

83414

REEL EKSENDE VERİLMİŞ
KOMPLEKS POTANSİYELE SAHİP KLEIN-GORDON
s-DALGA DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Canan YANIK : 83414
DOKTORA TEZİ
MATAMATİK ANABİLİM DALI
1999

TC YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
DOKÜMAN YÖNETİM SİSTEMİ

..Prof.Dr.Öner Çakar...danışmanlığında,Canan Yanık.....
tarafından hazırlanan bu çalışma .23./..09./1999 tarihinde aşağıdaki jüri
tarafından Matematik Anabilim
Dali'ndaDoktora..... tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Okay Çelebi İmza : 

Üye : Prof.Dr.Elgiz Bairamov İmza : 

Üye : Prof.Dr.Cevdet Tezcan İmza : 

Üye : Prof.Dr.Abdullah Altın İmza : 

Üye : Prof.Dr.Öner Çakar İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr.....Esmâ Kılıç.....
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

REEL EKSENDE VERİLMİŞ KOMPLEKS POTANSİYELE SAHİP KLEİN-GORDON s-DALGA DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Canan YANIK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Jüri : Prof. Dr. Okay ÇELEBİ
Prof. Dr. Elgiz BAIRAMOV
Prof. Dr. Cevdet TEZCAN
Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Öner ÇAKAR

$Q, \mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilen ve

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|Q'(x)|dx < \infty$$

koşullarını gerçekleyen kompleks değerli bir potansiyel fonksiyon olmak üzere $L_2(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı olup Klein-Gordon s-Dalga denklemi olarak adlandırılan

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

diferensiyel denklem yardımıyla üretilen operatörü L ile gösterelim.

Birinci bölümde, spektral analizin temel tanımları ve önemli teoremleri verilmiştir. Ayrıca daha önce elde edilmiş sonuçlar da ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, L operatörünün Jost çözümleri verilmiş ve bu çözümlerin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca sonraki bölümlerde önemli rol oynayan $D_+(k)$ ve $D_-(k)$ fonksiyonları tanımlanmıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerdeki sonuçlar tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde, analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri kullanılarak L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısının Q potansiyelinin sonsuzdaki davranışına bağlılığı incelenmiştir. Ayrıca, L operatörünün sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin var olması için Q potansiyel fonksiyonun üzerine konulması gereken koşullar bulunmuştur.

Dördüncü bölümde, özdeğerlere ve spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonların özellikleri araştırılmış, özdeğerlere ve spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonların, sırasıyla, $L_2(\mathbb{R})$ ve H_- uzayından olduğu ispatlanmıştır.

1999, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler : Spektral analiz, Jost çözümü, özdeğer, spektral tekillik, esas fonksiyon



ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SPECTRAL PROPERTIES OF THE KLEIN-GORDON s-WAVE EQUATION WITH COMPLEX POTENTIAL ON THE WHOLE REAL AXIS

Canan YANIK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Öner ÇAKAR

Jury : Prof. Dr. Okay ÇELEBİ
Prof. Dr. Elgiz BAİRAMOV
Prof. Dr. Cevdet TEZCAN
Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Prof. Dr. Öner ÇAKAR

In this study, we denote the operator L generated in the space $L_2(\mathbb{R})$ by the Klein-Gordon s-wave equation

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

by L , where Q is complex valued potential function, continuously differentiable on $\mathbb{R}$ satisfying the conditions

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |Q'(x)| dx < \infty.$$

In the First Chapter, some basic definitions and main theorems on spectral analysis have been given. Also some earlier results are mentioned.

In the Second Chapter, the Jost solutions of the operator L are defined and its properties are examined. Moreover, the functions $D_+(k)$ and $D_-(k)$ which play an important role in the following chapters are given.

The Third and the Fourth Chapters of this thesis contain the original parts of the study.

In the Third Chapter, the structure of the eigenvalues and the spectral singularities of the operator L are examined considering the behaviour of the potential Q at infinity using the uniqueness theorem of analytic functions. We also find the conditions on the potential function Q under which the operator L has a finite number of eigenvalues and spectral singularities with finite multiplicities.

In the Fourth Chapter, the properties of the principal functions corresponding the eigenvalues and the spectral singularities are investigated. We prove that the principal functions corresponding to the eigenvalues and the spectral singularities of the operator L belong to $L_2(\mathbb{R})$ and H_- , respectively.

1999, 63 pages

Key Words : Spectral analysis, Jost solution, eigenvalue, spectral singularities, principal function



ÖNSÖZ

Matematik, fizik ve fonksiyonel analiz'in birçok problemi için, diferensiyel operatörlerin spektrumunun ve özfonksiyonlarının bulunması gerekir. Diferensiyel operatörün tanım bölgesine ait olan keyfi fonksiyonların, bu operatörün özfonksiyonlarına göre seri ya da integral açılımı biçiminde ifade edilmesi önemlidir. Örneğin kısmi türevli denklemlerin, belirli başlangıç ve sınır koşullarını gerçekleştiren çözümlerini Fourier yöntemi ile bulurken bu tip problemlerle karşılaşılır. Bu nedenle, diferensiyel operatörler bir çok matematikçinin dikkatini çekmiş ve bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmaların hepsi, diferensiyel operatörlerin spektrumlarının araştırılmasına, özfonksiyonlara göre spektral açılımının bulunmasına; yani spektral analizine ilişkindir. Diferensiyel operatörlerin spektral analizi hakkındaki çalışmalar, Kuantum Mekanik'i için büyük önem taşımaktadır. Kuantum Mekanik'i'nin birçok probleminin çözümünde, spektral analiz temel oluşturmıştır. Bu nedenle, Kuantum Mekanik'i'nin problemlerinden Klein-Gordon s-Dalga denkleminin spektral özelliklerinin incelenmesi gerekmektedir.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her safhasında yakın ilgi, öneri ve engin bilgileri ile beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Öner ÇAKAR'a, Prof. Dr. Elgiz BAİRAMOV'a, ayrıca tezin yazım aşamasında bilgilerini esirgemeyen Doç. Dr. Murat DİKER'e, Araş. Gör. Şenol DOST'a ve öğrenimim süresince bana destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.



SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
$D(A)$	A operatörünün tanım cümlesi
$R(A)$	A operatörünün değer cümlesi
$W[f_1, f_2]$	f_1 ve f_2 çözümlerinin Wronskianı
$o(1)$	sonsuz küçük değerler
$R_k(L)$	L operatörünün resolventi
$\rho(L)$	L operatörünün resolvent cümlesi
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekillikleri
L^*	L operatörünün adjointi
$\Gamma(x)$	Gama fonksiyonu
H	Hilbert uzayı
$B(k)$	Blaschke çarpımı
$\mu(I)$	I 'nın Lebesgue ölçümü
$L_2[0, \infty)$	$\{f : \int_0^\infty f(x) ^2 dx < \infty\}$
$l.i.m$	L_2 'nin normu anlamında yakınsaklık

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Kapsamı	1
1.2. Ön Bilgiler	4
2. L OPERATÖRÜNÜN JOST ÇÖZÜMLERİ	8
3. L OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU	12
3.1. L Operatörünün Resolventi ve Spektrumu Hakkında	12
3.2. L Operatörünün Resolvent Cümlesi ve Sürekli Spektrumu	16
3.3. L Operatörünün Özdeğerlerinin ve Spektral Tekilliklerinin Yapısı	23
4. L OPERATÖRÜNÜN ESAS FONKSİYONLARI	48
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı:

$L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında tanımlı

$$l_0(y) = -y'' + q(x)y, \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \quad (1)$$

diferensiyel ifadesi ve $y'(0) - hy(0) = 0$ sınır koşulu yardımı ile üretilen operatörü L_0 ile göstereyim. Burada q kompleks değerli bir fonksiyon ve $h \in \mathbb{C}$ dir. L_0 operatörünün spektral analizinin incelenmesine ilk olarak 1960 yılında Naimark tarafından başlanmıştır. Naimark L_0 operatörünün spektrumunun; özdeğerler, sürekli spektrum ve spektral tekilliklerden oluştuğunu göstermiştir. Spektral tekillikler, özdeğer olmayan sürekli spektrum üzerinde yer alan resolventin çekirdeğinin kutuplarıdır. $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} |q(x)| dx < \infty$$

koşulu varsa, L_0 operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri sonlu sayıdadır. Bunların katları da sonlu sayıdadır.

Naimark'ın sonucu, Kemp[1958] tarafından reel eksen üzerinde tanımlı diferensiyel operatörlere, Gasymov[1968] tarafından üç boyutlu Schrödinger operatörlere genişletilmiştir.

Spektral analizde çok önemli bir adım da Pavlov[1967] tarafından atılmıştır. L_0 operatörünün spektral tekilliklerinin yapısının, potansiyel fonksiyonunun sonsuzdaki davranışına bağlı olduğu gösterilmiş ve L_0 operatörünün esas fonksiyonları kullanılarak spektral açılım elde edilmiştir. Pavlov'un çalışması, spektral tekilliklerin de dikkate alınarak spektral açılımın verildiği ilk çalışmadır. Ancak spektral açılımda spektral tekilliklerin etkisi tartışılmamıştır. Hruscev[1984] tarafından da L_0 operatörünün spektral tekilliklerinin yapısının potansiyel fonksiyonunun sonsuzdaki azalma hızına bağımlılığı problemi incelenmiştir.

L_0 operatörünün spektral analizinde spektral tekilliklerin önemli rol oynadığı Lyance[1967(a-b)] tarafından gösterilmiştir. Lyance, aynı zamanda, spektral açılımda spektral tekilliklerin etkisini de incelemiştir.

Krall[1965(a-e)] tarafından $K \in L_2(\mathbb{R}_+)$ kompleks değerli fonksiyon ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere (1) ve

$$\int_0^\infty K(x)y(x)dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0$$

sınır koşulu ile $L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında tanımlı non-selfadjoint operatör verilmiştir. Bu operatörü L_1 ile göstereceğiz. Krall, L_1 operatörünün spektral analizini ayrıntılı olarak incelemiştir. Aynı zamanda L_1 operatörünün L_1^* adjoint operatörünü de

elde etmiştir. L_1 ve L_1^* operatörlerinin özfonksiyonlarının açılımı ve L_1 operatörünün Weyl teorisi Krall tarafından incelenmiştir.

Soyut selfadjoint olmayan operatörler Gasymov,et al.[1972] ve Maksudov,et al.[1984] tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalarda spektral tekilliklerin komşuluğunda selfadjoint olmayan operatörlerin resolventinin Laurent açılımı incelenmiş, daha sonra bu açılım kullanılarak spektral tekilliklerin spektral analizdeki rolü belirtilmiştir. Spektral tekillikleri olan dissipatif operatörlerin benzer sınıflarının spektral analizi, fonksiyonel modeller teorisi ve saçılım teorisi kullanılarak Pavlov tarafından araştırılmıştır.

Rölativistik Kuantum Mekaniği'nde

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

denklemini, kütlesi sıfır olan parçacığın radyal Klein-Gordon s-Dalga denklemidir. $L_2(0, \infty)$ uzayında

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in [0, \infty)$$

denkleminin ve $y(0) = 0$ sınır koşulunun yardımı ile üretilen operatörü L_0 ile gösterilmiştir. Q reel, analitik ve sonsuzlukta hızla azalan bir fonksiyon olduğunda L_0 operatörünün sonlu sayıda, sonlu katlı özdeğerlerinin olduğu Degasperis[1970] tarafından gösterilmiştir. Greiner[1994] tarafından, Q sabit, üstel azalan ve Newton tipinde bir potansiyel ise L_0 operatörünün spektrumunun özdeğerlerden oluştuğu gösterilmiştir. Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar da bulunmuştur.

Jaulent,et al.[1976(a-b)], Q reel, sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve

$$\int_0^\infty x\{|Q(x)| + |Q'(x)|\}dx < \infty$$

oldüğünde, L_0 operatörünün spektrumunun sürekli spektrumdan ve özdeğerlerden oluştuğu ispatlanmıştır. Daha sonra $\sigma_c(L_0) = (-\infty, \infty)$ olduğu gösterilmiş ve özdeğerlerin sayısal yapısı incelenmiştir. Fakat L_0 operatörünün spektrumu incelenirken bu operatörün spektral tekilliklerinin olmadığı koşul olarak kabul edilmiştir. Ancak bu koşulun hangi potansiyeller için gerçekleştiği incelenmemiştir.

$L_2(-\infty, \infty)$ uzayında

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

denklemini yardımıyla tanımlanan operatörü L ile gösterelim. Q reel, $(-\infty, \infty)$ aralığının her bir sonlu altaralığında mutlak sürekli ve

$$\int_0^{\infty} x\{|Q(x)| + |Q'(x)|\}dx < \infty$$

olduğunda L operatörünün sürekli spektrumunun $\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$, özdeğerlerinin sonlu sayıda olduğu ve özdeğerlerinin herbirinin katının bir olduğu gösterilmiştir [Jaulent,et al.,1976(a-b)].

$L_2(0, \infty)$ uzayında

$$-y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y = 0, \quad x \in [0, \infty)$$

denkleminin ve

$$\int_0^{\infty} K(x)y(x)dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0$$

sınır koşulunun yardımı ile doğurulan karesel Schrödinger Operatörler demeti $L(\lambda)$ ile gösterilmiştir. Bairamov,et al.[1999(a-b)] çalışmalarında analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri ve toplanabilirlik çarpanlarını kullanarak $L(\lambda)$ operatörünün spektral analizini yapmıştır. Spektral tekilliği olan ve yarım eksende verilen Klein-Gordon s-Dalga denklemi ile Dirac sisteminin spektral teorisi Bairamov,et al.[1997] ve Bairamov,et al.[1999] tarafından ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Bu çalışmada kompleks potansiyele sahip ve reel eksende verilmiş Klein-Gordon s-Dalga denkleminin özdeğerleri, spektral tekillikleri, sürekli spektrumu ve spektruma karşılık gelen esas fonksiyonların özellikleri incelenmiştir.

1.2.Ön Bilgiler

Bu bölümde daha sonra kullanılacak tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.2.1:

D_1 ve D_2 , ortak noktaları olan herhangi iki bölge ve f_1 , D_1 bölgesinde analitik olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $D_1 \cap D_2$ arakesitinde bulunan her z noktası için $f_1(z) = f_2(z)$ olacak biçimde D_2 bölgesinde analitik bir f_2 fonksiyonu bulunuyorsa, f_2 fonksiyonuna f_1 fonksiyonunun D_1 bölgesinden D_2 bölgesine analitik devamı denir.

Tanım 1.2.2:

f fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlanmış olsun. Eğer $\forall z_1, z_2 \in D$ için

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa bu eşitsizliği sağlayan f fonksiyonu D bölgesinde α . basamaktan Hölder koşulunu sağlıyor denir.

Teorem 1.2.3: (Privalov Birebirlik Teoremi)

g fonksiyonunun açık üst düzlemde analitik olduğunu kabul edelim. E cümlesi ise g fonksiyonunun reel sıfırlarının cümlesi olsun. $\mu(E) > 0$ ise $g(z) \equiv 0$ dır [Privalov,1956].

Teorem 1.2.4: (Nevanlina Faktörizasyon Teoremi)

Eğer f fonksiyonu D bölgesinde sınırlı, analitik bir fonksiyon ise, bu durumda $\forall z \in D$ için $f(z) = B(z).g(z)$ şeklinde gösterilir, burada B Blaschke çarpımı, g ise D bölgesinin iç fonksiyonudur, yani

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D$$

dir [Garnet,1981].

Tanım 1.2.5:

Eğer $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ise,

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir.

$f \in L_2(-\infty, \infty)$ olduğunda ise $N > 0$ olmak üzere,

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^N f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

yazılır [Garnet,1981].

Teorem 1.2.6: (Plancherel Teoremi)

$$l.i.m_{N \rightarrow \infty} g_N(\lambda) = g(\lambda)$$

olacak şekilde bir $g \in L_2(0, \infty)$ vardır[Garnet,1981].

Tanım 1.2.7:

$f \in L_2(-\infty, \infty)$ olmak üzere Plancherel teoreminde tanımlanan

$$g(\lambda) = l.i.m_{N \rightarrow \infty} g_N(\lambda)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun $L_2(-\infty, \infty)$ uzayındaki Fourier dönüşümü denir [Garnet,1981].

Tanım 1.2.8:(Tamamlayıcı Aralıklar)

F birim çemberde (reel ekseninde) ayrık bir cümle olsun. F in elemanlarını içermeyen yaylara (aralıklara) F in tamamlayıcı yayları (aralıkları) denir.

Teorem 1.2.9:(Beurling Birebirlik Teoremi)

$g(z)$ fonksiyonunun birim çemberde analitik, sınıra dek sürekli olduğunu ve sınırda Hölder koşulunu sağladığını kabul edelim. $F \subset [0, 2\pi]$ Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir cümle olmak üzere, $\forall z \in F$ için $g(z) = 0$, ve

$$\sum_v |\Delta_v| \ln \frac{1}{|\Delta_v|} = \infty$$

ise $g(z) \equiv 0$ dır. Burada $|\Delta_v|$, F cümlesinin tamamlayıcı yaylarının uzunluğudur [Carleson,1952].

Teorem 1.2.10:(Pavlov Birebirlik Teoremi)

g fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da analitik ve bütün türevleri reel eksene dek sürekli olsun. Buradan öyle bir N pozitif tam sayısı vardır ki

$$|g^{(k)}(z)| \leq A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad |z| < 2N$$

ve

$$\int_{-\infty}^{-N} \frac{\ln |g(x)|}{1+x^2} dx < \infty \quad \int_N^{\infty} \frac{\ln |g(x)|}{1+x^2} dx < \infty$$

olur. Eğer Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir F cümlesinde g fonksiyonu ve her basamaktan türevleri sıfır ise ve h keyfi bir pozitif sayı olmak üzere,

$$\int_0^h \ln T(s) d\theta(F, s) = -\infty$$

koşulu sağlanıyorsa bu durumda g fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır. Burada, $T(s) = \inf_k \frac{A_k s^k}{k!}$ ve $\theta(F, s)$, F cümlesinin s -komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsüdür [Pavlov,1967].

Tanım 1.2.11:(Gevrey Sınıfı)

Açık üst düzlemde analitik, reel eksende sürekli, sonsuz diferensiyellenebilen bir f fonksiyonu için

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_f D_f^{(n)} n! n^{\frac{n}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise f fonksiyonu α . basamaktan Gevrey sınıfındandır denir ve bu sınıf G_α ile gösterilir [Hruscev,1977].

Tanım 1.2.12:(Gevrey Sınıfı'ndan olan fonksiyonların birebirlik cümleleri)

$f \in G_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) olsun. Eğer bir F cümlesinde f fonksiyonunun kendisi ve her basamaktan türevleri sıfıra eşit olduğunda $f \equiv 0$ ise, F ye f fonksiyonunun birebirlik sınıfı denir. Gevrey Sınıfı'ndan olan fonksiyonların birebirlik cümlelerinin tümü ε_α ile gösterilir [Hruscev,1977].

Teorem 1.2.13:(Carleson Teoremi)

$f \in G_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) olsun ve F de f fonksiyonunun birebirlik sınıfı bulunmasın. Bu durumda, F kapalıdır, Lebesgue ölçüsü sıfırdır ve aşağıdaki koşul gerçekleşir:

$$\sum_v |l_v|^{1-\alpha} < \infty.$$

Burada $|l_v|$, F cümlesinin sınırlı l_v tamamlayıcı aralıklarının uzunluklarıdır [Carleson,1952].

Teorem 1.2.14:(Riemann-Lebesgue Teoremi)

$f \in L_1(-\infty, \infty)$ için

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

f in Fourier dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(x) = 0$$

dır [Titchmarsh,1962].

Teorem 1.2.15:(Lebesgue Teoremi)

$(g_v(x))$ ölçülebilen fonksiyonlar dizisi ve

$$\lim_{v \rightarrow v_0} g_v(x) = g(x)$$

olsun. Eğer, bir $G \in L_1(-\infty, \infty)$ mevcut ve $\forall v$ için $|g_v(x)| \leq G(x)$ ise,

$$\lim_{v \rightarrow v_0} \int_{\mathbb{R}} g_v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

dir [Titchmarsh,1962].

Tanım 1.2.16:

$f, g \in L_1(-\infty, \infty)$ ise

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

eşitliğine f ve g nin konvolüsyonu denir [Titchmarsh,1962].

Tanım 1.2.17:(Jost Çözümü)

Klein-Gordon s-Dalga denkleminin tüm sınırlı çözümlerine Jost çözümleri denir.

2. L OPERATÖRÜNÜN JOST ÇÖZÜMLERİ :

Q kompleks değerli ve sürekli diferensiyellenebilen ve

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |Q'(x)| dx < \infty \quad (2.1)$$

koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2.2)$$

Klein-Gordon s-Dalga denklemini gözönüne alalım. (2.2) ile tanımlı operatörü L ile gösterelim. Schrödinger denklemine benzer olarak, $f^+(x, k)$, $f^-(x, k)$, $g^+(x, k)$ ve $g^-(x, k)$ (2.2) denkleminin Jost çözümlerini gösterebiliriz. Bu çözümler için

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f^+(x, k) e^{-ikx} &= 1, \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+ := \{k : k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \geq 0\} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f^-(x, k) e^{ikx} &= 1, \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+ \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g^+(x, k) e^{ikx} &= 1, \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_- := \{k : k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \leq 0\} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g^-(x, k) e^{-ikx} &= 1, \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_- \end{aligned}$$

dir. (2.2) denkleminin (2.1) koşulları altındaki Jost çözümleri

$$k \in \overline{\mathbb{C}}_+ := \{k : k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \geq 0\}$$

olmak üzere

$$f^-(x, k) = e^{iw^-(x)} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x F^-(x, t) e^{-ikt} dt \quad (2.3)$$

$$f^+(x, k) = e^{iw^+(x)} e^{ikx} + \int_x^{\infty} F^+(x, t) e^{ikt} dt, \quad (2.4)$$

ve

$$k \in \overline{\mathbb{C}}_- := \{k : k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \leq 0\}$$

olmak üzere

$$g^-(x, k) = e^{-iw^-(x)} e^{ikx} + \int_{-\infty}^x G^-(x, t) e^{ikt} dt \quad (2.5)$$

$$g^+(x, k) = e^{-iw^+(x)} e^{-ikx} + \int_x^{\infty} G^+(x, t) e^{-ikt} dt \quad (2.6)$$

ile verilir. Ayrıca

$$w^-(x) = \int_{-\infty}^x Q(t)dt, \quad w^+(x) = \int_x^{\infty} Q(t)dt$$

olarak tanımlanmaktadır.

$F^\pm(x, t)$ ve $G^\pm(x, t)$ çekirdekleri Volterra tipli integral denklemlerinin çözümleri olup aşağıdaki koşulları gerçeklerler:

$$|F^\pm(x, t)|, |G^\pm(x, t)| \leq c\eta^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{\sigma^\pm(x)} \quad (2.7)$$

$$|F_x^\pm(x, t)|, |G_x^\pm(x, t)| \leq c[\eta^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right) + W\left(\frac{x+t}{2}\right)] \quad (2.8)$$

$$|F_t^\pm(x, t)|, |G_t^\pm(x, t)| \leq c[\eta^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right) + W\left(\frac{x+t}{2}\right)].$$

Burada.

$$\eta^-(x) = \int_{-\infty}^x [|Q(t)|^2 + |Q'(t)|]dt, \quad \eta^+(x) = \int_x^{\infty} [|Q(t)|^2 + |Q'(t)|]dt$$

$$\sigma^-(x) = \int_{-\infty}^x [(x-t)|Q(t)|^2 + 2|Q(t)|]dt, \quad \sigma^+(x) = \int_x^{\infty} [(t-x)|Q(t)|^2 + 2|Q(t)|]dt$$

$$W(x) = \frac{1}{4}[2|Q(x)|^2 + |Q'(x)|]$$

ve $c > 0$ bir sabittir [Jaulent, et al., 1976(a-b)]. Diğer taraftan, $f^\pm(x, k)$ çözümleri $\mathbb{C}_+ := \{k : k \in \mathbb{C}, \text{Im } k > 0\}$ üzerinde $g^\pm(x, k)$ çözümleri $\mathbb{C}_- := \{k : k \in \mathbb{C}, \text{Im } k < 0\}$ üzerinde k ya göre analitik ve reel eksene dek süreklidirler. $f^\pm(x, k)$ ve $g^\pm(x, k)$ çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçeklerler:

$$f^{\pm}(x, k) = e^{\pm i k x} [1 + o(1)], \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (2.9)$$

$$f_x^{\pm}(x, k) = e^{\pm i k x} [\pm i k + o(1)], \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

$$g^{\pm}(x, k) = e^{\mp i k x} [1 + o(1)], \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_-, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (2.10)$$

$$g_x^{\pm}(x, k) = e^{\mp i k x} [\mp i k + o(1)], \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_-, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

(2.9) ve (2.10) a göre $f^{\pm}(x, k)$ ve $g^{\pm}(x, k)$ çözümlerinin Wronskianları $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} W[f^{\pm}(x, k), g^{\pm}(x, k)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f^{\pm}(x, k)g_x^{\pm}(x, k) - f_x^{\pm}(x, k)g^{\pm}(x, k)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [e^{\pm i k x} (\mp i k) e^{\mp i k x} - (\pm i k) e^{\pm i k x} e^{\mp i k x}] \\ &= \mp 2 i k \end{aligned}$$

dir. Buna göre $f^+(x, k)$, $g^+(x, k)$ ve $f^-(x, k)$, $g^-(x, k)$ çiftleri $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için (2.2) eşitliğinin temel çözümler sistemidir. O halde $k \in \mathbb{R}^*$ için aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$f^+(x, k) = a(k)f^-(x, k) + b(k)g^-(x, k) \quad (i)$$

$$g^+(x, k) = c(k)f^-(x, k) + d(k)g^-(x, k). \quad (ii)$$

(i) bağıntısından

$$f^+(x, k) = a(k)f^-(x, k) + b(k)g^-(x, k)/g_x^-(x, k)$$

$$f_x^+(x, k) = a(k)f_x^-(x, k) + b(k)g_x^-(x, k)/-g^-(x, k)$$

eşitlikleri düzenlenerek

$$a(k) = \frac{W[f^+(x, k), g^-(x, k)]}{2 i k}$$

katsayısı ve

$$f^+(x, k) = a(k)f^-(x, k) + b(k)g^-(x, k)/f^-_x(x, k)$$

$$f^+_x(x, k) = a(k)f^-_x(x, k) + b(k)g^-_x(x, k)/-f^-(x, k)$$

eşitlikleri düzenlenerek

$$b(k) = -\frac{W[f^+(x, k), f^-(x, k)]}{2ik}$$

katsayısı belirlenmiştir.

(ii) bağıntısından

$$g^+(x, k) = c(k)f^-(x, k) + d(k)g^-(x, k)/g^-_x(x, k)$$

$$g^+_x(x, k) = c(k)f^-_x(x, k) + d(k)g^-_x(x, k)/-g^-(x, k)$$

eşitlikleri düzenlenerek

$$c(k) = \frac{W[g^+(x, k), g^-(x, k)]}{2ik}$$

katsayısı ve

$$g^+(x, k) = c(k)f^-(x, k) + d(k)g^-(x, k)/f^-_x(x, k)$$

$$g^+_x(x, k) = c(k)f^-_x(x, k) + d(k)g^-_x(x, k)/-f^-(x, k)$$

eşitlikleri düzenlenerek

$$d(k) = \frac{W[f^-(x, k), g^+(x, k)]}{2ik}$$

katsayısı belirlenmiştir. $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ ve $d(k)$ fonksiyonları her $k \in \mathbb{R}^*$ için tanımlıdır. $b(k)$ katsayısı $\mathbb{C}_+$ ya, $c(k)$ katsayısı $\mathbb{C}_-$ ye analitik devam ettirilebilir. Bundan sonraki bölümlerdeki sonuçlar, $b(k)$ ve $c(k)$ fonksiyonlarının yardımı ile tanımlanan $D_+(k)$ ve $D_-(k)$ fonksiyonları kullanılarak gösterilmiştir. Yeni fonksiyon gösterimleri

$$D_+(k) = -2ikb(k), \quad D_-(k) = 2ikc(k)$$

dır.

3. L OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU

3.1. L Operatörünün Resolventi ve Spektrumu Hakkında:

A operatörü H Hilbert uzayında tanımlanmış herhangi bir operatör ve A 'nın tanım kümesi H içinde yoğun olsun. $R_k(A)$, $\rho(A)$, $\sigma(A)$, $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ ile sırasıyla A operatörünün resolventi, resolvent cümlesi, spektrumu, ayık spektrumu, sürekli spektrumu ve rezidü spektrumu gösterilsin.

Tanım 3.1.1:

Eğer $R_k(A) := (A - kI)^{-1}$ operatörü var, sınırlı ve H nin tümünde tanımlı ise bu operatöre A operatörünün resolventi denir.

Tanım 3.1.2:

A operatörünün $\rho(A)$ resolvent cümlesi

$$\rho(A) = \left\{ k : k \in \mathbb{C}, \begin{array}{l} R_k(A) \text{ var} \\ R_k(A) \text{ sınırlı operatör} \\ \overline{D(R_k(A))} = H \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3:

A operatörünün spektrumu

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.4:

A operatörünün ayık spektrumu

$$\sigma_d(A) = \{k : k \in \mathbb{C} \text{ ve } R_k(A) \text{ yoktur}\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.5:

A operatörünün sürekli spektrumu

$$\sigma_c(A) = \left\{ \begin{array}{ll} R_k(A) & \text{var} \\ k : k \in \mathbb{C}, & R_k(A) \text{ sınırsız operatör} \\ \overline{D(R_k(A))} = H & \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.6:

A operatörünün rezidü spektrumu

$$\sigma_r(A) = \left\{ \begin{array}{ll} R_k(A) & \text{var} \\ k : k \in \mathbb{C}, & R_k(A) \text{ sınırlı operatör} \\ \overline{D(R_k(A))} \neq H & \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi

$$Ax = kx \quad (iii)$$

denklemini gözönüne alalım. Tanım 3.1.2 den (iii) denkleminin yalnızca $x = 0$ çözümünün var olması halindeki k sayılarının A operatörünün resolvent cümlesine ait olduğu açıktır. (iii) denkleminin $x \neq 0$ için çözümü var ise bunlara karşılık gelen k lar A operatörünün ayırık spektrumuna aittir.

Daha önce tanımlanan L operatörünün özdeğerleri için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.7:

$$\sigma_d(L) = \{k : k \in \mathbb{C}_+, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{C}_-, D_-(k) = 0\}$$

dir.

İspat:

İspat için öncelikle

$$M_1 = \{k : k \in \mathbb{C}_+, D_+(k) = 0\}, \quad M_2 = \{k : k \in \mathbb{C}_-, D_-(k) = 0\}$$

ve $M = M_1 \cup M_2$ tanımlarını yapalım.

(a) $k_0 \in M_1 \cup M_2$ olsun. Bu kabulde iki durum söz konusudur:

(i) $\text{Im } k_0 > 0, D_+(k_0) = 0$;

$$\begin{aligned} D_+(k_0) &= -2ik_0b(k_0) \\ &= W[f^+(x, k_0), f^-(x, k_0)] = 0 \end{aligned}$$

ise $f^+(x, k_0) = cf^-(x, k_0)$ dır. Burada, $f^+(x, k_0)$, $+\infty$ daki ve $f^-(x, k_0)$, $-\infty$ daki çözümlerdir.

$$U(x, k_0) = \begin{cases} cf^-(x, k_0), & -\infty < x < 0 \\ f^+(x, k_0), & 0 < x < \infty \end{cases}$$

tanımını yapalım. $U(x, k_0)$, L operatörü ile tanımlanan denklemin çözümü olup $x = 0$ noktasında süreklidir. $U(x, k_0) \in L_2(-\infty, \infty)$ dur. O halde k_0 , L operatörünün bir özdeğeridir. Buna göre $k_0 \in \sigma_d(L)$ olup $M_1 \subset \sigma_d(L)$ elde edilir.

(ii) $\text{Im } k_0 < 0, D_-(k_0) = 0$;

$$\begin{aligned} D_-(k_0) &= 2ik_0c(k_0) \\ &= W[g^+(x, k_0), g^-(x, k_0)] = 0 \end{aligned}$$

ise $g^+(x, k_0) = cg^-(x, k_0)$ dır. Burada, $g^+(x, k_0)$, $+\infty$ daki ve $g^-(x, k_0)$, $-\infty$ daki çözümlerdir.

$$U_1(x, k_0) = \begin{cases} cg^-(x, k_0), & -\infty < x < 0 \\ g^+(x, k_0), & 0 < x < \infty \end{cases}$$

tanımını yapalım. $U_1(x, k_0)$, L operatörü ile tanımlanan denklemin çözümü olup $x = 0$ noktasında süreklidir. $U_1(x, k_0) \in L_2(-\infty, \infty)$ dir. O halde k_0 , L operatörünün bir özdeğeridir. Buna göre $k_0 \in \sigma_d(L)$ olup $M_2 \subset \sigma_d(L)$ elde edilir.

(i) ve (ii) den de

$$M_1 \cup M_2 \subset \sigma_d(L) \tag{I}$$

bulunur.

(b) $k_0 \in \sigma_d(L)$ olsun. Bu kabulde iki durum söz konusudur:

(i) $\text{Im } k_0 > 0$ için $k_0 \in \sigma_d(L)$ olsun. O halde k_0 özdeğerine karşı gelen $U(x, k_0)$ özfonksiyonu vardır ve $U(x, k_0) \in (-\infty, \infty)$ dur. $\text{Im } k_0 > 0$ olduğunda $x \rightarrow \infty$ için,

$$W[U(x, k_0), f^+(x, k_0)] = 0$$

olduğundan $U(x, k_0) = c_1 f^+(x, k_0)$ dır. Benzer şekilde, $\text{Im } k_0 > 0$ da $x \rightarrow -\infty$ için,

$$W[U(x, k_0), f^-(x, k_0)] = 0$$

olduğundan $U(x, k_0) = c_2 f^-(x, k_0)$ dır. Buradan $c = \frac{c_2}{c_1}$ ise $f^+(x, k_0) = c f^-(x, k_0)$ ve

$$W[f^+(x, k_0), f^-(x, k_0)] = 0$$

olur. O halde $k_0 \in M_1$ ve $\sigma_d(L) \subset M_1$ dir.

(ii) $\text{Im } k_0 < 0$ için $k_0 \in \sigma_d(L)$ olsun. O halde k_0 özdeğerine karşı gelen $U_1(x, k_0)$ özfonksiyonu vardır ve $U_1(x, k_0) \in (-\infty, \infty)$ dur. $\text{Im } k_0 < 0$ olduğunda $x \rightarrow \infty$ için,

$$W[U_1(x, k_0), g^+(x, k_0)] = 0$$

olduğundan $U_1(x, k_0) = c_3 g^+(x, k_0)$ dır. Benzer şekilde, $\text{Im } k_0 < 0$ olduğunda $x \rightarrow -\infty$ için,

$$W[U_1(x, k_0), g^-(x, k_0)] = 0$$

olduğundan $U_1(x, k_0) = c_4 g^-(x, k_0)$ dır. Buradan $\tilde{c} = \frac{c_4}{c_3}$ ise $g^+(x, k_0) = \tilde{c} g^-(x, k_0)$ ve

$$W[g^+(x, k_0), g^-(x, k_0)] = 0$$

olur. O halde $k_0 \in M_2$ ve $\sigma_d(L) \subset M_2$ dir. (i) ve (ii) den

$$\sigma_d(L) \subset M_1 \cup M_2 \quad (II)$$

yazılır..

Sonuç olarak (I) ve (II) den

$$\sigma_d(L) = M_1 \cup M_2$$

yani

$$\sigma_d(L) = \{k : k \in \mathbb{C}_+, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{C}_-, D_-(k) = 0\}$$

olduğu elde edilir.

Sonuç 3.1.8:

k sayısının L operatörünün özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $k \in \mathbb{C}_+$ için $D_+(k) = 0$ veya $k \in \mathbb{C}_-$ için $D_-(k) = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.1.9:

L operatörünün reel ekseninde özdeğeri yoktur.

İspat:

$Im\ k_0 = 0$ ise (2.2) nin temel çözümler sistemi $f^-(x, k_0)$, $g^-(x, k_0)$ ve $f^+(x, k_0)$, $g^+(x, k_0)$ dir. Yani;

$$W[f^\pm(x, k_0), g^\pm(x, k_0)] = \mp 2ik_0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad Im\ k_0 = 0$$

dir. Denklemin keyfi bir $y(x, k_0)$ çözümü, reel ekseninde,

$$y(x, k_0) = c_1 f^-(x, k_0) + c_2 g^-(x, k_0), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

dir. Bu eşitlikten aşağıdaki asimptotik eşitlik elde edilir:

$$y(x, k_0) = c_1 e^{-ik_0 x} + c_2 e^{ik_0 x} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$

$y(\cdot, k_0) \in L_2(-\infty, \infty)$ olması için $c_1 = c_2 = 0$ olmalıdır. Buradan $y(x, k_0) \equiv 0$ olur. Bu ise k_0 ın özdeğer olması ile çelişir. O halde $Im\ k_0 = 0$ da L operatörünün özdeğeri yoktur. Yani,

$$\sigma_d(L) \cap (-\infty, \infty) = \emptyset$$

dir.

3.2. L Operatörünün Resolvent Cümlesi ve Sürekli Spektrumu:

$$\rho^+(L) = \{k : k \in \mathbb{C}_+, D_+(k) \neq 0\},$$

$$\rho^-(L) = \{k : k \in \mathbb{C}_-, D_-(k) \neq 0\}$$

olsun.

Teorem 3.2.1:

$\rho^*(L) = \rho^+(L) \cup \rho^-(L)$ olup $k \in \rho^*(L)$ için $R_k(L)$ resolventi bir integral operatörü olup

$$(R_k f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t; k) f(t) dt \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada, $k \in \mathbb{C}_+$ için

$$R^+(x, t; k) = \frac{1}{D_+(k)} \begin{cases} f^-(t, k) f^+(x, k), & -\infty < t < x \\ f^-(x, k) f^+(t, k), & x < t < \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

ve $k \in \mathbb{C}_-$ için

$$R^-(x, t; k) = \frac{1}{D_-(k)} \begin{cases} g^-(t, k) g^+(x, k), & -\infty < t < x \\ g^-(x, k) g^+(t, k), & x < t < \infty \end{cases} \quad (3.3)$$

dir. O halde,

$$R(x, t; k) = \begin{cases} R^+(x, t; k); & k \in \rho^+(L) \\ R^-(x, t; k); & k \in \rho^-(L) \end{cases} \quad (3.4)$$

biçiminde ortaya çıkar.

İspat:

$k \in \mathbb{C}_+$, $D_+(k) \neq 0$ ve $k \in \mathbb{C}_-$, $D_-(k) \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$W[f^+(x, k), f^-(x, k)] \neq 0$$

dır. $k \in \mathbb{C}_+$, $D_+(k) \neq 0$ ve $k \in \mathbb{C}_-$, $D_-(k) \neq 0$ koşullarını sağlayan k lar için (2.2) denkleminin temel çözümler sistemi $f^+(x, k)$ ve $f^-(x, k)$ dir. (3.1) eşitliğinin gösterilmesi için, $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ olmak üzere

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = f(x) \quad (3.5)$$

homojen olmayan denklemi çözülmelidir. Bunun için Parametrelerin Değişimi Metodunu kullanacağız.

$f^+(x, k)$ ve $f^-(x, k)$, (2.2) homojen denkleminin kapalı üstdüzlemdeki çözümleri olduğundan

$$\tilde{y}_1(x, k) = c_1 f^+(x, k) + c_2 f^-(x, k)$$

eşitliği de (2.2) nin bir çözümü olarak yazılabilir. (3.5) denkleminin

$$y_1(x, k) = c_1(x) f^+(x, k) + c_2(x) f^-(x, k) \quad (3.6)$$

biçiminde bir çözümünü arayalım.

$$y_1'(x, k) = c_1'(x) f^+(x, k) + c_2'(x) f^-(x, k) + c_1(x) f^{+'}(x, k) + c_2(x) f^{-'}(x, k)$$

yazabiliriz. Şimdi

$$c_1'(x) f^+(x, k) + c_2'(x) f^-(x, k) = 0 \quad (3.7)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$y_1'(x, k) = c_1(x) f^{+'}(x, k) + c_2(x) f^{-'}(x, k)$$

ve

$$y_1''(x, k) = c_1'(x) f^{+'}(x, k) + c_2'(x) f^{-'}(x, k) + c_1(x) f^{+''}(x, k) + c_2(x) f^{-''}(x, k)$$

olur. Son eşitlik (3.5) denkleminde dikkate alınırsa,

$$c_1'(x) f^{+'}(x, k) + c_2'(x) f^{-'}(x, k) = f(x) \quad (3.8)$$

bulunur. (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden de aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$c_1'(x) f^+(x, k) + c_2'(x) f^-(x, k) = 0 \quad (3.9)$$

$$c_1'(x) f^{+'}(x, k) + c_2'(x) f^{-'}(x, k) = f(x).$$

(3.9) sisteminin çözümünden

$$c_1'(x) = -\frac{f(x) f^-(x, k)}{D_+(k)}$$

ve

$$c_2'(x) = \frac{f(x) f^+(x, k)}{D_+(k)}$$

olur. Buradan,

$$c_1(x) = \frac{1}{D_+(k)} \int_{-\infty}^x f(t) f^-(t, k) dt + c_1(-\infty) \quad (3.10)$$

$$c_2(x) = \frac{1}{D_+(k)} \int_x^{\infty} f(t) f^+(t, k) dt + c_2(\infty) \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.6) ile tanımlanan $y_1(x, k)$ çözümünün $L_2(-\infty, \infty)$ da olması için $c_1(-\infty) = 0$, $c_2(\infty) = 0$ olması gerekir. Bu durumda (3.10) ve (3.11) eşitlikleri

$$c_1(x) = \frac{1}{D_+(k)} \int_{-\infty}^x f(t) f^-(t, k) dt \quad (3.12)$$

$$c_2(x) = \frac{1}{D_+(k)} \int_x^{\infty} f(t) f^+(t, k) dt$$

şeklini alır. (3.12) ile gösterilen ifadeler (3.6) denkleminde dikkate alınırsa

$$y_1(x, k) = \frac{f^+(x, k)}{D_+(k)} \int_{-\infty}^x f(t) f^-(t, k) dt + \frac{f^-(x, k)}{D_+(k)} \int_x^{\infty} f(t) f^+(t, k) dt$$

eşitliği ve buradan da

$$y_1(x, k) = \frac{1}{D_+(k)} \int_{-\infty}^x f(t) f^-(t, k) f^+(x, k) dt + \frac{1}{D_+(k)} \int_x^{\infty} f(t) f^-(x, k) f^+(t, k) dt \quad (3.13)$$

elde edilir.

$$R^+(x, t; k) = \frac{1}{D_+(k)} \begin{cases} f^-(t, k) f^+(x, k), & -\infty < t < x \\ f^-(x, k) f^+(t, k), & x < t < \infty \end{cases}$$

alırsak (3.13) eşitliği

$$y_1(x, k) = \int_{-\infty}^{\infty} R^+(x, k; t) f(t) dt \quad (3.14)$$

şekline dönüşür.

Benzer şekilde,

$$R^-(x, t; k) = \frac{1}{D_-(k)} \begin{cases} g^-(t, k) g^+(x, k), & -\infty < t < x \\ g^-(x, k) g^+(t, k), & x < t < \infty \end{cases}$$

alırsak

$$y_2(x, k) = \int_{-\infty}^{\infty} R^-(x, k; t) f(t) dt \quad (3.15)$$

elde edilir. Buradan

$$R(x, t; k) = \begin{cases} R^+(x, t; k); & k \in \rho^+(L) \\ R^-(x, t; k); & k \in \rho^-(L) \end{cases}$$

tanımı yapılırsa

$$(R_k f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t; k) f(t) dt$$

yazılabilir.

Teorem 3.2.2:

$$\|R_k^+\| \geq \frac{a_k}{|D_+(k)|\sqrt{\operatorname{Im} k}} \quad (3.16)$$

eşitsizliği $\operatorname{Im} k > 0$ koşuluna uygun her bir k için $|k| \geq \delta$ bölgesinde gerçekleşecek şekilde bir $a_k > 0$ sayısı vardır.

Özel olarak, k resolvent cümleinin elemanı olmak üzere $k \rightarrow k_0 \in (-\infty, \infty)$ ise bu durumda

$$\|R_k^+\| \rightarrow \infty$$

olur.

İspat:

$$g_b(t) = \begin{cases} \overline{f^-(t, k)} & -\infty < t < b \\ 0 & b < t < \infty \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_b(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^b |f^-(x, k)|^2 dx < \infty$$

olduğundan

$$g_b(\cdot) \in L_2(-\infty, \infty)$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} (R_k^+ g_b)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} R^+(x, t; k) g_b(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^b R^+(x, t; k) \overline{f^-(t, k)} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$$R^+(x, t; k) = \frac{1}{D_+(k)} \begin{cases} f^-(t, k) f^+(x, k), & -\infty < t < x \\ f^-(x, k) f^+(t, k), & x < t < \infty \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (R_k^+ g_b)(x) &= \int_{-\infty}^b R^+(x, t; k) \overline{f^-(t, k)} dt \\ &= \frac{f^+(x, k)}{D_+(k)} \int_{-\infty}^b |f^-(t, k)|^2 dt \\ &= \frac{f^+(x, k)}{D_+(k)} \|g_b\|^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$f^+(x, k) = e^{ikx} + o(1), \quad k \rightarrow \infty$$

olduğundan

$$|f^+(x, k)| > \frac{1}{2} e^{-Imkx}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \int_b^\infty |f^+(x, k)|^2 dx &\geq \frac{1}{4} \int_b^\infty e^{-2xImk} dx \\ &= \frac{-1}{8Imk} e^{-2xImk} \Big|_b^\infty \\ &= \frac{-1}{8Imk} e^{-2bImk} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\|R_k^+ g_b\|^2 \geq \frac{\|g_b\|^2}{|D_+(k)|^2} \frac{1}{8Imk} e^{-2bImk}$$

eşitsizliğinden,

$$a_k = \frac{\sqrt{\|g_b\|^2} e^{-bImk}}{2\sqrt{2}}$$

olmak üzere

$$\|R_k^+ g_b\| \geq \frac{a_k}{|D_+(k)|\sqrt{Imk}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3:

$$\|R_k^-\| \geq \frac{d_k}{|D_-(k)|\sqrt{|Imk|}} \quad (3.17)$$

eşitsizliği $Im k < 0$ koşuluna uygun her bir k için $|k| \geq \delta$ bölgesinde gerçekleşecek şekilde bir $d_k > 0$ sayısı vardır.

Özel olarak, k resolvent cümlelerinin elemanı olmak üzere ve $k \rightarrow k_0 \in (-\infty, \infty)$ ise bu durumda

$$\|R_k^-\| \rightarrow \infty$$

olur.

İspat:

Teorem 3.2.2 ye benzer yolla yapılır.

Teorem 3.2.4:

$$\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$$

dir.

İspat:

$(-\infty, \infty) \subset \sigma_c(L)$ olduğu açıktır. $k \in (-\infty, \infty)$ için $R_k(L)$ vardır ve sınırsızdır. $\forall k \in (-\infty, \infty)$ için

$$\overline{D(R_k(L))} = L_2(-\infty, \infty) \quad (3.18)$$

olduğu gösterilirse, bu durumda teorem ispatlanmış olur. (3.18) eşitliğini ispatlamak için

$$\overline{R(L - kI)} = L_2(-\infty, \infty) \quad (3.19)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$L_2(-\infty, \infty) = \overline{R(L - kI)} \oplus \overline{N(L^* - kI)}$$

şeklindedir. $N(L^* - kI)$ cümlesi $L^* - kI$ operatörünün çekirdeğidir. L^* ise L operatörünün adjointidir. (3.19) u ispat etmek için

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.20)$$

sınırdeğer probleminin çözümünün var olduğunu göstermek gerekir. (3.20) ile gösterilen operatörün $\mathbb{R}$ de özdeğeri olmadığından

$$N(L^* - kI) = \{0\}$$

olur. O halde,

$$\overline{D(R_k(L))} = L_2(-\infty, \infty)$$

elde edilir, buradan da

$$\sigma_c(L) = (-\infty, \infty)$$

bulunur.

Teorem 3.2.5:

$$\sigma_{ss}(L) = \{k : k \in \mathbb{R}^*, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{R}^*, D_-(k) = 0\}$$

dır.

İspat:

Resolventin tanımından $D_+(k)$ ve $D_-(k)$ fonksiyonlarının reel eksendeki sıfırlarının, resolventin çekirdeğinin kutupları olduğu aşıkardır. Bu sıfırlar sürekli spektrum üzerindedirler. $D_-(k_0) = 0$ ve $Im k_0 = 0$ ise (2.2) nin temel çözümler sistemi $f^-(x, k_0), g^-(x, k_0)$ dır. (2.2) nin keyfi $y(x, k_0)$ çözümü

$$y(x, k_0) = c_1 f^-(x, k_0) + c_2 g^-(x, k_0)$$

dır. Bu eşitlikten aşağıdaki asimptotik eşitlik elde edilir:

$$y(x, k_0) = c_1 e^{-ik_0 x} + c_2 e^{ik_0 x} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$

$y(., k_0) \in L_2(-\infty, \infty)$ olması için $c_1 = c_2 = 0$ olmalıdır. O halde $y(x, k_0) \equiv 0$ 'dır. Buradan $k_0 \in \sigma_{ss}(L)$ bulunur.

Benzer şekilde $D_+(k_0) = 0$ ve $Im k_0 = 0$ ise, bu durumda $k_0 \in \sigma_{ss}(L)$ olur.

Sonuç 3.2.6:

L operatörü için

$$\begin{aligned} \sigma_c(L) &= (-\infty, \infty) \\ \sigma_d(L) &= \{k : k \in \mathbb{C}_+, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{C}_-, D_-(k) = 0\} \\ \sigma_{ss}(L) &= \{k : k \in \mathbb{R}^*, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{R}^*, D_-(k) = 0\} \end{aligned}$$

dir.

3.3. L Operatörünün Özdeğerlerinin ve Spektral Tekilliklerinin Yapısı:

Sonuç 3.2.6 ya göre, L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısının incelenmesi için, D_+ nın $\overline{\mathbb{C}}_+$ daki, D_- nin $\overline{\mathbb{C}}_-$ deki sıfırlarının yapısı incelenmelidir.

Teorem 3.3.1:

(2.1) koşulları altında, $D_+(k)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli, ve $D_+(k)$ fonksiyonu

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt \quad (3.21)$$

gösterimine sahiptir. Burada α ve β sabitleri,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)dt, \quad \alpha^+(0) = \int_0^{\infty} Q(t)dt, \quad \alpha^-(0) = \int_{-\infty}^0 Q(t)dt,$$

$$\beta = 2F^-(0,0)e^{i\alpha^+(0)} + 2F^+(0,0)e^{i\alpha^-(0)} + 2iQ(0)e^{i\alpha}$$

ile ve $\psi \in L_1(-\infty, 0)$ fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} \psi(t) = & F^-(0,0)F^+(0,-t) - F^+(0,0)F^-(0,t) + e^{i\alpha^+(0)}F^-_x(0,t) \\ & - e^{i\alpha^-(0)}F^+_x(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^-(0)}F^+(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^+(0)}F^-(0,t) \\ & + e^{i\alpha^-(0)}F^+_t(0,-t) - e^{i\alpha^+(0)}F^-_t(0,t) \\ & - (F^-_x * F^+)(t) - (F^- * F^+_x)(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

ile verilir. Burada $*$ ile konvolüsyon gösterilmiştir.

İspat:

$D_+(k)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} D_+(k) &= -2ikb(k) \\ &= W[f^+(x,k), f^-(x,k)] \\ &= f^+(0,k)f^-(0,k) - f^+_x(0,k)f^-(0,k) \end{aligned} \quad (3.23)$$

yazılabilir. (2.3), (2.4) ve (3.23) den;

$$\begin{aligned} D_+(k) &= [e^{i\int_0^{\infty} Q(t)dt} + \int_0^{\infty} F^+(0,t)e^{ikt}dt] \cdot [i(Q(0) - k)e^{i\int_{-\infty}^0 Q(t)dt} + F^-(0,0) \\ &+ \int_{-\infty}^0 F^-_x(0,t)e^{-ikt}dt] - [i(-Q(0) + k)e^{i\int_0^{\infty} Q(t)dt} - F^+(0,0) \\ &+ \int_0^{\infty} F^+_x(0,t)e^{ikt}dt] \cdot [e^{i\int_{-\infty}^0 Q(t)dt} + \int_{-\infty}^0 F^-(0,t)e^{-ikt}dt] \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned}
D_+(k) = & i(Q(0) - k)e^{i \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)dt} + F^-(0,0)e^{i \int_0^{\infty} Q(t)dt} + e^{i \int_0^{\infty} Q(t)dt} \\
& \int_{-\infty}^0 F^-_x(0,t)e^{-ikt}dt + iQ(0)e^{i \int_{-\infty}^0 Q(t)dt} \int_0^{\infty} F^+(0,t)e^{ikt}dt \\
& - ike^{i \int_{-\infty}^0 Q(t)dt} \int_0^{\infty} F^+(0,t)e^{ikt}dt + F^-(0,0) \int_0^{\infty} F^+(0,t)e^{ikt}dt \\
& + \int_0^{\infty} F^+(0,t)e^{ikt}dt \int_{-\infty}^0 F^-_x(0,t)e^{-ikt}dt - i(-Q(0) + k)e^{i \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)dt} \\
& + F^+(0,0)e^{i \int_{-\infty}^0 Q(t)dt} - e^{i \int_{-\infty}^0 Q(t)dt} \int_0^{\infty} F^+_x(0,t)e^{ikt}dt \\
& + iQ(0)e^{i \int_0^{\infty} Q(t)dt} \int_{-\infty}^0 F^-(0,t)e^{-ikt}dt - ike^{i \int_0^{\infty} Q(t)dt} \\
& \int_{-\infty}^0 F^-(0,t)e^{-ikt}dt - F^+(0,0) \int_{-\infty}^0 F^-(0,t)e^{-ikt}dt \\
& - \int_0^{\infty} F^+_x(0,t)e^{ikt}dt \int_{-\infty}^0 F^-(0,t)e^{-ikt}dt
\end{aligned}$$

olur. Sonuncu eşitlikten

$$\begin{aligned}
D_+(k) = & -2ike^{i\alpha} + 2F^-(0,0)e^{i\alpha^+(0)} + 2F^+(0,0)e^{i\alpha^-(0)} + 2iQ(0)e^{i\alpha} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} [F^-(0,0)F^+(0,-t) - F^+(0,0)F^-(0,t) + e^{i\alpha^+(0)}F^-_x(0,t) \\
& - e^{i\alpha^-(0)}F^+_x(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^-(0)}F^+(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^+(0)}F^-(0,t) \\
& + e^{i\alpha^-(0)}F^+_t(0,-t) - e^{i\alpha^+(0)}F^-_t(0,t) \\
& + (F^-_x * F^+)(t) - (F^- * F^+_x)(t)]e^{-ikt}dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t)dt, \quad \alpha^+(0) = \int_0^{\infty} Q(t)dt, \quad \alpha^-(0) = \int_{-\infty}^0 Q(t)dt,$$

$$\beta = 2F^-(0,0)e^{i\alpha^+(0)} + 2F^+(0,0)e^{i\alpha^-(0)} + 2iQ(0)e^{i\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned}
\psi(t) = & F^-(0,0)F^+(0,-t) - F^+(0,0)F^-(0,t) + e^{i\alpha^+(0)}F^-_x(0,t) \\
& - e^{i\alpha^-(0)}F^+_x(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^-(0)}F^+(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^+(0)}F^-(0,t) \\
& + e^{i\alpha^-(0)}F^+_t(0,-t) - e^{i\alpha^+(0)}F^-_t(0,t) \\
& + (F^-_x * F^+)(t) - (F^- * F^+_x)(t)
\end{aligned}$$

alnırsa (3.22) elde edilmiş olur. O halde,

$$D_+(k) = -2ik e^{i\alpha} + \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-ikt} dt$$

olup (2.7), (2.8) ve (3.22) den $\psi \in L_1(-\infty, 0)$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.2:

(2.1) koşulları altında, $D_-(k)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_-$ da süreklidir, ve $D_-(k)$ fonksiyonu

$$D_-(k) = 2ik e^{-i\alpha} + \gamma + \int_0^\infty \varphi(t) e^{-ikt} dt \quad (3.24)$$

gösterimine sahiptir. Burada α ve γ sabitleri

$$\alpha = \int_{-\infty}^\infty Q(t) dt, \quad \alpha^+(0) = \int_0^\infty Q(t) dt, \quad \alpha^-(0) = \int_{-\infty}^0 Q(t) dt,$$

$$\gamma = 2G^-(0,0)e^{-i\alpha^+(0)} + 2G^+(0,0)e^{-i\alpha^-(0)} - 2iQ(0)e^{-i\alpha}$$

ile ve $\varphi \in L_1(0, \infty)$ fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = & G^-(0,0)G^+(0,t) + G^+(0,0)G^-(0,-t) + e^{-i\alpha^+(0)}G^-_x(0,-t) \\
& - e^{-i\alpha^-(0)}G^+_x(0,t) - iQ(0)e^{-i\alpha^-(0)}G^+(0,t) - iQ(0)e^{-i\alpha^+(0)}G^-(0,-t) \\
& + e^{-i\alpha^-(0)}G^+_t(0,t) - e^{-i\alpha^+(0)}G^-_t(0,-t) \\
& - (G^+_x * G^-)(t) - (G^+ * G^-_x)(t)
\end{aligned}$$

ile verilir.

İspat:

Teorem 3.3.1 e benzer yolla yapılır.

$$I_1^\pm = \{k : k \in \mathbb{C}_\pm, D_\pm(k) = 0\}, \quad I_2^\pm = \{k : k \in \mathbb{R}, D_\pm(k) = 0\}$$

cümlelerini tanımlayalım. Buna göre

$$\sigma_d(L) = I_1^+ \cup I_1^-$$

ve

$$\sigma_{ss}(L) = \{I_2^+ \cup I_2^-\} \setminus \{0\}$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.3.3:

$D_+(k)$ fonksiyonu için

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + o(1), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad |k| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşir.

İspat:

(3.21) e göre

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt, \quad \text{Im } k \geq 0$$

dır. İspat için

$$\int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt \rightarrow o(1)$$

olduğunun gösterilmesi gerekiyor:

(a) $\text{Im } k = 0$ olsun. $\psi(t) \in L_1(-\infty, 0)$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt$$

integraline $\psi(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. Riemann-Lebesgue Teoremine göre

$$\int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt \rightarrow o(1)$$

olur. O halde

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + o(1), \quad \text{Im } k = 0, \quad |k| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşir.

(b) $Im\ k > 0$ olsun. Bu durumda Lebesgue Teoremine göre, integral altında limite geçerek

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + o(1), \quad Im\ k > 0, \quad |k| \rightarrow \infty$$

bulunur. (a) ve (b) den teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 3.3.4:

$D_-(k)$ fonksiyonu için

$$D_-(k) = 2ike^{-i\alpha} + \gamma + o(1), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_-, \quad |k| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşir.

İspat:

Teorem 3.3.3 e benzer yolla yapılır.

Teorem 3.3.5:

(2.1) koşulları gerçekleştiğinde,

(i) L operatörünün özdeğerleri sayılabilir sayıda olup, kompleks düzlemin sınırlı bir bölgesindedir ve limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığındadır.

(ii) L operatörünün spektral tekillikleri cümlesi kompakt olup lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

(iii) $k_n^+ \in I_1^+$ ve $k_n^- \in I_1^-$ iken

$$\sum_n Im\ k_n^+ < \infty, \quad \sum_n |Im\ k_n^-| < \infty \quad (3.25)$$

dir. (3.25) de D_+ (ya da D_-) nin çok katlı sıfırları, bu sıfırların katı kadar kullanılmıştır.

İspat:

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt, \quad Im\ k \geq 0$$

ve

$$D_-(k) = 2ike^{-i\alpha} + \gamma + \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-ikt} dt, \quad Im\ k \leq 0$$

olduğu Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 den biliniyor.

(i)

$$\begin{aligned} E_1 &= I_1^+ \cup I_1^- \\ &= \{k : k \in \mathbb{C}_+, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{C}_-, D_-(k) = 0\} \end{aligned}$$

olsun. D_+ , $\mathbb{C}_+$ üzerinde ve D_- , $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik olduğundan E_1 in elemanları sayılabilir sayıdadır. Analitik fonksiyonların tekliği nedeniyle, Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.4 den E_1 in limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığındadır. Sonuç olarak, L operatörünün özdeğerleri sayılabilir sayıda olup, kompleks düzlemin sınırlı bir bölgesindedir ve limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığındadır.

(ii)

$$\begin{aligned} E_2 &= \{I_2^+ \cup I_2^-\} \setminus \{0\} \\ &= \{k : k \in \mathbb{R}^*, D_+(k) = 0\} \cup \{k : k \in \mathbb{R}^*, D_-(k) = 0\} \end{aligned}$$

olsun. Burada $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ dir.

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt$$

olduğu Teorem 3.3.1 den biliniyor. Teorem 3.3.3 den

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + o(1), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad |k| \rightarrow \infty$$

dir. Buradan $D_+(k)$ fonksiyonunun sıfırlarının sınırlı bir bölgede olması gerektiği sonucu elde edilir. Dolayısıyla I_2^+ cümlesi sınırlıdır. Şimdi de I_2^+ cümlesinin kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için I_2^+ cümlesinden alınan bir dizinin limit noktasının yine I_2^+ cümlesine ait olduğu gösterilmelidir. $(k_m) \in I_2^+$,

$$D_+(k_m) = 0, \quad k_m \rightarrow k_0, \quad m \rightarrow \infty$$

koşullarını gerçekleyen, her hangi bir dizi olsun. $k_0 \in I_2^+$ olduğu gösterilmelidir. $D_+(k_m)$ fonksiyonunun $\text{Im } k \geq 0$ bölgesinde analitik ve sınırda sürekli olmasından dolayı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_+(k_m) = D_+(\lim_{m \rightarrow \infty} (k_m)) = D_+(k_0) = 0$$

dir. Buradan k_0 noktasının $D_+(k)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu ortaya çıkar. Eğer bir fonksiyonun sıfırları analitiklik bölgesinin içinde yer alıyorsa, o fonksiyon tanımlanan bölgede özdeş olarak sıfırdır. Buradan,

$$k_0 \in I_2^+$$

elde edilir. Bu ise

$$I_2^+ = \overline{I_2^+}$$

sonucunu verir. O halde, I_2^+ cümlesi kapalıdır. Buna göre, I_2^+ cümlesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

$D_+(k)$ fonksiyonu açık üstdüzlemde analitiktir. I_2^+ cümlesi ise $D_+(k)$ nın reel sıfırlar cümlesidir. $D_+(k)$ fonksiyonunun sıfırları analitiklik bölgesinin içinde yer almadığı için $D_+(k) \neq 0$ dır. Bu ise Privalov Teoremi'ne göre

$$\mu(I_2^+) = 0$$

olması demektir.

I_2^+ için elde edilen sonuçlar I_2^- için de vardır. Bu sonuçlara göre E_2 cümlesi kompakt ve lineer Lebesgue ölçüsü sıfırdır, yani

$$\mu(E_2) = 0$$

dır.

(iii)

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + o(1), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad |k| \rightarrow \infty$$

olduğu Teorem 3.3.3 den biliniyor. Bu ise $D_+(k)$ nın açık üst düzlemdeki sıfırlarının sınırlı bir P bölgesinde yer aldığını gösterir. Bu sıfırları

$$k_n^+, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile gösterelim. $D_+(k)$ fonksiyonu, P bölgesinde sınırlı analitik fonksiyon olduğundan Nevanlina Faktörizasyon Teoremine göre

$$D_+(k) = g(k).B(k), \quad \forall k \in P$$

ile gösterilir. Burada B Blaschke çarpımı, g ise P bölgesinin iç fonksiyonudur, yani

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in P$$

dir.

B Blaschke çarpımı ise

$$B(k) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k - k_n^+}{k - \overline{k_n^+}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile gösterilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} B(k) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k - \overline{k_n^+} + \overline{k_n^+} - k_n^+}{k - \overline{k_n^+}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2Im \, k_n^+}{k - \overline{k_n^+}} \right\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Blaschke çarpımının tanımından P bölgesinde (3.26) ile verilen sonsuz çarpımın mutlak yakınsak olduğu açıktır. O halde

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Im k_n^+}{|k - \overline{k_n^+}|} < \infty \quad (3.27)$$

olmalıdır.

$$k \in P \implies |k - \overline{k_n}| \geq \epsilon \quad (3.28)$$

olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı her zaman bulunur. (3.27) ve (3.28) den

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Im k_n^+}{|k - \overline{k_n^+}|} \leq \frac{2}{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} Im k_n^+ < \infty$$

elde edilir. O halde

$$\sum_n Im k_n^+ < \infty$$

dır.

$$\sum_n |Im k_n^-| < \infty$$

olduğu da benzer yolla gösterilir.

Teorem 3.3.6:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^l |Q'(x)| dx < \infty, \quad l = 0, 1, 2 \quad (3.29)$$

koşulları altında D_+ ve D_- fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilir ve

$$\sum_m |l_m^+| \ln \frac{1}{|l_m^+|} < \infty, \quad \sum_m |l_m^-| \ln \frac{1}{|l_m^-|} < \infty \quad (3.30)$$

dur. Burada $|l_m^+|$ ve $|l_m^-|$, I_2^+ ve I_2^- nin sınırlı tamamlayıcı aralıklarının uzunluklarıdır.

İspat:

(3.30) un ispat edilmesi için Beurling Birebirlik Teoremi kullanılmalıdır.

g fonksiyonu $|z| \leq 1$ birim küresinde analitik, sınıra kadar sürekli olsun ve sınırda Hölder koşulunu gerçeklesin. Eğer g fonksiyonu Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir $F \subset [0, 2\pi]$ cümlesinde sıfır ise ve

$$\sum_m |l_m^+| \ln \frac{1}{|l_m^+|} = \infty$$

koşulu gerçekleşiyorsa $g(z) \equiv 0$ olmak zorundadır. Bu teoremi kullanmak için konform dönüşüm yardımı ile $Im\ k \geq 0$ bölgesi $|z| \leq 1$ küresine dönüştürülsün. Reel eksen $|z| = 1$ çemberine, I_2^+ cümlesi F cümlesine dönüştürülsün. Ayrıca $D_+(k)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonu olarak ele alınsın. Bu durumda $g(z)$ fonksiyonu Beurling Bircbirlik Teoreminin koşullarını gerçeklemektedir. Çünkü $D_+'(k)$ sınırda tanımlıdır. Eğer,

$$\sum_m |l_m^+| \ln \frac{1}{|l_m^+|} = \infty$$

sağlanırsa

$$g(z) \equiv 0$$

elde edilir. Bu ise $D_+(k) \equiv 0$ olması demektir. Ancak $D_+(k)$ fonksiyonu $Im\ k \geq 0$ yarıdüzleminde özdeş olarak sıfır olamayacağından

$$\sum_m |l_m^+| \ln \frac{1}{|l_m^+|} < \infty$$

elde edilir.

$$\sum_m |l_m^-| \ln \frac{1}{|l_m^-|} < \infty$$

oluşu da benzer yolla ispatlanır.

Teorem 3.3.7:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^l |Q'(x)| dx < \infty, \quad l \in N \quad (3.31)$$

olsun. Bu durumda D_+ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik ve D_+ nın her basamaktan türevleri $\overline{\mathbb{C}}_+$ üzerinde süreklidir. Ve

$$(i) \quad \sup_{k \in \overline{\mathbb{C}}_+} |D_+(k) + 2ike^{i\alpha}| < \infty,$$

$$(ii) \quad \sup_{k \in \overline{\mathbb{C}}_+} \left| \frac{d}{dk} D_+(k) \right| < \infty,$$

$$(iii) \quad \left| \frac{d^n}{dk^n} D_+(k) \right| \leq T_n^+, \quad n \geq 2$$

dir. Burada,

$$T_n^+ = c \int_{-\infty}^{\infty} 2^{n+1} [|t|^{n+1} + |t|^n] [2|Q(t)| + |Q'(t)|] dt$$

olup c pozitif bir sabittir.

İspat:

Teoremin ispatında (2.7), (2.8), (3.21), (3.23) ve (3.31) i kullanacağız.

(i) (3.21) eşitliğini

$$D_+(k) + 2ike^{i\alpha} = \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt, \quad \text{Im } k \geq 0$$

olarak yazalım. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned} |D_+(k) + 2ike^{i\alpha}| &= |\beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt| \\ &\leq |\beta| + \int_{-\infty}^0 |\psi(t)|e^{\text{Im } kt} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$|\beta| < \infty$ ve $\psi(t) \in L_1(-\infty, 0)$ olduğundan $\text{Im } k \geq 0$ da $|k| \rightarrow \infty$ iken

$$\int_{-\infty}^0 |\psi(t)|e^{\text{Im } kt} dt \rightarrow 0$$

olur. O halde

$$\sup_{k \in \bar{\mathbb{C}}_+} |D_+(k) + 2ike^{i\alpha}| < \infty$$

elde edilir.

(ii) $D_+(k)$ fonksiyonunun k ya göre birinci basamaktan türevi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} D_+(k) &= \frac{d}{dk} \left\{ -2ike^{i\alpha} + \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t)e^{-ikt} dt \right\} \\ &= -2ie^{i\alpha} + \int_{-\infty}^0 (-it) [F^-(0, 0)F^+(0, -t) - F^+(0, 0)F^-(0, t) \\ &\quad + e^{i\alpha^+(0)} F^-_x(0, t) - e^{i\alpha^-(0)} F^+_x(0, -t) + iQ(0)e^{i\alpha^-(0)} \\ &\quad F^+(0, -t) + iQ(0)e^{i\alpha^+(0)} F^-(0, t) + e^{i\alpha^-(0)} F^+_t(0, -t) \\ &\quad - e^{i\alpha^+(0)} F^-_t(0, t)] e^{-ikt} dt + \frac{d}{dk} \left\{ \int_{-\infty}^0 (F^-_x * F^+)(t) e^{-ikt} dt \right\} \\ &\quad - \frac{d}{dk} \left\{ \int_{-\infty}^0 (F^- * F^+_x)(t) e^{-ikt} dt \right\} \end{aligned}$$

dir. Burada konvolüsyonlu terimler yerine, Fourier dönüşüm çarpımlarını

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (F^-_x * F^+)(t) e^{-ikt} dt &= \int_{-\infty}^0 F^+(0, -t) e^{-ikt} dt \int_{-\infty}^0 F^-_x(0, t) e^{-ikt} dt \\ \int_{-\infty}^0 (F^- * F^+_x)(t) e^{-ikt} dt &= \int_{-\infty}^0 F^+_x(0, -t) e^{-ikt} dt \int_{-\infty}^0 F^-(0, t) e^{-ikt} dt \end{aligned}$$

olarak yazalım.

$$\begin{aligned}
R(t) = & F^-(0,0)F^+(0,-t) - F^+(0,0)F^-(0,t) + e^{i\alpha^+(0)}F^-_x(0,t) \\
& - e^{i\alpha^-(0)}F^+_x(0,-t) + iQ(0)e^{i\alpha^-(0)}F^+(0,-t) \\
& + iQ(0)e^{i\alpha^+(0)}F^-(0,t) + e^{i\alpha^-(0)}F^+_t(0,-t) \\
& - e^{i\alpha^+(0)}F^-_t(0,t)
\end{aligned}$$

diyelim. Şimdi de $D_+(k)$ fonksiyonunun k ya göre birinci basamaktan türevinin mutlak değerini alırsak:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dk} D_+(k) \right| & \leq 2|e^{i\alpha}| + \int_{-\infty}^0 |t| |R(t)| e^{Imkt} dt \\
& + \sum_{m=0}^1 \binom{1}{m} \int_{-\infty}^0 |t|^{1-m} |F^+(0,-t)| e^{Imkt} dt \int_{-\infty}^0 |t|^m |F^-_x(0,t)| e^{Imkt} dt \\
& + \sum_{m=0}^1 \binom{1}{m} \int_{-\infty}^0 |t|^{1-m} |F^+_x(0,-t)| e^{Imkt} dt \int_{-\infty}^0 |t|^m |F^-(0,t)| e^{Imkt} dt \\
& = 2|e^{i\alpha}| + \int_{-\infty}^0 |t| |R(t)| e^{Imkt} dt \\
& + \binom{1}{0} \int_{-\infty}^0 |t| |F^+(0,-t)| e^{Imkt} dt \int_{-\infty}^0 |F^-_x(0,t)| e^{Imkt} dt \\
& + \binom{1}{1} \int_{-\infty}^0 |F^+(0,-t)| e^{Imkt} dt \int_{-\infty}^0 |t| |F^-_x(0,t)| e^{Imkt} dt \\
& + \binom{1}{0} \int_{-\infty}^0 |t| |F^+_x(0,-t)| e^{Imkt} dt \int_{-\infty}^0 |F^-(0,t)| e^{Imkt} dt \\
& + \binom{1}{1} \int_{-\infty}^0 |F^+_x(0,-t)| e^{Imkt} dt \int_{-\infty}^0 |t| |F^-(0,t)| e^{Imkt} dt < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\sup_{k \in \mathbb{C}_+} \left| \frac{d}{dk} D_+(k) \right| < \infty$$

dır.

(iii) $D_+(k)$ fonksiyonunun k ya göre n inci basamaktan türevi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^n}{dk^n} D_+(k) \right| & \leq \left| \int_{-\infty}^0 (-it)^n R(t) e^{Imkt} dt \right| + \left| \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^0 (F^-_x * F^+)(t) e^{-ikt} dt \right| \\
& + \left| \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^0 (F^- * F^+_x)(t) e^{-ikt} dt \right|
\end{aligned}$$

dir. Burada sadece konvolüsyonlu terimlerin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. $R(t)$ ile ifade edilen toplamların yakınsak olduğu açıktır. Konvolüsyonlu ikinci terim yerine, Fourier dönüşüm çarpımını

$$\int_{-\infty}^0 (F^- * F^+_x)(t)e^{-ikt} dt = \int_{-\infty}^0 F^+_x(0, -t)e^{-ikt} dt \int_{-\infty}^0 F^-(0, t)e^{-ikt} dt$$

şeklinde yazalım. Eşitliğin k ya göre n inci basamaktan türevini hesaplayıp mutlak değerini alırsak

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^0 (F^- * F^+_x)(t)e^{-ikt} dt \right| &= \left| \frac{d^n}{dk^n} \left\{ \int_{-\infty}^0 F^+_x(0, -t)e^{-ikt} dt \int_{-\infty}^0 F^-(0, t)e^{-ikt} dt \right\} \right| \\ &= \left| \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^{n-m} \int_{-\infty}^0 F^+_x(0, -t)e^{-ikt} dt \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial k} \right)^m \int_{-\infty}^0 F^-(0, t)e^{-ikt} dt \right\} \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \int_{-\infty}^0 |t|^{n-m} |F^+_x(0, -t)| dt \int_{-\infty}^0 |t|^m |F^-(0, t)| dt \\ &\leq c \left\{ \binom{n}{0} \int_{-\infty}^0 |t|^n |F^+_x(0, -t)| dt \int_{-\infty}^0 |F^-(0, t)| dt \right. \\ &\quad + \binom{n}{1} \int_{-\infty}^0 |t|^{n-1} |F^+_x(0, -t)| dt \int_{-\infty}^0 |t| |F^-(0, t)| dt + \dots + \\ &\quad + \binom{n}{n-1} \int_{-\infty}^0 |t| |F^+_x(0, -t)| dt \int_{-\infty}^0 |t|^{n-1} |F^-(0, t)| dt \\ &\quad \left. + \binom{n}{n} \int_{-\infty}^0 |F^+_x(0, -t)| dt \int_{-\infty}^0 |t|^n |F^-(0, t)| dt \right\} \infty, \quad c > 0 \end{aligned}$$

olur. Diğer durumlar için de integraller yakınsaktır. O halde,

$$\left| \frac{d^n}{dk^n} D_+(k) \right| \leq T_n^+, \quad n \geq 2$$

elde edilir. Burada

$$T_n^+ = c \int_{-\infty}^{\infty} 2^{n+1} [|t|^{n+1} + |t|^n] [2|Q(t)| + |Q'(t)|] dt$$

ve c pozitif bir sabit olarak elde edilmiştir.

Teorem 3.3.8:

Q fonksiyonu (3.31) koşullarını sağlasın. Bu durumda D_- fonksiyonu $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik ve D_- nın her basamaktan türevleri $\overline{\mathbb{C}}_-$ üzerinde süreklidir. Ve

$$(i) \quad \sup_{k \in \overline{\mathbb{C}}_-} |D_-(k) - 2ike^{-i\alpha}| < \infty,$$

$$(ii) \quad \sup_{k \in \overline{\mathbb{C}}_-} \left| \frac{d}{dk} D_-(k) \right| < \infty,$$

$$(iii) \quad \left| \frac{d^n}{dk^n} D_-(k) \right| \leq T_n^-, \quad n \geq 2$$

dir. Burada,

$$T_n^- = c \int_{-\infty}^{\infty} 2^{n+1} [|t|^{n+1} + |t|^n] [2|Q(t)| + |Q'(t)|] dt$$

ve c pozitif bir sabittir.

İspat:

Teorem 3.3.7 ye benzer yolla yapılır.

$$I_1^\pm = \{k : k \in \mathbb{C}_\pm, D_\pm(k) = 0\} \text{ ve } I_2^\pm = \{k : k \in \mathbb{R}, D_\pm(k) = 0\}$$

cümlelerini tanımlayalım. Bu cümleler dikkate alınarak $I_3^\pm$, $I_1^\pm$ nın, $I_4^\pm$, $I_2^\pm$ nın limit noktalarını ve $I_5^\pm$ da $D_\pm$ nın $\overline{\mathbb{C}}_\pm$ daki sonsuz katlı sıfırlarını gösterebiliriz.

Teorem 3.3.9:

(3.31) koşulu gerçekleştiğinde I_2^+ cümlesi sınırlıdır ve $I_2^+ = \overline{I_2^+}$, $\mu(I_2^+) = 0$, $I_3^+ \subset I_2^+$ ve $I_5^+ \subset I_2^+$ dir.

İspat:

$$D_+(k) + 2ike^{i\alpha} = \beta + \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-ikt} dt$$

olduğu biliniyor. Teorem 3.3.3 den

$$D_+(k) = -2ike^{i\alpha} + \beta + o(1), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k \geq 0$$

dır. Buradan $D_+(k)$ fonksiyonunun sıfırlarının sınırlı bir bölgede olması gerektiği sonucu elde edilir. Dolayısıyla I_2^+ cümlesi sınırlıdır.

Şimdi I_2^+ cümlesinin kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için I_2^+ cümlesinden alınan bir dizinin limit noktasının yine I_2^+ cümlesine ait olduğu gösterilmelidir. $(k_m) \in I_2^+$,

$$D_+(k_m) = 0, \quad k_m \rightarrow k_0, \quad m \rightarrow \infty$$

koşullarını gerçekleyen her hangi bir dizi olsun. $k_0 \in I_2^+$ olduğu gösterilmelidir. $D_+(k_m)$ fonksiyonunun $Im\ k \geq 0$ bölgesinde analitik ve sınırda sürekli olmasından dolayı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_+(k_m) = D_+(\lim_{m \rightarrow \infty} (k_m)) = D_+(k_0) = 0$$

dır. Buna göre k_0 noktasının $D_+(k)$ fonksiyonunun sıfırı olduğu ortaya çıkar.

Eğer bir fonksiyonun sıfırları analitiklik bölgesinin içinde yer alıyorsa, o fonksiyon tanımlanan bölgede özdeş olarak sıfırdır. Buradan,

$$k_0 \in I_2^+$$

elde edilir. Bu ise

$$I_2^+ = \overline{I_2}^+$$

sonucunu verir.

$I_3^+ \subset I_2^+$ yukarıda yapılan ispatın bir sonucudur.

Şimdi de $I_5^+ \subset I_2^+$ olduğunu gösterelim.

$k_0 \in I_5^+$, $D_+(k)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olsun.

$$D_+^{(n)}(k_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ise k_0 sayısının I_2^+ cümlesinde olduğunu göstermeliyiz. Eğer bir fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitiklik bölgesinin içinde yer alıyorsa, o fonksiyonun verilen bölgede özdeş olarak sıfır olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$k_0 \in I_2^+$$

sonucu elde edilir.

$$\mu(I_2^+) = 0$$

olduğu Privalov Birebirlik Teoreminden aşıkardır.

Teorem 3.3.10:

(3.31) koşulu gerçekleştiğinde I_2^- cümlesi sınırlıdır ve $I_2^- = \overline{I_2}^-$, $\mu(I_2^-) = 0$, $I_3^- \subset I_2^-$ ve $I_5^- \subset I_2^-$ dır.

İspat:

Teorem 3.3.9 a benzer yolla yapılır.

Teorem 3.3.11:

(3.31) koşulları altında

$$(i) \quad I_3^+ \subset I_5^+, \quad I_4^+ \subset I_5^+,$$

$$(ii) \quad \int_0^h \ln(E^+(s)) d\mu(I_{5,s}^+) > -\infty \quad (3.32)$$

dir. Burada $E^+(s) = \inf_n \frac{T_n^+ s^n}{n!}$ dir. $\mu(I_{5,s}^+)$, I_5^+ nın s - komşuluğunun lineer Lebesgue ölçümü ve $h > 0$ dir.

İspat:

(i) (3.31) koşulundan $D_+(k)$ fonksiyonu reel ekseninde sonsuz basamaktan sürekli diferensiyellenebilir. $I_5^+ = \overline{I_5}^+$, $\mu(I_5^+) = 0$, $I_4^+ \subset I_5^+$ ve $I_4^+ \subset I_5^+$ durumu incelenmelidir. I_5^+ nın kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için I_5^+ dan alınan herhangi bir dizinin limit noktasının yine I_5^+ de olduğu göstermeliyiz.

$$(k_m) \in I_5^+,$$

$$D_+^{(n)}(k_m) = 0, \quad k_m \rightarrow k_0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

koşullarını gerçekleyen bir dizi olsun. $k_0 \in I_5^+$ nın bir sonlu katlı sıfır olduğunu kabul edelim. Yani

$$D_+(k_0) = 0, \quad D_+'(k_0) = 0, \dots, \quad D_+^{(n_0-1)}(k_0) = 0, \quad D_+^{(n_0)}(k_0) \neq 0$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı var olsun. Bu durumda,

$$S(k) = \frac{D_+(k)}{(k - k_0)^{n_0}}$$

olarak tanımlayalım.

$$(k_m) \in I_5^+ \text{ olduğundan}$$

$$S(k_m) = 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} S(k_m) = 0 \implies S(k_0) = 0 \quad (3.33)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$D_+(k) = (k - k_0)^{n_0} S(k)$$

ve buradan

$$S(k_0) \neq 0 \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu durumda (3.33) ve (3.34) eşitlikleri arasında bir çelişki görülür-mektedir. O halde k_0 , bir sonlu katlı sıfır olamaz. Yani; k_0 , sonsuz katlı bir sıfırdır.

Teorem 3.3.9 gereğince $I_5^+ \subset I_2^+$ olduğu bilinmektedir. Lebesgue ölçüsü sürekli olduğundan

$$I_5^+ \subset I_2^+ \implies \mu(I_5^+) < \mu(I_2^+)$$

elde edilir. I_2^+ cümlesinin Lebesgue ölçüsünün sıfır olduğu biliniyor. Buradan,

$$\mu(I_5^+) = 0$$

bulunur. $I_3^+ \subset I_5^+$ olduğu aşıkardır. Çünkü, $D_+(k)$ fonksiyonunun her bir limit noktası aynı zamanda sonsuz katlı sıfırı olmak zorundadır.

(ii) (3.32) yi ispatlamak için Pavlov Birebirlik Teoremini kullanacağız.

g fonksiyonu $|z| \leq 1$ birim küresinde analitik ve bütün türevleri sınırda sürekli olsun ve

$$\sup_{|z| \leq 1} |g^{(n)}(z)| \leq A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

gerçeklensin. Bu durumda Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir F cümlesinde $\forall z \in F$ için $g(z) = 0$ ve h pozitif bir sayı olmak üzere

$$\int_0^h \ln E^+(s) d\mu(F, s) = -\infty$$

ise bu durumda g fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır.

Buradan g fonksiyonunun Pavlov Birebirlik Teoremini gerçeklediği görülmektedir. O halde Pavlov'un teoremini kullanmak için $Im \ k \geq 0$ yarıdüzlemi birim daireye konform dönüştürülmelidir. Bu durumda $Im \ k = 0$, $|z| \leq 1$ e, I_5^+ kümesi F ye, $D_+(k)$ fonksiyonu $g(z)$ ye dönüşür. O halde,

$$\int_0^h \ln E^+(s) d\mu(F, s) = -\infty$$

gerçekleniyorsa $|z| \leq 1$ de $g(z) \equiv 0$, yani $Im \ k \geq 0$ da $D_+(k) \equiv 0$ olurdu. Ancak $D_+(k)$ fonksiyonu $Im \ k \geq 0$ kapalı üstdüzlemde özdeş olarak sıfır olmadığından

$$\int_0^h \ln E^+(s) d\mu(I_5, s^+) > -\infty$$

elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 3.3.12:

(3.31) koşulları altında

$$(i) \quad I_3^- \subset I_5^-, \quad I_4^- \subset I_5^-,$$

$$(ii) \quad \int_0^h \ln(E^-(s)) d\mu(I_{5,s}^-) > -\infty$$

dir. Burada $E^-(s) = \inf_n \frac{T_n^-(s^n)}{n!}$ dir. $\mu(I_{5,s}^-)$, I_5^- nin s - komşuluğunun lineer Lebesgue ölçümü ve $h > 0$ dir.

İspat:

Teorem 3.3.11 e benzer yolla yapılır.

Teorem 3.3.13:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \{e^{\epsilon|x|^\delta} |Q'(x)|\} < \infty, \quad \epsilon > 0, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

koşulları gerçekleşirse, bu durumda I_5^+ kümesi

$$\sum_v |l_v^+|^{\frac{1-2\delta}{1-\delta}} < \infty \quad (3.36)$$

koşulunu gerçekler. Burada $\{|l_v^+|\}$, I_5^+ cümlesinin sınırlı tamamlayıcı aralıklarının uzunluklarının dizisidir.

İspat:

Teorem 3.3.7 den,

$$T_n^+ = c \int_{-\infty}^{\infty} 2^{n+1} [|t|^{n+1} + |t|^n] [2|Q(t)| + |Q'(t)|] dt$$

olmak üzere

$$|\frac{d^n}{dk^n} D_+(k)| \leq T_n^+, \quad n \geq 2, \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olduğu bilinmektedir. (3.35) koşullarından, $c > 0$ olmak üzere

$$e^{\epsilon|x|^\delta} |Q'(x)| \leq c \implies |Q'(x)| \leq ce^{-\epsilon|x|^\delta}$$

yazabiliriz. Son eşitsizliğin integrali alınırsa,

$$|Q(x)| = \int_{-\infty}^x |Q'(t)| dt \leq c \int_{-\infty}^x e^{-\epsilon|t|^\delta} dt \leq e^{-\frac{\epsilon}{2}|x|^\delta}$$

ve

$$|Q(x)| = \int_x^{\infty} |Q'(t)| dt \leq c \int_x^{\infty} e^{-\epsilon|t|^\delta} dt \leq e^{-\frac{\epsilon}{2}|x|^\delta}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{e^{\frac{\epsilon}{2}|x|^\delta} |Q(x)|\} < \infty$$

bulunur. (3.35) koşulundan elde edilen sonuçlar T_n^+ eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_n^+ &= c2^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} [|t|^{n+1} + |t|^n][2|Q(t)| + |Q'(t)|] dt \\ &\leq c2^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} [|t|^{n+1} + |t|^n][2e^{-\frac{\epsilon}{2}|t|^\delta} + e^{-\frac{\epsilon}{2}|t|^\delta}] dt \\ &\leq \tilde{c} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{n+1} e^{-\epsilon|\frac{t}{2}|^\delta} dt \end{aligned}$$

olur. Burada c ve $\tilde{c}$ pozitif sayılardır. Şimdi de integrallenen fonksiyonda değişken değiştirme metodunu uygularsak

$$u = \epsilon \frac{|t|^\delta}{2^\delta} \implies \frac{2^\delta u}{\epsilon} = |t|^\delta \implies |t| = 2 \sqrt[\delta]{\frac{u}{\epsilon}} = 2 \frac{u^{1/\delta}}{\epsilon^{1/\delta}}$$

olur. Son eşitlikte t ve u 'ya göre türev alınırsa,

$$\frac{|t|}{t} dt = \frac{2}{\epsilon^{1/\delta}} \frac{1}{\delta} u^{\frac{1}{\delta}-1} du$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} -\infty < t < 0 \quad & iken \quad -dt = \frac{2}{\epsilon^{1/\delta}} \frac{1}{\delta} u^{\frac{1}{\delta}-1} du, \\ 0 < t < \infty \quad & iken \quad dt = \frac{2}{\epsilon^{1/\delta}} \frac{1}{\delta} u^{\frac{1}{\delta}-1} du \end{aligned}$$

dur. O halde,

$$T_n^+ \leq c \left\{ \int_{-\infty}^0 |t|^{n+1} e^{-\epsilon|\frac{t}{2}|^\delta} dt + c \int_0^{\infty} |t|^{n+1} e^{-\epsilon|\frac{t}{2}|^\delta} dt \right\}$$

ve

$$\begin{aligned} T_n^+ &\leq c \left[- \int_{-\infty}^0 \frac{2^{n+1}}{\epsilon^{\frac{n+1}{\delta}}} u^{\frac{n+1}{\delta}} e^{-u} \frac{2}{\epsilon^{1/\delta} \delta} u^{\frac{1}{\delta}-1} du \right] \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\epsilon^{\frac{n+1}{\delta}}} u^{\frac{n+1}{\delta}} e^{-u} \frac{2}{\epsilon^{1/\delta} \delta} u^{\frac{1}{\delta}-1} du \\ &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\epsilon^{\frac{n+1}{\delta}}} u^{\frac{n+1}{\delta}} e^{-u} \frac{2}{\epsilon^{1/\delta} \delta} u^{\frac{1}{\delta}-1} du \end{aligned}$$

olur. İntegrallenen ifade düzenlenirse

$$T_n^+ \leq \frac{c2^2}{\delta \epsilon^{2/\delta}} \frac{2^n}{\epsilon^{n/\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\frac{n+2}{\delta}-1} e^{-u} du$$

elde edilir. Burada, $A = \frac{4c}{\delta \epsilon^{2/\delta}}$ ve $D = \frac{2}{\epsilon^{1/\delta}}$ alırsak

$$\begin{aligned} T_n^+ &\leq A_\delta D_\delta^n \int_{-\infty}^{\infty} u^{\frac{n+2}{\delta}-1} e^{-u} du \\ &= A_\delta D_\delta^n \Gamma\left(\frac{n+2}{\delta}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(\frac{n+2}{\delta})$ Gamma fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+2}{\delta}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{\frac{n+2}{\delta}-1} e^{-u} du \\ &= \left(\frac{n+2}{\delta} - 1\right)\left(\frac{n+2}{\delta} - 2\right) \dots \left(\frac{n+2}{\delta} - (m+1)\right) \int_{-\infty}^{\infty} u^{\frac{n+2}{\delta}-m} e^{-u} du \end{aligned}$$

dir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{\frac{n+2}{\delta}-m} e^{-u} du = c$$

olsun. Diğer taraftan

$$\frac{n+2}{\delta} - m - 1 < 0 \implies \frac{n+2}{\delta} - m < 1,$$

ve

$$\frac{n+2}{\delta} - m > 0$$

dır. Böylece

$$0 < \frac{n+2}{\delta} - m < 1$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+2}{\delta}\right) &= \left(\frac{n+2}{\delta} - 1\right)\left(\frac{n+2}{\delta} - 2\right) \dots \left(\frac{n+2}{\delta} - (m+1)\right)c \\ &\leq \left(\frac{n+2}{\delta}\right)\left(\frac{n+2}{\delta}\right) \dots \left(\frac{n+2}{\delta}\right)c \\ &= \left(\frac{n+2}{\delta}\right)^{m-1} c \\ &\leq c \left(\frac{n+2}{\delta}\right)^{\frac{n+2}{\delta}-1} \\ &\leq c \frac{\delta^{n+2}}{(\delta^{1/\delta})^{n+2}} (n+2)^{\frac{n+2}{\delta}-1} \\ &\leq c \frac{\delta^{1-\frac{2}{\delta}}}{\delta^{1/\delta n}} (n+2)^{\frac{n+2}{\delta}-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$T_n^+ \leq A_\delta D_\delta^n (n+2)^{\frac{n+2}{\delta}-1} \quad (3.37)$$

eşitsizliği yazılır. Diğer taraftan

$$(n+2)^{\frac{1}{\delta}} < e \implies (n+2) < e^n$$

olur. Eşitsizliğin her iki yanının $\frac{1-\delta}{\delta}$. kuvveti alınır

$$(n+2)^{\frac{1-\delta}{\delta}} < e^{n(\frac{1-\delta}{\delta})} = e^{\frac{n}{\delta}-n} \leq e^{\frac{n}{\delta}+0} \leq e^{\frac{n}{\delta}+\frac{1}{\delta}} \leq e^{\frac{n}{\delta}+\frac{2}{\delta}} = e^{\frac{n+2}{\delta}} \quad (3.38)$$

elde edilir. (3.37) eşitsizliğinde (3.38) de oluşturulan eşitsizlik dikkate alınır

$$\begin{aligned} T_n^+ &\leq AD^n (n+2)^{\frac{n}{\delta}} (n+2)^{\frac{1}{\delta}-1} \\ &\leq AD^n n^{\frac{n}{\delta}} \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{n}{\delta}} e^{\frac{n+2}{\delta}} \\ &\leq AD^n n^{\frac{n}{\delta}} e^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{n+2}{\delta}} \\ &= n^n n^{\frac{1}{\delta}-1} e^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{n+2}{\delta}} AD^n \\ &\leq n! e^n n^{n(\frac{1-\delta}{\delta})} e^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{n+2}{\delta}} AD^n \\ &\leq AD^n n! n^{n(\frac{1-\delta}{\delta})} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\left| \frac{d^n}{dk^n} D_+(k) \right| \leq AD^n n! n^{n(\frac{1-\delta}{\delta})} \quad (3.39)$$

elde edilir. Bu sonuç $D_+(k)$ fonksiyonunun $(G_{\frac{\delta}{1-\delta}})$ Gevrey sınıfından olduğunu gösterir. Diğer taraftan $I_5^+ \notin \varepsilon_{\frac{\delta}{1-\delta}}$ (Uniqueness Sınıfı) olduğu aşıkardır. I_5^+ cümlesinde tanımlanan $D_+(k)$ fonksiyonu Carleson Teoreminin tüm özelliklerini gerçeklediğinden

$$\sum_v |l_v^+|^{1-\frac{\delta}{1-\delta}} < \infty$$

koşulunu gerçekler. Buradan,

$$\sum_v |l_v^+|^{\frac{1-2\delta}{1-\delta}} < \infty$$

elde edilir.

Teorem 3.3.14:

(3.35) koşulları altında I_5^- cümlesi

$$\sum_v |l_v^-|^{\frac{1-2\delta}{1-\delta}} < \infty$$

koşulunu gerçekler. Burada $\{|l_v^-|\}$, I_5^- cümlesinin sınırlı tamamlayıcı aralıklarının uzunluklarının dizisidir.

İspat:

Teorem 3.3.13 e benzer yolla yapılır.

Teorem 3.3.15:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \{e^{\epsilon\sqrt{|x|}} |Q'(x)|\} < \infty, \quad \epsilon > 0, \quad (3.40)$$

koşulları altında

$$(i) \quad I_5^+ = \emptyset$$

dir.

$$(ii) \quad D_+ \text{ fonksiyonunun } \overline{\mathbb{C}}_+ \text{ da sonlu sayıda sonlu katlı sıfırı vardır.}$$

İspat:

Teorem 3.3.12 den

$$T_n^+ \leq AD^n n! n^{n(\frac{1-\delta}{\delta})}$$

olduğu biliniyor. $\delta = \frac{1}{2}$ olması durumunda

$$T_n^+ \leq AD^n n! n^n \quad (3.41)$$

elde edilir. $E^+(s)$ fonksiyonunun tanımı

$$E^+(s) = \inf_n \frac{T_n^+ s^n}{n!}$$

olarak ifade edilmiştir. Buradan,

$$\begin{aligned} E^+(s) &= \inf_n \frac{T_n^+ s^n}{n!} \\ &\leq \inf_n \frac{AD^n n! n^n s^n}{n!} = A \inf_n (D^n s^n n^n) \\ &\leq A \min_n (D^n s^n n^n) \end{aligned} \quad (3.42)$$

bulunur. Şimdi (3.42) ifadesini hesaplayalım:

$$n^n = e^{n \ln n}$$

yazıp

$$f(n) = D^n s^n e^{n \ln n}$$

eşitliğini tanımlayalım. Burada $Ds = a$ alınırsa

$$f(n) = a^n e^{n \ln n}$$

olur. Şimdi de f fonksiyonunun minimumu araştıralım:

$$\begin{aligned} f'(n) &= a^n \ln a e^{n \ln n} + a^n e^{n \ln n} (\ln n + 1) \\ &= a^n e^{n \ln n} [\ln a + \ln n + 1] \end{aligned}$$

ve $f'(n) = 0$ olsun. Buradan,

$$\ln a + \ln n + 1 = 0 \implies \ln(an) = -1 \implies e^{-1} = an \implies n = e^{-1} a^{-1}$$

olarak elde edilir. Şimdi $n = e^{-1} a^{-1}$ noktasında bir yerel minimum olduğunu gösterelim:

$$f''(n) = a^{2n} e^{2n \ln n} [\ln a + \ln n + 1]^2 + a^n e^{n \ln n} \frac{1}{n} > 0$$

olduğundan $n = e^{-1} a^{-1}$ noktasında f fonksiyonu bir yerel minimuma sahiptir. Şimdi $n = e^{-1} a^{-1}$ noktasında yerel minimum değeri hesaplandığında

$$f(n) = a^n e^{n \ln n} = e^{n \ln a} e^{n \ln n} = e^{n \ln(an)}$$

ise

$$f(e^{-1} a^{-1}) = e^{e^{-1} a^{-1} \ln(a e^{-1} a^{-1})} = e^{e^{-1} a^{-1} \ln e^{-1}} = e^{-e^{-1} a^{-1}}$$

olur. Buradan

$$f(D^{-1} s^{-1} e^{-1}) = e^{-(D^{-1} s^{-1} e^{-1})} \quad (3.43)$$

sonucu elde edilir. (3.43) ifadesi (3.42) ifadesinde yerine yazılırsa

$$E^+(s) \leq A e^{-(D^{-1} s^{-1} e^{-1})} = A \exp(-D^{-1} s^{-1} e^{-1}) \quad (3.44)$$

elde edilir. Teorem 3.3.11 gereğince

$$\int_0^h \ln(E^+(s)) d\mu(I_{5,s}^+) > -\infty$$

olduğu biliniyor. (3.44) ifadesi (3.32) ifadesinde yerine konulursa, keyfi $h > 0$ sonlu pozitif sayısı için

$$\begin{aligned} -\infty < \int_0^h \ln(E^+(s)) d\mu(I_{5,s}^+) &\leq \int_0^h \ln(A e^{-D^{-1} s^{-1} e^{-1}}) d\mu(I_{5,s}^+) \\ &= \int_0^h \ln A - \frac{1}{De} \frac{1}{s} d\mu(I_{5,s}^+) \\ &\implies \int_0^h \frac{1}{s} d\mu(I_{5,s}^+) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin yakınsak olması için I_5^+ cümlesinin lineer komşuluğunun boş olması gerekir. Bu ise

$$I_5^+ = \emptyset$$

olduğunu gösterir. $I_3^+ \subset I_5^+$ olduğundan $I_3^+ = \emptyset$ olmalıdır. Buna göre, $D_+(k)$ fonksiyonunun açık üstdüzlemde sonsuz katlı sıfırları ve açık üstdüzlemdeki sıfırlarının limit noktaları yoktur. Buradan da L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin ve onların katının da sonluluğu elde edilir.

Teorem 3.3.16:

(3.40) koşulları altında

(i) $I_5^- = \emptyset$

dir.

(ii) D_- fonksiyonunun $\overline{C}_-$ da sonlu sayıda sonlu katlı sıfırı vardır.

İspat:

Teorem 3.3.15 e benzer yolla yapılır.

Teorem 3.3.15 ve Teorem 3.3.16 nın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.3.17:

Eğer (3.40) koşulları gerçekleşiyorsa L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri ve bunların katları da sonludur.

Teorem 3.3.18:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \{e^{\epsilon|x|^\delta} |Q'(x)|\} < \infty, \quad \epsilon > 0, \quad \frac{1}{2} \leq \delta < 1 \quad (3.45)$$

koşulları altında $I_5^+ = \emptyset$ 'dir.

İspat:

$D_+(k)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik, her basamaktan türevleri reel eksene dek sürekli ve

$$\left| \frac{d^n}{dk^n} D_+(k) \right| \leq T_n^+, \quad n = 0, 1, \dots, k \in \overline{C}_+ \quad (3.46)$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı vardır. Teorem 3.3.1 den

$$\left| \int_{-\infty}^{-N} \frac{\ln |D_+(k)|}{1+k^2} dk \right| < \infty, \quad \left| \int_N^{\infty} \frac{\ln |D_+(k)|}{1+k^2} dk \right| < \infty \quad (3.47)$$

olur. $D_+(k)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfır olmadığından, Pavlov Teoremi ve I_5^+ kullanılarak

$$\int_0^h \ln E^+(s) d\mu(I_{5,s}^+) > -\infty \quad (3.48)$$

bulunur. Burada $E^+(s) = \inf_n \frac{T_n^+ s^+}{n!}$, $\mu(I_{5,s}^+)$, I_5^+ nin s -komşuluğunun lineer Lebesgue ölçümü ve $h > 0$ bir sabittir.

$$T_n^+ \leq AD^n n! n^{\frac{n(1-\delta)}{\delta}}$$

eşitsizliği $E^+(s)$ nin tanımında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} E^+(s) &= \inf_n \frac{T_n^+ s^+}{n!} \\ &\leq A \exp\left\{-\frac{1-\delta}{\delta} e^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d^{-\frac{\delta}{1-\delta}} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right\} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olduğunda $\frac{\delta}{1-\delta} \geq 1$ olduğu için (3.48) ifadesi

$$\int_0^h s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu(I_{5,s}^+) < \infty \quad (3.49)$$

sonucunu verir. Bu durumda, (3.49), keyfi bir s için vardır. O halde $\mu(I_5^+) = 0$ dir. Bunun sonucunda da $I_5^+ = \emptyset$ olmalıdır.

Teorem 3.3.19:

(3.45) koşulları altında $I_5^- = \emptyset$ dir.

İspat:

Teorem 3.18 e benzer yolla yapılır.

Dolayısıyla (3.45) koşulu (3.40) koşulundan daha kuvvetli bir koşuldur. Bunun sonucunda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.3.20:

(3.45) koşulları altında, L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri ve bunların katları da sonlu sayıdadır.

Teorem 3.3.21:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \{e^{\epsilon|x|} |Q'(x)|\} < \infty, \quad \epsilon > 0 \quad (3.50)$$

koşulları altında, L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri ve bunların katları da sonlu sayıdadır.

İspat:

(2.7), (2.8), (3.21), (3.22) ve (3.50) den $D_+(k)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ düzleminde $\operatorname{Im} k > -\frac{\epsilon}{4}$ yarıdüzlemine analitik devam ettirilebilir. Bu durumda, $D_+(k)$ fonksiyonunun $\overline{\mathbb{C}}_+$ düzlemindeki sıfırlarının limit noktaları reel eksen üzerinde olmayacaktır. Diğer taraftan Teorem 3.3.1 kullanılarak, $\overline{\mathbb{C}}_+$ düzleminde tanımlı

$D_+(k)$ fonksiyonunun sıfırlarının sonlu olduğu ve benzer şekilde, Teorem 3.3.2 kullanılarak, $\bar{C}_-$ düzleminde tanımlı $D_-(k)$ fonksiyonunun sıfırlarının sonlu olduğu gösterilir.

O halde (3.50) koşulu $D_+(k)$ fonksiyonunun reel eksen den altdüzleme, $D_-(k)$ fonksiyonunun reel eksen den üstdüzleme analitik devam a sahiptir.

Sonuç olarak, L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonluluğu analitik devam ın varlığından söylenir.



4. L OPERATÖRÜNÜN ESAS FONKSİYONLARI

Bu kesimde (3.40) koşullarını dikkate alacağız. $k_1, k_2, \dots, k_j$ ve $k_{j+1}, k_{j+2}, \dots, k_\lambda$, sırasıyla $D_+(k)$ ve $D_-(k)$ fonsiyonlarının $\mathbb{C}_+$ ve $\mathbb{C}_-$ düzlemlerindeki sıfırlarını gösterebilir. Bunların katları da sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_j$ ve $m_{j+1}, m_{j+2}, \dots, m_\lambda$ olsun. $n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{d^n}{dk^n} W[f^+(x, k), f^-(x, k)] \right\}_{k=k_i} = \left\{ \frac{d^n}{dk^n} D^+(k) \right\}_{k=k_i} = 0 \quad (4.1)$$

olduğu açıktır. $n = 0$ ise

$$f^-(x, k_i) = a_{i,0}(k_i) f^+(x, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (4.2)$$

dir. O halde

$$a_{i,0}(k_i) \neq 0$$

olmalıdır. $n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1$ ve $i = j + 1, j + 2, \dots, \lambda$ için

$$\left\{ \frac{d^n}{dk^n} W[g^+(x, k), g^-(x, k)] \right\}_{k=k_i} = \left\{ \frac{d^n}{dk^n} D^-(k) \right\}_{k=k_i} = 0 \quad (4.3)$$

olduğu açıktır. $n = 0$ ise

$$g^-(x, k_i) = b_{i,0}(k_i) g^+(x, k_i), \quad i = j + 1, j + 2, \dots, \lambda \quad (4.4)$$

dir. O halde

$$b_{i,0}(k_i) \neq 0$$

olmalıdır.

Teorem 4.1:

$a_{i,n-m}, k_i$ ye bağlı sabitler olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$\frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} = \sum_{m=0}^n a_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} \quad (4.5)$$

dir.

İspat:

(4.5) in ispatı için matematiksel tümevarım yöntemini kullanacağız. $n = 0$ için (4.2) deki

$$f^-(x, k_i) = a_{i,0}(k_i) f^+(x, k_i)$$

elde edilir.

$1 \leq n_0 \leq m_i - 2$ için

$$\frac{1}{n_0!} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial k^{n_0}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} = \sum_{m=0}^{n_0} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} \quad (4.6)$$

doğru olsun. Şimdi (4.5) in $n_0 + 1$ için doğru olduğunu göstereyim. $y(x, k)$,

$$y'' + (k - Q(x))^2 y = 0$$

denkleminin çözümü ise, bu eşitliğe $\frac{\partial^n}{\partial k^n} y(x, k)$ kısmi türevleme işlemini uygularsak

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + Q^2(x) - 2kQ(x) + k^2 \right\} \frac{\partial^n}{\partial k^n} y(x, k) &= -2kn \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} y(x, k) \\ -n(n-1) \frac{\partial^{n-2}}{\partial k^{n-2}} y(x, k) &+ 2nQ(x) \frac{\partial^{n-1}}{\partial k^{n-1}} y(x, k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

olur.

(4.7) eşitliğini $f^-(x, k_i)$ ve $f^+(x, k_i)$ için yazalım. Daha sonra oluşacak yeni eşitliklerde (4.6) yı kullanırsak

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + Q^2(x) - 2k_i Q(x) + k_i^2 \right\} \frac{1}{n_0!} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial k^{n_0}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} &= \\ \frac{1}{n_0!} 2k_i n_0 \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial k^{n_0-1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} &- \frac{1}{n_0!} n_0(n_0-1) \left\{ \frac{\partial^{n_0-2}}{\partial k^{n_0-2}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \\ + \frac{1}{n_0!} 2n_0 Q(x) \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial k^{n_0-1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} & \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + Q^2(x) - 2k_i Q(x) + k_i^2 \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{n_0} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} \right. &= \\ -2k_i n_0 \sum_{m=0}^{n_0-1} a_{i, n_0-1-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} & \\ -n_0(n_0-1) \sum_{m=0}^{n_0-2} a_{i, n_0-2-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} & \\ + 2n_0 Q(x) \sum_{m=0}^{n_0-1} a_{i, n_0-1-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} & \end{aligned} \quad (4.9)$$

olur. (4.8) ve (4.9) u $n_0 + 1$ için yazarsak,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n_0 + 1)!} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + Q^2(x) - 2k_i Q(x) + k_i^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} = \\
& -2k_i n_0 + 1 \frac{1}{(n_0 + 1)!} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial k^{n_0}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} - n_0(n_0 + 1) \frac{1}{(n_0 + 1)!} \\
& \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial k^{n_0-1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} + 2(n_0 + 1)Q(x) \frac{1}{(n_0 + 1)!} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial k^{n_0}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

olur. (4.8) i, $n_0 + 1$ için yazarsak

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + Q^2(x) - 2k_i Q(x) + k_i^2 \right\} \sum_{m=0}^{n_0+1} a_{i, n_0+1-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} = \\
& -2k_i(n_0 + 1) \sum_{m=0}^{n_0} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} - n_0(n_0 + 1) \\
& \sum_{m=0}^{n_0-1} a_{i, n_0-1-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} + 2(n_0 + 1)Q(x) \\
& \sum_{m=0}^{n_0} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

olur. (4.10) eşitliğinden (4.11) eşitliği çıkarılırsa

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + (k_i - Q(x))^2 \right\} \Phi_{n_0+1}(x, k_i) = 0$$

bulunur. Burada

$$\Phi_{n_0+1}(x, k_i) = \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} - \sum_{m=0}^{n_0+1} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}$$

dir. (4.1) ve (4.2) den

$$\begin{aligned}
W[f^+(x, k_i), \phi_{n_0+1}(x, k_i)] &= W[f^+(x, k_i), \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \\
&- \sum_{m=0}^{n_0+1} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}] = W[f^+(x, k_i), \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i}] \\
&- W[f^+(x, k_i), \sum_{m=0}^{n_0+1} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}] \\
&= a_{i,0}(k_i) W[f^+(x, k_i), \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}] \\
&- W[f^+(x, k_i), \sum_{m=0}^{n_0+1} a_{i, n_0-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d^{n_0+1}}{dk^{n_0+1}} W[f^+(x, k_i), f^-(x, k_i)] \right\}_{k=k_i} = \\
& = W\left[\left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}, f^-(x, k_i)\right] + W\left[f^+(x, k_i), \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i}\right] \\
& - a_{i,0}(k_i) W\left[f^+(x, k_i), \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}\right] \\
& + W\left[f^+(x, k_i), \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial k^{n_0+1}} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i}\right] = 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece;

$$W[f^+(x, k_i), \phi_{n_0+1}(x, k_i)] = \left\{ \frac{d^{n_0+1}}{dk^{n_0+1}} W[f^+(x, k_i), f^-(x, k_i)] \right\}_{k=k_i} = 0$$

olur. Buradan,

$$\phi_{n_0+1}(x, k_i) = a_{i,n_0+1}(k_i) f^+(x, k_i)$$

olacak şekilde bir $a_{i,n_0+1}(k_i)$ sabitinin varlığı ortaya çıkar. Bu ise (4.5) in $n = n_0 + 1$ için de var olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2:

$b_{i,n-m}, k_i$ ye bağlı sabitler olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1$ ve $i = j + 1, j + 2, \dots, \lambda$ için

$$\frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} g^-(x, k) \right\}_{k=k_i} = \sum_{m=0}^n b_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} g^+(x, k) \right\}_{k=k_i} \quad (4.12)$$

dir.

İspat:

Teoremin ispatı, (4.5) in ispatına benzer yolla yapılır.

Şimdi (4.5) ve (4.12) i kullanarak $x \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots, m_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$\begin{aligned}
U_{n,i}(x) &= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \\
&= \sum_{m=0}^n a_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=k_i}
\end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$n = 0, 1, \dots, m_i - 1$ ve $i = j + 1, j + 2, \dots, \lambda$ için

$$\begin{aligned}
U_{n,i}(x) &= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} g^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \\
&= \sum_{m=0}^n b_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} g^+(x, k) \right\}_{k=k_i}
\end{aligned} \quad (4.14)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (4.13) ve (4.14) de tanımlı fonksiyonlar

$$k = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, j, j+1, \dots, \lambda$$

için aşağıdaki bağıntıları sağlarlar. Bu bağıntılar özel olarak "Keldisch Denklemleri" adını alır:

$$l(U_{0,i}) = 0$$

$$l(U_{1,i}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial k} l(U_{0,i}) = 0 \quad (4.15)$$

$$l(U_{n,i}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial k} l(U_{n-1,i}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k^2} l(U_{n-2,i}) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, m_i - 1$$

dir. (4.13) ve (4.14), $U_{0,i}$ nin, $k = k_i$ özdeğerine karşı gelen özfonksiyon olduğunu gösterir. $U_{1,i}, U_{2,i}, U_{3,i}, \dots, U_{m_i-1,i}$ ler ise $U_{0,i}$ nin associated fonksiyonlarını gösterir. $U_{0,i}, U_{1,i}, U_{2,i}, \dots, U_{m_i-1,i}, i = 1, 2, \dots, j, j+1, \dots, \lambda$ lar ise L nin $k = k_i$ özdeğerlerine karşı gelen esas fonksiyonlardır.

Teorem 4.3:

$n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$U_{n,i} \in L^2(-\infty, \infty) \quad (4.16)$$

dir.

İspat:

Teoremin ispatında (2.3), (2.4), (2.7) ve (4.13) yi kullanacağız. Öncelikle $-\infty < x < 0$ için,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \right| &= \left| \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial k^n} \left\{ e^{iw^-(x)} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x F^-(x, t) e^{-ikt} dt \right\}_{k=k_i} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n!} \left\{ (-ix)^n e^{iw^-(x)} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x (-it)^n F^-(x, t) e^{-ikt} dt \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} |x|^n e^{\int_{-\infty}^x |Q(t)| dt} e^{x \operatorname{Im} k} \\ &\quad + \int_{-\infty}^x |t|^n |F^-(x, t)| e^{t \operatorname{Im} k} dt \\ &\leq |x|^n e^{\int_{-\infty}^x |Q(t)| dt} e^{x \operatorname{Im} k} \\ &\quad + \int_{-\infty}^x |t|^n |F^-(x, t)| e^{t \operatorname{Im} k} dt \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.48) koşullarından,

$$|F^-(x, t)| \leq c e^{\frac{\epsilon}{2} \sqrt{|x|}}$$

elde edilir. Böylece $n = 0, 1, \dots, m_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \right| \leq |x|^n e^{\int_{-\infty}^0 |\dot{Q}(t)| dt} e^{x \operatorname{Im} k} + c e^{\frac{x}{2} \sqrt{|x|}} \int_{-\infty}^0 |t|^n e^{t \operatorname{Im} k} dt$$

yazılır. O halde,

$$\frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\} \in L_2(-\infty, 0)$$

dir. Bu da

$$U_{n,i} \in L_2(-\infty, 0) \quad (4.17)$$

olduğunu ifade eder.

$0 \leq x < \infty$ için de benzer yolla

$$U_{n,i} \in L_2(0, \infty) \quad (4.18)$$

elde edilir.

Sonuç 4.4:

L operatörünün özdeğerlerine karşı gelen esas fonksiyonlar $L_2(-\infty, \infty)$ uzayındandır.

Şimdi de (3.48) koşulları altında; $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v$ ve $\mu_{v+1}, \mu_{v+2}, \dots, \mu_l$ sırasıyla, $D_+(k)$ ve $D_-(k)$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}^*$ daki sıfırlarını gösterebiliriz. Bunların katları da sırasıyla $n_1, n_2, \dots, n_v$ ve $n_{v+1}, n_{v+2}, \dots, n_l$ olsun.

$n = 0, 1, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, v$ için,

$$\left\{ \frac{d^n}{dk^n} W[f^+(x, k_i), f^-(x, k_i)] \right\}_{k=\mu_i} = \left\{ \frac{d^n}{dk^n} D^+(k) \right\}_{k=\mu_i} = 0 \quad (4.19)$$

olduğu açıktır. $n = 0$ ise

$$f^-(x, \mu_i) = c_{i,0}(\mu_i) f^+(x, \mu_i), \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (4.20)$$

dir. O halde

$$c_{i,0}(\mu_i) \neq 0$$

olmalıdır.

$n = 0, 1, \dots, n_i - 1, i = v+1, v+2, \dots, l$ için,

$$\left\{ \frac{d^n}{dk^n} W[g^+(x, k_i), g^-(x, k_i)] \right\}_{k=\mu_i} = \left\{ \frac{d^n}{dk^n} D^-(k) \right\}_{k=\mu_i} = 0 \quad (4.21)$$

olduğu açıktır. $n = 0$ ise

$$g^-(x, \mu_i) = d_{i,0}(\mu_i) g^+(x, \mu_i), \quad i = v+1, v+2, \dots, l$$

dir. O halde

$$d_{i,0}(\mu_i) \neq 0$$

olmalıdır.

Teorem 4.5:

$c_{i,n-m}, \mu_i$ ye bağıli sabitler olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, v$ için

$$\frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=\mu_i} = \sum_{m=0}^n c_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \quad (4.22)$$

dir.

İspat:

Teoremin ispatı, (4.5) in ispatına benzer yolla yapılır.

Teorem 4.6:

$d_{i,n-m}, \mu_i$ ye bağıli sabitler olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1$ ve $i = v + 1, v + 2, \dots, l$ için

$$\frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} g^-(x, k) \right\}_{k=\mu_i} = \sum_{m=0}^n d_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} g^+(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \quad (4.23)$$

dir.

İspat:

Teoremin ispatı, (4.5) in ispatına benzer yolla yapılır.

(4.22) ve (4.23) yi kullanarak $x \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots, n_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, v$ için

$$\begin{aligned} V_{n,i}(x) &= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \\ &= \sum_{m=0}^n c_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} f^+(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ve $n = 0, 1, \dots, n_i - 1$ ve $i = v + 1, v + 2, \dots, l$ için

$$\begin{aligned} V_{n,i}(x) &= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} g^-(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \\ &= \sum_{m=0}^n d_{i,n-m} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial k^m} g^+(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \end{aligned} \quad (4.25)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (4.24) ve (4.25) da tanımlı fonksiyonlar

$$k = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, v, v + 1, \dots, l$$

için "Keldisch Denklemleri" ni sağlar. Yani,

$$l(V_{0,i}) = 0$$

$$l(V_{1,i}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial k} l(V_{0,i}) = 0 \quad (4.26)$$

$$l(V_{n,i}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial k} l(V_{n-1,i}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k^2} l(V_{n-2,i}) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, m_i - 1$$

dir. (4.24) ve (4.25), $V_{0,i}$ nin, $k = \mu_i$ özdeğerine karşı gelen özfonksiyon olduğunu gösterir. $V_{1,i}, V_{2,i}, V_{3,i}, \dots, V_{m_i-1,i}$ ler ise $V_{0,i}$ nin associated fonksiyonlarını gösterir. $V_{0,i}, V_{1,i}, V_{2,i}, \dots, V_{m_i-1,i}, i = 1, 2, \dots, v, v+1, \dots, l$ lar ise L nin $k = \mu_i$ özdeğerlerine karşı gelen esas fonksiyonlardır.

Teorem 4.7:

$n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, v$ için

$$V_{n,i} \notin L_2(-\infty, \infty)$$

dir.

İspat:

Teoremin ispatında (2.3), (2.4), (2.7) ve (4.13) yi kullanacağız. Öncelikle $-\infty < x < 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \right| &= \left| \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial k^n} \{ e^{i\omega^-(x)} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x F^-(x, t) e^{-ikt} dt \}_{k=k_i} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n!} \{ (-ix)^n e^{i\omega^-(x)} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x (-it)^n F^-(x, t) e^{-ikt} dt \} \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} |x|^n e^{\int_{-\infty}^x |Q(t)| dt} \exp\{x \operatorname{Im} k\} \\ &\quad + \int_{-\infty}^x |t|^n |F^-(x, t)| e^{t \operatorname{Im} k} dt \end{aligned}$$

olur. (3.48) koşulundan elde edilen

$$|F^-(x, t)| \leq c e^{\frac{\epsilon}{2} \sqrt{|x|}}$$

eşitsizliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=k_i} \right| &\leq |x|^n e^{\int_{-\infty}^x |Q(t)| dt} e^{x \operatorname{Im} k} \\ &\quad + \int_{-\infty}^x |t|^n |F^-(x, t)| e^{t \operatorname{Im} k} dt \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikteki ilk toplam, $L_2(-\infty, 0)$ uzayının elemanı olmadığı için

$$V_{n,i} \notin L_2(-\infty, 0)$$

olur. Sonuç olarak

$$V_{n,i} \notin L_2(-\infty, \infty)$$

elde edilir.

Sonuç 4.8:

L operatörünün spektral tekilliklerine karşı gelen esas fonksiyonlar, $L_2(-\infty, \infty)$ uzayının elemanı değildir.

Şimdi

$$\|f\|_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^{2n} |f(x)|^2 dx$$

ve

$$\|g\|_{-n}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^{-2n} |g(x)|^2 dx$$

olmak üzere

$$H_n = \{f : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^{2n} |f(x)|^2 dx < \infty\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ve

$$H_{-n} = \{g : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^{-2n} |g(x)|^2 dx < \infty\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Hilbert uzaylarını tanımlayalım. Buna göre, $n = 1, 2, \dots$ için

$$H_{n+1} \subsetneq H_n \subsetneq L_2(R) \subsetneq H_{-n} \subsetneq H_{-(n+1)} \quad (4.27)$$

dir ve H_{-n} , H_n 'in dualine izomorftur.

Teorem 4.9:

$n = 0, 1, \dots, n_i - 1$ ve $i = 1, 2, \dots, v, v + 1, \dots, l$ için

$$V_{n,i} \in H_{-(n+1)}$$

dir.

İspat:

Teoremin ispatında (2.3) ve (2.4) ü kullanacağız.

$$g(x) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=\mu_i}$$

olsun. O halde $-\infty < x \leq 0$ için

$$\begin{aligned}
\|g\|_{-(n+1)}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{-2(n+1)} |g(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^0 (1+|x|)^{-2(n+1)} \left| \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial k^n} f^-(x, k) \right\}_{k=\mu_i} \right|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^0 (1+|x|)^{-2(n+1)} \left| \frac{1}{n!} \left\{ (-ix)^n e^{i w^-(x)} e^{-ikx} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{-\infty}^x (-it)^n F^-(x, t) e^{-ikt} dt \right\}_{k=\mu_i} \right|^2 dx \\
&\leq \int_{-\infty}^0 (1+|x|)^{-2(n+1)} \left\{ \frac{1}{n!} \left\{ |x|^n e^{\int_{-\infty}^0 |Q(t)| dt} e^{xImk} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c e^{\frac{\epsilon}{2} \sqrt{|x|}} \int_{-\infty}^0 |t|^n e^{tImk} dt \right\} \right\}^2 dx \\
&< c \int_{-\infty}^0 (1+|x|)^{-2(n+1)} |x|^{2n} dx \leq c \int_{-\infty}^0 \frac{(1+|x|)^{2n}}{(1+|x|)^{2n+2}} dx \\
&= c \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1+|x|)^2} dx < \infty
\end{aligned}$$

olur. $0 \leq x < \infty$ için de benzer yolla gösterilir. O halde

$$V_{n,i} \in H_{-(n+1)} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, n_i - 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, v$$

elde edilir.

$$V_{n,i} \in H_{-(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad i = v+1, v+2, \dots, l$$

ifadesi de benzer yolla ispatlanır.

Şimdi

$$n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_v, n_{v+1}, \dots, n_l\}$$

olacak şekilde spektral tekilliklerin en maksimal katı olabilecek bir n_0 seçelim.

Buna göre

$$H_{-n_0} := \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{-2n_0} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

dir. (4.5) ve (4.27) den aşağıdaki sonuç yazılır:

Sonuç 4.10:

$n = 0, 1, \dots, n_i - 1 \quad , \quad i = 0, 1, \dots, v, v+1, \dots, l$ olmak üzere

$$V_{n,i} \in H_{-n_0}$$

dir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akhiezer, N.I. and Glazman I.M. 1961, Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Volume 1, Frederick Ungar Publishing Co, New-York.
Translated from the Russian by M. Nestell, Southern Missiona College.
- Bairamov, E., Çakar, Ö. and Krall A.M. 1999(a). Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition. Journal of Differential Equations, 151; 252-267.
- Bairamov, E., Çakar, Ö. and Krall A.M., 1999(b), Eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operators with spectral singularities. Journal of Differential Equations, 151; 268-289.
- Bairamov, E., Çakar, Ö. and Çelebi, A.O., 1997, Quadratic pencil of Schrödinger operators with spectral singularities: Discrete spectrum and principal functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216; 303-320.
- Bairamov, E. and Çelebi, A.O., 1997, Spectral properties of the Klein-Gordon s-wave equation with complex potential. Indian J. Pure Appl. Math., 28(6); 813-824.
- Bairamov, E. and Çelebi, A.O., 1999, Spectrum and spectral expansion of a non-selfadjoint Dirac operators. Quarterly Journal of Math., 50, 1-15.
- Berezanski, Y.M. 1968. Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators. AMS, Providence, R.I.
- Carleson, L. 1952. Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle. Acta Mathematica, 87, 325-345.
- Coddington, E.A. and Levinson, N. 1955, Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, INC. New-York, Toronto, London. International Series in Pure and Appl. Math.

- Cornille, H. 1970. Existence and uniqueness of crossing symmetric N/D -type equations corresponding to the Klein-Gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11, 79-98.
- Degasperis, A. 1970, On the inverse problem for the Klein-Gordon s-wave equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11, 551-567.
- Garnett, J.B. 1981, *Bounded Analytic Functions*. Academic Press, New-York.
- Gasymov, M.G. 1965, On the decomposition in a series of eigenfunctions for a non-selfadjoint boundary value problem of the solution of a differential equation with a singularity at a zero point. *Sov. Math. Dokl.* 6, 1426-1429.
- Gasymov, M.G. 1968, Expansion in terms of the solutions of a scattering theory problem for the non-selfadjoint Schrödinger equation. *Sov. Math. Dokl.*, 9, 390-393.
- Gasymov, M.G. and Maksudov, F.G. 1972, The principal part of the resolvent of non-selfadjoint operators in neighbourhood of spectral singularities. *Functional Analysis and its Applications*, 6, 185-192.
- Greiner, W. 1994, *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*. Springer Verlag.
- Hruscev, S.V. 1977, Sets of uniqueness for the Gevrey classes, *Arkiv for Math.*, 15, No.2, 253-304.
- Hruscev, S.V. 1984, Spectral singularities of dissipative Schrödinger operator with rapidly decreasing potential. *Indiana Univ. Math. Jour.*, 33, 313-338.
- Jaulent, M., Jean, C. 1972, The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy. *Comm. Math. Phys.*, 28, 177-220.
- Jaulent, M., Jean, C. 1976(a), The inverse problem for the one dimensional Schrödinger equation with an energy-dependent potential I. *Ann. Inst. Henri Poincaré Sec. A* 25, 105-118.
- Jaulent, M., Jean, C. 1976(b), The inverse problem for the one dimensional Schrödinger equation with an energy-dependent potential II. *Ann. Inst. Henri Poincaré Sec. A* 25, 119-137.

- Keldysh, M.V. 1971, On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Sov. Math. Dokl.*, 77, 11-14.
Russian Math. Survey, 26, 15-44.
- Kemp, R.R.D. 1958, A singular boundary value problem for a non-selfadjoint differential operator. *Canad. J. Math.*, 10, 447-462.
- Krall, A.M. 1965(a), The adjoint of differential operator with integral boundary conditions. *Proc. AMS*, 16, 738-742.
- Krall, A.M. 1965(b), A nonhomogeneous eigenfunction expansion. *Trans. AMS*, 117, 352-361.
- Krall, A.M. 1965(c), Second order ordinary differential operators with general boundary conditions, *Duke Jour. Math.*, 32, 617-625.
- Krall, A.M. 1965(d), Nonhomogeneous differential operators. *Michigan Math. J.*, 12, 247-255.
- Krall, A.M. 1965(e), On non-selfadjoint ordinary differential operators of second order. *Sov. Math. Dokl.*, 165, 1235-1237.
- Lax, P.D. and Phillips, R.S. 1967, *Scattering Theory*. Academic Press.
- Lyance, V.E. 1967(a), A differential operator with spectral singularities I. *AMS Translations*, 2(60), 185-225.
- Lyance, V.E. 1967(b), A differential operator with spectral singularities II. *AMS Translations*, 2(60), 227-283.
- Maksudov, F.G. and Allahverdiev, B.P. 1984, Spectral analysis of a new class of non-selfadjoint operators with continuous and point spectrum. *Sov. Math. Dokl.*, 30, 566-569.
- Maksudov, F.G. and Guseinov, G.Sh. 1987, On solution of the inverse scattering problem for a Quadratic pencil of one-dimensional Schrödinger operators on the whole axis. *Sov.Math.Dokl.*, 34, 34-38.
- Marchenko, V.A. 1986, *Sturm-Liouville Operators and Their Applications*. Birkhauser, Basel.
- Nagy, B.Sz. and Foias, C. 1970, *Harmonic Analysis of Operators in Hilbert Space*. North-Holland, Amsterdam.

- Naimark, M.A. 1960, Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS Translations, 2(16), 103-193.
- Naimark, M.A. 1968, "Linear Differential Operators I, II". Ungar, New-York.
- Pavlov, B.S. 1967, The non-selfadjoint Schrödinger operator, in "Topics in Mathematics and Physics". Vol.1, pp.87-114, Consultants Bureau, New-York.
- Pavlov, B.S. 1975, On separation conditions for spectral components of a dissipative operator. Math. USSR Izvestiya, 9, 113-137.
- Privalov, I.I. 1956, The boundary properties of analytic functions, in "Hochschulbücher für Math.", Vol.25, VEB Deutscher Verlag, Berlin.
- Schwarz, J.T. 1960, Some non-selfadjoint operators. Comm. Pure Appl. Math. 13, 609-639.
- Titchmarsh, E.C. 1962, Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, Oxford Univ. Press, London.
- Veliev, O.A. 1987, Spectral expansion of non-selfadjoint differential operators with periodic coefficients. Differential Equations, 22, 1403-1408.

ÖZGEÇMİŞ

Antalya'da 1967 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1984 yılında girdiği Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü'nden 1989 yılında mezun oldu. Eylül 1989 - Haziran 1992 yılları arasında, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Ekim 1994'de Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Doktora öğrenimine başladı.

Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Bölümü'nde 1989 yılından bu yana Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
DOKÜMAN YÖNETİM SİSTEMİ