1}{2} (1-x) e^{i\rho x} + \frac{1}{2} (1+x) e^{-i\rho x} + \left(i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s) e^{i v_-(s)} ds \right) e^{-i\rho x} \\
&\quad - \left(i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(s) e^{i v_-(s)} ds \right) e^{i\rho x} + \int_{-\infty}^{-x} e^{-i\rho t} dt \left[-\frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} j(s) e^{i v_-(s)} ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t+x}{2\omega}} j(s) e^{i v_-(s)} ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l\left(\frac{t-x}{2\omega}\right) e^{i v_-(\frac{t-x}{2\omega})} - \frac{i\omega_+}{2\omega} l\left(\frac{t+x}{2\omega}\right) e^{i v_-(\frac{t+x}{2\omega})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x-\omega s}^{t+x+\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x+\omega s}^{t+x-\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta \right. \\
&\quad \left. + i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(s) A^-(s, t+x+\omega s) ds + i\omega_- \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 l(s) A^-(s, t-x-\omega s) ds \right. \\
&\quad \left. + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s) A^-(s, t-x+\omega s) ds \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega_+ \int_{\frac{t+x}{2\omega}}^0 l(s)A^-(s, t+x-\omega s)ds + \frac{1}{2} \int_0^x j(s)ds \int_{t-x+s}^{t+x-s} B^-(s, \zeta)d\zeta \\
& -i \int_{\frac{x+t}{2}}^x l(s)B^-(s, t+x-s)ds \\
& +ie^{-i\rho x} \int_0^x l(s)T_-(s)ds - ie^{i\rho x} \int_0^x l(s)T_+(s)ds \\
& + \int_{-x}^x e^{-i\rho t} dt \left[\frac{\omega_-}{2} \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l\left(\frac{t-x}{2\omega}\right) e^{iv_-\left(\frac{t-x}{2\omega}\right)} \right. \\
& + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)ds \int_{t-x-\omega s}^{t+x+\omega s} A^-(s, \zeta)d\zeta + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)ds \int_{t-x+\omega s}^{t+x-\omega s} A^-(s, \zeta)d\zeta \\
& + i\omega_- \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 l(s)A^-(s, t-x-\omega s)ds + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s)A^-(s, t-x+\omega s)ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} j(s)T_+(s)ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} j(s)T_-(s)ds + \frac{i}{2} l\left(\frac{t+x}{2}\right) T_-\left(\frac{t+x}{2}\right) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x j(s)ds \int_{t-x+s}^{t+x-s} B^-(s, \zeta)d\zeta + i \int_0^x l(s)B^-(s, t-x+s)ds \\
& \left. -i \int_{\frac{x+t}{2}}^x l(s)B^-(s, t+x-s)ds \right].
\end{aligned}$$

bulunur. $T_+(x)$ fonksiyonu

$$T_+(x) = \frac{1}{2}(1-x) - i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(s)e^{iv_-(s)}ds - i \int_0^x l(s)T_+(s)ds$$

olacak şekilde seçilirse

$$v_-(x) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^x l(t)dt = \omega v'_-(x) = l(x)$$

olduğundan

$$T_+(x) = \frac{1}{2}(1 - \omega)e^{-i \int_0^x l(s)ds} e^{iv_-(0)}$$

$$T_-(x) = \frac{1}{2}(1 + \omega)e^{i \int_0^x l(s)ds} e^{iv_-(0)}$$

olarak bulunur. Böylece daha öncede yaptığımız gibi $J_1 - J_8$ ifadelerini de göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} B^-(x, t) = & \frac{\omega_-}{2} \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l \left(\frac{t-x}{2\omega} \right) e^{iv_-(\frac{t-x}{2\omega})} \\ & + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x-\omega s}^{t+x+\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x+\omega s}^{t-x-\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta \\ & + i\omega_- \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 l(s) A^-(s, t-x-\omega s) ds + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s) A^-(s, t-x+\omega s) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} j(s) T_+(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} j(s) T_-(s) ds \\ & + \frac{i}{2} l \left(\frac{x-t}{2} \right) T_+ \left(\frac{x-t}{2} \right) - \frac{i}{2} l \left(\frac{x+t}{2} \right) T_- \left(\frac{x+t}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x j(s) ds \int_{t-x+s}^{t+x-s} B^-(s, \zeta) d\zeta + i \int_0^x l(s) B^-(s, t-x+s) ds \\ & - i \int_{\frac{x+t}{2}}^x l(s) B^-(s, t+x-s) ds, \quad -x \leq t \leq x, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} B^-(x, t) = & \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t+x}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds - \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l \left(\frac{t-x}{2\omega} \right) e^{iv_-(\frac{t-x}{2\omega})} \\ & - \frac{i\omega_+}{2\omega} l \left(\frac{t+x}{2\omega} \right) e^{iv_-(\frac{t+x}{2\omega})} + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x-\omega s}^{t+x+\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) ds \int_{t-x+\omega s}^{t+x-\omega s} A^-(s, \zeta) d\zeta - i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(s) A^-(s, t+x+\omega s) ds \\
& + i\omega_- \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 l(s) A^-(s, t-x-\omega s) ds + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s) A^-(s, t-x+\omega s) ds \\
& - i\omega_+ \int_{\frac{t+x}{2\omega}}^0 l(s) A^-(s, t+x-\omega s) ds + \frac{1}{2} \int_0^x j(s) ds \int_{t-x+s}^{t+x-s} B^-(s, \zeta) d\zeta \\
& - i \int_{\frac{t+x}{2}}^x l(s) B^-(s, t+x-s) ds + i \int_0^x l(s) B^-(s, t-x+s) ds, \quad t \leq -x. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Şimdi integrallerde bazı basit değişken değiştirme formüllerini kullanarak $A^\pm(x, t)$, $B^\pm(x, t)$ fonksiyonlarının sağladığı integral denklemleri yeniden düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
B^+(x, t) &= \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{t+\omega x}{2\omega}}^{+\infty} j(s) R_+(s) ds - \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x + t}{2\omega}\right) R_+\left(\frac{\omega x + t}{2\omega}\right) \\
&+ \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{\omega x - t}{2\omega}}^{+\infty} j(s) R_-(s) ds + \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{\omega x - t}{2\omega}\right) R_-\left(\frac{\omega x - t}{2\omega}\right) \\
&- \frac{\omega_-}{2} \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} l(s) e^{iv_+(s)} ds \\
&- \frac{\omega_+}{2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i\omega_-}{2} l\left(\frac{t-\omega x}{2}\right) e^{iv_+(\frac{t-\omega x}{2})} \\
&+ \omega_+ \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} dv \int_v^{+\infty} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
&- \omega_- \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} dv \int_v^{\frac{t-\omega x}{2}} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
&+ \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} dv \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^v j\left(\frac{u-v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{u-v}{\omega}, u+v\right) du \\
&+ i\omega_+ \int_{\frac{t-\omega x}{2}}^{+\infty} l\left(u - \frac{t-\omega x}{2}\right) A^+\left(u - \frac{t-\omega x}{2}, u + \frac{t-\omega x}{2}\right) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega_- \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} l\left(\frac{t-\omega x}{2}-v\right) A^+\left(\frac{t-\omega x}{2}-v, \frac{t-\omega x}{2}+v\right) dv \\
& + \frac{1}{i\omega^2} \int_0^{\frac{t-\omega x}{2}} l\left(\frac{t+\omega x}{2\omega}-\frac{v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{t+\omega x}{2\omega}-\frac{v}{\omega}, \frac{t+\omega x}{2}+v\right) dv \\
& - \frac{1}{i\omega^2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{\frac{t-\omega x}{2}} l\left(\frac{u}{\omega}-\frac{t-\omega x}{2\omega}\right) B^+\left(\frac{u}{\omega}-\frac{t-\omega x}{2\omega}, u+\frac{t-\omega x}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\omega x \leq t \leq -\omega x \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
B^+(x, t) &= \frac{\omega_+}{2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_-}{2} \int_{\frac{t-\omega x}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
& - \frac{i\omega_-}{2} l\left(\frac{t-\omega x}{2}\right) e^{iv_+(\frac{t-\omega x}{2})} - \frac{i\omega_+}{2} l\left(\frac{t+\omega x}{2}\right) e^{iv_+(\frac{t+\omega x}{2})} \\
& + \omega_+ \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{\frac{t-\omega x}{2}} dv \int_v^{+\infty} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du + \omega_+ \int_0^{\frac{t+\omega x}{2}} dv \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
& + \omega_- \int_0^{\frac{t+\omega x}{2}} dv \int_{\frac{t-\omega x}{2}}^{+\infty} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du - \omega_- \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{\frac{t-\omega x}{2}} dv \int_v^{\frac{t-\omega x}{2}} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
& + \frac{1}{\omega^2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{\frac{t-\omega x}{2}} dv \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^v j\left(\frac{u-v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{u-v}{\omega}, u+v\right) du \\
& + i\omega_+ \int_{\frac{t-\omega x}{2}}^{+\infty} l\left(u-\frac{t-\omega x}{2}\right) A^+\left(u-\frac{t-\omega x}{2}, u+\frac{t-\omega x}{2}\right) du \\
& - i\omega_+ \int_0^{\frac{t+\omega x}{2}} l\left(\frac{t+\omega x}{2}-v\right) A^+\left(\frac{t+\omega x}{2}-v, \frac{t+\omega x}{2}+v\right) dv \\
& + i\omega_- \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{+\infty} l\left(u-\frac{t+\omega x}{2}\right) A^+\left(u-\frac{t+\omega x}{2}, u+\frac{t+\omega x}{2}\right) du \\
& + \frac{1}{i\omega^2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{\frac{t-\omega x}{2}} l\left(\frac{t+\omega x}{2\omega}-\frac{v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{t+\omega x}{2\omega}-\frac{v}{\omega}, \frac{t+\omega x}{2}+v\right) dv
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{i\omega^2} \int_{\frac{t+\omega x}{2}}^{\frac{t-\omega x}{2}} l\left(\frac{u}{\omega} - \frac{t-\omega x}{2\omega}\right) B^+\left(\frac{u}{\omega} - \frac{t-\omega x}{2\omega}, u + \frac{t-\omega x}{2}\right) dt > -\omega x, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} A^-(x, t) &= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\frac{\omega x+t}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{1}{2i\omega^2} l\left(\frac{\omega x+t}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{\omega x+t}{2\omega})} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\frac{\omega x+t}{2\omega}} dr \int_0^{\frac{\omega x-t}{2\omega}} j(r+\beta) A^-(r+\beta, \omega(r-\beta)) d\beta \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \int_0^{\frac{\omega x-t}{2\omega}} l\left(\frac{\omega x+t}{2\omega} + \beta\right) A^-\left(\frac{\omega x+t}{2\omega} + \beta, \omega\left(\frac{\omega x+t}{2\omega} - \beta\right)\right) d\beta \\ &\quad - \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\frac{\omega x+t}{2\omega}} l\left(r + \frac{\omega x+t}{2\omega}\right) A^-\left(r + \frac{\omega x-t}{2\omega}, \omega\left(r - \frac{\omega x-t}{2\omega}\right)\right) dr, \quad t < \omega x < 0, \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^-(x, t) &= \frac{\omega_-}{2} \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds \\ &\quad + \frac{i\omega_-}{2\omega} l\left(\frac{t-x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{t-x}{2\omega})} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{t-x}{2\omega}} j(s) T_+(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{t+x}{2\omega}} j(s) T_-(s) ds \\ &\quad + \frac{i}{2} l\left(\frac{x-t}{2}\right) T_+\left(\frac{x-t}{2}\right) - \frac{i}{2} l\left(\frac{x+t}{2}\right) T_-\left(\frac{x+t}{2}\right) \\ &\quad + \omega\omega_- \int_0^{\frac{x-t}{2\omega}} dv \int_{\frac{t-x}{2\omega}}^{-v} j(u+v) A^-(u+v, \omega(u-v)) du \\ &\quad + \omega\omega_+ \int_0^{\frac{x-t}{2\omega}} dv \int_{-\infty}^{-v} j(u+v) A^-(u+v, \omega(u-v)) du \\ &\quad + \int_0^{\frac{x-t}{2}} dv \int_{-v}^{\frac{x-t}{2}} j(u+v) B^-(u+v, u-v) du \\ &\quad - i\omega_- \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} l\left(\frac{t-x}{2\omega} + v\right) A^-\left(\frac{t-x}{2\omega} + v, \omega\left(\frac{t-x}{2\omega} - v\right)\right) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i\omega_+ \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} l\left(\frac{x-t}{2\omega}+u\right) A^-\left(\frac{x-t}{2\omega}+u, \omega\left(\frac{x-t}{2\omega}+u\right)\right) du \\
& +i \int_{-\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} l\left(u+\frac{x-t}{2}\right) B^-\left(u+\frac{x-t}{2}, u-\frac{x-t}{2}\right) du \\
& -i \int_0^{\frac{x-t}{2}} l\left(\frac{x+t}{2}+v\right) B^-\left(\frac{x+t}{2}+v, \frac{x+t}{2}-v\right) dv, \quad -x \leq t \leq x, \quad x > 0, \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^-(x, t) &= \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t+x}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds - \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l\left(\frac{t-x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{t-x}{2\omega})} \\
& + \frac{i\omega_+}{2\omega} l\left(\frac{t+x}{2\omega}\right) e^{iv_-(\frac{t+x}{2\omega})} + \omega\omega_- \int_{-\frac{x+t}{2\omega}}^{\frac{x-t}{2\omega}} dv \int_{-\frac{x-t}{2\omega}}^{-v} j(u+v) A^-(u+v, \omega(u-v)) du \\
& - \omega\omega_- \int_0^{-\frac{x+t}{2\omega}} dv \int_{-\infty}^{-\frac{x-t}{2\omega}} j(u+v) A^-(u+v, \omega(u-v)) du \\
& + \omega\omega_+ \int_{-\frac{x+t}{2\omega}}^{\frac{x-t}{2\omega}} dv \int_{-\infty}^{-v} j(u+v) A^-(u+v, \omega(u-v)) du \\
& + \int_{-\frac{x+t}{2}}^{\frac{x-t}{2}} dv \int_{-v}^{\frac{x+t}{2}} j(u+v) B^-(u+v, u-v) du \\
& + \omega\omega_+ \int_0^{-\frac{x+t}{2\omega}} dv \int_{-\infty}^{\frac{x+t}{2\omega}} j(u+v) A^-(u+v, \omega(u-v)) du \\
& - i\omega_- \int_{-\infty}^{\frac{x+t}{2\omega}} l\left(u-\frac{x-t}{2\omega}\right) A^-\left(u-\frac{x-t}{2\omega}, \omega\left(u+\frac{x-t}{2\omega}\right)\right) du \\
& + i\omega_- \int_0^{\frac{x-t}{2\omega}} l\left(\frac{t-x}{2\omega}+v\right) A^-\left(\frac{t-x}{2\omega}+v, \omega\left(\frac{t-x}{2\omega}-v\right)\right) dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i\omega_+ \int_{-\infty}^{\frac{t-x}{2\omega}} l\left(u + \frac{x-t}{2\omega}\right) A^-\left(u + \frac{x-t}{2\omega}, \omega\left(u - \frac{x-t}{2\omega}\right)\right) du \\
& -i\omega_+ \int_0^{-\frac{x+t}{2\omega}} l\left(\frac{t+x}{2\omega} + v\right) A^-\left(\frac{t+x}{2\omega} + v, \omega\left(\frac{t+x}{2\omega} - v\right)\right) dv \\
& +i \int_{-\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} l\left(u - \frac{t-x}{2}\right) B^-\left(u - \frac{t-x}{2}, u + \frac{t-x}{2}\right) du \\
& -i \int_0^{\frac{t-x}{2}} l\left(\frac{x+t}{2} - v\right) B^-\left(\frac{x+t}{2} - v, \frac{x+t}{2} + v\right) dv, \quad t \leq -x, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^+(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i}{2} l\left(\frac{t+x}{2}\right) e^{iv_+(\frac{t+x}{2})} \\
&+ \int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} du \int_0^{\frac{t-x}{2}} j(u-v) A^+(u-v, u+v) dv \\
&-i \int_0^{\frac{t-x}{2}} l\left(\frac{x+t}{2} - v\right) A^+\left(\frac{x+t}{2} - v, \frac{x+t}{2} + v\right) dv \\
&+i \int_{\frac{x+t}{2}}^{+\infty} l\left(u - \frac{t-x}{2}\right) A^+\left(u - \frac{t-x}{2}, u + \frac{t-x}{2}\right) du, \quad t \geq x. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

ve

$$A^+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i}{2} l(x) e^{iv_+(x)} + i \int_x^{+\infty} l(u) A^+(u, u) du$$

olduğunu da burada söyleyelim ve

$$\begin{aligned}
C^+(x, t) &= \begin{cases} A^+(x, t), & x \geq 0 \\ B^+(x, t), & x < 0, \end{cases} \\
C^-(x, t) &= \begin{cases} A^-(x, t), & x \leq 0 \\ B^-(x, t), & x > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

kabul edelim. Bu durumda $f_+(x, \rho)$ ve $f_-(x, \rho)$ çözümleri için

$$\begin{aligned} f_+(x, \rho) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i\rho\mu(x)} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i\rho\mu(x)} + \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^+(x, t) e^{i\rho t} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_-(x, \rho) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i\rho\mu(x)} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i\rho\mu(x)} + \int_{-\infty}^{\mu(x)} C^-(x, t) e^{-i\rho t} dt \end{aligned}$$

ve integral gösterilimleri bulunur.

$$R_+(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt}$$

ve $\omega_+(x) = \int_x^{+\infty} l(t) dt$ olduğundan ise $x < 0$ için

$$R_+(x) = \omega_+ e^{i \int_0^x l(t) dt} e^{iv_+(0)},$$

ve $x > 0$ için

$$R_+(x) = e^{iv_+(x)}$$

elde edilir.

$$R_-(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt}$$

olduğundan $x < 0$ için

$$R_-(x) = \omega_- e^{-i \int_x^0 l(t) dt} e^{iv_+(0)}$$

ve $x > 0$ için

$$R_-(x) = 0$$

elde edilir.

$$T_+(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt}$$

olduğundan $x > 0$ için

$$T_+(x) = \frac{1}{2} (1 - \omega) e^{-i \int_0^x l(t) dt} e^{iv_-(0)},$$

$$T_-(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt}$$

olduğundan ise

$$T_-(x) = \frac{1}{2} (1 + \omega) e^{i \int_0^x l(t) dt} e^{iv_-(0)}$$

dir

$$\begin{aligned} B^+(x, \omega x) &= \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) R_+(s) ds - \frac{i}{2\omega^2} l(0) \omega_+ e^{iv_+(0)} - \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_+(x) \\ &\quad + \frac{i}{2\omega^2} l(0) R_-(0) + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i}{2\omega^2} \omega_- e^{iv_+(0)} \\ &\quad - \frac{i}{2} \omega_- l(0) e^{iv_+(0)} + i\omega_+ \int_0^{+\infty} l(u) A^+(u, u) du - \frac{1}{i\omega^2} \int_{\omega x}^0 l\left(\frac{u}{\omega}\right) B^+\left(\frac{u}{\omega}, u\right) du \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B^+(0, 0) &= -\frac{i}{2\omega^3} l(0) e^{iv_+(0)} + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i}{2} \omega_- l(0) e^{iv_+(0)} \\ &\quad + \frac{i\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} l(u) \left[\int_u^{+\infty} (j(s) + l^2(s)) ds - il(u) \right] e^{iv_+(u)} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i}{2} \omega_- l(0) e^{iv_+(0)} \\
&+ \frac{i\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} (j(s) + l^2(s)) ds \int_0^s l(u) e^{iv_+(u)} du + \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} l^2(u) e^{iv_+(u)} du - \frac{i}{2\omega^3} l(0) e^{iv_+(0)}
\end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
&B^+(0,0) - B^+(x, \omega x) e^{-i \int_x^0 \frac{l(t)}{\omega} dt} \\
&= -\omega_+ e^{iv_+(0)} \int_x^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(t) + \frac{1}{2\omega^2} l'(t) + \frac{1}{2\omega^3} l^2(t) \right) dt, \\
&B^+(x, \omega x) \\
&= B^+(0,0) e^{i \int_x^0 \frac{l(t)}{\omega} dt} + R_+(x) \int_x^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(t) + \frac{i}{2\omega^2} l'(t) + \frac{1}{2\omega^3} l^2(t) \right) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^+(x, \omega x) &= R_+(x) \left[\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (j(s) + l^2(s)) ds - \frac{i(\omega_- + \omega^{-3})}{2\omega_+} l(0) \right. \\
&\quad \left. + \int_x^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(t) + \frac{i}{2\omega^2} l'(t) + \frac{1}{2\omega^3} l^2(t) \right) dt \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&B^+(x, \omega x) \\
&= R_+(x) \left(\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} \right) ds + \frac{i}{2\omega^2} \int_x^{+\infty} 1 + \left(\omega - \sqrt{\kappa(s)} \right)^2 l'(s) ds \right)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$B^-(x, x) = \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l(0) e^{iv_-(0)} + \frac{1}{2} \int_0^x j(s) T_-(s) ds$$

$$-\frac{i}{2}l(0)T_+(0) - \frac{i}{2}l(x)T_-(x) + i \int_0^x l(u)B^-(u,u)du,$$

$$B^-(0,0) = \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l(0)e^{iv_-(0)} + i\omega_+ \int_{+\infty}^0 A(s,\omega s)l(s)ds,$$

$$A^-(x,\omega x) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^x j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{1}{2i\omega^2} l(x)e^{iv_-(x)} - \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^x l(t)A^-(t,\omega t)dt,$$

formüllerinden

$$\frac{d}{dx}A^-(x,\omega x) - \frac{i}{\omega}l(x)A^-(x,\omega x) = \left(\frac{1}{2\omega}j(x) + \frac{1}{2i\omega^2}l'(x) + \frac{1}{2\omega^3}l^2(x) \right) e^{iv_-(x)},$$

$$A^-(x,\omega x) = e^{iv_-(x)} \left(\int_{-\infty}^x \left(\frac{1}{2\omega}j(t) + \frac{1}{2\omega^3}l'(t) \right) dt + \frac{1}{2i\omega^2}l(x) \right)$$

ve

$$B^-(x,\omega x) = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s)\sqrt{\kappa(s)}} \right) ds + \frac{i}{2\omega^2} \int_x^{+\infty} 1 + \left(\omega - \sqrt{\kappa(s)} \right)^2 l'(s)ds,$$

$$B^-(0,0) = \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l(0)e^{iv_-(0)} - \frac{i}{2}l(0)\omega\omega_-e^{iv_-(0)}$$

$$- \frac{i}{2}l(0)\omega\omega_+e^{iv_-(0)} + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 A(s,\omega s)l(s)ds$$

$$= \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{i\omega_-}{2\omega} l(0)e^{iv_-(0)} - \frac{i\omega}{2} l(0)e^{iv_-(0)}$$

$$+ i\omega_+ \int_{-\infty}^0 l(s) \left[\frac{1}{2i\omega^2} l(s) + \int_{-\infty}^s \left(\frac{1}{2\omega}j(t) + \frac{1}{2\omega^3}l^2(t) \right) e^{iv_-(s)} dt \right]$$

$$= \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s)e^{iv_-(s)}ds + \frac{i}{2} \left(\frac{\omega_-}{\omega} - \omega \right) l(0)e^{iv_-(0)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega_+}{2\omega^2} \int_{-\infty}^0 l^2(s) e^{iv_-(s)} ds + i\omega_+ \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(t) + \frac{1}{2\omega^3} l^2(t) \right) dt \int_t^0 l(s) e^{iv_-(s)} ds \\
& = \frac{i}{2} \left(\frac{\omega_-}{\omega} - \omega \right) l(0) e^{iv_-(0)} + \omega_+ \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(t) + \frac{1}{2\omega^3} l^2(t) \right) dt e^{iv_-(0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$B^-(0,0) = \frac{i}{2} \left(\frac{\omega_-}{\omega} - \omega \right) l(0) e^{iv_-(0)} + \omega_+ \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2} j(t) + \frac{1}{2\omega^2} l^2(t) \right) dt e^{iv_-(0)}$$

ve

$$\frac{d}{dx} B^-(x,x) = \frac{1}{2} j(x) T_-(x) - \frac{i}{2} (l(x) T_-(x))' + il(x) B^-(x,x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dx} B^-(x,x) - il(x) B^-(x,x) \right) e^{-i \int_0^x l(t) dt} = \frac{1}{4} (1 + \omega) j(x) e^{iv_-(0)} \\
& - \frac{i}{4} (1 + \omega) l'(x) e^{iv_-(0)} + \frac{1}{4} (1 + \omega) l^2(x) e^{iv_-(0)}
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& B^-(x,x) e^{-i \int_0^x l(t) dt} - B^-(0,0) = \frac{1}{4} (1 + \omega) e^{iv_-(0)} \int_0^x j(t) dt \\
& - \frac{i}{4} (1 + \omega) e^{iv_-(0)} \int_0^x l'(t) dt + \frac{1}{4} (1 + \omega) e^{iv_-(0)} \int_0^x l^2(t) dt, \\
& B^-(x,x) e^{-i \int_0^x l(t) dt} \\
& = \frac{i}{2} \left(\frac{\omega_-}{\omega} - \omega \right) l(0) e^{iv_-(0)} + \omega_+ \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2} j(t) + \frac{1}{2\omega^2} l^2(t) \right) dt e^{iv_-(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{4}(1+\omega)e^{iv_-(0)}\int_0^x j(t)dt - \frac{i}{4}(1+\omega)e^{iv_-(0)}\int_0^x l'(t)dt \\
& +\frac{1}{4}(1+\omega)e^{iv_-(0)}\int_0^x l^2(t)dt
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& B^-(x,x) \\
& = i\left(\frac{\omega_-}{\omega} - \omega\right)\frac{1}{1+\omega}T_-(x)l(0) + \frac{2\omega_+}{1+\omega}T_-(x)\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{2}j(t) + \frac{1}{2\omega^2}l^2(t)\right)dt \\
& \quad + \frac{1}{2}T_-(x)\int_0^x j(t)dt - \frac{i}{2}T_-(x)\int_0^x l'(t)dt + \frac{1}{2}T_-(x)\int_0^x l^2(t)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
B^-(x,x) = T_-(x) & \left(i\left(\frac{\omega_-}{\omega} - \omega\right)\frac{1}{1+\omega}l(0) + \frac{2\omega_+}{1+\omega}\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{2}j(t) + \frac{1}{2\omega^2}l^2(t)\right)dt \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}j(t)dt - \frac{i}{2}\int_0^x l'(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x l^2(t)dt \right),
\end{aligned}$$

buradan da

$$\begin{aligned}
B^-(x,x) & = \frac{1}{2}\int_0^x (j(t) + l^2(t))dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{\omega}j(t) + \frac{1}{\omega^3}l^2(t)\right)dt \\
& \quad - \frac{i}{2}\int_0^x l'(t)dt - \frac{1}{1+\omega}\left(\omega - \frac{\omega_-}{\omega}\right)\int_{-\infty}^0 l'(t)dt
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
B^-(x,x) & = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^x\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\kappa(t)}} + \frac{1}{\kappa(t)}\right)l'(t)dt \\
& \quad - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^x\left(1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(t)}}\right)^2\right)l'(t)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $t = -\omega x$ deki sol ve sağ limitler için

$$\begin{aligned}
B^+(x, -\omega x - 0) &= \frac{-i}{2\omega^2} l(0) R_+(0) + \frac{-i}{2\omega^2} \int_x^0 j(s) R_-(s) ds \\
&+ \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_-(x) - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{-\omega x} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
&+ \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i\omega_-}{2} l(-\omega x) e^{iv_+(-\omega x)} \\
&+ \omega_+ \int_0^{-\omega x} dv \int_v^{+\infty} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
&- \omega_- \int_0^{-\omega x} dv \int_v^{-\omega x} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
&\frac{1}{\omega^2} \int_0^{-\omega x} dv \int_0^v j\left(\frac{u-v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{u-v}{\omega}, u+v\right) du + \\
&i\omega_+ \int_{-\omega x}^{+\infty} l(u+\omega x) A^+(u+\omega x, u-\omega x) du \\
&- i\omega_- \int_0^{-\omega x} l(-\omega x-v) A^+(-\omega x-v, -\omega x+v) dv \\
&+ \frac{1}{i\omega^2} \int_0^{-\omega x} l\left(-\frac{v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{-v}{\omega}, v-0\right) dv \\
&- \frac{1}{i\omega^2} \int_0^{-\omega x} l\left(\frac{u+\omega x}{\omega}\right) B^+\left(\frac{u+\omega x}{\omega}, u-\omega x\right) du
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B^+(x, -\omega x + 0) &= \frac{\omega_+}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
&- \frac{i\omega_-}{2} l(-\omega x) e^{iv_+(-\omega x)} - \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_+(0)} \\
&+ \omega_+ \int_0^{-\omega x} dv \int_v^{+\infty} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_- \int_0^{-\omega x} dv \int_v^{-\omega x} j(u-v) A^+(u-v, u+v) du \\
& + \frac{1}{\omega^2} \int_0^{-\omega x} dv \int_0^v j\left(\frac{u-v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{u-v}{\omega}, u+v\right) du \\
& + i\omega_+ \int_{-\omega x}^{+\infty} l(u+\omega x) A^+(u+\omega x, u-\omega x) du + i\omega_- \int_0^{\infty} l(u) A^+(u, u) du \\
& i\omega_- \int_0^{-\omega x} l(-\omega x-v) A^+(-\omega x-v, -\omega x+v) dv \\
& + \frac{1}{i\omega^2} \int_0^{-\omega x} l\left(-\frac{v}{\omega}\right) B^+\left(\frac{-v}{\omega}, v+0\right) dv \\
& - \frac{1}{i\omega^2} \int_0^{-\omega x} l\left(\frac{u}{\omega}-x\right) B^+\left(\frac{u}{\omega}-x, u-\omega x\right) du
\end{aligned}$$

yazabiliriz ve son iki eşitliği taraf tarafa çıkartırsak

$$B^+(x, -\omega x - 0) - B^+(x, -\omega x + 0) = \psi^+(x)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\psi^+(x) &= -\frac{i\omega_+}{2\omega^2} l(0) e^{iv_+(0)} R_+(0) + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) R_-(s) ds \\
&+ \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_-(x) - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{-\omega x} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
&- \frac{\omega_-}{2} \int_{-\omega x}^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_+(0)} \\
&- i\omega_- \int_0^{+\infty} l(u) A^+(u, u) du + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) [B^+(t, -\omega t - 0) - B^+(t, -\omega t + 0)] dt,
\end{aligned}$$

$$\psi^+(x)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_+(0)} - \frac{i\omega_+}{2\omega^2} l(0) e^{iv_+(0)} + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) R_-(s) ds \\
&\quad + \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_-(x) - i\omega_- \int_0^{+\infty} l(u) A^+(u, u) du + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) \psi^+(t) dt, \\
\psi^+(x) &= -\frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_+(0)} \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) R_-(s) ds + \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_-(x) - \\
&\quad i\omega_- \int_0^{+\infty} l(u) \left[-il(u) + \int_u^{+\infty} (j(t) + l^2(t)) dt \right] e^{iv_+(u)} du + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) \psi^+(t) dt \\
&= -\frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} l^2(u) e^{iv_+(u)} du - \frac{i\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} (j(t) + l^2(t)) dt \int_0^t l(u) e^{iv_+(u)} du \\
&\quad - \frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_+(0)} \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) R_-(s) ds + \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_-(x) + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) \psi^+(t) dt \\
&= -\frac{\omega_-}{2} \int_0^{+\infty} (j(t) + l^2(t)) dt e^{iv_+(0)} + \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_+(0)} \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(s) R_-(s) ds + \frac{i}{2\omega^2} l(x) R_-(x) + \frac{1}{i\omega} \int_x^0 l(t) \psi^+(t) dt
\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\psi^-(x) = B^-(x, -x+0) - B^-(x, -x-0)$$

olmak üzere

$$\psi^-(x) = \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{i\omega_+}{2} l(0) e^{iv_-(0)} + \frac{1}{2} \int_0^x j(s) T_+(s) ds$$

$$+\frac{1}{2}l(x)T_+(x)-\frac{i}{2}l(0)T_-(0)-i\int_0^xl(v)\psi^+(v)dv$$

$$+i\omega_-\int_{-\infty}^0l(u)A^-(u,\omega u)du,$$

$$\psi^-(0)=\frac{\omega_-}{2}\int_{-\infty}^0j(s)e^{iv_-(s)}ds+\frac{i}{2}l(0)T_+(0)-\frac{i}{2}l(0)T_-(0)+\frac{i\omega_+}{2}l(0)e^{iv_-(0)}$$

$$+i\omega_-\int_{-\infty}^0l(u)A^-(u,\omega u)du,$$

$$\psi^+(0)=\frac{i}{2}e^{iv_+(0)}l(0)\left(\omega_+-\frac{1}{\omega^3}\right)-\frac{\omega_-}{2}\int_0^{+\infty}(j(t)+l^2(t))dte^{iv_+(0)},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\psi^+(x) &= -\frac{1}{2\omega}j(x)R_-(x)+\frac{i}{2\omega}\left(l'(x)R_-(x)+l(x)\left(\frac{i}{\omega}\right)l(x)R_-(x)\right) \\ &\quad -\frac{1}{i\omega}l(x)\psi^+(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dx}\psi^+(x)-\frac{i}{\omega}l(x)\psi^+(x)\right)e^{+\frac{i}{\omega}\int_x^0l(t)dt} \\ &= -\frac{\omega_-}{2\omega}e^{iv_+(0)}j(x)+\frac{\omega_-}{2\omega^2}e^{iv_+(0)}\left(il'(x)-\frac{l^2(x)}{\omega}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\psi^+(x)e^{+\frac{i}{\omega}\int_x^0l(t)dt}\right)=\left[-\frac{1}{2\omega}j(x)-\frac{1}{2\omega^3}l^2(x)+\frac{i}{2\omega^2}l'(x)\right]\omega_-e^{iv_+(0)}$$

$$\begin{aligned}\psi^+(0)-\psi^+(x)e^{+\frac{i}{\omega}\int_x^0l(t)dt} \\ =\left[-\frac{1}{2\omega}\int_x^0j(t)dt-\frac{1}{2\omega^3}\int_x^0l^2(t)dt+\frac{i}{2\omega^2}\int_x^0l'(t)dt\right]\omega_-e^{iv_+(0)}\end{aligned}$$

$$\psi^+(x)$$

$$= \psi^+(0) e^{-\frac{i}{\omega} \int_x^0 l(t) dt} - \left[-\frac{1}{2\omega} \int_x^0 j(t) dt - \frac{1}{2\omega^3} \int_x^0 l^2(t) dt + \frac{i}{2\omega^2} \int_x^0 l'(t) dt \right] R_-(x),$$

$$\begin{aligned} \psi^+(x) &= \left(\frac{i}{2\omega_-} l(0) \left(\omega_+ - \frac{1}{\omega^3} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (j(t) + l^2(t)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_x^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(t) dt + \frac{1}{2\omega^3} l^2(t) dt \right) - \frac{i}{2\omega^2} \int_x^0 l'(t) dt \right) R_-(x) \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_-} \left(\omega_+ - \frac{1}{\omega^3} \right) &= \frac{\omega_+}{\omega_-} - \frac{1}{\omega^3 \omega_-} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega} \right)}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega} \right)} - \frac{1}{\frac{\omega^3}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega} \right)} \\ &= \frac{\omega + 1}{\omega - 1} - \frac{2}{\omega^3 - \omega^2} = \frac{\omega^2 + 2\omega + 2}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} + \left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \psi^+(x) &= \left[\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\omega^2} + \left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 \right) l(0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} + \frac{l^2(t)}{\kappa(t) \sqrt{\kappa(t)}} \right) sgn t dt - \frac{i}{2\omega^2} \int_x^0 l'(t) dt \right] R_-(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{i}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega^2} + \left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 \right) l'(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \int_x^0 \frac{l'(t)}{\omega^2} dt - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} + \frac{l^2(t)}{\kappa(t) \sqrt{\kappa(t)}} \right) sgn t dt \right] R_-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^+(x) &= -R_-(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) sgn s ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 + \frac{sgn s \sqrt{\kappa(s)}}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\psi^-(0) &= \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{i}{4} (1 - \omega) l(0) e^{iv_-(0)} \\
&\quad - \frac{i}{4} (1 + \omega) l(0) e^{iv_-(0)} + \frac{i\omega_+}{2\omega} l(0) e^{iv_-(0)} \\
&\quad + i\omega_- \int_{-\infty}^0 l(u) \left[\frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^u j(s) ds + \frac{1}{2\omega^3} \int_{-\infty}^u l^2(s) ds + \frac{1}{2i\omega^2} l(u) \right] e^{iv_-(u)} du \\
&= \frac{\omega_-}{2\omega^2} \int_{-\infty}^0 l^2(u) e^{iv_-(u)} du + i\omega_- \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{2\omega} j(s) ds + \frac{1}{2\omega^3} l^2(s) \right) ds \int_s^0 l(u) e^{iv_-(u)} du \\
&= \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 \left(j(s) ds + \frac{1}{\omega^2} l^2(s) \right) e^{iv_-(0)} ds + \left(\frac{i\omega_+}{2\omega} - \frac{i\omega}{2} \right) l(0) e^{iv_-(0)} \\
&= \frac{\omega_-}{2} e^{iv_-(0)} \int_{-\infty}^0 \left(j(s) ds + \frac{1}{\omega^2} l^2(s) \right) ds + \frac{i}{4} (1 - \omega) \left(\left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 + 1 \right) l(0) e^{iv_-(0)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi^-(x)}{dx} &= \frac{1}{2} j(x) T_+(x) + \frac{i}{2} \left(l'(x) T_+(x) + l(x) T'_+(x) \right) - il(x) \psi^-(x) \\
\left(\frac{d\psi^-(x)}{dx} + il(x) \psi^-(x) \right) e^{i \int_0^x l(t) dt} &= \frac{1}{4} (1 - \omega) e^{iv_-(0)} j(x) \\
&\quad + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{2} (1 - \omega) e^{iv_-(0)} l'(x) + \frac{1}{2} l(x) (1 - \omega) (il(x)) e^{iv_-(0)} \right), \\
\frac{d}{dx} \left(\psi^-(x) e^{i \int_0^x l(t) dt} \right) &= \left[\frac{1}{4} (1 - \omega) j(x) + \frac{i}{4} (1 - \omega) l'(x) + \frac{1}{4} (1 - \omega) l^2(x) \right] e^{iv_-(0)}, \\
\psi^-(x) e^{i \int_0^x l(t) dt} &= \psi^-(0) + \left[\frac{1}{4} (1 - \omega) \int_0^x (j(t) + l^2(t)) dt + \frac{i}{4} (1 - \omega) \int_0^x l'(t) dt \right] e^{iv_-(0)} \\
&= \left(\frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^0 \left(j(s) ds + \frac{1}{\omega^2} l^2(s) \right) ds + \frac{i}{4} (1 - \omega) \left(\left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 + 1 \right) l(0) \right) e^{iv_-(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}(1-\omega) \int_0^x (j(t) + l^2(t)) dt + \frac{i}{4}(1-\omega) \int_0^x l'(t) dt \Big) e^{iv_-(0)}, \\
\psi^-(x) &= \left(\frac{\omega_-}{1-\omega} \int_{-\infty}^0 \left(j(s) ds + \frac{1}{\omega^2} l^2(s) \right) ds + \frac{i}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 + 1 \right) l(0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^x (j(t) + l^2(t)) dt + \frac{i}{2} \int_0^x l'(t) dt \right) T_+(x) \\
&= \left(-\frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^0 \left(j(s) ds + \frac{1}{\omega^2} l^2(s) \right) ds + \frac{i}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^2 + 1 \right) l(0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^x (j(t) + l^2(t)) dt + \frac{i}{2} \int_0^x l'(t) dt \right) T_+(x).
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
\psi^-(x) &= \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s)\sqrt{\kappa(s)}} \right) sgn s ds \right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x \left[1 + \left(1 - \frac{sgn s \sqrt{\kappa(x)}}{\sqrt{\kappa(s)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de (4.36) integral denkleminde

$$\frac{x+t}{2} = u, \quad \frac{t-x}{2} = v, \quad A^+(u-v, u+v) = H^+(u, v)$$

dönüşümlerini yaparsak

$$\begin{aligned}
H^+(u, v) &= \frac{1}{2} \int_u^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{1}{2} l(u) e^{iv_+(u)} + \int_u^{+\infty} d\gamma \int_0^v j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\beta \\
& \quad - i \int_0^v l(u - \beta) H^+(u, \beta) d\beta + i \int_u^{+\infty} l(\gamma - v) H^+(\gamma, v) d\gamma, \quad u \geq v \geq 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

denklemini, (4.32) integral denklemlerinde de

$$\frac{\omega x + t}{2} = u, \quad \frac{t - \omega x}{2} = v, \quad B^+\left(\frac{u-v}{2}, u+v\right) = G^+(u, v)$$

dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
G^+(u, v) &= \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{u}{\omega}}^0 j(s) R_+(s) ds - \frac{i}{2\omega^2} l\left(\frac{u}{\omega}\right) R_+\left(\frac{u}{\omega}\right) \\
&+ \frac{1}{2\omega} \int_{-\frac{v}{\omega}}^0 j(s) R_-(s) ds + \frac{i}{2\omega^2} l\left(-\frac{v}{\omega}\right) R_-\left(-\frac{v}{\omega}\right) - \frac{\omega_-}{2} \int_0^v j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_u^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
&- \frac{\omega_-}{2} \int_0^v j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_u^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds \\
&- \frac{\omega_+}{2} \int_u^0 j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{\omega_-}{2} l(v) e^{iv_+(v)} + \omega_+ \int_0^v d\beta \int_{\beta}^{+\infty} j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\gamma \\
&- \omega_- \int_0^v d\beta \int_{\beta}^v j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\gamma + i\omega_+ \int_v^{+\infty} l(\gamma - v) H^+(\gamma, v) d\gamma \\
&- i\omega_- \int_0^v l(v - \beta) H^+(v, \beta) d\beta + \frac{1}{\omega^2} \int_0^v d\beta \int_u^{\beta} j\left(\frac{\gamma - \beta}{\omega}\right) G^+(\gamma, \beta) d\gamma \\
&- \frac{1}{i\omega^2} \int_u^v l\left(\frac{\gamma - v}{\omega}\right) G^+(\gamma, v) d\gamma + \frac{1}{i\omega^2} \int_0^v l\left(\frac{u - \beta}{\omega}\right) G^+(u, \beta) d\beta, \quad u \leq 0 \leq v, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^+(u, v) &= \frac{\omega_+}{2} \int_u^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds + \frac{\omega_-}{2} \int_v^{+\infty} j(s) e^{iv_+(s)} ds - \frac{i\omega_-}{2} l(v) e^{iv_+(v)} - \frac{i\omega_+}{2} l(u) e^{iv_+(u)} \\
&+ \omega_+ \int_u^v d\beta \int_{\beta}^{+\infty} j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\gamma + \omega_+ \int_0^u d\beta \int_u^{+\infty} j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\gamma \\
&+ \omega_- \int_0^u d\beta \int_v^{+\infty} j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\gamma - \omega_- \int_u^v d\beta \int_{\beta}^v j(\gamma - \beta) H^+(\gamma, \beta) d\gamma \\
&+ i\omega_+ \int_v^{+\infty} l(\gamma - v) H^+(\gamma, v) d\gamma - i\omega_+ \int_0^u l(u - \beta) H^+(u, \beta) d\beta \\
&+ i\omega_- \int_u^{+\infty} l(\gamma - u) H^+(\gamma, u) d\gamma - i\omega_- \int_0^v l(v - \beta) H^+(v, \beta) d\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\omega^2} \int_u^v d\beta \int_u^\beta j\left(\frac{\gamma-\beta}{\omega}\right) G^+(\gamma, \beta) d\gamma - \frac{1}{i\omega^2} \int_u^v l\left(\frac{\gamma-v}{\omega}\right) G^+(\gamma, v) d\gamma \\
& + \frac{1}{i\omega^2} \int_u^v l\left(\frac{u-\beta}{\omega}\right) G^+(u, \beta) d\beta, \quad v \geq u > 0,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Ardışık yaklaşımlar yöntemiyle yukarıdaki (4.37), (4.38) ve (4.39) denklemlerinden

$$\int_{\mu(x)}^{+\infty} |C^+(x, t) dt| \leq V_1 \left(e^{\sigma_+(x)} - 1 \right), \quad (V_1 > 0),$$

$$\sigma_+(x) = \int_{\mu(x)}^{+\infty} \left[(s - \mu(x)) |j(s)| + 2 \frac{|l(s)|}{\sqrt{\kappa(s)}} \right] ds$$

elde edilir. Buradan aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial u} &= -\frac{1}{2} j(u) e^{iv_+(u)} - \frac{i}{2} \left(l(u) e^{iv_+(u)} \right)' \\
&\quad - \int_0^v j(u - \beta) H^+(u, \beta) d\beta - i \int_0^v l'(u - \beta) H^+(u, \beta) d\beta \\
&\quad - \int_0^v l(u - \beta) \frac{\partial H^+(u, \beta)}{\partial u} d\beta - il(u - v) H^+(u, v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial v} &= \int_u^{+\infty} j(\gamma - v) H^+(\gamma, v) d\gamma - il(u - v) H^+(u, v) \\
&\quad + i \int_u^{+\infty} l(\gamma - v) \frac{\partial H^+(\gamma, v)}{\partial v} d\gamma - i \int_u^{+\infty} l'(\gamma - v) H^+(\gamma, v) d\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0} &= -\frac{1}{2} j(u) e^{iv_+(u)} - \frac{i}{2} \left(l(u) e^{iv_+(u)} \right)' - il(u) H^+(u, 0) \\
\frac{\partial^2 H^+(u, v)}{\partial u \partial v} + j(u - v) H^+(u, v) + il(u - v) \left(\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial H^+(u, v)}{\partial v} \right) &= 0
\end{aligned}$$

denkemlerini yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial t},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial v} &= -\frac{\partial A^+(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial A^+(x, t)}{\partial t} \\
\frac{\partial H^+(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial H^+(u, v)}{\partial v} &= 2\frac{\partial A^+(x, t)}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 H^+(u, v)}{\partial u \partial v} &= -\frac{\partial^2 A^+(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^+(x, t)}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A^+(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A^+(x, t)}{\partial t^2} &= j(x)A^+(x, t) + 2il(x)\frac{\partial A^+(x, t)}{\partial t}, \\
t &> x > 0
\end{aligned}$$

kısmi türevli diferensiyel denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.38), (4.39) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} &= \frac{1}{2\omega^2} j\left(\frac{u}{\omega}\right) R_+\left(\frac{u}{\omega}\right) - \frac{i}{2\omega} \left(l\left(\frac{u}{\omega}\right) R_+\left(\frac{u}{\omega}\right) \right)' - \frac{\omega_+}{2} j(u) e^{iv_+(u)} \\
&+ \frac{\omega_+}{2} j(u) e^{iv_+(u)} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^v l\left(\frac{u-\beta}{\omega}\right) G^+(u, \beta) d\beta \\
&+ \frac{1}{i\omega^2} \int_0^v \left(l\left(\frac{u-\beta}{\omega}\right) G^+(u, \beta) \right)' d\beta + \frac{1}{i\omega^2} l\left(\frac{u-v}{\omega}\right) G^+(u, v), \\
u &< 0 < v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} &= -\frac{\omega_+}{2} j(u) e^{iv_+(u)} - \frac{i\omega_+}{2} \left(l(u) e^{iv_+(u)} \right)' \\
&- \omega_+ \int_0^u j(u-\beta) H^+(u, \beta) d\beta - i\omega_+ l(0) H^+(u, u) \\
&- i\omega_+ \int_0^u \left(l(u) e^{iv_+(u)} \right)' d\beta - i\omega_- l(0) H^+(u, u) \\
&+ i\omega_- \int_u^{+\infty} (l(\gamma-u) H^+(\gamma, u))'_u d\gamma - \frac{1}{\omega^2} \int_u^v j\left(\frac{u-\beta}{\omega}\right) G^+(u, \beta) d\beta \\
&+ \frac{1}{i\omega^2} \int_u^v \left(l\left(\frac{u-\beta}{\omega}\right) G^+(u, \beta) \right)'_u d\beta - \frac{1}{i\omega^2} l(0) G^+(u, u) \\
&+ \frac{1}{i\omega^2} l\left(\frac{u-v}{\omega}\right) G^+(u, v),
\end{aligned}$$

$$v > u > 0$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0} &= \frac{1}{2\omega^2} j\left(\frac{u}{\omega}\right) R_+\left(\frac{u}{\omega}\right) - \frac{i}{2\omega} \left(l\left(\frac{u}{\omega}\right) R_+\left(\frac{u}{\omega}\right) \right)' \\ &\quad - \frac{\omega_+}{2} j(u) e^{iv_+(u)} + \frac{\omega_+}{2} j(u) e^{iv_+(u)} \\ &\quad + \frac{1}{i\omega^2} l\left(\frac{u}{\omega}\right) G^+(u, 0) \\ u &\leq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G^+(u, v)}{\partial v \partial u} &= -\frac{1}{\omega^2} j\left(\frac{u-v}{\omega}\right) G^+(u, v) + \frac{1}{i\omega^2} l\left(\frac{u-v}{\omega}\right) \left(\frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial G^+(u, v)}{\partial v} \right) \\ u &\leq 0 \leq v \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 G^+(u, v)}{\partial v \partial u} = -\frac{1}{\omega^2} j\left(\frac{u-v}{\omega}\right) G^+(u, v) + \frac{1}{i\omega^2} l\left(\frac{u-v}{\omega}\right) \left(\frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial G^+(u, v)}{\partial v} \right)$$

denklemleri ve sonrasında da

$$u = \frac{t + \omega x}{2}, v = \frac{t - \omega x}{2}$$

dönüşümleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial B^+(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial B^+(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial G^+(u, v)}{\partial v} \\ &= \frac{-1}{\omega} \frac{\partial B^+(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial B^+(x, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G^+(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial G^+(u, v)}{\partial v} = 2 \frac{\partial B^+(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 G^+(u, v)}{\partial v \partial u} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 B^+(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B^+(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 B^+(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B^+(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\omega^2} j(x) B^+(x, t) + \frac{2i}{\omega^2} l(x) \frac{\partial B^+(x, t)}{\partial t},$$

$$t \geq \omega x (x < 0)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi elde edilir.

Tamamen benzer olarak $t < \omega x$, $x < 0$ ise

$$u = \frac{\omega x + t}{2}, v = \frac{\omega x - t}{2}, A^-(u+v, \omega(u-v)) = H^-(u, v), u \leq 0 \leq v$$

dönüşümleri yapılırsa (4.33) denkleminde

$$\begin{aligned} H^-(u, v) &= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^u j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{1}{2i\omega^2} l(u) e^{iv_-(u)} \\ &+ \int_{-\infty}^u dr \int_0^v j(r+\beta) H^-(r, \beta) d\beta + \frac{1}{i\omega} \int_0^v l(u+\beta) H^-(u, \beta) d\beta \\ &- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^u l(r+v) H^-(r, v) dr, \\ u &\leq 0 \leq v \end{aligned} \quad (4.40)$$

ve

$$x > 0, -x \leq t \leq x$$

için

$$u = \frac{x+t}{2}, v = \frac{x-t}{2}$$

dersek (4.34) ve (4.35) denklemlerinden

$$B^-(u+v, u-v) = G^-(u, v), (u \geq 0, v \geq 0)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G^-(u, v) &= \frac{\omega_-}{2} \int_{-v}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds + \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^0 j(s) e^{iv_-(s)} ds \\ &+ \frac{i\omega_-}{2\omega} l\left(\frac{-v}{\omega}\right) e^{iv_-(\frac{-v}{\omega})} + \frac{1}{2} \int_0^v j(s) T_+(s) ds \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^u j(s) T_-(s) ds + \frac{i}{2} l(v) T_+(v) \\
& - \frac{i}{2} l(u) T_+(u) + \omega \omega_- \int_0^{\frac{v}{\omega}} d\gamma \int_{-\frac{v}{\omega}}^{-\gamma} j(\gamma + \beta) H^-(\beta, \gamma) d\beta \\
& + \omega \omega_+ \int_0^{\frac{v}{\omega}} d\gamma \int_{-\infty}^{-\gamma} j(\gamma + \beta) H^-(\beta, \gamma) d\beta \\
& + \int_0^v d\gamma \int_{-\gamma}^u j(\gamma + \beta) G^-(\beta, \gamma) d\beta \\
& + i \omega_- \int_0^{\frac{v}{\omega}} l\left(\frac{-v}{\omega} + \gamma\right) H^-\left(\frac{-v}{\omega}, \gamma\right) d\gamma \\
& + i \omega_+ \int_{-\infty}^{-\frac{v}{\omega}} l\left(\beta + \frac{v}{\omega}\right) H^-\left(\beta, \frac{v}{\omega}\right) d\beta \\
& + i \int_v^u l(v + \beta) G^-(\beta, v) d\beta - i \int_0^v l(u + \gamma) G^-(u, \gamma) d\gamma, \\
& u \geq 0, v \geq 0
\end{aligned}$$

$x > 0, t < -x$ için $u = \frac{x+t}{2}, v = \frac{x-t}{2}$ ve $G^-(u, v) = B^-(u+v, u-v), (u \leq 0 < v)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
G^-(u, v) &= \frac{\omega_+}{2} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds - \frac{\omega_-}{2} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\omega}} j(s) e^{iv_-(s)} ds \\
&+ \frac{i\omega_-}{2\omega} l\left(\frac{-v}{\omega}\right) e^{iv_-(\frac{-v}{\omega})} - \frac{i\omega_+}{2\omega} l\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{iv_-(\frac{u}{\omega})} \\
&+ \omega \omega_- \int_{-\frac{u}{\omega}}^{\frac{v}{\omega}} d\beta \int_{-\frac{v}{\omega}}^{-\beta} j(\beta + \gamma) H^-(\gamma, \beta) d\gamma \\
&- \omega \omega_- \int_0^{\frac{v}{\omega}} d\beta \int_{-\infty}^{-\frac{v}{\omega}} j(\beta + \gamma) H^-(\gamma, \beta) d\gamma \\
&+ \omega \omega_+ \int_{-\frac{u}{\omega}}^{\frac{v}{\omega}} d\beta \int_{-\infty}^{-\beta} j(\beta + \gamma) H^-(\gamma, \beta) d\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-u}^v d\beta \int_{-\beta}^u j(\beta + \gamma) G^-(\gamma, \beta) d\gamma \\
& + \omega \omega_+ \int_0^{-\frac{u}{\omega}} d\beta \int_{-\infty}^{\frac{u}{\omega}} j(\beta + \gamma) H^-(\gamma, \beta) d\gamma \\
& - i\omega_- \int_{-\infty}^{\frac{u}{\omega}} l\left(\gamma - \frac{u}{\omega}\right) H^-\left(\gamma, \frac{u}{\omega}\right) d\gamma \\
& + i\omega_- \int_0^{\frac{v}{\omega}} l\left(\beta - \frac{v}{\omega}\right) H^-\left(-\frac{v}{\omega}, \beta\right) d\beta \\
& + i\omega_+ \int_{-\infty}^{-\frac{v}{\omega}} l\left(\beta + \frac{v}{\omega}\right) H^-\left(\beta, \frac{v}{\omega}\right) d\beta \\
& - i\omega_+ \int_{-\infty}^{-\frac{u}{\omega}} l\left(\beta + \frac{u}{\omega}\right) H^-\left(\frac{u}{\omega}, \beta\right) d\beta \\
& + i \int_{-v}^u l(\beta + v) G^-(\beta, v) d\beta \\
& - i \int_0^v l(u - \beta) G^-(u, \beta) d\beta,
\end{aligned}$$

$$u \leq 0 < v$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^-(u, v)}{\partial u} &= \frac{1}{2\omega} j(u) e^{iv_-(u)} - \frac{1}{2i\omega^2} \left(l(u) e^{iv_+(u)} \right)' \\
&+ \int_{-\infty}^v j(u + \beta) H^-(u, \beta) d\beta \\
&+ \frac{1}{i\omega} \int_0^v [l(u + \beta) H^-(u, \beta)]_u d\beta \\
&- \frac{1}{i\omega} l(u + v) H^-(u, v)
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. (4.39), (4.40) ve (4.41) denklemlerinden de

$$\int_{-\infty}^{\mu(x)} |C^-(x, t) dt| \leq V_2 \left(e^{\sigma_-(x)} - 1 \right) \quad (V_2 > 0)$$

olduğunu elde etmek kolaydır. Burada

$$\sigma_{-}(x) = \int_{-\infty}^{\mu(x)} \left[(\mu(x) - s) |j(s)| + \frac{|l(s)|}{\sqrt{\kappa(s)}} \right] ds$$

şeklindedir. Burada da

$$\frac{\partial H^{-}(u, 0)}{\partial u} = \frac{1}{2\omega} j(u) e^{iv_{-}(u)} - \frac{1}{2i\omega^2} \left(l(u) e^{iv_{+}(u)} \right)' - \frac{1}{i\omega} l(u) H^{-}(u, 0)$$

eşitliği ve

$$\frac{\partial^2 H^{-}(u, v)}{\partial u \partial v} = j(u+v) H^{-}(u, v) + \frac{1}{i\omega} l(u+v) \frac{\partial H^{-}(u, v)}{\partial u} - \frac{1}{i\omega} l(u+v) \frac{\partial H^{-}(u, v)}{\partial v}$$

denklemini elde edilir ki buradan da x, t değişkenlerine geçiş yapılırsa

$$\frac{\partial^2 A^{-}(x, t)}{\partial x^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 A^{-}(x, t)}{\partial t^2} = j(x) A^{-}(x, t) - 2il(x) \frac{\partial A^{-}(x, t)}{\partial t}, (x < 0, t \geq \omega x)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 B^{-}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B^{-}(x, t)}{\partial t^2} = j(x) B^{-}(x, t) - 2il(x) \frac{\partial B^{-}(x, t)}{\partial t}$$

denklemini elde edilir.

Böylece bu kesimde elde ettiğimiz tüm sonuçları aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

Teorem 4.1. (Nabiev ve Cucen, 2023) $Imp \geq 0$ kapalı üst yarı düzleminden herhangi bir ρ için süreksiz katsayılı (1.1) Sturm-Liouville demeti

$$f_{+}(x, \rho) = R_{+}(x) e^{i\rho\mu(x)} + R_{-}(x) e^{-i\rho\mu(x)} + \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^{+}(x, t) e^{i\rho t} dt, \quad (4.42)$$

sağ Jost çözümüne sahiptir. Burada

$$R_{+}(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt}$$

$$R_{-}(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt}$$

$\mu(x) = x\sqrt{\kappa(x)}$ ve $C^{+}(x, t)$ çekirdeği bazı $V > 0$ için

$$\int_{\mu(x)}^{+\infty} |C^{+}(x, t)| dt \leq V \left\{ e^{\sigma^{+}(\mu(x))} - 1 \right\} \quad (4.43)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca

$$C^{+}(x, \mu(x)) = R_{+}(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) ds + \right. \\ \left. \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{\kappa(s)}}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\}, \quad (4.44)$$

$$C^{+}(x, -\mu(x) + 0) - C^{+}(x, -\mu(x) - 0) \\ = R_{-}(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) \operatorname{sgn} s ds + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} s \sqrt{\kappa(s)}}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\} \quad (4.45)$$

ifadeleri de sağlanır.

Teorem 4.2. (Nabiev ve Cucen, 2023) $\operatorname{Imp} \geq 0$ kapalı üst yarı düzleminden herhangi bir ρ için (1.1) süreksiz Sturm-Liouville demeti

$$f_{-}(x, \rho) = T_{+}(x) e^{i\rho\mu(x)} + T_{-}(x) e^{-i\rho\mu(x)} + \int_{-\infty}^{\mu(x)} C^{-}(x, t) e^{-i\rho t} dt, \quad (4.46)$$

sol Jost çözümüne sahiptir. Burada

$$T_+(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt},$$

$$T_-(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) e^{i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt},$$

$\mu(x) = x\sqrt{\kappa(x)}$ ve $C^-(x, t)$ çekirdeği bazı $V > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{\mu(x)} |C^-(x, t)| dt \leq V \left\{ e^{\sigma^-(\mu(x))} - 1 \right\} \quad (4.47)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca

$$\begin{aligned} C^-(x, \mu(x)) = T_-(x) & \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) ds - \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{\kappa(x)}}{\sqrt{\kappa(s)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & C^-(x, -\mu(x) + 0) - C^-(x, -\mu(x) - 0) \\ & = T_+(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \left(\frac{j(s)}{\sqrt{\kappa(s)}} + \frac{l^2(s)}{\kappa(s) \sqrt{\kappa(s)}} \right) \operatorname{sgn} s ds + \right. \\ & \quad \left. + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x \left[1 + \left(1 - \frac{\operatorname{sgn} s \sqrt{\kappa(x)}}{\sqrt{\kappa(s)}} \right)^2 \right] l'(s) ds \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ifadeleri de sağlanır.

Teorem 4.3. (Nabiev ve Cucen, 2023) (4.42) ve (4.46) integral gösterimlerinin $C^\pm(x, t)$ çekirdek fonksiyonları birinci mertebeden her iki kısmi türevlerine sahiptir. Eğer $j(x)$ ve $l'(x)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise $C^+(x, t)$ ve $C^-(x, t)$ çekirdek fonksiyonları sırasıyla (4.44), (4.45) ve (4.48), (4.49) koşullarıyla aşağıdaki kısmi diferansiyel

denklemleri sağlar.

$$\frac{\partial^2 C^\pm(x, t)}{\partial x^2} - \kappa(x) \frac{\partial^2 C^\pm(x, t)}{\partial t^2} = j(x) C^\pm(x, t) \pm 2il(x) \frac{\partial C^\pm(x, t)}{\partial t}, \quad t \neq \mu(x)$$

(4.44), (4.45) ve (4.48), (4.49) eşitliklerinden aşağıdakileri de yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(C^+(x, \mu(x)) e^{-i \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} + i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(C^-(x, \mu(x)) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} - i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left((C^+(x, -\mu(x) + 0) - C^+(x, -\mu(x) - 0)) e^{i \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} - i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left((C^-(x, -\mu(x) + 0) - C^-(x, -\mu(x) - 0)) e^{-i \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt} \right) = \\ & \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} + i \frac{l'(x)}{\kappa(x)} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

(4.50), (4.51) ve (4.52), (4.53) ifadelerinde $\text{Re}C^\pm(x,t) = M^\pm(x,t)$ ve $\text{Im}C^\pm(x,t) = N^\pm(x,t)$ yazarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x)\sqrt{\kappa(x)}} \right) \\ &= -2 \frac{d}{dx} [M^+(x, \mu(x)) \cos v^+(x) + N^+(x, \mu(x)) \sin v^+(x)], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & \int_x^{+\infty} \left(1 + \sqrt{\kappa(t)} \right) \sqrt{\kappa(t)} [M^+(t, \mu(t)) \sin v^+(t) - N^+(t, \mu(t)) \cos v^+(t)] dt - \\ & - \int_x^{+\infty} \left(1 - \sqrt{\kappa(t)} \right) \sqrt{\kappa(t)} [(M^+(t, -\mu(t) + 0) - M^+(t, -\mu(t) - 0)) \sin \tilde{v}^+(t) - \\ & (N^+(t, -\mu(t) + 0) - N^+(t, -\mu(t) - 0)) \cos \tilde{v}^+(t)] dt = v^+(x) \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde ederiz. Burada

$$v^+(x) = \int_x^{+\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt, \quad \tilde{v}^+(x) = \int_x^{+\infty} \frac{l(t) \text{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt$$

şeklindedir ve

$$\tilde{v}^+(x) = 2v^+(0) - v^+(x) \quad (4.56)$$

sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \left(\frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} + \frac{l^2(x)}{\kappa(x)\sqrt{\kappa(x)}} \right) \\ &= 2 \frac{d}{dx} [M^-(x, \mu(x)) \cos v^-(x) + N^-(x, \mu(x)) \sin v^-(x)], \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{\sqrt{\kappa(t)}}{\omega} \right) \sqrt{\kappa(t)} [M^-(t, \mu(t)) \sin v^-(t) - N^-(t, \mu(t)) \cos v^-(t)] dt + \\ & + \int_{-\infty}^x \left(1 - \frac{\sqrt{\kappa(t)}}{\omega} \right) \sqrt{\kappa(t)} [(M^-(t, -\mu(t) + 0) - M^-(t, -\mu(t) - 0)) \sin \tilde{v}^-(t) \\ & - (N^-(t, -\mu(t) + 0) - N^-(t, -\mu(t) - 0)) \cos \tilde{v}^-(t)] dt = v^-(x) \end{aligned} \quad (4.58)$$

elde ederiz. Burada

$$v^-(x) = \int_{-\infty}^x \frac{l(t)}{\sqrt{\kappa(t)}} dt, \quad \tilde{v}^-(x) = \int_{-\infty}^x \frac{l(t) \operatorname{sgn} t}{\sqrt{\kappa(t)}} dt$$

şeklindedir ve

$$\tilde{v}^-(x) = v^-(x) - 2v^-(0) \quad (4.59)$$

sağlanır.

4.2. Düz Saçılma Problemi

Bu bölümde düz saçılma problemini ele alıyoruz ve ters problemin çözümü için gerekli olan saçılma verilerinin bazı özelliklerini inceliyoruz. $j(x)$, $l(x)$ fonksiyonları ve ω sayısı gerçel olduğundan, her gerçek ρ için $\overline{f_+(x, \rho)}$ ve $\overline{f_-(x, \rho)}$ fonksiyonları aynı zamanda (1.1) denkleminin çözümleridir. (4.42) ve (4.46) integral gösterilimlerinden elde edilen

$$\begin{aligned} f_+(x, \rho) &= e^{i\rho x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \\ f'_+(x, \rho) &= e^{i\rho x} (i\rho e^{iv_+(x)} + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \\ f_-(x, \rho) &= e^{-i\omega\rho x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \\ f'_-(x, \rho) &= e^{-i\omega\rho x} (-i\omega\rho e^{iv_-(x)} + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

asimptotik eşitliklerine göre ρ için aşağıdaki Wronski determinantlarını hesaplarız:

$$W \left\{ f_+(x, \rho), \overline{f_+(x, \rho)} \right\} = f'_+(x, \rho) \overline{f_+(x, \rho)} - f_+(x, \rho) \overline{f'_+(x, \rho)} = 2i\rho,$$

$$W \left\{ f_-(x, \rho), \overline{f_-(x, \rho)} \right\} = f'_-(x, \rho) \overline{f_-(x, \rho)} - f_-(x, \rho) \overline{f'_-(x, \rho)} = -2i\rho\omega.$$

Sonuç olarak; $\rho \neq 0$ olduğunda $f_+(x, \rho), \overline{f_+(x, \rho)}$ ve $f_-(x, \rho), \overline{f_-(x, \rho)}$ çiftleri iki farklı temel çözümler sistemini oluşturur. O zaman tüm gerçek $\rho \neq 0$ için (1.1) denklemin her çözümü, $f_+(x, \rho), \overline{f_+(x, \rho)}$ veya $f_-(x, \rho), \overline{f_-(x, \rho)}$ çözümlerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Özel halde

$$f_+(x, \rho) = \frac{b(\rho)}{\omega} f_-(x, \rho) + \frac{a(\rho)}{\omega} \overline{f_-(x, \rho)}, \quad (4.60)$$

$$f_-(x, \rho) = -\overline{b(\rho)} f_+(x, \rho) + a(\rho) \overline{f_+(x, \rho)} \quad (4.61)$$

dir. Burada

$$a(\rho) = \frac{1}{2\rho i} W \{f_+(x, \rho), f_-(x, \rho)\}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (4.62)$$

$$b(\rho) = -\frac{1}{2\rho i} W \{f_+(x, \rho), \overline{f_-(x, \rho)}\}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.63)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} 2i\rho &= W \{f_+(x, \rho), \overline{f_+(x, \rho)}\} = -\frac{2i\rho}{\omega} \{b(\rho)\overline{b(\rho)} - a(\rho)\overline{a(\rho)}\} \\ &= -\frac{2i\rho}{\omega} [|b(\rho)|^2 - |a(\rho)|^2], \end{aligned}$$

$$|a(\rho)|^2 - |b(\rho)|^2 = \omega, \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (4.64)$$

elde ederiz. (4.60) ve (4.61) 'ün her iki tarafını da her $\rho \in \mathbb{R}^*$ için $a(\rho)$ 'ya bölerek ve

$$t(\rho) = \frac{1}{a(\rho)}, \quad (4.65)$$

$$r^+(\rho) = -\frac{\overline{b(\rho)}}{a(\rho)}, \quad r^-(\rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)} \quad (4.66)$$

ifadelerini kullanarak (1.1) denkleminin

$$\begin{aligned} u^-(x, \rho) &\equiv t(\rho)f_+(x, \rho) = \frac{r^-(\rho)}{\omega} f_-(x, \rho) + \frac{1}{\omega} \overline{f_-(x, \rho)}, \\ u^+(x, \rho) &\equiv t(\rho)f_-(x, \rho) = r^+(\rho)f_+(x, \rho) + \overline{f_+(x, \rho)} \end{aligned} \quad (4.67)$$

şeklinde çözümlerini ve bu çözümlerin

$$u^-(x, \rho) = \frac{r^-(\rho)}{\omega} e^{-i\rho\omega x} + \frac{e^{i\rho\omega x}}{\omega} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$u^-(x, \rho) = t(\rho)e^{i\rho x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$u^+(x, \rho) = t(\rho)e^{-i\rho\omega x} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$u^+(x, \rho) = r^+(\rho)e^{i\rho x} + e^{-i\rho x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty$$

asimptotik ifadelerini elde ederiz.

$u^-(x, \rho)$ ve $u^+(x, \rho)$ çözümleri sırasıyla sol ve sağ saçılma problemlerinin özfonksiyonları olarak adlandırılır ve $r^-(\rho)$, $r^+(\rho)$ ve $t(\rho)$ katsayıları sırasıyla sol, sağ yansıma katsayıları ve iletim katsayısı olarak adlandırılır.

$f_+(x, \rho)$ ve $f_-(x, \rho)$ fonksiyonları $\text{Im } \rho > 0$ yarı düzlemine analitik devam ettirilebildiği için (4.62) formülü ile $a(\rho)$ fonksiyonunu da aynı $\text{Im } \rho > 0$ üst yarı düzlemine analitik devam ettirebiliriz. (4.64) denkleminde $\rho \in \mathbb{R}^*$ için $a(\rho) \neq 0$ olduğunu biliyoruz.

Yardımcı Teorem 4.4. $a(\rho)$ fonksiyonu $\text{Im } \rho > 0$ yarı düzleminde sadece sonlu sayıda sıfıra sahip olabilir.

İspat. Tersini varsayarak, $a(\rho)$ fonksiyonunun ikişer ikişer ayrı $\rho_k (k = 1, 2, \dots)$ sıfırlarının sayılabilir bir kümesine sahip olduğunu varsayalım. (4.60) denklemini sayesinde $a(\rho_k) = 0$ eşitliğinden $f_+(x, \rho_k)$ ve $f_-(x, \rho_k)$ çözümlerinin lineer bağımlı olduğu sonucuna varırız, yani öyle bir c_k sabiti vardır ki

$$f_+(x, \rho_k) = c_k f_-(x, \rho_k), \quad x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.68)$$

şeklinde. $\text{Im } \rho > 0$ için $f_+(x, \rho)$ çözümünün $x \rightarrow +\infty$ olduğunda üstel olarak azaldığı ve $f_-(x, \rho)$ çözümünün $x \rightarrow -\infty$ olduğunda benzer şekilde davrandığı açıktır. Böylece, üst yarı düzlemde ρ 'nın karmaşık değerleri için $f_+(x, \rho)$ ($f_-(x, \rho)$) fonksiyonu (1.1) denkleminin $L_2(0, \infty)$ ($L_2(-\infty, 0)$) uzayına ait olan tek çözümdür. Bu nedenle (1.1) denklemini sadece $f_+(x, \rho)$ ve $f_-(x, \rho)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğu ρ ($\text{Im } \rho > 0$) değerleri için $L_2(-\infty, \infty)$ 'a ait bir çözüme sahiptir. Böylece, $f_+(x, \rho_k)$ fonksiyonu (1.1) denkleminin $L_2(-\infty, +\infty)$ 'a ait triviyal olmayan bir çözümdür. Bu nedenle, eğer $L_0, L_2(-\infty, +\infty)$ uzayında $-\frac{d^2}{dx^2} + j(x)$ diferansiyel ifadesi tarafından üretilen minimal kapalı operatör ise, o zaman L_0 bir selfadjoint operatördür ve $y_k(x) = f_+(x, \rho_k)$ çözümü için

$$\rho_k^2 \kappa(x) y_k(x) - 2\rho_k l(x) y_k(x) - L_0 y_k(x) = 0.$$

geçerlidir. Son denklemden çıkar ki ;

$$\rho_k = \frac{(ly_k, y_k) \pm \sqrt{(ly_k, y_k)^2 + (L_0 y_k, y_k)(\kappa y_k, y_k)}}{(\kappa y_k, y_k)}$$

dir, burada $(.,.)$, $L_2(-\infty, +\infty)$ uzayında standart iç çarpımı gösterir. ρ_k gerçekte bir sayı olmadığından tüm k değerleri için $(L_0 y_k, y_k) < 0$ dır. $\rho_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ sayıları ikiye ikiye ayrık olduğundan, $f_+(x, \rho_k) = e^{i\rho_k x} (1 + o(1))$, $x \rightarrow +\infty$ asimptotik formülünden, $\{y_k\}$ fonksiyon sisteminin lineer bağımsız olduğunu elde ederiz. Bilindiği gibi, özeşlenik bir L_0 operatörünün spektrumunun negatif noktalarının sayısı, $(L_0 f, f) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı doğrusal manifoldların maksimum boyutuna eşittir. Bu, L_0 özeşlenik operatörünün sayılabilir bir negatif özdeğerler kümesine sahip olduğu anlamına gelir. Ancak bu $j(x)$ fonksiyonu üzerindeki (1.3) koşuluyla çelişir. $\square$

$\rho_k (k = 1, 2, \dots, n)$ $a(\rho)$ fonksiyonunun $\text{Im } \rho > 0$ üst yarı düzlemindeki sıfırları olsun. $a(\rho) = 0$ denkleminin ρ_k kökünün katlılığını m_k ile gösterelim. ρ_k köklerinin aşağıdaki özellikleri (4.62) formülünden elde edilebilir.

Yardımcı Teorem 4.5.

$$\left. \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\rho^j} f^\pm(x, \rho) \right|_{\rho=\rho_k} = \sum_{v=0}^j \mathcal{K}_{k,j-v}^\pm \frac{1}{v!} \frac{d^v}{d\rho^v} f^\pm(x, \rho) \Big|_{\rho=\rho_k}, \quad (4.69)$$

olacak şekilde $(\mathcal{K}_{k,0}^\pm, \dots, \mathcal{K}_{k,m_k-1}^\pm)$ sayı zinciri mevcuttur. Burada $j = 0, \dots, m_k - 1$, $k = 1, \dots, n$, $\mathcal{K}_{k,0}^\pm \neq 0$ dır.

Tanım 4.6. $a(\rho) = 0$ denkleminin ρ_k köküne karşılık gelen $(\mathcal{K}_{k,0}^+, \dots, \mathcal{K}_{k,m_k-1}^+)$ ve $(\mathcal{K}_{k,0}^-, \dots, \mathcal{K}_{k,m_k-1}^-)$ sayı kümeleri sırasıyla sağ ve sol normalleştirme zinciri olarak adlandırılacaktır.

Sağ ve sol normalleştirme zincirleri arasında aşağıdaki ilişkinin geçerli olduğunu kanıtlamak kolaydır:

$$\mathcal{K}_{k,0}^+ \mathcal{K}_{k,0}^- = 1, \quad \mathcal{K}_{k,j}^\pm = \frac{(-1)^j}{\left(\mathcal{K}_{k,0}^\pm\right)^j} \begin{vmatrix} \mathcal{K}_{k,1}^\pm & \mathcal{K}_{k,0}^\pm & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{K}_{k,2}^\pm & \mathcal{K}_{k,1}^\pm & \mathcal{K}_{k,0}^\pm & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{K}_{k,j}^\pm & \mathcal{K}_{k,j-1}^\pm & \mathcal{K}_{k,j-2}^\pm & \dots & \mathcal{K}_{k,1}^\pm \end{vmatrix} \quad (4.70)$$

Tanım 4.7.

$$\left\{ r^+(\rho), \rho_k, \kappa_{k,j}^+, j=0, \dots, m_k-1, k=1, \dots, n \right\}$$

ve

$$\left\{ r^-(\rho), \rho_k, \kappa_{k,j}^-, j=0, \dots, m_k-1, k=1, \dots, n \right\}$$

sırasıyla (1.3) koşullarına sahip (1.1) denkleminin sağ ve sol saçılma verileri olarak adlandırılır.

(1.3) sınıfından katsayılara sahip (1.1) denklemi için ters saçılma problemi sağ veya sol saçılma verilerine göre $j(x)$ ve $l(x)$ katsayılarının belirlenmesi problemi $\{r(\rho), \rho_k, \kappa_{k,j}, j=0, \dots, m_k-1, k=1, \dots, n\}$ şeklinde herhangi bir kümenin (1.1) denkleminin sağ veya sol saçılma verileri olması için gerek ve yeter koşulların bulunması problemidir.

Yardımcı Teorem 4.8. $\rho \in \mathbb{R}^*$ için (4.62), (4.63) formülleri ile tanımlanan $a(\rho), b(\rho)$ fonksiyonları aşağıdaki gösterimlere sahiptir.

$$a(\rho) = \frac{1+\omega}{2} e^{iv} - \frac{de^{iv}}{2i\rho} + \frac{1}{2i\rho} \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{i\rho t} dt, \quad (4.71)$$

$$b(\rho) = \frac{\omega-1}{2} e^{i\theta} - \frac{c}{2i\rho} e^{i\theta} + \frac{1}{2i\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{i\rho t} dt, \quad (4.72)$$

dir, burada

$$\begin{aligned} v &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} dx, \quad \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(x) \operatorname{sgn} x}{\sqrt{\kappa(x)}} dx \\ d &= \frac{\omega+1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} + \frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) dx + \frac{\omega-1}{2} \left(\frac{1}{\omega^2} - 1 \right) il(0), \\ c &= \frac{\omega-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{l^2(x)}{\kappa(x) \sqrt{\kappa(x)}} + \frac{j(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} \right) \operatorname{sgn} x dx + \frac{\omega+1}{2} \left(\frac{1}{\omega^2} - 1 \right) il(0) \end{aligned}$$

ve $\varphi(t) \in L_1(0, +\infty)$, $\psi(t) \in L_1(-\infty, +\infty)'$ dir.

İspat. (1.1), (1.3) probleminin iki çözümünün Wronski determinantları x 'e bağlı olmadığından

$$\begin{aligned} a(\rho) &= \frac{1}{2i\rho} W[f_+(x, \rho), f_-(x, \rho)] \\ &= \frac{1}{2i\rho} [f_+(0^+, \rho)' f_-(0^+, \rho) - f_+(0^+, \rho) f_-(0^+, \rho)'] \end{aligned} \quad (4.73)$$

şeklinde dir. $f_{\pm}(x, \rho)$ için integral gösterimleri kullanarak aşağıdakileri hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} a(\rho) &= \frac{1}{2i\rho} \left[\left(i\rho - \frac{i}{2}l(0) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (l^2(t) + j(t)) dt \right) e^{iv_+(0)} + \int_0^{+\infty} C_x^+(0^+, t) e^{i\rho t} dt \right] x \\ &\quad \left[e^{iv_-(0)} - \frac{1}{2i\rho} \left(\int_{-\infty}^0 \left(\frac{l^2(t)}{\omega^3} + \frac{j(t)}{\omega} \right) dt - \frac{i}{\omega^2} l(0) \right) e^{iv_-(0)} + \frac{1}{i\rho} \int_{-\infty}^0 C_t^-(0^+, t) e^{-i\rho t} dt \right] - \\ &\quad \frac{1}{2i\rho} \left[e^{iv_+(0)} - \frac{1}{2i\rho} \left(\int_0^{+\infty} (l^2(t) + j(t)) dt - il(0) \right) e^{iv_+(0)} - \frac{1}{i\rho} \int_{-\infty}^0 C_t^+(0^+, t) e^{i\rho t} dt \right] x \\ &\quad \left(-i\omega\rho + \frac{i}{2\omega}l(0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{l^2(t)}{\omega^2} + j(t) \right) dt \right) e^{iv_-(0)} + \int_{-\infty}^0 C_x^-(0^+, t) e^{-i\rho t} dt \end{aligned}$$

Benzer şekilde (4.51) formülü de ispatlanır. Yardımcı Teorem 4.8 'den elde ediyoruz ki

$$a(\rho) = \frac{1+\omega}{2} e^{iv} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (\text{Im } \rho \geq 0) \quad (4.74)$$

ve

$$b(\rho) = \frac{\omega-1}{2} e^{i\theta} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (4.75)$$

dir. (4.64) formülünden ise açıktır ki;

$$\frac{1}{|a(\rho)|} \leq \frac{1}{\sqrt{\omega}}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (4.76)$$

dir. □

Aşağıdaki yardımcı teorem standart metodlarla ispatlanır.

Yardımcı Teorem 4.9. $\frac{1}{a(\rho)}$ fonksiyonu $D_\delta = \{\rho : |\rho| \leq \delta, \text{Im } \rho \geq 0\}$ bölgesinde sınırlı olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunur.

(4.64) ve (4.66) formüllerinden

$$|r^\pm(\rho)| < 1, \quad \rho \in \mathbb{R}^*, \quad (4.77)$$

elde ederiz. (4.72) ve (4.73) formüllerinden ise $\rho \in \mathbb{R}$ için

$$r^-(\rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)} = \frac{\omega - 1}{\omega + 1} e^{i(\theta - v)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

$$r^+(\rho) = -\frac{\overline{b(\rho)}}{a(\rho)} = \frac{1 - \omega}{1 + \omega} e^{-i(\theta + v)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty$$

bulunur, yani

$$r^\pm(\rho) = \pm \frac{1 - \omega}{1 + \omega} e^{\mp i(\theta \pm v)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (4.78)$$

dir. Böylece $r^\pm(\rho) \mp \frac{1 - \omega}{1 + \omega} e^{\mp i(\theta \pm v)} \in L_2(-\infty, +\infty)$ ve dolayısıyla

$$F_{0R}^\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r^\pm(\rho) \mp \frac{1 - \omega}{1 + \omega} e^{\mp i(\theta \pm v)} \right) e^{\pm i\rho x} d\rho \quad (4.79)$$

fonksiyonu da $L_2(-\infty, +\infty)$ uzayına aittir. Aşağıdaki yardımcı teorem Maksudov ve Guseinov (1986, 1989) çalışmasında olduğu gibi ispatlanır.

Yardımcı Teorem 4.10. $za(z)$ fonksiyonu kapalı üst yarı düzlemde sürekli ve öyle bir $V > 0$ vardır ki

$$1 - |r^\pm(\rho)|^2 \geq \frac{V\rho^2}{1 + \rho^2}, \quad \rho \in \mathbb{R}^* \quad (4.80)$$

sağlanır. Dahası

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho a(\rho) [r^\pm(\rho) + 1] = 0 \quad (4.81)$$

dir.

Açıktır ki $r^\pm(\rho)$ fonksiyonu tüm reel $\rho \neq 0$ için süreklidir. Ayrıca tüm $\rho \in \mathbb{R}^*$ için

$$\overline{r(\rho)} = -\overline{r^+(\rho)} \frac{\overline{a(\rho)}}{a(\rho)} \quad (4.82)$$

şeklindedir.

(4.82) formülünden çıkar ki sol yansıma katsayısı, sağ yansıma katsayısından tek bir şekilde tanımlanabilir. Aşağıdaki yardımcı teorem $a(z)$ fonksiyonunun sağ yansıma katsayısı tarafından inşaa edilmesini sağlar.

Yardımcı Teorem 4.11. $a(z)$ fonksiyonu sağ yansıma katsayısı cinsinden aşağıdaki gibi belirlenir:

$$a(z) = \frac{1+\omega}{2} \exp \left\{ iv - \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \left[\left(1 - |r^+(\rho)|^2 \right) \right]}{\rho - z} d\rho \right\} \prod_{k=1}^n \frac{z - \rho_k}{z - \bar{\rho}_k}. \quad (4.83)$$

Burada

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(x)}{\sqrt{\kappa(x)}} dx$$

dir.

İspat. Yardımcı Teorem 4.11 'e göre $g(z) = \frac{1+\omega}{2} e^{iv} \frac{1}{a(z)} \prod_{k=1}^n \frac{z - \rho_k}{z - \bar{\rho}_k}$ fonksiyonu üst yarı düzlemde holomorftir, düzgün sınırlıdır, sıfırları yoktur ve $|z| \rightarrow \infty$ olduğunda $1 + O((1/z))$ olarak davranır. Ayrıca, (4.64) ve (4.66) formüllerine göre gerçek $\rho \neq 0$ için

$$|g(\rho)| = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sqrt{1 - |r^\pm(\rho)|^2}.$$

dir. Bu $\ln g(z)$ ($\text{Im } z > 0$) fonksiyonunu $\ln |g(\rho)|$ ($-\infty < \rho < \infty$) gerçek kısmına göre bulunmasını sağlar. Bunun için kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden bilinen Poisson-Schwarz formülünü kullanırız:

$$\ln g(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |g(\rho)|}{\rho - z} d\rho$$

Bu da (4.83) 'ü verir. □

4.3. Ters Problemin Temel İntegral Denklemleri

$x < 0$ durumu için temel integral denklemlerini türetmek için (4.61) özdeşliğini kullanırız. (4.61) şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) = \left(r^+(\rho) + \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} \right) f_+(x, \rho) - \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} f_+(x, \rho) - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} f_-(x, \rho) + \overline{f_+(x, \rho)}.$$

Son denklemin $y > \mu(x)$ olduğu yerlerde her iki tarafını $\frac{1}{2\pi} e^{i\rho y}$ ifadesiyle çarparsak ve ρ 'ya göre $(-\infty, +\infty)$ aralığında integrallersek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(r^+(\rho) + \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} \right) f_+(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\overline{f_+(x, \rho)} - \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} f_+(x, \rho) - \frac{2e^{-iv}}{1+\omega} f_-(x, \rho) \right] e^{i\rho y} d\rho \end{aligned} \quad (4.84)$$

elde ederiz. Ayrıca $f_{\pm}(x, \rho)$ çözümlerinin (4.42), (4.46) ifadelerini kullanarak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(r^+(\rho) + \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} \right) f_+(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\overline{f_+(x, \rho)} - \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} f_+(x, \rho) - \frac{2e^{-iv}}{1+\omega} f_-(x, \rho) \right] e^{i\rho y} d\rho \\ &= F_R^+(x, y) + \int_{\mu(x)}^{\infty} C^+(x, t) F_{0R}^+(t+y) dt + \overline{C^+(x, y)} \\ &- \frac{\omega-1}{\omega+1} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) - \frac{2e^{-iv}}{1+\omega} C^-(x, y). \end{aligned} \quad (4.85)$$

buluruz. Bu nedenle (4.84) 'ün sağ tarafı

$$\begin{aligned} & F_R^+(x, y) + \int_{\mu(x)}^{\infty} C^+(x, t) F_{0R}^+(t+y) dt + \overline{C^+(x, y)} \\ &+ \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) - \frac{2e^{-iv}}{1+\omega} C^-(x, y), \end{aligned} \quad (4.86)$$

şeklinde olur, burada

$$\begin{aligned}
F_R^+(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[r^+(\rho) + \frac{\omega - 1}{\omega + 1} e^{-i(v+\theta)} \right] \left[R_+(x) e^{i\rho\mu(x)} + R_-(x) e^{-i\rho\mu(x)} \right] e^{i\rho y} d\rho \\
&= R_+(x) F_{0R}^+(\mu(x) + y) \\
&\quad + R_-(x) F_{0R}^+(-\mu(x) + y). \tag{4.87}
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi, çevre integrasyon yöntemini kullanarak (4.84)'nin sol tarafını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho\mu(x)} e^{i\rho(y-\mu(x))} d\rho
\end{aligned}$$

denklemini ele alalım. Açıktır ki ;

i)

$$f_-(x, \rho) e^{i\rho\mu(x)} = T_+(x) e^{2i\rho\mu(x)} + T_-(x) + \int_{-\infty}^{\mu(x)} C^-(x, t) e^{i\rho(\mu(x)-t)} dt$$

fonksiyonu $\text{Im } \rho \geq 0$ yarı düzleminde düzgün sınırlıdır.

ii) (4.71) sayesinde $\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \rightarrow 0, |\rho| \rightarrow \infty (\text{Im } \rho \geq 0)$ 'dir.

iii) Yardımcı Teorem 4.9 'a göre $\frac{1}{a(\rho)}$ fonksiyonu sıfırın bir komşuluğunda sınırlıdır ve sonuç olarak $\left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y}$ fonksiyonu bu komşulukta sınırlıdır.

Bunlara göre Jordan Yardımcı Teoremini uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho = \\
&i \sum_{k=1}^n \text{res}_{\rho=\rho_k} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-iv} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y} \tag{4.88}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
& \underset{\rho=\rho_k}{res} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-i\nu} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y} = \\
& \underset{\rho=\rho_k}{res} \frac{1}{a(\rho)} f_-(x, \rho) e^{i\rho y} = \\
& = \frac{1}{(m_k-1)!} \left\{ \frac{d^{m_k-1}}{d\rho^{m_k-1}} [(\rho - \rho_k)^{m_k}] \frac{f_-(x, \rho) e^{i\rho y}}{a(\rho)} \right\}_{\rho=\rho_k} = \\
& \frac{1}{(m_k-1)!} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{(m_k-1)!}{j! (m_k-1-j)!} \left\{ \frac{d^{m_k-1-j}}{d\rho^{m_k-1-j}} f_-(x, \rho) \right\}_{\rho=\rho_k} \times \\
& \times \left\{ \frac{d^{m_k-1}}{d\rho^{m_k-1}} \frac{(\rho - \rho_k)^{m_k} e^{i\rho y}}{a(\rho)} \right\}_{\rho=\rho_k} = \\
& = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{d\rho^j} \frac{(\rho - \rho_k)^{m_k} e^{i\rho y}}{a(\rho)} \right\}_{\rho=\rho_k} \times \\
& \times \sum_{\nu=0}^{m_k-1-j} \mathcal{K}_{k, m_k-1-j-\nu}^+ \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} f_+(x, \rho) \right\}_{\rho=\rho_k} = \\
& \sum_{j=0}^{m_k-1} \mathcal{K}_{k, m_k-1-j}^+ \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{d\rho^j} \frac{(\rho - \rho_k)^{m_k} e^{i\rho y}}{a(\rho)} f_+(x, \rho) \right\}_{\rho=\rho_k} = \\
& = iR_+(x) l_k^+(\mu(x) + y) e^{i\rho_k(\mu(x)+y)} + \\
& + iR_-(x) l_k^+(y - \mu(x)) e^{i\rho_k(y-\mu(x))} + i \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^+(x, t) l_k(t + y) e^{i\rho_k(t+y)}, \\
& l_k^+(x) = -ie^{-i\rho_k x} \sum_{j=0}^{m_k-1} \mathcal{K}_{k, m_k-1-j}^+ \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{d\rho^j} \frac{(\rho - \rho_k)^{m_k} e^{i\rho x}}{a(\rho)} \right\}_{\rho=\rho_k},
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a(\rho)} - \frac{2}{1+\omega} e^{-i\nu} \right) f_-(x, \rho) e^{i\rho y} d\rho = \\
& -R_+(x) \sum_{k=1}^n l_k^+(\mu(x) + y) e^{i\rho_k(\mu(x)+y)} - \\
& -R_-(x) \sum_{k=1}^n l_k^+(y - \mu(x)) - \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^+(x, t) \sum_{k=1}^n l_k(t + y) e^{i\rho_k(t+y)}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(4.85) formülü dikkate alındığında, $C^+(x, y)$ ($y > \mu(x)$) çekirdek fonksiyonu için aşağıdaki integral denklemi elde ederiz.:

$$\begin{aligned}
& F_R^+(x, y) + \int_{\mu(x)}^{\infty} C^+(x, t) F_{0R}^+(t + y) dt + \overline{C^+(x, y)} \\
& - \frac{\omega - 1}{\omega + 1} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) - \frac{2e^{-iv}}{1 + \omega} C^-(x, y) = \\
& - R_+(x) \sum_{k=1}^n l_k^+(\mu(x) + y) e^{i\rho_k(\mu(x)+y)} - \\
& - R_-(x) \sum_{k=1}^n l_k^+(y - \mu(x) e^{i\rho_k(y-\mu(x))}) - \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^+(x, t) \sum_{k=1}^n l_k(t + y) e^{i\rho_k(t+y)}, \\
& R_+(x) [F_{0R}^+(\mu(x) + y) \sum_{k=1}^n l_k^+(\mu(x) + y) e^{i\rho_k(\mu(x)+y)}] \\
& + R_-(x) [F_{0R}^+(-\mu(x) + y) + \sum_{k=1}^n l_k^+(y - \mu(x) e^{i\rho_k(y-\mu(x))})] \\
& = \overline{C^+(x, y)} - \frac{\omega - 1}{\omega + 1} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) - \frac{2e^{-iv}}{1 + \omega} C^-(x, y) \\
& + \int_{\mu(x)}^{\infty} C^+(x, t) [F_{0R}^+(t + y) + \sum_{k=1}^n l_k(t + y) e^{i\rho_k(t+y)}] dt = 0, \quad y \geq \mu(x)
\end{aligned}$$

Son denklem aşağıdaki denkleme indirgenebilir;

$$\begin{aligned}
& R_+(x) F^+(\mu(x) + y) + R_-(x) [F^+(-\mu(x) + y) + \overline{C^+(x, y)}] - \frac{1 - \omega}{1 + \omega} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) \\
& - \frac{2e^{-iv}}{1 + \omega} C^-(x, y) + \int_{\mu(x)}^{+\infty} C^+(x, t) F^+(t + y) dt = 0, \quad (y \geq \mu(x)), \quad (4.89)
\end{aligned}$$

Burada

$$F^+(x) = \sum_{k=1}^n l_k^+(x) e^{i\rho_k x} + F_{0R}^+(x) \quad (4.90)$$

şeklindedir. Son olarak $y > \mu(x)$ için $C^-(x, y) = 0$ olduğundan şu sonuca varırız ;

$$\begin{aligned}
& R_+(x) F^+(\mu(x) + y) + R_-(x) F^+(-\mu(x) + y) + \overline{C^+(x, y)} + \int_{\mu(x)}^{\infty} F^+(y + t) C^+(x, t) dt + \\
& + \frac{1 - \sqrt{\kappa(x)}}{1 + \sqrt{\kappa(x)}} e^{-i(v+\theta)} C^+(x, -y) = 0, \quad y \geq \mu(x) \quad (4.91)
\end{aligned}$$

Burada

$$F^+(x) = \sum_{k=1}^n l_k^+(x) e^{i\rho_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r^+(\rho) - \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{-i(\theta+v)} \right) e^{i\rho x} d\rho \quad (4.92)$$

fonksiyonu sağ saçılma verileri yardımıyla tanımlanır.

Benzer şekilde, (4.65) 'i kullanarak $y \leq \mu(x)$ için

$$T_+(x)F^-(-\mu(x)+y) + T_-(x)F^-(\mu(x)+y) + \overline{C^-(x,y)} + \int_{-\infty}^{\mu(x)} F^-(y+t)C^-(x,t)dt \\ - \frac{1-\sqrt{\kappa(x)}}{1+\sqrt{\kappa(x)}} e^{i(\theta-v)} C^-(x,-y) = 0 \quad (4.93)$$

integral denklemini elde edebiliriz, burada

$$F^-(x) = \sum_{k=1}^n l_k^-(x) e^{-i\rho_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r^-(\rho) + \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{i(\theta-v)} \right) e^{-i\rho x} d\rho \quad (4.94)$$

ve

$$l_k^-(x) = -ie^{i\rho_k x} \sum_{j=0}^{m_k-1} \mathcal{Z}_{k,m_k-1-j}^- \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{d\rho^j} \frac{(\rho-\rho_k)^{m_k} e^{-i\rho x}}{a(\rho)} \right\}_{\rho=\rho_k} \quad (4.95)$$

fonksiyonları sol saçılma verileri cinsinden tanımlanır. Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk:

Teorem 4.12. (4.42), (4.46) Jost gösterimlerinin $C^\pm(x,y)$ çekirdekleri (4.89) ve (4.93) temel integral denklemlerini sağlar.

4.4. Teklik

Teorem 4.13. (4.89) ve (4.93) temel integral denklemleri her bir sabitlenmiş $x > -\infty$ ve $x < \infty$ için sırasıyla $C^+(x, \cdot) \in L_1(\mu(x), +\infty)$ ve $C^-(x, \cdot) \in L_1(-\infty, \mu(x))$ şeklinde tek çözüme sahiptir.

İspat. (4.89) ve (4.93) ile belirlenen integral denklemlerin kompakt operatörler tarafından üretildiğini göstermek kolaydır ve bunların tek çözümünün varlığını göstermek için ilgili homojen denklemlerin yalnızca sıfır çözüme sahip olduğunu

göstermek yeterlidir.

$$g(y) + \overline{h_+(y)} - ch_+(-y) + \int_{\mu(x)}^{\infty} F_+(y+t)h_+(t)dt = 0, \quad y \geq \mu(x), \quad (4.96)$$

denklemini ele alalım, burada $h(y) = C^+(x, y)$, $c = e^{i(\theta-v)}$ ve x parametredir. (4.96) dan

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mu(x)}^{\infty} |h_+(y)|^2 dy - c \int_{\mu(x)}^{\infty} h_+(-y)\overline{h_+(y)} dy \\ &+ \int_{\mu(x)}^{\infty} \int_{\mu(x)}^{\infty} F_+(y+t)h_+(t)\overline{h_+(y)} dt dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{h_+(\rho)}|^2 d\rho + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(\rho) \widetilde{h^2(\rho)} d\rho, \end{aligned}$$

elde ediyoruz, burada $\widetilde{f(\rho)} = \int_{\mu(x)}^{\infty} f(y)e^{-i\rho y} d\rho$ 'dır.

$$|\widetilde{r^+(\rho)}| = |r^+(\rho)|$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\rho) \widetilde{h^2(\rho)} d\rho| d\rho \leq \int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\rho)| |\widetilde{h_+(\rho)}|^2 d\rho,$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{h_+(\rho)}|^2 d\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\rho)| |\widetilde{f(\rho)}|^2 d\rho$$

dir. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - |r^+(\rho)|) |\widetilde{f(\rho)}|^2 d\rho \leq 0$$

olur. Bu da tüm $\rho \neq 0$ için $1 - |r^+(\rho)| > 0$ nedeniyle $\widetilde{h_+(\rho)} \equiv 0$ anlamına gelir. Böylece (4.96) homojen denklemi sadece sıfır çözüme sahiptir. (4.93) denkleminin tekil olarak çözülebilirliği de benzer şekilde kanıtlanabilir. $\square$

Teorem 4.14. (1.1) denkleminin (1.3) sınıfından $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyelleri $\{r^\pm(\rho), (-\infty < \rho < \infty)\}$ saçılma verileri tarafından tek türlü belirlenir.

İspat. (4.89) ve (4.93) temel integral denklemlerini oluşturmak için, $\{r^\pm(\rho), (-\infty < \rho < \infty), \}$ saçılma verileri tarafından belirlenen $F^\pm(x)$ fonksiyonlarını bilmek yeterlidir. Bu nedenle, verilen $\{r^+(\rho)\}$ saçılma verileri ile $F^+(x)$

fonksiyonlarını oluşturmak ve bilinmeyen $C^+(x,y)$ fonksiyonuna ait temel (4.89) denklemini yazmak için (4.92) formülünü kullanırız. Teorem 4.13 'e göre, temel integral denkleminin tek bir çözümü vardır. Bu denklemi çözdüğümüzde, $C^+(x,y)$ çekirdeğini buluruz. Dolayısıyla, (4.54)-(4.59) formüllerine göre $j(x)$ ve $l(x)$ potansiyeli tek olarak oluşturulur. $\square$

Teorem 4.15. $r^+(\rho)(-\infty < \rho < +\infty)$ fonksiyonunun ayırık spektrumu olmayan (1.1) denkleminin sağ saçılma verisi olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1) $-\infty < \rho < +\infty$ için $r^+(\rho)$ sürekli, $|r^+(\rho)| \leq 1$ ($\rho \neq 0$ için $|r^+(\rho)| < 1$; $|r^+(0)| = 1$ ise $r^+(0) = -1$ olacak şekilde), bir $V > 0$ için

$$1 - |r^+(\rho)| \geq \frac{V\rho^2}{1 + \rho^2}, (-\infty < \rho < +\infty)$$

ve bazı θ, v sayıları için

$$r^+(\rho) = -\frac{1-\omega}{1+\omega}e^{-i(\theta+v)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), |\rho| \rightarrow \infty$$

dir.

2)

$$a_1(z) = \frac{1+\omega}{2} \exp \left\{ iv - \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \left[\left(1 - |r^+(\rho)|^2 \right) \right]}{\rho - z} d\rho \right\}$$

fonksiyonu $\text{Im } z \geq 0$ kapalı yarı düzleminde sürekli dir.

3)

$$F_{0R}^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(r^+(\rho) - \frac{1-\omega}{1+\omega}e^{-i(\theta+v)} \right) e^{i\rho x} d\rho$$

ve

$$F_{0R}^-(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\overline{r^+(\rho)} \frac{\overline{a(\rho)}}{a(\rho)} + \frac{1-\omega}{1+\omega}e^{i(\theta-v)} \right) e^{-i\rho x} d\rho$$

fonksiyonları mutlak sürekli olup $\frac{d}{dx}F_{0R}^+(x)$, $\frac{d}{dx}F_{0R}^-(x)$ türevleri her $x_1 > -\infty$ ve $x_2 < \infty$ için

$$\int_{x_1}^{+\infty} \frac{d}{dx}F_{0R}^+(\mu(x))dx < \infty, \int_{-\infty}^{x_2} \frac{d}{dx}F_{0R}^-(\mu(x))dx < \infty$$

eşitsizliklerini sağlar.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında potansiyeli enerji parametresine bağlı süreksiz katsayılı Sturm-Liouville demeti için ters saçılma problemi ele alınmış ve araştırılmıştır. Öncelikle ele alınan problemin çözümü literatürde yer almamaktadır. Çalışmada Sturm-Liouville demetinin çözümleri için yeni integral gösterim formülleri elde edilmiş ve bu formüllerden yararlanarak denklemin potansiyel fonksiyonları ile çözümlerin integral ifadesindeki integralaltı çekirdek fonksiyonu arasındaki ilişki ortaya çıkarılmıştır. Sonrasında Jost çözümlerinin diğer özellikleri incelenerek spektral verilerin karakterizasyonu da yapılmıştır. Ayrıca Faddeev türünden temel integral denklemin elde edilişi, bu integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliğinin yansıma fonksiyonunun sıfırdan farklı olması durumu için ispatı ve potansiyel fonksiyonların kurulma algoritması yer almıştır. Konunun bir diğer katkısı da elde edilen sonuçların Sturm-Liouville denkleminin polinomsal demetlerine uygulanabilmesi ve yeni araştırma yönlerine sahip olmasıdır. Potansiyelin spektral parametreye bağlı olması ve denklemin süreksiz katsayısı önemli zorlukları da ortaya çıkartmaktadır. Bunlardan en önemlisi Sturm-Liouville denkleminin sonsuzlukta koşulu sağlayan Jost çözümlerinin integral gösterimlerinin elde edilmesi sürecidir. Bu integral gösterimler sürekli duruma göre farklılık göstermektedir ve bu farklılık tüm problemin çözümünde etkisini göstermiştir. Tez çalışmasından elde edilen sonuçlar konu ile bağlantılı olan diğer problemlerin de çözümüne uygulanabilecektir.

Böylece tez çalışmasında ele alınan spektral problem henüz çözümü yapılmayan bir problemidir ve ilgili lineer olmayan evrim denklemlerinin (lineer olmayan Schrödinger, Klein-Gordon , Kortevge de Vries denklemleri gibi) ters saçılma metodu ile çözülebilmesi açısından önemlidir. Örneğin, Lax çiftlerinin evolüsyonu sayesinde Sturm-Liouville denkleminin ikinci dereceden demeti ile temsil edilen Kortevge de Vries türünden kısmi türevli nonlinear diferansiyel denklem sistemi için konulan Cauchy problemini çözmek için ters saçılma metodu uygulanabilecektir.

Bu anlamda tez çalışması yeni araştırma olanakları olarak da genç araştırmacıların hem bilimsel yönden gelişimini hem de araştırma konularının kapsamını geliştirmesini sağlayacaktır. Diğer taraftan elde edilecek sonuçlar, ele alınan Sturm-Liouville demeti

için $(0, \infty)$ aralığında ters problemin çözülmesi yönü, aynı zamanda matris şeklinde diferansiyel denklemler için tüm ekseninde ters problemin çözülmesi yönü ile de literatüre katkı sunmaktadır.



KAYNAKLAR

- Aktosun, T., Klaus, M., 1999. Asymptotics of the scattering coefficients for a generalized Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, 40, 3701–3709.
- Aktosun, T., Klaus, M., 2001. Small-energy asymptotics for the Schrödinger equation on the line Inverse Problems. *Inverse Problems*, 17, 619–632.
- Aktosun, T., Klaus, M., van der Mee, C., 1995. Inverse wave scattering with discontinuous wave speed. *Journal of Mathematical Physics*, 36, 2880–2928.
- Aktosun, T., Klaus, M., van der Mee, C., 1998a. Convexity of the Berezin range. *Journal of Mathematical Physics*, 39, 1957–1992.
- Aktosun, T., Klaus, M., van der Mee, C., 1998b. Inverse scattering in one dimension nonconservative media. *Integral Equations and Operator Theory*, 30, 297–316.
- Aktosun, T., Klaus, M., van der Mee, C., 1998c. Wave scattering in one dimension with absorption. *Journal of Mathematical Physics*, 39, 1957–1992.
- Aktosun, T., van der Mee, C., 1991. Scattering and inverse scattering for the 1-D Schrödinger equation with energy-dependent potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 32, 2786–2801.
- Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H., 2005. *Solvable Models in Quantum Mechanics. With an appendix by Pavel Exner.* AMS Chelsea Publishing, Providence.
- Anders, I., Kotlyarov, V., 1991. Characterization of scattering data for Schrödinger and Dirac operators. *Theoretical and Mathematical Physics*, 88, 725–734.
- Buslaev, V., Fomin, V., 1962. An Inverse Scattering Problem for the One-Dimensional Schrödinger Equation on the Entire Axis. *Vestnik Leningrad University*, 17, 56–64.
- Chadan, K., Sabatier, P.C., 1977. *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory.* Springer.
- Cohen, A., 1984. Solutions of the Korteweg-de Vries Equation with Steplike Initial Profile. *Communications in Partial Differential Equations*, 9, 751–806.
- Cornille, H., 1970. Existence and uniqueness of crossing symmetric N/D-type equations corresponding to the Klein-Gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11, 79–98.
- Cowen, C., Felder, C., 1981. Determination of a diffusion operator from spectral data. *Akad. Nauk Azerbaidzhan*, 3, 19–23.

- Darwish, A.A., 1993. The Inverse Problem for a Singular Boundary Value Problem. *New Zeland Journal of Mathematics*, 22, 37–66.
- Deift, P., Trubowitz, E., 1979. Inverse Scattering on the Line. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32, 121–251.
- Faddeev, L.D., 1958. On the Connection of the S-Matrix and the Potential for the One-Dimensional Schrödinger Operator. *Doklady Akademii Nauk*, 121, 63–66.
- Faddeev, L.D., 1963. The Inverse Problem in the Quantum Theory of Scattering. *Journal of Mathematical Physics*, 4, 72–104.
- Faddeev, L.D., 1964. Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equations. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, 73, 314–336.
- Freiling, G., Yurko, V., 2001. *Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications*. Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY.
- Gasymov, M., 1977. The Direct and Inverse Problem of Spectral Analysis for a Class of Equations with a Discontinuous Coefficient. *Novosibirsk Nauka*.
- Gasymov, M.G., Magerramov, A.M., 1982. Investigation of a class of fourth-order differential operator pencils. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 265, 277–280.
- Gasymov, M.G., Magerramov, A.M., 1987a. Direct and inverse spectral problems for a class of ordinary differential pencils on a finite interval. *Differentsialnye Uravneniya*, 23, 960–971.
- Gasymov, M.G., Magerramov, A.M., 1987b. Uniqueness of the solution of an inverse problem of scattering theory for pencils of ordinary differential operators. *Akad. Nauk Azerbaidzhan*, 43, 3–6.
- Gelfand, I., Levitan, B., 1955. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 15, 309–360.
- Guseinov, I.M., 1985. On the Continuity of the Coefficient of Reflection of the Schrödinger One-Dimensional Equation. *Diff. Uravn*, 21, 1993–1995.
- Guseinov, I.M., Pashaev, R.T., 2002. On an Inverse Problem for a Second-Order Differential Equation. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 57, 147–148.
- Hald, O., 1984. Discontinuous inverse eigenvalue problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37, 539–577.
- Huruslov, E.Y., 1976. Asymptotic Behaviour of the Solution of the Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation with Steplike Initial Data. *Matematicheskii Sbornik*, 99, 261–281.
- Huseynov, H.M., Osmanli, J.A., 2013. Inverse Scattering Problem for One-Dimensional Schrödinger Equation with Discontinuity Conditions. *Journal of Mathematical*

Physics, Analysis, Geometry, 9, 332–359.

Jaulent, M., Jean, C., 1976. The Inverse Problem for the One Dimensional Schrödinger Equation with an Energy-Dependent Potential. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 25, 105–137.

Kamimura, Y., 2007a. An inversion formula in energy dependent scattering. *Journal of Integral Equations and Applications*, 19, 473–512.

Kamimura, Y., 2007b. An inversion formula in energy dependent scattering. *Journal of Integral Equations and Applications*, 19, 473–512.

Kaup, D., 1975. A higher-order water-wave equation and the method for solving it. *Progress of Theoretical Physics*, 54, 396–408.

Kay, I., Moses, H.E., 1955. The Determination of the Scattering Potential from the Spectral Measure Function I: Continuous Spectrum. *Nuovo Cimento* 2, 5, 917–961.

Kay, I., Moses, H.E., 1956a. The Determination of the Scattering Potential from the Spectral Measure Function II: Point Eigenvalues and Proper Eigenfunctions. *Nuovo Cimento* 3, 1, 66–84.

Kay, I., Moses, H.E., 1956b. The Determination of the Scattering Potential from the Spectral Measure Function III: Calculation of the Scattering Potential from the Scattering Potential from the Scattering Operator for the One Dimensional Schrödinger Equation. *Nuovo Cimento* 3, 2, 276–304.

Kobayashi, M., 1989. A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials. *Inverse Problems*, 5, 767–781.

Levitan, B., Gasymov, M., 1964. Determination of a differential equation by two spectra. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 19, 3–63.

Levitan, B.M., 1975. The Inverse Scattering Problem of Quantum Theory. *Mathematical Notes*, 17, 611–624.

Maksudov, F.G., Guseinov, G.S., 1986. On the solution of the inverse scattering problem for the quadratic pencil of the Schrödinger equation on the full-line. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 289, 42–46.

Maksudov, F.G., Guseinov, G.S., 1989. An inverse scattering problem for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators on the full line. *Spectral Theory of Operators and its Applications*, 9, 176–211.

Mamedov, K.R., 2010. On an Inverse Scattering Problem for a Discontinuous Sturm-Liouville Equation with a Spectral Parameter in The Boundary Condition. *Boundary Value Problems*, 2010, 1–17.

- Marchenko, V.A., 1955. Reconstruction of the Potential Energy from the Phases of the Scattered Waves. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 104, 695–698.
- Marchenko, V.A., 1986. *Sturm-Liouville Operators and Their Applications*. Birkhauser, Basel.
- McLaughlin, J.R., 1986. Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data. *SIAM Review*, 28, 53–72.
- Nabiev, A.A., 2014. Direct and inverse scattering problem for the one dimensional Schrödinger equation with the energy dependent potential and discontinuity conditions. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 40, 315–331.
- Nabiev, A.A., Cucen, D.N., 2023. On the Jost solutions of the quadratic pencil of the Sturm-Liouville equation. *Suleyman Demirel Universiteti Fen ve Edebiyat Fakultesi Fen Dergisi*, 18, 18–27.
- Nabiev, A.A., Mamedov, K.R., 2015. On the Jost Solutions for a Class of Schrödinger Equations with Piecewise Constant Coefficients. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 11, 279–296.
- Nabiev, A.A., Mamedov, K.R., 2019. Inverse problem of scattering theory for a class one-dimensional Schrödinger equation. *Quaestiones Mathematicae*, 42, 841–856.
- Newton, R.G., 1983. The Marchenko and Gelfand-Levitan methods in the inverse scattering problem in one and three dimensions. *Conference on inverse scattering theory and application SIAM Philadelphia*.
- Newton, R.G., 1985. Inverse Scattering by a Local Impurity in a Periodic Potential in One Dimension. *Journal of Mathematical Physics*, 26, 311–316.
- Pöschel, J., Trubowitz, E., 1987. *Inverse spectral Theory*. Academic Press, New York.
- Rofe-Beketov, F.S., Zubkova, E.I., 2009. Inverse Scattering Problem on the Axis for the Triangular 2x2 Matrix Potential with a Virtual Level. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 15, 301–321.
- Sattinger, D.H., Szmigielski, J., 1995. Energy dependent scattering theory. *Differential and Integral Equations*, 8, 945–959.
- Shepelsky, D.G., 1994. The Inverse Problem of Reconstruction of the Medium's Conductivity in a Class of Discontinuous and Increasing Functions. *Advances in Soviet Mathematics*, 19, 209–231.
- Weiss, R., Scharf, G., 1971. The inverse problem of potential scattering according to the Klein-Gordon equation. *Helvetica Physica Acta*, 44, 910–929.

- Yurko, V., 2006. Inverse spectral problems for differential pencils on the half-line with turning points. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 320, 439–463.
- Zubkova, E.I., Rofe-Beketov, F.S., 2007a. Inverse Scattering Problem on the Axis for the Schrödinger Operator with Triangular 2×2 Matrix Potential. I. Main Theorem. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 3, 47–60.
- Zubkova, E.I., Rofe-Beketov, F.S., 2007b. Inverse Scattering Problem on the Axis for the Schrödinger Operator with Triangular 2×2 Matrix Potential. II. Addition of the Discrete Spectrum. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 3, 176–195.
- Zubkova, E.I., Rofe-Beketov, F.S., 2009. Necessary and Sufficient Conditions in Inverse Scattering Operator with Triangular 2×2 Matrix Potential. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 5, 296–309.