

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAFLARIN ANALİZİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine ÇELİKTEN

Fen Bilimleri ve Teknolojileri Anabilim Dalı

EKİM 2023

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAFLARIN ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine ÇELİKTEN
(220861202)

Fen Bilimleri ve Teknolojileri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nimet ÇOŞKUN

EKİM 2023

TEZ ONAYI

Emine ÇELİKTEN tarafından hazırlanan **Rastlantısal Geometrik Grafların Analizi** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri ve Teknolojileri Ana Bilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:

Dr. Öğr. Üyesi Nimet ÇOŞKUN

Jüri Üyeleri

İmza:

Doç. Dr. İbrahim AKTAŞ

Doç. Dr. Gökhan MUTLU

Dr. Öğr. Üyesi Nimet ÇOŞKUN

Tez Savunma Tarihi: 16/10/2023

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Murat MAYDA
Enstitü Müdürü



BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

(İmza)
Emine ÇELİKTEN







Eşime ve biricik aileme,



ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu belirleme, planlama ve araştırma sürecinde her an bana sonsuz destek olan ve her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendirip hatalarımı düzeltmem hususunda yardımlarını esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nimet ÇOŞKUN'a, ve bu süreç boyunca bana her türlü desteği vermekle kalmayıp, her anında bana azim ve cesaret veren sevgili eşim Hanifi ÇELİKTEN'e ve değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Ekim 2023

Emine ÇELİKTEN
(Lise Matematik Öğretmeni)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SEMBOLLER	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xvii
ABSTRACT	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR ..	9
3. OLASILIK TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER ..	19
3.1 Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri.....	25
3.2 Bir Rastgele Değişkenin Varyansı	27
4. RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAF İÇİN OLASILIKSAL EŞİTSİZLİKLER	31
5. SONSUZ RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAFLAR VE İZOMETRİ ÖZELLİKLER	41
5.1 Geometrik e.c. Graflar (Geometrically e.c. Graphs).....	43
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	55
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ.....	61



SEMBOLLER

$\ \cdot\ $	: Öklid normu
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
1_A	: A 'nın gösterge fonksiyonu
(Ω, U, P)	: Olasılık Uzayı
$G(n, p)$	: Erdős-Reyni Rastlantısal Grafi
$G(V, E)$	: Yönlü veya Yönsüz Graf
$Po(\lambda)$	: λ Parametrelili Poisson Rastgele Değişkeni
$Bi(n, p)$	: Binomal Rastgele Değişkeni
$LARG(V, \delta, p)$	: Bölgesel Alan Rastlantısal Graf
$B_\delta(x)$	: x merkezli δ yarıçaplı açık yuvar



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 : Yönlü ve yönsüz graf için görsel.....	1
Şekil 1.2 :Könisberg in 7 köprüsü problemini veren görsel.	1
Şekil 1.3 :Elektrik devrelerinin graf ile ifadesine ait görsel	2
Şekil 1.4 :Doymuş hidrokarbonların graf ile ifadesine ait görsel.....	2
Şekil 1.5 :Rastlantısal geometrik garf için bir görsel.	3
Şekil 1.6 :Tek bağlantılı küme kullanılarak hiyerarşik kümeleme.	7
Şekil 2.1 :Yönlü çoklu graf örneği	10
Şekil 2.2 :Bağlantılı graf örneği.....	11
Şekil 2.3 :Bağlantılı olmayan graf örneği.....	11
Şekil 2.4 :Dört yüzlü bir zarın iki kez atılmasında deneyi için örnek uzay açıklaması	13
Şekil 3.1 :Rastgele değişkenin görselleştirilmesi.	20
Şekil 3.2 :Bernoulli rastgele değişkeni için PMF	22
Şekil 3.3 :Sürekli rastgele değişkenin görselleştirilmesi	25
Şekil 5.1: e.c.özellği	42
Şekil 5.1.1 : δ -e.c. özelliği	44
Şekil 5.1.2 : Hexagonal metrik için birim yuvar	49
Şekil 5.1.3 : Noktalar arası uzaklığın eşit olduğu bir graf örneği.....	52



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAFLARIN ANALİZİ

Emine Çelikten

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fen Bilimleri ve Teknolojileri AnaBilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nimet ÇOŞKUN

Ekim, 2023, 61 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır ve rastlantısal geometrik grafların analizi ile ilgili sonuçların derlenmesini hedeflemektedir. Tez çalışmasının ilk bölümü giriş bölümüdür. Bu bölümde tezin amaç ve kapsamı, literatür bilgisi, konunun tarihsel süreçleri ve farklı alanlardaki uygulama örneklerine yer verilmiştir. Ayrıca istatistik alanındaki çeşitli testler ve kümeleme teorisi alanındaki uygulamalarda da kullanımına değinilmiştir. İkinci bölümde graf teorisi ve fonksiyonel analizle ilgili temel kavram ve tanımlara yer verilmiş, açıklayıcı örnekler sunulmuştur. Üçüncü bölümde olasılık teorisi ile ilgili tanım ve teoremler ile örneklerle, olasılıksal eşitsizliklerde sınır belirleme işlemlerinde kullanılan Markov eşitsizliği ve ispatına yer verilmiştir. Ayrıca graf teoride rastlantısallık özelliğinin olasılıksal yaklaşımı gerektirdiği vurgulanmıştır. Dördüncü bölümde Penrose (2003) çalışması referans alınarak bazı olasılıksal eşitsizlikler ispatlanmıştır. Beşinci bölümde sayılabilir sonsuz noktalara sahip graflar, bu graflara ait rastlantısal geometrik graflar üzerinde kurulan $LARG(V, \delta, p)$ modeli tanımlanmıştır. Rado grafları için varoluşsal kapalılık kavramının geometrik rastlantısal graflar için analoğu geometrik varoluşsal kapalılık kavramıdır. Farklı metrik uzaylarda adım izometri ve geometrik varoluşsal özelliklerinin değişmesi bu tekniklerle üretilen bazı makalelerin karşılaştırılmalı incelenmesiyle sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Graf teorisi, spektral analiz, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi.



ABSTRACT

Ms Thesis

ANALYSIS OF RANDOM GEOMETRIC GRAPHS

Emine ÇELİKTEN

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Science and Technologies

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nimet ÇOŞKUN

October, 2023, 61 pages

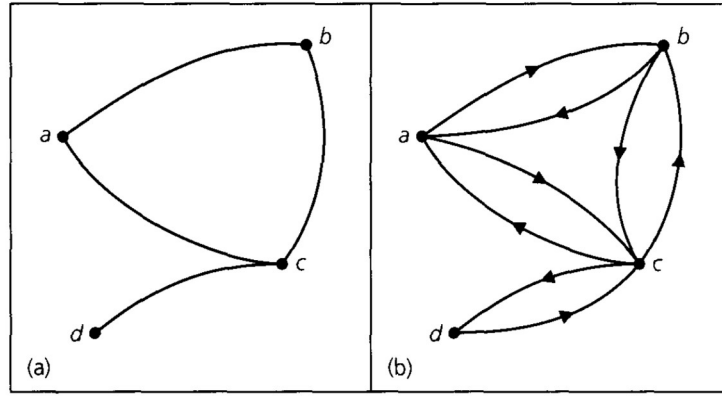
This thesis consists of five chapters and aims to compile the results regarding the analysis of random geometric graphs. The first part of the thesis is the introduction. In this section, the purpose and scope of the thesis, literature information, historical processes of the subject and application examples in different fields are included. In addition, its use in various tests in the field of statistics and applications in the field of cluster theory is also mentioned. In the second chapter, basic concepts and definitions related to graph theory and functional analysis are included and illustrative examples are presented. In the third chapter, definitions, theorems and examples related to probability theory, Markov inequality and its proof used in determining bounds in probabilistic inequalities are given. It is also emphasized that the randomness feature in graph theory requires a probabilistic approach. In the fourth chapter, some probabilistic inequalities are proven with reference to the study of Penrose (2003). In the fifth chapter, graphs with countably infinite points and the $LARG(V, \delta, p)$ model of these graphs based on random geometric graphs are introduced. The analog of the concept of existential closure for Rado graphs for geometric random graphs is the concept of geometric existential closure. The change of step isometry and geometric existential properties in different metric spaces is presented by comparative examination of some articles produced with these techniques.

Keywords: Graph theory, spectral analysis, functional analysis, probability theory.



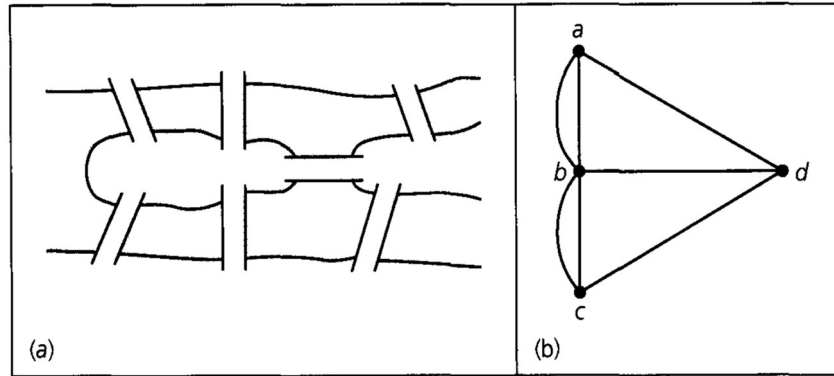
1.GİRİŞ

Matematikte Graf Teori (Çizge Teorisi), nesneler arasındaki ikili ilişkileri modellemek için kullanılan matematiksel yapılar olan grafların incelenmesidir. Bu bağlamda bir graf, noktalar (köşe, düğüm) ve bu noktaları birbirine bağlayan kenarlardan (bağlantı) oluşur. Noktaları simetrik olarak birbirine bağlayan yönsüz graflar ile iki noktayı asimetric olarak birbirine bağlayan yönlendirilmiş graf arasında ayırım yapılır. Graflar ayrık matematiğin temel çalışma nesnelerinden biridir.



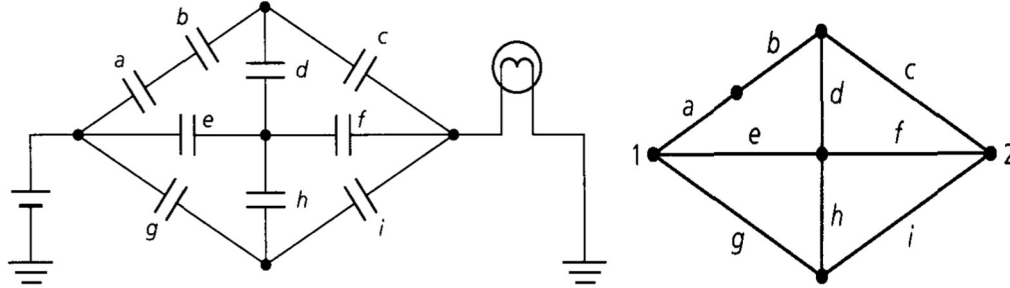
Şekil 1.1 : Yönlü ve yönsüz graf örnekleri, Grimaldi (1993).

1736'da Leonard Euler (1707-1738) tarafından çözülen Königsberg'in yedi köprüsü problemi ve 1752'de düzlemsel graflar için Euler Teoremi'nin bulunmasının ardından neredeyse bir yüz yıl boyunca bu alanda çok az ilerleme oldu.



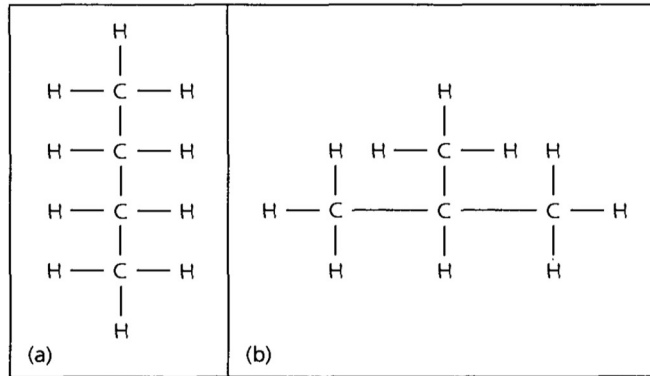
Şekil 1.2 : (a) Königsberg'in yedi köprüsü, (b) Graf çizimi ile ifadesi, Grimaldi (1993).

Daha sonra 1847’de Gustav Kirchhoff (1824-1887) ağaç adı verilen özel bir graf türünü inceledi. Elektrik akımı için Ohm yasasını genişletirken elektrik ağlarıyla ilgili uygulamalarda bu kavramı kullandı.



Şekil 1.3 : Bir elektrik devresi için graf uygulaması, Grimaldi (1993).

On yıl sonra Arthur Cayley (1821-1895) doymuş C_nH_{2n+2} , $n \in \mathbb{Z}^+$ hidrokarbonlarının farklı izomerlerini saymak için aynı tip grafiği geliştirdi.



Şekil 1.4 : Doymuş hidrokarbonların graf ile ifadesine bir örnek, Grimaldi (1993).

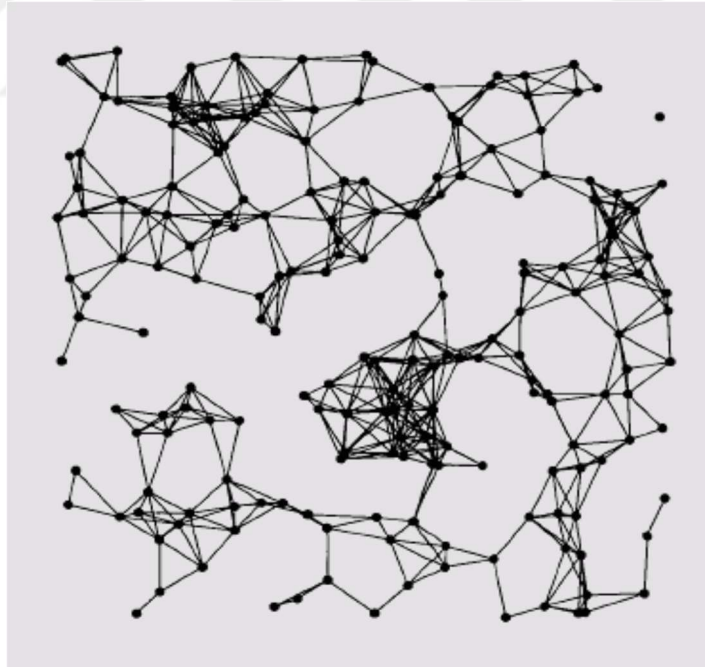
Bir ormandaki ağaçlar ve ağaçlar arasında yayılan bir hastalık, belirli bir bölgede yaşayan hayvan veya kuş yuvaları ve komşu yuvalar arasındaki iletişim, bir ülke veya kıtadaki iletişim istasyonları ve arasındaki bağlantılar, insan beyninde komşu nöronların arasındaki bağlantılılık ve etkileşim, takım yıldızlarının arasındaki çekim ve uzaklığa göre konumlandırma bu ve bunun gibi birçok doğa olayları graf yapılarıyla modellenebilir (Penrose, 2003). Burada bağlantılılığın noktalar arasındaki mesafeye bağlı olması graf yapılarında geometrik graf modelleri olarak adlandırılır. Noktaların ise tanım kümesinde rastgele dağılımlı olması graf yapısına rastlantısal özellik katar. Rastlantısal geometrik graf yapılarının matematiksel modellenmesinde ilk olarak $\mathbb{R}^d$

üzerinde bir Öklid normu $\| \cdot \|$ tanımlanarak, $r > 0$ pozitif parametresi için, X nokta kümesi $X \subset \mathbb{R}^d$ olmak üzere $G(X, r)$ yönsüz graf (undirected graph) yapısı uzaklığa bağlı olarak kurulur (Penrose, 2003). Burada nokta kümesinden keyfî iki noktanın bağlantılı (connected) olması ise $\forall x, y \in X$ için

$$x \sim y \Leftrightarrow \|x - y\| < r,$$

şeklinde tanımlanır (Penrose, 2003). Eğer uzay bir boyutlu ise yani $d = 1$ için tanımlanan graf yapısı aralık grafi (interval graph), eğer uzay iki boyutlu ise yani $d = 2$ için graf disk graf (disc graphs or proximity graphs) şeklinde özel olarak adlandırılır.

Bu tezde spesifik bir graf yapısından çok genel geometrik graf yapıları üzerinde durulacaktır. Geometrik graf yapısındaki noktaların rastlantısal dağılımlı konfigürasyonu göz önüne alınacaktır. Doğada noktaların konfigürasyonunun net olarak bilinmediği ve belirlenmesinin güç olduğu modeller vardır. Çok boyutlu graf yapılarında ise tam hesap yapmak zor olabilir ve bazı durumlarda ortalama veya yaklaşık hesap yapılması yeterli olabilir.



Şekil 1.5 : Rastlantısal geometrik grafa bir örnek, Penrose (2003).

1950’li yılların sonlarına doğru ilk defa Erdős ve Renyi tarafından rastlantısal graf yapıları çalışılmıştır (Erdős ve Renyi, 1950). Erdős-Renyi raslantısal grafları daha

sonraları Ballobas (1985), (Alon ve diğerleri, 1992), (Janson ve diğerleri, 2000) tarafından da ele alınmıştır. Erdős-Renyi rastlantısal graf modeli noktaların bağlantılılığı ile aralarındaki uzaklık arasında bir ilişki tanımlamadığı için rastlantısal geometrik graflara göre farklı bir kategoride değerlendirilebilir. Erdős-Renyi rastlantısal grafları $G(n, p)$ ile gösterilir. Burada n ile sonlu nokta kümesi, p ile de her bir kenarın bağımsız p olasılığı gösterilir.

Geometrik graflarda ise eğer nokta kümesinin elemanı olan x_i , x_j ve x_k noktaları için

$$\begin{aligned}\|x_i - x_j\| &\leq r, \\ \|x_i - x_k\| &\leq r,\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa,

$$\|x_i - x_k\| \leq \|x_i - x_j\| + \|x_j - x_k\| \leq 2r$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliği özelliği ise Erdős-Renyi graflarından farklı olarak rastlantısal geometrik graflara istatistiksel testlerin uygulanabilmesi için daha gerçekçi bir alan ve farklılık katar. Ayrıca literatürdeki çalışmalar Erdős-Renyi model ve rastlantısal geometrik graflar anlamında kıyaslanacak olursa benzer sorular için çok farklı ispat yöntemlerinin gerektiği görülecektir. Erdős-Renyi modelinde çoğunlukla kombinatorik yöntemler ön plandadır. Rastlantısal geometrik graflarda ise istatistiksel ve kombinatorik yöntemlerin birlikte kullanılması söz konusu olmaktadır (Alan ve diğerleri, 1992; Pach ve Agarwal, 1995; Solomon, 1967).

Sonsuz geometrik grafların çalışılması Gilbert (1961) ile başlamıştır. Bu yapılar homojen olmayan materyallerin istatistiksel anlamda incelenebilmesine modellik ettiği için sürekli perkolasyon (continuum percolation) konusunun çalışılmasında motivasyon kaynağı olmuştur (Torquato, 2002). Perkolasyon teorisi modern olasılık teorisinin önemli bir dalıdır (Grimmett, 1999). Ayrıca bu konu ile ilgili Meester ve Roy (1996) çalışması da incelenebilir. Bu tip problemlerde büyük sonlu graflarda tam hesap yapılamayan graf yapıları için asimptotik hesap yapılabilmesi mümkün olacaktır. Tam hesaplar n 'nin küçük değerleri için mümkün gözükse de büyük verilerin modellenmesinde kullanılan graflar için pek mümkün gözükmemektedir. Bu sebeple rastlantısal geometrik graflar için literatürde asimptotik teorisi de oldukça

güncel bir konu olmuştur. Bu asimptotik hesaplar ile $G(x_n; r_n)$ grafında bir (r_n) dizisi tanımlanır ve bu dizinin limit özellikleri ile hesaplar yapılır.

Hafner (1972) çalışması sonlu rastlantısal geometrik graflar üzerindeki ilk çalışmalardandır. 90'lı yılların başlarında da bazı araştırma grupları bu konu hakkında özgün çalışmalarda bulunmuştur. Godehardt (1990) kitabında graf teorisinin istatistiksel ve olasılıksal uygulamaları ile ilgili konular çoğunlukla bir boyutta ele alınmıştır. İzleyen yıllarda ise konu Godehardt ve Jaworski (1996), Harris ve Godehardt (1998) ve Godehardt (1998) çalışmalarında çok boyutta uzaylara genelleştirilmiştir. Matematiksel teori anlamında çok boyutlu uzaylar için Appel ve Russa (1997a, 1997b, 2002), McDiarmid (2003) tarafından çalışmalar yapılmıştır. Uygulamalı bilimlerde, özellikle kablosuz iletişim anlamında ise Clark ve diğerleri (1990) ve Gupta ve Kumar (1998) tarafından araştırmalar yapılmıştır. Penrose ise minimum geren ağaç (minimal spanning tree) ve perkolasyon teorisi açısından bu konuyla ilgili çalışmalarda bulunmuştur. Tezimizde ise temel olarak Penrose (2003) kitabı ve Penrose'nin (1995, 1997, 1998, 1999a, 1999c, 2000a, 2000b), Penrose ve Pisztor (1996) ve Penrose ve Yukich (2001) çalışmalarından derlenen sonuçlar ele alınacaktır.

Bu çalışmada kullanılan olasılıksal modelden bahsedelim. $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı f olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınsın. d boyutlu ve bağımsız $X_1, X_2, \dots$ değişkenleri f ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $X_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ olmak üzere; rastlantısal geometrik graf olarak, ana graf $G(X_n; r)$ olacaktır (Poisson nokta süreci üzerinde dikkate alınır). Şekil 1.5'teki görsel $n = 200$, $d = 2$, $r = 0,11$ değerleri ile $[0,1]^2$ üzerinde, f yoğunluk fonksiyonuna sahip, düzgün dağılımlı bir örnektir.

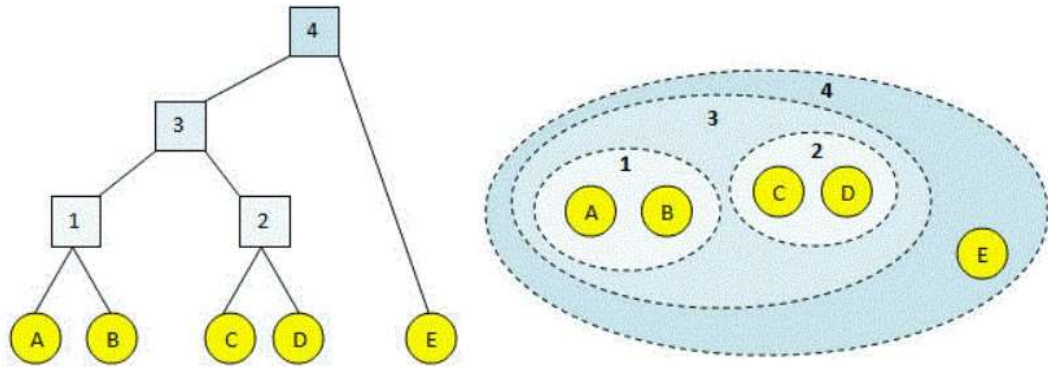
$G(X; r)$ grafının bağlantılı bileşenleri açısından sorular; X merkezli $r/2$ eşit yarıçaplı yuvarlardan oluşan kapsama süreçlerinin bileşenleri olarak yeniden ifade edilebilir. Bu türdeki kapsama süreçleri aslında Poisson nokta süreci (Poisson point process) başlığı altında çokça incelenmiştir. Bir örnek olarak Hall (1988) çalışmasına bakılabilir. Ayrıca $G(X; r)$ grafının minimum derecesine dair soruları anlamak hesaplamalı geometride temel bir problemdir. Daha detaylı bilgi edinmek için Steele and Tierney (1986) çalışması iyi bir kaynak oluşturur.

Genel olarak ilgili literatür arasında aşağıdaki kitaplar yer almaktadır. İstatistiksel geometrinin teorik ve istatistiksel yönleri üzerine genel çalışmalar arasında Santalo (1976), Hall (1988), Ambartzumian (1990), Stoyan ve diğerleri (1985), Meester ve Roy (1996) ve Molchanov (1997) yer almaktadır. Mevcut çalışmalardan farklı olarak graf teori özellikleri üzerinde odaklanmış Steele (1997) ve Yukich (1998) tarafından yazılan kitaplar, X üzerindeki tam grafların özellikleri üzerinedir ve kenarları mesafeye bağlı olarak belirlenir.

Rastgele geometrik grafların incelenmesinde bir diğer motive edici faktör çok değişkenli istatistiklerdir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere X_i noktaları, mekansal verileri (örneğin bazı maden yatakları gibi) veya mekansal-zamansal verileri (örneğin hastalık vakaları gibi) temsil edebilir. Daha genel bir bakışla; n kişiden oluşan bir toplulukta i 'nci bireyde bulunan d niteliklerini temsil eden, çok değişkenli verilerin ölçümleri şeklinde düşünülebilir. Başka bir istatistiksel kullanım alanı ise çeşitli hipotez testlerinin temeli olarak kullanılmasıdır. Örneğin bir hipotezdeki modellemenin gözleme ne kadar yakın olduğuyla ilgilenen uyum iyiliği (goodness-of-fit) ölçümleridir. Burada sıfır hipotezi; temelde f yoğunluğundaki noktaların belirli bir g dağılımı olduğudur. Hipotez ile elde edilen sonuçların ne kadar uyumlu olduğuna dair bazı testler uygulanabilir. Bu durumda çeşitli test istatistiklerine başvurulur. Bunlardan bazıları geometrik graflara dayanır. $G(X;r)$ 'nin basit kenar sayımı veya daha genel olarak belirtilen k düzeyinde $G(X;r)$ 'nin tam alt graflarının sayımı (Silverman ve Brown (1978) bu duruma örnek olarak verilebilir. Bu model esas olarak $G(X;r)$ grafinin grup numarası olan tarama istatistiğidir (scan statistic). Bu kısımda daha detaylı bilgi için; noktalar arasındaki en yakın komşu mesafelerin amprik dağılımını konu alan Glaz ve diğerleri (2001) ve Bickel ve Breiman (1983) çalışmaları, ayrıca noktalar arasındaki en yakın mesafe en büyük komşuluk üzerine Henze (1982) çalışmasına bakılabilir.

Geometrik grafların ortaya çıktığı en doğal istatistiksel ortam sınıflandırma veya taksonomi olarakta bilinen küme analizidir. Her birey için bireysel yapılan ölçümlere dayanarak geniş bir birey topluluğunu gruplara ayırma bilimidir. Örneğin tıp alanında bireylerin semptomlarına ilişkin veriler, onları hastalıklara göre sınıflandırmak için istenebilir. Fosiller üzerinde yapılan ölçümlere bakıldığında türlere göre sınıflandırılması söz konusu olduğunda bir çok sınıflandırma tekniği $G(X;r)$ grafinin

yapısına dayanmaktadır. Bu ise grafların olasılık teorisinin oldukça iyi anlaşılması ile mümkündür. Daha genel bilgi için Godehart (1990) çalışmasına bakılabilir. Her birey için ölçülen öznitelik sayısının d olarak gösterildiğini ve ölçülen özneliğin sürekli bir değişken olduğunu varsayalım. Ölçümlere dayanarak iki birey arasındaki farklar değerlendirilebilir ve bu farklılıklara göre bireylerin kümeleri oluşturulabilir. Bu diyagramda her birey $\mathbb{R}^d$ uzayında bir öge ile temsil edilir. İki birey arasındaki farklılıkları ölçmek için olası bir seçenek $\mathbb{R}^d$ uzayında karşılık gelen iki nokta arasındaki Öklid uzaklığıdır, diğeri ise farkların mutlak değerinin maksimumu olan l_∞ mesafedir. Çok değişkenli analizde daha fazla detaya inmeden bu yöntemle farklılıkların $\mathbb{R}^d$ uzayında bazı normlara göre ölçmenin mümkün olduğu söylenebilir. Ölçümlere dayalı olarak kümeler oluşturma'nın çeşitli yöntemleri vardır. Aralarındaki mesafelere özellikle $G(X;r)$ grafına dayanan, küme oluşturma'nın en eski ve en çok çalışılan yöntemlerinden biri tek bağlantılılıktır (similarity relation). r seviyesindeki tek bağlantılı kümeler $G(X;r)$ grafının bağlantılı bileşenleridir. Tek bağlantılı kümeleme aynı zamanda da hiyerarşiktir. Yani herhangi iki tek bağlantılı küme için (aynı düzeyde olması gerekmez) ayrıktır ya da biri diğeri'nin içinde yer alır. Tek bağlantılı kümeleri tanımlamak için kullanılabilecek minimum geren ağacını (MST) oluşturmada yardımcı etkili algoritmalar vardır (Gower ve Ross, 1969).



Şekil 1.6 : Tek bağlantı kullanarak hiyerarşik kümeleme.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Rastlantısal geometrik grafların incelenmesinde graf teorisi ve fonksiyonel analizden bazı temel kavramların bilinmesi gerekli olacaktır. Bu kısımdaki temel tanım ve teoremler (Grimaldi, 2006) ve (Kreyszig, 1973) kitaplarından derlenmiştir. İlgili okuyucular herhangi bir graf teorisi ve fonksiyonel analiz kitabından da temel tanım ve teoremler için yararlanabilir.

Tanım 2.1. (Grimaldi, 2006) V boştan farklı bir küme ve $E \subset V \times V$ olsun. $G = (V; E)$ üçlü yapısına graf (çizge) denir. $V(G)$ veya V ile nokta kümesi (vertex set), $E(G)$ veya E ile kenar kümesi (edge set) gösterilir. Birbirine iki noktayı birleştiren bir kenar varsa bu iki nokta bağlantılıdır (connected) ve bu iki nokta birbirine komşudur (adjacent) denir. Birbirine bağlantılı iki noktanın arasındaki kenara ise bu iki noktaya ait olan kenar (incident edge) denir.

$\forall a, b \in V$ için

$$a \text{ ve } b \text{ bağlantılıdır} \Leftrightarrow a \sim b$$

ile gösterilsin. Yönsüz grafta nokta kümesindeki tüm elemanlar için

$$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$$

sağlanır. Yönsüz grafta $u, w \in V$ noktaları bağlantılı ise u ve w noktalarını birleştiren kenar $\{u, w\}$ ile gösterilir. Burada u ve w noktalarının hangi sırada yazıldığı kenarı değiştirmez. Yani yönsüz grafta $\{u, w\}$ ve $\{w, u\}$ kenarları birbiyle aynıdır.

Tanım 2.2. (Grimaldi, 2006) (Yönlü graf-Digraf) $G = (V; E)$ grafında kenarların yönü varsa bu tür graflara digraf ya da yönlü graf denir.

Yönlü grafta $u, w \in V$ noktaları bağlantılı ise u ve w noktalarını birleştiren kenar $\{u, w\}$ ile $\{w, u\}$ noktalarını birleştiren kenar aynı olmayabilir ya da $\{u, w\} \in E$ iken $\{w, u\} \notin E$ olabilir. Yönlü graflarda graf konfigürasyonu oklu gösterimle yapılır.

Başlangıç ve bitim noktası aynı olan kenara döngü (loop) denir. Bir grafta iki noktayı birleştiren birden fazla kenar varsa bu tür graflara çoklu graf (multigraph) denir. Çok yönlü graflarda iki kenar arasında maksimum bağlantı sayısı $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n -graf denir.

Tanım 2.3. (Grimaldi, 2006) $G = (V; E)$ yönsüz grafında $x, y \in V$ olsun. G grafında x noktasından başlayıp y noktasında biten, n tane

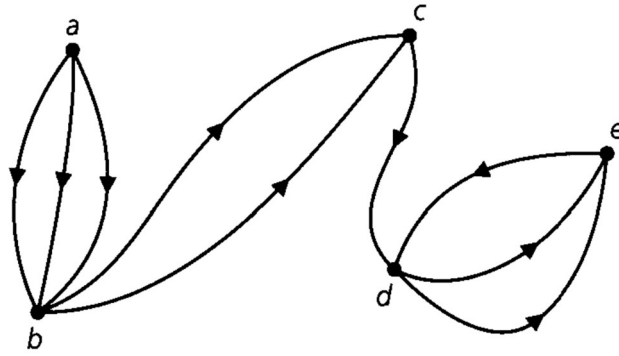
$$e_i = \{x_{i-1}, x_i\} \in E, 1 \leq i \leq n,$$

kenarına sahip $x - y$ yürüyüşü ($x - y$ walk),

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

sonlu alterne diziyle gösterilir. Yürüyüşün uzunluğu yürüşteki kenar sayısı olan n 'dir. $x - y$ yürüyüşünde $x = y$ ve $n > 1$ ise kapalı yürüyüş (closed walk), diğer durumlarda açık yürüyüş (open walk) adını alır. Yürüyüşte nokta ve kenar tekrarı olabileceğine dikkat edilmelidir.

Örnek 2.1:



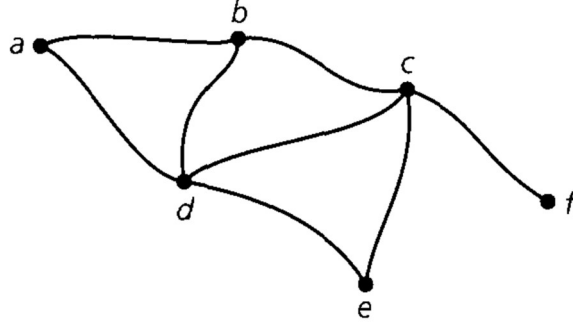
Şekil 2.1 :Yönlü çoklu graf örneği, Grimaldi (1993)

Şekil 2.1'de a 'dan b 'ye 3 kenar olup $\{a, b\}$ 3 katlıdır. $\{b, c\}$ kenarı 2 katlı, $\{e, d\}$ yalnızca bir bağlantı ve $\{d, e\}$ kenarı 2 katlıdır. Bu durumda bu graf; yönlü 3-graf olacaktır.

Tanım 2.4. (Grimaldi, 2006) $G = (V; E)$ yönsüz grafında $x - y$ yürüyüşü için

- Eğer $x - y$ yürüyüşünde kenar tekrarı yoksa, bu yürüyüşe $x - y$ izi ($x - y$ trail) denir. $x - x$ kapalı izine devre (circuit) denir.
- Eğer $x - y$ yürüyüşünde nokta tekrarı yoksa, bu yürüyüşe $x - y$ patikası ($x - y$ path) denir. $x - x$ kapalı patikasına çember (cycle, çevrim) denir.

Örnek 2.2:



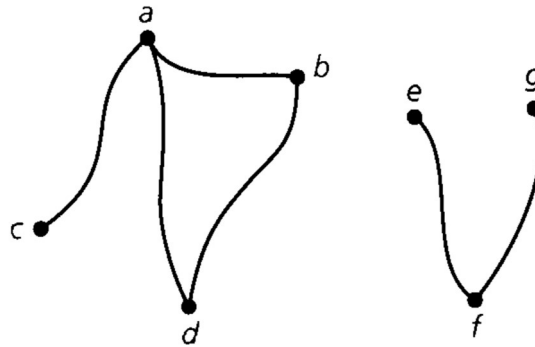
Şekil 2.2: Bağlantılı graf örneği, Grimaldi (1993)

Şekil 2.2'deki graf üzerinde $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow f$ yürüyüşü 6 uzunluğunda olup, bu yürüyüşte c kenarı tekrar ettiği için $a-f$ açık yürüyüşü $a-f$ patika ($a-f$ path) olmayacaktır. Fakat kenar tekrar edilmediği için $a-f$ iz ($a-f$ trail) olacaktır.

Başka bir $a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$ yürüyüşünde ise herhangi bir nokta tekrarı bulunmayıp kapalı bir yürüyüş olduğundan, $a-a$ kapalı patikası bir çevrim (cycle) oluşturur.

Tanım 2.5. (Grimaldi, 2006) $G = (V; E)$ yönsüz grafının herhangi iki farklı noktası arasında bir patika varsa, bu grafa bağlantılı graf (connected graph) denir. Bağlantılı olmayan grafa bağlantısız graf (disconnected graph) denir.

Örnek 2.3:



Şekil 2.3: Bağlantılı olmayan graf örneği, Grimaldi (1993)

Şekil 2.3'te resmedilen $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ köşe kümesi üzerindeki yönsüz grafa a 'dan e 'ye bir patika bulunmadığı için $G = (V; E)$ grafi bağlantılı olmayan graf (disconnected graph) olacaktır. Bu örnekteki $V_1 = \{a, b, c, d\}$ köşe kümesi bağlantılı ve $V_2 = \{e, f, g\}$ köşe kümesi bağlantılı olup, bu kümelere grafin bileşenleri (component) denir.

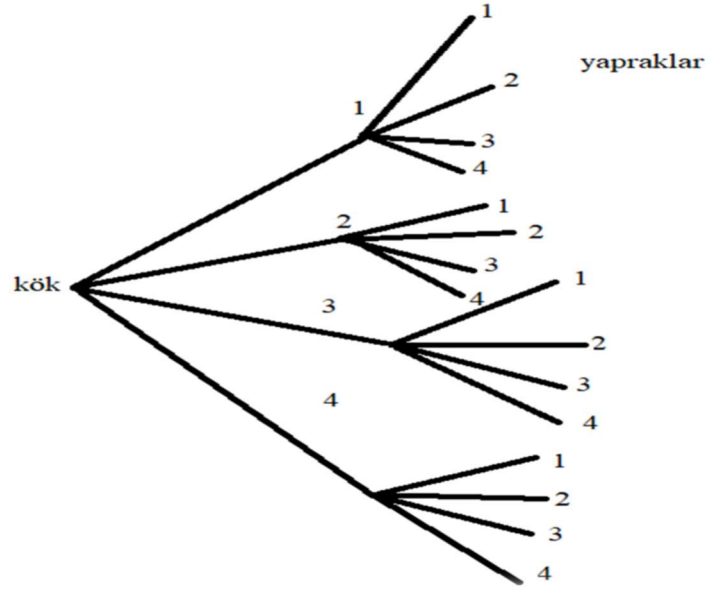
Tanım 2.6. (Grimaldi, 2006) $G = (V; E)$ (yönlü veya yönsüz) graf olsun. $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ ve $E_1 \subseteq E$ olmak üzere E_1 'deki her kenar V_1 noktalarına ait kenarlar (incident edges) olsun. Bu durumda $G_1 = (V_1; E_1)$ grafına G nin bir alt-grafı (subgraph of G) denir.

Tanım 2.7. (Grimaldi, 2006) $G = (V; E)$ (yönlü veya yönsüz) grafi ve $G_1 = (V_1; E_1)$ alt-grafı verilsin. Eğer $V_1 = V$ ise $G_1 = (V_1; E_1)$ alt-grafına özel olarak G grafinin geren alt grafı (spanning subgraph of G) denir.

Tanım 2.8. (Grimaldi, 2006) (Ağaç) $G = (V; E)$ döngüsüz yönsüz grafi (loop-free undirected graph) verilsin. Eğer G grafi bağlantılı ve çevrim (cycle) içermiyorsa, bu graf tipine özel olarak ağaç (tree) denir. $T = (V; E)$ gösterimi ağaçlar için kullanılır. Ağaçlar özel graf yapıları olduğu için graflar için tanımlanan bir çok kavram ve özelliğin, ağaçlar için de benzer şekilde tanımlanabileceğine dikkat edilmelidir.

Graf teorideki bir çok kavram olasılık problemlerinin tanımlanmasında ve modellenmesinde kullanılabilir. Şimdi bu durumu basit bir örnekle açıklayalım.

Örnek 2.4. (Bertsekas ve Tsitsiklis, 2000) (Dizisel Modeller) Olasılık teorisinde bir çok olay dizisel karaktere sahiptir. Örneğin bir madeni paranın üç kere atılması deneyi, bir depodaki stok değerinin beş gün ard arda gözlenmesi gibi olaylar dizisel karakterlidir. Dört yüzlü bir zarın atılması deneyini ele alalım. Bu deneyin sonuçları ağaç tabanlı dizisel gösterimle modellenebilir (tree-based sequential description).



Şekil 2.4: Dört yüzlü bir zarın iki kez atılması deneyi için örnek uzay açıklaması.

Yukarıdaki ağaç gösteriminde her nokta (node) bir olayla tanımlanabilir. Örneğin birinci atışta 1 gelen iki atışlı deneyin olayları

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

ile gösterilir. Bu durum ağaç konfigürasyonunda bir yaprak kümesi ile gösterilir.

Tanım 2.9. (Kreyszig, 1973) $X \neq \emptyset$ bir küme ve d fonksiyonu

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y), \end{aligned}$$

verilsin. $\forall x, y, z \in X$ için

M1) d reel değerli, sonlu negatif olmayan,

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M3) $d(x, y) = d(y, x)$,

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

özelliklerini sağlıyorsa, d fonksiyonuna metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

M1)-M4) özelliklerine metrik aksiyomları denir.

Örnek 2.5. (Kreyszig, 1973) d -boyutlu $\mathbb{R}^d$ Öklid uzayı, $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$,
 $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ için $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlanan

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \dots + (\xi_d - \eta_d)^2} \quad (2.1)$$

dönüşümü ile birlikte bir metrik uzaydır. (Burada metrik anlamında kullanılan d fonksiyonu ile boyutu ifade eden d sayısı karıştırılmamalıdır.)

Örnek 2.6. (Kreyszig, 1973) l^p dizi uzayı ($p \geq 1$ fiks reel sayı olmak üzere)

$\forall x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ için $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$ özelliğine sahip dizilerin uzayı olarak tanımlanır. l^p üzerinde,

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

dönüşümü metrik aksiyomlarını sağlar.

Tanım 2.10. (Kreyszig, 1973) $x_0 \in X$ merkez ve reel $r > 0$ yarıçapı için

$$B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, \quad (2.3)$$

$$S(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{B}(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}, \quad (2.5)$$

kümeleri sırasıyla açık yuvar, kapalı yuvar ve küre olarak tanımlanır.

Tanım 2.11. (Kreyszig, 1973) **(Vektör uzayı)** $X \neq \emptyset$ bir küme ve $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ cisim olsun. X üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X,$$

dönüşümleriyle gösterilsin. Eğer X bu iki işleme göre de kapalı ve $\forall x, y, z \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in K$ için aşağıda verilen,

i. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$

ii. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$

iii. $x + y = y + x,$

iv. $x + (y + z) = (x + y) + z,$

v. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$

vi. $\exists 0 \in X \ni 0 + x = x,$

(Burada 0 vektörü için toplama işleminin etkisiz elemanı olarak kullanıldığına dikkat ediniz.)

vii. $0x = 0,$

viii. $1x = x,$

(1 çarpma işleminin birim elemanı anlamında kullanılmıştır.)

özellikleri bu iki işlem için sağlıyorsa, X vektör uzayı olarak adlandırılır. X vektör uzayının elemanlarına vektör, K cisminin elemanlarına skaler denir.

Tanım 2.12. (Kreyszig, 1973) X vektör uzayında tanımlı

$$\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R},$$

dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x, y \in X, \quad \forall \alpha \in K$ için

$$N1) \| x \| \geq 0,$$

$$N2) \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$N3) \| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|,$$

$$N4) \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|,$$

özelliklerini sağlıyorsa, $\| \cdot \|$ dönüşümüne X üzerinde bir norm, $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir. $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayında,

$$d(x, y) = \| x - y \| \quad (2.6)$$

dönüşümü X üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe normdan elde edilen metrik denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik tanımlar ancak bu önermenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.7. (Kreyszig, 1973) $\mathbb{R}^d$ üzerinde

$$\| x \| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^d x_k^2 \right)} \quad (2.7)$$

dönüşümü bir norm tanımlar.

Örnek 2.8. (Kreyszig, 1973) l^p üzerinde $\forall x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^p$ ve $y = (\eta_j) = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^p$ için x vektörünün normu,

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile ve normdan elde edilen metrik

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dönüşümleri ile tanımlanır.

Örnek 2.9. (Kreyszig, 1973) l^∞ dizi uzayı, $\forall x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^\infty$ için

$$|\xi_j| \leq c_x$$

(c_x , j ye bağlı reel sayı olmak üzere) özelliğine sahip kompleks sayı dizilerinin uzayı olmak üzere l^∞ uzayında $x = (\xi_j)$ ve $y = (\eta_j)$ elemanları için,

$$d_\infty(x, y) = \sup_{j \in N} |\xi_j - \eta_j|, \quad N = 1, 2, \dots,$$

dönüşümü metrik aksiyomlarını sağlar. l^∞ aynı zamanda vektör uzayı olup d_∞ metrik tanımından yararlanarak x vektörünün normu,

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in N} |\xi_j|, \quad N = 1, 2, \dots,$$

şeklinde tanımlanır.



3. OLASILIK TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde olasılık teorisi temel kavramları tanımlanmakta, olasılık uzayı ve olasılık fonksiyonu değişken türleri ve değişken türlerine göre dağılım fonksiyonları gibi tez için gerekli olan ve literatürde yer alan temel tanımlar, kavramlar ve özellikler verilmektedir.

Olasılık teorisi kümelerin dilini kullanır. Kümeler için tanımlanır ve hesaplanır. Burada konumuzda kullanacağımız küme teorisinden bazı temel kavramları kısaca gözden geçireceğiz.

Tanım 3.1. (Durret, 1991) Bir deneyin olabilir tüm sonuçlarının oluşturduğu kümeye örnek uzay denir. Ω ile gösterilecektir.

Tanım 3.2. (Durret, 1991) Ω uzayının alt kümelerinden oluşan kümeye sınıf denir. U ile gösterilecektir.

Örnek 3.1. (Williams, 1991) Bir madeni paranın iki kez atılması deneyinde

$$\Omega = \{YY, YT, TY, TT\}$$

kümesi örnek uzay,

$$U = \text{En az bir kez tura gelmesi}$$

bir olayı gösterir.

Tanım 3.3. (Williams, 1991) $\Omega \neq \emptyset$ ve U , Ω uzayında bir sınıf olmak üzere

- i) $\Omega \in U$,
- ii) $A \in U, \bar{A} \in U$,
- iii) $(A_n), U \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$,

özelliklerini sağlıyorsa U sınıfına Ω uzayında bir σ – cebir denir.

Tanım 3.4. (Williams, 1991) Ω boş olmayan bir küme, U ise Ω üzerinde bir σ – cebir olsun. U üzerinde tanımlı,

$$P:U \rightarrow [0,1]$$

$$A \rightarrow P(A)$$

P fonksiyonu,

$$i) \quad \forall A \in U \text{ için } P(A) \geq 0,$$

$$ii) \quad P(\Omega) = 1,$$

iii) $A_n, n \in \mathbb{N}$ kümeleri U daki ayrık ($A_k \cap A_j = \emptyset, k \neq j$) olaylarının bir dizisi olmak üzere,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

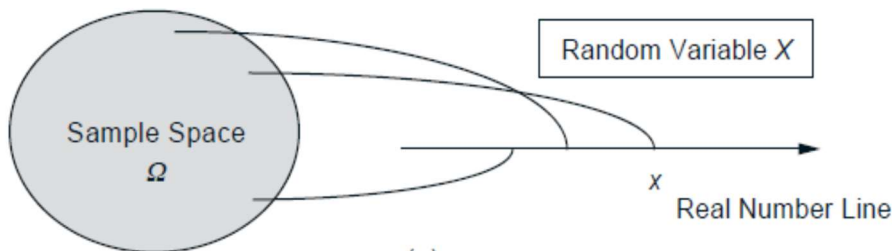
özelliklerini sağlıyorsa, P olasılık ölçüsü olarak tanımlanır. $P(A)$ ya A olayının olasılığı denir. (Ω, U, P) üçlüsüne de bir olasılık uzayı denir.

Tanım 3.5. (Pisshro-Nik, 2014) (**Rastgele Değişken**) Rastgele deneyleri analiz etmek için, deneyin bazı sayısal yönlerine odaklanılır. Örneğin, bir maçtaki gol sayısı, köşe vuruşları sayısı, maçtaki şut sayısı gibi durumlar rastgele değişkene örnektir. Kısaca rastgele değişken ile rastgele bir deney ile belirlenen gerçek değerli bir değişken düşünülmelidir.

Rastgele bir X değişkeni, örnek uzaydan gerçekte sayılara bir fonksiyon olup,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilir. Rastgele değişken genellikle X, Y, Z gibi büyük harf ile sembolize edilir. Rastgele değişken bir fonksiyon olduğu için onun aralığından bahsedebiliriz. X 'in aralığı olası değerler kümesidir (Borstsekas ve Tsitsiklis, 2000).



Şekil 3.1 : Rastgele bir değişkenin görselleştirilmesi, Borstsekas ve Tsitsiklis (2000).

Örnek 3.2. (Pisshro-Nik, 2014) Bir madeni paranın ilk kez tura gelene kadar atılması deneyinde Y toplamda madeni paranın atış sayısı olsun. Y rastgele değişkeni pozitif tamsayı değerleri alır. Y 'nin aralığı R_Y olsun.

$$R_Y = \{1, 2, 3, \dots\}$$

olacaktır.

Rastgele değişkenler; değişkene atanan sayısal değerlerin tamsayı veya ondalıklı değerler alabilme durumuna göre iki ana başlık ile ele alınır. Kesikli rastgele değişken ve sürekli rastgele değişken olmak üzere iki önemli değişken sınıfı vardır.

Tanım 3.6. (Pisshro-Nik, 2014) (**Kesikli Rastgele Değişken Ve Dağılımı**) Kesikli rastgele değişken, aldığı değer aralığı sayılabilir olan rastgele değişkendir. Aralıktaki değerler küçük harfler ile gösterilir,

$$R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

olayların $\{X = x_k\}$ için olasılıkları olasılık kütle fonksiyonu (PMF) ile gösterilir.

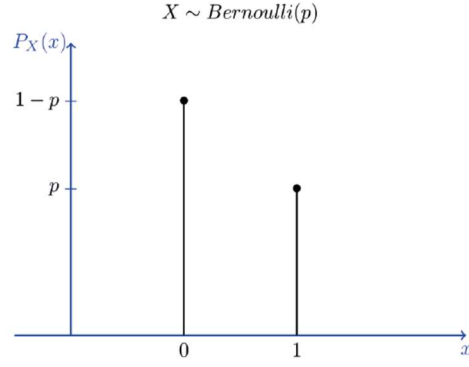
Tanım 3.7. (Pisshro-Nik, 2014) X bir rastgele değişken ve $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ olmak üzere,

$$P_X(x_k) = P(X = x_k) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

fonksiyonu olasılık kütle fonksiyonu (PMF) olarak adlandırılır.

Tanım 3.8. (Pisshro-Nik, 2014) (**Bernoulli dağılımı**) İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli'nin adının taşıyan Bernoulli dağılımı tek bir deneyin iki farklı sonuca sahip olduğu durumlarda uygulanır. Bernoulli dağılımında deney yalnızca bir kez ($n=1$) tekrarlanır. Deneyin başarılı olma durumu için $p=1$, başarısız olma durumu için $q=0$ ($q=1-p$) geçerli olur.

Örneğin; bir madeni para atılması deneyi, bir öğrencinin sınavdan geçmesi veya kalması deneyi bu duruma örnek verilebilir.



Şekil 3.2 : $Bernoulli(p)$ rastgele değişkeni için PMF, Pisshro-Nik(2014).

Bu nedenle Bernoulli rastgele değişkeni gösterge (indicator) rastgele değişkeni olarak da adlandırılır. Özellikle bir A olayı için 1_A gösterge rastgele değişkeni,

$$\begin{aligned} 1 & , \quad A \text{ olayı gerçekleşiyorsa} \\ 0 & , \quad \text{aksi durumda} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Bu durumda,

$$E(x) = p \quad (E(x) = \mu), \quad (3.1)$$

$$Var(x) = \sigma^2 = p(1-p), \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.9. (Biagini ve Campanino, 2015) (**Binom dağılımı**) Binom dağılımı bir Bernoulli olayının birden çok kez tekrar edilmesi ile her tekrarda başarı ve başarısızlık olarak adlandırılan iki olası sonuca sahip deneme dizisi olarak özetlenebilir. Her deneme için aynı koşullar geçerli olup denemelerin arasında herhangi bir etki olmadığı varsayılır.

$P(E_i) = p$ olmak üzere her bir Bernoulli deneyi $(E_i)_{i \in N}$ olsun. S_n ilk n denemedeki başarı sayısı olsun.

$$S_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

ile ifade edilirse, S_n için olası değerler kümesi,

$$I(S_n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

olacaktır.

$E_1, E_2, \dots, E_n$ olaylarının I bileşenleri ile S_n in olasılık dağılımını hesaplayalım.

$$P(S_n = k) = \sum_{Q \subseteq (S_n = k)} P(Q)$$

$(S_n = k)$ olayına göre I bileşeninin olasılığı belirlenebilir. Bu şekilde bir bileşenin örneği,

$$Q = E_1 E_2 \dots E_k \tilde{E}_{k+1} \dots \tilde{E}_n$$

biçimindedir. İlk k denemede elde edilen başarı sayısı k iken kalan denemelerde başarısızlık sayısı $n - k$ dır. Olaylar bağımsız olduğundan,

$$P(Q) = \underbrace{pp \dots p}_{n \text{ kez}} \underbrace{(1-p)(1-p) \dots (1-p)}_{n-k \text{ kez}} = p^k (1-p)^{n-k} \quad (3.3)$$

ile verilir. $P(S_n = k)$ ifadesini hesaplamak için; (3.3) ifadesindeki değer I tipindeki (n adet) bileşenlerin sayısı çarpılır. Bu ise n adet deneme sayısından k elemanlı alt kümelerin seçilmesi sayısı; $\binom{n}{k}$ sayısına eşittir. Buradan,

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (3.4)$$

elde edilir. Son eşitliğin bir olasılık fonksiyonu olduğunu kontrol etmek kolaydır.

$$1 = (p + 1 - p)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

S_n 'in beklenen değerini hesaplamamanın en kolay yolu beklentinin doğrusallığını kullanmaktır.

$$\begin{aligned} P(S_n) &= P(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) \dots + P(E_n) \\ &= \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ adet}} = np \end{aligned}$$

elde edilir. Binom dağılımı ile önemli istatistiksel değerler özetlenecek olursa,

$$X \sim Bi(n, p)$$

p = bir deneydeki başarı oranı

q = bir deneydeki başarısızlık oranı ($q = 1 - p$)

n = deney sayısı

k = istenilen başarılı olay sayısı

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (3.5)$$

$$\mu = E(x) = np \quad (3.6)$$

$$Var(x) = np(1-p) \quad (3.7)$$

eşitlikleriyle ifade edilir.

Tanım 3.10. (Biagini ve Campanino, 2015) (**Süreklili Rastgele Değişken ve Dağılımı**) Kesikli dağılıma sahip sayılar için dağılım; tamamen tek değer alma olasılıkları ile hesaplanır. Bir aralıktaki tüm değerleri alan bir rastgele değişken belirlemek istiyorsak tekil değerlerin hesaplanması yeterli olmayacaktır.

Örneğin; $[a, b]$ aralığından bir seçime karşılık gelen rastgele değişken için tekil değer alma olasılığı sıfır olacaktır. Bir X rastgele değişkeni belli bir aralıkta verilmiş sonsuz sayıdaki değerleri alabiliyorsa sürekli rastgele değişkendir. Bu başlıkta sürekli rastgele değişken için dağılımı tanımlamanın nasıl mümkün olduğunun üzerinde durulacaktır.

$X \in (-\infty, \infty)$ aralığında negatif olmayan bir $f(x)$ fonksiyonu varsa, bu fonksiyon

$$i) \quad f(x) \geq 0$$

$$ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

koşullarının sağlıyorsa olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Sonsuz değer aralığındaki tek bir değer alma olasılığı sıfırdır (Berstsekas ve Tsitsiklis, 2000).

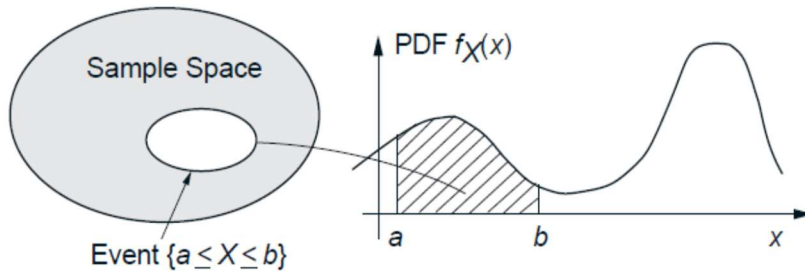
$X_i \in [c, d]$ durumunda ise,

$$P(c \leq x \leq d) = P(c \leq x < d) = P(c < x \leq d) = P(c < x < d) = \int_c^d f(x) dx \quad (3.8)$$

olacaktır. Ayrıca,

$$P(X_i = x) = 0$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 3.3 : Şekilde taralı alan; $[a, b]$ aralığında değerler alan X sürekli rastgele değişkeninin olasılığı $\int_a^b f_X(x) dx$ ile resmedilmiştir. Berstsekas ve Tsitsiklis (2000). X rastgele değişkeni $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ olduğunu kolayca gösterilebilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^y f(y) dy = \lim_{x \rightarrow \infty} F(X) = 1$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $a \leq b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için,

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) \quad (3.9)$$

eşitliği vardır.

3.1. Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

Matematiksel beklenti; birçok defa tekrarlanan ve her tekrarda mümkün tüm olasılıklarını değiştirmeyen rastgele deneylerin sonuçlarından beklenen ortalama değeri temsil eder. Bir kesikli rastgele değişken için beklenen değer; sonuç değerlerinin olasılıklarıyla çarpılması ve bu işlemin bütün değerler üzerinden elde edilerek toplanmasıyla elde edilen değerdir.

Tanım 3.1.1. (Berstsekas ve Tsitsiklis, 2000) Kesikli X rastgele değişken için beklenen değer (expected value);

$$E(X) = \sum_x xP(X = x) \quad (3.10)$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.1.1: (Pisshro-Nik, 2014) *Bernoulli*(p) için beklenen değer hesaplanırsa,

$$R_X = \{0, 1\}$$

$$P_X(1) = p$$

$$P_X(0) = 1 - p$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0P_X(0) + 1.P(1) \\
&= 0(1-p) + 1p \\
&= p
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.2: (Pisshro-Nik, 2014) $X \sim Poisson(\lambda)$ için aldığı değer aralığı yazarken Poissona uygun örneklerde bu değerlerin Poisson dağılımına sahip olması belirleyici olacaktır. Değer aralığı,

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

ve olasılık kütle fonksiyonu (probability mass function) PMF ile gösterilmek üzere

$$P_X(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

kullanılarak beklenen değer hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x_k \in R_x} x_k P_X(x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada e^λ ifadesinin Taylor açılımı $\left(e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)$ yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
E(X) &= e^{-\lambda} \lambda e^\lambda \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.2. (Berstsekas ve Tsitsiklis, 2000) Bir sürekli rastgele değişken için beklenen değer; rastgele değişken ile olasılık yoğunluk fonksiyonunun çarpılarak belirsiz integralinin alınmasıdır. Burada ağırlıklı ortalama olarak ta düşünülebilir ki;

değerler, ağırlık katsayıları verilen olasılık kütle fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonsiyonudur. Sürekli X rastgele değişken için beklenen değer,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.11)$$

eşitliği ile verilir.

3.2. Bir Rastgele Değişkenin Varyansı

Olasılık kuramı ve istatistik bilim dallarında varyans; bir rastgele değişken bir olasılık dağılımı bir örneklem için istatistiksel yayılımın mümkün bütün değerlerin beklenen değer veya ortalamadan uzaklıklarının karelerinin ortalaması şeklinde bulunan bir ölçüdür. Değerlerin ne derecede ne ölçüde yaygın olduklarını tanımlamayı hedef alır. Varyansın karekökü standart sapma olarak adlandırılır. Varyans dağılıma ait her bir değer için ortama değerden ne kadar uzaklıkta olduğuyla ilişkilidir.

Tanım 3.2.1 (Berstsekas ve Tsitsiklis, 2000) Kesikli X rastgele değişkeni için;

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sigma_x^2 \\ &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[(X - E(X))^2] \\ &= \sum_x (x - E(x))^2 P(X = x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ile tanımlanır (Biagini ve Campanino, 2015). $E(X)$ in tanımını kullanılarak varyans hesaplamasının başka bir yolu elde edilebilir,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X\mu] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir.

Örnek 3.2.1: (Pisshro-Nik, 2014) $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ için varyans değeri hesaplanırken; öncelikle binomal rastgele değişken n adet Bernoulli değişkeninin toplamı ile $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ifadesi ve varyans değerinin lineerlik özelliğinden,

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

yazılır. Ayrıca $X_i = \text{Bernoulli}(p)$ için (3.9)'dan,

$$\text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n E[X_i^2] - (E(X_i))^2 = \sum_{i=1}^n 1^2 p + 0^2 (1 - p) - p^2 = \sum_{i=1}^n p(1 - p)$$

olacaktır. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= p(1 - p) + p(1 - p) + \dots + p(1 - p) \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.2 (Borstekas ve Tsitsiklis, 2000) Sürekli X rastgele değişkeni için varyans değeri;

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sigma_x^2 \\ &= E[(x - \mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x - E(x))^2 f(x) dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2.3 (Feller, 1906) (**Poisson Yaklaşımı**) Birçok uygulamada n ve p değerlerini kıyasladığımızda n 'nin büyük p 'nin küçük (ölçü birimi küçüldükçe aralıktaki sayılar fazlalaşır olasılık azalır böylece ölçüm hassaslaşır) olduğu Bernoulli denemeleriyle sık karşılaşılır. Bu değerlerin çarpımı ise,

$$\lambda = np$$

orta büyüklükte bir değer olacaktır.

Burada Poisson'dan kaynaklanan ve türetmeye devam etmeye uygun şekilde $Bi(k; n, p)$ ifadesine yaklaşımın kullanımı (diğer bir ifadeyle Poisson dağılımının, Binomal dağılımda limitten elde edilmesi) gösterilebilir.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad (3.15)$$

eşitliğinde $p = \frac{\lambda}{n}$ eşitlikte yerine konularak limit alınırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \frac{\lambda^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{n^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}\end{aligned}$$

bulunur. Bu limit ifadesinde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x} \frac{e^{-\lambda}}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x} \frac{e^{-\lambda}}{1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x} \frac{1}{x!} \frac{e^{-\lambda}}{1}\end{aligned}\tag{3.16}$$

ifadesine ulaşılır. (3.11) eşitliğinde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!} = n^x$$

değeri yerine yazılır ve hesaplamaya devam edilirse,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x}{1} \frac{1}{x!} \frac{\lambda^x}{n^x} \frac{e^{-\lambda}}{1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{e^{-\lambda}}{1} \\ &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.4 (Berstsekas ve Tsitsiklis, 2000) (**Poisson Dağılımı**) Bir olayın belirli bir zaman aralığında ne sıklıkla gerçekleştiğini gösteren dağılımdır. Bir olayın belirli bir zaman diliminde ne sıklıkla gerçekleşeceğini modellemek için kullanılır. Kesikliden sürekli zamana geçiş olarak düşünülebilir. Örneğin; bir ayda gerçekleşen araba kazası

sayısı, bir çağrı merkezinin yarım saatte aldığı çağrı sayısı Poisson dağılımı ile modellenebilir.

λ parametresi ile bir Poisson rastgele değişkeni olan X için Poisson dağılımı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$X \sim Po(\lambda)$$

λ : belirli bir zaman aralığında gerçekleşmesi beklenen olay sayısı

k : belirtilen zaman aralığında gerçekleşmesi istenen olay sayısı

e : Euler sayısı ($e = 2.71828...$)

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (3.17)$$

Teorem 3.2.1. (Pisshro-Nik, 2014) (**Markov Eşitsizliği**) X negatif değerler almayan rastgele değişken ve $a > 0$ olmak üzere,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad (3.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: X pozitif sürekli rastgele değişkeni olmak üzere,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \\ &\geq \int_a^{\infty} x f_X(x) dx \\ &\geq \int_a^{\infty} a f_X(x) dx \\ &= a \int_a^{\infty} f_X(x) dx \\ &= a P(X \geq a). \end{aligned}$$

□

4. RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAF İÇİN OLASILIKSAL EŞİTSİZLİKLER

Rastlantısal geometrik graf teorisi matematiğin üç ayrı konusunu içine alan ve güncel doğa olaylarının uygulamalarını içeren çok yönlü bir konudur. Bu nedenle, bu konuyu ele alan çalışmalarda bazı problemler olasılık teorisi ağırlıklı olarak ilerlerken bazı araştırmalar fonksiyonel analiz teorisi ağırlıklı olarak ilerlemektedir. Bazı araştırmacılar ise graf teorisi tekniklerini merkeze alan problemleri incelemektedir. Okuyucuya bu konu hakkında farklı bakış açıları kazandırabilmek amacıyla bu tezin dördüncü bölümü olasılık teorisi ağırlıklı olarak ilerleyecek, son bölümde ise fonksiyonel analiz ağırlıklı bir model göz önüne alınacaktır.

Bu bölümde önceki bölümlerde verilen temel tanım ve teoremler kullanılarak (Penrose, 2003) kitabının birinci kısmındaki bazı rastlantısal geometrik grafların olasılık teorisi ağırlıklı sonuçları incelenecektir.

$0 \leq p \leq 1$ ve p olasılık için 1 değerini alan, $1-p$ olasılık için 0 değerini alan Bernoulli (p) rastgele değişkeni, bağımsız n kez tekrar eden Bernoulli (p) dağılımı ile binominal rastgele değişkeni için $Bi(n, p)$ yazımı kullanılacaktır. λ parametresi ile Poisson rastgele değişkeni için $Po(\lambda)$ yazımı kullanılacaktır.

Binominal değişken $Bi(n, p)$ için üst sınır ve Poisson değişkeni için beklenenden daha büyük veya daha küçük olma olasılığı ile değişmeyen üst sınırlar üzerinde durulacaktır. Bu bölüm boyunca $H : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere H fonksiyonu aşağıdaki tanımlanan biçimde kullanılacaktır.

$$H(a) = 1 - a + a \log a, \quad a > 0. \quad (4.1)$$

$H(0) = 1$ değeri aşıkardır. Ayrıca,

$$H'(a) = -1 + \log a + 1$$

ve

$$H''(a) = \frac{1}{a}$$

işlemleri ile $H'(1) = 0$ olduğundan bu fonksiyon için 1 noktası minimum noktası ve dönüm noktasıdır. Ayrıca, bu bölüm boyunca tüm logaritma tabanlarımız e (Euler sayısı $e = 2,718182\dots$) alınacaktır.

Lemma 4.1. (Penrose, 2003) $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ ve $0 < k < n$ olsun. $\mu = np$ olmak üzere $k \geq \mu$ için,

$$P[Bi(n, p) \geq k] \leq \exp\left(-\mu H\left(\frac{k}{\mu}\right)\right) \quad (4.2)$$

ve eğer $k \leq \mu$ ise,

$$P[Bi(n, p) \leq k] \leq \exp\left(-\mu H\left(\frac{k}{\mu}\right)\right) \quad (4.3)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Son olarak eğer $k \geq e^2 \mu$ ise,

$$P[Bi(n, p) \geq k] \leq \exp\left(-\left(\frac{k}{2}\right) \log\left(\frac{k}{\mu}\right)\right) \quad (4.4)$$

olasılıksal eşitsizliği bulunur.

İspat: $X = Bi(n, p)$ ve $q := 1 - p$ ve $z \geq 1$ için Markov eşitsizliği kullanarak

$P[X \geq k]$ olasılığı için sınır,

$$P[X \geq k] \leq \frac{E(x)}{k} \leq \frac{E(z^k)}{z^k} = z^{-k} E(z^k) \quad (4.5)$$

olur. (4.5) eşitsizliğinde,

$$E(x) = \sum x p(x) \rightarrow E(e^x) = \sum e^x p(x)$$

eşitliği ve (3.1) ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} P[X \geq k] &\leq z^{-k} \sum_{x=k}^n z^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= z^{-k} \sum_{x=1}^{\infty} \binom{n}{x} (zp)^x q^{n-x} \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliği bulunur. (4.6) ifadesinde,

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

binom açılımı yerine yazılarak işleme devam edilirse,

$$\begin{aligned} z^{-k} E(z^k) &= z^{-k} (pz + q)^n \\ &= z^{-k} (pz + 1 - p)^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur.

Eğer $z \leq 1$ ise $P[X \geq k]$ olasılığı için sınırın aynı ifade olduğu açıktır.

$z := \frac{kq}{(n-k)p}$ değeri verildiğinde $k \geq \mu$ için en az 1, $k \leq \mu$ için en çok 1 değerini alacaktır. Şimdi

$$pz + q = p \frac{kq}{(n-k)p} + q = \frac{kq}{n-k} + q = \frac{nq - kq + kq}{n-k} = \frac{nq}{n-k}$$

değeri (4.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} z^{-k} (pz + q)^n &= \left(\frac{kq}{(n-k)p} \right)^{-k} \left(\frac{nq}{n-k} \right)^n \\ &= \left(\frac{(n-k)p}{kq} \right)^k \left(\frac{nq}{n-k} \right)^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $n^n = n^k n^{n-k}$ değişimini kullanmak faydalı olacaktır. Buradan,

$$\begin{aligned} z^{-k} (pz + q)^n &= \frac{(n-k)^k p^k n^n q^n}{(kq)^k (n-k)^n} = \frac{n^{n-k} q^{n-k} p^k n^k}{(n-k)^{n-k} k^k} \\ &= \left(\frac{np}{k} \right)^k \left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. $x \leq e^{x-1}$ eşitsizliği tüm $x > 0$ ve $x = nq / (n-k)$ değerine kadar doğrudur.

Bu seçim ile;

$$x - 1 = \frac{nq}{n-k} - 1 = \frac{nq - n + k}{n-k} = \frac{n(1-p) - n + k}{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n - np - n + k}{n - k} \\
&= \frac{k - np}{n - k}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.8)'de elde edilen sınırdaki gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{np}{k}\right)^k e^{k-np} &= \frac{n^k p^k}{k^k} e^k e^{-np} \\
&= \left(\frac{enp}{k}\right)^k e^{-np} \\
&= \left(\frac{np}{k}\right)^k e^{k-np} = \frac{n^k p^k}{k^k} e^k e^{-np} \\
&= \exp\left(\ln\left[\left(\frac{e\mu}{k}\right)^k e^{-\mu}\right]\right) \\
&= \exp\left(\ln\left(\frac{e\mu}{k}\right)^k + \ln e^{-\mu}\right) \\
&= \exp\left(\ln e^k + \ln\left(\frac{k}{\mu}\right)^{-k} + \ln e^{-\mu}\right) \\
&= \exp\left(k - k \ln\left(\frac{k}{\mu}\right) - \mu\right) \\
&= \exp\left(-\mu\left(1 + \frac{k}{\mu} \ln\left(\frac{k}{\mu}\right) - \frac{k}{\mu}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\mu H\left(\frac{k}{\mu}\right)\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Lemma 4.2. (Penrose, 2003) $k > 0$ ve $\lambda > 0$ kabul edilsin. Eğer $k \geq \lambda$ ise

$$P[Po(\lambda) \geq k] \leq \exp\left(-\lambda H\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right) \quad (4.9)$$

eşitsizliği; $k \leq \lambda$ ise,

$$P[P_o(\lambda) \leq k] \leq \exp\left(-\lambda H\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right) \quad (4.10)$$

olasılıksal eşitsizliği ve son olarak eğer $k \geq e^2 \lambda$ ise,

$$P[P_o(\lambda) \geq k] \leq \exp\left(-\left(\frac{k}{2}\right) \log\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right) \quad (4.11)$$

olasılıksal eşitsizliği elde edilir.

İspat: Burada $X = Po(\lambda)$ için Poisson dağılım fonksiyonu $P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ biliniyor.

Markov Eşitsizliğinde $P[X \geq k]$ olasılığı için geçerli sınır;

$$P[X \geq k] \leq \frac{E(X)}{k} = \frac{\sum x p(x)}{k}$$

şeklinde yazılır. $z \geq 1$ sayısı için eşitsizlik,

$$\begin{aligned} z^{-k} E[z^x] &= z^{-k} \sum z^x p(x) = z^{-k} \sum z^x \lambda^x \frac{e^{-\lambda}}{x!} \\ &= z^{-k} e^{-\lambda} \sum_{x=1}^n z^x \frac{\lambda^x}{x!} = z^{-k} e^{-\lambda} \sum_{x=1}^n \frac{(z\lambda)^x}{x!} \end{aligned} \quad (4.12)$$

formunu alır. e^x için Taylor açılımı olan,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ifadesi kullanılır ve (4.12)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} z^{-k} E[z^x] &= z^{-k} e^{-\lambda} e^{z\lambda} \\ &= z^{-k} e^{\lambda(z-1)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Ardından benzer olarak $P[X \leq k]$ ifadesi için eşitsizlik araştırılırsa; $z \leq 1$

için $z = \frac{k}{\lambda}$ değişken değişimi ile (4.13)'te yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{-k} E\left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^x\right] = \left(\frac{\lambda}{k}\right)^k e^{\lambda(k/\lambda-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\lambda}{k}\right)^k e^{\lambda \left(\frac{k-\lambda}{\lambda}\right)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{k}\right)^k e^{k-\lambda} \\
&= \exp \left(\ln \left[\left(\frac{\lambda}{k}\right)^k e^{k-\lambda} \right] \right) \\
&= \exp \left(\ln \left(\frac{\lambda}{k}\right)^k + \ln e^{k-\lambda} \right) \\
&= \exp \left(k \ln \left(\frac{\lambda}{k}\right) + k - \lambda \right) \\
&= \exp \left(-k \ln \left(\frac{k}{\lambda}\right) + k - \lambda \right) \\
&= \exp \left(-\lambda \left[-k - 1 + \frac{k}{\lambda} \ln \left(\frac{k}{\lambda}\right) \right] \right) \\
&= \exp \left(-\lambda H \left(\frac{k}{\lambda}\right) \right) \\
&= \exp \left(-\lambda H \left(\frac{k}{\lambda}\right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerinin ispatı tamamlanır.

Lemma 4.3. (Penrose, 2003) $\mu \geq 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$P[Po(\mu) = k] \geq \left(\frac{e^{-1/(12k)}}{\sqrt{2\pi k}} \right) \exp \left(-\mu H \left(\frac{k}{\mu} \right) \right) \quad (4.14)$$

olasılıksal eşitsizliği sağlanır. $k \geq \mu$ durumu için ise,

$$P[Po(\mu) = k] \geq \left(\frac{e^{-1/(12k)}}{\sqrt{2\pi k}} \right) \exp \left(-k \log \left(\frac{k}{\mu} \right) \right) \quad (4.15)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat : Stirling Formülü (Feller, 1968 , Bölüm II.9),

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

ile verilir. Robbin'nin geliřtirmesi ile (Feller, 1968),

$$\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k+1}} < k! < \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k}} \quad (4.16)$$

eşitsizliği yazılır. (4.16)'te eşitsizliğin sağ tarafına uygulanacak;

$$\frac{1}{k!} \geq \left(\frac{e}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{-1}{12k}} \quad (4.17)$$

işlemi ile ve (4.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $e^{-\mu} \mu^k$ ile çarpılarak;

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{-1}{12k}} \left(\frac{e}{k}\right)^k e^{-\mu} \mu^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{-1}{12k}} \exp \left(\ln \left[\left(\frac{e}{k}\right)^k e^{-\mu} \mu^k \right] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{-1}{12k}} \exp \left(\ln \left[e^k \left(\frac{\mu}{k}\right)^k e^{-\mu} \right] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{\frac{-1}{12k}} \exp \left(k - \mu - k \ln \left(\frac{k}{\mu} \right) \right) \end{aligned}$$

$$Po(\mu) \geq \frac{e^{\frac{-1}{12k}}}{\sqrt{2\pi k}} \exp \left(-\mu \left(1 - \frac{k}{\mu} + \frac{k}{\mu} \ln \left(\frac{k}{\mu} \right) \right) \right)$$

$$Po(\mu) \geq \frac{e^{\frac{-1}{12k}}}{\sqrt{2\pi k}} \exp \left(-\mu H \left(\frac{k}{\mu} \right) \right)$$

elde edilir.

Lemma 4.4. $\gamma > \frac{1}{2}$ ile $\lambda_1 = \lambda_1(\gamma) > 0$ sabiti tanımlansın. Bu durumda tüm $\lambda > \lambda_1$ için

$$P\left[Po(\lambda) > \lambda + \lambda^\gamma / 2\right] \leq \exp\left(-\lambda^{2\gamma-1} / 9\right) \quad (4.18)$$

ve

$$P\left[Po(\lambda) < \lambda + \lambda^\gamma / 2\right] \leq \exp\left(-\lambda^{2\gamma-1} / 9\right) \quad (4.19)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir.

İspat : Lemma 4.2 uygulanırsa,

$$P\left[Po(\lambda) \geq k\right] \leq \exp\left(-\lambda H\left(\frac{k}{\lambda}\right)\right)$$

bulunur. Burada k değeri için $\lambda + \frac{\lambda^\gamma}{2}$ değerini yazıldığında,

$$P\left[Po(\lambda) > \lambda + \frac{\lambda^\gamma}{2}\right] \leq \exp\left(-\lambda H\left(\frac{\lambda + \frac{\lambda^\gamma}{2}}{\lambda}\right)\right) \quad (4.20)$$

elde edilir. Buradan (4.20) eşitsizlik ifadesinde paydalar eşitlenir ve işleme devam edilirse;

$$\begin{aligned} \exp\left(-\lambda H\left(\frac{2\lambda + \lambda^\gamma}{2\lambda}\right)\right) &= \exp\left(-\lambda H\left(\frac{2\lambda + \lambda^\gamma}{2\lambda}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda H\left(1 + \frac{\lambda^\gamma}{2\lambda}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. Taylor Teoreminden (Şengül, 2021),

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots$$

eşitliği;

$$H(a) = 1 - a + a \log a$$

foksiyonu için uygulanırsa;

$$H\left(1 + \frac{x}{2}\right) = H(1) + \frac{x}{2}H'(1) + \frac{(x/2)^2}{2!}H''(1) + \dots \quad (4.22)$$

yazılabilir. Taylor açılımı için gerekli olacak $H'(x)$ ve $H''(x)$ türevleri açıkça görülebilir.

$$H'(x) = -1 + \log x + 1$$

$$= \log x$$

ve

$$H''(x) = \frac{1}{x}$$

olarak hesaplanır. Burada $H(1) = 0$, $H'(1) = 0$ ve $H''(1) = 1$ olduğu açıktır. Bu değerler (4.22) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$H\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 0 + \frac{x}{2} \cdot 0 + \frac{(x)^2}{8} \cdot 1 + \frac{x^3}{16} \cdot 1 + \dots$$

$$= \frac{(x)^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$$

$$\geq \frac{x^2}{9}$$

bulunur. (4.21) ve (4.22)'den;

$$H\left(1 + \frac{\lambda^\gamma}{\lambda/2}\right) \geq \frac{\left(\frac{\lambda^\gamma}{\lambda}\right)^2}{9} = \frac{\lambda^{2\gamma}}{\lambda^2 9}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (4.21)'de yerine yazılırsa,

$$\exp\left(-\lambda H\left(1 + \frac{\lambda^\gamma}{2\lambda}\right)\right) \geq \exp\left(-\lambda \frac{\lambda^{2\gamma}}{\lambda^2 9}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^{2\gamma-1}}{9}\right)$$

sonucuna ulaşılır.



5. SONSUZ RASTLANTISAL GEOMETRİK GRAFLAR VE İZOMETRİ ÖZELLİKLERİ

Tezin son bölümünde rastlantısal geometrik graflar konusunda daha çok fonksiyonel analiz tekniklerinin göz önüne alındığı bir model incelenecektir. Bu bölümde (Bonato ve Jeannette, 2011) makalesi başta olmak üzere, (Balister ve diğerleri, 2018), (Bonato ve Jeannette, 2012; 2015; Angel ve Spinka, 2021) çalışmaları genel hatları ile karşılaştırmalı incelenecek, sonsuz geometrik graflar için izometri özellikleri ile ilgili temel kavramlar verilecektir. Klasik izomorfizm tanımından farklı olarak, varoluşçu kapalı komşuluk özelliğinin geometrik analogundan yararlanılarak tanımlanan ve GR_n olarak gösterilen özel bir izometri tanımı kullanılmıştır.

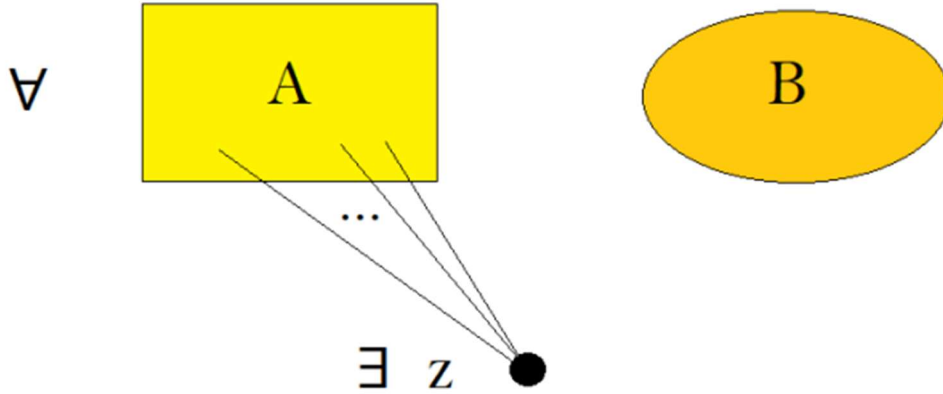
Geometrik graf modellerinde grafın noktaları bir metrik uzaya gömülü kabul edilir. Noktalar arasındaki bağlantılılık ise bu metrik uzayda noktaların birbirlerine göre konumuna göre belirlenir. Geometrik graf modelleri kablosuz iletişim, internet ve sosyal medya ağlarının modellendiği graflar ve diğer karmaşık ağ (complex networks) yapılarında kendisine uygulama alanı bulmuştur (Frieze ve diğerleri, 2009; Flaxman ve diğerleri, 2006; Bonato ve diğerleri, 2010). Noktaların tanımlı olduğu metrik uzayın yapısı ise güncel ağ problemlerinde hangi noktaların arasında kenar olduğunun belirlenmesinde önemli rol oynar. Dünya çapında ağ (World Wide Web) internet yapıları incelenirken web sayfaları yüksek boyutlu uzaylara gömülü varsayılır.

Bonato ve Jeannette (2011) çalışmasında ayrıca farklı metrikler seçildiğinde geometrik grafın özelliklerinin de farklı yapılara sahip olacağını göstermişlerdir. Metrik uzay ile rastlantısal geometrik graflar arasındaki bu ilginç ilişki gelecek araştırma problemlerine konu olabilecek niteliktedir.

Tanım 5.1. (Rado, 1964) (**Rado Grafı**) Nokta kümesi, sıfırı içeren doğal sayılar $\mathbb{N}$ olan grafta eğer keyfi iki noktanın bağlantılı olma olasılığı birbirinden bağımsız şekilde $p \in (0,1)$ olasılığı ile veriliyorsa, bu grafa Rado graf, sonsuz rastlantısal graf veya Erdős-Renyi grafı denir. Bu graf tipi $G(\mathbb{N}, p)$ ile de gösterilir.

Tanım 5.2. (Cameron, 1997, Erdős-Renyi, 1963) (**Varoluşsal Kapalılık Özelliği**) Bir G grafında eğer tüm sonlu ayrık A ve B nokta kümeleri için (kümelerden birisi boş küme olabilir), A ’daki tüm noktalarla komşu (bağlantılı) ancak B ’deki hiçbir

noktayla komşu olmayan öyle bir $z \notin A \cup B$ noktası varsa bu durumda z noktasına A ve B nokta kümelerine düzgün bağlanmış (correctly joined) denir. Bu özellik *e.c.*-özellği olarak gösterilecektir. Aynı zamanda varoluşsal kapalı (existentially closed, *e.c.* property) olarak da adlandırılır.



Şekil 5.1 : *e.c.*-özellği, Shi (2018).

Sayılabilir sonsuz varoluşsal kapalı grafın tek izomorfizmi sonsuz rastlantısal graf (infinite random graph) veya Rado grafi olarak adlandırılır ve R ile gösterilir (Cameron, 1997).

Aşağıdaki lemmaların detaylı ispatları (Cameron, 1997) çalışmasında bulunabilir.

Lemma 5.1. (Erdős ve Renyi, 1963) Sayılabilir rastlantısal bir graf *e.c.*-özellğini sağlar.

Lemma 5.2. (Erdős ve Renyi, 1963) *e.c.*-özellğini sağlayan keyfi iki sayılabilir graf izomorfiktir.

Yukarıda verilen lemmalar rastlantısal graflar için geçerli genel sonuçlardır. Bonato ve Jeannette (2011) ise çalışmalarında bu kavramların geometrik analogları üzerinde çalışmışlardır. Özel olarak, spesifik bir geometrik rastlantısal graf yapısını, belli bir metrik uzay üzerinde incelemişlerdir. Aşağıdaki metrik tanımını ele alınsın.

$$d : S \times S \rightarrow \mathbb{R},$$

$\delta \in \mathbb{R}^+$, $V \subset S$ sayılabilir nokta kümesi, $p \in (0,1)$ ile olasılık değeri gösterilsin.

Bölgesel alan rastlantısal grafi (Local Area Random Graph) $LARG(V, \delta, p)$ ile nokta

kümesi V olan, $\forall u, w \in V$ ve $d(u, w) < \delta$ için p bağımsız olasılığı ile bir kenar eklenen graf gösterilsin. Burada V sonlu veya sonsuz olabilir. *LARG* modeli bilinen bir çok rastlantısal graf modelini genelleştirir.

Sonsuz rastlantısal graf modelinde $G(\mathbb{N}, p)$ olasılık uzayı, nokta kümesi $\mathbb{N}$ olan ve iki farklı doğal sayı arasında kenar olabilmesi için birbirinden bağımsız sabit bir $p \in (0, 1)$ olasılığına bağlanmış graf modelidir. Erdős ve Renyi (1963) $p = 1$ için tüm $G \in G(\mathbb{N}, p)$ graflarının birbirine izomorfik olduğunu göstermiştir.

Bu kısımda incelen tüm graflar aksi belirtilmediği sürece basit, yönsüz ve sayılabilir kabul edilecektir. Eğer S ile nokta kümesinin bir alt kümesi verilmişse, S 'den elde edilen (induced subgraph) alt-graf $G[S]$ ile gösterilir. Eğer G grafi H grafindan elde edilen altgraf ise $G \leq H$ gösterimi kullanılacaktır. İki graf izomorfik ise $G \cong H$ ve özel izomorfizm tipleri izotip (isotype) ile gösterilecektir.

Bir S metrik uzayı d uzaklık fonksiyonu ile birlikte verilsin. δ yarıçaplı x merkezli açık yuvar

$$B_\delta(x) = \{u \in S : d(u, x) < \delta\},$$

ile tanımlanır.

$V \subset S$ kümesi S de yoğundur (dense) $\Leftrightarrow$ Eğer $\forall x \in S$ için, x noktasının etrafındaki her açık yuvar V 'den en az bir nokta içerir. $u \in S$ elemanlarına noktalar denilecektir.

$\mathbb{N}$ ile doğal sayılar, $\mathbb{N}^+$ ile pozitif doğal sayılar gösterilecektir. (Bryant, 1985; Cameron, 1997) kaynaklarından metrik uzay ve graf teori ile ilgili temel tanım ve teoremler elde edilebilir.

5.1. Geometrik e.c. Graflar (Geometrically e.c. Graphs)

Sonsuz rastlantısal R grafinin tek izotipi e.c. özelliği ile karakterize edilir. e.c. özelliğinin geometrik analogu bu bölümde tanıtılacaktır.

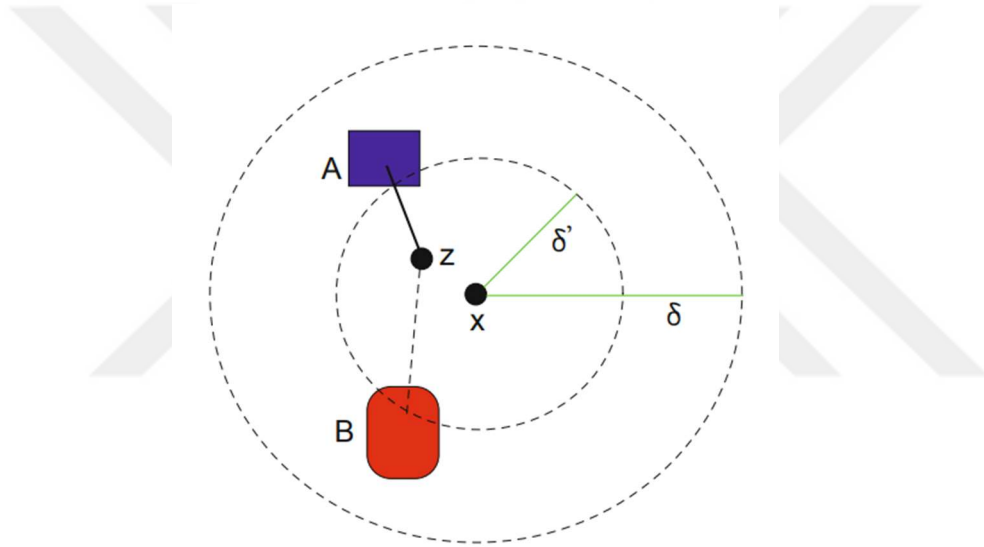
Tanım 5.1.1. (Bonato ve Jeannette, 2011) $G = (V, E)$ grafi noktaları d metrik fonksiyonuna sahip S metrik uzayının elemanları olan graf olsun. Eğer $0 < \delta' < \delta$ sağlayan her δ' , her $x \in V$ ve $A \cup B \in B_\delta(x)$ özelliğini sağlayan her A ve B ayrık nokta kümeleri için, öyle bir $z \notin A \cup B \cup \{x\}$ varsa ki,

- i) z noktası A ve B kümelerine düzgün bağlanmıştır (correctly joined),
- ii) $\forall u \in A \cup B$ için $d(u, z) < \delta$,
- iii) $d(x, z) < \delta'$,

özellikleri sağlanıyorsa, $G = (V, E)$ grafına δ seviyesinde geometrik e.c. graf veya δ -g.e.c. denir.

A ve B kümeleri boş seçilebileceği ve δ -g.e.c. tanımından V 'nin kendi içinde yoğun (dense) olduğu görülebilir.

Ayrıca her $0 < \delta' < \delta$ için G grafı δ -g.e.c. ise aynı zamanda δ' -g.e.c. olur.



Şekil 5.1.1: δ -g.e.c. özelliği, Bonato ve Jeannette (2011)

Yukarıdaki şekilden de görülebileceği gibi geometrik e.c. özelliği ile klasik e.c. özelliği arasında bazı benzerlikler olmasına rağmen temel fark ise düzgün bağlanmış noktanın sadece $B_\delta(x)$ yuvarının içinde kalan A ve B ayrık kümeler için var olacak olmasıdır. Bu özellik Şekil 5.1 ve Şekil 5.1.1 ile kıyaslanırsa görsel olarak farkedilebilir. Böylece düzgün bağlanmış z noktası x noktasına istenilen kadar yakın seçilebilecektir.

Teorem 5.1.1. (Bonato ve Jeannette, 2011) (S, d) metrik uzay ve V ile S 'nin kendi içinde yoğun sayılabilir bir alt kümesi verilsin. Eğer $\delta > 0$ ve $p \in (0, 1)$ ise bu durumda $LARG(V, \delta, p)$, 1 olasılıkla δ -g.e.c. olur.

İspat. $x \in V$ olmak üzere, A ve B ayrık kümeleri $B_\delta(x) \cap (V \setminus \{x\})$ kümesinin içinde ve $0 < \delta' < \delta$ olsun.

$$\beta = maks \{d(x, v) : v \in A \cup B\}$$

tanımlayalım. Bu durumda $\beta < \delta$ olduğu açıktır.

$$\varepsilon = \min \{\delta - \beta, \delta'\}$$

tanımlansın. $Z = B_\varepsilon(x) \cap V$ kümesi ele alınsın. Burada ε seçimiyle $z \in Z$,

$d(z, x) < \delta'$ ve $\forall u \in A \cup B$ için

$$d(u, z) < d(u, x) + d(x, z) < \beta + \varepsilon \leq \delta$$

eşitsizliğin sağlandığına dikkat ediniz.

Z 'deki hiçbir noktanın A ve B ayrık kümelerine düzgün bağlanmış olmadığı olasılığı; $|A|$ ile A daki nokta sayısı, $|B|$ ile B daki nokta sayısı gösterilmek üzere

$$P = \prod_{z \in Z} 1 - \left(p^{|A|} (1-p)^{|B|} \right)$$

olarak hesaplanır. V kendi içinde yoğun olduğundan, Z de sonsuz sayıda nokta vardır. Buradan $P = 0$ bulunur. x , A ve B için sadece sayılabilir sayıda seçim olacağı ve sayılabilir sayıda sıfır ölçülü kümenin ölçüsü de sıfır olacağından, ispat tamamlanır.

Tanım 5.1.2. (Bonato ve Jeannette, 2011) Noktaları (S, d) metrik uzayının elemanları olan $G = (V, E)$ grafında eğer, her $\{u, v\} \in E$ kenarı için $d(u, v) < \delta$ oluyorsa bu grafın eşik değeri (treshold) δ değeridir denir. δ -g.e.c. grafı eğer δ eşik değerine sahipse bu grafa geometrik δ -graf denir.

Tanımı gereği, $LARG(V, \delta, p)$ ile gösterilen graf δ eşiğine sahiptir. Eğer V sayılabilir ve kendi içinde yoğun ise, G grafı geometrik δ -graf olur. Buradan ise bu rastlantısal graf modeli geometrik δ -graf tanımlar.

Deterministik olarak geometrik δ -grafı aşağıdaki gibi inşa edilecektir. $\delta > 0$ ve V sayılabilir, kendi içinde yoğun küme için;

$$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow V$$

lineer sıralama dönüşümü tanımlansın. R_t sonlu graflarının bir zinciri, her $t > 1$ için $R_t \leq R_{t+1}$ ve

$$\{\sigma(i) : 1 \leq i \leq t\} \subseteq V(R_t)$$

olsun. R_t 'nin limiti olarak $GR(V, \delta, \sigma)$ tanımlansın. R_1 ile nokta kümesi $\sigma(1)$ olan aşikar graf gösterilsin. R_t tanımlı ve $\{\sigma(i) : 1 \leq i \leq t\} \subseteq V(R_t)$ için şimdi R_{t+1} tanımlansın.

σ değişkenine dayalı leksikografik (lexicographic) sıralama kullanarak, tüm (A, x) çiftleri $A \subseteq V(R_t)$ ve $x \in V(R_t) \setminus A$ olmak üzere sıralansın. Böylece $A \subseteq B_\delta(x)$ olur. Sıradaki her (A, x) çifti için $z = z_{A,x}$ noktası σ ya göre V deki en küçük indeks noktası olsun öyle ki bu $z = z_{A,x}$ noktası önceki (A, x) çiftlerinde seçilmemiş olsun.

$$B_\delta(z) \cap V(R_t) = B_\delta(x) \cap V(R_t) \quad (5.1.1)$$

ve

$$d(z, x) < \min \left\{ \frac{1}{t}, \delta \right\}$$

olur. R_t sonlu ve V yoğun olduğu için bu koşulları sağlayan bir nokta vardır. A 'daki tüm noktalar z ile birleştirilsin ve R_t den başka hiçbir noktayla birleştirilmesin. Tüm sıralı (A, x) çiftleri için tüm $z_{A,x}$ noktalarının ve bunlarla bağlantılı noktaların eklenmesiyle R_{t+1} grafi oluşturulur. Son olarak, eğer $\sigma(t+1)$, R_{t+1} içinde yoksa, bu noktaya izole nokta olarak eklenir.

(5.1.2) gereği, $GR(V, \delta, \sigma)$ grafi δ -eşik grafidir.

Teorem 5.1.2. (Bonato ve Jeannette, 2011) $GR(V, \delta, \sigma)$ grafi bir δ -g.e.c. graftır.

İspat: $GR(V, \delta, \sigma) = (V, E)$ grafının δ -g.e.c. grafi olduğunu göstermek için, $0 < \delta' < \delta$, bir $x \in V$ noktası, $A, B \subseteq V \setminus \{x\}$ seçilsin ki böylece $A \cup B \subseteq B_\delta(x)$ olur. $t > 0$ değeri ise $A \cup B \cup \{x\} \subseteq V(R_t)$ ve $\frac{1}{t} < \delta'$ şeklinde seçilsin. (A, x) 'i

genişletmek için R_{t+1} den R_t ye eklenen bir nokta $z = z_{A,x}$ olsun. Bu durumda, z noktası A ve B 'ye düzgün bağlanmış olur ve

$$d(x, z) < \delta'$$

olur.

Teorem 5.1.3. (Bonato ve Jeannette, 2011) $U \subseteq S$ ve buradan da bazı $x \in U$ lar için $U \subseteq B_\delta(x)$ kabul edilsin. Bu durumda nokta kümesi U olan bir δ -g.e.c. grafi e.c. olur ve böylece R grafına izomorfik olur.

İspat: G , nokta kümesi yukarıda tanımlanan özellikleri sağlayan U olan bir graf olsun. $0 < \delta' < \delta$ ve A ve B ile de $U \subseteq B_\delta(x)$ kümesinin sonlu ayrık alt kümeleri gösterilsin. Bu durumda öyle bir $z \in B_{\delta'}(x) \cap U$ noktası vardır ki z noktası A ve B kümelerine düzgün bağlanmıştır.

Örnek 5.1.1. (Bonato ve Jeannette, 2011) Teorem 5.1.3'ün tersi genelde doğru değildir. Bu duruma örnek verelim. d Öklid metriği olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı ve $\delta = 1$ alalım. U ile R 'de sonsuz klik fikse edilsin ve $U' = V(R) \setminus U$ alınsın. U 'nun noktaları $\mathbb{R}$ üzerine gömülsün. Bu durumda bu küme $B_{1/2}(0)$ yuvarında yoğun küme olur. U kümesinin noktaları da $\mathbb{R}$ üzerine gömülsün. Böylece bu nokta kümeleri de $B_1(0) \setminus B_{1/2}(0)$ kümesinde yoğun küme olur. Şimdi $d(0, y) < \frac{1}{4}$ olacak şekilde $y \in U$ alınsın. $b \in U \setminus \{y\}$ için $A = \emptyset$ ve $B = \{b\}$ kabul edilsin. $\delta' = \frac{1}{4}$ olsun. $A \cap B \subseteq B_1(y)$ verilsin. R 'nin noktalarının gömülmesi öyledir ki $B_{\delta'}(y)$ deki tüm noktalar U kümesindedir. Böylece hepsi b 'ye komşudur. Buradan ise $B_{\delta'}(y)$ kümesinde A ve B kümesine düzgün bağlanmış hiçbir nokta yoktur. Bu da R grafının bu gömülmesinin δ -g.e.c. olmadığını gösterir.

Özetle, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $LARG(V, \delta, p)$ rastlantısal dağılımıyla birlikte, V sayılabilir sonsuz nokta kümesi $\mathbb{R}^n$ üzerinde yoğun olduğunda L_∞ metriği ve tüm $\delta \in \mathbb{R}^+$ için keyfi iki grafın izomorfik olduğu (Bonato ve Jeannette, 2011) çalışmasında gösterilmiştir. Yukarıdaki örnekte, bazı metrik türleri için izometri özelliğinin

gerçekleşmemesi ise, hangi metrik türleri için bu tek izometrinin var olduğu, hangileri için var olmadığı problemini doğurmuştur.

(Bonato ve Jeannette, 2012) çalışmasında altıgen (bal peteği, heksogonal metrik) metriği için izometri özelliğinin gerçekleşmediğini kanıtlamışlardır. Gerçek hayattaki olayların graf teoriye modellemesinde, kullanılan metrik türü nesneler arasındaki bağlantının yapısını temsil eder. Bal peteği metriği hesaplamalı geometride, Voronoi diagramları ve periyod graflarında uygulama alanlarına sahiptir (Fu ve diğerleri, 2010).

Tanım 5.1.3. (Altıgen Metrik, Heksogonal metrik) (Bonato ve Jeannette, 2012)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

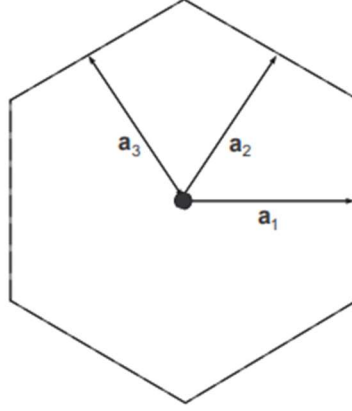
vektörleri aşağıdaki şekildeki gibi düzgün altıgenin kenarlarına dik olan vektörler olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için x elemanının heksagonal normu ‘.’ ile skaler çarpım gösterilmek üzere,

$$\|x\|_{hex} = \max_{i=1,2,3} |a_i \cdot x|_{hex}$$

ile verilir. $\mathbb{R}^2$ üzerinde heksogonal metrik ise heksogonal normdan elde edilen metrikle beraber,

$$d_{hex}(x, y) = \|x - y\|_{hex}$$

ile tanımlanır. Heksogonal metrik uzayda birim yuvarın görüntüsünün şekildeki gibi düzgün altıgen olacağına dikkat ediniz.



Şekil 5.1.2 : Bonato ve Jeannette (2012)

Öklid metriğinde birim yuvarın çember formunda, L_∞ metriğinde birim yuvarın kare formunda olduğuna dikkat ediniz. Bir düzlemin kare fayanslarla kaplanabildiği gibi altıgen fayanslarla da kaplanabilmesi, bal peteği metriği ile L_∞ metriği ile benzer bir özellik oluşturur. Bununla birlikte, bal peteği metriğinde limit durumunda çembere yaklaşılabilmesi ise Öklid metriği ile arasında bir ilişki kurabileceğini gösterir.

Teorem 5.1.4. (Bonato ve Jeannette, 2012) V rastlantısal, sayılabilir, $\mathbb{R}^2$ ’de yoğun d_{hex} metriğine sahip nokta kümesi olsun. $p \in (0,1)$ olmak üzere $LARG(V, p)$ modeliyle verilen iki G ve H grafi bir olasılıkla (kesin olarak) izomorfik değildir.

(Bonato ve Jeannette, 2012) çalışmasında bu teoremin ispatı için gerekli altyapıyı ve yöntemleri detaylı olarak sunmuşlardır. Daha büyük boyuttaki uzaylarda ve farklı düzgün eşkenarlılar için de benzer şekilde izometri olmadığının ispatının yapılabileceğini açık problem ve tahmin olarak okuyucuya bırakmışlardır. İspatta teknik olarak metrik uzaylarda adım-izometri (step isometry) kavramından yararlanmışlardır. Bu alandaki benzer çalışmalarda da adım-izometri tanımından yararlanıldığı göz önünde bulundurularak aşağıda tanım sunulacaktır.

Tanım 5.1.4. (Bonato ve Jeannette, 2012) (S, d_s) ve (T, d_T) metrik uzayları verilsin. $V \subseteq S$ ve $W \subseteq T$ olmak üzere $f: V \rightarrow W$ her $u, v \in V$ çifti için

$$\lfloor d_s(u, v) \rfloor = \lfloor d_T(f(u), f(v)) \rfloor$$

özelliğini sağlayan örten (surjektif) $f: V \rightarrow W$ dönüşümü, V 'den W 'ye bir adım-izometri olarak tanımlanır.

Her izometri, bir adım izometridir. Ancak bu önermenin tersi genelde doğru değildir. Bu önerme aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 5.1.2. (Bonato ve Jeannette, 2012) $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid metriği ile birlikte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor + x}{2},$$

olarak verilsin. Bu fonksiyon birebirdir ancak örten değildir. Dolayısıyla izometri değildir. Ancak $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için

$$\lfloor |u - v| \rfloor = \left\lfloor \left| \frac{\lfloor u \rfloor + u}{2} - \frac{\lfloor v \rfloor + v}{2} \right| \right\rfloor$$

eşitliği sağlanacağından bir adım-izometridir.

$LARG(V, p)$ ile üretilen graf yapılarında izometri özellikleri incelenirken nokta kümesi verilen metrik uzayda yoğun olduğunda, izometrinin aynı zamanda bir adım-izometri de olması gerektiği bilgisinden yararlanılır.

Lemma 5.1.1. (Bonato ve Jeannette, 2012) d_{hex} metriği ile birlikte ve V sayılabilir nokta kümesi $\mathbb{R}^2$ 'de yoğun $LARG(V, p)$ modeli ile kurulan iki H ve G grafi f yardımıyla izomorfikse, aynı zamanda bir olasılıkla (kesin şekilde) bu iki graf adım-izometridir.

Yukarıdaki Lemma (Bonato ve Jeannette, 2011) çalışmasının altıgen metrik için uyarlanmış versiyonudur. Benzer tekniklerin kullanılarak, izometri özelliklerinin farklı uzaylar için incelenmesi problemi, (Balister ve diğerleri, 2018) çalışmasında sonlu boyutlu normlu uzaylar için araştırılmıştır. (Bonato ve Jeannette, 2012) çalışmasında kullanılan adım-izometri kavramı bu çalışmada farklı bir formda tanımlanmıştır.

Tanım 5.1.5. (Balister ve diğerleri, 2018) $A \subseteq V$ olsun. $\forall x, y \in A$ için

$$\lfloor \|x - y\| \rfloor = \lfloor \|f(x) - f(y)\| \rfloor$$

özelliğini sağlayan $f : A \rightarrow A$ birebir ve örten (bijektif) dönüşümü adım-izometri olarak tanımlanır.

İki izometri tanımı arasında birinde f için sadece örten şartı olduğu diğerinde birebir ve örten şartı olduğuna, normlu uzaylarda uzaklığı koruyan dönüşüm anlamında kullanıldığına dikkat ediniz. Normlu uzaylar için yapılan çalışmada tanımlara ek koşullar konulmuş, bu spesifik koşullar altında $LARG(V, p)$ modeli için izometri özellikleri incelenebilmiştir. (Balister ve diğerleri, 2018) çalışmasında ayrıca normlu uzaylar, Mazur-Ulam Teoremi, lineer operatörler ile bilgiler ve teknikler kullanıldığı için izometri özelliklerinin incelenmesinde daha fazla fonksiyonel analiz tekniklerine ihtiyaç duyulduğu gözlenebilir.

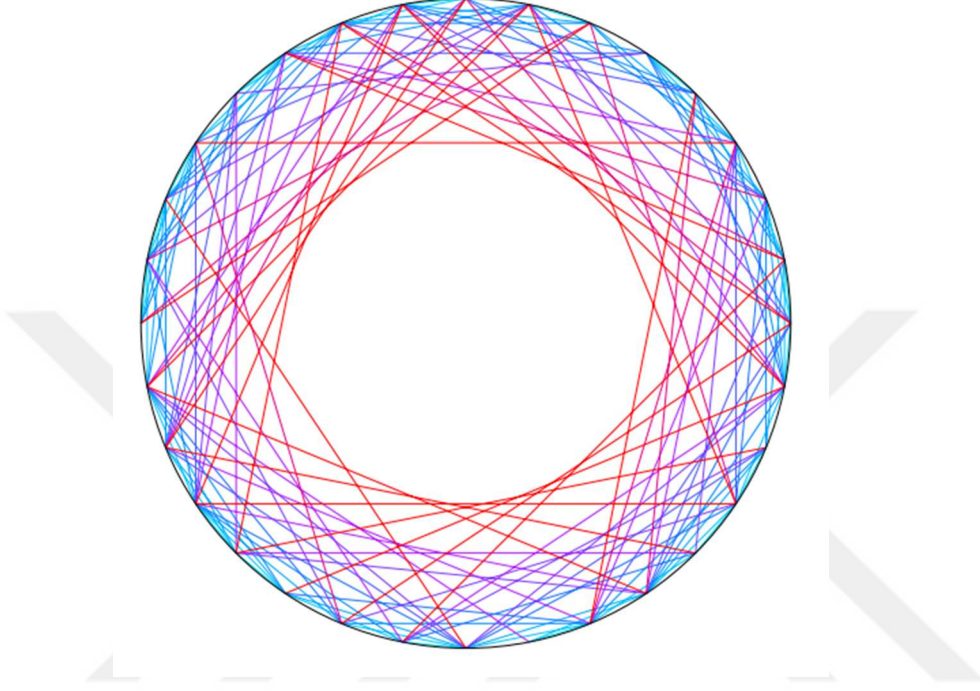
Bu bölümde son olarak Angel ve Spinka (2021) çalışmasında kullanılan bazı temel kavramlardan bahsedilecektir. $L > 0$ ve $S_L := \mathbb{R} / L\mathbb{Z}$ verilsin. İç metrikle L çevresine sahip çember göz önüne alınsın. (Burada çember üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık hangi yoldan daha kısa ise uzaklığın o uzunluk olarak tanımlandığı metriktir.) S ile S_L 'nin sayılabilir yoğun alt kümesi gösterilsin. $G_{L,S}$ ile S üzerinde birim uzaklık grafi, yani nokta kümesi S , kenar kümesi ise aralarındaki uzaklığın birden küçük olduğu tüm nokta ikililerinin bağlantılı olduğu graf olsun. $G_{L,S}$ grafının $p \in (0,1)$ olmak üzere rastlantısal altgrafı ise $G_{L,S,p}$ ile gösterilsin. $G_{L,S,p}$ grafında aralarındaki uzaklığın birden küçük olduğu herhangi iki kenarın bağlantılı olma olasılığı, birbirinden bağımsız şekilde $p \in (0,1)$ olasılığı ile verilir. L uzaklığının farklı değerlerine göre farklı izomorfizm sonuçları elde edilmiştir. Bu çalışmada S_L nin elemanları L moduna sahip reel sayılar olarak görülmüştür. S_L kümesinin iki $u, v \in S_L$ elemanı için uzaklık u ve v arasındaki iki yay parçasından kısa olan uzaklık olarak tanımlanmıştır. Bu $\|u - v\|$ uzaklığı

$$\|u - v\| = \min \{|u - v|, L - |u - v|\}$$

olarak verilsin. $dist_G(u, v)$ ile G grafında keyfi iki u ve v noktaları arasındaki uzaklık iki nokta arasındaki en kısa patikadaki kenar sayısı olarak tanımlıdır. Burada

tanımlanan özel durum için ise $dist_G(u, v)$ ifadesinin iki nokta arasındaki en kısa yay uzunluğu olacağı açıktır.

Örnek 5.1.3: Aşağıda birbirleri arasında eşit uzaklığa sahip olan noktalardan oluşan, nokta sayısı 32, çevre uzunluğu $L = 3$ olan graf gösterimi verilmiştir.



Şekil 5.1.3 : Angel ve Spinka (2021).

Tanım 5.1.6. (Angel ve Spinka, 2021) (Geometrik varoluşsal kapalılık özelliği) Nokta kümesi $S \subset S_L$ olan G grafi verilsin. $\forall s \in S$ için $(s-1, s+1)$ komşuluğunda kalan ayrık sonlu $A, B \subset S$ nokta kümeleri, keyfi $\varepsilon > 0$ için A daki her noktaya komşu olan ancak B den hiçbir noktaya komşu olmayan ve $\|v - s\| < \varepsilon$ şartını sağlayan öyle bir $\exists v \in S \setminus (A \cup B)$ noktası varsa G grafi geometrik varoluşsal kapalıdır (*g.e.c.* özelliği vardır) denir.

G grafında herhangi komşu iki $u, v \in S$ için

$$\|u - v\| < 1$$

sağlanıyor ise G grafi birim eşiğe (unit threshold) sahiptir denir. Angel ve Spinka (2021) çalışmalarında $L > 2$ ve rasyonel değerli olmasına göre izometrik özelliklerini incelemiştir. Çalışmalarında *g.e.c.* özelliğinin çember durum için tanımladıkları analog tanımdan yararlanarak ispatları yapmışlardır. Adım-izometri için de analog

tanım geliştirmişlerdir. Bazı durumlar için normlu uzaylarda kullanılan tekniklere benzer yöntem; bazı ispatlar içinse metrik uzaylardakine benzer kavram ve tekniklerden yararlanmışlardır. Çember durum içinse bu bölümde bahsedilen diğer makalelerden farklı olarak rasyonel, irrasyonel sayıların incelenmesi sebebiyle sayılar teorisi ile ilgili teknikler de kullanılmıştır.

(Bonato ve Jeannette, 2011), (Balister ve diğerleri, 2018), (Bonato ve Jeannette, 2012; 2015), (Angel ve Spinka, 2021) çalışmalarının hepsinde *g.e.c.* özelliğinden yararlanılmış ve $LARG(V, \delta, p)$ modeline sahip geometrik rastlantısal grafların izometrilere incelenmiştir. Ancak, grafin tanımlandığı uzayın değişmesi, *g.e.c.* özelliği, adım-izometri gibi kavramların her çalışma için analoglarının geliştirilmesini gerektirmiştir. Yine çalışmaların tanımlandığı uzaya bağılı olarak bazılarında fonksiyonel analiz kavramları ve teknikleri ön plana çıkarken, bazı çalışmalarda da sayılar teorisi ve kombinatorik kavramları öne çıktığı gözlenmiştir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde rastlantısal geometrik graflar incelenmiştir. Penrose (2003) çalışması ana kaynak olarak alınarak konunun tarihi, diğer konularla bağlantısı araştırılmıştır. Bir çok doğa olayının rastlantısal geometrik graflar yardımıyla modellenenebilmesi ise konunun güncel ve gelecekte de sıklıkla çalışılacak bir araştırma alanı olduğunu göstermektedir. Bu alanda Türkçe literatürün azlığı ve konunun gerekli altyapı bilgileriyle birlikte sunulduğu kaynak sınırlı sayıdadır. Tezde konunun araştırılması için gerekli altyapıyı oluşturan graf teorisi, olasılık teorisi ve fonksiyonel analiz alanlarından tanım ve teoremler derlenmiş, dördüncü bölümde olasılık teorisi ile ilgili teoremler ve ispatları detaylı açılmıştır. Beşinci bölümde ise geometrik rastlantısal grafların $LARG(V, p)$ modeli ile incelendiği bazı makaleler karşılaştırılmalı olarak ana hatlarıyla incelenmiştir. Varoluşsal kapalılık özelliğinin geometrik analogu olan geometrik varoluşsal kapalılık kavramı açıklanmıştır. Gerçek hayattaki bir çok problemin modellenmesinde geometrik rastlantısal grafların daha uygun olması ise bu konunun gelecekte de oldukça önemli bir çalışma alanı olduğunu göstermektedir. Son bölümde ayrıca incelenen literatür kaynaklarında sunulan bazı açık problemlere de dikkat çekilmiştir. Farklı metrik yapıları için ilginç izometri özelliklerinin elde edilmesi, kullanılan matematiksel yapının ve metrik tanımının farklılaşmasıyla birlikte izometri özelliklerinin de yeni bir form kazanacak olması ise problemlerin zorluk derecesini artıran bir faktördür. Bu tezin konuya giriş niteliğinde literatürün derlenmesi ve $LARG(V, p)$ modelinin tanıtılması açısından araştırmacılara destek sağlayacağı düşünülmektedir. Özellikle metrik uzaylar, normlu uzaylar için elde edilen sonuçların iç çarpım uzaylarında da incelenip incelenemeyeceği bir araştırma konusu olabilir. Ayrıca metrik tanımlarının farklılaştırılması ile ortaya çıkan izometri özellikleri, farklı norm tanımları altında nasıl bir yapı kazanacağı sorusu da açık bir problem olarak düşünülebilir.



KAYNAKLAR

- Alon, N., Spencer, J. H., ve Erdős, P. (1992). *The Probabilistic Method*. Wiley-Interscience, New York.
- Ambartzumian, R. V. (1990). *Factorization Calculus and Geometric Probability*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Angel, O., ve Spinka, Y. (2021). "Geometric random graphs on circles." *Advances in Probability and Mathematical Statistics: CLAPEM 2019, Mérida, Mexico*. Springer International Publishing, 2021 Ialari, M., Synnefa, A., Vassilakopoulou, K., Papadopoulos.
- Appel, M. J. B. ve Russo, R. P. (1997a). The maximum vertex degree of a graph on uniform points in $[0,1]^d$. *Advances in Applied Probability* 29, 567–581.
- Appel, M. J. B. ve Russo, R. P. (1997b). The minimum vertex degree of a graph on uniform points in $[0,1]^d$. *Advances in Applied Probability* 29, 582–594.
- Appel, M. J. B. ve Russo, R. P. (2002). The connectivity of a graph on uniform points in $[0,1]^d$. *Statistics and Probability Letters* 60, 351–357.
- Bollobás, B. (1985). *Random Graphs*. Academic Press, London.
- Balister, P., Bollobás, B., Gunderson, K., Leader, I., ve Walters, M. (2018). Random geometric graphs and isometries of normed spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(10), 7361-7389.
- Berstsekas, P.D. ve Tsitsiklis, J.N. (2000). *Introduction and Probability*. Lecture Notes Course 6.041-6.431: M.I.T.
- Bickel, P. J. ve Breiman, L. (1983). Sums of functions of nearest neighbour distances, moment bounds, limit theorems and a goodness of fit test. *The Annals of Probability* 11, 185–214.
- Bonato A., Janssen J. ve Prałat P. (2010). The geometric protean model for on-line social networks. *Lecture Notes in Comput. Sci.* **6516**, 110–121.
- Bonato, A., ve Jeannette, J. (2011). "Infinite random geometric graphs." *Annals of Combinatorics* 15.4: 597-617.
- Bonato, A., ve Jeannette, J. (2012). "Infinite random geometric graphs from the hexagonal metric." *Combinatorial Algorithms: 23rd International Workshop, IWOCA 2012, Tamil Nadu, India, July 19-21, 2012, Revised Selected Papers 23*. Springer Berlin Heidelberg.
- Bonato, A., ve Jeannette, J. (2016). "Infinite random graphs and properties of metrics." *Recent Trends in Combinatorics*, 257-273.
- Bryant, V. (1985). *Metric Spaces: Iteration and Application*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Cameron, P. J. (1997). The random graph. In: Graham, R.L., Nešetřil, J. (eds) *Algorithms and Combinatorics*, 14, pp. 333–351. Springer Verlag, Berlin.
- Cameron, P. J. "The random graph." *The Mathematics of Paul Erdős II* (1997): 333-351.

- Campanino, M. ve Biagani, F. (2015). *Elemens of Probability and Statistic* : Munich ,Bologna.
- Clark, B. N., Colbourn, C. J. ve Johnson, D. S. (1990). Unit disk graphs. *Discrete Mathematics* 86, 165–177.
- Durrett, R. (1991). *Probability: Theory and Examples*. Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove.
- Erdős, P. ve Rényi, A. (1961). "On the strength of connectedness of a random graph." *Acta Mathematica Hungarica* 12.1, 261-267
- Erdős, P. ve Rényi, A. (1963). Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* **14**, 295–315.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume I* (3rd edn). New York: Wiley.
- Flaxman, A., Frieze, A. M. ve Vera, J. (2006). A geometric preferential attachment model of networks. *Internet Math.* **3**(2), 187–205.
- Frieze, A. M., Kleinberg, J., Ravi, R. ve Debany, W. (2009). Line of sight networks. *Combin. Probab. Comput.* **18**(1-2), 145–163.
- Fu, N., Imai, H. ve Moriyama, S. (2010, June). Voronoi diagrams on periodic graphs. In *2010 International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering* (pp. 189-198). IEEE.
- Glaz, J., Naus, J. ve Wallenstein, S. (2001). *Scan Statistics*. Springer, New York.
- Godehardt, E. (1990). *Graphs as Structural Models* (2nd edn). Wieweg, Braunschweig.
- Godehardt, E. ve Jaworski, J. (1996). On the connectivity of a random interval graph. *Random Structures and Algorithms* 9, 137–161.
- Godehardt, E., Jaworski, J. ve Godehardt, D. (1998). The application of random coincidence graphs for testing the homogeneity of data. In *Classification, Data Analysis, and Data Highways: Proceedings of the 21st Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e. V., University of Potsdam, 12–14 March 1997* (eds. I. Balderjahn, R. Mathar, and M. Schader). Springer, Berlin, pp. 35–45.
- Gower, J. C. ve Ross, G. J. S. (1969). Minimum spanning trees and single linkage cluster analysis. *Applied Statistics* 18, 54–65.
- Grimaldi, R.P. (2006). *Discrete end Combinatorial Mathematics*, (3rd edn). Wesley Publishing Company.
- Grimmett, G. (1999). *Percolation* (2nd edn). Springer, Berlin.
- Gupta, P. ve Kumar, P. R. (1998). Critical power for asymptotic connectivity in wireless networks. In *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: A Volume in Honor of W. H. Fleming* (eds W. M. McEneaney, G. Yin, and Q. Zhang). Birkhäuser, Boston, pp. 547–566.
- Hafner, R. (1972). *The asymptotic distribution of random clumps*. *Computing* 10, 335–351.
- Hall, P. (1988). *Introduction to the Theory of Coverage Processes*. Wiley, New York.
- Harris, B. ve Godehardt, E. (1998). Probability models and limit theorems for random

- interval graphs with applications to cluster analysis. In *Classification, Data Analysis and Data Highways* (eds I. Balderjahn, R. Mathar, and M. Sachader). Springer, Berlin, pp. 54–61.
- Henze, N. (1982). The limit distribution of the maxima of ‘weighted’ r th nearest-neighbour distances. *Journal of Applied Probability* 19, 344–354.
- Janson, S., Luczak, T. ve Rucinski, A. (2000). *Random Graphs*. Wiley, New York
- Pach, J. ve Agarwal, P. K. (1995). *Combinatorial Geometry*. Wiley, New York.
- Pishro-Nik, H. (2014). *Introduction to probability ,Statics and random processes*. LLC:Kappa Research.
- Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson Processes*. Oxford : Oxford University Press.
- Kreyszig, E.(1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. Wiley, New York.
- McDiarmid, C. (2003). Random channel assignment in the plane. *Random Structures and Algorithms* 22, 187–212.
- Molchanov, I. (1997). *Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*. Wiley, Chichester.
- Meester, R. ve Roy, R. (1996). *Continuum Percolation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Penrose, M. D. ve Pisztor, A. (1996). Large deviations for discrete and continuous percolation. *Advances in Applied Probability* 28,29–52.
- Penrose, M. (2003). *Random geometric graphs*. Vol. 5. OUP Oxford.
- Richard, R. (1964) "Universal graphs and universal functions." *Acta Arithmetica* 4.9, 331-340.
- Santalo, L. A. (1976). *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Steele, J. M. ve Tierney, L. (1986). Boundary domination and the distribution of the largest nearest-neighbor link in higher dimensions. *Journal of Applied Probability* 23, 524–528.
- Steele, J. M. (1997). *Probability Theory and Combinatorial Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Stoyan, D., Kendall, W. S., ve Mecke, J. (1995). *Stochastic Geometry and its Applications* (2nd edn). Wiley, Chichester.
- Silverman, B. W. ve Brown, T. (1978). Short distances, flat triangles and Poisson limits. *Journal of Applied Probability*, 15, 815–825.
- Shi, A. Z. (1961). " Existentially Closed Property in Directed Infinite Graphs " Master Thesis.
- Solomon, H. (1967). Random packing density. *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Probability and Statistics* 3, 119–134.
- Şengül, T. (2021). *Analiz III ders notları*.

- Torquato, S. (2002). *Random Heterogeneous Materials: Micro structure and Macroscopic Properties*. Springer, Berlin.
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Yukich, J. E. (1998). *Probability Theory of Classical Euclidean Optimization Problems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1675. Springer, Berlin.

