BAZI ORAN DİZİ UZAYLARI VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MARYA ALİZADA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
AĞUSTOS - 2023

BAZI ORAN DİZİ UZAYLARI VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MARYA ALİZADA
ORCID ID: 0000-0002-7076-9435

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. İLHAN DAĞADUR
ORCID ID: 0000-0001-6223-6543

MERSİN
AĞUSTOS-2023

ÖZET

BAZI ORAN DİZİ UZAYLARI VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Bu tez çalışmasında ilk olarak bazı oran dizi uzayları ele alındı ve onların topolojik özellikleri incelendi. Ayrıca kesitsel oran dizi uzaylarındaki kararlı kümelere ilişkin çeşitli sonuçları gösterildi. Bununla birlikte analitik ve tam dizilerin oran uzaylarına ilişkin sonuçlar verildi. Ayrıca oran Hahn dizi uzayı ve bu uzayın bazı temel özellikleri ele alındı. İntegrallenmiş $\int \ell_\pi$ oran uzayının BK-AK özellikli olması detaylı bir şekilde ele alındı ve bu uzay için bir kararlı küme araştırıldı. Son olarak da oran dizi uzayları ve topolojik özellikleri kullanılarak bazı sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Oran dizi uzayı, Kararlı küme, Analitik oran dizi uzayı, Nörlund uzayı, Hahn dizi uzayı.

Danışman: Prof. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

SOME RATE SEQUENCE SPACES AND THEİR TOPOLOGICAL PROPERTIES

In this thesis, some topological properties of some rate space and important results related to sectional rate space are studied. Also, various results on determining sets in sectional rate spaces are shown. Moreover, some results related to rate sequence space of analytic and entire sequences are given. In addition, Hahn sequence space and some fundamental properties of this space are examined. The fact that the İntegrated $\int \ell_{\pi}$ rate space has BK-AK property discussed in detail and the determining set for this space was searched. Finally, some results are given using rate sequence spaces and their topological properties.

Keywords: Rate sequence space, Determining set, Analytic rate sequence, Norlund space, Hahn sequence space.

Advisor: Prof. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin University, Department of Mathematics.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda bana yardımcı olan, vaktini, emeğini, bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. İlhan DAĞADUR'a teşekkür ederim.

Her zaman beni maddi ve manevi olarak destekleyen, her zaman beni motive eden, destekleyen ve sevgisini eksik etmeyen aileme ve her zaman çalışmalarıma yardımcı olan Araş. Gör. Şeyda SEZGEK'e teşekkür ederim.

Ayrıca, Yüksek Lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Mersin Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
ω	Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı
φ	Sonlu diziler uzayı
X'	X deki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin lineer uzayı
c	$\left\{x=(x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k \ \ mevcut\right\}$
c_0	$\left\{x=(x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$
l_∞	$\{x=(x_k) : \ sup_{(k)}\lvert x_k\rvert < \infty\}$
l_p	$\left\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^p < \infty\right\}$
bv	$\left\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k - x_{k+1}\rvert < \infty\right\}$
bs	$\left\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{m} x_k \in l_\infty, m=1,2,\cdots,\right\}$
cs	$\left\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{m} x_k \in c, m=1,2,\cdots,\right\}$
Γ	$\left\{x=(x_k) : \lim_{k\to\infty}\lvert x_k\rvert^{1/k} = 0\right\}$
Λ	$\left\{x=(x_k) : sup_{(k)}\lvert x_k\rvert^{1/k} < \infty\right\}$
Γ_π	$\left\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)^{1/k} = 0, x\in\Gamma\right\}$
Λ_π	$\left\{x=(x_k): sup_{(k)}\left\lvert\frac{x_k}{\pi_k}\right\rvert^{1/k} < \infty, \quad x\in\Lambda\right\}$
χ_π	$\left\{x=(x_k): \left(k!\left\lvert\frac{x_k}{\pi_k}\right\rvert^{1/k}\right) \to 0, \ k\to\infty\right\}$
$(\Gamma_s)_\pi$	$\left\{x=(x_k)\in\omega : \xi=\left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right)\in\Gamma\right\}$
$(\Lambda_s)_\pi$	$\left\{x=(x_k)\in\omega : \eta=\left(\frac{\eta_k}{\pi_k}\right)\in\Lambda\right\}$
bv_0	$\left\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\lvert\Delta x_k\rvert < \infty, \Delta x_k = x_k - x_{k+1}, \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$
σ_0	$\left\{x=(x_k): n^{(-1)}\sum_{k=1}^{\infty} x_k \to 0, (n\to\infty)\right\}$
σ_∞	$\left\{x=(x_k): sup_{(n)}\, n^{(-1)}\left\lVert\sum_{k=1}^{n} x_k\right\rVert < \infty\right\}$
$\int l_\pi$	$\left\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\left\lvert\frac{kx_k}{\pi_k}\right\rvert < \infty\right\}$

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında oran dizi uzaylarının temel topolojik özelliklerini β - ve sürekli duallerini, kesitsel oran dizi uzaylarını, tam ve analitik oran dizi uzaylarının bazı özelliklerinin yanı sıra oran Hahn dizi uzayına ilişkin çeşitli karakterizasyonlar verildi. Ayrıca bu dizi uzaylarının tam metrik uzay olup olmadıklarını ve bazı kesitsel oran dizi uzayları için kararlı küme örnekleri incelendi. Diğer yandan $\int \ell_\pi$ oran uzayının AK özellikli bir BK uzay olması detaylı bir şekilde ele alındı ve bu uzay için bir kararlı küme örneği verildi. Ayrıca $\int \ell_\pi$ oran uzayından BK-AK özellikli $Y = \ell_\infty, c_0, c, bv, bs, cs, \ell_\pi, \ell_p, bv_0$ uzaylarına tanımlı tüm sonsuz matris dönüşümleri incelendi. Diğer taraftan Hahn dizi uzayının oran uzayı olduğu gösterildi ve bu uzayın bazı temel özellikleri ele alındı. Son olarak da Γ_π, $(\Gamma_s)_\pi$ ve Λ_π oran dizi uzaylarının genel özellikleri incelendi ve bu uzaylara ilişkin çeşitli karakterizasyonlar verildi.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Matematik analiz içinde önemli bir yer tutan toplanabilme yöntemleri oldukça eski bir geçmişe sahiptir. İlk defa Sikk (1989) tarafından oran FK-uzayları tanımlanmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Jürimäe (1991; 1994) yapmış olduğu çalışmalarda ise Oran ve Hız FK uzayları arasındaki matris dönüşümleri ve bu uzayların toplanabilirlik alanlarına ilişkin çeşitli sonuçlar elde etmiştir. Bu çalışmaların bir devamı sayılabilecek çalışmalar ise Chandrasekhara Rao ve Singaravel (2002), Chandrasekhara, (2009) ve Tamilselvan vd. (2011) tarafından Mazur tipi matrisler ve Dağadur (2004) tarafından toplanabilme alanlarının π-conull olmasına ilişkindir. Böylece toplanabilme teorisi açısından incelenen özellikler fonksiyonel analiz açısından da incelenmeye başlanmıştır. Bu ise ilgili alanın önemini arttırmıştır. Bu nedenle adı geçen tez konusunun incelenmesi matematik analiz ve fonksiyonel analiz açısından önemlidir.

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez boyunca kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve X boştan farklı bir cümle olmak üzere

$$x: \mathbb{N} \to X$$
$$k \to x_k$$

şeklinde tanımlanan x fonksiyona X değerli bir dizi denir.

Tanım 3.1.2. (x_k) reel sayı dizisi olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k < x_{k+1}$ ise (x_k) dizisine artan dizi ve $x_{k+1} < x_k$ ise (x_k) dizisine azalan dizi denir.

Tanım 3.1.3. $X \neq \emptyset$ bir küme τ, X in alt kümelerinin bir sınıfı $\left(\tau \subset p(x)\right)$ olsun. Eğer

(i) $\emptyset\,, X \in \tau$
(ii) $A_i \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau\,,\ 1 \leq i \leq n$
(iii) $A_i \in \tau$ için $\bigcup_{i=I} A_i \in \tau,\ i = I$

ise τ ya X üzerinde bir topolojik yapı (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir.

Tanım 3.1.4. $X \neq \emptyset$ ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\forall x, y, z \in X$ için

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

ise (X, d) uzayına metrik uzay denir.

Tanım 3.1.5. $x = (x_k)$, $(X.d)$ metrik uzayında bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir. $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$ ya da $x_k \to x$ şekilde gösterilir.

Tanım 3.1.6. $x = (x_k)$, $(X.d)$ metrik uzayında bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

sayısı vardır öyle ki $\forall m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.7. (X, d) metrik uzayında tanımlı her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 3.1.8. X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{K}$ kompleks ya da reel sayıların bir cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \to X$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$$

işlemleri $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

(i) $x + y = y + x$
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(iii) $x + 0 = x$ olacak şekilde bir $0 \in X$ mevcut
(iv) $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir $-x \in X$ mevcut
(v) $1 \cdot x = x$
(vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
(vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
(viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

şartlarını sağlarsa X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzayı denir.

Tanım 3.1.9. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya ayrılabilir uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 3.1.10. X bir lineer uzayı ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu lineer uzay denir.

Tanım 3.1.11. Bir Banach uzayı tam normlanmış bir lineer uzaydır. Buradaki tamlık $\|x_m - x_n\| \to 0, (m, n \to \infty)$ olacak şekildeki her $x_n \in X$ için bir $x \in X$ mevcuttur öyle ki $\|x_n - x\| \to 0, (n \to \infty)$ dır. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, l_\infty, l_p(p \geq 1), c, c_0$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.12. X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun.

(i) $\forall x \in A$ için $x \in \alpha A$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in \mathbb{K}$ mevcut ise A kümesine emen denir.

(ii) $\forall \lambda$ için $|\lambda| \leq 1$ olacak şekilde $\lambda A \subset A$ ise A kümesine dengeli küme denir.

(iii) $\forall x, y \in A$ elemanları için $\{\alpha x + (1-\alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$ ise A kümesine konveks küme denir.

(iv) A kümesi dengeli ve konveks küme ise A ya mutlak konveks denir (Kamthan ve Gupta, 1981).

Tanım 3.1.13. $X \subset \omega$ uzayının $\alpha, \beta, \gamma,$ ve $f-$ dualleri sırası ile

(i) $B(X, \mathbb{C}) = X' = \{f / f : x \to \mathbb{C} \text{ lineer süreklidir}\}$

(ii) $X^\alpha = \{y \in w : \forall x \in X,\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty\}$

(iii) $X^\beta = \{y \in w : \forall x \in X,\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\}$

(iv) $X^\gamma = \{y \in w : \forall x \in X,\ sup_n |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| < \infty\}$

(v) $X^f = \{f(\delta^{(n)}) : f \in X'\}$

olarak tanımlanır (Wilansky, 1984).

X^α, X^β ve X^γ dizi uzayıları olmak üzere her zaman $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ dır. $\mu = \alpha, \beta$ ve γ olsun. Eğer $X \subset Y$ ise bu durumda $Y^\mu \subset X^\mu$ dır (Wilansky, 1984).

Tanım 3.1.14. Tam lineer metrik bir uzaya Fréchet uzayı denir. H bir Hausdorff lineer topolojik uzay olsun. X lokal konveks Fréchet uzayı ve X, H uzayının lineer alt uzayı olmak üzere X in topolojisi H ın topolojisinin X uzayına kısıtlanmasından daha geniş oluyorsa, yani $\dot{I}: X \to H,\ \dot{I}(x) = x$ ile verilen içerme dönüşümü sürekli ise X uzayına bir FH uzayı denir.

Eğer $H = \omega$ alınırsa elde edilen FH uzayına bir FK uzayı denir. Böylece bir FK uzayı sürekli koordinatlara sahip lokal konveks bir Fréchet dizi uzayıdır. Ayrıca sürekli koordinatlara sahip bir Banach uzayına da $BK-$uzayı denir (Wilansky, 1984).

Tanım 3.1.15. X bir FK uzayı ve φ sonlu dizilerin uzayı olmak üzere $\varphi \subset X$ ve $\{\delta^n\}$ X dizi uzayı için bir Schauder bazı ise bu durumda X uzayına bir AK uzayı denir. Yani her $x \in X$ için

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0,0, \cdots) = \sum_{k=0}^{n} x_k \delta^k \to x \text{ dır.}$$

Ayrıca $\varphi,\ X$ uzayında yoğun ise bu takdirde X uzayına bir AD uzayı denir. Burada $\delta^k = (0,0, \cdots ,0,1,0, \cdots)$ dır (Wilansky, 1984).

Tanım 3.1.16. (X, τ) bir lokal konveks topolojik vektör uzayı olmak üzere X uzayında her sınırlı kapalı küme $\sigma(X, X')$ kompakt ise X yarı-yansımalıdır denir.

Tanım 3.1.17. (X, τ) lokal konveks bir uzay olsun. Bu uzayın mutlak konveks emen ve kapalı alt kümesine barrel denir. (X, τ) deki her barrel sıfırın bir komşuluğu ise (X, τ) uzayına barrelled uzay denir.

Tanım 3.1.18. X bir BK uzayı olsun. Bu durumda $B = \{X \text{ uzayında kapalı birim top}\}$ ve $\varphi = \{\text{tüm sonlu uzayı diziler}\}$ olmak üzere $D = D(x) = \varphi \cap B = \{x \in \varphi : \|x\| \leq 1\}$ olsun. Eğer $A = D$ ise bu durumda $\varphi \subset E$ kümesine X için bir kararlı küme denir. Burada A, E nin mutlak konveks hull u dur (Wilansky, 1984).

Tanım 3.1.19. $(p_n)_{n=1}^{\infty}, p_0 > 0$ olacak şekilde negatif olmayan reel sayılarının dizisi olsun.

$$y_k = \frac{p_0 x_k + p_1 x_{k-1} + \cdots + p_k x_0}{p_0 + p_1 + \cdots + p_k} \quad , \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

şekilde tanımlanır. $y = (y_k)$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin Nörlund dönüşümü denir.

$$\eta(\Gamma) = \{x = (x_k) : (y_k) \in \Gamma\} \text{ ve } \eta(\Lambda) = \{x = (x_k) : (y_k) \in \Lambda\}$$

olmak üzere Γ_π uzayının Nörlund oran uzayı $\eta(\Gamma_\pi)$ ve Λ_π uzayının Nörlund oran uzayı $\eta(\Lambda_\pi)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\eta(\Gamma_\pi) = \left\{x = (x_k) : \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \in \eta(\Gamma)\right\}$$

$$\eta(\Lambda_\pi) = \left\{x = (x_k) : \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \in \eta(\Lambda)\right\}$$

$n = 0,1,2, \ldots$ olmak üzere $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$ şekilde yazabiliriz (Sivaraman, vs. 2013).

Tanım 3.1.20. (X,τ) bir lokal konveks topolojik vektör uzayı olsun. Eğer X deki her sınırlı küme tam ise X uzayına quasi-tam uzay denir.

Tanım 3.1.21. $x=(x_k)\in\omega$ olsun. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty}k|x_k-x_{k+1}|<\infty$ ve $\lim_{k\to\infty}x_k=0$ olacak şekildeki dizilerin uzayına Hahn dizi uzayı denir ve

$$h=\left\{x:\sum_{k=1}^{\infty}k|x_k-x_{k+1}|<\infty \text{ ve } \lim_{k\to\infty}x_k=0\right\}$$

biçiminde gösterilir. Böylece h dizi uzayı $\Delta x_k=(x_k-x_{k+1})$ olmak üzere

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}k|x_k-x_{k+1}|=\sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta x_k|$$

normu ile bir BK- uzayıdır.

3.2. Oran Dizi Uzayları

Bu kısımda bazı oran dizi uzaylarını ve onların tam metrik uzay oldukları ele alınıp incelendi. Ayrıca bu uzaylar için çeşitli sonuçlar verildi.

Tanım 3.2.1. X bir FK uzayı ve $\pi=\{\pi_k\}$ pozitif tam sayıların artan bir dizisi olmak üzere eğer $X_\pi=\left\{x_k:\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)\in X\right\}$ ise X_π uzayına bir oran dizi uzayı denir (Jürimäe, 1994).

Özel olarak; $X=l_\infty, c_0$ ve c alınırsa

$$l_\pi^\infty=\left\{x=\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right):x\in l_\infty\right\},$$
$$(c_0)_\pi=\left\{x=\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right):x\in c_0\right\}$$

ve

$$c_\pi=\left\{x=\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right):x\in c\right\}$$

olup $l_\pi^\infty, (c_0)_\pi$ ve c_π oran dizi uzayları $\|x\| = sup_{(k)} \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|$ normu ile birer FK uzayıdır. Ayrıca

$$(l_p)_\pi = \left\{x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) : x \in l_p\right\}, \qquad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\Gamma_\pi = \left\{x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) : x \in \Gamma\right\}, \qquad d(x,y) = sup_{(k)} \left|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{y_k}{\pi_k}\right|^{1/k}$$

ve

$$\Lambda_\pi = \left\{x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) : x \in \Lambda\right\}, \qquad d(x,y) = sup_{(k)} \left|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{y_k}{\pi_k}\right|^{1/k}$$

olup bu uzaylar üzerindeki metrik $d(x,y) = \|x - y\|$ norm metriğinden elde edilir.

Teorem 3.2.2. l_π^∞ oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $x^{(n)} = \left\{\frac{x_1{}^{(n)}}{\pi_1}, \frac{x_2{}^{(n)}}{\pi_2}, \ldots\right\}$ olmak üzere l_π^∞ oran dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall m, n \geq n_0$ için $\left\|\frac{x_m}{\pi_m} - \frac{x_n}{\pi_n}\right\| < \varepsilon$ dır.
Böylece her $m, n \geq n_0$ ve $\forall k$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \varepsilon \tag{3.1.}$$

olup $\forall k$ için $\left\{x_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi c_π oran dizi uzayında bir Cauchy dizisidir. c_π bir tam uzay olduğundan her k için $\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k} \to \frac{x_k}{\pi_k}$ $(n \to \infty)$ olup $x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)$, $x \in l_\pi^\infty$ dir. Cauchy dizileri sınırlı olduğundan en az bir $K > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall$n için $\left\|\frac{x^{(n)}}{\pi}\right\| \leq K$ olup $\forall n, k$ için $\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| \leq K$ elde edilir. Sonuç olarak $\forall$k için

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| = \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \leq K$$

dır. (3.1.) ifadesinden $(m \to \infty)$ için limit alınırsa $\forall n \geq n_0$ ve $\forall k$ için

$$\left\|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right\| = sup_{(k)} \left|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Böylece keyfi bir $\left(\frac{x^{(n)}}{\pi}\right)$ Cauchy dizisi l_π^∞ de $\left(\frac{x}{\pi}\right)$ elemanına yakınsar. Bu nedenle l_π^∞ oran uzayı bir tam metrik uzaydır.

Teorem 3.2.3. c_π oran dizi uzayı l_π^∞ uzayının kapalı bir alt uzayıdır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\overline{c}_\pi$, c_π nın kapanışı olsun. $\left(\frac{x_i}{\pi_i}\right) \in \overline{c}_\pi$ alalım. Bu durumda $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty = \left\{\frac{x_1{}^{(n)}}{\pi_1}, \frac{x_2{}^{(n)}}{\pi_2}, \ldots\right\}$ olacak şekilde bir $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty$ dizisi vardır öyle ki $\forall k$ için $\frac{x^{(n)}}{\pi} \to \frac{x}{\pi}$, $(n \to \infty)$. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için bir pozitif n_0 tam sayısı vardır öyle ki $\forall i$ ve $\forall n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_i{}^{(n)}}{\pi_i} - \frac{x_i}{\pi_i}\right| \leq \left\|\frac{x^{(n)}}{\pi} - \frac{x}{\pi}\right\| < \varepsilon$$

dır. Özel olarak; $\frac{x^{(n_0)}}{\pi} \in c_\pi$ ve $\forall i$ için $\left|\frac{x_i{}^{(n)}}{\pi_i} - \frac{x_i}{\pi_i}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ dır. Değer taraftan $\frac{x^{(n_0)}}{\pi} \in c_\pi$ olduğundan $\left\{\frac{x_i{}^{(n_0)}}{\pi_i}\right\}_{n=1}^\infty$ bir Cauchy dizidir. $\forall i, k \geq n_0$ ve herhangi bir n_0 için

$$\left|\frac{x_i{}^{(n_0)}}{\pi_i} - \frac{x_k{}^{(n_0)}}{\pi_k}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dır. Böylece tüm $i, k \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_i}{\pi_i} - \frac{x_k}{\pi_k}\right| \leq \left|\frac{x_i}{\pi_i} - \frac{x_i{}^{(n_0)}}{\pi_i}\right| + \left|\frac{x_i{}^{(n_0)}}{\pi_i} - \frac{x_k{}^{(n_0)}}{\pi_k}\right| + \left|\frac{x_k{}^{(n_0)}}{\pi_k} - \frac{x_k}{\pi_k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

elde edilir. Bu ise $\frac{x}{\pi} = \left(\frac{x_i}{\pi_i}\right) \in c_\pi$ olduğunu gösterir. O halde l_π^∞ de $\overline{c}_\pi = c_\pi$ olur deki bu da ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.4. c_π oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. Teorem 3.2.2. ve Teorem 3.2.3. ten ispat açıktır.

Teorem 3.2.5. $(c_0)_\pi$ oran dizi uzayı c_π uzayında kapalıdır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\left(\frac{x_i}{\pi_i}\right) \in (\bar{c}_0)_\pi$ olsun. Burada $(\bar{c}_0)_\pi$ uzayı $(c_0)_\pi$nin $c_\pi$deki kapanışıdır. Bu durumda $(c_0)_\pi$ uzayında x 'e yakınsayan bir $\left\{\frac{x^{(n)}}{\pi}\right\}$ dizisi vardır. O halde $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq n_0$, $(n_0 \in \mathbb{N})$ için

$$\left|\frac{x^{(n)}}{\pi} - \frac{x}{\pi}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olup tüm k ve $n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k} - \frac{x_k}{\pi_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \leq \left|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| + \left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right|$$

ve $\left\{\frac{x^{(n)}}{\pi}\right\} \in (c_0)_\pi$ olup bir K pozitif tam sayısı için her $k \geq K$ olduğunda $\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Böylece $\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| < \varepsilon$ olup $x \in (c_0)_\pi$ dir. Sonuç olarak $(\bar{c}_0)_\pi = (c_0)_\pi$ gerçeklenir. Bu ise $(c_0)_\pi$ uzayının bir tam metrik uzay olduğunu gösterir.

Teorem3.2.6. $(c_0)_\pi$ oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. Teorem 3.2.4. ve Teorem 3.2.5. ten ispat açıktır.

Teorem 3.2.7. $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda $\left(l_p\right)_\pi$ oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $x^{(n)} = \left\{\frac{x_1{}^{(n)}}{\pi_1}, \frac{x_2{}^{(n)}}{\pi_2}, \dots\right\}$ olacak şekilde $\left(l_p\right)_\pi$ oran dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ için pozitif bir n_0 tam sayısı vardır öyle ki tüm $m, n \geq n_0$ için

$$\left\|\frac{x^{(n)}}{\pi} - \frac{x^{(m)}}{\pi}\right\| < \varepsilon$$

olup böylece $\forall m, n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right|^p<\varepsilon^p$$

dır. Bu durumda her sabit k için ve her $m, n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right|^p<\varepsilon^p$$

olup her $m, n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right|<\varepsilon$$

dır. Böylece $\left\{\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi c_π oran dizi uzayında bir Cauchy dizisidir. c_π oran dizi uzayı bir tam uzay olduğundan

$$\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\to\frac{x_k}{\pi_k}\,, \qquad (n\to\infty)$$

elde edilir. Diğer taraftan $x=\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)$ olsun. $x \in \left(l_p\right)_\pi$ olduğunu gösterelim. Şimdi tüm $m, n \geq n_0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\left\|\frac{x^{(m)}}{\pi}-\frac{x^{(n)}}{\pi}\right\|^p=\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right|^p+\sum_{k=j+1}^{\infty}\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right|^p<\varepsilon^p$$

dır. O halde

$$\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right|^p<\varepsilon^p$$

olup $(n\to\infty)$ için limit alırsak

$$\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k}{\pi_k}-\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right|^p\leq\varepsilon^p \qquad (3.2.)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik tüm j ler için geçerli olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\pi_k}-\frac{x_k(m)}{\pi_k}\right|^p \leq \varepsilon^p \tag{3.3.}$$

olup Minkowski eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k}{\pi_k}-\frac{x_k(m)}{\pi_k}\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k(m)}{\pi_k}\right|^p\right)^{1/p} \tag{3.4.}$$

$$\leq \varepsilon^p + \left\|\frac{x^{(m)}}{\pi}\right\|$$

elde edilir. Ancak $\left(\frac{x^{(m)}}{\pi}\right)$ Cauchy dizisi sınırlı olup bir sabit $H > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall m$ için

$$\left\|\frac{x^{(m)}}{\pi}\right\| \leq H$$

olur. (3.4.) ifadesinden bunu kullanarak

$$\left(\sum_{k=1}^{j}\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon^p + H$$

elde ederiz. Diğer yandan j keyfi olduğundan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon^p + H$$

olup bu ise $x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)$ dizisinin $\left(l_p\right)_\pi$ ye ait olduğunu gösterir. (3.3.) eşitsizliğinden

$$\left\|\frac{x}{\pi}-\frac{x^{(m)}}{\pi}\right\| \to 0\,, \quad m \to \infty$$

elde edilir. Böylece $\left(l_p\right)_\pi$ uzayındaki keyfi bir $\left(\frac{x^{(n)}}{\pi}\right)$ Cauchy dizisi yakınsaktır. Sonuç olarak $\left(l_p\right)_\pi$ oran dizi uzayı bir tam uzaydır.

Teorem 3.2.8. Γ_π oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}, x^{(n)} = \left\{\frac{x_1{}^{(n)}}{\pi_1}, \frac{x_2{}^{(n)}}{\pi_2}, \dots\right\}$ olacak şekilde Γ_π oran dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall m, n \geq n_0$ için

$$\sup_{(k)} \left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olup $\forall k$ ve $\forall m, n \geq n_0$ için

$$\left(\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right|^{1/k}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu ise $\{x_k{}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin c_π oran dizi uzayında bir Cauchy dizisi olması demektir. Böylece c_π oran dizi uzayı tam olduğundan

$$\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k} \to \frac{x_k}{\pi_k} (n \to \infty)$$

olup her k için

$$\left(\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k}{\pi_k}\right|^{1/k}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.5.}$$

eşitsizliği sağlanır. m bir sabit olmak üzere $\exists n_0$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $\left(\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right)^{1/k} < \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi ise $\forall n \geq n_0$ için

$$\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)^{1/k} \leq \left(\left|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right|^{1/k}\right) + \left(\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right|^{1/k}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup $x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) \in \Gamma_\pi$ dır. (3.5.) ifadesinden $\left\{\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right\}$ dizisi x 'e yakınsar. Böylece Γ_π oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır.

Teorem 3.2.9. Λ_π oran dizi uzayı bir tam metrik uzayıdır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $x^{(n)} = \left\{\frac{x_1{}^{(n)}}{\pi_1}, \frac{x_2{}^{(n)}}{\pi_2}, \dots\right\}$ olacak şekilde Λ_π oran dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall m, n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \varepsilon$$

dır. O halde ∀m için

$$\left\{sup\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right|\right\}^{1/k} < \varepsilon$$

olup

$$sup\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \varepsilon^k < \varepsilon$$

dır. Böylece $\forall m, n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| < \varepsilon \qquad (3.6.)$$

elde edilir. $\left\{\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right\}_{m=1}^{\infty}$, c_π oran dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. c_π uzayı tam uzay olduğundan $\left\{\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right\}_{m=1}^{\infty}$ yakınsaktır. Diğer taraftan $\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{x_k{}^{(m)}}{\pi_k}\right\} = \frac{x}{\pi}$ olsun. (3.6.) ifadesinden (n → ∞) için limit alınırsa her $k \geq n_0$ için

$$\left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k} - \frac{x}{\pi}\right| < \varepsilon \qquad (3.7.)$$

elde edilir. Böylece

$$\left|\frac{x}{\pi}\right| \leq \left|\frac{x}{\pi} - \frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| + \left|\frac{x_k{}^{(n)}}{\pi_k}\right| \leq \varepsilon + k < \infty$$

olup $x = \left(\frac{x}{\pi}\right) \in \Lambda_\pi$ dır. Dolayısıyla Λ_π oran dizi uzayı bir tam metrik uzaydır.

3.3. Kesitsel Oran Uzayları

Şimdi ise öncelikle l_π ve l_π^2 oran dizi uzayları için kararlı küme örnekleri ele alınıp incelendi. Ayrıca çeşitli dizi uzayları için bazı sonuçlar incelendi.

$$l = \{x = (x_k): \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\},$$
$$l_\pi = \left\{x = (x_k): \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| < \infty\right\},$$
$$l_\pi^2 = \left\{x = (x_k): \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^2 < \infty\right\},$$
$$l_s = \{x: \sum_{k=1}^{\infty} |x_1 + x_2 + \cdots + x_k| < \infty\},$$

ve

$$l_{s\pi} = \left\{x: \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) \in l_s\right\}$$

olup

$$x = (x_k) \in l_{s\pi} \Rightarrow \|x\|_{s\pi} = \left|\frac{x_1}{\pi_1}\right| + \left|\frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2}\right| + \left|\frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2} + \frac{x_3}{\pi_3}\right| + \cdots$$

dır.

Teorem 3.3.1. Her sabit pozitif k tam sayısı için $s^{(k)} = \left\{0,0,0,\ldots,0,0,\frac{1}{\pi_k},\frac{-1}{\pi_{k+1}},0,0,\ldots\right\}$ olmak üzere $E = \left\{s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots\right\}$ kümesini tanımlayalım. Eğer

$$\left|\frac{1}{\pi_k}\right| + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right| + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right| + \cdots \leq 1$$

ise o zaman E, $l_{s\pi}$ oran dizi uzayı için kararlı bir kümedir (Chandrsekhara Rao and Balasubramanian, 2014).

İspat. A, E nin mutlak konveks hull u olsun. φ tüm sonlu dizilerin uzayı $D = \{x \in l_{s\pi}: \|x\| \leq 1\}$ ve $B = \{l_{s\pi}$ de kapalı birim top$\}$ olmak üzere $D = \varphi \cap B$ olsun. Kabul edelim ki $x = \{x_k\} \in A$ olsun. Bu durumda $\sum_{k=1}^{m} |t_k| \leq 1$ olmak üzere

$$x = \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)} \tag{3.8.}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
x &= t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)} \\
&= t_1\left(\frac{1}{\pi_1}, \frac{-1}{\pi_2}, 0,0, \dots\right) + t_2\left(0, \frac{1}{\pi_2}, \frac{-1}{\pi_3}, 0,0, \dots\right) + \cdots + t_m\left(0,0,0, \dots, 0,0, \frac{1}{\pi_m}, \frac{-1}{\pi_{m+1}}, 0,0, \dots \dots\right) \\
&= \left(\frac{t_1}{\pi_1}, \frac{-t_1}{\pi_2}, 0,0, \dots\right) + \left(0, \frac{t_2}{\pi_2}, \frac{-t_2}{\pi_3}, 0,0, \dots\right) + \cdots + \left(0,0,0, \dots, 0,0, \frac{t_m}{\pi_m}, \frac{-t_m}{\pi_{m+1}}, 0,0, \dots \dots\right) \\
&= \left(\frac{t_1}{\pi_1}, \frac{t_2 - t_1}{\pi_2}, \dots, \frac{t_m - t_{m-1}}{\pi_m}, \frac{-t_m}{\pi_{m+1}}, 0,0, \dots \dots\right)
\end{aligned}$$

olup $x \in \varphi$ elde edilir. (3.9.)

Diğer taraftan $x = \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)}$ olduğundan her iki tarafın normu alınırsa

$$\|x\|_{s\pi} = \left\| \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)} \right\|_{s\pi}$$

olup

$$\|x\|_{s\pi} \leq \sum_{k=1}^{m} |t_k| \left\| s^{(k)} \right\|_{s\pi}$$

elde edilir. Ancak $s^{(k)} = \left\{0,0,0, \dots\ ,0,0, \frac{1}{\pi_k}, \frac{-1}{\pi_{k+1}}, 0,0, \dots\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\| s^{(k)} \right\|_{s\pi} &= |0| + |0+0| + \cdots + \left|0 + 0 + \cdots + \frac{1}{\pi_k}\right| + \left|0 + 0 + 0 + \cdots + \frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right| + \cdots \\
&\leq \left|\frac{1}{\pi_k}\right| + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right| + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right| + \cdots \\
&\leq 1 \qquad (3.10.)
\end{aligned}$$

olup böylece

$$\begin{aligned}
\|x\|_{s\pi} &\leq \sum_{k=1}^{m} |t_k| \left\| s^{(k)} \right\|_{s\pi} \leq 1 \\
&\leq 1 \left\| s^{(k)} \right\|_{s\pi} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece $x \in B$ elde edilir. (3.11.)

Dolayısıyla (3.9.) ve (3.11.) ifadelerinden $x \in D$ olup $A \subset D$ olur. (3.12.)

Tersine olarak, $x = \{x_k\} \in D$ olsun. Bu durumda $x \in \varphi$ olup $\|x\|_{s\pi} \leq 1$ dir. (3.13.)
$x \in \varphi$ olduğundan $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m, 0,0, \dots\}$ yazabiliriz. Böylece $t_1 = x_1, t_2 = x_1 + x_2, \dots, t_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ olup $x = t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)}$ elde edilir. Buradan ise

$$
\begin{aligned}
|t_1| + |t_2| + \cdots + |t_m| &= |x_1| + |x_1 + x_2| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_m| \\
&= \|x\|_{s\pi} \leq 1
\end{aligned}
$$

olup $\sum_{k=1}^{m} |t_k| \leq 1$ elde edilir. Böylece $\sum_{k=1}^{m} |t_k| \leq 1$ olmak üzere $x = t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)}$ dır. Bu da $x \in A$ demektir. Dolayısıla $D \subset A$ dır. (3.14.)
$(3.12.)$ ve $(3.14.)$ ifadesinden $A = D$ elde edilir. Bu durumda $\{s^{(k)}\}$, $l_{s\pi}$ oran dizi uzayı için kararlı bir kümedir.

Teorem 3.3.2. Her pozitif *k* tam sayısı için $s^{(k)} = \left\{0,0,0, \dots,0,0, \frac{1}{\pi_k}, \frac{-1}{\pi_{k+1}}, 0,0, \dots\right\}$ dizisi k ıncı yerde $\frac{1}{\pi_k}$ ve $(k+1)$ ıncı yerde $\frac{-1}{\pi_{k+1}}$ olacak şeklide tanımlayalım. Eğer

$$
\left|\frac{1}{\pi_k}\right|^2 + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right|^2 + \cdots \leq 1
$$

ise bu durumda $E = \{s^{(1)}, s^{(2)}, \dots\}$ kümesi $(l^2)_{s\pi}$ oran dizi uzayı için kararlı bir kümedir (Chandrsekhara Rao and Balasubramanian, 2014).

İspat. A, E nin mutlak konveks hull u φ tüm sonlu dizilerin uzayı ve
$D = \varphi \cap \{(l^2)_{s\pi}\text{oran uzayındaki kapalı birim top}\}$ olsun. $x = (x_k) \in A$ alalım. Bu durumda $\sum_{k=1}^{m} |t_k| \leq 1$ olmak üzere

$$
x = \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)} \tag{3.15.}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
x &= t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)} \\
&= t_1 \left(\frac{1}{\pi_1}, \frac{-1}{\pi_2}, 0,0, \dots\right) + t_2 \left(0, \frac{1}{\pi_2}, \frac{-1}{\pi_3}, 0,0, \dots\right) + \cdots + t_m \left(0,0,0, \dots,0,0, \frac{1}{\pi_m}, \frac{-1}{\pi_{m+1}}, 0,0, \dots \dots\right) \\
&= \left(\frac{t_1}{\pi_1}, \frac{-t_1}{\pi_2}, 0,0, \dots\right) + \left(0, \frac{t_2}{\pi_2}, \frac{-t_2}{\pi_3}, 0,0, \dots\right) + \cdots + \left(0,0,0, \dots, 0,0, \frac{t_m}{\pi_m}, \frac{-t_m}{\pi_{m+1}}, 0,0, \dots \dots\right) \\
&= \left(\frac{t_1}{\pi_1}, \frac{t_2 - t_1}{\pi_2}, \dots, \frac{t_m - t_{m-1}}{\pi_m}, \frac{-t_m}{\pi_{m+1}}, 0,0, \dots \dots\right)
\end{aligned}
$$

olur ki buradan $x \in \varphi$ elde edilir. (3.16.)

Ayrıca $x = \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)}$ olduğundan her iki tarafın normu alınırsa

$$\|x\|_{s\pi} = \left\|\sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)}\right\|_{s\pi}$$

olup

$$\|x\|_{s\pi} \leq \sum_{k=1}^{m} |t_k| \left\|s^{(k)}\right\|_{s\pi}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|x\|_{s\pi} &\leq \left\|t_1 s^{(1)}\right\| + \left\|t_2 s^{(2)}\right\| + \cdots + \left\|t_m s^{(m)}\right\| \\ &\leq |t_1| \left\|s^{(1)}\right\| + |t_2| \left\|s^{(2)}\right\| + \cdots + |t_m| \left\|s^{(m)}\right\| \\ &\leq |t_1| \left\|s^{(1)}\right\|^2 + |t_2| \left\|s^{(2)}\right\|^2 + \cdots + |t_m| \left\|s^{(m)}\right\|^2\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ancak $s^{(k)} = \left\{0,0,0, \ldots ,0,0, \frac{1}{\pi_k}, \frac{-1}{\pi_{k+1}}, 0,0, \ldots \ldots\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left\|s^{(k)}\right\|_{s\pi}^2 &= \left\|\left(0,0,0, \ldots ,0,0, \frac{1}{\pi_k}, \frac{-1}{\pi_{k+1}}, 0,0, \ldots \ldots\right)\right\|_{s\pi}^2 \\ &= \left\{|0|^2 + |0+0|^2 + \cdots + \left|0+0+\cdots+\frac{1}{\pi_k}\right|^2 + \left|0+0+0+\cdots+\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right|^2 + \cdots\right\} \\ &= \left\{\left|\frac{1}{\pi_k}\right|^2 + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\pi_k} - \frac{1}{\pi_{k+1}}\right|^2 + \cdots\right\} \leq 1\end{aligned}$$

olup $\left\|s^{(k)}\right\|_{s\pi}^2 \leq 1$ sağlanır. (3.17.)

Bu durumda (3.17.) ifadesinden

$$\begin{aligned}&\|x\|_{s\pi}^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |t_k| \left\|s^{(k)}\right\|_{s\pi}^2 \\ &\|x\|_{s\pi}^2 \leq 1 \qquad (3.18.)\end{aligned}$$

elde edilir ki $\|x\|_{s\pi} \leq 1$ olmak üzere $x \in \varphi$ olup buradan ise $x \in D$ elde edilir. x , A da keyfi olduğundan $A \subset D$ elde edilir. (3.19.)

Diğer taraftan $x = \{x_k\} \in D$ olsun. Bu durumda $x \in \varphi$ ve $\|x\|_{s\pi} \leq 1$ dir. $x \in \varphi$ olduğundan $x = \{x_1, x_2, \ldots , x_m , 0,0, \ldots\}$ yazabiliriz. Dolayısıyla $t_1 = \frac{x_1}{\pi_1}$, $t_2 = \frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2}$, … , $t_m = \frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2} + \cdots + \frac{x_m}{\pi_m}$ olmak üzere $x = t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)}$ olur. Böylece

$$|t_1| + |t_2| + \cdots + |t_m| = \left\{ \left|\frac{x_1}{\pi_1}\right|^2 + \left|\frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2} + \cdots + \frac{x_m}{\pi_m}\right|^2 \right\}^{1/2}$$
$$= \|x\|_{s\pi}$$

olup $\|x\|_{s\pi} \leq 1$ olduğundan $\sum_{k=1}^{m}|t_k| \leq 1$ elde edilir. Halbuki $\sum_{k=1}^{m}|t_k| \leq 1$, $x = t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + \mathrm{t_m s^{(m)}}$ dır. O halde $x \in A$ dir. Dolayısıyla x , D de keyfi olup $D \subset A$ elde edilir. (3.20.)
$(3.19.)$ ve $(3.20.)$ ifadesinden $A = D$ olup E, $(l^2)_{s\pi}$ oran dizi uzayı için kararlı bir kümedir.

Teorem 3.3.3. $\{\delta^n\}$ kümesi l dizi uzayı için kararlı bir kümedir (Vijayalakshmi, vs. 2014).

İspat. A, $E = \{\delta^n\}$ nin mutlak konveks hull u olsun. Eğer $x \in A$ ise o zaman $\sum_{k=1}^{m}|t_k| \leq 1$ olmak üzere $x = \sum_{k=1}^{m} t_k\, \delta^k$ dir. $x \in \varphi$ ve

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{m}|t_k|\|\delta^k\| \\ &\leq \textstyle\sum|t_k| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

olduğundan $x \in D$ dir. Böylece $A \subset D$ elde edilir.
Tersine olarak, eğer $x \in D$ ise bu durumda

$$x = \textstyle\sum_{k=1}^{m} x_k\, \delta^k$$

ve

$$\|x\| = \textstyle\sum|x_k| \leq 1$$

olur. Böylece $x \in A$ olup $D \subset A$ dır. Bu durumda $A = D$ elde edilir. Dolayısıyla $\{\delta^n\}$, l dizi uzayı için kararlı bir kümedir.

Teorem 3.3.4. $E = \left\{\frac{\delta^k}{\pi_k}\right\}$ kümesi l_π oran dizi uzayı için kararlı bir kümedir (Vijayalakshmi, vs. 2014).

İspat. $A, E = \left\{\frac{\delta^k}{\pi_k}\right\}$ nın mutlak konveks hull u olsun. Eğer $x \in A$ ise bu durumda $x = \sum_{k=1}^{m} t_k\, \frac{\delta^k}{\pi_k}$ dir.
$x \in \varphi$ ve

$$\begin{aligned}\|x\| &\le \sum |t_k| \left\|\frac{\delta^k}{\pi_k}\right\| \\ &\le \sum |t_k| \,.\, 1 \\ &\le \sum |t_k| \\ &\le 1 \qquad \left(\left\|\frac{\delta^k}{\pi_k}\right\| = \left|\frac{1}{\pi_k}\right| \le 1.\right)\end{aligned}$$

olduğundan $x \in D$ olup $A \subset D$ elde edilir. (3.21.)
Burada $D = \{x \in \varphi : \ \|x\| \le 1\}$ ve

$$\|x\| = \left|\frac{x_1}{\pi_1}\right| + \left|\frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2}\right| + \cdots + \left|\frac{x_1}{\pi_1} + \frac{x_2}{\pi_2} + \frac{x_3}{\pi_3} + \cdots\right|$$

dır.
Tersine olarak, eğer x ∈ D ise bu durumda

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\delta^k}{\pi_k}$$

olup

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \le 1$$

dır. Böylece $x \in A$ olup $D \subset A$ elde edilir. (3.22.)
$(3.21.)$ ve $(3.22.)$ ifadesinden $A = D$ olup $\left\{\frac{\delta^k}{\pi_k}\right\}$ kümesi l_π oran dizi uzayı için kararlı bir kümedir.

Teorem 3.3.5. $E = \{s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots\}$ kümesi l_s dizi uzayı için kararlı bir kümedir (Vijayalakshmi, vs. 2014).

İspat. A, E nin mutlak konveks hull u olsun. φ tüm sonlu dizilerin kümesi olsun. Eğer $x \in A$ ise bu durumda $\sum_{k=1}^{m}|t_k| \le 1$ olmak üzere $x = \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)}$ olur. (3.23.)
Böylece

$$\begin{aligned}x &= t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)} \\ &= t_1(1,-1,0,0,\ldots) + t_2(0,1,-1,0,0,\ldots) + \cdots + t_m(0,0,0,\ldots,0,0,1,-1,0,0,\ldots\ldots) \\ &= (t_1,-t_1,0,0,\ldots) + (0,t_2,-t_2,0,0,\ldots) + \cdots + (0,0,0,\ldots,0,0,t_m,-t_m,0,0,\ldots\ldots)\end{aligned}$$

$= (t_1 , t_2 - t_1 , \dots , t_m - t_{m-1} , -t_m ,0,0, \dots \dots)$

olup $x \in \varphi$ dir. (3.24.)

$x = \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)}$ olduğundan

$$\|x\|_s = \left\| \sum_{k=1}^{m} t_k s^{(k)} \right\|_s$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m} |t_k| \left\| s^{(k)} \right\|_s$$

elde edilir. Ayrıca $s^{(k)} = \{0,0,0, \dots , 0,0,1, -1,0,0, \dots\}$ olup

$$\begin{aligned} \left\| s^{(k)} \right\|_s &= |0| + |0+0| + \cdots + |0+0+\cdots+1| + |0+0+0+\cdots+1,-1| \\ &\leq |1| + |1-1| \\ &\leq 1 \end{aligned} \quad (3.25.)$$

bulunur. Böylece (3.23.) ve (3.25.) ifadesinden $\| x\|_s \leq \sum_{k=1}^{m} |t_k| \left\| s^{(k)} \right\|_s \leq 1$ olup $x \in D$ elde edilir. (3.26.)

Bu durumda $A \subset D$ dır. (3.27.)

Tersine olarak, $x \in D$ olsun. Bu durumda $\|x\|_s \leq 1$ olduğunda $x \in \varphi$ dır. (3.28.)

$x \in \varphi$ olduğundan $x = \{x_1, x_2, \dots , x_m , 0,0, \dots\}$ yazabiliriz. Böylece $t_1 = x_1$, $t_2 = x_1 + x_2$, … , $t_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ olup $x = t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |t_1| + |t_2| + \cdots + |t_m| &= |x_1| + |x_1 + x_2| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_m | \\ &= \|x\|_s \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

olup $\sum_{k=1}^{m} |t_k| \leq 1$ dır. O halde $\sum_{k=1}^{m} |t_k| \leq 1$, $x = t_1 s^{(1)} + t_2 s^{(2)} + \cdots + t_m s^{(m)}$ dır. Bu da $x \in A$ demektir. $D \subset A$ olup (4.29.)

(3.27.) ve (3.29.) ifadesinden $A = D$ elde edilir. Böylece $E = \{s^{(1)}, s^{(2)}, \dots\}$ kümesi l_s dizi uzayı için kararlı bir kümedir.

3.4. Analitik Dizilerin Oran Uzayı

Bu kısımda ise Γ_π oran dizi uzayının bir alt kümesi χ_π olmak üzere Λ_π ve Γ_π oran dizi uzaylarının genel özellikleri çalışıldı.

Ayrıca Γ_π oran dizi uzayının quasi tam uzay, barrelled uzay ve yarı-yansımalı uzay olup olmaması gösterildi.

Teorem 3.4.1. $\eta(\Gamma_\pi)$ tam oran dizilerinin Nörlund uzayı ve Γ_π tam oran dizilerinin uzayı olmak üzere $\eta(\Gamma_\pi) = \Gamma_\pi$ dır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $x \in \eta(\Gamma_\pi)$ olsun. Bu durumda $y \in \Gamma_\pi$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{p_0 \frac{x_n}{\pi_n} + p_1 \frac{x_{n-1}}{\pi_{n-1}} + \cdots + p_n \frac{x_0}{\pi_0}}{P_n}\right| < \varepsilon^n$$

olacak şekilde pozitif bir n_0 tamsayısı vardır. Özel olarak; $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ alalım. Bu durumda $\forall n \geq n_0$ için $\left|\frac{x_n}{\pi_n}\right| < \varepsilon^n$ elde edilir. Böylece $x \in \Gamma_\pi$ olup

$$\eta(\Gamma_\pi) \subset \Gamma_\pi \tag{3.30.}$$

olacaktır. Diğer yandan $x \in \Gamma_\pi$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq n_0$ için $\left|\frac{x_n}{\pi_n}\right| < \varepsilon^n$ olacak şekilde pozitif bir n_0 tamsayısı vardır. O halde

$$\left|\frac{y_n}{\pi_n}\right| < \frac{p_0 \varepsilon^n + p_1\, \varepsilon^{n-1} + \cdots + p_n \varepsilon^0}{P_n}$$

olup

$$\left|\frac{y_n}{\pi_n}\right| < \frac{\varepsilon^n}{P_n}\left[p_0 + \frac{p_1}{\varepsilon} + \cdots + \frac{p_n}{\varepsilon^n}\right] < \varepsilon^n$$

dır. Buradan $y \in \Gamma_\pi$ olup

$$\Gamma_\pi \subset \eta(\Gamma_\pi) \tag{3.31.}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(3.30.)$ ve $(3.31.)$ ifadelerinden $\eta(\Gamma_\pi) = \Gamma_\pi$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.2. $\eta(\Lambda_\pi)$ analitik oran dizilerinin Nörlund uzayı ve Λ_π analitik oran dizilerinin uzayı olmak üzere $\eta(\Lambda_\pi) = \Lambda_\pi$ dır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $x \in \Lambda_\pi$ olsun. Bu durumda $n = 0,1,2,\dots$ için $\left|\frac{x_n}{\pi_n}\right| \le M^n$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti vardır. O halde $n = 0,1,2,\dots$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{y_n}{\pi_n}\right| &\le \frac{p_0 M^n + p_1 M^{n-1} + \cdots + p_n M^0}{P_n} \\ &\le \frac{M^n}{P_n}\left(p_0 + \frac{p_1}{M} + \cdots + \frac{p_n}{M^n}\right) \\ &\le M^n\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $y \in \Lambda_\pi$ olup $x \in \eta(\Lambda_\pi)$ dır. Dolaysıyıla

$$\Lambda_\pi \subset \eta(\Lambda_\pi) \tag{3.32.}$$

elde edilir. Karşıt olarak $x \in \eta(\Lambda_\pi)$ olsun. Bu durumda $y \in \Lambda_\pi$ olup $n = 0,1,2,\dots$ için $\left|\frac{y_n}{\pi_n}\right| \le M^n$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti sayısı vardır. O halde

$$\left|p_0 \frac{x_n}{\pi_n} + p_1 \frac{x_{n-1}}{\pi_{n-1}} + \cdots + p_n \frac{x_0}{\pi_0}\right| \le M^n P_n$$

elde edilir. Özel olarak; $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ alalım. Bu durumda her n için $P_n = 1$ olduğundan

$$\left|\frac{x_n}{\pi_n}\right| \le M^n$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece $x \in \Lambda_\pi$ olup

$$\eta(\Lambda_\pi) \subset \Lambda_\pi \tag{3.33.}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(3.32.)$ ve $(3.33.)$ ifadelerinden $\eta(\Lambda_\pi) = \Lambda_\pi$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.3. Γ_π uzayı quasi tamdır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\gamma^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \dots, \frac{1}{n^n}, 0,0, \dots\right)$ ve $\gamma^{(m)} = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \dots, \frac{1}{m^m}, \frac{1}{m+1^{m+1}}, \dots, \frac{1}{n^n} 0,0, \dots\right)$ dizilerini göz önüne alalım. Bu taktirde $n > m$ olacak şekildeki her sabiti pozitif n tamsayısı için

$$d\left(\gamma^{(n)},\gamma^{(m)}\right) = sup\left|\gamma^{(n)} - \gamma^{(m)}\right|$$
$$= \left\{0,0,\dots,\frac{1}{m+1},\dots,\frac{1}{n},0,0,\dots\right\}$$
$$= \frac{1}{m+1} \to 0, \quad m,n \to \infty$$

elde edilir. Böylece $\left(\gamma^{(n)}\right)$ dizisi Γ_π uzayında bir Cauchy dizisidir. Ayrıca U , Γ_π uzayındaki kapalı birim top olmak üzere $d\left(\gamma^{(n)},0\right) = 1$ olduğundan $\gamma^{(n)} \in U$ dır. Böylece $\lim_{n\to\infty}\left(\gamma^{(n)}\right) = \gamma = \left(1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^3},\dots\right)$ ve $\gamma \in U$ olup Γ_π uzayındaki her sınırlı kapalı küme tam olduğundan Γ_π uzayı quasi tamdır.

Teorem 3.4.4. Γ_π uzayı barelled uzay değildir (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $A = \left\{x = (\Gamma_\pi): \forall n \text{ için } \left|\frac{x_n}{\pi_n}\right|^n \le \frac{1}{n}\right\}$ olsun. Bu durumda A kümesi Γ_π uzayında mutlak konveks, kapalı ve absarbenttir. Fakat A sıfırın komşuluğu olmadığından Γ_π uzayı barelled uzay değildir.

Teorem 3.4.5. Γ_π yarı – yansımalı uzay değildir (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. U , Γ_π uzayında kapalı birim top olmak üzere $\left\{\delta^{(n)}\right\} \in U$ olsun. Ancak hiçbir $\left\{\delta^{(n)}\right\}$ dizisi herhangi $y \in \Gamma_\pi$ elemanına zayıf yakınsak olmadığından Γ_π uzayı yarı – yansımalı uzay değildir.

Teorem 3.4.6. $(\chi_\pi)^\beta = \Lambda_\pi$(Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\Gamma_\pi^\beta = \Lambda_\pi$ olduğundan ilk olarak $\chi_\pi \subset \Gamma_\pi$ içermesini göstereceğiz. $x \in \chi_\pi$ olsun. Bu durumda $\left\{\frac{x_k}{\pi_k}\right\} \in \chi$ olup $\chi \subset \Gamma$ olduğundan $\left\{\frac{x_k}{\pi_k}\right\} \in \Gamma$ elde edilir. Böylece $x \in \Gamma_\pi$ olup $\chi_\pi \subset \Gamma_\pi$ dir. Buradan ise

$$\chi_\pi^\beta \supset \Gamma_\pi^\beta = \Lambda_\pi \tag{3.34.}$$

ifadesi gerçeklenir. Şimdi ise $\frac{y_k}{\pi_k} \in \chi_\pi^\beta$ olsun. Bu durumda $x \in \chi_\pi$ ise

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k y_k}{\pi_k \pi_k} \text{ ve } s^{(n)} = \left(0,0,\dots,\frac{\pi_n}{n!},0,0,\dots\right)$$

olacak şekilde $x = s^{(n)} \in \chi_\pi$ alalım. Böylece

$$\left\{\left(n!\left|\frac{x_n}{\pi_n}\right|\right)^{1/n}\right\} = \{0,0,\dots,1,0,0,\dots\}$$

olup bu dizi sıfıra yakınsaktır. Dolayısıyla $s^{(n)} \in \chi_\pi$ olup $d\left(s^{(n)},0\right)=1$ elde edilir. O halde

$$\left|\frac{x_n}{\pi_n}\right| \leq \|f\|.\, d\left(s^{(n)},0\right) \leq \|f\| \tag{3.35.}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece (y_n) sınırlı ve analitik oran dizi olup $y \in \Lambda_\pi$ dır. Böylece

$$\chi_\pi^\beta \subset \Lambda_\pi \tag{3.36.}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(3.34.)$ ve $(3.36.)$ ifadelerinden $\chi_\pi^\beta = \Lambda_\pi$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.7. $\chi_\pi(\Delta)$ dizi uzayı $x,y \in \chi_\pi(\Delta)$ olmak üzere

$$d(x,y) = sup_{(k)}\left\{\left(k!\left|\frac{\Delta x_k}{\pi_k} - \frac{\Delta y_k}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} : k = 1,2,\dots\right\}$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır (Sivaraman, vs. 2013).

İspat. $\left\{x^{(n)}\right\}$ dizisi $\chi_\pi(\Delta)$ dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $m,n \geq \mathbb{N}$ için $d\left(x^{(n)},x^{(m)}\right) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\mathbb{N}$ pozitif tamsayısı vardır. Böylece her $m,n \geq \mathbb{N}$ için

$$sup_{(k)}\left(k!\left|\frac{\Delta x_k^{(n)}}{\pi_k} - \frac{\Delta x_k^{(m)}}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} < \varepsilon$$

olup $\left\{k!\,\frac{\Delta x_k^{(n)}}{\pi_k}\right\}$ dizisi $\mathbb{C}$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ uzayı tam olduğundan

$$k!\,\frac{\Delta x_k^{(n)}}{\pi_k} \to \frac{\Delta x_k}{\pi_k}\ ,\ \ n \to \infty$$

dır. Dolayısıyla $\forall\ n \geq n_0$ için $\left(k!\left|\frac{\Delta x_k^{(n)}}{\pi_k} - \frac{\Delta x_k}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir $n_0$tamsayısı vardır.

Özel olarak; $\left(k!\left|\frac{\Delta x_k^{(n_0)}}{\pi_k} - \frac{\Delta x_k}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} < \varepsilon$ olsun. Bu durumda

$$\left(k!\ \left|\frac{\Delta x_k}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} \leq \left(k!\ \left|\frac{\Delta x_k}{\pi_k} - \frac{\Delta x_k^{(n_0)}}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} + \left(k!\ \left|\frac{\Delta x_k^{(n_0)}}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} < \varepsilon + 0\ , k \to \infty$$

olup $\left(k!\ \left|\frac{\Delta x_k}{\pi_k}\right|\right)^{1/k} < \varepsilon,\, k \to \infty$ elde edilir. Böylece $(x_k) \in \chi_\pi(\Delta)$ olup $\chi_\pi(\Delta)$ bir tam metrik uzaydır.

3.5. Kesitsel Tam Dizilerin Oran Uzayı

Bu bölümde ise $(\Gamma_s)_\pi$ oran dizi uzayı ve bu uzayın genel özellikleri incelendi.

Uyarı 3.5.1. $x \in \sigma(\Gamma_s)_\pi \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_k}{\pi_k k}\right) \in \Gamma \Leftrightarrow \left|\frac{\xi_k}{k}\right|^{1/k} \to 0\,,\ (k \to \infty) \Leftrightarrow |k|^{1/k} \to 1\,,\ (k \to \infty)$ olduğundan $\left|\frac{\xi_k}{\pi_k k}\right|^{1/k} \to 0\,,\ (k \to \infty) \Leftrightarrow x \in (\Gamma_s)_\pi$ dır. Böylece $(\Gamma_s)_\pi = \sigma(\Gamma_s)_\pi$ dır.

Teorem 3.5.2. $(\Gamma_s)_\pi \subset \Gamma_\pi$ (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat. $x \in (\Gamma_s)_\pi$ olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma_\pi$ olup

$$\left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{1/k} \to 0\,,\ (\infty \to k) \tag{3.37.}$$

dır. Ayrıca $\frac{x_k}{\pi_k} = \frac{\xi_k}{\pi_k} - \frac{\xi_{k-1}}{\pi_{k-1}}$ olduğundan (3.37.) ifadesinden

$$\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^{1/k} \leq \left|\frac{\xi_k}{\pi_k} - \frac{\xi_{k-1}}{\pi_{k-1}}\right|^{1/k} \leq \left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{1/k} + \left|\frac{\xi_{k-1}}{\pi_{k-1}}\right|^{1/k} \to 0\ ,\ k \to \infty\ \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|^{1/k} \to 0\ ,\ k \to \infty$$

elde edilir. Böylece $x \in \Gamma_\pi$ olup $(\Gamma_s)_\pi \subset \Gamma_\pi$ gerçeklenir. (3.38.)

Burada hemen belirlelim ki (3.38.) içermesi kesindir. Bunu göstermek için $\delta^{(1)} \in \Gamma_\pi$ alalım. Bu durumda

$$\left(\frac{\xi_1}{\pi_1}\right) = 1$$
$$\left(\frac{\xi_2}{\pi_2}\right) = 1 + 0 = 1$$
$$\left(\frac{\xi_3}{\pi_3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$$
$$\vdots$$

$$\left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right) = 1 + 0 + 0 + \cdots + = 1 \qquad \rightarrow k - \text{ terimler}$$

şeklindedir. Böylece her k için $\left(\left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{1/k}\right) = 1$ olup $\left\{\left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{1/k}\right\}$ dizisi $k \rightarrow \infty$ sıfıra yakınsak değildir. O halde $\delta^{(1)} \notin (\Gamma_s)_\pi$ dır. Böylece $(\Gamma_s)_\pi \subset \Gamma_\pi$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.3. $(\Gamma_s)_\pi$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat. $\Gamma = \left\{x = (x_k) : \lim_{k=\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}} = 0\right\}$ olsun. Bu durumda $\xi_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ olmak üzere $(\Gamma_s)_\pi = \left\{x = (x_k) \in \omega : \xi = \left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right) \in \Gamma\right\}$ olup $+$: $(\Gamma_s)_\pi \times (\Gamma_s)_\pi \rightarrow (\Gamma_s)_\pi$ ve $(x, y) \rightarrow +(y, x) = \left(\frac{\xi_k + \eta_k}{\pi_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ biçiminde tanımlanır. $\left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right), \left(\frac{\eta_k}{\pi_k}\right) \in \Gamma$ olduğundan $\lim_{k=\infty} \left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} = 0$ ve $\lim_{k=\infty} \left|\frac{\eta_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} = 0$ olur. Buradan

$$\left|\frac{\xi_k + \eta_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} = \frac{|\xi_k + \eta_k|^{\frac{1}{k}}}{|\pi_k|^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{(|\xi_k| + |\eta_k|)^{\frac{1}{k}}}{|\pi_k|^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{|\xi_k|^{\frac{1}{k}} + |\eta_k|^{\frac{1}{k}}}{|\pi_k|^{\frac{1}{k}}} = \left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} + \left|\frac{\eta_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} \rightarrow 0$$

Diğer yanda $\cdot$: $\mathbb{C} \times (\Gamma_s)_\pi \rightarrow (\Gamma_s)_\pi$ ve $(\alpha, x) \rightarrow \cdot\, (\alpha, x) = \left(\frac{\alpha\, \xi_k}{\pi_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ biçiminde tanımlanır. Burada (α, x) dizinin $(\Gamma_s)_\pi$ uzayında olduğundan

$$\lim_{k=\infty} \left|\frac{\alpha\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k=\infty} |\alpha|^{\frac{1}{k}} \left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k=\infty} |\alpha|^{\frac{1}{k}} \cdot \lim_{k=\infty} \left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} \rightarrow 0$$

1. $((\Gamma_s)_\pi, +)$ değişmeli gurup dur.

(i) $x, y, z \in (\Gamma_s)_\pi$ olsun. Bu durumda $\xi_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, $\eta_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$ ve $\upsilon_k = z_1 + z_2 \cdots + z_k$ olmak üzere $x = \left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right)$, $y = \left(\frac{\eta_k}{\pi_k}\right)$ ve $z = \left(\frac{\upsilon_k}{\pi_k}\right)$ dır.

Şimdi $(x + y) + z = x + (y + z)$ olduğundan göstereceğiz.

$$\left(\frac{\xi_k}{\pi_k} + \frac{\eta_k}{\pi_k}\right) + \frac{\upsilon_k}{\pi_k} = \left(\frac{\xi_k + \eta_k}{\pi_k}\right) + \frac{\upsilon_k}{\pi_k} = \left(\frac{(\xi_k + \eta_k) + \upsilon_k}{\pi_k}\right) = \left(\frac{\xi_k + (\eta_k + \upsilon_k)}{\pi_k}\right)$$
$$= \left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right) + \left(\frac{\xi\eta_k}{\pi_k} + \frac{\upsilon_k}{\pi_k}\right) = x + (y + z)$$

(ii) $\forall x, y \in (\Gamma_s)_\pi$ olmak üzere $x + y = y + x$ olup

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \cdots,\ x_k + y_k, \cdots) \\ &= (y_1 + x_1,\ y_2 + x_2, \cdots, y_k + x_k, \cdots) \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots) + (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

(iii) $\forall x \in (\Gamma_s)_\pi$ için $\exists 0 \in (\Gamma_s)_\pi$ vardır öyle ki $x + 0 = x$ dır. $0 = (0,0,0, \cdots)$ dizisi ve $\left(\frac{0}{\pi_k}\right) \to 0$ olup

$$x + 0 = \left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right) + \left(\frac{0}{\pi_k}\right) = \left(\frac{\xi_{k+0}}{\pi_k}\right) = \left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right) = x.$$

(iv) $\forall x \in (\Gamma_s)_\pi$ için $\exists -x \in (\Gamma_s)_\pi$vardır öyle ki $x + (-x) = 0$ olup $x = (x_k)$ dizi $-x = (-x_k)$ oluğundan $x + (-x) = 0$ dır. $(-x)$dizine $\left(\frac{-\xi_k}{\pi_k}\right)$ dizini elde edilir.

$$\left|\frac{-\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} = \left|\frac{\xi_k}{\pi_k}\right|^{\frac{1}{k}} \to 0$$

2. Şimdi $(\Gamma_s)_\pi$ uzayının $\cdot$ işlemi ile ilgili özelliklerine bulalım.

(i) $\forall x \in (\Gamma_s)_\pi$ için $1 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $1 \cdot x = x$, $x \in (\Gamma_s)_\pi$ olup $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \to \left(\frac{\xi_k}{\pi_k}\right) \in \Gamma$ dır.

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= 1 \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \\ &= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \cdots, 1 \cdot x_k, \cdots) \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \\ &= x \end{aligned}$$

(ii) $\forall x, y \in (\Gamma_s)_\pi$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ dır.

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lambda(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \cdots,\ x_k + y_k, \cdots) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(\ x_2 + y_2), \cdots, \lambda(x_k + y_k), \cdots) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1,\ \lambda x_2 + \lambda y_2, \cdots,\ \lambda x_k + \lambda y_k, \cdots) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_k, \cdots) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \cdots, \lambda y_k, \cdots) \\
&= \lambda(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) + \lambda(y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots) \\
&= \lambda x + \lambda y
\end{aligned}
$$

(iii) $\forall x \in (\Gamma_s)_\pi$ için $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ dır.

$$
\begin{aligned}
(\lambda + \mu)x &= \big((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)\, x_2, \cdots, (\lambda + \mu)\, x_k, \cdots\big) \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda\, x_2 + \mu\, x_2, \cdots, \lambda\, x_k + \mu\, x_k, \cdots) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_k, \cdots) + (\mu x_1, \mu x_2, \cdots, \mu x_k, \cdots) \\
&= \lambda(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) + \mu(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \\
&= \lambda x + \mu x
\end{aligned}
$$

(iv) $\forall x \in (\Gamma_s)_\pi$ için $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ dır.

$$
\begin{aligned}
\lambda(\mu x) &= \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \cdots, \mu x_k, \cdots) \\
&= (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \cdots, \lambda(\mu x_k), \cdots) \\
&= \big((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \cdots, (\lambda\mu)x_k, \cdots\big) \\
&= (\lambda\mu)(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \\
&= (\lambda\mu)x
\end{aligned}
$$

bu ispat tamamlar.

Teorem 3.5.4. $\Lambda_\pi \subset [(\Gamma_s)_\pi]^\beta \subset \Lambda_\pi(\Delta)$ (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat 1. adım. Teorem 3.5.2. den $(\Gamma_s)_\pi \subset \Gamma_\pi$ dır. Böylece $(\Gamma_\pi)^\beta \subset [(\Gamma_s)_\pi]^\beta$ olup

$$(\Gamma_\pi)^\beta = \Lambda_\pi \subset [(\Gamma_s)_\pi]^\beta \tag{3.39.}$$

elde edilir.

2. adım. $y = (y_k) \in [(\Gamma_s)_\pi]^\beta$ olsun. $x \in (\Gamma_s)_\pi$ dizisini $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, $n = 1,2,3,\cdots$, $\delta^n = (0,0,0,\cdots,0,0,\pi,0,0,\cdots)$ olmak üzere $x = \delta^n - \delta^{n+1} = (0,0,0,\cdots,0,0,\pi,-\pi,0,0,\cdots)$ şeklinde tanımlayalım. Böylece $(\delta^n - \delta^{n+1}) = y_n - y_{n+1}$ dır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{y_n}{\pi_n} - \frac{y_{n+1}}{\pi_{n+1}}\right| = |f(\delta^n - \delta^{n+1})| \leq \|f\|\, d\big((\delta^n - \delta^{n+1})\,, 0\big) \leq \|f\| \cdot 1$$

olup $\left|\frac{y_n}{\pi_n} - \frac{y_{n+1}}{\pi_{n+1}}\right|$ sınırlıdır. Böylece. $\left(\frac{y_n}{\pi_n}\right) \in \Lambda_\pi\,(\Delta)$ olup

$$[(\Gamma_s)_\pi]^\beta \subset \Lambda_\pi(\Delta) \tag{3.40.}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.39.) ve (3.40.) ifadelerinden $\Lambda_\pi \subset [(\Gamma_s)_\pi]^\beta \subset \Lambda_\pi(\Delta)$ olup bu da ispat tamamlar.

Teorem 3.5.5. $((\Gamma_s)_\pi)^\beta = \Lambda_\pi$ (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat 1. adım. $y \in [(\Gamma_s)_\pi]^\beta$ olsun. Kabul edelim ki $y \notin \Lambda_\pi$ olsun. Bu durumda her n doğal sayısı için

$$\left(\left|\frac{y_{k_{(n)}}}{\pi_{k_{(n)}}}\right|^{1/k_{(n)}}\right) > \frac{1}{n}, \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

olacak şekilde bir $k_{(n)}$ indisi vardır. $x = (x_k)$ dizisini $\frac{x_k}{\pi_k} = \begin{cases} \frac{1}{n^k} \\ 0 \end{cases}$; $k = k_{(n)}$ şeklinde tanımlayalım. Böylece diğer durumlarda sonsuz sayıda k için

$$\left(\frac{x_k y_k}{\pi_k}\right) > 1 \tag{3.41.}$$

olduğundan $x \in \Gamma_\pi$ dır. Şimdi $z = \{z_k\}$ olmak üzere

$$z = \{z_k\} = \begin{cases} \dfrac{x_1}{\pi_1} - s & k = 1 \\ \dfrac{x_k}{\pi_k} & k = 2,3,\cdots \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde $z \in \Gamma_\pi$ dir. Ayrıca $\left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) = 0$ olup $z \in (\Gamma_s)_\pi$ dir. (3.41.) eşitsizliğinden $\sum \left(\frac{z_k x_k}{\pi_k}\right)$ serisi yakınsak değildir. Böylece $y \notin [(\Gamma_s)_\pi]^\beta$ olup çelişki elde edilir. O halde

$$[(\Gamma_s)_\pi]^\beta \subset \Lambda_\pi \tag{3.42.}$$

dir.

2. adım. Teorem 3.5.4. den

$$\Lambda_\pi \subset [(\Gamma_s)_\pi]^\beta \tag{3.43.}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.42.) ve (3.43.) ifadelerinden $[(\Gamma_s)_\pi]^\beta = \Lambda_\pi$ olup bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.6. $x \in \Gamma_\pi$ olsun. Bu durumda $x \in [(\Gamma_s)_\pi]$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\pi_k} = 0$ olmasıdır (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\pi_k} = 0$ (3.44.)

olsun. $x \in \Gamma_\pi$ olduğu için (3.44.) serisi mevcuttur. Serinin toplamını s ile gösterelim. Bu durumda $\left(\frac{\varepsilon_k}{\pi_k}\right) \to s,\ k \to \infty$ dır. Böylece $s \neq 0$ ise $x \notin \Gamma_\pi$. dır. Şimdi ise $s = 0$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{\varepsilon_k}{\pi_k}\right) = -\sum_{v=k+1}^{\infty} \left(\frac{x_v}{\pi_v}\right) \tag{3.45.}$$

eşitliği gerçeklenir. Özel olarak $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ olsun. (3.45.) eşitliğinden her $v \geq k_0$ için $\left(\frac{x_v}{\pi_v}\right)^{1/v} < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_0 sayısı vardır. Buradan da $\varepsilon < \frac{1}{2}$ olduğundan $\left|\frac{\varepsilon_k}{\pi_k}\right| < \sum_{v=k+1}^{\infty} \varepsilon^v = \frac{\varepsilon^{k+1}}{1-\varepsilon} < \varepsilon^k$ olup $x \in [(\Gamma_s)_\pi]$dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.7. Γ_π uzayındaki metrik topolojisi ile $[(\Gamma_s)_\pi]$ uzayı Γ_π uzayında kapalıdır (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat. $x \in \Gamma_\pi - [(\Gamma_s)_\pi]$ olsun. Bu durumda $s = 0$ dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $d(x, y) < \varepsilon$ ise

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\pi_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\pi_k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{y_k}{\pi_k}\right| \leq \varepsilon^k = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

eşitsizliği gerçeklenir. ε yeterince küçük seçildiğinden $d(x, y)$ yeterince küçük olup

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\pi_k} \neq 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.5.6.dan $y \notin [(\Gamma_s)_\pi]$ dır. Benzer olarak $B(x, \varepsilon)$, x merkezli ε yarıçaplı açık top olmak üzere her $y \in B(x, \varepsilon)$ için $y \in \Gamma_\pi - [(\Gamma_s)_\pi]$ dır. Dolayısıyla $x \in B(x, \varepsilon) \subset \Gamma_\pi - [(\Gamma_s)_\pi]$ olup

x elemanı $\Gamma_\pi - [(\Gamma_s)_\pi]$ uzayının bir iç noktasıdır. Bu ise $\Gamma_\pi - [(\Gamma_s)_\pi]$ uzayının Γ uzayında açık olması demektir. Sonuç olarak $[(\Gamma_s)_\pi]$ uzayı kapalı olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.8. $[(\Gamma_s)_\pi]$ uzayı tam metrik uzayıdır (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat. $d(x,y)$, Γ_π uzayında bir metrik olsun. Bu durumda $[(\Gamma_s)_\pi]$ kısıtlaması içinde bir metrik olup $((\Gamma_s)_\pi\,, d)$ ikilisi bir metrik uzaydır. Burada

$$d(x,y) = sup_k \left\{ \left| \frac{x_k - y_k}{\pi_k} \right|^{1/k} : \; k = 1,2,3,\cdots \right\}$$

olup Teorem 3.5.6. dan $((\Gamma_s)_\pi\,, d)$ uzayı Γ_π uzayının kapalı bir alt uzayıdır. Ayrıca Γ_π uzayı tam metrik uzay olduğundan $(\Gamma_s)_\pi$ uzayında tam metrik uzaydır.

Teorem 3.5.9. $((\Gamma_s)_\pi\,, d)$ ayrılabilir bir metrik uzaydır (Gurumoorthy and Chandrasekhara Rao, 2012).

İspat.

$$\delta^1 = \{\pi, 0,0, \cdots ,\}\,,$$
$$\delta^2 = \{0, \pi, 0,0, \cdots ,\},$$
$$\vdots$$
$$\delta^k = \{0,0,0, \cdots ,0,0, \pi\}$$

olsun. $\pi > 0$ sabit bir sayı olmak üzere $\{\pi, \pi, 0,0, \cdots,\}$ dizisini alalım. Bu durumda $A = \{\sigma^1, \sigma^2, \cdots\}$ kümesi Γ_π uzayı için bir Schauder bazıdır. O halde

$$\rho^1 = \{\pi, -\pi, 0,0, \cdots ,\}\,,$$
$$\rho^2 = \{0, \pi, -\pi, 0,0, \cdots ,\}\,,$$
$$\vdots$$
$$\rho^k = \{0\,,0,0, \cdots \,, 0,0, \pi, -\pi\}$$

olmak üzere $B = \{\rho^1, \rho^2, \cdots\}$ kümesi $((\Gamma_s)_\pi\,, d)$ metrik uzayı için bir Schauder bazıdır.

4.BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. Oran Hahn Dizi Uzayı

Bu kısımda ise h_π oran Hahn dizi uzayı göz önüne alınarak bu uzaya ilişken çeşitli sonuçlar verildi.

Teorem 4.1.1. Her $x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)$, $y = \left(\frac{y_k}{\pi_k}\right) \in l_\pi$ ve $d_1(x,y) = |||x-y|||$ olmak üzere $(l_\pi \, , d_1)$ uzayı bir tam metrik uzaydır (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. Kabul edelim ki $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)$ dizisi $(l_\pi \, , d_1)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Ayrıca $l_\pi \subset l_{\frac{1}{\pi}}^\infty$ ve $\forall x = \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right)$, $y = \left(\frac{y_k}{\pi_k}\right) \in l_\pi$ için $d_\infty(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}^0} \|x_k - y_k\| \leq \sum_{k=0}^\infty \|x_k - y_k\| = d_1(x,y)$ olduğundan $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi aynı zamanda $\left(l_{\frac{1}{\pi}}^\infty, d_\infty\right)$ uzayında da bir Cauchy dizisidir. $\left(l_{\frac{1}{\pi}}^\infty, d_\infty\right)$ tam uzay olduğundan $\left(x^{(n)}\right) \to x = (x_k) \in l_{\frac{1}{\pi}}^\infty$ dır. Şimdi ise $x \in l_\pi$ ve $\lim_{n\to\infty} d_1\left(x^{(n)}, x\right) = 0$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ için

$$d_1\left(x^{(n)}, x^{(v)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n, v \geq n_0) \tag{4.1.}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı seçelim. Her $N \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} d_\infty\left(x^{(v)}, x\right) = 0$ olduğundan $v_N \geq n_0$ için

$$d_\infty\left(x^{(v)}, x\right) < \frac{1}{N}\frac{\varepsilon}{2} (v \geq v_N) \tag{4.2.}$$

olacak şekilde bir $\mathrm{v_N} \in \mathbb{N}$ sayısı seçebiliriz. Böylece $N \in \mathbb{N}$ her $n \geq n_0$ ve her $v \geq v_N$ için (4.1.) ve (4.2.) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\| &\leq \sum_{k=0}^{N} \left\|x_k^{(n)} - x_k^{(v)}\right\| + \sum_{k=0}^{N} \left\|x_k^{(v)} - x_k\right\| \\ &\leq d_1\left(x^{(n)}, x^{(v)}\right) + N d_\infty\left(x^{(v)}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ olduğunda $\forall n \geq n_0$ için $x^{(n)} - x \in l_\pi$ dır. Buradan $x \in l_\pi$ ve $\lim_{n\to\infty} d_1\left(x^{(n)}, x\right) = 0$ olup $x^{(n)} - x$ dır.

Teorem 4.1.2. h_π oran Hahn dizi uzayı $|||x||| = \left\{\|x_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} k \left\|\frac{x_k}{\pi_k} - \frac{x_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right\| < \infty\right\}$ normu ile bir Banach uzayıdır (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. $x_{-1} := 0$ olmak üzere $\sum^{-1}: \left(h_\pi, |||\quad |||_{h_\pi}\right) \to (l, |||\quad |||_1), (x_k) \to (x_k - x_{k-1})$ dönüşümü izometrik izomorfizmdir. O halde Teorem 4.6.1 den $\left(h_\pi, |||\quad |||_{h_\pi}\right)$ uzayı bir Banach uzaydır.

Teorem 4.1.3. $h_\pi = l_\pi \cap \int (bv)_\pi = l_\pi \cap \int (bv_0)_\pi$ (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. $k = 1,2,3,\cdots$ için

$$k \frac{\Delta a_k}{\pi_k} = \frac{a_{k+1}}{\pi_{k+1}} + \Delta\left(\frac{k a_k}{\pi_k}\right) \tag{4.3.}$$

olup $a \in h$ ise $\infty > \sum_{k=1}^{\infty} k \left\|\frac{\Delta a_k}{\pi_k}\right\| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\Delta\left(\frac{k a_k}{\pi_k}\right)\right\| - \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{a_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right\|$ elde edilir. Bu taktirde $h_\pi \subset l_\pi$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\Delta\left(\frac{k a_k}{\pi_k}\right)\right\| < \infty$ olup

$$h_\pi \subset l_\pi \cap \int (bv)_\pi \tag{4.4.}$$

dır. Karşıt olarak (4.3.) eşitliğinden $a \in l_\pi \cap \int (bv)_\pi$ için $\infty > \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{a_{k+1}}{\pi_{k+1}}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\Delta\left(\frac{k a_k}{\pi_k}\right)\right\| \geq \sum_{k=1}^{\infty} k \left\|\frac{\Delta a_k}{\pi_k}\right\|$ ve $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\pi_k} = 0$ elde edilir. Bu ise

$$l_\pi \cap \int (bv)_\pi \subset h_\pi \tag{4.5.}$$

demektir. Sonuç olarak (4.4.) ve (4.5.) ifadelerinden $h_\pi = l_\pi \cap \int (bv)_\pi = l_\pi \cap \int (bv_0)_\pi$ elde edilir.

Teorem 4.1.4. $h_\pi = (\sigma_\infty)^\beta_{\frac{1}{\pi}}$ (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. $h^\beta_\pi = (\sigma_\infty)_{\frac{1}{\pi}}$ olduğundan ispat için h^β_π uzayını bulmamız yeterlidir. $l_\pi = (c_0)^\beta_{\frac{1}{\pi}}$ ve $(bv)_\pi = (cs)^\beta_{\frac{1}{\pi}}$ olduğundan $\int (bv)_\pi = \left(d(cs)\right)^\beta_{\frac{1}{\pi}}$ olup $h_\pi = l_\pi \cap \int (bv)_\pi$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. h_π oran Hahn dizi uzayı AK özellikli bir BK uzayıdır (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. l_π uzayı $|||a||| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{a_k}{\pi_k} \right\|$ ve $\int (bv_0)_\pi$ uzayı $|||a||| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Delta \left(\frac{ka_k}{\pi_k} \right) \right\|$ normları ile AK özellikli birer BK uzayıdır. İki AK özellikli BK uzayının arakesiti de AK özellikli bir BK uzayı olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. Aşağıdaki önermeler sağlanır.

(i) $h'_\pi = (\sigma_\infty)_{\frac{1}{\pi}}$

(ii) $(\sigma_0)'_{\frac{1}{\pi}} = (h)_{\frac{1}{\pi}}$ Burada h', h nın eşlenik uzayıdır (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat.

(i) h_π , AK özellikli bir BK uzayı olduğundan $h_\pi^\beta = h'_\pi$ olup $h_\pi^\beta = (\sigma_\infty)_{\frac{1}{\pi}}$ olduğundan $h'_\pi = (\sigma_\infty)_{\frac{1}{\pi}}$ elde edilir.

(ii) σ_0 uzayı $|||a||| = sup_{(n)} n^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\pi_k} \right\|$ normu ile AK özellikli bir BK uzayıdır. Böylece $(\sigma_0)_{\frac{1}{\pi}}^\beta = (\sigma_0)'_{\frac{1}{\pi}}$ dır. Bu durumda $(\sigma_0)_{\frac{1}{\pi}}^\beta = h_\pi$ olduğunu göstermeliyiz. $\int (\sigma_0)_\pi = \int ((c_0)_\pi + (cs)_\pi)$ olduğundan $(\sigma_0)_\pi = (c_0)_\pi + \left(d(cs)\right)_\pi$ olup $(\sigma_0)_{\frac{1}{\pi}}^\beta = (c_0)_{\frac{1}{\pi}}^\beta \cap \left(d(cs)\right)_{\frac{1}{\pi}}^\beta = h_\pi$ elde edilir. Böylece $(c_0)_{\frac{1}{\pi}}^\beta = l_\pi$ ve $\left(d(cs)\right)_{\frac{1}{\pi}}^\beta = \int (bv)_\pi$ olup $l_\pi \cap \int (bv)_\pi = h_\pi$ elde edilir.

Teorem 4.1.7. h_π oran Hanh dizi uzayı l_π normlu oran uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda eğer h_π tam uzay ise kapalıdır (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. x, h_π uzayının bir limit noktası olsun. Bu durumda x merkezli her açık yuvarı h_π uzayının x den başka noktalarını da içerir. Özel olarak n pozitif bir tam sayı olmak üzere $S\left(x, \frac{1}{x}\right)$ açık yuvarı $h_\pi$uzayının x den başka bir x_n noktasını içerir. O halde n için $\{x_n\}$, h_π de $|||x_n - x||| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir dizidir. Buradan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olup $\{x_n\}$ dizisi l_π uzayında ve dolayısıyla h_π uzayında bir Cauchy dizisidir. Böyle ce h_π tam uzay olduğundan $x \in h_\pi$ dir. Bu ise h_π nın kapalı olduğunu ispatlanır.

Teorem 4.1.8. h_π oran Hahn dizi uzayı l_π Banach uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda eğer h_π uza yı kapalı ise tamdır (Balasubramanian ve Chandrasekhara Rao, 2013).

İspat. $\{x_n\}$, h_π uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Böylece $\{x_n\} \subset l_\pi$ dır. l_π tam uzay olduğundan en az bir $x \in l_\pi$ için $x_n \to x$ dir. Bu durumda $x \in h_\pi$ ya da x in her komşuluğu $x$den başka noktada içerir. Böylece x, h_π uzayının bir limit noktasıdır. h_π uzayı kapalı olduğundan $x \in h_\pi$ olup bu da ispatı tamamlar. Teorem 4.6.7. ve Teorem 4.6.8. den h_π uzayı l_π Banach uzayının bir alt uzayı olmak üzere h_π uzayının tam olması için gerek ve yeter şart kapalı olmasıdır.

Örnek 4.1.9. $\mathbb{K}$ uzayında $\frac{\xi_n}{\xi_n} \neq 0$ olmak üzere sayıda n ler için $\mathbb{K}$, $x = \left(\frac{\xi_1}{\xi_1}, \frac{\xi_2}{\xi_2}, \cdots \frac{\xi_n}{\xi_n}, 0 \cdots\right)$ şeklinde tanımlanır dizilerin bir φ_π uzayını göz önüne alalım. Ayrıca görülür ki $\varphi_\pi \subset (c_0)_\pi \subset l_\pi^\infty$ ve $\varphi_\pi \neq (c_0)_\pi$ dır. φ_π uzayının $(l_\pi^\infty, |||.|||_\infty)$ uzayındaki kapanışı $(c_0)_\pi$ olduğundan φ_π , l_π^∞ uzayında kapalı değildir ve böylece φ_π uzayı $|||.|||_\infty$ normu tarafından indirgenen norm ile tam olmayan bir normlu uzaydır.

Örnek 4.1.10. Her $p \geq 1$ reel sayısı için $\varphi_\pi \subset l_\pi^p \subset (c_0)_\pi$ olup $(c_0)_\pi$ uzayı l_π^p uzayının $(c_0)_\pi$ deki kapanışı ve $l_\pi^p \neq (c_0)_\pi$ olduğundan l_π^p uzayı $(c_0)_\pi$ uzayında kapalı değildir. Böylece l_π^p uzayı $|||.|||_\infty$ normu tarafından indirgenen norm ile tam olmayan bir normlu uzaydır.

Örnek 4.1.11. $p = 1$ için $\varphi_\pi \subset l_\pi^p$ dır. φ_π uzayının $\left(l_\pi^p, |||.|||_p\right)$ uzayındaki kapanışı l_π^p ve $\varphi_\pi \neq l_\pi^p$ olduğundan φ_π , l_π^p uzayında kapalı değildir. Böylece φ_π uzayı $|||.|||_p$ normu tarafından indirgenen norm ile tam olmayan bir normlu uzaydır.

4.2. $\int l_\pi$ Oran Uzayı

Bu bölümde $\int l_\pi$ oran dizi uzayının BK-AK özellikli olması göz önüne alınarak bu uzay için kararlı küme örnekleri verildi. Ayrıca bu uzaya ilişken bazı matris dönüşümleri incelendi.

Teorem 4.2.1. $\int l_\pi$ oran dizi uzayı bir BK uzaydır (Subramanian vs, 2007).

İspat. $x = (x_\pi) \in \int l_\pi$ olsun. $\int l_\pi$ uzayı $\|x\| = \sum_{k=1}^\infty k \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right|$ normu ile bir Banach uzayıdır. Her $k = 1,2,\cdots$ için $f_k(x) = x_k$ tanımlanırsa

$$\|x\| = 1\left|\frac{x_1}{\pi_1}\right| + 2\left|\frac{x_2}{\pi_2}\right| + \cdots + k\left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| + \cdots$$

olup

$$\frac{k}{\pi_k}|x_k| \leq \|x\|$$

olduğundan $|x_k| \leq M\|x\| \Longrightarrow |f_k(x)| \leq M\|x\|$ olup her k için f_k sürekli bir lineer fonksiyoneldir. Böylece $\int l_\pi$ bir *BK* uzayıdır.

Teorem 4.2.2. $\int l_\pi$ oran dizi uzayı AK özellikli bir BK uzaydır (Subramanian vs, 2007).

İspat. $x = (x_\pi) \in \int l_\pi$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x^{[n]} &= \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, 0,0, \cdots\} \\ x - x^{[n]} &= \{0,0,0, \cdots, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\} \\ \left\|x - x^{[n]}\right\| &= \|0,0,0, \cdots, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\| \\ &= \sum_{k \geq n+1}^{\infty} k \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \to 0, n \to \infty \end{aligned}$$

dır. $x = (x_\pi) \in \int l_\pi$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \left\|x - x^{[n]}\right\| = 0 \Rightarrow x^{[n]} \to x, (n \to \infty)$ olup $\int l_\pi$, AK özelliklidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.3. $A = \left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left(\frac{x_k}{\pi_k}\right) = 0\right\}$ olsun. Bu durumda $A \subset \int l_\pi$ dir. Ayrıca $\bar{A}$, A nın kapanışı ve $\delta^1 = (1,0,0, \cdots)$ olmak üzere $\delta^1 \in \bar{A}$ dir (Subramanian vs, 2007).

İspat. $x = (x_\pi) \in A$ olsun. Bu durumda $\sum \lambda_k^2 \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| = 0$ dir. Ayrıca $\sum_{k \geq n+1} \lambda_k^2 \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \leq \sum_{k \geq 1} \lambda_k^2 \left|\frac{x_k}{\pi_k}\right| \to 0$, $(n \to \infty)$ olup $x = (x_\pi) \in \int l_\pi$ olduğundan

$$\begin{aligned} x^1 &= (1,0,0, \cdots) \\ x^2 &= \left(1, -\frac{\pi_2}{\lambda_2^2}, 0,0, \cdots\right) \\ x^3 &= \left(0,0, -\frac{\pi_3}{\lambda_3^2}, 0,0, \cdots\right) \\ &\vdots \\ x^k &= \left(1,0, \cdots, -\frac{\pi_k}{\lambda_k^2}, 0,0, \cdots\right) \end{aligned}$$

alınarak her k için $x^k \in A$ elde edilir. Böylece $\|\delta^1 - x^k\| = \left\|\left(0,0, \cdots, \frac{\pi_k}{\lambda_k^2}, 0,0, \cdots\right)\right\| = \frac{\pi_k}{\lambda_k^2} \to 0$, $(k \to \infty)$ olup $\delta^1 \in \bar{A}$ dır. Bu ise ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.4. $A = \left\{\frac{\pi_k}{k}\delta^k\right\}$ küme olsun. Bu durumda E , $\int l_\pi$ oran uzayı için bir karalı kümedir (Subramanian vs, 2007).

İspat 1. adım. A , E nın mutlak konveks hull u ve $D = \varphi \cap \{\int l_\pi$ deki kapalı birim top$\})$ olsun. $x \in A$ alalım. Bu durumda $\sum_{k=1}^{m}|t_k| \leq 1$ olmak üzere

$$x = \sum_{k=1}^{m} t_k s_k$$
$$x = \left(t_1\frac{\pi_1}{1}, t_2\frac{\pi_2}{2}, \cdots, t_m\frac{\pi_m}{m}, 0{,}0\right)$$
$$\Rightarrow x \in \varphi \tag{4.6.}$$

elde edilir. Ayrıca $x = \sum_{k=1}^{m} t_k \frac{\pi_k}{k}\delta^k$ olduğundan her iki tarafın normu alınırsa

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{m}|t_k|\left|\frac{\pi_k}{k}\right|\|\delta^{(k)}\|$$

elde edilir. (4.6.) ifadesinden

$$\left\|\delta^{(k)}\right\| = \sum_{k=1}^{\infty} k\left|\frac{1}{\pi_k}\right| = \left|\frac{k}{\pi_k}\right| \text{ ve } \|x\| \leq \sum_{k=1}^{m}|t_k| \leq 1 \tag{4.7.}$$

olup $\|x\| \leq 1$ olduğundan x, $\int l_\pi$ uzayındaki kapalı birim topa aittir. Ayrıca

$$x = \sum_{k=1}^{m} t_k \frac{\delta^k \pi_k}{k} = \left\{\frac{1.\pi_1}{1}, \frac{2.\pi_2}{2}, \cdots, \frac{m.\pi_m}{m}, 0{,}0, \cdots\right\} \tag{4.8.}$$

olup (4.7.) ve (4.8.) ifadelerinden $x \in D$ dır. Bu da

$$A \subset D \tag{4.9.}$$

olması demektir.

2.adım. $x \in D$ olsun. Bu durumda $x \in \varphi$ ve $\|x\| \leq 1$ ise $x = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m, 0, \cdots\}$ (4.10.)

$$= \left(\frac{1}{\pi_1}x_1\right)s_1 + \left(\frac{2}{\pi_2}x_2\right)s_2 + \cdots + \left(\frac{m}{\pi_m}x_m\right)s_m$$

olup $\|x\| \leq \sum \frac{k}{\pi_k} x_k$ ve $\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{k}{\pi_k} x_k\right| \leq \|x\| \leq 1$ dir. Böylece $x \in A$ olup

$$D \subset A \tag{4.11.}$$

dir. Sonuç olarak (4.9.) ve (4.11.) ifadelerinden $A = D$ elde edilir.

Teorem 4.2.5. $n, k = 1,2,3, \cdots$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda $A \in (\int l_\pi : l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $\sup_{(n,k)} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$ olması dır (Subramanian vs, 2007).

İspat. E , $\int l_\pi$ oran uzayı için bir kararlı küme ve l_∞ bir BK uzayı olsun. Ayrıca

$$As^{(k)} = \left(\frac{\pi_1}{k} a_{1k}, \frac{\pi_2}{k} a_{2k}, \cdots, \frac{\pi_k}{k} a_{nk}, \cdots\right)$$

alalım. Bu durumda $A \in (\int l_\pi : l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $A[E]$, l_∞ uzayındaki sınırlı olması dır. Böylece $\sup_{(n,k)} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6. $n, k = 1,2,3, \cdots$ için $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda

a) $A \in (\int l_\pi : c_0) \Leftrightarrow$
   - (i) $\sup_{(n,k)} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$
   - (ii) $k = 1,2,3, \cdots$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0.$

b) $A \in (\int l_\pi : c) \Leftrightarrow$
   - (i) $\sup_{(n,k)} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$
   - (ii) $k = 1,2,3, \cdots$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha.$

c) $A \in \left(\int l_\pi : l_p\right), p \geq 1 \Leftrightarrow \sup_{(n,k)} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right|^p < \infty.$

d) $A \in (\int l_\pi : bv) \Leftrightarrow$
   - (i) $\sup_{(k)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi_k}{k} \left|a_{nk} - a_{n-1,k}\right| < \infty$
   - (ii) $a_{0k} = 0.$

e) $A \in (\int l_\pi : bv_0) \Leftrightarrow$

(i) $\sup\limits_{(k)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi_k}{k} \left|a_{nk} - a_{n-1,k}\right| < \infty$

(ii) $a_{0k} = 0$

(iii) $k = 1,2,3,\cdots$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$.

f) $A \in (\int l_\pi : bs) \Leftrightarrow \sup\limits_{(m,k)} \sum_{n=1}^{m} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$.

g) $A \in (\int l_\pi : cs) \Leftrightarrow \sup\limits_{(m,k)} \sum_{n=1}^{k} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$.

h) $A \in \left(\int l_\pi : l_\rho\right) \Leftrightarrow \sup\limits_{(n,k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k\,\rho_k}\right| < \infty$.

i) $A \in (\int l_\pi : l_\pi) \Leftrightarrow \sup\limits_{(n,k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\pi_k a_{nk}}{k}\right| < \infty$ olmasıdır (Subramanian vs, 2007).

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Oran dizi uzayları ele alındı ve onların topolojik özellikleri incelendi. Ayrıca kesitsel oran dizi uzaylarındaki kararlı kümelere ilişkin çeşitli sonuçları gösterildi. Bununla birlikte analitik ve tam dizilerin oran uzaylarına ilişkin sonuçlar verildi. Ayrıca oran Hahn dizi uzayı ve bu uzayın bazı temel özellikleri ele alındı. İntegrallenmiş $\int \ell_\pi$ oran uzayının BK-AK özellikli olması detaylı bir şekilde ele alındı ve bu uzay için bir kararlı küme araştırıldı. Son olarak da oran dizi uzayları ve topolojik özellikleri kullanılarak bazı sonuçlar verildi.

KAYNAKLAR

Balasubramanian, K. and Chandrasekhara Rao, K. (2013). “The rate Hahn sequence space.” International Journal of Engineering and Technology Vol. 5, No. 3, pp. 2338-2341.

Bektas, C. and Altin, Y. (2003). “The sequence space $l_M(p,q,s)$ on seminormed spaces.” Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 34, No. 4, pp. 529-534.

Boos, J. (2000). Classical and modern methods in summability, Oxford University Press. Inc., New York.

Brown, H. I. (1967). “The summability field of a perfect $l-l$ method of summation.” J. Anal. Math., Vol. 20, pp. 281-287.

Chandrasekhara Rao, K. (1969). “Matrix transformation of some sequence spaces.” Pacific Journal of Mathematics., Vol. 31, No. 1, pp. 171-174.

Chandrasekhara Rao, K. (1978). “Cesaro space of analytic sequences.” Proceedings of the National Academy of Sciences, India, Section A. Vol. 48, pp. 192-194.

Chandrsekhara Rao, K (1990). “The Hahn sequences space.” Bull. Cal. Math. Soc.Vol. 82, pp. 72-78.

Chandrasekhara Rao, K. (2002). Functional analysis, Narosa Publishing House Pvt.

Chandrasekhara Rao, K. (2006). Functional analysis, Alpha Science. Oxford.

Chandrasekhara Rao, K. (2009). “Some rate spaces.” Demonstratio Mathematica., Vol. 42, No. 4, pp. 809-816.

Chandrasekhara Rao, K. and Balasubramanian, K. (2014). “Some sectional rate spaces.” International Journal of Math. Analysis, Vol. 8, No. 3, pp. 135-140.

Chandrasekhara Rao, K. and Sivaraman, B. (2012). “On duals of some rate spaces.” Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, No. 16, pp. 775-782.

Chandrasekhara Rao, K. and Subramanian, N. (2001). “On the space of analytic sequences.” Bulletin of pure and Applied Sciences, 20. E, pp. 227-235.

Chandrasekhara Rao, K. and Subramanian, N. (2004). “The orlicz space of entire sequences.” Int. J. Math. Sci., Vol. 68, pp. 3755-3764.

Chandrasekhara Rao, K., Tamilselvan, S. and Karunakaran, V. (2008). “Some vector sequences spaces.” Acat Ciencia Indico, Vol. 34, No. 3, pp. 1067.

Colak, R. and Et, M. (1997). “On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations.” Hokkaido Mathematical Journal., Vol. 26, No. 3, pp. 483-492.

Çatal, C. and Dağadur, I. (2015). “Matrix tranformations between vector rate sequence spaces.” Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, No. 133, pp. 6629-6637.

Dağadur, İ. (2004). “Conullity and replaceability of matrices on the rate spaces.” Indian Journal. Pure Appl. Mathematical., Vol. 35, No. 5, pp. 563-572.

Ganapathy Iyer, V. (1948). “On the spaces of Integral functions-I.” J. Indian Math. Soc., Vol. 12, pp. 13-30.

Goffman, C. and Pedrick, G. (1974). First course in functional analysis, Prentice Hall India, New Delhi.

Gurumoorthy, N. and Chandrasekhara Rao, K. (2012). “The rate of sectional entire sequence spaces.” Bol. Soc. Paran. Math., Vol. 30, No. 2, pp. 63-69.

Günther, G. and Sigrun, G. (1970). “Sequences of bounded variation and sequences of fourier coefficients-I.” Math., Z. 118, pp. 93-102.

Hardy, G. H. (1949). Divergent series, Oxford University Press Oxford.

Jürimae, E. (1994). “Matrix mappings between rate spaces and spaces with speed.” Acta ET Cummentationes Universitates. Tartuensis., No. 970, pp. 29-52.

Jürimae, E. (1994). “Properties of domains of matrix mappings on rate spaces and spaces with speed.” Tartu Uİ Toimetised No. 970, pp. 53-64.

Kamthan, P. K. (1976). “Bases in a certain class of frecher space.” Tamkang J. Math., Vol. 7, pp. 41-49.

Kamthan, P. K. and Gupta, M. (1981). Sequence spaces and series, Marcel Dekkel Inc., New York.

Kızmaz, H. (1981). "On certain sequence spaces." Canad Math. Bull., Vol. 24, No. 2, pp. 169-176.

Krasnoselskii, M. A. and Rutickii, Y. B. (1961). Convex functions and orlicz spaces, Gorningen, Netherlands.

Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications, John Wiley and Sons Inc.,

Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. (1971). "On orlicz sequence spaces." Israel J. Math., Vol. 10, pp. 379-390.

Maddox, I. J. (1970). Elements of functional analysis. Cambridge University Press.

Maddox, I. J. (1986). "Sequence spaces defined by a modulus." Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 100, No. 1, pp. 161-166.

Mursaleen, M., Khan, M. A. and Qamaruddin, (1999). "Difference sequence spaces defined by orlicz functions." Demonstratio Math., Vol. 32, pp. 145-150.

Nakano, H. (1953). "Concave modulars." J. Math. Soc. Japan., Vol. 5, No. 1, pp. 29-49.

Orlicz, W. (1936). "Über Raume (L^M)." Bull. Int. Acad. Poion. Sci., A, pp. 93-107.

Parashar, S. D. and Choudhary, B. (1994). "Sequence spaces defined by orlicz functions." Indian J. Pure Appl. Math., Vol. 25, No. 4, pp. 419-428.

Ruckle, W. H. (1973). "FK spaces in which the sequence of coordinate vectors iwwsss bounded." Canad. J. Math., Vol. 25, No. 3, pp. 973-978.

Sirajiudeen, S. M. (1981). "Matrix transformations of $c_0(p), l_\infty(p), l^\infty$ $and\ l\ in\ to\ \chi,$ Indian J. Pure Appl. Math, Vol. 12, No. 9, pp. 1106-1113.

Sivaraman, B., Chandrasekhara Rao, K. and Vairamanickam, K. (2013). "Some rate sequence spaces." International Journal of Scientific Research, Vol. 2, No. 10, pp. 1-5.

Sivaraman, B., Chandrasekhara Rao, K. and Vairamanickam, K. (2013). "On the rate space of analytic sequences." Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, No. 14, pp. 665-673.

Sridhar, S. (1979). “A matrix transformation between some sequencs spaces.” Acta Ciencia Indica, Vol. 5, pp. 194-197.

Subramanian, N., Chandrasekhara Rao, K. and Gurumoorthy, N. (2007). “İntegrated rate space $\int l_{\pi}$.” Commun. Korean Math. Soc. Vol. 22, No. 4, pp. 527-534.

Tirpathy, B. C., Et, M. and Altin, Y. (2003). “Generalized difference sequence spaces defined by orlicz function in a locally convex space.” J. Analysis and Applications, Vol. 1, No. 3, pp. 175-192.

Vijayalakshmi, B., Karunakaran, V. and Chandrasekhara Rao, K. (2014). "The sectional rate spaces.” International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 8, No. 34, pp. 1663-1669.

Wilansky, A. (1964). Functional analysis, London, New York.

Wilansky, A. (1978). Modern methods in topological vector spaces, Mc Graw-Hill, New York.

Wilansky, A. (1984). Summability through functional analysis, North-Holland, Amesterdam, New York.