

**T.C.**  
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTİ SAYILARI**

**BEYZA GERİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Jüri Üyeleri :** **Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE (Tez Danışmanı)**  
**Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ**  
**Doç. Dr. Aslı GÜÇLÜKAN İLHAN**

**BALIKESİR, HAZİRAN – 2022**

## ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Sayısal Yarıgrup Halkalarının Betti Sayıları**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.



**Beyza Gergin**

## ÖZET

**SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTI SAYILARI**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**BEYZA GERGİN**  
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ PINAR METE)**  
**BALIKESİR, HAZİRAN-2022**

$R$ ,  $k$  cismi üzerinde polinom halkası ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M$  modülünün Betti sayısı,  $R$  halkası üzerindeki sonlu üretilmiş derecelendirilmiş modüllerin çalışılmasında önemli değişmezlerden birisidir. Betti sayıları, üreteçler ve bunların arasındaki bağıntılar ile tanımlanırlar. Tanımının basitliğine rağmen çok sayıda bilgiyi içerirler. Matematiğin pek çok alanında karşımıza çıkan sayısal yarıgruplar, değişmeli monoidlerdir ve izomorfizmalarla  $(\mathbb{N}, +)$  monoidinin tüm alt monoidlerini sınıflandırılırlar. Bu tez sayısal yarıgrup halkalarının Betti sayıları ile ilgili bazı sonuçların bir derlemesidir. Sayısal yarıgruplar ve serbest çözümlere kısa bir giriş yaptıktan sonra, modüllerin serbest çözümlerini hesaplamak için Gröbner Baz Teorisini kullanan Schreyer Algoritmasını çalışıyoruz. Derecelendirilmiş Betti sayılarını ve Betti tablolarını detaylı örnekler ile açıklıyoruz. Ardından, düşük gömme boyutundaki sayısal yarıgruplar hakkında bilinen bazı sonuçları veriyoruz.

**ANAHTAR KELİMELER:** Sayısal yarıgruplar, serbest çözümler, Betti sayıları

Bilim Kod / Kodları : 20401

Sayfa Sayısı : 45

## ABSTRACT

**BETTI NUMBERS OF NUMERICAL SEMIGROUPS RINGS**  
**MSC THESIS**  
**BEYZA GERGİN**  
**BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**  
**MATHEMATICS**  
**(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)**  
**BALIKESİR, JUNE - 2022**

Let  $R$  be a polynomial ring over a field  $k$  and  $M$  be an  $R$ -module. The Betti numbers of  $M$ , comes out as one of the most important invariants in the study of finitely generated graded modules over  $R$ . The Betti numbers are defined in terms of generators and relations between them. In spite of its simple definition, Betti numbers contain a great deal of information. Numerical semigroups appearing in various branches of mathematics are commutative monoids and classify all submonoids of  $(\mathbb{N}, +)$  up to isomorphism. This thesis a survey of some results about Betti numbers of numerical semigroup rings. After giving a short introduction to numerical semigroups and free resolutions, we study the Schreyer Algorithm which uses the theory of Gröbner bases to compute free resolutions of modules. We explain graded Betti numbers and Betti tables with detailed examples. Then, we give some results about the numerical semigroups in small embedding dimensions.

**KEYWORDS:** Numerical semigroups, free resolutions, Betti numbers

Science Code / Codes : 20401

Page Number : 45

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>v</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	<b>3</b>
2.1 Monoidler ve Homomorfizmalar .....	3
2.2 Sayısal Yarıgruplar.....	5
2.3 Monoidler ve Temsiller .....	7
2.4 Sayısal Yarıgrup Halkaları .....	12
2.5 Derecelendirilmiş Cebirler .....	14
2.6 Modüller ve Serbest Modüller .....	16
<b>3. MODÜLLERİN SERBEST ÇÖZÜMLERİ</b> .....	<b>21</b>
3.1 Szigiler.....	21
3.2 Serbest Çözüm Nedir?.....	22
3.3 Schreyer Algoritması.....	27
3.4 Derecelendirilmiş Modüller ve Homomorfizmalar.....	31
3.5 Derecelendirilmiş Çözümler .....	35
<b>4. SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTI SAYILARI</b> .....	<b>37</b>
4.1 Betti Sayıları .....	37
4.2 Derecelendirilmiş Betti Sayıları.....	38
4.3 Betti Tabloları .....	40
4.4 Sayısal Yarıgruplar ve Betti Sayıları.....	41
<b>5. KAYNAKLAR</b> .....	<b>44</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>45</b>

## SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\langle \mathbf{A} \rangle$	:	A tarafından üretilen yarıgrup
<b>obeb</b>	:	Ortak bölenlerin en büyüğü
<b>m(S)</b>	:	S yarıgrupunun katlılığı
<b>e(S)</b>	:	S yarıgrupunun boyutu
<b>F(S)</b>	:	S yarıgrupunun Frobenius sayısı
<b>G(S)</b>	:	S yarıgrupunun boşluklar kümesi
<b>g(S)</b>	:	S yarıgrupunun cinsi
$[x]_{\sigma}$	:	$x'$ in $\sigma$ modülüne göre denklik sınıfı
<b>Çek(f)</b>	:	f dönüşümünün çekirdeği
<b>Gör(f)</b>	:	f dönüşümünün görüntü kümesi
<b>k[x<sub>1</sub>, ..., x<sub>p</sub>]</b>	:	k cismi üzerindeki $x_1, \dots, x_p$ değişkenli polinom halkası
<b>I<sub>S</sub></b>	:	S' nin tanımlayan ideali
<b>der(x<sub>i</sub>)</b>	:	$x_i$ polinomunun derecesi
<b>R/I</b>	:	R/I bölüm halkası
<b>okek</b>	:	Ortak katların en küçüğü
<b>LM(f)</b>	:	f' nin en büyük dereceli tek terimlisi
<b>LT(f)</b>	:	f' nin en büyük dereceli terimi
$\bar{f}^G$	:	f' nin G ile bölümünden kalan
<b>b<sub>i</sub><sup>R</sup>(M)</b>	:	M modülünün Betti sayısı
<b>pb<sub>R</sub>(M)</b>	:	M modülünün projektif boyutu
<b>P<sub>M</sub><sup>R</sup>(t)</b>	:	M' nin R üzerindeki Poincaré serisi
<b>b<sub>i,p</sub><sup>R</sup>(M)</b>	:	M' nin derecelendirilmiş Betti sayısı
<b>P<sub>M</sub><sup>R</sup>(t, z)</b>	:	M' nin derecelendirilmiş Poincaré serisi
<b>P<sub>G</sub>(t)</b>	:	G çözümünün Poincaré serisi

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, sorularıma daima sabırla cevap verip bana rehberlik eden saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE' ye teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan ve çalışmalarımı her zaman gönülden destekleyen aileme teşekkür ederim.

**Balıkesir, 2022**

**Beyza Gergin**

# 1. GİRİŞ

Bir  $S$  sayısal yarıgrubu, doğal sayılar kümesinin  $obeb(n_1, \dots, n_p) = 1$  ve  $n_1 < n_2 < \dots < n_p$  ile üretilen bir toplamsal yarıgrubudur. Sayısal yarıgruplar, tekillik teorisinin çalışılmasından sayılar ve kodlama teorisine kadar matematiğin birçok alanında ortaya çıkar. Sayısal yarıgruplar ile ilgili [1] ilk kaynak olarak verilebilir.

$k[t]$ ,  $k$  cismi üzerinde  $t$  değişkenli polinom halkası olmak üzere

$$k[S] = k[t^n : n \in S] \subseteq k[t]$$

$k$ -cebirine,  $S$  sayısal yarıgrubunun yarıgrup halkası denir.

$$\begin{aligned} k[x_1, \dots, x_p] &\rightarrow k[S] \\ x_i &\rightarrow t^{n_i}, i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$k$ -cebiri homomorfizmasını düşünelim. Bu durumda

$$k[S] \cong k[x_1, \dots, x_p]/I_S$$

dir. Burada,  $I_S$  idealine,  $S$ ' nin tanımlayan ideali denir.  $I_S$  ideali ile ilgili bilinen ilk sonuç Herzog' un doktora tezindedir [2].

Bir standart  $k$ -cebirinin minimal serbest çözümünü tam olarak bulmak, değişmeli cebirin temel sorularından birisidir. Serbest çözümlerdeki diferansiyelin bir tanımını elde etmek genellikle oldukça zor olduğundan, Betti sayıları gibi çözümlüğün sayısal değişmezleri hakkında bazı bilgiler elde edebiliriz. Bir  $M$   $R$ -modülünün  $i$ . Betti sayısı,  $\beta_i(M)$ ,

$$0 \rightarrow R^{\beta_{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow R^{\beta_1} \rightarrow R^{\beta_0}$$

minimal serbest çözümündeki, serbest modüllerin rankıdır. Yine,  $M$ ' nin Betti dizisi,  $\beta(M)$ ,

$$(\beta_0(M), \beta_1(M), \dots, \beta_k(M))$$

dizisidir. Stamate [3], sayısal yarıgrup halkalarının Betti sayıları hakkında geniş bir araştırma yapmıştır ve sayısal yarıgrupların Betti sayıları üzerine birçok açık problem vermiştir.

Tezin 2. bölümünde, monoid ve sayısal yarıgrup kavramlarının tanımlarına, bu kavramlar arasındaki ilişkilere, benzerlik ve farklılara değinilmiş, yarıgrup halkaları ile ilgili temel tanım

ve özelliklere yer verilmiştir. Devamında derecelendirilmiş cebir, modül ve serbest modül kavramlarının tanımları verilip örneklendirilmiştir.

Tezin 3. bölümünde, sizgi modül kavramı tanımlanarak sizgi modülün bir serbest çözümdeki yeri önce homomorfizmalar yardımıyla serbest çözüm bularak daha sonra Schreyer Algoritması ile daha formal şekilde çalışılmıştır.

Tezin 4. bölümünde, bir serbest çözüm verildiğinde, Betti sayısı, projektif boyut, Poincaré serisi gibi sayısal değişmezlerin nasıl bulunacağı örneklerle gösterilmiştir. Daha sonra derecelendirilmiş Betti sayılarından bahsedilip Betti diyagramı dediğimiz tabloların formu verilmiştir. Son olarak, küçük gömme boyutlarında sayısal yarıgrupların Betti sayıları ile ilgili bazı bilinen sonuçlardan söz edilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bir sayısal yarıgrupun bir değişmeli monoid olarak düşünülerek temsil edilme fikri çalışılmış, yarıgrup halkası, derecelendirilmiş cebir ve monoid kavramlarının tanımlarına ve örneklerine yer verilmiştir.

### 2.1 Monoidler ve Homomorfizmalar

**2.1.1 Tanım.**  $S \neq \emptyset$  ve "+",  $S$  üzerinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem olmak üzere  $(S, +)$  ikilisine bir yarıgrup denir.

Bir  $S$  yarıgrupunun,  $T$  alt yarıgrubu  $S$  üzerindeki işleme göre kapalı olan bir alt kümesidir.

**2.1.2 Not.** Bir  $S$  yarıgrupunun alt yarıgruplarının kesişimi yine  $S$ ' nin bir alt yarıgrupudur.

**2.1.3 Tanım.**  $S$  bir yarıgrup ve  $\emptyset \neq A \subset S$  olsun.  $S$  yarıgrupunun  $A$  kümesini içeren en küçük alt yarıgrubu  $S$  yarıgrupunun  $A$  kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimidir. Bu yarıgruba  $A$  tarafından üretilen yarıgrup denir ve  $\langle A \rangle$  ile gösterilir.

Bir başka deyişle,

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_1, \dots, a_n \in A \}$$

$S = \langle A \rangle$  ise,  $S$  yarıgrubu,  $A$  tarafından üretilmiştir denir. Bu durumda  $A$ ,  $S$ ' nin üreteçlerinin bir sistemidir. Eğer  $A$  alt yarıgrubu sonlu tane elemana sahipse,  $S$  sonlu üreteçlidir denir.

**2.1.4 Tanım.**  $M$  bir yarıgrup olsun. Her  $a \in M$  için,

$$a + 0 = 0 + a = a$$

olacak şekilde bir  $0 \in M$  birim elemanı var ise  $M$  yarıgrupuna monoid denir.

Eğer  $M$ 'nin  $N$  alt kümesi,  $M$  monoidinin bir alt yarıgrubu ve  $0 \in N$  ise  $N$ ' ye  $M$ ' nin bir alt monoidi denir.

**2.1.5 Örnek.**  $M$  bir monoid ise,  $\{0\}$  kümesi,  $M$ ' nin bir alt monoididir. Buna  $M$ ' nin aşıkâr alt monoidi denir.

Yarıgruaplarda olduğu gibi bir monoidin, alt monoidlerinin kesişimi de kendisinin bir alt monoidi olur.

Bir  $M$  monoidi ve  $M'$  nin bir  $A$  alt kümesi verilsin.  $A$ 'yı içeren en küçük alt monoidi

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \text{ ve } a_1, \dots, a_n \in A \}$$

kümesine,  $M'$  nin  $A$  tarafından üretilen alt monoidi denir.

$\langle A \rangle = M$  ise,  $A$ 'ya  $M'$  nin üreteçlerinin bir sistemi ve  $M$ ,  $A$  tarafından üretilmiştir denir. Buna göre, bir  $M$  monoidinin üreteçlerinin bir sistemi sonlu sayıda elemandan oluşuyorsa  $M'$  ye sonlu üreteçli monoid denir.

**2.1.6 Tanım.**  $X$  ve  $Y$  yarıgrupları verilsin.  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümü için, her  $a, b \in X$  iken

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

ise,  $f$  dönüşümüne bir yarıgrup homomorfizması denir.

$f$  homomorfizması, birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, birebir ve örten ise izomorfizma adını alır.  $f^{-1}$ ,  $f$  homomorfizmasının tersi olmak üzere,  $f$  bir izomorfizma ise,  $f^{-1}$  de bir izomorfizmadır.  $X$  ve  $Y$  yarıgrupları arasında bir izomorfizma var ise  $X$  ve  $Y$  izomorfiktir denir ve  $X \cong Y$  ile gösterilir.

**2.1.7 Tanım.**  $X$  ve  $Y$  monoid olsunlar.  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümü bir yarıgrup homomorfizması ve  $f(0) = 0$  ise,  $f$  dönüşümüne bir monoid homomorfizması denir.

Monoidlerde de, monomorfizma, epimorfizma ve izomorfizma kavramları yarıgruaplarda olduğu gibi tanımlanır.

**2.1.8 Uyarı.** Doğal sayılar kümesinde "+" işlemini alalım. Her  $x, y \in \mathbb{N}$  için,  $x + y \in \mathbb{N}$  olduğundan  $(\mathbb{N}, +)$  kapalıdır. Her  $x, y, z \in \mathbb{N}$  için,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

oldüğundan  $(\mathbb{N}, +)$  birleşmelidir.  $0 \in \mathbb{N}$  dir. Böylece  $(\mathbb{N}, +)$  bir monoiddir.

## 2.2 Sayısal Yarıgruplar

Sayısal yarıgruplar,  $\mathbb{N}$ ' nin alt monoidlerini sınıflandırır.

**2.2.1 Tanım.**  $(\mathbb{N}, +)$  monoidinin, sıfırı içeren, toplamaya göre kapalı ve  $\mathbb{N} \setminus S$  sonlu olan  $S$  alt monoidine bir sayısal yarıgrup denir.

**2.2.2 Yardımcı Teorem.**  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$  olsun.

$$\langle A \rangle \text{ sayısal yarıgruptur} \iff \text{obeb}(A) = 1 \text{ dir.}$$

**İspat:** [1].

**2.2.3 Örnek.**  $S = \langle 7, 11, 19 \rangle = \{7x_1 + 11x_2 + 19x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}\}$  kümesinin bir sayısal yarıgrup olduğunu görelim.

$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \in \mathbb{N}$  dir.  $0 = 7 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 19 \cdot 0$  olarak yazılabilir. O halde  $0 \in S$  dir.

$x, y \in S$  olsun.

$$x = 7x_1 + 11x_2 + 19x_3$$

$$y = 7y_1 + 11y_2 + 19y_3$$

olacak şekilde  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$  vardır.

$$x + y = (7x_1 + 11x_2 + 19x_3) + (7y_1 + 11y_2 + 19y_3)$$

$$= 7x_1 + 7y_1 + 11x_2 + 11y_2 + 19x_3 + 19y_3$$

$$= 7(x_1 + y_1) + 11(x_2 + y_2) + 19(x_3 + y_3)$$

$(x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3) \in \mathbb{N}$  olduğundan  $x + y \in S$  dir.

$$S = \{0, 7, 11, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, \dots\}$$

olarak listelendiğinden,

$$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 23, 24, 27, 31, 34\}$$

kümesi olur. Bu sonlu bir kümedir. Böylece 2.2.1 Tanım' dan  $S$  bir sayısal yarıgruptur.

**2.2.4 Önerme.**  $M, \mathbb{N}$ ' nin  $\{0\} \neq M$  olan alt monoidi ise,  $M$  bir sayısal yarıgruba izomorfiktir.

**İspat:** [1].

2.2.4 Önerme' den,  $M$  monoidinin bir tek sonlu minimal üreteç sistemine sahip olduğu söylenebilir.

**2.2.5 Tanım.**  $\{n_1 < \dots < n_p\}$ ,  $S$  sayısal yarıgrubunun üreteçlerinin minimal sistemi olsun.  $n_1$  sayısına  $S$  sayısal yarıgrubunun katlılığı denir ve  $m(S)$  olarak gösterilir.

**2.2.6 Tanım.**  $S$  sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sisteminin eleman sayısı,  $S'$  nin gömme boyutu olarak adlandırılır ve  $e(S)$  ile gösterilir.

**2.2.7 Not.**  $S$  sayısal yarıgrubunda,  $e(S) \leq m(S)$  dir [1].

**2.2.8 Tanım.**  $S$  sayısal yarıgrubunda olmayan en büyük tam sayıya  $S'$  nin Frobenius sayısı denir ve  $F(S)$  ile gösterilir.

**2.2.9 Tanım.** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x + n \in S$  olacak şekildeki en küçük  $x$  tam sayısına  $S'$  nin kondüktörü denir.

**2.2.10 Not.**  $F(S) = (S'$  nin kondüktörü)  $-1$  dir.

**2.2.11 Tanım.**  $G = \mathbb{N} \setminus S$  kümesine  $S'$  nin boşluklar kümesi denir.  $G$  kümesinin eleman sayısı olarak tanımlanan  $g(S)$ ' ye  $S'$  nin cinsi denir.  $g(S)$  bazen  $S'$  nin tekillik derecesi olarak da adlandırılır.

**2.2.12 Örnek.**  $S = \langle 7, 11, 19 \rangle = \{7x_1 + 11x_2 + 19x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}\}$  sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesini, Frobenius sayısını ve cinsini bulalım.  $S$  sayısal yarıgrubunu

$S = \{0, 7, 11, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, \dots\}$  olarak listelersek,

$$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 23, 24, 27, 31, 34\} = G(S)$$

$$g(S) = |G(S)| = 20$$

$$F(S) = 34$$

olarak bulunur.

### 2.3 Monoidler ve Temsiller

Bir monoid, monoid kategorisinde bir serbest obje ile temsil edilebilir. Sayısal bir yarıgrup, değişmeli bir monoid olarak düşünülebilir. Bu bölümde, monoidler için 1.izomorfizma teoremine yer verilecektir. Kaynak olarak [1] ve [4] kullanılmıştır.

**2.3.1 Tanım.**  $X \neq \emptyset$  olsun.  $X \times X'$  in  $\sigma$  alt kümesi,  $X$  kümesi üzerinde bir bağıntıdır. Eğer  $(x, y) \in \sigma$  ise,  $x\sigma y$  yazılır ve  $x, y$  ile  $\sigma$ -bağıntılıdır denir.  $\sigma$ , yansıyan, simetrik ve geçişmeli ise,  $\sigma$  bir denklik bağıntısıdır. Her  $x \in X$  için  $x'$  in  $\sigma$  bağıntısına göre denklik sınıfı,  $[x]_\sigma$ ,  $X$  kümesinin,  $\sigma'$  ya göre  $x$  ile bağıntılı olan elemanlarını içerir.  $\frac{X}{\sigma}$  kümesi,  $[x]_\sigma$  elemanlarından oluşur ve  $X'$  in parçalanışı olan bu kümeye  $X'$  in  $\sigma$  bağıntısı ile bölüm kümesi denir.

**2.3.2 Tanım.**  $M$  monoidi üzerinde  $\sigma$  denklik bağıntısını düşünelim.  $M'$  nin  $x, y, z$  elemanları için,

$$x\sigma y \implies (x + z)\sigma(y + z)$$

ise  $\sigma$  bağıntısına bir kongrüans adı verilir.

**2.3.3 Yardımcı Teorem.** [1]  $\sigma$ ,  $M$  monoidinin üzerinde bir kongrüans olsun.

$[x]_\sigma, [y]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$  için,

$$[x]_\sigma + [y]_\sigma = [x + y]_\sigma$$

ile tanımlı toplama işlemi ile  $\frac{M}{\sigma}$  bir monoiddir.

**İspat:**  $+$  işleminin iyi tanımlı olduğunu görelim. Bunu görmek için,

$x\sigma y$  ve  $z\sigma t$  iken

$$(x + z)\sigma(y + t)$$

olduğunu görmeliyiz.

$x\sigma y$  ve  $z\sigma t$  olsun.

$$x\sigma y \implies (x+z)\sigma(y+z)$$

$$z\sigma t \implies (y+z)\sigma(y+t)$$

$\sigma$  denklik bağıntısı olduğundan geçişme özelliğinden dolayı  $(x+z)\sigma(y+t)$  elde edilir.

Her  $[x]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$  için,

$$[x]_\sigma + [e]_\sigma = [e]_\sigma + [x]_\sigma = [x]_\sigma$$

olacak şekilde  $[e]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$  bulmalıyız.

$$\begin{aligned} [x]_\sigma + [e]_\sigma &= [x+e]_\sigma \\ &= [x]_\sigma \end{aligned}$$

olduğundan  $(x+e)\sigma x$  bulunur.  $M$  bir monoid olduğundan  $0 \in M$  dir.

$$\begin{aligned} &\implies (x+e)\sigma(x+0) \\ &\implies e\sigma 0 \end{aligned}$$

Böylece  $[e]_\sigma = [0]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$  elde edilir.

Şimdi  $+$  işleminin  $\frac{M}{\sigma}$ ' da birleşmeli olduğunu görelim. Her  $[x]_\sigma, [y]_\sigma, [z]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$  için,

$$([x]_\sigma + [y]_\sigma) + [z]_\sigma = ([x+y]_\sigma) + [z]_\sigma = [(x+y)+z]_\sigma$$

$x, y, z \in M$  ve  $M$  bir monoid olduğundan,

$$[x+(y+z)]_\sigma = [x]_\sigma + ([y+z]_\sigma) = [x]_\sigma + ([y]_\sigma + [z]_\sigma)$$

Buradan,  $(\frac{M}{\sigma}, +)$  bir bölüm monoididir.

**2.3.4 Tanım.**  $X$  ve  $Y$  birer monoid olsun.  $f : X \rightarrow Y$  dönüşümü, Her  $x, y \in X$  için,

i)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii)  $f(0) = 0$

koşullarını sağlıyorsa,  $f$  dönüşümüne bir monoid homomorfizması denir.

**2.3.5 Tanım.**  $f : X \rightarrow Y$  bir monoid homomorfizması olsun.  $f$ ' nin çekirdek kongrüansı,

$$\text{Çek}(f) = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$$

olarak tanımlanır.

**2.3.6 Not.**  $\text{Çek}(f)$ ,  $X$  monoidi üzerinde bir kongrüanstır:

$(x, y) \in \text{Çek}(f)$ ,  $z \in X$  olsun.

$$((x + z), (y + z)) \in \text{Çek}(f)$$

olduğunu görmeliyiz.  $f$  bir homomorfizma olduğundan  $x, y, z \in X$  iken,

$$f(x + z) = f(x) + f(z)$$

$$f(y + z) = f(y) + f(z)$$

olur.  $(x, y) \in \text{Çek}(f)$  olduğundan,  $f(x) = f(y)$  dir. Buradan,

$$f(x) + f(z) = f(y) + f(z)$$

$$\implies f(x + z) = f(y + z)$$

$$\implies ((x + z), (y + z)) \in \text{Çek}(f)$$

elde edilir.

**2.3.7 Tanım.**  $f : X \rightarrow Y$  bir monoid homomorfizması olsun.  $f$ ' nin görüntü kümesi

$$\text{Gör}f = \{f(a) \mid a \in X\}$$

olarak tanımlanır.  $\text{Gör}f$ ,  $Y$ ' nin alt monoididir.

Monoidler ve değışmeli gruplardaki olağan tanımlar arasındaki ufak farklılara dikkat ediniz. Monoid morfizmlerindeki  $f(0) = 0$  koşulu grup homomorfizmaları için dayatılamaz. Diğer temel fark çekirdeğin tanımıdır. Çekirdek, grup teorisinde birim eleman ile eşlenen elemanlar kümesidir. Bazı temel farklar olmasına rağmen 1. İzomorfizma Teoremi hâlâ geçerlidir.

**2.3.8 Önerme.** [1]  $f : X \rightarrow Y$  bir monoid homomorfizması olsun.

$$\tilde{f} : \frac{X}{\text{Çek}f} \rightarrow \text{Gör}f$$

$$\tilde{f}([x]_{\text{Çek}f}) = f(x)$$

bir monoid izomorfizmasıdır.

**İspat:**  $\tilde{f}$  dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$[x]_{\text{Çekf}}, [y]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}}$  ve  $[x]_{\text{Çekf}} = [y]_{\text{Çekf}}$  olsun.  $(x, y) \in \text{Çekf}$  olduğundan  $f(x) = f(y)$ ' dir.

$$\implies \tilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) = \tilde{f}([y]_{\text{Çekf}})$$

olur. Böylece  $\tilde{f}$  dönüşümü iyi tanımlıdır.

$[x]_{\text{Çekf}}, [y]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}}$  için,  $\tilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) = \tilde{f}([y]_{\text{Çekf}})$  olsun.

$$\implies f(x) = f(y)$$

$$\implies (x, y) \in \text{Çekf}$$

$$\implies [x]_{\text{Çekf}} = [y]_{\text{Çekf}}$$

olduğundan  $\tilde{f}$  dönüşümü birebirdir.

$$\begin{aligned} \text{Gör } \tilde{f} &= \{ \tilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) \mid [x]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}} \} \\ &= \{ f(x) \mid x \in X \} \\ &= \text{Gör } f \end{aligned}$$

olduğundan  $\tilde{f}$  dönüşümü örtendir.

Şimdi  $\tilde{f}$  dönüşümünün homomorfizma olduğunu gösterelim.

$[x]_{\text{Çekf}}, [y]_{\text{Çekf}} \in \frac{X}{\text{Çekf}}$  alalım.

$$\tilde{f}([x]_{\text{Çekf}} + [y]_{\text{Çekf}}) = \tilde{f}([x + y]_{\text{Çekf}}) = f(x + y).$$

$f$  homomorfizma olduğundan,

$$= f(x) + f(y)$$

$$= \tilde{f}([x]_{\text{Çekf}}) + \tilde{f}([y]_{\text{Çekf}})$$

elde edilir.  $\tilde{f}([0]_{\text{Çekf}}) = f(0) = 0$  olur. Buradan,  $\tilde{f}$  bir monoid homomorfizmasıdır.  $\tilde{f}$  homomorfizması birebir ve örten olduğundan bir izomorfizmadır. Böylece,

$$\frac{X}{\text{Çekf}} \cong \text{Gör } f$$

yazılır.

$S = \langle 2, 3 \rangle$  olan bir sayısal yarıgrup olsun. Buradan  $S = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  S sayısal yarıgrupunu,  $3x = 2y$  olacak şekilde  $x$  ve  $y$  elemanları tarafından üretilen bir değişmeli monoid olarak düşünebiliriz. Böylece  $S = \langle (x, y) \mid 3x = 2y \rangle$  yazılabilir. Bu temsil etme

fikrini oluşturur. Şimdi bunu resmileştirelim.

$S$  sayısal yarıgrubunun, minimal olarak  $\{n_1, \dots, n_p\}$  elemanları tarafından üretildiğini varsayalım.

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N}^p &\rightarrow (S, +) \\ (a_1, \dots, a_p) &\rightarrow a_1n_1 + \dots + a_pn_p\end{aligned}$$

dönüşümünü alalım.  $\varphi$  bir monoid epimorfizmasıdır.  $\mathbb{N}^p$  ve  $(S, +)$  değişmeli monoidlerdir.

$(a_1, \dots, a_p), (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p$  ve  $(a_1, \dots, a_p) = (b_1, \dots, b_p)$  olduğunu varsayalım.

O halde her  $i = 1, \dots, p$  için,  $a_i = b_i$  olur.

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, \dots, a_p) &= a_1n_1 + \dots + a_pn_p \\ &= b_1n_1 + \dots + b_pn_p \\ &= \varphi(b_1, \dots, b_p)\end{aligned}$$

olduğundan  $\varphi$  iyi tanımlıdır.

$\varphi$  dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}\varphi((a_1, \dots, a_p) + (b_1, \dots, b_p)) &= \varphi(a_1 + b_1, \dots, a_p + b_p) \\ &= (a_1 + b_1)n_1 + \dots + (a_p + b_p)n_p\end{aligned}$$

$S$  sayısal yarıgrubu,  $\mathbb{N}$ ' nin alt kümesi olduğundan,

$$\begin{aligned}&= a_1n_1 + b_1n_1 + \dots + a_pn_p + b_pn_p \\ &= (a_1n_1 + \dots + a_pn_p) + (b_1n_1 + \dots + b_pn_p) \\ &= \varphi(a_1, \dots, a_p) + \varphi(b_1, \dots, b_p)\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $\varphi$  bir homomorfizmadır.

Gör  $\varphi = S$  olduğunu görelim.

$$\varphi(a_1, \dots, a_p) = a_1n_1 + \dots + a_pn_p \in S$$

olduğu açıktır.  $x \in S$  alalım. Bu durumda,  $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$  olduğundan,

$$x = a_1n_1 + \dots + a_pn_p$$

olacak şekilde  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$  vardır.

$$\implies x = a_1n_1 + \dots + a_pn_p = \varphi(a_1, \dots, a_p)$$

$$\implies x \in \text{Gör}\varphi$$

$\implies S \subseteq \text{Gör}\varphi$

Böylece  $S = \text{Gör}\varphi$  olduğundan  $\varphi$  örtendir.

$\varphi$  monoid homomorfizmasının çekirdeği,

$$\text{Çek}\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p \mid \varphi(a) = \varphi(b)\}$$

olarak tanımlanır. 2.3.8 Önerme' den

$$\psi : \frac{\mathbb{N}^p}{\text{Çek}\varphi} \rightarrow \text{Gör}\varphi$$

bir monoid izomorfizmasıdır. Böylece,

$$\frac{\mathbb{N}^p}{\text{Çek}\varphi} \cong \text{Gör}\varphi = S$$

elde edilir.

## 2.4 Sayısal Yarıgrup Halkaları

Yarıgrup halkaları ve bunların idealleri cebirsel ve kombinatorik bakış açısıyla yaygın biçimde çalışılmaktadır. Halkaların  $\mathbb{N}^p$  yarıgrubu ile ilişkilendirilmiş zengin bir sınıfı olan yarıgrup halkaları,  $k[x_1, \dots, x_p]$  polinom halkasını da içerir.

**2.4.1 Tanım.**  $\mathbb{Z}$  tam sayılar kümesi,  $p$  pozitif tam sayı ve  $\{a_1, \dots, a_p\}$ ,  $\mathbb{Z}^p$ ' nin bir alt kümesi olsun.  $\mathbb{Z}^p$ ' nin toplamsal grubunun  $\{a_1, \dots, a_p\}$  ile üretilen alt monoidi

$$H = \langle a_1, \dots, a_p \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p\}$$

olsun.

$g = (g_1, \dots, g_p) \in \mathbb{Z}^p$  ve  $x^g = x_1^{g_1} \dots x_p^{g_p}$  iken,

$$x^g \in k[H] \iff g \in H.$$

$$k[H] = \left\{ \sum_{\lambda} g_{\lambda} f^{\lambda} \mid g_{\lambda} \in k, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), f^{\lambda} = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \right\}.$$

Burada,  $f_1, \dots, f_p$  katsayıları  $k$  üzerinde olan polinomlardır.  $k[H]$  bir  $k$ -cebirdir ve  $k[H]$ ' ye  $H$  yarıgrubu ile ilişkilendirilmiş yarıgrup halkası denir.

**2.4.2 Örnek.**  $H = \mathbb{N}^p$  ise,

$$k[\mathbb{N}^p] = k[x_1, \dots, x_p]$$

ve  $H = \mathbb{Z}^p$  ise,

$$k[\mathbb{Z}^p] = k[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_p, x_p^{-1}]$$

olur.

$\mathbb{N}^p = \{(a_1, \dots, a_p) \mid a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p\}$  ve  $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$  sayısal yarıgrup olsun.

$$\varphi : \mathbb{N}^p \rightarrow (S, +)$$

$$(a_1, \dots, a_p) \rightarrow a_1 n_1 + \dots + a_p n_p$$

yarıgrup homomorfizmasını,

$$\psi : k[x_1, \dots, x_p] \rightarrow k[t]$$

$$x_i \rightarrow t^{n_i}$$

şeklinde genişletebiliriz.  $\psi$  bir halka homomorfizmasıdır.

$$\mathfrak{Çek}\psi = \{f(x_1, \dots, x_p) \mid \psi(f) = 0\}$$

$$= \{f(x_1, \dots, x_p) \mid f(t^{n_1}, \dots, t^{n_p}) = 0\}$$

ideali bir asal idealdir. Bu ideale  $S$ ' nin tanımlayan ideali denir ve  $I_S$  ile gösterilir. Halkalar için 1. İzomorfizma Teoreminden,

$$k[x_1, \dots, x_p]/\mathfrak{Çek}\psi \cong \text{Gör}\psi = k[t^{n_1}, \dots, t^{n_p}]$$

elde edilir.

**2.4.3 Tanım.**  $k[S] = k[t^{n_1}, \dots, t^{n_p}]$  halkasına,  $\{n_1, \dots, n_p\}$  ile üretilen  $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$  sayısal yarı grubunun yarıgrup halkası denir.

**2.4.4 Tanım.**  $k[[S]] = \{h = \sum_{s \in S} a_s t^s \mid \forall s \in S \text{ için } a_s \in \mathbb{N}\}$  olarak tanımlayalım.

$$h \in k[S] \iff \text{Hemen hemen her } s \in S \text{ için } a_s = 0$$

olduğu açıktır.  $k[[S]]$  üzerinde toplama işlemi,  $h_1 = \sum a_s t^s$  ve  $h_2 = \sum b_{s'} t^{s'}$  olmak üzere, bileşenlerinin katsayılarını toplayarak

$$h_1 + h_2 = \sum_{s, s' \in S} a_s t^s + b_{s'} t^{s'}$$

şeklinde tanımlanır.  $(k[[S]], +, \cdot)$  bir halkadır.  $k[[S]]$  ve  $k[S]$  halkalarının bazı özellikleri,  $S$  sayısal yarıgrubunun özelliklerinden belirlenebilir. Bunun sonucunda, sayısal yarıgruplardaki bazı kavramlar, halka teorisinde zaten var olan karşılıklardan isimlendirilmiştir [4].

## 2.5 Derecelendirilmiş Cebirler

**2.5.1 Tanım.**  $A$ ,  $k$  cismi üzerinde bir vektör uzay olsun.  $A$  uzayında her  $x_1, x_2, x_3 \in A$  ve  $\alpha_1, \alpha_2 \in k$  için,

- i)  $\alpha_1(\alpha_2 x_1) = (\alpha_1 \alpha_2) x_1$
- ii)  $\alpha_1(x_1 x_2) = (\alpha_1 x_1) x_2 = x_1(\alpha_1 x_2)$
- iii)  $x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3$
- iv)  $x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$

özelliklerini sağlayan bir çarpma işlemi varsa,  $A'$  ya  $k$  üzerinde bir  $k$ -cebiri, ek olarak,

- v)  $x_1 x_2 = x_2 x_1$

ise,  $A'$  ya  $k$  üzerinde bir değişmeli  $k$ -cebiri denir.

**2.5.2 Tanım.**  $A$ , bir  $k$ -cebir olsun. Eğer, bir  $k$  cismi üzerinde bir vektör uzay olarak,

- i)  $A_0 \cong k$
- ii)  $A_i A_j \subseteq A_{i+j}, \forall i, j \geq 0$

olacak şekilde,

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

ayrışımına sahip ise,  $A'$  ya derecelendirilmiş  $k$ -cebiri denir. Her  $x \in A_n$  elemanı  $n$ . dereceden homojen eleman olarak isimlendirilir.

**2.5.3 Örnek.**  $k$  bir cisim ve  $k[x_1, \dots, x_p]$  her  $1 \leq i \leq p$  için  $der(x_i) = 1$  olan  $p$  değişkenli polinom halkası olsun.  $k[x_1, \dots, x_p]$  sonlu üretilmiş bir standart derecelendirilmiş değişmeli

k-cebiridir [5].

**2.5.4 Tanım.**  $R$  bir halka,  $G$  değişmeli bir grup ve değişmeli grupların bir ayrışımı

$$R = \bigoplus_{i \in G} R_i$$

olsun. Eğer her  $i, j \in G$  için,

$$R_i R_j \subseteq R_{i+j}$$

ise,  $R$ ' ye  $G$ -derecelendirilmiş halka denir.  $G = \mathbb{N}$  ise,  $R$ ' ye  $\mathbb{N}$ -derecelendirilmiş,  $G = \mathbb{Z}$  ise,  $R$ ' ye  $\mathbb{Z}$ -derecelendirilmiş halka denir.

**2.5.5 Tanım.**  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  bir derecelendirilmiş  $k$ -ceberi ve  $I, A$ ' nin bir ideali olsun. Eğer  $I$  ideali,

i) Her  $n \geq 0$  için  $I_n \subseteq A_n$

ii) Her  $i, j \geq 0$  için  $A_i I_j \subseteq I_{i+j}$

olacak şekilde,

$$I = \bigoplus_{n \geq 0} I_n$$

formunda bir alt vektör uzayı ise,  $I$  ya bir derecelendirilmiş ideal denir.

**2.5.6 Not.**  $R$  bir derecelendirilmiş  $k$ -ceberi ve  $I, R$ ' nin bir derecelendirilmiş ideali olsun.

Bu durumda,

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$$

$$I = I_0 \oplus I_1 \oplus \dots$$

olarak yazılabilir.  $R/I$  bölüm halkası da

$$R/I = R_0/I_0 \oplus R_1/I_1 \oplus \dots$$

bir derecelendirilmiş  $k$ -cebiridir [5].

## 2.6 Modüller ve Serbest Modüller

Bir halka üzerinde, ideallerin genellemeleri olan modüller, bir vektör uzayın bir cisim üzerindeki davranışına benzer şekilde davranan cebirsel yapılardır.

**2.6.1 Tanım.**  $R$  bir halka ve  $M$  bir küme olsun. Her  $r, s \in R$  ve  $a, b \in M$  için

$$R \otimes M \rightarrow M$$

etkisi ile,

**i)**  $(M, +)$  değişmeli grup

**ii)**  $r(a + b) = ra + rb$

**iii)**  $(r + s)a = ra + sa$

**iv)**  $r(sa) = (rs)a$

özelliklerini sağlayan  $M$  kümesine,  $R$  halkası üzerinde bir modül veya  $R$ -modül denir. Eğer  $1_R$ ,  $R$ ' nin çarpımsal birimi iken, her  $a \in M$  için  $1_R \cdot a = a$  ise  $M$ ' ye birimli  $R$ -modül denir.  $R$  bir cisim olduğunda, üstteki özellikleri sağlayan  $M$  kümesi, vektör uzay adını alır.

**2.6.2 Örnek.**  $R$  halkası verilsin.  $R^n$  bir  $R$ -modüldür.

$$R^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_1, \dots, r_n \in R\}$$

$$R \otimes R^n \rightarrow R^n$$

$$(s, (r_1, r_2, \dots, r_n)) \rightarrow s(r_1, \dots, r_n) = (sr_1, \dots, sr_n)$$

**i)**  $(R^n, +)$  değişmeli gruptur.

**ii)**  $s \in R, (r_1, r_2, \dots, r_n), (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$  olsun.

$$\begin{aligned} s((r_1, \dots, r_n) + (t_1, \dots, t_n)) &= s(r_1 + t_1, \dots, r_n + t_n) \\ &= (s(r_1 + t_1), \dots, s(r_n + t_n)) \\ &= (sr_1 + st_1, \dots, sr_n + st_n) \\ &= (sr_1, \dots, sr_n) + (st_1, \dots, st_n) \\ &= s(r_1, \dots, r_n) + s(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

**iii)**  $r, s \in R, (a_1, \dots, a_n) \in R^n$  olsun.

$$\begin{aligned} (r + s)(a_1, \dots, a_n) &= ((r + s)a_1, \dots, (r + s)a_n) \\ &= (ra_1 + sa_1, \dots, ra_n + sa_n) \\ &= (ra_1, \dots, ra_n) + (sa_1, \dots, sa_n) \end{aligned}$$

$$= r(a_1, \dots, a_n) + s(a_1, \dots, a_n)$$

**iv)**  $r, s \in R, (a_1, \dots, a_n) \in R^n$  olsun.

$$\begin{aligned} r(s(a_1, \dots, a_n)) &= r(sa_1, \dots, sa_n) \\ &= (r(sa_1), \dots, r(sa_n)) \\ &= ((rs)a_1, \dots, (rs)a_n) \\ &= (rs)(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

**2.6.3 Örnek.**  $R$  bir halka ve  $I, R'$  nin bir ideali olsun.  $R/I$  bir  $R$ -modüldür.

$$\begin{aligned} R \times R/I &\rightarrow R/I \\ (s, (r + I)) &\rightarrow (s.r) + I \end{aligned}$$

**i)**  $(R/I, +)$  değişmeli gruptur.

**ii)**  $r \in R, s_1 + I, s_2 + I \in R/I$  olsun.

$$\begin{aligned} r((s_1 + I) + (s_2 + I)) &= r((s_1 + s_2) + I) \\ &= (rs_1 + rs_2) + I \\ &= (rs_1 + I) + (rs_2 + I) \\ &= r(s_1 + I) + r(s_2 + I) \end{aligned}$$

**iii)**  $r, s \in R, t + I \in R/I$  olsun.

$$\begin{aligned} (r + s)(t + I) &= (r + s)t + I \\ &= (rt + st) + I \\ &= (rt + I) + (st + I) \\ &= r(t + I) + s(t + I) \end{aligned}$$

**iv)**  $r, s \in R, t + I \in R/I$  olsun.

$$\begin{aligned} r(s(t + I)) &= r(st + I) \\ &= r(st) + I \\ &= (rs)t + I \\ &= (rs)(t + I) \end{aligned}$$

**2.6.4 Not.** Bir vektör uzayın her zaman bir bazı vardır fakat modüller her zaman bir baza sahip olmak zorunda değildir.

**2.6.5 Örnek.**  $R = k[x, y]$  halkasında  $I = \langle x^2, y^4 \rangle$  idealini alalım.  $I$ ,  $k$  cismi üzerinde bir vektör uzaydır.

$$k \times I \rightarrow I$$

$$(c, p) \rightarrow c.p$$

$(I, +)$  alt halka olduğundan  $(I, +)$  değişmeli gruptur.

$$p \in I \implies p = p_1.x^2 + p_2.y^4, p_1, p_2 \in k[x, y]$$

$$c.p = c(p_1.x^2 + p_2.y^4)$$

$$= (cp_1)x^2 + (cp_2)y^4$$

Burada  $cp_1, cp_2 \in k[x, y]$  olduğundan  $cp \in I$  elde edilir.

$c_1, c_2 \in k$  için,

$$c_1x^2 + c_2y^4 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0$$

olduğundan  $\{x^2, y^4\}$ ,  $k$  cismi üzerinde lineer bağımsızdır.

$I = \langle x^2, y^4 \rangle$  ideali  $k[x, y]$  halkası üzerinde

$$k[x, y] \times I \rightarrow I$$

etkisi ile bir modüldür.  $\{x^2, y^4\}$ ,  $I$  modülünün üreteçleridir.  $-y^4, x^2 \in k[x, y]$  için,

$$(-y^4)x^2 + x^2y^4 = 0$$

olduğundan  $\{x^2, y^4\}$ ,  $k[x, y]$  üzerinde lineer bağımlıdır. Böylece  $\{x^2, y^4\}$ ,  $I$  için bir baz olamaz.

**2.6.6 Tanım.**  $R$  halkası ve  $M$   $R$ -modülü verilsin. Eğer  $M$  modülü bir baza sahipse, serbest modül olarak adlandırılır.

**2.6.7 Örnek.**  $R$  halkasını ve  $M = R^n$  modülünü alalım. 2.6.2 Örnek' ten  $R^n$  nin bir  $R$ -modül olduğunu biliyoruz.

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\} \subset R^n$$

kümesi  $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$  için,

$$r_1(1, 0, \dots, 0) + r_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + r_n(0, \dots, 0, 1) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\implies (r_1, r_2, \dots, r_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\implies r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$$

olduğundan  $R$  üzerinde lineer bağımsızdır. Böylece  $R^n$  bir serbest  $R$ -modüldür.

**2.6.8 Örnek.**  $R$  iki değişkenli polinom halkası ve

$$M = \{(f_1, f_2, f_3) \in R^3 \mid x f_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3 = 0\}$$

kümesini alalım.  $M$  bir  $R$ -modüldür.

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(p, (f_1, f_2, f_3)) \rightarrow p(f_1, f_2, f_3) = (p f_1, p f_2, p f_3)$$

$(f_1, f_2, f_3) \in M$  olduğundan

$$x f_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3 = 0$$

olur.

$$\begin{aligned} x(p f_1) + (y^3 - 5)(p f_2) + (p f_3) &= p(x f_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3) \\ &= p \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $(p f_1, p f_2, p f_3) \in M$  elde edilir.

**i)**  $(M, +)$  değişmeli gruptur.

**ii)**  $r \in R$  ve  $(f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3) \in M$  olsun.

$$\begin{aligned} r((f_1, f_2, f_3) + (g_1, g_2, g_3)) &= r(f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3) \\ &= (r f_1 + r g_1, r f_2 + r g_2, r f_3 + r g_3) \\ &= (r f_1, r f_2, r f_3) + (r g_1, r g_2, r g_3) \\ &= r(f_1, f_2, f_3) + r(g_1, g_2, g_3). \end{aligned}$$

**iii)**  $r, s \in R$  ve  $(f_1, f_2, f_3) \in M$  olsun.

$$\begin{aligned} (r + s)(f_1, f_2, f_3) &= ((r + s)f_1, (r + s)f_2, (r + s)f_3) \\ &= (r f_1 + s f_1, r f_2 + s f_2, r f_3 + s f_3) \\ &= (r f_1, r f_2, r f_3) + (s f_1, s f_2, s f_3) \\ &= r(f_1, f_2, f_3) + s(f_1, f_2, f_3). \end{aligned}$$

**iv)**  $r, s \in R$  ve  $(f_1, f_2, f_3) \in M$  olsun.

$$\begin{aligned} r(s(f_1, f_2, f_3)) &= r(s f_1, s f_2, s f_3) \\ &= (r(s f_1), r(s f_2), r(s f_3)) \\ &= ((rs)f_1, (rs)f_2, (rs)f_3) \end{aligned}$$

$$= (rs)(f_1, f_2, f_3).$$

$$xf_1 + (y^3 - 5)f_2 + f_3 = 0$$

$$\implies f_3 = -xf_1 + (5 - y^3)f_2$$

olarak yazılabilir.

$$(f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, -xf_1 + (5 - y^3)f_2)$$

$$= f_1(1, 0, -x) + f_2(0, 1, 5 - y^3)$$

Buradan  $\{b_1 = (1, 0, -x), b_2 = (0, 1, 5 - y^3)\}$  listesi  $M'$  yi üretir.

Şimdi  $\{b_1, b_2\}$  listesinin lineer bağımsız olduğunu görelim.

$$p_1b_1 + p_2b_2 = 0 \text{ olsun.}$$

$$\implies p_1(1, 0, -x) + p_2(0, 1, 5 - y^3) = (0, 0, 0)$$

$$\implies (p_1, p_2, -xp_1 + (5 - y^3)p_2) = (0, 0, 0)$$

$$\implies p_1 = p_2 = 0.$$

Böylece,  $\{b_1, b_2\}$  listesi,  $M$   $R$ -modülü için bir bazdır. Buradan,  $M'$  nin bir serbest  $R$ -modül olduğu sonucuna varılır.

**2.6.9 Tanım.**  $R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $\emptyset \neq N$ ,  $M'$  nin bir alt kümesi olsun.  $N$ ,  $M$  modülünün bir toplamsal alt grubu ve her  $r \in R, n \in N$  için  $r.n \in N$  ise  $N'$  ye  $M'$  nin alt modülü denir.

**2.6.10 Tanım.**  $R$  bir halka ve  $M, N$   $R$ -modüller olsun.  $\phi : M \rightarrow N$  dönüşümü her  $c \in R$  ve  $f, g \in M$  için,

$$\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$$

$$\phi(cf) = c\phi(f)$$

şartları sağlanıyorsa  $\phi$   $R$ -modül homomorfizması adını alır.

$\phi$ ,  $R$ -modül homomorfizmasının çekirdeği,

$$\text{Çek}\phi = \{f \in M \mid \phi(f) = 0_N\}$$

$\phi$ ,  $R$ -modül homomorfizmasının görüntü kümesi,

$$\text{Gör}\phi = \{g \in N \mid \exists f \in M \text{ için } \phi(f) = g\}$$

olarak tanımlanır.  $\text{Çek}\phi$  ve  $\text{Gör}\phi$  sırasıyla  $M$  ve  $N$   $R$ -modüllerinin alt modülleridir.

### 3. MODÜLLERİN SERBEST ÇÖZÜMLERİ

Bir  $k$  cismi üzerindeki cebirsel geometride, varyetelerin geometrisini  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  polinom halkası ve ideallerinin özelliklerini etkin bir şekilde incelemek için polinom halkası üzerindeki derecelendirilmiş modülleri çalışmak gerekmektedir. Bir modülü ayrıntılı bir şekilde açıklamanın en basit yolu, modülün üreteçleri ve bunların arasındaki bağıntılardır. Bir modülün önemli invaryantlarından birisi,  $M$  modülünü üretmek için gerekli olan minimal üreteç sayısıdır. Bu sayı, modülün serbest bir modül olmaktan ne kadar uzak olduğunu açıklayan Betti sayılarının bir dizisindeki ilk sayıdır. Bu bölümde [6] numaralı kaynak kullanılmıştır.

#### 3.1 Sizigiler

$M = \langle m_1, \dots, m_{t_0} \rangle$  ve  $i = 1, \dots, t_0$  için  $1, i$ . koordinatta olmak üzere,  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in R^{t_0}$  kanonik baz olduğunu varsayalım. Bu,

$$\begin{array}{ccc} R^{t_0} & \xrightarrow{\pi_0} & M = \langle m_1, \dots, m_{t_0} \rangle \\ & & e_i \rightarrow m_i \end{array}$$

modül homomorfizmasının örten olması demektir.

Eğer  $\pi_0$  bir izomorfizma ise,  $M \cong R^{t_0}$  rankı  $t_0$  olan bir serbest modül olur. Diğer durumda, bir başka deyişle  $\pi_0$  birebir değil ise,  $\text{Çek}(\pi_0) \neq \{0\}$  dir.

$$\begin{array}{ccccc} R^{t_1} & \dashrightarrow & R^{t_0} & \xrightarrow{\pi_0} & M \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & \text{Çek}(\pi_0) & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Çek}(\pi_0) &= \{(r_1, \dots, r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid \pi_0(r_1, \dots, r_{t_0}) = 0_M\} \\ &= \{(r_1, \dots, r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid \pi_0(r_1 e_1 + \dots + r_{t_0} e_{t_0}) = 0_M\} \\ &= \{(r_1, \dots, r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid r_1 \pi_0(e_1) + \dots + r_{t_0} \pi_0(e_{t_0}) = 0_M\} \\ &= \{(r_1, \dots, r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid r_1 m_1 + \dots + r_{t_0} m_{t_0} = 0_M\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\text{Çek}(\pi_0)$ 'daki  $(r_1, \dots, r_{t_0})$  elemanı,

$$r_1 m_1 + \dots + r_{t_0} m_{t_0} = 0$$

olan  $m_i$  elemanları arasındaki bağıntıdır. Bu bağıntıların kümesi,  $M$  modülünün sizigileri olarak adlandırılır.

**3.1.1 Tanım.**  $M, R^{t_0}$ ' in  $\{m_1, \dots, m_{t_0}\}$  kümesi ile üretilen bir modülü olsun.  $M$ ' nin sizigi modülü,

$$\text{Syz}(M) = \text{Syz}(m_1, \dots, m_{t_0}) = \{(r_1, \dots, r_{t_0}) \in R^{t_0} \mid r_1 m_1 + \dots + r_{t_0} m_{t_0} = 0\}$$

kümesidir.  $\text{Syz}(M)$ ' nin bir elemanına sizigi denir.

### 3.2 Serbest Çözüm Nedir?

$R = k[x_1, \dots, x_n]$  polinom halkasında  $n = 1$  ise  $R = k[x_1]$  tek değişkenli polinom halkasıdır ve bir temel ideal bölgesidir. Temel ideal bölgelerinde bir serbest modülün her alt modülü serbest modüldür. Dolayısıyla  $\text{Syz}(M)$  bir serbest modüldür.

$n > 0$  ise, sizigi modülünün üreteçlerinin herhangi bir kümesinin bağıntılara sahip olma durumları oluşabilir. Bunu anlamak için  $M$  modülüne tam diziler ile yaklaşabiliriz.

**3.2.1 Tanım.**  $M_i$ ' ler  $R$ -modüller olsun.  $\varphi_i$   $R$ -modül homomorfizmalarının

$$\dots \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \rightarrow \dots$$

dizisini düşünelim. Eğer,  $\text{Gör}(\varphi_{i+1}) = \text{Çek}(\varphi_i)$  oluyor ise, dizi  $M_i$ ' de tamdır denir. Dizi her bir  $M_i$ ' de tam ise tüm dizi tamdır denir.

Tam diziler ile ilgili detaylı bilgiler ve özellikler için bakınız [7].

$M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M$  modülünden elemanlar seçmek, homomorfizmalar aracılığıyla da gerçekleştirilebilir.

**3.2.2 Önerme.** [7]  $M$  bir  $R$ -modül olsun.

- i)  $M$ ' den bir eleman seçmek,  $R \rightarrow M$ ' ye bir homomorfizma seçmeye denktir.
- ii)  $M$ ' den  $t$  elemanlar seçmek,  $R^t \rightarrow M$ ' ye bir homomorfizma seçmeye denktir.

iii)  $M'$  nin  $t$  üreteçli bir kümesini seçmek,  $R^t \rightarrow M'$  ye örten bir homomorfizma seçmeye denktir.

iv)  $M$  bir serbest modül iken,  $t$  elemanlı bir baz seçmek,  $R^t \rightarrow M'$  ye bir izomorfizma seçmeye denktir.

**İspat:** i) ii)  $1 \in R$  alalım.  $f \in M$  seçmek,  $\varphi(1) = f$  yi sağlayan

$$\varphi : R \rightarrow M$$

$R$ -modül homomorfizmasını seçmek ile aynıdır.

$g \in R$  alalım.  $1, R'$  nin birimidir. Buradan

$$\varphi(g) = \varphi(g \cdot 1) = g\varphi(1) = gf \in M$$

olduğundan  $\varphi(1), \varphi'$  nin her  $g \in R'$  deki değerini belirler. Böylece,  $M'$  den  $t$  eleman seçmek;

$$R \rightarrow M$$

$t$  tane  $R$ -modül homomorfizmasını seçmek veya denk olarak

$$R^t \rightarrow M$$

$R$ -modül homomorfizmasını seçmek gibi düşünülebilir.

iii) iv)  $R^t$  yi sütun vektörlerinin bir vektör uzayı olarak düşünelim ve  $R^t$  nin standart bazını  $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$  ile gösterelim.  $M'$  nin  $\{f_1, \dots, f_t\}$  elemanını seçmek,  $i = 1, 2, \dots, t$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : R^t &\rightarrow M \\ e_i &\rightarrow f_i \end{aligned}$$

olarak tanımlı  $R$ -modül homomorfizmasını seçmeye karşılık gelir.

$$\text{Gör}(\varphi) = \{\varphi(r_1, \dots, r_t) \mid (r_1, \dots, r_t) \in R^t\}$$

$$(r_1, \dots, r_t) = r_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + r_t(0, \dots, 0, 1)$$

$$= r_1e_1 + \dots + r_te_t$$

olmasından,

$$\text{Gör}(\varphi) = \{\varphi(r_1e_1 + \dots + r_te_t) \mid (r_1, \dots, r_t) \in R^t\}$$

yazılır.  $\varphi$  bir  $R$ -modül homomorfizması olduğundan,

$$\begin{aligned}\text{Gör}(\varphi) &= \{r_1\varphi(e_1) + \dots + r_t\varphi(e_t) \mid (r_1, \dots, r_t) \in R^t\} \\ &= \{r_1f_1 + \dots + r_tf_t \mid (r_1, \dots, r_t) \in R^t\}\end{aligned}$$

olur. Böylece,  $\langle f_1, \dots, f_t \rangle \subset M$  elde edilir.

Eğer  $\varphi$  örten olursa,

$$\text{Gör}(\varphi) = \langle f_1, \dots, f_t \rangle = M$$

elde edilir. Böylece,  $M$  için  $t$  üreteçli küme seçmek

$$R^t \rightarrow M$$

bir  $R$ -modül epimorfizmasını seçmeye karşılık gelir. Bu, bir

$$R^t \rightarrow M \rightarrow 0$$

tam dizisi seçmek ile aynıdır.  $M$  bir serbest modül ise,  $M$ ' nin bir bazı vardır.  $\{f_1, \dots, f_t\}$   $M$ ' nin bazı olsun. O halde,  $\{f_1, \dots, f_t\}$  lineer bağımsızdır. Böylece,

$$r_1f_1 + \dots + r_tf_t = 0$$

iken,

$$r_1 = \dots = r_t = 0$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\text{Çek}(\varphi) &= \{(r_1, \dots, r_t) \mid \varphi(r_1, \dots, r_t) = 0\} \\ &= \{(r_1, \dots, r_t) \mid r_1f_1 + \dots + r_tf_t = 0\} \\ &= \{0_{R^t}\}\end{aligned}$$

bulunur. Bu,  $\varphi$ ' nin birebir olması demektir. Böylece  $M$  modülü için  $t$  elemanlı bir baz seçmek,

$$R^t \rightarrow M$$

bir  $R$ -modül izomorfizmasını seçmeye karşılık gelir.

**3.2.3 Tanım.**  $M$   $R$ -modülünün bir temsili,  $\text{Syz}(f_1, \dots, f_t)$  sizigi modülü için bir üreteçler kümesi ile birlikte  $\{f_1, \dots, f_t\}$  üreteçlerinin bir kümesidir.

$Syz(f_1, \dots, f_t)$ ' nin üreteçlerini sütunlar olarak düzenleyerek, bir  $M$  modülü için bir temsilci matris elde edilebilir. Bir temsilci matris vermek,  $M$ ' nin bir temsilini vermek ile aynıdır.

3.2.3 Tanım' 1, tam diziler aracılığıyla yeniden yorumlarsak, 3.2.2 Önerme (iii)' den  $\{f_1, \dots, f_t\}$  üreteçleri

$$R^t \rightarrow M \rightarrow 0$$

tam dizisi anlamına gelen bir

$$\varphi : R^t \rightarrow M$$

örten homomorfizmasını verir.

$$R^t \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

$$(g_1, \dots, g_t) \rightarrow \varphi(g_1, \dots, g_t)$$

$$\varphi(g_1, \dots, g_t) = g_1\varphi(e_1) + \dots + g_t\varphi(e_t)$$

$$= g_1f_1 + \dots + g_tf_t$$

$$= \sum_{i=1}^t g_if_i \in M.$$

$$Syz(f_1, \dots, f_t) = \{(g_1, \dots, g_t) \in R^t \mid g_1f_1 + \dots + g_tf_t = 0\}$$

$$= \text{Çek}(\varphi)$$

$$= \text{Çek}(\varphi : R^t \rightarrow M)$$

3.2.2 Önerme (iii)' den, sizigi modül için üreteç kümesi seçmek,

$$R^s \rightarrow \text{Çek}(\varphi) = Syz(f_1, \dots, f_t)$$

örten  $\psi$  homomorfizması seçmeye karşılık gelir. Fakat  $\psi$ ' nin örten olması

$$\text{Gör}\psi = \text{Çek}\varphi$$

olmasına denktir ve bu

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

dizisinde  $R^t$ ' de tam olmak için koşuldur. Böylece,  $M$ ' nin bir temsilinin

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

formundaki bir tam diziye denk olması anlamına gelir.

$\psi$ ' nin  $R^s$  ve  $R^t$ ' nin standart bazlarına göre matrisi,  $M$  için bir temsilci matristir.

**3.2.4 Önerme.**  $M$  bir sonlu üretilmiş  $R$ -modül olsun.

i)  $M$  modülünün

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

formunda bir temsilci matrisi vardır.

ii)  $M$ , bir serbest  $R$ -modülün homomorfik görüntüsüdür.

**İspat:** [7].

**3.2.5 Örnek.**  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = \langle x, y \rangle$  ve  $2x - y = 0$  bağıntısı ile verilen bir  $\mathbb{Z}$ -modül olsun.

$M$ 'nin bir temsilini bulalım.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\rightarrow M \\ (a, b) &\rightarrow ax + by \end{aligned}$$

homomorfizması,

$$\begin{aligned} \text{Gör}\varphi &= \{\varphi(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\ &= \{ax + by \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\ &= \langle x, y \rangle \\ &= M \end{aligned}$$

olduğundan örten bir homomorfizmadır.

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(a, b) \mid \varphi(a, b) = 0\} \\ &= \{(a, b) \mid ax + by = 0\} \\ &= \{(a, b) \mid ax = -by\} \end{aligned}$$

$$2x - y = 0 \implies y = 2x$$

$$ax = -by \implies ax = -b(2x) \implies a = -2b$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(a, b) \mid a = -2b\} \\ &= \{(-2b, b) \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b(-2, 1) \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{Syz}(M) \end{aligned}$$

olur.

Böylece,

$$\mathbb{Z}^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}} M \rightarrow 0$$

bulunur.

**3.2.6 Uyarı.** Bir  $M$  modülünün temsilci matrisi tek olmayabilir.

**3.2.7 Tanım.**  $R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Her  $i$  için  $F_i \cong R_i^r$  olan bir  $r \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$\cdots F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

formadaki tam dizi  $M$  modülünün serbest çözülümü olarak isimlendirilir.

$i > l$  için  $F_i = 0$  ve  $F_l \neq 0$  olacak şekilde bir pozitif  $l$  tam sayısı var ise çözüm sonludur. Bu durumda, çözüm  $l$  uzunlukta denir ve

$$0 \rightarrow F_l \rightarrow F_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

olarak yazılır.

"Herhangi bir  $R$ -modül için serbest çözüm sonlu mudur?" sorusu doğal bir sorudur. Cevap genellikle olumsuzdur. Fakat  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  polinom halkalarında cevap olumludur.

**3.2.8 Teorem. (Hilbert Sizigi Teorem)**  $R$ ,  $n$  değişkenli polinom halkası olmak üzere, her sonlu üretilmiş  $R$ -modül en fazla  $n$  uzunlukta bir sonlu serbest çözüme sahiptir.

**İspat:** [7].

### 3.3 Schreyer Algoritması

Bu bölümde bir modülün elemanlarının oluşturduğu bir küme üzerindeki sizigiler çalışılacaktır. Bu amaçla  $R^s$ 'nin  $(f_1, \dots, f_s)$  elemanlarının bir sıralı  $s$ -lisi verildiğinde,  $Syz(f_1, \dots, f_s) \subset R^s$  sizigi modülü için bir üreteç kümesini bulacağız.

$R = k[x_1, \dots, x_n]$  polinom halkasındaki bir  $I$  ideali için, bir tek terimli sıralamasına göre Buchberger Algoritmasını kullanarak  $G = \{f_1, \dots, f_s\}$  Gröbner bazını hesaplayabiliriz. Bu konu ile ilgili en iyi kaynaklardan biri olarak [8] verilebilir. Bu algoritmanın bir modifikasyonu ile  $Syz(f_1, \dots, f_s)$  modülü için bir üreteç kümesi hesaplanabilmektedir.

İlk olarak, Gröbner baz tanımını ve Gröbner baz ile ilgili bazı temel kavramları hatırlayalım.

**3.3.1 Tanım.** “ $<$ ” tek terimli sıralaması  $G = \{f_1, \dots, f_s\} \subset I$  olsun.  $L(I)$ ,  $I$  idealindeki tüm polinomların en yüksek dereceli terimleri tarafından üretilen ideal olmak üzere,

$$\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle = \langle LT(I) \rangle$$

ise  $G$  kümesine  $I$  idealinin Gröbner bazı denir.

**3.3.2 Tanım.**  $0 \neq f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  için  $S(f, g)$ ,  $S$ -polinomu,

$$S(f, g) = \frac{\text{okel}(LM(f), LM(g))}{LT(f)} f - \frac{\text{okel}(LM(f), LM(g))}{LT(g)} g$$

olarak tanımlanır.

**3.3.3 Tanım.**  $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$  olsun.  $f$ ' nin,  $G = \{f_1, \dots, f_s\}$  sıralı  $s$ -lisi ile bölümünden kalan  $\bar{f}^G$  olarak yazılır.

**3.3.4 Teorem.**  $\emptyset \neq I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  olsun.  $G = \{f_1, \dots, f_s\}$  bazı,  $I$  ideali için bir Gröbner bazdır  $\iff$  Her  $i \neq j$  için  $\overline{S(f_i, f_j)}^G = 0$

**İspat:** [8].

$k[x_1, \dots, x_n]$  halkasındaki bölme algoritmasından [8],  $a_{ijk} \in R = k[x_1, \dots, x_n]$  ve her  $i, j, k$  için  $LT(a_{ijk}f_k) \leq LT(S(f_i, f_j))$  olmak üzere,

$$S(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^s a_{ijk} f_k$$

ifadesini elde edebiliriz.

$$a_{ij} \in R^s, a_{ij} = a_{ij1}e_1 + a_{ij2}e_2 + \dots + a_{ijs}e_s$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij1} \\ a_{ij2} \\ \vdots \\ a_{ijs} \end{pmatrix} \in R^s$$

ve

$$S_{ij} = \frac{okek(LM(f_i))}{LT(f_i)} e_i - \frac{okek(LM(f_j))}{LT(f_j)} e_j - a_{ij}$$

olarak  $S_{ij} \in R^s$  alalım.

Şimdi, Schreyer Teoremini verebiliriz.

**3.3.5 Teorem.**  $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ ,  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  halkasındaki bir  $I$  idealinin bir tek terimli sıralamasına göre Gröbner bazı ve  $M = Syz(f_1, \dots, f_s)$  olsun.  $\{S_{ij}, 1 \leq i, j \leq s\}$   $M'$  yi bir  $R$ -modül olarak üretir.

**İspat:** [7].

**3.3.6 Örnek.**  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  modülünü ve  $R = k[x, y]$  halkasını alalım.  $M$  modülünün Gröbner bazını bulalım.

$$f_1 = x^2, LM(f_1) = LT(f_1) = x^2$$

$$f_2 = xy, LM(f_2) = LT(f_2) = xy$$

$$\implies okek(LM(f_1), LM(f_2)) = x^2y \text{ olduğundan,}$$

$$S(f_1, f_2) = \frac{okek(LM(f_1), LM(f_2))}{LT(f_1)} f_1 - \frac{okek(LM(f_1), LM(f_2))}{LT(f_2)} f_2$$

$$\implies S(f_1, f_2) = \frac{x^2y}{x^2} x^2 - \frac{x^2y}{xy} xy = 0$$

$$\implies S(f_1, f_2) = yf_1 - xf_2 = 0$$

$$f_1 = x^2, LM(f_1) = LT(f_1) = x^2$$

$$f_3 = y^3, LM(f_3) = LT(f_3) = y^3$$

$$\implies okek(LM(f_1), LM(f_3)) = x^2y^3 \text{ olduğundan,}$$

$$S(f_1, f_3) = \frac{okek(LM(f_1), LM(f_3))}{LT(f_1)} f_1 - \frac{okek(LM(f_1), LM(f_3))}{LT(f_3)} f_3$$

$$\implies S(f_1, f_3) = \frac{x^2y^3}{x^2} x^2 - \frac{x^2y^3}{y^3} y^3 = 0$$

$$\implies S(f_1, f_3) = y^3 f_1 - x^2 f_3 = 0$$

$$f_2 = xy, LM(f_2) = LT(f_2) = xy$$

$$f_3 = y^3, LM(f_3) = LT(f_3) = y^3$$

$\implies \text{okek}(LM(f_2), LM(f_3)) = xy^3$  olduğundan,

$$S(f_2, f_3) = \frac{\text{okek}(LM(f_2), LM(f_3))}{LT(f_2)} f_2 - \frac{\text{okek}(LM(f_2), LM(f_3))}{LT(f_3)} f_3$$

$$\implies S(f_2, f_3) = \frac{xy^3}{xy} xy - \frac{xy^3}{y^3} y^3 = 0$$

$$\implies S(f_2, f_3) = y^2 f_2 - x f_3 = 0$$

$\implies \{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $M$  modülü için Gröbner bazdır.

### 1. Sizigi modülün üreteçleri

$$\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$S(f_1, f_2) = y f_1 - x f_2 = 0 \implies S_1 = y \varepsilon_1 - x \varepsilon_2$$

$$S(f_1, f_3) = y^3 f_1 - x^2 f_3 = 0 \implies S_2 = y^3 \varepsilon_1 - x^2 \varepsilon_3$$

$$S(f_2, f_3) = y^2 f_2 - x f_3 = 0 \implies S_3 = y^2 \varepsilon_2 - x \varepsilon_3$$

$LT(S_1) = y \varepsilon_1$ ,  $LT(S_2) = y^3 \varepsilon_1$  ve  $\text{okek}(LM(S_1), LM(S_2)) = y^3 \varepsilon_1$  olduğundan,

$$S(S_1, S_2) = \frac{\text{okek}(LM(S_1), LM(S_2))}{LT(S_1)} S_1 - \frac{\text{okek}(LM(S_1), LM(S_2))}{LT(S_2)} S_2$$

$$\implies S(S_1, S_2) = \frac{y^3 \varepsilon_1}{y \varepsilon_1} (y \varepsilon_1 - x \varepsilon_2) - \frac{y^3 \varepsilon_1}{y^3 \varepsilon_1} (y^3 \varepsilon_1 - x^2 \varepsilon_3)$$

$$\implies S(S_1, S_2) = y^3 \varepsilon_1 + y^2 x \varepsilon_2 - y^3 \varepsilon_1 + x^2 \varepsilon_3$$

$$\implies S(S_1, S_2) = -x^2 y^2 \varepsilon_2 + x^2 \varepsilon_3$$

$$\implies S(S_1, S_2) = -x(y^2 \varepsilon_2 - x \varepsilon_3)$$

$$\implies S(S_1, S_2) = -x S_3$$

$S_1 = \varepsilon_1'$ ,  $S_2 = \varepsilon_2'$ ,  $S_3 = \varepsilon_3'$  yazalım.

$$\implies S(S_1, S_2) = y^2 \varepsilon_1' - \varepsilon_2' + x \varepsilon_3' = 0$$

elde edilir.

$(S_1, S_3)$  ve  $(S_2, S_3)$  çiftleri ortak elemana sahip olmadıklarından  $S$ -polinomları bulunamaz.

Böylece 2. Sizigi matrisi

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Buradan  $M$  modülünün bir serbest çözülümü

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olarak yazılır.

### 3.4 Derecelendirilmiş Modüller ve Homomorfizmalar

Modül derecelendirildiğinde çözünürlüğünden bir modülün yapısı ile ilgili çok daha fazla bilgi edinilmektedir. Şimdi derecelendirilmiş modül tanımını verelim.

**3.4.1 Tanım.**  $R$  bir derecelendirilmiş cebir ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer,  $M$  modülü  $t \in \mathbb{Z}$  için  $M_t$  vektör uzaylar olmak üzere,

i)  $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$

ii) Her  $s \geq 0$  ve  $t \in \mathbb{Z}$  için  $R_s M_t \subset M_{s+t}$

şartlarını sağlıyor ise,  $M$ 'ye derecelendirilmiş modül denir.  $M_t$ ' nin elemanlarına derecesi  $t$  olan homojenler adı verilir.

**3.4.2 Örnek.**  $I$ ,  $R$  halkasının homojen bir ideali, bir başka deyişle, homojen polinomlar tarafından üretilen bir ideali olsun.  $I$  bir derecelendirilmiş modüldür.  $I$  bir homojen ideal olduğundan  $R/I$  bölüm halkası da derecelendirilmiş modül olur.

**3.4.3 Örnek.** 2.6.7 Örnek' ten  $R^m$ ' nin bir serbest  $R$ -modül olduğunu biliyoruz.

$$(R^m)_t = (R_t)^m$$

olarak tanımlarsak,  $(R^m)_t$ ' nin elemanları her bir koordinatı  $t$  dereceli homojen elemanlar olan  $m$ -lilerdir. Böylece,  $R^m$  serbest  $R$ -modülleri, derecelendirilmiş modüller olurlar.

**3.4.4 Tanım.**  $d \in \mathbb{Z}$  ve  $M$  bir derecelendirilmiş  $R$ -modül olsun. Her  $t \in \mathbb{Z}$  için,

$$M(d)_t = M_{t+d}$$

olarak tanımlansın.  $M(d)$   $R$ -modülüne,  $d$  ile kaydırılmış modül denir.

**3.4.5 Önerme.**  $M$  bir derecelendirilmiş  $R$ -modül ve  $d$  bir tam sayı olsun.  $M(d)_t = M_{t+d}$  olmak üzere,

$$M(d) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M(d)_t$$

alalım. Bu durumda,  $M(d)$  bir derecelendirilmiş  $R$ -modüldür.

**İspat:** [9].

**3.4.6 Tanım.**  $(R^m)(d) = (R(d)^m)$  modülüne,  $R$  üzerinde  $d$  ile kaydırılmış derecelendirilmiş serbest modül denir.

1,  $i$ . koordinatta olmak üzere  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  iken  $(e_1, \dots, e_m)$ ,  $R(d)^m$  için bir baz oluşturur. Fakat  $R(d)_{-d} = R_0$  olduğundan  $e_i$ ' ler  $-d$  dereceli homojen elemanlardır.

**3.4.7 Önerme.**  $d_1, d_2, \dots, d_m \in \mathbb{Z}$  verilsin. Bu durumda

$$M = R(d_1) \oplus \dots \oplus R(d_m)$$

her  $1 \leq i \leq m$  için baz elemanları  $-d_i$  dereceli homojenler olan bir derecelendirilmiş serbest modüldür.

**İspat:** [9].

**3.4.8 Uyarı.** Kaydırılmış serbest modüllerin, genel olarak

$$M = R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_m)$$

formunda olanları ile ilgileniriz. Burada,  $e_1, \dots, e_m$  standart baz elemanlarının dereceleri sırasıyla  $d_1, \dots, d_m$ ' dir.

**3.4.9 Tanım.**  $M$  ve  $N$ ,  $R$  üzerinde derecelendirilmiş modüller olsun. Her  $t \in \mathbb{Z}$  için

$$\varphi(M_t) \subset N_{t+d}$$

ise,  $\varphi : M \rightarrow N$  homomorfizmasına  $d$  dereceden derecelendirilmiş homomorfizma denir.

**3.4.10 Örnek.**  $A$ , girdileri  $R$  halkasındaki  $d$  dereceden homojen polinomlar olan bir  $m \times p$  matris olsun. Bu durumda, her  $f \in R^p$  için

$$\begin{aligned}\phi : R^p &\rightarrow R^m \\ f &\rightarrow A \cdot f\end{aligned}$$

$d$  dereceden bir derecelendirilmiş homomorfizmadır.

$f = (f_1, \dots, f_p) \in R^p$  için

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \phi(f_1, \dots, f_p) \\ &= \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ h_{m1} & \cdots & h_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p} \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_p \end{pmatrix}_{p \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} h_{11} \cdot f_1 + \cdots + h_{1p} \cdot f_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{m1} \cdot f_1 + \cdots + h_{mp} \cdot f_p \end{pmatrix}_{m \times 1}\end{aligned}$$

Burada,  $\deg(h_{ij} \cdot f_i) = \deg(h_{ij}) + \deg(f_i)$

$$= d + t$$

olduğundan  $\phi$ ,  $d$  dereceden bir derecelendirilmiş homomorfizmadır.

**3.4.11 Örnek.**  $M = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$  bir derecelendirilmiş  $R$ -modül ve  $f_i$ ' ler derecesi  $d_i$ ' ler olan homojen polinomlar olsun.  $e_i$ ' ler  $R^m$ ' nin standart baz elemanları olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi : R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_m) &\rightarrow M = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \\ e_i &\rightarrow f_i\end{aligned}$$

homomorfizması, 0 dereceden derecelendirilmiş bir homomorfizmadır.

3.4.7 Önerme' den

$$R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_m) = M$$

modülünde

$$\deg(e_i) = d_i$$

olur.

$$N_t = R(-d_1)_t \oplus \dots \oplus R(-d_m)_t = R(-d_1)_{t-d_1} \oplus \dots \oplus R(-d_m)_{t-d_m}$$

olsun.  $g \in N_t$  ise,

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \text{ ve } \text{der}(g_i) = t - d_i$$

dir.

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_m) = g_1e_1 + g_2e_2 + \dots + g_me_m \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} \phi(g) &= \phi(g_1e_1 + g_2e_2 + \dots + g_me_m) \\ &= g_1\phi(e_1) + g_2\phi(e_2) + \dots + g_m\phi(e_m) \\ &= g_1f_1 + g_2f_2 + \dots + g_mf_m \end{aligned}$$

Burada,  $\text{der}(g_i f_i) = \text{der}(g_i) + \text{der}(f_i)$

$$= (t - d_i) + d_i$$

$$= t$$

$$\implies \phi(g) \in M_t = M_{t+0}$$

Böylece,  $\phi$  derecesi 0 olan bir derecelendirilmiş homomorfizmadır.

$h \in M = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  ise,

$$h = h_1f_1 + \dots + h_mf_m$$

olacak şekilde  $h_1, \dots, h_m \in R$  vardır.

$$h_1e_1 + \dots + h_me_m \in R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_m)$$

$$\phi(h_1e_1 + \dots + h_me_m) = h$$

Böylece,  $\phi$  örtendir.

**3.4.12 Örnek.**  $A$ , girdileri  $R$  halkasındaki  $d$  dereceden homojen polinomlar olan bir  $m \times p$  matris olsun. Eğer,  $j$ . sütundaki girdiler  $d_j$  dereceli homojen polinomlar fakat derece sütunda değişiyor ise,

$$\begin{aligned} \phi : R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_m) &\rightarrow R^m \\ f &\rightarrow A.f \end{aligned}$$

sıfır dereceden derecelendirilmiş bir homomorfizmadır.

Daha genel olarak,  $A$ ,  $i, j$ . girdisi  $a_{ij} \in R$  ve  $i, j$  için derecesi  $d_j - c_i$  olan homojen polinom olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\phi : R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_p) &\rightarrow R(-c_1) \oplus \dots \oplus R(-c_m) \\ f &\rightarrow A.f\end{aligned}$$

sıfır dereceden derecelendirilmiş bir homomorfizmadır.

### 3.5 Derecelendirilmiş Çözümler

Bölüm 3.4' te verilen derecelendirilmiş modül,  $d$  ile kaydırılmış modül ve sıfır dereceden homomorfizma kavramları derecelendirilmiş çözüm kavramı için temel oluşturur. Bu bölümde derecelendirilmiş çözüm kavramının tanımı ile birlikte bir serbest çözümün derecelendirilmiş formda yazılışına ilişkin örnek verilecektir.

**3.5.1 Tanım.**  $M$  bir derecelendirilmiş  $R$ -modül olsun.  $F_i$  modülleri,

$$R(-d_1) \oplus \dots \oplus R(-d_p)$$

formunda kaydırılmış serbest derecelendirilmiş modüller ve bunların arasında sıfır dereceden derecelendirilmiş homomorfizmalar var ise,

$$\dots F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

çözümüne,  $M$ ' nin derecelendirilmiş serbest çözümü denir.

**3.5.2 Örnek.**  $R = k[x, y]$  ve  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  modülünü alalım. 3.3.6 Örnek' ten  $M$  modülünün serbest çözümünün

$$0 \rightarrow R \begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} \rightarrow R^3 \begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix} \rightarrow R^3 \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix} \rightarrow R$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi bu modülün derecelendirilmiş çözümünü yazalım.

$$f_1 = x^2, \text{ der}(f_1) = 2$$

$$f_2 = xy, \text{ der}(f_2) = 2$$

$$f_3 = y^3, \text{ der}(f_3) = 3$$

Bu durumda,

$$\varphi_1 : R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} M$$

yazılır.

$$\varphi_2 : F_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3)$$

olacak şekilde  $F_1$  modülünü bulalım.

$$c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 3$$

$$a_{11} = y d_1 - c_1 = 1 \implies d_1 - 2 = 1 \implies d_1 = 3$$

$$a_{12} = y^3 d_2 - c_1 = 3 \implies d_2 - 2 = 3 \implies d_2 = 5$$

$$a_{33} = -x d_3 - c_3 = 1 \implies d_3 - 3 = 1 \implies d_3 = 4$$

$$\implies \varphi_2 : R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3)$$

sıfır dereceden bir homomorfizmadır.

Benzer şekilde,

$$\varphi_3 : F_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$$

olacak şekilde  $F_2$  modülünü bulalım.

$$c_1 = 3, c_2 = 4, c_3 = 5$$

$$a_{11} = y^2 d_1 - c_1 = 2 \implies d_1 - 3 = 2 \implies d_1 = 5$$

Böylece,

$$\varphi_3 : R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$$

sıfır dereceden bir homomorfizmadır.

Buradan,  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  modülünün

$$0 \longrightarrow R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

derecelendirilmiş serbest çözümünü elde edilir.

## 4. SAYISAL YARIGRUP HALKALARININ BETTI SAYILARI

Bir derecelendirilmiş serbest çözümde, diferansiyeli tarif etmek genellikle oldukça zordur. Böyle durumlarda, Betti sayısı, projektif boyut, Poincaré serisi gibi sayısal değişmezler ile ilgili bilgiler elde etmeyi deneriz. Bu bölümde [2], [3], [10] ve [11] numaralı kaynaklar kullanılmıştır.

### 4.1 Betti Sayıları

**4.1.1 Tanım.**  $M$  bir sonlu üretilmiş  $R$ -modül ve

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

$M$ ' nin bir minimal derecelendirilmiş serbest çözümü olsun.  $M$ ' nin  $i$ . Betti sayısı,

$$b_i^R(M) = \text{rank}(F_i)$$

olarak tanımlanır.

$M$ ' nin izomorfizma altında bir tek minimal derecelendirilmiş serbest çözümü olduğundan Betti sayıları,  $M$ ' nin minimal derecelendirilmiş serbest çözümünden bağımsızdır.

**4.1.2 Tanım.**  $\mathcal{G}$ ,  $M$   $R$ -modülünün bir derecelendirilmiş serbest çözümü olsun.

$$\text{maks}\{i \mid G_i \neq 0\}$$

sayısına,  $\mathcal{G}$  serbest çözümünün uzunluğu denir.  $\mathcal{G}$ ' nin uzunluğu sonlu ise,  $\mathcal{G}$ ' ye sonlu çözüm, diğer durumda  $\mathcal{G}$ ' ye sonsuz çözüm denir.

$M$  modülünün projektif boyutu

$$pb_R(M) = \text{maks}\{i \mid b_i^R \neq 0\}$$

sayısıdır. Bir başka deyişle,  $pb_R(M)$ ,  $M$ ' nin  $\mathcal{F}$  minimal serbest çözümünün uzunluğudur.

$M$ ' nin  $R$  üzerindeki Poincaré serisi

$$P_M^R(t) = \sum_{i \geq 0} b_i^R(M) t^i$$

formülü ile elde edilir.

**4.1.3 Örnek.**  $R = k[x, y]$  ve  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  olsun.  $R/M$ ' nin minimal serbest çözümünün,

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olduğunu 3.3.6 Örnek' ten biliyoruz. Burada,

$$pb_R(R/M) = \max\{i \mid b_i^R(M) \neq 0\} = 3$$

$$\begin{aligned} P_{R/M}^R(t) &= \sum_{i=0}^3 b_i^R(R/M)t^i \\ &= b_0^R(R/M)t^0 + b_1^R(R/M)t^1 + b_2^R(R/M)t^2 + b_3^R(R/M)t^3 \\ &= 1 + 3t + 3t^2 + t^3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

## 4.2 Derecelendirilmiş Betti Sayıları

Bu bölümde, derecelendirilmiş Betti sayılarını tanıtaacağız.

**4.2.1 Tanım.**  $M$ ' nin bir minimal derecelendirilmiş serbest çözümü,

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

olsun.  $\mathcal{F}$  derecelendirilmiş çözüm olduğundan, her bir  $F_i$  serbest modülü  $R(-p)$  formundaki modüllerin bir direkt toplamıdır.  $M$ ' nin derecelendirilmiş Betti sayısı,

$$b_{i,p}^R(M) = R(-p) \text{ formundaki } F_i \text{ modüllerindeki toplamların sayısı}$$

olarak tanımlanır.

$M$   $R$ -modülünün derecelendirilmiş Poincaré serisi,

$$P_M^R(t, z) = \sum_{i \geq 0, p \in \mathbb{Z}} b_{i,p}^R(M) t^i z^p$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde, serbest  $R$ -modüllerin herhangi bir  $\mathcal{G}$  kompleksi için  $\mathcal{G}$ ' nin Poincaré serisi,

$$P_{\mathcal{G}}(t) = \sum_i \text{rank}(G_i) t^i$$

olarak tanımlanır.

**4.2.2 Örnek.**  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  ve  $R = k[x, y]$  olsun. 3.5.2 Örnek' ten  $R/M$ ' nin derecelendirilmiş serbest çözülümünün

$$\mathcal{G} : 0 \longrightarrow R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & y^3 & 0 \\ -x & 0 & y^2 \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}} R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^3 \end{pmatrix}} R$$

olduğunu biliyoruz.

$R/M$ ' nin derecelendirilmiş Betti sayıları,  $F_0 = R(-0)$  ve  $i = 0, p = 0$  olduğundan,

$$b_{0,0} = b_{0,0}^R(R/M) = 1$$

$F_1 = R(-2) \oplus R(-2) \oplus R(-3)$  ve  $i = 1, p = 2, p = 3$  olduğundan,

$$b_{1,2} = b_{1,2}^R(R/M) = 2$$

$$b_{1,3} = b_{1,3}^R(R/M) = 1$$

$F_2 = R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-5)$  ve  $i = 2, p = 3, p = 4, p = 5$  olduğundan,

$$b_{2,3} = b_{2,3}^R(R/M) = 1$$

$$b_{2,4} = b_{2,4}^R(R/M) = 1$$

$$b_{2,5} = b_{2,5}^R(R/M) = 1$$

$F_3 = R(-5)$  ve  $i = 3, p = 5$  olduğundan,

$$b_{3,5} = b_{3,5}^R(R/M) = 1$$

olarak bulunur.

$R/M$ ' nin,  $R$  üzerindeki derecelendirilmiş Poincaré serisi,

$$\begin{aligned} P_{R/M}^R(t, z) &= \sum_{i \geq 0, p \in \mathbb{Z}} b_{i,p}^R(R/M) t^i z^p \\ &= b_{0,0} t^0 z^0 + b_{1,2} t^1 z^2 + b_{1,3} t^1 z^3 + b_{2,3} t^2 z^3 + b_{2,4} t^2 z^4 + b_{2,5} t^2 z^5 + b_{3,5} t^3 z^5 \\ &= 1 + 2tz^2 + tz^3 + t^2 z^3 + t^2 z^4 + t^2 z^5 + t^3 z^5 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### 4.3 Betti Tabloları

Minimal serbest çözümlerin sayısal değişmezleri, modül hakkında oldukça fazla bilgi içerirler. Bu sebeple, Betti diyagramı olarak isimlendirilen tablo bize bu sayısal değişmezleri görüntülemenin derli toplu bir yolunu sunar. Betti sayıları, iki yolla bir tablo şeklinde verilebilir.

**1. Yol:** Satırlar ve sütunlardaki etiketler sırasıyla yukarıya ve sağa doğru artar. En alttaki satır, 0. satır ve başlangıç sütunu, 0. sütundur.  $i$ . sütundaki ve  $p$ . satırdaki girdi  $b_{i,p}$ ' dir. Böylece  $i$ . sütun minimal derecelendirilmiş serbest çözümlerin  $i$ . adımındaki veriyi içerir. Olmayan Betti sayıları boş bırakılır veya  $-$  ile gösterilir. Bu tablo,

$$\begin{array}{cccc} b_{0,p} & b_{1,p} & \cdots & b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{0,1} & b_{1,1} & \cdots & b_{i,1} \\ b_{0,0} & b_{1,0} & \cdots & b_{i,0} \end{array}$$

formundadır.

**4.3.1 Örnek.** 4.2.2 Örnek' ten  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  modülünün derecelendirilmiş Betti sayılarının,  $b_{0,0} = 1, b_{1,2} = 2, b_{1,3} = 1, b_{2,3} = 1, b_{2,4} = 1, b_{2,5} = 1$  olduğunu biliyoruz.

Bu durumda, 4.2.2 Örnek' teki  $\mathcal{G}$  çözümlerinin Betti diyagramı,

$$\begin{array}{ccc} - & - & 1 \\ - & - & 1 \\ & - & 1 & 1 \\ & - & 2 & - \\ - & - & - \\ 1 & - & - \end{array}$$

olarak elde edilir.

**2. Yol:** Satırlardaki ve sütunlardaki etiketler sırasıyla sağa ve aşağı doğru artar.  $i$ . sütundaki ve  $p$ . satırdaki girdi  $b_{i,i+p}$ ' dir.  $i$ . sütun, minimal derecelendirilmiş serbest çözümlerin  $i$ . adımındaki veriyi içerir. Tabloda, her bir sütunun üzerinde  $i$ . Betti sayısı  $b_i$  olan ek bir satır vardır. Bu Betti sayılarının olduğu üst satırın altı çizilidir. Solda ek bir sütun vardır. Bu sütun,

satırların etiketlerini içerir ve diğer sütunlardan dikey bir doğru ile ayrılmıştır. Olmayan Betti sayıları  $\cdot$  veya  $-$  ile gösterilir. Bu tablo, Macaulay ve Macaulay2 gibi bilgisayar programlarında bulunan tablodur. Bu sebeple, bu tipten olan Betti diyagramına bilgisayar tablosu da denir. Bu tablo,

	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$
0	$b_{0,0}$	$b_{1,1}$	$b_{2,2}$	$\dots$
1	$b_{0,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,3}$	$\dots$
2	$b_{0,2}$	$b_{1,3}$	$b_{2,4}$	$\dots$
3	$b_{0,3}$	$b_{1,4}$	$b_{2,5}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

formundadır.

**4.3.2 Örnek.** 4.2.2 Örnek' ten,  $M = \langle x^2, xy, y^3 \rangle$  modülünün Betti sayılarının,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_3 = 1$  olduğunu biliyoruz. Bu durumda, Betti tablosu,

	1	3	3	1
0	1	-	-	-
1	-	2	1	-
2	-	1	1	-
3	-	-	1	-

olarak elde edilir.

**4.3.3 Uyarı.** Betti tablolarında, sağdan sola doğru görünen Betti sayıları, çözümde tam tersi sıradadır.

#### 4.4 Sayısal Yarıgruplar ve Betti Sayıları

$k$  bir cisim olsun.  $k[x_1, \dots, x_p]$  polinom halkasını ve  $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$  sayısal yarıgrupunu alalım.  $u = (u_1, \dots, u_p)$  ve  $x^u = x_1^{u_1} \dots x_p^{u_p}$  olmak üzere,

$$I_S = \langle x^u - x^v \mid u, v \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^p u_i n_i = \sum_{i=1}^p v_i n_i \rangle$$

olduğunu biliyoruz [11].

$S = \langle n_1, n_2 \rangle$ ,  $n_1 < n_2$  ve  $\text{obeb}(n_1, n_2) = 1$  olsun.

$$u_1 n_1 + u_2 n_2 = v_1 n_1 + v_2 n_2$$

eşitliğinden,

$$u_1 = n_2, v_2 = n_1$$

yazılabilir. Böylece,

$$I_S = \langle x_1^{n_2} - x_2^{n_1} \rangle$$

bulunur.

$I_S$  idealinin üreteçlerinin herhangi bir minimal kümesi,  $k[S]$  halkasının 1. Sizigisidir ve bunun eleman sayısı  $k[S]$  halkasının 1. Betti sayısıdır. 1. Sizigilerin arasındaki bağıntının bir minimal kümesi,  $k[S]$ ' nin 2. Sizigi kümesidir. Bunun eleman sayısı da  $\beta_2(k[S])$  olarak gösterilir. Bu şekilde devam edersek,  $k[S]$  halkasının Betti dizisi,

$$(\beta_0(k[S]), \beta_1(k[S]), \beta_2(k[S]), \dots)$$

listesidir.

$$k[S] \cong k[x_1, x_2]/I_S = k[x_1, x_2]/\langle x_1^{n_2} - x_2^{n_1} \rangle$$

olduğundan, Betti dizisi (1,1) olarak elde edilir.

Herzog,  $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$  olduğunda  $I_S$  idealinin en fazla üç binom tarafından üretildiğini göstermiştir [11]. Her bir  $1 \leq i \leq 3$  için,  $S$  yarıgrupunun diğer iki üreteci tarafından üretilen yarıgruptaki en küçük pozitif  $c_i n_i$  çarpımına bakarız ve bu bize  $I_S$  için bir binom üreteci verir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

**4.4.1 Örnek.**  $S$  bir sayısal yarıgrup olsun.  $S = \langle 6, 7, 10 \rangle$  alalım.

$$4.6 = 2.7 + 1.10$$

$$4.7 = 3.6 + 1.10$$

$$2.10 = 1.6 + 2.7$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu bize,

$$I_S = \langle x^4 - y^2 z^1, y^4 - x^3 z^1, z^2 - xy^2 \rangle$$

idealini verir.

Böylece,  $I_S$ ' nin üreteç sayısı iki ise,  $k[S]$ ' nin Betti dizisi (1,2,1), eğer  $I_S$  ideali üç üreteçli ise  $k[S]$ ' nin Betti dizisi (1,3,2) olur.

$S = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$  sayısal yarıgrubunu alalım. Bu durumda,  $I_S$ ' nin üreteç sayısı ve  $k[S]$ ' nin Betti sayıları için bir üst sınır yoktur. Bir örnekle açıklayalım.

**4.4.2 Örnek.**  $n \geq 2$  için,

$$\mathcal{B}_n = \langle (2n - 1)2n, (2n - 1)(2n + 1), 2n(2n + 1), 2n(2n + 1) + 2n - 1 \rangle$$

Bresinsky sayısal yarıgrubunu alalım. Bresinsky,  $I_S$  ideali için üreteç sayısının en az  $2n$  olduğunu göstermiştir [3]. Stamate [3],  $\mathcal{B}_n$  sayısal yarıgrubunun Betti dizisini  $(1, 4n, 8n - 4, 4n - 3)$  olarak hesaplamıştır.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] J.C. Rosales and P.A. Garcia-Sanchez, *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, 20, New York, USA : Springer, 2009.
- [2] J. Herzog, “Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings”, Ph. D. dissertation, Louisiana State University, USA, 1969.
- [3] D.I. Stamate, “Betti Numbers for Numerical Semigroup Rings”, *Multigraded Algebra and Applications Springer Proceedings and Statistics*, 238, 133-157, 2018.
- [4] P.A. Garcia-Sanchez, *Numerical Semigroups Mini-Course*.  
Eriřim adresi: <https://www.ugr.es/~pedro/minicurso-porto.pdf>, t.y.
- [5] J.A. Smith “Hilbert Sequences of Monomial Ideals”, dissertation thesis, The Division of Natural Science and Mathematics of Bard College, New York, 2002.
- [6] A. Boocher and E. Grifo, *Commutative Algebra*, 77-111, Springer, Cham, 2021.
- [7] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Using Algebra Geometry*, New York, USA: Springer, 2005.
- [8] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, Cham, 2005.
- [9] E. Grigorescu “Hilbert Series and Free Resolutions”, dissertation thesis, The Division of Natural Science and Mathematics of Bard College, New York, 2003.
- [10] I. Peeva, *Graded Syzygies. Algebra and Applications*. 14. New York, USA : Springer-Verlag, London, 2011.
- [11] J. Herzog, “Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings”, *Manuscripta Math*, 3, 175-193, 1970.

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Beyza Gergin

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

## Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2022
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2018
Lise	Akhisar Anadolu Lisesi	2014