T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖZEL TANIMLI BÖLEN FONKSİYONLARININ BERNOULLİ SAYILARI VE BERNOULLİ POLİNOMLARI İLE İLİŞKİSİ

PELİN OKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Recep ŞAHİN

Doç. Dr. Hacer ÖZDEN AYNA

BALIKESİR, TEMMUZ - 2023

ÖZET

BAZI ÖZEL TANIMLI BÖLEN FONKSİYONLARININ BERNOULLİ SAYILARI VE BERNOULLİ POLİNOMLARI İLE İLİŞKİSİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
PELİN OKAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)
BALIKESİR, TEMMUZ - 2023

Bu tezde bazı özel tanımlı bölen fonksiyonlarının Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ile ilişkisi incelenmiştir.

Birinci bölüm, Bernoulli polinomları, sayıları ve bölen fonksiyonları ile ilgili genel bilgilerin verildiği giriş bölümüdür.

İkinci bölüm, bölen fonksiyonları, Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ile ilgili temel tanım ve teoremlerin yer aldığı ön bilgiler bölümüdür.

Üçüncü bölümde, özel tanımlı bölen fonksiyonları ve özel tanımlı Bernoulli polinomları ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca özel tanımlı Bernoulli polinomlarından elde edilen özel tanımlı bölen fonksiyonlarının kombinatorik konvolüsyon toplamları ile ilgili sonuçlar bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli polinomları, Bernoulli sayıları, bölen fonksiyonları.

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 42

ABSTRACT

THE RELATIONSHIP OF SOME SPECIALLY DEFINED DIVISION FUNCTIONS TO BERNOULLI NUMBERS AND BERNOULLI POLYNOMIALS
MSC THESIS
PELİN OKAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)
BALIKESİR, JULY - 2023

In this thesis, the relationship of some specially defined divisor functions with Bernoulli polynomials and Bernoulli numbers is investigated.

The first chapter is the introduction where general information about Bernoulli polynomials, numbers and divisor functions is given.

The second chapter is the preliminary information section, which includes basic definitions and theorems about divisor functions, Bernoulli polynomials and Bernoulli numbers.

In the third chapter, results about special defined divisor functions and special defined Bernoulli polynomials are given. There are also results related to combinatoric convolution sums of special defined divisor functions obtained from special defined Bernoulli polynomials.

In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given.

KEYWORDS: Bernoulli polynomials, Bernoulli numbers, divisor functions.

Science Code / Codes : 20401 Page Numbers:42

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

<u>**Sayfa**</u>

TABLO LİSTESİ

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda, bilgi ve desteğini esirgemeyen ve bana rehberlik eden değerli hocalarım Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ ve Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü desteği birbirimize sunduğumuz arkadaşım Hamiyet Büşra BOZOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemi sağlayan desteklerini her zaman hissettiğim aileme teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Balıkesir, 2023 **Pelin OKAN**

1. GİRİŞ

Bu çalışmada bazı özel tanımlı bölen fonksiyonlarının, Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları ile ilişkisi incelenmiştir. Bernoulli sayıları terimleri rasyonel sayı olan ve ilk kez İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli (1654-1705) ve ondan bağımsız olarak Japon matematikçi Seki Kōwa (1642-1708) tarafından keşfedilen bir dizidir. Bu diziyi ilginç kılan en önemli özelliklerden bir tanesi de ardışık sayıların kuvvetlerinin toplamını bulma problemi matematikte kuvvet toplamları olarak bilinen problemin çözümündeki rolüdür. Kuvvet toplamları probleminin milattan önce 2000 yılına kadar uzanan bir tarihçesi vardır. Birçok matematikçi belli koşullar altında bu problem ile ilgilenmiş ve 1713 yılında Jacob Bernoulli "Ars Conjectandi" adlı eserinde bu problemi günümüzde Bernoulli sayıları olarak adlandırılan katsayıları kullanarak çözmüştür [1]. Bernoulli sayıları, Fermat'ın Son Teoremi ile ilgili olarak sayılar teorisinde de son derece önemli bir yere sahiptir. Bununla beraber Bernoulli sayıları sonlu farklar, kombinatorik ve matematiğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır [2].

$m,n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n'yi bölen pozitif tamsayıların m. kuvvetlerinin toplamını $\sigma_m(n)$ olarak gösterelim. Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı $\sigma_m(n)$ fonksiyonuna bölen fonksiyonu denir. Eğer $m=1$ ise $\sigma_1(n)$, n pozitif tamsayısının pozitif bölenlerinin toplamını verir genel olarak $\sigma(n)$ olarak gösterilir. 1862'de bölen fonksiyonları ile ilgili en iyi bilinen eşitlik

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sigma(\mathrm{k})\sigma(\mathrm{n-k})=\frac{5}{12}\sigma_3(\mathrm{n})+\left(\frac{1}{12}-\frac{n}{2}\right)\sigma(\mathrm{n})$$

Besge'nin Liouville'ye yazdığı bir mektupta ortaya çıkmıştır [3]. 1916'da Ramanujan bölen fonksiyonları ile ilgili;

$$X(a)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(\mathrm{n})a^n,$$

$$Y(a)=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(\mathrm{n})a^n,$$

$$Z(a)=1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(\mathrm{n})a^n$$

olmak üzere;

$$a\frac{\partial X(a)}{\partial a}=\frac{X^2(a)-Y(a)}{12},$$

$$a\frac{\partial Y(a)}{\partial a}=\frac{X(a)Y(a)-Z(a)}{3},$$

$$a\frac{\partial Z(a)}{\partial a}=\frac{X(a)Z(a)-Y^2(a)}{2}$$

eşitliklerini elde etmiştir. Bu eşitlikler incelendiğinde $X^2(a)$'nin n. katsayısı, $\sum_{k=1}^{n-1}\sigma(\mathrm{k})\sigma(\mathrm{n-k})$ konvolüsyon toplamını kapsarken $a\frac{\partial X(a)}{\partial a}=\frac{X^2(a)-Y(a)}{12}$ eşitliği ise Besge'nin Formülü'ne eşittir [4]. 2007'de Hahn ise;

$$X(a)=1+8\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\sigma}(\mathrm{n})a^n,$$

$$Y(a)=1+24\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\sigma}(\mathrm{n})a^n,$$

$$Z(a)=1-16\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\sigma}_3(\mathrm{n})a^n$$

olmak üzere,

$$a\frac{\partial X(a)}{\partial a}=\frac{X^2(a)-Z(a)}{4},$$

$$a\frac{\partial Y(a)}{\partial a}=\frac{Y(a)X(a)-Z(a)}{2},$$

$$a\frac{\partial Z(a)}{\partial a}=X(a)Z(a)-Y(a)Z(a)$$

diferansiyel denklemlerini elde etmiştir. Ayrıca n tamsayısının çift ya da tek oluşuna bağlı olarak

$$36\sum_{m<n}\hat{\sigma}\ (\mathrm{n})\hat{\sigma}\ (\mathrm{n-m})=\begin{cases}-3\hat{\sigma}\ (\mathrm{n})+3\tilde{\sigma}_3(\mathrm{n}), & n\ tek\ sayı\\ -3\hat{\sigma}\ (\mathrm{n})-5\tilde{\sigma}_3(\mathrm{n})+4\tilde{\sigma}_3(\frac{\mathrm{n}}{2}), & n\ çift\ sayı\end{cases}$$

özel tanımlı $\hat{\sigma}$ ve $\tilde{\sigma}$ bölen fonksiyonları ile ilişkili eşitliği bulmuştur. Ayrıca $\tilde{\sigma}$ bölen fonksiyonları için

$$16\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\sigma}_1(\mathrm{n})\tilde{\sigma}_3(\mathrm{n}-m)=-\tilde{\sigma}_5(\mathrm{n})+2(\mathrm{n}-1)\tilde{\sigma}_3(\mathrm{n})+\tilde{\sigma}_1(\mathrm{n})$$

eşitliğini de göstermiştir [5].

Huard ve arkadaşları [6] , Lahiri [7] , Glaisher [8] , Cheng ve Williams [9] , Melfi [10] bölen fonksiyonları ve özellikleri ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır.

2015 yılında Kim, Bayad ve İkikardeş, $k,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\geq 1$ ve $n\geq 2$ iken

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_{2k-2s-1}(m).\sigma_{2s+1}(n-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(n)-\frac{1}{2}\sigma_{2k}(n)-n\sigma_{2k-1}(n)+\sum_{d|n}\frac{B_{2k+1}(d+1)}{2k+1}$$

denklemi ile bölen fonksiyonlarının kombinatorik konvolüsyon toplamları ile Bernoulli polinomları arasında yeni bir bağlantı ifade etmişlerdir [11].

2021 yılında Kim ve İkikardeş, $k,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\geq 1$ ve $n\geq 2$ iken

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(n-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(n)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(n)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(n)$$

ve $k \geq 2$, $N \geq 1$ iken

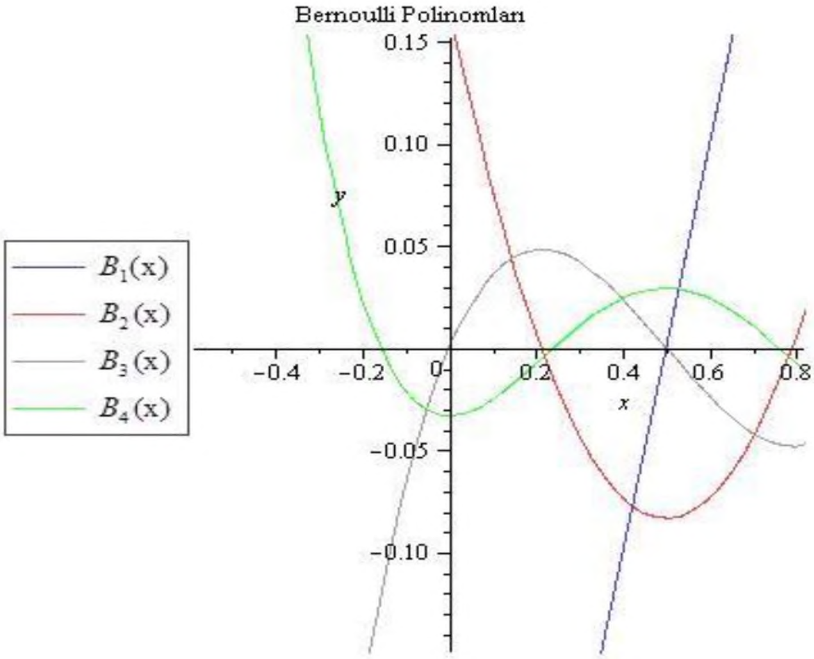
$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m \hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2N-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(N)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2N)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2N)$$

eşitliklerini elde etmişlerdir [12].

Bernoulli polinomları $B_k(\mathrm{x})$, üreteç fonksiyonları yardımıyla

$$\frac{t.e^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(\mathrm{x})}{k!}t^k, \quad |t|<2\pi$$

biçiminde tanımlanır. Bernoulli polinomunda $x=0$ alınırsa $B_k=B_k(0)$ biçiminde tanımlanan B_k Bernoulli sayıları elde edilir [13].



Şekil 1.1: $B_1(\mathrm{x})$, $B_2(\mathrm{x})$, $B_3(\mathrm{x})$, $B_4(\mathrm{x})$ Bernoulli polinomlarının grafiği.

Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları literatürde oldukça çok çalışılan konulardır bu konular hakkında daha fazla bilgi için [13, 14, 15] kaynaklarına bakılabilir. Bernoulli Polinomları ve sayıları arasında bulunan bazı önemli eşitlikler;

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

$$B_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)\,y^{n-k}$$

şeklindedir . Ayrıca Bernoulli polinomları için

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x),$$

$$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$$

$$B_n(1+x)-B_n(x)=nx^{n-1}$$

eşitlikleri de verilebilir [13].

Bölen fonksiyonları aslında bir tamsayının bölenleri ile ilişkili olan aritmetik fonksiyonlardır. Bir bölen fonksiyonu n tamsayısının d pozitif tamsayı bölenlerinin k. kuvvetinin toplamları

$$\sigma_k(n)=\sum_{d|n}d^k$$

şeklinde de gösterilebilir..

Bu tezde, $n\in\mathbb{N}$ ve $k\in\mathbb{Z}$ için

$$\hat{\sigma}_k(n)=\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}-1}d^k$$

şeklinde özel tanımlı bölen fonksiyonu üzerine çalışılmıştır.

$\sigma_k(n)$ ve özel tanımlı $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu arasındaki en temel ilişki

$$\hat{\sigma}_k(\mathrm{n}) = \sigma_k(\mathrm{n}) - 2\sigma_k(\frac{\mathrm{n}}{2})$$

eşitliği ile ifade edilebilir [16].

Bu tezde bazı özel tanımlı bölen fonksiyonları ile Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları üzerine yapılan araştırmalar taranmış elde edilen bilgi ve bulgular ile ilgili yeni eşitlikler düzenlenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümü, bölen fonksiyonlarının, Bernoulli polinom ve sayılarının tarihsel sürecinin bahsedildiği giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, ilerleyen bölümlere temel oluşturacak bazı ön bilgilere yer verilmektedir. Bu bölümde bölen fonksiyonları, Bernoulli polinomu ve sayılarının özelliklerinden bahsedilerek bunlarla ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde orijinal sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, çalışmadan elde edilen sonuçlardan ve oluşturulabilecek daha farklı eşitlikler üzerine olan önerilerden bahsedilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde bölen fonksiyonları, Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ile ilgili gerekli ön bilgiler yer almaktadır.

2.1 Bölen Fonksiyonları

2.1.1 Tanım: n bir tamsayı olmak üzere $n = a.b$ olacak biçimde a ve b tamsayıları yazılabiliyorsa a ve b 'ye n'nin bölenleri denir.

2.1.2 Uyarı: Eğer d tamsayısı, n tamsayısının bir böleni ise "d, n'yi böler" şeklinde ifade edilir ve $d|n$ ile gösterilir. Eğer d tamsayısı n'yi bölmüyorsa $d\nmid n$ şeklinde gösterilir. Kolayca $1|n$ olduğu görülebilir.

2.1.3 Tanım: Yalnızca iki pozitif böleni olan doğal sayılara asal sayı denir, eğer bir doğal sayının ikiden fazla böleni varsa bu doğal sayıya bileşik sayı denir [17].

2.1.4 Tanım: Pozitif tamsayılar kümesinden karmaşık sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesine tanımlı her fonksiyona aritmetik fonksiyon denir [18].

2.1.5 Tanım: x ve y aralarında asal tamsayılar olmak üzere f aritmetik fonksiyonu

$$f(x.y) = f(x).f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna çarpım fonksiyonu ya da kısaca çarpımsaldır denir [18].

2.1.6 Tanım: n bir tamsayı, d, n'in bir pozitif tamsayı böleni ve $k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

biçiminde tanımlı aritmetik fonksiyona bölen fonksiyonu denir [16].

2.1.7 Uyarı: Eğer $k = 0$ alırsak $\sigma_0(n)$, n tamsayısının pozitif bölenlerinin sayısını, $k = 1$ alırsak $\sigma_1(n)$, n tamsayısının pozitif bölenlerinin toplamını elde ederiz. Ayrıca $k = 1$ iken $\sigma_1(n) = \sigma(n)$ ile gösterilir.

2.1.8 Örnek:

$$\sigma_1(6)=\sum_{d|6} d^1 = 1^1+2^1+3^1+6^1=12$$

$$\sigma_2(9)=\sum_{d|9} d^2 = 1^2+3^2+9^2=91$$

$$\sigma_3(6)=\sum_{d|6} d^3 = 1^3+2^3+3^3+6^3=252$$

2.1.9 Teorem: $\sigma_k(n)$ aritmetik fonksiyonu **bir çarpım** fonksiyonudur [16].

İspat: $(n_1,n_2)=1$, $d\in\mathbb{Z}^+$, $n_1.n_2$'nin bir böleni olsun. O zaman $d_1|d$, $d_2|d$,$d_1|n_1$, $d_2|n_2$ özelliğindeki $d_1,d_2\in\mathbb{Z}^+$ alalım. $(n_1,n_2)=1$ olduğundan $d_1.d_2|n_1.n_2$ yazılabilir. Buradan;

$$\sigma_k(n_1.n_2) = \sum_{d|n_1.n_2} d^k$$

$$\sigma_k(n_1.n_2) = \sum_{\substack{d_1|n_1\\ d_2|n_2}} (d_1.d_2)^k$$

$$\sigma_k(n_1.n_2)=\sum_{d_1|n_1} d_1^{\,k} \sum_{d_2|n_2} d_2^{\,k}$$

$$\sigma_k(n_1.n_2)=\sigma_k(n_1).\sigma_k(n_2)$$

elde edilir bu da $\sigma_k(n)$ fonksiyonunun çarpımsal aritmetik fonksiyon olduğunu verir.

2.1.10 Teorem: p bir asal sayı ve $r\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ olmak üzere

$$\sigma_k(p^r)=\frac{p^{(r+1)k}-1}{p^k-1}=1+p^k+p^{2k}+...+p^{rk}$$

biçiminde ifade edilebilir [16].

İspat:

$$\begin{aligned}
\sigma_k\left(p^r\right) &= \sum_{d|p^r} d^k \\
&= 1+p^k+p^{2k}+\ldots+p^{rk} \\
&= 1+p^k+(p^k)^2+\ldots+(p^k)^r \\
&= \frac{p^{(r+1)k}-1}{p^k-1}
\end{aligned}$$

2.1.11 Örnek:

$$\sigma_2\left(3^2\right)=\frac{3^{(2+1)2}-1}{3^2-1}=91$$

$$\sigma_3\left(5^1\right)=\frac{5^{(1+1)3}-1}{5^3-1}=126$$

2.1.12 Sonuç: p tek asal sayı olmak üzere

$$\sigma(p)=p+1$$

biçimindedir [16].

İspat:

$$\sigma_k\left(n\right)=\sum_{d|n} d^k$$

k yerine 1, n yerine p yazarsak

$$\begin{aligned}
\sigma(p) &= \sum_{d|p} p \\
&= p+1
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.1.13 Teorem: $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. N , n'yi bölen en büyük tek tam kare tamsayı olsun. $\sigma(n)$ ifadesinin tek tamsayı olması için gerek ve yeter şart N 'nin bir tam kare sayı olmasıdır [16].

İspat: $n = N.2^a$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olsun. N , n'nin en büyük tek tamsayı çarpanı, $(N,2^a)=1$ ve $\sigma(n)$ fonksiyonu çarpımsal aritmetik fonksiyon olduğundan

$$\sigma(n)=\sigma(N).\sigma(2^a)$$

şeklinde yazılabilir.

Varsayalım ki $\sigma(n)$ tek olsun. $\sigma(n)=\sigma(N).(2^{a+1}-1)$ yazılabileceğinden ve $(2^{a+1}-1)$ tek sayı olacağından $\sigma(N)$ fonksiyonu tek sayı olmalıdır. N tek olduğundan p^i tek asal sayılar olmak üzere; $N = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ biçimindedir.

$$\sigma(N) = \sigma(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k})$$

$$\sigma(N)=(1+p_1+p_1^2+...+p_1^{m_1}).(1+p_2+p_2^2+...+p_2^{m_2})...(1+p_k+p_k^2+...+p_k^{m_k})$$

$\sigma(N)$ fonksiyonu tek olduğundan tüm çarpanlar tek olmalıdır. $(1+p+p^2+\dots+p^m)$ tek olması için m çift olmalıdır. Tüm m_i 'ler çift olmalıdır. Sonuç olarak N bir tam karedir.

Varsayalım ki N bir tam kare olsun. $\sigma(n)=\sigma(N).\sigma(2^a)$ ve $N = p_1^{2m_1} p_2^{2m_2} \dots p_k^{2m_k}$ biçiminde olsun. O zaman

$$\sigma(N)=(1+p_1+p_1^2+...+p_1^{2m_1}).(1+p_2+p_2^2+...+p_2^{2m_2})...(1+p_k+p_k^2+...+p_k^{2m_k})$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\sigma(N)$ fonksiyonunun tüm çarpanları tek olacağından $\sigma(N)$ tek olur. Yani $\sigma(2^a)=(2^{a+1}-1)$ tektir. $\sigma(n)=\sigma(N).\sigma(2^a)$ olduğundan $\sigma(n)$ tek sayı olur.

2.1.14 Örnek:

$\sigma(25) = \sigma(5^2) = 1^1 + 5^1 + 25^1 = 31$ *tektir* $\Leftrightarrow 5^2$ *tam karedir*

$\sigma(2401) = \sigma(7^4) = 1^1 + 7^1 + 49^1 + 343^1 + 2401^1 = 2801$ *tektir* $\Leftrightarrow (7^2)^2$ *tam karedir*

$\sigma(64) = \sigma(2^6) = 1^1 + 2^1 + 4^1 + 8^1 + 16^1 + 32^1 + 64^1 = 127$ *tektir* $\Leftrightarrow (2^3)^2$ *tam karedir*

2.1.15 Tanım: $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k$$

biçiminde özel tanımlanan aritmetik fonksiyona $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu denir [16].

2.1.16 Örnek:

$$\hat{\sigma}_1(2)=(-1)^{\frac{2}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{2}{2}-1}.2=1$$

$$\hat{\sigma}_1(3)=(-1)^{\frac{3}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{3}{3}-1}.3=4$$

$$\hat{\sigma}_1(6)=(-1)^{\frac{6}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{6}{2}-1}.2+(-1)^{\frac{6}{3}-1}.3+(-1)^{\frac{6}{6}-1}.6=4$$

2.1.17 Teorem: $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d}\ çift}} d^k=\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

eşitliği vardır. [16]

İspat:

$$\frac{n}{d}\ çift \Rightarrow 2|\frac{n}{d} \Rightarrow d|\frac{n}{2}$$

$$\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d} çift}} d^k=\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|\frac{n}{2}}} d^k=\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

2.1.18 Örnek:

$$\sum_{\substack{d|12 \\ \frac{12}{d}\ çift}} d^1=\sigma_1\left(\frac{12}{2}\right)=1+2+3+6=12$$

$$\sum_{\substack{d|8 \\ \frac{8}{d}\ çift}} d^1=\sigma_1\left(\frac{8}{2}\right)=1+2+4=7$$

2.1.19 Teorem: $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\hat{\sigma}_k=\sigma_k(n)-2\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

eşitliği vardır [16].

İspat:

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k$$

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d} çift}} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k + \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d} tek}} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k$$

$$\hat{\sigma}_k(n) = -\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d} çift}} d^k + \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d} tek}} d^k$$

$$\hat{\sigma}_k(n) = -\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right) + \sigma_k(n) - \sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\hat{\sigma}_k(\mathrm{n}) = \sigma_k(n) - 2\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

2.1.20 Örnek:

$$\hat{\sigma}_1(6) = \sigma_1(6) - 2\sigma_1\left(\frac{6}{2}\right) = 12 - 2.4 = 4$$

$$\hat{\sigma}_1(10) = \sigma_1(10) - 2\sigma_1\left(\frac{10}{2}\right) = 18 - 2.6 = 6$$

$$\hat{\sigma}_1(12) = \sigma_1(12) - 2\sigma_1\left(\frac{12}{2}\right) = 28 - 2.12 = 4$$

2.1.21 Sonuç: 2.1.19 Teorem'de $k = 1$ yazarsak

$$\hat{\sigma}(n) = \sigma(n) - 2\sigma\left(\frac{n}{2}\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

2.1.22 Teorem: $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere n tek sayı ise

$$\hat{\sigma}(n) = \sigma(n)$$

dir [16].

İspat:

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k$$

$$d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n \,|n \quad olsun$$

$$d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n \quad tek\ olur$$

$$\hat{\sigma}(n) = (-1)^{\frac{n}{d_1}-1} d_1^{\,k} + (-1)^{\frac{n}{d_2}-1} d_2^{\,k} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{d_n}-1} d_n^{\,k}$$

$$\hat{\sigma}(n) = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$$

$$\hat{\sigma}(n) = \sigma(n)$$

2.1.23 Örnek:

$$n = 15 \Rightarrow \hat{\sigma}(15) = \sigma(15) = 24$$

$$n = 21 \Rightarrow \hat{\sigma}(21) = \sigma(21) = 32$$

$$n = 33 \Rightarrow \hat{\sigma}(33) = \sigma(33) = 48$$

2.2 Bernoulli Polinomları ve Bernoulli Sayıları

2.2.1 Tanım:

$$\frac{t.e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x).\frac{t^n}{n!}$$

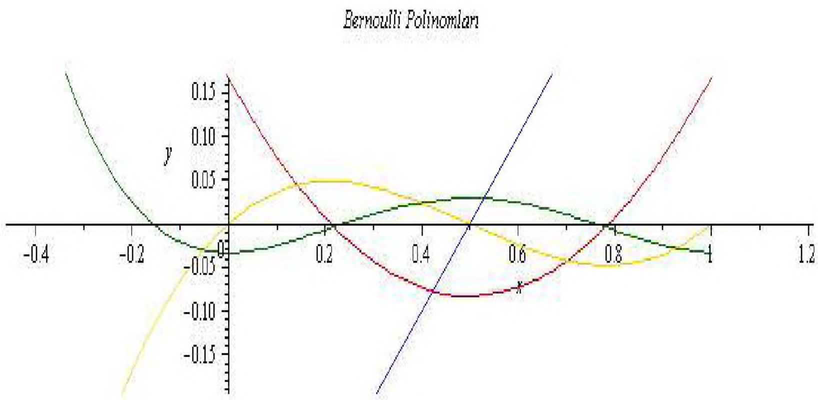
eşitliği ile tanımlı $B_n(x)$ polinomlarına Bernoulli polinomları denir [13].

2.2.2 Örnek: Aşağıdaki tabloda bazı Bernoulli polinomlarına örnekler verilmiştir.

Tablo 2.1: İlk sekiz Bernoulli polinomları.

$B_0(x)$	1
$B_1(x)$	$x-\frac{1}{2}$
$B_2(x)$	$x^2-x+\frac{1}{6}$
$B_3(x)$	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$
$B_4(x)$	$x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$
$B_5(x)$	$x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$
$B_6(x)$	$x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$
$B_7(x)$	$x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x$

Aşağıdaki şekilde bazı Bernoulli polinomlarının grafiklerine örnekler verilmiştir.



Şekil 2.1: Bazı Bernoulli polinomlarına örnekler.

2.2.3 Teorem: $B_n(1-x)=(-1)^n.B_n(x)$ [19].

2.2.4 Teorem: $B_n(1+x)-B_n(x)=n.x^{n-1}$ [19].

2.2.5 Teorem: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}.B_n(k)=n!$ [19].

2.2.6 Teorem: $n.x^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.B_{n-k}(x)$ [19].

2.2.7 Teorem: $B_k(x)+B_k(x+\frac{1}{2})=2^{1-k}.B_k(2x)$ [20].

2.2.8 Teorem: $B_k(1-x)=(-1)^k.B_k(x)$ [20].

2.2.9 Tanım: Bernoulli polinomu $B_k(x)$ 'de $x=0$ alınırsa $B_k=B_k(0)$ biçiminde tanımlanan sayılar elde edilir. Bu sayılara Bernoulli sayıları denir ve B_k ile gösterilir. [20]

2.2.10 Örnek: Aşağıdaki tabloda ilk on dört Bernoulli sayıları verilmiştir.

Tablo 2.2: İlk on dört Bernoulli sayıları.

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0

2.2.11 Teorem: $n\neq 1$ ise $B_n=B_n(1)$ dir [20].

2.2.12 Teorem: $n>1$ ve n tek sayı ise $B_n=0$ dır. [20].

2.2.13 Teorem: $B_n(1)=(-1)^n B_n$ [20].

2.2.14 Teorem: $(-1)^{n+1}.B_{2n+1}(x)>0$ [20].

2.2.15 Teorem: $n \geq 2$, $k \geq 1$ olmak üzere n ve k tamsayıları için

$$\hat{B}_k(n) = \begin{cases} \sum_{d|n} B_k(d) - 2\sum_{d|\frac{n}{2}} B_k(d), & n \text{ çift ise} \\ \sum_{d|n} B_k(d), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliği vardır [11].

2.2.16 Teorem: $n \geq 2$, $k \geq 1$ n ve k tamsayıları için

$$\sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{2s+1} \sum_{m=1}^{n-1} \hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(n-m) = \frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(n) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(n) - \frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(n)$$

eşitliği vardır [11].

2.2.17 Teorem: $N \geq 1$, $k \geq 2$ tamsayı olmak üzere

$$\sum_{s=1}^{k-1} \binom{2k}{2s+1} \sum_{m=1}^{2N-1} (-1)^m \hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2N-m) = \frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(N) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2N) - \frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2N)$$

eşitliği vardır [11].

3. BÖLEN FONKSİYONLARI, BERNOULLİ POLİNOMLARI VE BERNOULLİ SAYILARI İLE İLGİLİ YENİ DENKLEMLER

3.1 Özel Tanımlı $\hat{\sigma}_k(n)$ Bölen Fonksiyonu ile İlgili Sonuçlar

3.1.1 Teorem: Özel tanımlı $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu çarpımsal aritmetik fonksiyondur.

İspat: $n = n_1.n_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ ve $(n_1, n_2) = 1$ olsun.

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k$$

$$\hat{\sigma}_k(n_1.n_2) = \sum_{d|n_1.n_2} (-1)^{\frac{n_1.n_2}{d}-1} d^k$$

$(n_1, n_2) = 1$ iken $d|n_1.n_2 \Leftrightarrow a|n_1$ ve $b|n_2$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $d = (a, b)$ olmasıdır.

$$\hat{\sigma}_k(n_1.n_2) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z}^+ \\ a|n_1 \\ b|n_2}} (-1)^{\frac{n_1.n_2}{a.b}-1} (a.b)^k$$

$$\hat{\sigma}_k(n_1.n_2) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z}^+ \\ a|n_1 \\ b|n_2}} (-1)^{\frac{n_1}{a}-1} a^k.(-1)^{\frac{n_2}{b}-1} b^k$$

$$\hat{\sigma}_k(n_1.n_2) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^+ \\ a|n_1}} (-1)^{\frac{n_1}{a}-1} a^k . \sum_{\substack{b\in\mathbb{Z}^+ \\ b|n_2}} (-1)^{\frac{n_2}{b}-1} b^k$$

$$= \hat{\sigma}_k(n_1).\hat{\sigma}_k(n_2)$$

$$\frac{n_1}{a} \; çift, \frac{n_2}{b} \; tek \Rightarrow \left(\frac{n_1.n_2}{a.b} - 1\right) \rightarrow tek \; olur$$

$$\frac{n_1}{a} \; tek, \frac{n_2}{b} \; tek \Rightarrow \left(\frac{n_1.n_2}{a.b} - 1\right) \rightarrow çift \; olur$$

Sonuç olarak

$$(-1)^{\frac{n_1.n_2}{a.b}} = (-1)^{\frac{n_1}{a}-1} . (-1)^{\frac{n_2}{b}-1}$$

eşitliği elde edilir.

3.1.2 Örnek:

$$\hat{\sigma}_1(3.7)=\hat{\sigma}_1(3).\hat{\sigma}_1(7)=32$$

$$\hat{\sigma}_1(3.5)=\hat{\sigma}_1(3).\hat{\sigma}_1(5)=24$$

$$\hat{\sigma}_1(3.19)=\hat{\sigma}_1(3).\hat{\sigma}_1(19)=80$$

3.1.3 Teorem: p tek asal sayı ise

$$\hat{\sigma}\ (p)=p+1$$

dir.

İspat:

$$\hat{\sigma}(n)=\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}-1}d$$

$n=p$ asal sayı olsun.

$$\hat{\sigma}(p)=\sum_{d|p}(-1)^{\frac{p}{d}-1}d$$

$$\begin{aligned}&=(-1)^{\frac{p}{p}-1}.p^1+(-1)^{\frac{p}{1}-1}.1^1\\&=p+1\end{aligned}$$

3.1.4 Örnek:

$$\hat{\sigma}\ (7)=8$$

$$\hat{\sigma}\ (19)=20$$

$$\hat{\sigma}\ (61)=62$$

3.1.5 Teorem: p tek asal sayı ise

$$\hat{\sigma}_k(p)=1+p^k$$

dir.

İspat: $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonunu $\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}-1}d^k$ biçiminde tanımlıdır. Burada $n=p$ asal sayı yazarsak

$$\hat{\sigma}_k(p)=\sum_{d|p}(-1)^{\frac{p}{d}-1}d^k$$

$$=(-1)^{\frac{p}{1}-1}1^k+(-1)^{\frac{p}{p}-1}p^k$$

$$=(-1)^{p-1}1\ +(-1)^{1-1}p^k$$

$$=1\ +p^k$$

3.1.6 Örnek:

$$\hat{\sigma}_1(17)=1+17^1=18$$

$$\hat{\sigma}_2(5)=1+5^2=26$$

$$\hat{\sigma}_3(3)=1+3^3=28$$

3.1.7 Teorem: $t\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\hat{\sigma}\ (2^t)=1$ dir.

İspat:

$$\hat{\sigma}_k(n)=\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}-1}d^k$$

$k=1$ ve $n=2^t$ olsun

$$\hat{\sigma}_1(2^t)=\sum_{d|n}(-1)^{\frac{2^t}{d}-1}d^1$$

olarak yazılabilir.

$$\hat{\sigma}(2^t)=(-1)^{\frac{2^t}{2^0}-1}.1^1+(-1)^{\frac{2^t}{2^1}-1}.2^1+....+(-1)^{\frac{2^t}{2^t}-1}.2^t$$
$$=-\left(1+2+...+2^{t-1}\right)+2^t$$
$$=-\left(\frac{1-2^t}{1-2}\right)+2^t$$
$$=1$$

3.1.8 Örnek:

$$\hat{\sigma}(2^1)=1$$

$$\hat{\sigma}(2^3)=1$$

$$\hat{\sigma}(2^5)=1$$

3.1.9 Teorem: $k\in\mathbb{Z}^+$ ve $t\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\hat{\sigma}_k(2^t)=\dfrac{2^{tk+1}-2^{tk+k}-1}{1-2^k}$ dir.

İspat:

$$\hat{\sigma}_k(n)=\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}-1}d^k$$

$$\hat{\sigma}_k(2^t)=\sum_{d|2^t}(-1)^{\frac{2^t}{d}-1}d^k$$

$$\hat{\sigma}_k(2^t)=(-1)^{\frac{2^t}{1}-1}.1^k+(-1)^{\frac{2^t}{2}-1}.2^k+(-1)^{\frac{2^t}{2^2}-1}.2^{2k}+...+(-1)^{\frac{2^t}{2^{t-1}}-1}.2^{(t-1)k}+(-1)^{\frac{2^t}{2^t}-1}.2^{tk}$$

$$(2^t-1),(2^{t-1}-1),(2^{t-2}-1),...,(2^1-1)$$

ifadelerinin tümü tek sayıdır. Bu durumda

$$\hat{\sigma}_k(2^t)=-\left[1+2^k+2^{2k}+...+2^{k(t-1)}\right]+2^{tk}$$

$$\hat{\sigma}_k(2^t)=-\frac{1-2^{tk}}{1-2^k}+2^{tk}=\frac{2^{tk+1}-2^{tk+k}-1}{1-2^k}$$

3.1.10 Örnek:

$$\hat{\sigma}_2(2^2)=\frac{2^{4+1}-2^{4+2}-1}{1-2^2}=11$$

$$\hat{\sigma}_2(2^3)=\frac{2^{6+1}-2^{6+2}-1}{1-2^2}=43$$

3.1.11 Teorem: p tek asal sayı ve $t \geq 0$, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\hat{\sigma}\ (p.2^t) = p+1$ dir.

İspat: $n = p.2^t$ alalım. $n \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ p tek asal sayı olsun o zaman $(p,2^t) = 1$ dir.

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^k$$

$$\hat{\sigma}_1(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{n}{d}-1} d^1$$

$\hat{\sigma}(n)$ bölen fonksiyonu çarpımsal aritmetik fonksiyon olduğundan;

$$\hat{\sigma}(p.2^t) = \underbrace{\hat{\sigma}(p)}_{p+1}.\underbrace{\hat{\sigma}(2^t)}_{1} = p+1$$

olarak yazılabilir.

3.1.12 Örnek:

$$\hat{\sigma}\ (5.2^1) = 5+1 = 6$$

$$\hat{\sigma}\ (7.2^2) = 7+1 = 8$$

$$\hat{\sigma}\ (13.2^5) = 13+1 = 14$$

3.1.13 Teorem: p tek asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\hat{\sigma}_k(p.2^t) = (1+p^k)\left(\frac{2^{tk+1} - 2^{tk+k} - 1}{1-2^k}\right)$$

eşitliği elde edilir.

İspat: $n = p.2^t$ alalım. $n \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ p tek asal sayı olsun. $(p,2^t) = 1$ ve $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu çarpımsal aritmetik fonksiyon olduğundan ;

$$\hat{\sigma}_k(p.2^t) = \underbrace{\hat{\sigma}_k(p)}_{p^k+1}.\underbrace{\hat{\sigma}_k(2^t)}_{\frac{2^{tk+1}-2^{tk+k}-1}{1-2^k}} = (p^k+1).\frac{2^{tk+1} - 2^{tk+k} - 1}{1-2^k}$$

3.1.14 Örnek:

$$\hat{\sigma}_2(3.2^3)=(1+3^2)\left(\frac{2^{3.2+1}-2^{3.2+2}-1}{1-2^2}\right)=430$$

$$\hat{\sigma}_2(5.2^3)=(1+5^2)\left(\frac{2^{3.2+1}-2^{3.2+2}-1}{1-2^2}\right)=1118$$

3.2 Özel Tanımlı $\hat{B}_k(n)$ Bernoulli Polinomları ile İlgili Sonuçlar

3.2.1 Teorem: $k\neq 1$ ve p tek asal sayı ise

$$\hat{B}_k(p)=B_k+B_k(p)$$

şeklinde olur.

İspat: $k\neq 1$ ve p tek asal sayı olsun.

$$\hat{B}_k(p)=\sum_{d\mid p}B_k(d)=B_k(1)+B_k(p)=B_k+B_k(p)$$

3.2.2 Örnek:

$$\hat{B}_3(5)=B_3+B_3(5)=0+5^3-\frac{3}{2}.5^2+\frac{1}{2}.5=90$$

3.2.3 Teorem: $k\geq 2$ ve $r\geq 0$, $n=2^r$ olmak üzere

$$\hat{B}_k(n)=\hat{B}_k(2^r)=\begin{cases} B_k(2^r)-\sum\limits_{d\mid 2^{r-1}}B_k(d), & n \text{ çift ise}\\ B_k, & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

eşitliği vardır.

İspat:

$k\geq 2$ ve $r\geq 0$, $n=2^r$ olsun. 2.2.13. Tanım'da n yerine 2^r yazarsak

$$\hat{B}_k(2^r)=\begin{cases} \sum\limits_{d\mid 2^r}B_k(d)-2\sum\limits_{d\mid \frac{2^r}{2}}B_k(d), & n \text{ çift ise}\\ \sum\limits_{d\mid n}B_k(d), & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliği n'nin tek ve çift oluşuna göre ayrı ayrı inceleyelim.

n tek olsun.

$r=0 \Rightarrow 2^r = 2^0 = 1$ olduğunda sadece n tek olur.O halde;

$$\sum_{d|1} B_k(d) = B_k(1) = B_k$$

elde edilir.

n çift olsun $r>0 \Rightarrow 2^r$ daima çift olur.

$$\hat{B}_k(2^r) = \sum_{d|2^r} B_k(d) - 2\sum_{d|2^{r-1}} B_k(d)$$

$$\hat{B}_k(2^r) = B_k(1)+B_k(2)+B_k(2^2)+...+B_k(2^{r-1})+B_k(2^r)-2.\left[B_k(1)+B_k(2)+B_k(2^2)+...+B_k(2^{r-1})\right]$$

$$\hat{B}_k(2^r) = -\left[B_k(1)+B_k(2)+...+B_k(2^{r-1})\right]+B_k(2^r)$$

$$\hat{B}_k(2^r) = B_k(2^r) - \sum_{d|2^{r-1}} B_k(d)$$

elde edilir.

3.2.4 Teorem: $k \geq 2$ ve $r \geq 0$, p tek asal sayı olmak üzere $n = p.2^r$ olsun.

$$\hat{B}_k(n) = \hat{B}_k(p.2^r) = \begin{cases} B_k(2^r)+B_k(p.2^r) - \sum\limits_{d|p.2^{r-1}} B_k(d), & n \text{ çift ise} \\ B_k + B_k(p), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

İspat: p tek asal sayı olmak üzere $n = p.2^r$ olsun.

n tek olsun.

$r=0 \Rightarrow p.2^r = p.2^0 = p$ olduğunda $n = p$ tek olur.

O halde ;

$$\sum_{d|p} B_k(d) = B_k(1)+B_k(p) = B_k + B_k(p)$$

n çift sayı olsun.

$r > 0 \Rightarrow p.2^r$ daima çifttir.

$$\hat{B}_k(p.2^r) = \sum_{d|p.2^r} B_k(d) - 2\sum_{d|2^{r-1}} B_k(d)$$

$$\hat{B}_k(p.2^r) = B_k(1) + B_k(2) + B_k(2^2) + \ldots + B_k(2^{r-1}) + B_k(2^r) + \ldots + B_k(p.2^r)$$
$$-2.\left[B_k(1) + B_k(2) + B_k(2^2) + \ldots + B_k(2^{r-1}) + \ldots + B_k(p.2^{r-1})\right]$$

$$\hat{B}_k(p.2^r) = B_k(2^r) + B_k(p.2^r) - \left[B_k(1) + B_k(2) + \ldots + B_k(p.2^{r-1})\right]$$

$$\hat{B}_k(p.2^r) = B_k(2^r) + B_k(p.2^r) - \sum_{d|p.2^{r-1}} B_k(d)$$

elde edilir.

3.2.5 Örnek:

$$\hat{B}_3(5.2^1) = B_3(2^1) + B_3(5.2^1) - \sum_{d|5.2^0} B_3(d)$$

$$\hat{B}_3(10) = B_3(2^1) + B_3(10) - (B_3(1) + B_3(5))$$

$$B_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$

$$B_3(2) = 3$$
$$B_3(10) = 855$$
$$B_3(1) = 0$$
$$B_3(5) = 90$$

$$\hat{B}_3(10) = 3 + 855 - (0 + 90) = 768$$

3.3 Özel Tanımlı $\hat{B}_k(n)$ Bernoulli Polinomlarından Elde Edilen Özel Tanımlı Bölen Fonksiyonlarının Kombinatorik Konvolüsyon Toplamları ile İlgili Sonuçlar

3.3.1 Teorem: $k,n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k \geq 1$ ve $p > 2$ asal sayı iken

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{p-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(p-m)=\frac{1}{2}\left(p^{2k+1}-p^{2k}\right)-\frac{1}{2k+1}B_{2k+1}(p)$$

eşitliği elde edilir.

İspat: 2.2.16 Teoremden yararlanarak $k,n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k \geq 1$ ve $p > 2$ asal sayı

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{p-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(p-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(p)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(p)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(p)$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(p)=\frac{1}{2}(1+p^{2k+1})$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(p)=-\frac{1}{2}(1+p^{2k})$$

$$-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(p)=-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}+B_{2k+1}(p)\right]$$

$$B_{2k+1}=0$$

eşitlikleri elde edilir. Bunları denklemde yerine yazarsak

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{p-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(p-m)=\frac{1}{2}\left(p^{2k+1}-p^{2k}\right)-\frac{1}{2k+1}B_{2k+1}(p)$$

sonucu bulunur.

3.3.2 Örnek:

$$\sum_{s=0}^{1-1}\binom{2}{2s+1}\sum_{m=1}^{2}\hat{\sigma}_{1-2s}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(3-m)=\binom{2}{1}\sum_{m=1}^{2}\hat{\sigma}_{1}(m).\hat{\sigma}_{1}(3-m)$$

$$2\left[\hat{\sigma}(1).\hat{\sigma}(2)+\hat{\sigma}(2).\hat{\sigma}(1)\right]=2.\left[1.1+1.1\right]=\frac{1}{2}(3^3-3^2)-\frac{1}{3}\left[(B_3+B_3(3)\right]=4$$

3.3.3 Teorem: $k,t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\geq 1$ ve $t>0$ iken

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{2^t-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2^t-m)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{(t+1)(k+1)}-1}{2^{(k+1)}-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2^{(2tk+1)}-2^{(2tk+2k)}-1}{2^{2k}-1}\right)-\frac{1}{2k+1}\left(B_{2k+1}(2^t)-\sum_{d|2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right)$$

eşitliği elde edilir.

İspat: 2.2.16 Teorem'den yararlanarak $n,k,t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\geq 1$, $t>0$ için $n=2^t$ yazarsak

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{2^t-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2^t-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(2^t)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2^t)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2^t)$$

elde edilir. Sağ taraftaki ifadeleri hesaplayacak olursak

$$\sigma_{2k+1}(2^t)=\frac{2^{(t+1)(2k+1)}-1}{2^{2k+1}-1}$$

$$\hat{\sigma}_{2k}(2^t)=\frac{2^{2tk+1}-2^{2tk+2k}-1}{1-2^{2k}}$$

$$\hat{B}_{2k+1}(2^t)=\left[B_{2k+1}(2^t)-\sum_{d|p.2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

elde edilir.

Bu eşitlikleri yukarıda yerine yazarsak

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{2^t-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2^t-m)=\frac{1}{2}.\frac{2^{(t+1)(2k+1)}-1}{2^{2k+1}-1}-\frac{1}{2}\frac{2^{2tk+1}-2^{2tk+2k}-1}{1-2^{2k}}$$
$$-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}(2^t)-\sum_{d|p.2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{2^t-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2^t-m)=\frac{1}{2}.\frac{2^{(t+1)(2k+1)}-1}{2^{2k+1}-1}+\frac{1}{2}\frac{2^{2tk+1}-2^{2tk+2k}-1}{2^{2k}-1}$$
$$-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}(2^t)-\sum_{d|p.2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

elde edilir.

3.3.4 Teorem: $n,k,t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\geq 1$, $t>0$ ve p tek asal sayı iken $n=p.2^t$ ise

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(n-m)=$$

$$=\frac{(1+p^{2k+1})(2^{(t+1)(2k+1)}-1)}{2(2^{2k+1}-1)}+\frac{(1+p^{2k})(2^{(2tk+1)}-2^{(2tk+2k)}-1)}{2(2^{2k}-1)}$$

$$-\frac{1}{2k+1}\left(B_{2k+1}(2^t)+B_{2k+1}(p.2^t)-\sum_{d|p.2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right)$$

dir.

İspat: 2.2.16 Teorem'den yararlanarak $n,k,t\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k\geq 1$, $t>0$ ve p tek asal sayı iken $n=p.2^t$

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(n-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(n)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(n)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(n)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(n)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(p.2^t)=\frac{(1+p^{2k+1}).(2^{(t+1).(2k+1)}-1)}{2.(2^{2k+1}-1)}$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(n)=-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(p.2^t)=\frac{(1+p^{2k}).(2^{(2tk+1)}-2^{(2tk+2k)}-1)}{2.(2^{2k}-1)}$$

$$-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(n)=-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}(2^t)+B_{2k+1}(p.2^t)-\sum_{d|p.2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

bulunan eşitlikleri denklemde yerine yazarsak

$$=\frac{(1+p^{2k+1})(2^{(t+1)(2k+1)}-1)}{2(2^{2k+1}-1)}+\frac{(1+p^{2k})(2^{(2tk+1)}-2^{(2tk+2k)}-1)}{2(2^{2k}-1)}-\frac{1}{2k+1}\left(B_{2k+1}(2^t)+B_{2k+1}(p.2^t)-\sum_{d|p.2^{t-1}}B_{2k+1}(d)\right)$$

elde edilir.

3.3.5 Teorem: $k\geq 2\ ,N\geq 1\ \ r>0$ p tek asal sayı ve $2N=p.2^r$ ve $N=p.2^{r-1}$ olsun. O zaman;

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2N-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(N)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2N)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2N)$$

$$=\frac{1}{2}(p^{2k+1}+1).\left(\frac{2^{(2k+1)r}-1}{2^{2k+1}-1}\right)+\frac{1}{2}(p^{2k}+1)\frac{(2^{(2rk+1)}-2^{(2rk+2k)}-1)}{2.(2^{2k}-1)}$$
$$-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}(2^r)+B_{2k+1}(p.2^r)-\sum_{d|p.2^{r-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

dir.

İspat: 2.2.17 Teorem'den yararlanarak $k\geq 2\ ,N\geq 1\ \ r>0$ p tek asal sayı $2N=p.2^r$ ve $N=p.2^{r-1}$ olsun.

$$\sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2N-m)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(N)-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2N)-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2N)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}(N)=\frac{1}{2}\sigma_{2k+1}\left(p.2^{r-1}\right)=\frac{(1+p^{2k+1}).(2^{(r-1+1).(2k+1)}-1)}{2.(2^{2k+1}-1)}$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2N)=-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(p.2^{r})=\frac{(1+p^{2k}).(2^{(2rk+1)}-2^{(2rk+2k)}-1)}{2.(2^{2k}-1)}$$

$$-\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2N)=-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}(2^{r})+B_{2k+1}(p.2^{r})-\sum_{d|p.2^{r-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

bulunan eşitlikleri denklemde yerine yazarsak

$$=\frac{1}{2}\left(p^{2k+1}+1\right).\left(\frac{2^{(2k+1)r}-1}{2^{2k+1}-1}\right)+\frac{1}{2}(p^{2k}+1)\frac{(2^{(2rk+1)}-2^{(2rk+2k)}-1)}{2.(2^{2k}-1)}$$
$$-\frac{1}{2k+1}\left[B_{2k+1}(2^{r})+B_{2k+1}(p.2^{r})-\sum_{d|p.2^{r-1}}B_{2k+1}(d)\right]$$

elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bazı özel tanımlı bölen fonksiyonlarının Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ile ilişkisi incelenmiştir.

İlk bölümde, Bernoulli polinomları, Bernoulli sayıları ve bölen fonksiyonları ile ilgili genel bilgilerin verildiği giriş bölümüdür.

Sonraki bölümde, bölen fonksiyonları, Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ile ilgili temel tanım ve teoremlerin yer aldığı ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, özel tanımlı bölen fonksiyonları ve özel tanımlı Bernoulli polinomları ile ilgili orijinal teoremlere yer verilmiştir. Buna ek olarak özel tanımlı Bernoulli polinomlarından elde edilen özel tanımlı bölen fonksiyonlarının kombinatorik konvolüsyon toplamları ile ilgili orijinal teoremler yer almaktadır.

Bu tezde yapılan çalışmalar ışığında aşağıdaki denklemler kullanılarak yeni denklemler elde edilebilir.

$N \geq 1$ için

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ tek sayı} \\ l \text{ çift sayı}}}^{2N-1} \hat{\sigma}_{l-1}(m).\hat{\sigma}\,(2N-m) = \frac{1}{2l}\left[\sigma_{l+1}(N)+\sigma_{l+1}(2N)\right]-\frac{1}{l}\hat{\sigma}_l(2N)-\frac{2}{l(l+1)}\hat{B}_{l+1}(2N)$$

eşitliği elde edilir. [11]

$N \geq 1$, $k \geq 2$ için

$$\sum_{s=1}^{k-1}\binom{2k}{2s+1}\sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ tek sayı}}}^{2N-1} \hat{\sigma}_{2k-2s-1}(m).\hat{\sigma}_{2s+1}(2N-m) = 2^{2k-1}\sigma^{*}_{2k+1}(N)-\frac{1}{4}\left[\sigma_{2k+1}(N)+\sigma_{2k+1}(2N)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{2k}(2N)+\frac{1}{2k+1}\hat{B}_{2k+1}(2N)$$

eşitliği elde edilir. [11]

5. Kaynakça

[1] S. C. Laura Elizabeth, Sums of Powers and the Bernoulli Numbers, Illinois: Eastern Illinois University, 1996.

[2] C. LIN, "On Bernoulli Numbers and its Propertie", *arXiv:math/0408082,* 2004.

[3] H. Park, K. Daeyeoul ve . J. S. So, "Some result for binomial convolution sums of restricted divisor functions ", *Applicable Analysis and Discrete Mathematics,* cilt 14, pp. 641-653, 2020.

[4] S. Ramanujan, "On certain arithmetical functions", *Trans.Cambridge Philos,* cilt 22, no. 9, pp. 159-184, 1916.

[5] H. Hahn, "Convolutions sums of some functions on divisors", *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* cilt 37, pp. 1593-1622, 2007.

[6] Z. M. Ou, J. G. Huard, B. K. Spearman ve K. S. Williams, "Elementary evaluation of certain convolution sums involving divisor functions" , *Number Theory For THe Millennium,* cilt 2, pp. 229-274, 2002.

[7] D. B. Lahiri, "On Ramanujan's functions r(n) and the divisor function , I", Bull. Calcutta Math. Soc ", cilt 38, no. 1946, pp. 193-203.

[8] J. Glaisher, On the square of series in which the coefficients are the sums of the divisors of the exponents, cilt 14, 1885, pp. 156-163.

[9] N. Cheng ve K. S. Williams, "Evaluation of some convolution sums involving the sum of divisor functions", *Yokohama Math.J.,* cilt 52, no. 2005, pp. 39-57.

[10] G. Melfi, "On some modular identities", *Number Theory,* pp. 371-382, 1998.

[11] D. Kim, A. Bayad ve N. Yıldız İkikardeş, "Certain Combinatoric Convolution Sums and Their Relations to Bernoulli and Euler Polynomials" *J.Korean Math,* no. 3, pp. 537-565, 2015.

[12] D. Kim ve N. Yıldız İkikardeş, "Relations of Combinatoric Convolution Sums for restricted divisor functions and Bernoulli polynomials" *,Miskolc Mathematical Notes,* no. 2, pp. 731-748, 2021.

[13] H. M. Srivastava ve A. Pinter, "Remarks on Some Relationships Between the Bernoulli and Euler Polynomials" , *Applied Mathematics Letters,* cilt 17, no. 4, pp. 375-380, 2004.

[14] H. M. Srivastava ve J. Choi, Series Associated with the Zeta and Related Functions, New York: Springer Dordrecht, 2001.

[15] W. Magnus , F. Oberhettinger ve R. P. Soni , Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, New York: Springer-Verlag, 1966.

[16] K. S. Williams, Number Theory in the Spirit of Liouville, London Math. Soc. Student Texts 76, 2011.

[17] R. Hammack, Book of Proof, Virginia: Richard Hammack, 2018.

[18] G. E. Andrews, Number Theory, Dover Publications, 1994.

[19] T. M. Apostol, "A primer on Bernoulli numbers and polynomials", *Mathematics Magazine,* cilt 81, no. 3, pp. 178-190, 2008.

[20] H. Radamacher, Topics in analytic number theory, cilt 169, 2012.

EKLER

EKLER

EK A: Bernoulli Sayılarının Maple 13 Uygulaması Kullanılarak Elde Edilen Listesi $(1 \leq n \leq 50)$

```
> with(numtheory);
[GIgcd, bigomega, cfrac, cfracpol, cyclotomic, divisors, factorEQ, factorset, fermat, imagunit,        (1)
   index, integral_basis, invcfrac, invphi, iscyclotomic, issqrfree, ithrational, jacobi, kronecker,
   λ, legendre, mcombine, mersenne, migcdex, minkowski, mipolys, mlog, mobius, mroot,
   msqrt, nearestp, nthconver, nthdenom, nthnumer, nthpow, order, pdexpand, ϕ, π, pprimroot,
   primroot, quadres, rootsunity, safeprime, σ, sq2factor, sum2sqr, τ, thue]
> ?bernoulli
> for n from 1 to 100 do
  print('bernoulli'(n) = bernoulli(n))
  end do
```

$$\text{bernoulli}(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{bernoulli}(2) = \frac{1}{6}$$

$$\text{bernoulli}(3) = 0$$

$$\text{bernoulli}(4) = -\frac{1}{30}$$

$$\text{bernoulli}(5) = 0$$

$$\text{bernoulli}(6) = \frac{1}{42}$$

$$\text{bernoulli}(7) = 0$$

$$\text{bernoulli}(8) = -\frac{1}{30}$$

$$\text{bernoulli}(9) = 0$$

$$\text{bernoulli}(10) = \frac{5}{66}$$

$$\text{bernoulli}(11) = 0$$

$$\mathrm{bernoulli}(12) = -\frac{691}{2730}$$
$$\mathrm{bernoulli}(13) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(14) = \frac{7}{6}$$
$$\mathrm{bernoulli}(15) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(16) = -\frac{3617}{510}$$
$$\mathrm{bernoulli}(17) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(18) = \frac{43867}{798}$$
$$\mathrm{bernoulli}(19) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(20) = -\frac{174611}{330}$$
$$\mathrm{bernoulli}(21) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(22) = \frac{854513}{138}$$
$$\mathrm{bernoulli}(23) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(24) = -\frac{236364091}{2730}$$
$$\mathrm{bernoulli}(25) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(26) = \frac{8553103}{6}$$
$$\mathrm{bernoulli}(27) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(28) = -\frac{23749461029}{870}$$
$$\mathrm{bernoulli}(29) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(30) = \frac{8615841276005}{14322}$$
$$\mathrm{bernoulli}(31) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(32) = -\frac{7709321041217}{510}$$
$$\mathrm{bernoulli}(33) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(34) = \frac{2577687858367}{6}$$
$$\mathrm{bernoulli}(35) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(36) = -\frac{26315271553053477373}{1919190}$$
$$\mathrm{bernoulli}(37) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(38) = \frac{2929993913841559}{6}$$
$$\mathrm{bernoulli}(39) = 0$$
$$\mathrm{bernoulli}(40) = -\frac{261082718496449122051}{13530}$$
$$\mathrm{bernoulli}(41) = 0$$

$$\text{bernoulli}(42) = \frac{1520097643918070802691}{1806}$$

$$\text{bernoulli}(43) = 0$$

$$\text{bernoulli}(44) = -\frac{27833269579301024235023}{690}$$

$$\text{bernoulli}(45) = 0$$

$$\text{bernoulli}(46) = \frac{596451111593912163277961}{282}$$

$$\text{bernoulli}(47) = 0$$

$$\text{bernoulli}(48) = -\frac{5609403368997817686249127547}{46410}$$

$$\text{bernoulli}(49) = 0$$

$$\text{bernoulli}(50) = \frac{495057205241079648212477525}{66}$$

EK B: Bernoulli Polinomlarının Maple 13 Uygulaması Kullanılarak Elde Edilen Listesi $(1 \le n \le 30)$

```
> for n from 1 to 100 do
  print('bernoulli'(n, x) = bernoulli(n, x))
  end do
```

$$\mathrm{bernoulli}(1, x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{bernoulli}(2, x) = \frac{1}{6} + x^2 - x$$

$$\mathrm{bernoulli}(3, x) = \frac{1}{2}x + x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$\mathrm{bernoulli}(4, x) = -\frac{1}{30} + x^2 + x^4 - 2x^3$$

$$\mathrm{bernoulli}(5, x) = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{3}x^3 + x^5 - \frac{5}{2}x^4$$

$$\mathrm{bernoulli}(6, x) = \frac{1}{42} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^4 + x^6 - 3x^5$$

$$\mathrm{bernoulli}(7, x) = \frac{1}{6}x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{7}{2}x^5 + x^7 - \frac{7}{2}x^6$$

$$\mathrm{bernoulli}(8, x) = -\frac{1}{30} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{14}{3}x^6 + x^8 - 4x^7$$

$$\mathrm{bernoulli}(9, x) = -\frac{3}{10}x + 2x^3 - \frac{21}{5}x^5 + 6x^7 + x^9 - \frac{9}{2}x^8$$

$$\mathrm{bernoulli}(10, x) = \frac{5}{66} - \frac{3}{2}x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \frac{15}{2}x^8 + x^{10} - 5x^9$$

$$\mathrm{bernoulli}(11, x) = \frac{5}{6}x - \frac{11}{2}x^3 + 11x^5 - 11x^7 + \frac{55}{6}x^9 + x^{11} - \frac{11}{2}x^{10}$$

$$\mathrm{bernoulli}(12, x) = -\frac{691}{2730} + 5x^2 - \frac{33}{2}x^4 + 22x^6 - \frac{33}{2}x^8 + 11x^{10} + x^{12} - 6x^{11}$$

$$\mathrm{bernoulli}(13, x) = -\frac{691}{210}x + \frac{65}{3}x^3 - \frac{429}{10}x^5 + \frac{286}{7}x^7 - \frac{143}{6}x^9 + 13x^{11} + x^{13} - \frac{13}{2}x^{12}$$

$$\mathrm{bernoulli}(14, x) = \frac{7}{6} - \frac{691}{30}x^2 + \frac{455}{6}x^4 - \frac{1001}{10}x^6 + \frac{143}{2}x^8 - \frac{1001}{30}x^{10} + \frac{91}{6}x^{12}$$

$$\mathrm{bernoulli}(15, x) = \frac{35}{2}x - \frac{691}{6}x^3 + \frac{455}{2}x^5 - \frac{429}{2}x^7 + \frac{715}{6}x^9 - \frac{91}{2}x^{11} + \frac{35}{2}x^{13} + x^{15} - \frac{15}{2}x^{14}$$

$$\mathrm{bernoulli}(16, x) = -\frac{3617}{510} + 140x^2 - \frac{1382}{3}x^4 + \frac{1820}{3}x^6 - 429x^8 + \frac{572}{3}x^{10} - \frac{182}{3}x^{12} + 20x^{14} + x^{16} - 8x^{15}$$

$$\mathrm{bernoulli}(17, x) = -\frac{3617}{30}x + \frac{2380}{3}x^3 - \frac{23494}{15}x^5 + \frac{4420}{3}x^7 - \frac{2431}{3}x^9 + \frac{884}{3}x^{11}$$

$$- \frac{238}{3} x^{13} + \frac{68}{3} x^{15} + x^{17} - \frac{17}{2} x^{16}$$

$$\mathrm{bernoulli}(18, x) = \frac{43867}{798} - \frac{10851}{10} x^2 + 3570 x^4 - \frac{23494}{5} x^6 + 3315 x^8 - \frac{7293}{5} x^{10} + 442 x^{12} - 102 x^{14} + \frac{51}{2} x^{16} + x^{18} - 9 x^{17}$$

$$\mathrm{bernoulli}(19, x) = \frac{43867}{42} x - \frac{68723}{10} x^3 + 13566 x^5 - \frac{446386}{35} x^7 + \frac{20995}{3} x^9 - \frac{12597}{5} x^{11} + 646 x^{13} - \frac{646}{5} x^{15} + \frac{57}{2} x^{17} + x^{19} - \frac{19}{2} x^{18}$$

$$\mathrm{bernoulli}(20, x) = -\frac{174611}{330} + \frac{219335}{21} x^2 - \frac{68723}{2} x^4 + 45220 x^6 - \frac{223193}{7} x^8 + \frac{41990}{3} x^{10} - 4199 x^{12} + \frac{6460}{7} x^{14} - \frac{323}{2} x^{16} + \frac{95}{3} x^{18} + x^{20} - 10 x^{19}$$

$$\mathrm{bernoulli}(21, x) = -\frac{1222277}{110} x + \frac{219335}{3} x^3 - \frac{1443183}{10} x^5 + 135660 x^7 - \frac{223193}{3} x^9 + \frac{293930}{11} x^{11} - 6783 x^{13} + 1292 x^{15} - \frac{399}{2} x^{17} + 35 x^{19} + x^{21} - \frac{21}{2} x^{20}$$

$$\mathrm{bernoulli}(22, x) = \frac{854513}{138} - \frac{1222277}{10} x^2 + \frac{2412685}{6} x^4 - \frac{5291671}{10} x^6 + 373065 x^8 - \frac{2455123}{15} x^{10} + \frac{146965}{3} x^{12} - 10659 x^{14} + \frac{3553}{2} x^{16} - \frac{1463}{6} x^{18} + \frac{77}{2} x^{20} + x^{22} - 11 x^{21}$$

$$\mathrm{bernoulli}(23, x) = \frac{854513}{6} x - \frac{28112371}{30} x^3 + \frac{11098351}{6} x^5 - \frac{17386919}{10} x^7 + \frac{2860165}{3} x^9 - \frac{5133439}{15} x^{11} + \frac{260015}{3} x^{13} - \frac{81719}{5} x^{15} + \frac{4807}{2} x^{17} - \frac{1771}{6} x^{19} + \frac{253}{6} x^{21} + x^{23} - \frac{23}{2} x^{22}$$

$$\mathrm{bernoulli}(24, x) = -\frac{236364091}{2730} + 1709026 x^2 - \frac{28112371}{5} x^4 + \frac{22196702}{3} x^6 - \frac{52160757}{10} x^8 + 2288132 x^{10} - \frac{10266878}{15} x^{12} + 148580 x^{14} - \frac{245157}{10} x^{16} + \frac{9614}{3} x^{18} - \frac{1771}{5} x^{20} + 46 x^{22} + x^{24} - 12 x^{23}$$

$$\mathrm{bernoulli}(25, x) = -\frac{1181820455}{546} x + \frac{42725650}{3} x^3 - 28112371 x^5 + \frac{554917550}{21} x^7 - \frac{86934595}{6} x^9 + 5200300 x^{11} - \frac{51334390}{39} x^{13} + \frac{742900}{3} x^{15} - \frac{72105}{2} x^{17} + \frac{12650}{3} x^{19} - \frac{1265}{3} x^{21} + 50 x^{23} + x^{25} - \frac{25}{2} x^{24}$$

$$\mathrm{bernoulli}(26, x) = \frac{8553103}{6} - \frac{1181820455}{42} x^2 + \frac{277716725}{3} x^4 - \frac{365460823}{3} x^6$$

$$+\frac{3606964075}{42}x^{8}-\frac{226029947}{6}x^{10}+\frac{33801950}{3}x^{12}-\frac{51334390}{21}x^{14}$$

$$+\frac{2414425}{6}x^{16}-\frac{312455}{6}x^{18}+\frac{16445}{3}x^{20}-\frac{1495}{3}x^{22}+\frac{325}{6}x^{24}+x^{26}-13\,x^{25}$$

$$\mathrm{bernoulli}(27,x)=\frac{76977927}{2}x-\frac{3545461365}{14}x^{3}+499890105\,x^{5}-469878201\,x^{7}$$

$$+\frac{3606964075}{14}x^{9}-\frac{184933593}{2}x^{11}+23401350\,x^{13}-\frac{30800634}{7}x^{15}+\frac{1278225}{2}x^{17}$$

$$-\frac{148005}{2}x^{19}+\frac{49335}{7}x^{21}-585\,x^{23}+\frac{117}{2}x^{25}+x^{27}-\frac{27}{2}x^{26}$$

$$\mathrm{bernoulli}(28,x)=-\frac{23749461029}{870}+538845489\,x^{2}-\frac{3545461365}{2}x^{4}+2332820490\,x^{6}$$

$$-\frac{3289147407}{2}x^{8}+721392815\,x^{10}-\frac{431511717}{2}x^{12}+46802700\,x^{14}-\frac{15400317}{2}x^{16}$$

$$+994175\,x^{18}-\frac{207207}{2}x^{20}+8970\,x^{22}-\frac{1365}{2}x^{24}+63\,x^{26}+x^{28}-14\,x^{27}$$

$$\mathrm{bernoulli}(29,x)=-\frac{23749461029}{30}x+5208839727\,x^{3}-\frac{20563675917}{2}x^{5}+9664542030\,x^{7}$$

$$-\frac{10598363867}{2}x^{9}+1901853785\,x^{11}-\frac{962603061}{2}x^{13}+90485220\,x^{15}$$

$$-\frac{26271129}{2}x^{17}+1517425\,x^{19}-\frac{286143}{2}x^{21}+11310\,x^{23}-\frac{7917}{10}x^{25}+\frac{203}{3}x^{27}$$

$$+x^{29}-\frac{29}{2}x^{28}$$

$$\mathrm{bernoulli}(30,x)=\frac{8615841276005}{14322}-\frac{23749461029}{2}x^{2}+\frac{78132595905}{2}x^{4}$$

$$-\frac{102818379585}{2}x^{6}+\frac{72484065225}{2}x^{8}-\frac{31795091601}{2}x^{10}+\frac{9509268925}{2}x^{12}$$

$$-\frac{2062720845}{2}x^{14}+\frac{339319575}{2}x^{16}-\frac{43785215}{2}x^{18}+\frac{4552275}{2}x^{20}-\frac{390195}{2}x^{22}$$

$$+\frac{28275}{2}x^{24}-\frac{1827}{2}x^{26}+\frac{145}{2}x^{28}+x^{30}-15\,x^{29}$$

EK C: k 100 Bernoulli Sayısı ve Bernoulli Polinomunu Veren Maple 13 Kodları

Maple 13 kodları
[>with(numtheory); [>for n from 1 to 100 do print('bernoulli'(n)=bernoulli(n)) end do; [>for n to 100 do print(('bernoulli')(n, x) = bernoulli(n, x)) end do;

EK D: İlk 4 Bernoulli Polinomunun Grafiğini Veren Maple 13 Kodları

Maple 13 kodları
[>with(numtheory); with(Statistics); with(plots); [>F := plot(x-1/2, x = -.4 .. 1, y = -.15 .. .15, style = line, color = "Blue"); G := plot(1/6+x^2-x, x = -.4 .. 1, y = -.15 .. .15, style = line, color = "red"); H := plot((1/2)*x+x^3-3*x^2*(1/2), x = -.4 .. 1, y = -.15 .. .15, style = line, color = "black"); T := plot(-1/30+x^2+x^4-2*x^3, x = -.4 .. 1, y = -.15 .. .15, style = line, color = "Green"); [> display({F, G, H, T}, axes = boxed, scaling = constrained, title = Bernoulli*`Polinomları`);