



**q-TİPLİ BLEIMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM
VE MONOTONLUK ÖZELLİKLERİ**

Zeynep KARA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zeynep KARA

21/06/2022

q-TİPLİ BLEIMANN-BUTZER-HAHN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM VE MONOTONLUK ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zeynep KARA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2022

ÖZET

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde temel kavramlara yer verilmiştir. ‘Lineer pozitif operatör’ tanımından başlanarak süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı fonksiyonlar ve operatör dizileri için ‘düzgün yakınsaklık’ kavramı ve bununla birlikte Korovkin Teoremi ele alınmıştır. Üçüncü bölümde $C_B[0, \infty)$ uzayının bir alt uzayı olan H_ω uzayı tanımlanmış ve Bleimann, Butzer ve Hahn operatör dizisinin H_ω uzayındaki fonksiyonlar için $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Daha sonra bu operatörün n ye göre monotonluğu bölünmüş farklar yardımıyla verilmiştir. Dördüncü bölümde q tamsayısına dayalı Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin tanımı verilip bu operatör dizisinin düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca bu operatör dizisinin yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar yardımıyla değerlendirilmiştir. Bu bölümde ayrıca q - Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin monotonluk özelliği incelenmiştir. Beşinci bölümde q tamsayısına dayalı Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin iki değişkenli hali tanımlanmıştır. Bu operatörlerin reel uzayın sınırlı ve sürekli bir alt uzayında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Ayrıca bu operatör dizisinin yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar yardımıyla değerlendirilmiştir. Bu bölümde ayrıca özgün olarak iki değişkenli q - Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin monotonluk özelliği incelenmiştir. Altıncı bölümde özgün olarak q - Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin Voronovskaya tipli asimptotik yaklaşımı verilmiştir. Son olarak yedinci bölümde özgün olarak iki değişkenli q - Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin Voronovskaya tipli asimptotik yaklaşımı elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri, lineer pozitif operatörler, q -analiz, süreklilik modülü, Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar, Korovkin teoremi, Voronovskaya tipli asimptotik yaklaşım
Sayfa Adedi : 139
Danışman : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

APPROXIMATION AND MONOTONICITY PROPERTIES OF q -TYPE BLEIMANN-BUTZER- HAHN OPERATORS

(M. Sci. Thesis)

Zeynep KARA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2022

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, basic notions have been recalled. Starting from the definition of ‘linear positive operators’, modulus of continuity, Lipschitz type maximal functions, uniform convergence of the sequences of the operators and the ‘Korovkin Theorem’ have been mentioned. In the third chapter, H_ω space which is a subspace of $C_B[0, \infty)$ has been defined, later, uniform convergency of the sequence of Bleimann, Butzer and Hahn operators on $[0, \infty)$ for those functions belonging to H_ω space is investigated. Moreover monotonicity of BBH operator has been obtained with the help of divided differences. In the fourth chapter, the definition of Bleimann, Butzer ve Hahn operator based on q -integer has been given, moreover uniform convergency of the sequence of these operators has been examined. Furthermore the order of approximation of these operators has also been considered with the help of modulus of continuity and Lipschitz type maximal functions and monotonicity of the operator with respect to n has been given. In the fifth chapter, q -Bleimann, Butzer and Hahn operators with two variables have been introduced. The uniform convergence of these operators to the continuous function defined on a bounded and continuous subset of real numbers has been proved. Furthermore the order of approximation of these operators has also been considered with the help of modulus of continuity and Lipschitz type maximal functions and monotonicity of the operator with respect to n has been given. In the sixth chapter, the Voronovskaja type asymptotic approach of q -Bleimann, Butzer and Hahn operators has been given. Finally, in the seventh chapter, the Voronovskaja type asymptotic approach of q -Bleimann, Butzer and Hahn operators with two variables has been obtained.

Science Code : 20406

Key Words : Bleimann, Butzer ve Hahn operators, linear positive operators, q -analysis, modulus of continuity, Lipchitz type maximal functions, Korovkin type theorem, Voronovskaya asymptotic approach

Page Number : 139

Supervisor : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini eksik etmeyen değerli bilgi ve yardımlarıyla katkıda bulunan danışman hocam Prof. Dr. Ogün DOĞRU' ya en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Bu süreçte ve hayatımın her aşamasında bana manevi destek veren aileme ve eşim Gökhan KARA' ya sonsuz teşekkürlerimi borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
2.1.1. Lineer pozitif operatörlerin özellikleri.....	3
2.2. Operatör Dizileri İçin Yaklaşım	6
2.3. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Hızı	7
2.4. Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı.....	12
3. BLEIMANN, BUTZER VE HAHN (BBH) OPERATÖRLERİ.....	19
3.1. BBH Operatörlerinin Tanımı	19
3.2. BBH Operatör Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı.....	19
3.3. BBH Operatörlerinin Monotonluk Özelliği	30
4. YAKLAŞIMLAR TEORİSİNDE q -ANALİZ.....	37
4.1. q -BBH Operatörleri.....	39
4.2. q -BBH Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı	53
4.3. Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı.	57
4.4. Lipschitz Tipli Maksimal Fonksiyonlar Uzayında Yaklaşım Hızı	60
4.5. q -BBH Operatörlerinin Monotonluk Özelliği.....	63
5. İKİ DEĞİŞKENLİ OPERATÖRLERİN OLUŞTURULMASI	71
5.1. İki Değişkenli q -BBH Operatörleri	71

Sayfa

5.2. İki Değişkenli q -BBH Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	89
5.3. İki Değişkenli q -BBH Operatörlerinin Yaklaşım Hızı	96
5.3.1. İki değişkenli q -BBH operatörlerinin süreklilik modülü ile yaklaşım hızının bulunması	96
5.3.2. İki değişkenli q -BBH operatörlerinin yaklaşım hızının lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar ile elde edilmesi	101
5.3.3. İki değişkenli q -BBH operatörlerinin monotonluk özelliği.....	106
6. q -BBH OPERATÖRLERİNİN VORONOVSKAYA ASİMPOTOTİK YAKLAŞIMI.....	115
7. İKİ DEĞİŞKENLİ q -BBH OPERATÖRLERİNİN VORONOVSKAYA ASİMPOTOTİK YAKLAŞIMI.....	123
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	135
KAYNAKLAR	137
ÖZGEÇMİŞ	139

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\{B_n(f; x)\}$	Bernstein polinomlar dizisi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$d(x, E)$	x noktasının E kümesine uzaklığı
$f_n(x) \Rightarrow f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\widetilde{f}_\alpha(x)$	Lipschitz tipli maksimal fonksiyon
$L_n(f; q, x)$	q - BBH operatörleri
$L_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$	İki değişkenli q - BBH operatörleri
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı
$\widetilde{W}_{\alpha, E}$	Lipschitz tipli maksimal fonksiyon uzayı
$\overline{W}_{\alpha_1, \alpha_2, E^2}$	İki değişkenli fonksiyonlar için Lipschitz tipli maksimal fonksiyon uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü
$\widetilde{\omega}(f; \delta_1, \delta_2)$	İki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü
$[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$	f fonksiyonun $x_0, x_1, \dots, x_p$ noktalarındaki n -yinci bölünmüş farkı
$\ \cdot\ _{C[a, b]}$	$C[a, b]$ uzayında tanımlı norm

1. GİRİŞ

Bleimann, Butzer ve Hahn $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar için lineer pozitif B_n operatörlerini

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \left(\frac{n}{k}\right) x^k, \quad x > 0, n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlamışlardır (Bleimann, Butzer and Hahn, 1980).

Bu operatörlerin yaklaşım özellikleriyle ilgili ve Korovkin tipi yaklaşım özelliklerinin ve yakınsama oranlarının incelendiği birçok çalışma vardır. Gadjiev ve Çakar için $(t/(1+t))^v$ test fonksiyonunu kullanarak Korovkin tipi bir teorem vermişler ve bu operatörün $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsaklığını $C_B[0, \infty)$ uzayının bir alt sınıfındaki fonksiyonlar için elde etmişlerdir (Gadjiev and Cakar, 1999).

Lineer pozitif operatör dizilerinin bir çoğunun konveks fonksiyonlar için monoton azalarak yakınsak olduğu bilinmektedir. Klasik Bernstein polinomlarının monotonluk özelliklerine ilişkin sonuçlar Temple tarafından elde edilmiştir (Temple, 1954). Ayrıca Cheney ve Charma tarafından Szász ve Meyer-König ve Zeller operatörleri için bazı yararlı monotonluk özellikleri elde edilmiştir (Cheney and Charma, 1964). Bleimann Butzer ve Hahn operatörlerinin sınırlı ve konveks fonksiyon için n 'ye göre monotonluğu ise Vecchia tarafından incelenmiştir (Della Vecchia, 1991).

Aral ve Doğru, çalışmalarını Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerine genişleterek Bleimann Butzer ve Hahn operatörlerinin q genelleşmesini (q -BBH) tanımlamışlardır (Doğru and Aral, 2007). Ayrıca A. Altın, O. Doğru ve M. A. Özarslan tarafından klasik Bleimann Butzer ve Hahn operatörlerinin iki değişkenli hali tanımlanmış ve Korovkin tipli bazı yaklaşım özellikleri elde edilmiştir (Altın, Doğru and Özarslan, 2005).

Bu tezde tek değişkenli q -BBH operatörlerinin yaklaşım ve monotonluk özellikleri incelenecek, yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile

hesaplanacak ve özgün olarak tek değişkenli q - BBH operatörlerinin Voronovskaya tipli asimptotik yaklaşımı verilecektir. Daha sonra iki değişkenli q - BBH operatörlerinin yaklaşımı Volkov teoremi ile yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile hesaplanacak ve özgün olarak iki değişkenli q - BBH operatörlerinin monotonluk özellikleri incelenerek son olarak Voronovskaya tipli asimptotik yaklaşımını verilecektir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer pozitif operatör dizilerinin tanımı ve bu operatörlerin temel özellikleri ispatlarıyla birlikte verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y lineer fonksiyon uzayları ve $L: X \rightarrow Y$ olmak üzere L operatörü eğer, her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in R$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

ise L 'ye lineer operatör denir (Hacıyev ve Hacısalıhoğlu, 1995).

2.1.2. Tanım

X uzayında tanımlı bir L lineer operatörü herhangi pozitif bir f fonksiyonunu yine pozitif bir fonksiyona dönüştürüyorsa, yani

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f) \geq 0$$

oluyor ise, L operatörüne lineer pozitif operatör denir (Hacıyev ve Hacısalıhoğlu, 1995).

2.1.1. Lineer pozitif operatörlerin özellikleri

2.1.1.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler, negatif fonksiyonları yine negatif fonksiyonlara dönüştürürler.

İspat:

$L : X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlı L lineer pozitif operatörü verilsin. Bu durumda

$\forall f > 0$ için $-f > 0$ olur. L pozitif olduğundan

$L(f) > 0$ sağlanır. L lineer olduğundan ise

$-L(f) > 0$ yani

$L(f) < 0$ olur. (2.1)

Bu da ispatı tamamlar (Hacıyev ve Hacısalihoglu, 1995).

2.1.2. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

L Lineer pozitif operatörü, $f, g \in X$ için

$$f \leq g \text{ iken } L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat:

$f, g \in X$ için

$$f \leq g$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$g - f \geq 0$$

olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.2}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan

$L(g - f) = L(g) - L(f)$ olur. Bu ise (2.2) de kullanılırsa

$$L(f) \leq L(g)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu, 1995).

2.1.3. Lemma

$L : X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlı L lineer pozitif operatörü , $f, |f| \in X$ için

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat:

Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlik ve Lemma 2.1.2 den

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. L lineer operatör olduğundan

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \text{ dir. Burada mutlak değer tanımından}$$

$$|L(f)| \leq L(|f|) \text{ olur. Böylece ispat tamamlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu, 1995)}$$

2.1.3. Tanım

$n \in N$ olmak üzere $f_n(x)$ dizisine fonksiyon dizisi ve $\{f_n(x)\}$ şeklinde gösterilir.

2.1.4. Tanım

$n \in N$ olmak üzere $L_n(f; x)$ ifadesine operatör dizisi denir ve (L_n) şeklinde gösterilir.

2.2. Operatör Dizileri İçin Yaklaşım

2.2.1. Tanım

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $f \in C[a, b]$ olmak üzere

$$\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

biçiminde tanımlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu, 1995).

2.2.2. Tanım

$\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a, b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \right\} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve bu

$f_n(x) \xrightarrow{\text{düzgün}} f(x)$ ile gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoglu, 1995).

2.2.1. Teorem

$C[a,b]$ uzayının elemanlarından oluşan bir (f_n) fonksiyon dizisinin aynı uzayın bir f elemanına $C[a,b]$ uzayında yakınsaması için gerek ve yeter koşul (f_n) dizisinin f ye $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsamasıdır.

2.2.3. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlı L lineer operatörü verilsin. Eğer $\forall f \in X$ için

$$\|L(f; x)\|_Y \leq M \|f\|_X$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir. M pozitif sabitlerinin en küçüğüne de L operatörünün normu denir. $\|L\|_{X \rightarrow Y}$ ya da $\|L\|$ ile gösterilir.

$$\|L\| = \inf \{M : \|Lf\|_Y \leq M \|f\|_X\}$$

ile ifade edilir (Hacıyev ve Hacısalihoglu, 1995).

2.3. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Hızı

2.3.1. Tanım

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ise (α_n) dizisine sonsuz küçülendir denir. (α_n) ve (β_n) dizileri sonsuz küçülen diziler olsun. Buna göre

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ise (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşım hızı (β_n) dizisinden daha hızlıdır denir.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$ ise (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşım hızı (α_n) dizisinden daha hızlıdır denir.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$ ise (α_n) ve (β_n) dizilerinin sıfıra yaklaşım hızı aynıdır denir.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = c$ ise c ye asimptotik değer, (β_n) dizisine de (α_n) dizisinin asimptotik hızı denir.

Yani (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşım hızı (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşım hızıyla belirlenir.

O halde L_n lineer pozitif operatörünün herhangi bir $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşma hızı

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq c\alpha_n$$

olacak şekilde α_n ler ile değerlendirilebilir . $n \rightarrow \infty$ iken $\alpha_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde α_n ler bulunduğunda operatörün yaklaşım hızı α_n ' nin sıfıra yaklaşım hızı ile kıyaslanabilir.

Operatörlerin yaklaşım hızını değerlendirebileceğimiz yöntemlerden biri süreklilik modülüdür (Ayık Adem, 2018).

2.3.2. Süreklilik modülü

$f \in C[a, b]$ olsun, her $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan ω fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

f fonksiyonunun süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- $\omega(f; \delta) \geq 0$,
- $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$,
- $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$,
- $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$,

- v. $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0,$
- vi. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|),$
- vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta).$

İspat:

- i. Süreklilik modülü, tanım gereğince bir mutlak değerin supremumu olup $\omega(f; \delta) \geq 0$ olduğu açıktır .
- ii. $0 < \delta_1 < \delta_2$ için $|t - x| \leq \delta_2$ özelliğini sağlayan (t, x) sayı çiftleri kümesi $|t - x| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan (t, x) sayı çiftleri kümesinden daha geniştir. Bölge büyüdükçe alınan supremum da büyüyeceğinden $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ dir.
- iii. Süreklilik modülünün tanımından
$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir.

$$|t - x| \leq m\delta \text{ ise } x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olup, $t = x + m\delta$ seçildiğinde

$$|h| \leq \delta \text{ ve } \omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

yazılabilir . Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x+mh) - f(x)| = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x+(k+1)h) - f(x+kh)] \right|$$

olup sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x+mh) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x+(k+1)h) - f(x+kh)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta) \leq m\omega(f; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir.

- iv. λ sayısının tam kısmını m ile gösterelim. $[\lambda] = m$ olsun. Buradan $m \leq \lambda < m+1$ ise $m+1 \leq \lambda+1 < m+2$ yazılabilir.

Bu eşitsizliklerden ve ii. den

$$\begin{aligned} \omega(f; \lambda\delta) &\leq \omega(f; (m+1)\delta) \\ &\leq (m+1)\omega(f; \delta) \\ &\leq (\lambda+1)\omega(f; \delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f; \delta)$$

yazılır ki bu da ispatı tamamlar.

- v. $(\Rightarrow): |t-x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki $\delta \rightarrow 0$ yaklaşması $t \rightarrow x$ olması demektir.

f fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan süreklilik tanımı gereğince

$$t \rightarrow x \text{ için } |f(t) - f(x)| \rightarrow 0$$

olduğundan ispatı açıktır.

$(\Leftarrow)$: $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0$ olsun . Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\eta > 0$ vardır ki

$\delta > \eta$ olduğunda

$$\sup_{\substack{t, x \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

dir. Bu ise her $t, x \in [a, b]$ ve $|t - x| < \delta \leq \eta$ için doğru olduğundan f fonksiyonu

düzgün süreklidir.

vi. $\omega(f; \delta)$ ifadesinde $|t - x| = \delta$ seçilirse,

$$\omega(f; |t - x|) = \sup_{x \in [a, b]} |f(t) - f(x)|$$

elde edilir. Supremum özelliğinden $|f(t) - f(x)|$ lerin supremumu $\omega(f; |t - x|)$ olacağı için

ispat tamamlanır.

vii. (vi) den

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega\left(f; \frac{|t-x|}{\delta} \delta\right)$$

yazılabilir ve (iv) den

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

$L_n(f, x)$ in $f(x)$ e yaklaşım hızını süreklilik modülü ile değerlendirebilmek

için bir x_0 noktasında

$$|L_n(f; x_0) - f(x_0)| \leq c\omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. $n \rightarrow \infty$ iken $\delta_n \rightarrow 0$ olacak şekilde $\delta = (\delta_n)$

bulunabilmelidir. Süreklilik modülü özellikleri kullanılarak eşitsizlikte

$c\omega(f; \delta_n) \rightarrow 0$ olmasıyla operatörün yaklaşım hızı hesaplanmış olur. Böylece operatörün $f(x_0)$ fonksiyonuna noktasal yakınsak hızı elde edilir.

2.3.3. Lipschitz sınıfı

f , $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x, t \in A$ için $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f ye α yıncı basamaktan Lipschitz sürekli fonksiyon, M ye de Lipschitz sabiti denir. α yıncı basamaktan Lipschitz sürekli fonksiyonların sınıfı $Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir (Cao, Ding and Xu, 2005).

Bir fonksiyon Lipschitz sınıfından ise sürekli dir ancak bunun tersi doğru değildir.

2.4. Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

Yaklaşım teorisi, bir fonksiyonun, kendisinden daha basit şekilde incelenebilen ve kolaylıkla daha fazla sonuç elde edilebilen fonksiyonlara yakınsamasını ele alır.

Bu amaçla Weierstrass 1885 yılında Sonlu aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını iddia etmiştir. Sürekli fonksiyonlar yerine daha kolay

incelenebilen polinomu ele almak açısından büyük öneme sahip olan bu teorem, yaklaşımlar teorisinin temel teoremi sayılmaktadır;

2.4.1. Teorem

$f(x), [a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $P(x)$ polinomu vardır. (Weierstrass, 1885)

Bu teoremin bir ispatını 1912 yılında Rus matematikçi Bernstein $[0, 1]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı Bernstein polinomlarını tanımlayarak yapmıştır;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(2.3)

Böylece bu $P(x)$ polinomunun şeklini göstermiş ve Bernstein bu lineer pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığını $f \in C[0, 1]$ için elde etmiştir.

Yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip çalışma alanlarından biri de lineer pozitif operatörler ve bunların yaklaşım özelliklerinin incelenmesidir. Lineer pozitif operatörler kavramı 1950 li yıllarda bu şekildeki operatör dizilerinin sonlu, kapalı aralıkta sürekli fonksiyona düzgün yakınsaklığını veren Bohman-Korovkin Teoremi olarak bilinen teoremin ispatlanmasıyla geniş çapta çalışmaya başlanmıştır.

Bohman, toplam biçimindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşmasını aşağıdaki gibi göstermiştir.

$$x \in [0, 1], \quad 0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1 \text{ iken}$$

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x), \quad P_{k,n}(x) \geq 0 \quad (2.4)$$

pozitif operatörler dizisi,

$$i) L_n(1; x) \xrightarrow{} 1, \quad$$

$$ii) L_n(t; x) \xrightarrow{} x, \quad$$

$$iii) L_n(t^2; x) \xrightarrow{} x^2.$$

şartlarını sağlıyorsa, $L_n(f; x)$ operatörü $[0,1]$ aralığında sürekli olan bir f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Burada $L_n(f; x)$ operatörü lineerdir. Ayrıca burada $P_{k,n}(x) \geq 0$ alındığında eğer $f(\alpha_{k,n}) \geq 0$ seçilirse $L_n(f; x) \geq 0$ sağlanır.

Korovkin 1953’ de Bohman Teoremi’nin koşullarının genel halde sağlandığını göstermiş ve aşağıdaki teoremi vermiştir.

2.4.2. Teorem

$f \in C[a, b]$ ve $(a - |b|, b + |a|)$ da

$|f(x)| \leq M$ ($M > 0$) olsun.

$L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatöre dizisi olsun.

$i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(t^i; x) = x^i$$

Yakınsaması $[a, b]$ da düzgün ise o halde her $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x)$$

yakınsaması $[a, b]$ da düzgündür (Korovkin, 1953).

İspat:

Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ olsun. $f[a, b]$ de düzgün sürekli ve sınırlıdır. Sürekli fonksiyonlarından tanımından her $\varepsilon > 0$ için $|t - x| \leq \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε ' a bağlı $\delta > 0$ reel sayısı vardır.

$|t - x| > \delta$ olduğunda ise f sınırlılığından ve üçgen eşitsizliğinden $M > 0$ olmak üzere;

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \quad (2.5)$$

Diğer taraftan $|t - x| > \delta$ ise $\frac{|t - x|}{\delta} > 1$ olacağından

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} > 1$$

(2.6)

sağlanır. (2.5) ve (2.6) dan

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \leq 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazılır. O halde

$$|t - x| \leq \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t - x| > \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| \leq 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, her $t \in R$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.7)$$

dir. Şimdi $i = 0, 1, 2$ koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

limitini sağladığı gösterilirse Teorem 2.2.1 den ispat tamamlanmış olur.

Lineerlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(f(x); x) - 1)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. 2.8'den ve f sınırlı olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M |L_n(1; x) - 1| \quad (2.8)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) = L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} \left[\begin{array}{l} L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) \\ + x^2 L_n(1; x) \end{array} \right] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} \left[\begin{array}{l} L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 + 2xL_n(t; x) \\ + x^2 L_n(1; x) - x^2 \end{array} \right] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} \left[\begin{array}{l} (L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) \\ + x^2(L_n(1; x) - 1) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bulduğumuz ifadenin (2.8) de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1; x) \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left[(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1) \right] \\
&\quad + M |(L_n(1; x) - 1)|
\end{aligned}$$

elde edilir. $i = 0, 1, 2$ koşulları son eşitsizlikte kullanılırsa

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

Korovkin Teoremi'ni sağlayan diğer operatör dizileri Bernstein polinomlarının bulunma yöntemleriyle elde edildiğinden Bernstein polinomları birçok yeni lineer pozitif operatörün tanımlanmasını sağlamıştır. Bunlardan biri de Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleridir.



3. BLEIMANN, BUTZER VE HAHN (BBH) OPERATÖRLERİ

3.1. BBH Operatörlerinin Tanımı

1980 yılında Bleimann, Butzer ve Hahn, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı ve reel değerli her hangi bir fonksiyon için

$$L_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \binom{n}{k} x^k, \quad x \geq 0 \quad (3.1)$$

şeklindeki lineer pozitif L_n operatörlerini tanımlamışlardır. Bu operatörlere Bleimann, Butzer ve Hahn (BBH) operatörleri denir. Bleimann, Butzer ve Hahn, $f \in C[0, \infty)$ için $n \rightarrow \infty$ iken $L_n(f; x)$ operatörlerin $f(x)$ 'e, yarı reel ekseninde noktasal yakınsadığını ve yarı reel eksenin her kompakt alt aralığında düzgün yakınsadığını ispat etmişlerdir.

BBH operatörleri yarı reel ekseninde tanımlı olduğundan, Hacısalıhoğlu ve Hacıyev tarafından ispatlanan teoremler uyarınca (Hacıyev ve Hacısalıhoğlu, 1995), bu operatörler için klasik Korovkin teoreminin geçerli olmadığı açıktır. Bu nedenle BBH operatörlerinin düzgün yakınsaklığı R^+ nın sürekli ve sınırlı bir alt uzayında farklı test fonksiyonları için elde edilmiştir (Gadjiev and Cakar, 1999).

3.2. BBH Operatör Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

BBH operatör dizisinin, $C_B[0, \infty)$ uzayının bazı alt sınıflarından olan fonksiyonlar için $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsadığı, Gadjiev ve Çakar tarafından ispatlanan Korovkin tipli teorem ile incelenecektir.

Gadjiev ve Çakar aşağıdaki koşulları sağlayan süreklilik modülü tipinde bir ω fonksiyonu tanımlamışlardır.

3.2.1. Tanım

- i. ω , R^+ da δ ya göre artan bir fonksiyonyani her $\delta_1 \leq \delta_2$ iken $\omega(\delta)_1 \leq \omega(\delta_2)$ dir.
- ii. $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$,
- iii. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

Bununla birlikte H_ω uzayının da tanımını verecek olursak;

3.2.2. Tanım (H_ω Uzayı)

ω , süreklilik modülü fonksiyonu olmak üzere

$$\forall x, y \in [0, \infty) \text{ için } |f(x) - f(y)| \leq \omega\left(\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right|\right)$$

şartını sağlayan f fonksiyonlarının sınıfını H_ω ile gösterelim. Tanım 3.2.1. den H_ω uzayındaki her fonksiyon $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve her $x \geq 0$ için

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \omega(1)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu durumda her $f \in H_\omega$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlıdır.

Böylece $H_\omega \subset C_B[0, \infty)$ gerçekleşir. Örnek olarak

$\omega(t) = Mt^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde seçilirse ve bu durumda H_ω uzayını H_α ile gösterirsek

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega\left(\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right|\right)$$

$$= M \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right|^\alpha$$

$$|f(x) - f(y)| \leq M \frac{|x-y|^\alpha}{(1+x)^\alpha (1+y)^\alpha}$$

elde edilir. Bu sonuç $H_\alpha \subset Lip_M(\alpha)$ olduğunu gösterir (Gadjiev and Cakar, 1999).

Buradan H_ω uzayının sınırlı ve sürekli fonksiyon uzayı ve Lipschitz sınıfı fonksiyon uzayının bir alt uzayı olduğu sonucuna ulaşılır.

Gadjiev ve Çakar' ın H_ω uzayında tanımlı lineer pozitif operatör dizileri için

$\left(\frac{t}{1+t}\right)^v$, ($v=0,1,2$ için) test fonksiyonları kullanarak ispatladıkları ve bu operatörlerin $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını elde ettikleri Korovkin tipli teoremi verelim.

3.2.1. Teorem

A_n , H_ω dan $C_B[0,\infty)$ na tanımlı bir lineer pozitif operatör dizisi olsun. Eğer

$v=0,1,2$ için $e_v(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^v$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(e_v) - e_v\|_{C_B} = 0 \quad (3.2)$$

koşulları sağlanırsa, her $f \in H_\omega$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C_B} = 0 \quad (3.3)$$

gerçeklenir (Gadjiev and Cakar, 1999).

İspat:

$f \in H_\omega$ olsun . Bu durumda (3.2) den her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| < \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (3.4)$$

dır. Çünkü

$$\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| < \delta$$

iken (3.2) eşitliği ve tanım (3.2.1) in (i) şikkından

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| \right) < \omega(\delta)$$

sağlanır ve tanım (3.2.1) in (iii) şikkından

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olur. Ayrıca f sınırlı olduğundan $|f| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

$$\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| \geq \delta \text{ ise } \left| \frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right| \geq \frac{\delta}{M} \text{ olur. Dolayısıyla}$$

$$\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| \geq \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2 \quad (3.5)$$

olur.

$$\left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2 \geq \delta^2$$

(3.6)

sağlanır. Ayrıca f sınırlı olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M \quad (3.7)$$

eşitsizliği vardır. (3.6) ve (3.7) den

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda her $t, x \in [0, \infty)$ için (3.4) ve (3.5) den

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2 \quad (3.8)$$

yazılabilir. Şimdi (3.2) şartlarından $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\|A_n(1) - 1\|_{C_B} < \varepsilon_n$$

$$\|A_n(e_1) - e_1\|_{C_B} < \varepsilon_n$$

$$\|A_n(e_2) - e_2\|_{C_B} < \varepsilon_n$$

(3.9)

yazabiliriz. Bu eşitsizlikleri kullanarak C , n den bağımsız bir sabit olmak üzere,

$$\left\| A_n \left(\left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2 ; x \right) \right\|_{C_B} < C \varepsilon_n$$

(3.10)

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\text{Gerçekten, } \left\| A_n \left(\left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2; x \right) \right\|_{C_B} = \sup_{x \geq 0} \left| A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; x \right) \right|$$

olarak yazılabilir. Lemma 2.1.3 den

$$\begin{aligned} \left| A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; x \right) \right| &\leq A_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|^2; x \right) \\ &= A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; x \right) - 2 \frac{x}{1+x} A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right); x \right) + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 A_n(1; x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

yazılabilir. (3.11) de $2 \left(\frac{x}{1+x} \right)^2$ ekleyip çıkarırsak, A_n lineer pozitif operatör olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; x \right) \right| &\leq A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; x \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \\ &\quad - 2 \frac{x}{1+x} \left(A_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right); x \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 (A_n(1; x) - 1) \end{aligned}$$

bulunur. (3.9) den (3.10) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C_B} = 0$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Lemma (2.1.2) ve Lemma (2.1.3) den

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C_B} &= \sup_{x \geq 0} |A_n(f(t) - f(x); x) + f(x)A_n(1; x) - f(x)| \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \left(|A_n(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |A_n(1; x) - 1| \right) \\
&\leq \|A_n(f(t) - f(x); x)\|_{C_B} + \|f\|_{C_B} \|A_n(1; x) - 1\|_{C_B} \\
&= I_n + I_m
\end{aligned}$$

bulunur. $\|f\|_{C_B} \leq M$ olduğundan ve (3.9) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_m = 0$$

sağlanır. (3.8) eşitsizliğini I_n de dikkate alırsak ve (3.10) i kullanırsak

$$\begin{aligned}
I_n &= \|A_n(f(t) - f(x); x)\|_{C_B} \\
&< \left\| A_n \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2; x \right) \right\|_{C_B} \\
&< \varepsilon \|A_n(1; x)\|_{C_B} + \frac{2M}{\delta^2} \left\| A_n \left(\left[\frac{t-x}{(1+t)(1+x)} \right]^2; x \right) \right\|_{C_B} \\
&< \varepsilon \|A_n(1; x) - 1 + 1\|_{C_B} + \frac{2M}{\delta^2} C\varepsilon_n \\
&= \varepsilon \|A_n(1) - 1\|_{C_B} + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} C\varepsilon_n \\
&< \varepsilon(1 + \varepsilon_n) + \frac{2M}{\delta^2} C\varepsilon_n
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

$H_\omega \subset C_B$ olduğundan L_n , $n \in N$ operatörleri C_B uzayından C_B uzayına tanımlı olup aynı zamanda H_ω uzayından C_B uzayına tanımlıdır. Buradan Bleimann, Butzer ve Hahn operatör dizisinin $[0, \infty)$ aralığında $f \in H_\omega$ olmak üzere $f(x)$ e düzgün yakınsaklığı sıradaki teoremle verebiliriz.

3.2.2. Teorem

(3.1) de tanımlanan L_n lineer pozitif operatörü her $f \in H_\omega$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C_B} = 0$$

özelliğini gerçekler (Gadjiev and Cakar, 1999).

İspat:

Önceki teorem kullanılarak (3.9) şartlarının L_n operatörü için sağlandığını

gösterelim. $e_v(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^v$ olmak üzere $v = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_v) - e_v\|_{C_B} = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. $(1+x)^n$ in Binom açılımından

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (3.12)$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$L_n(1; x) = 1 \quad (3.13)$$

olur. Buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1) - 1\|_{C_B} = 0$$

elde edilir ve $v = 0$ için 3.9 şartı sağlanmış olur.

$v = 1$ için sağlandığını gösterelim.

Her $x \in [0, \infty)$ için

$$\frac{x}{1+x} < 1 \quad (3.14)$$

dir. Öte yandan

$$\begin{aligned} L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{\frac{k}{n-k+1}}{1 + \frac{k}{n-k+1}} \binom{n}{k} x^k = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+1} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k \end{aligned} \quad (3.15)$$

bulunur. (3.15) de k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); x\right) &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{1+x}\right) \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{1+x}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\|L_n(e_1) - e_1\|_{C_B} &= \sup_{x \geq 0} \left| \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{1+x} \right) - \frac{x}{1+x} \right| \\ &= \sup_{x \geq 0} \left| \left(\frac{x}{1+x} \right) \left(-\frac{n}{n+1} \right) \right|\end{aligned}$$

bulunur. (3.14) den

$$\|L_n(e_1) - e_1\|_{C_B} \leq \frac{1}{n+1} \quad (3.17)$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_1) - e_1\|_{C_B} = 0$$

sağlanır.

Son olarak $v = 2$ için sağlandığını gösterelim. $k^2 = k(k-1) + k$ olduğunu dikkate alırsak

$$\begin{aligned}L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k \\ &\quad + \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+1)^2} \binom{n}{k} x^k \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k \\ &\quad + \frac{n}{(n+1)^2} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k\end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki birinci toplamda k yerine $k+2$, ikinci toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; x\right) &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} \\
&+ \frac{n}{(n+1)^2} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \frac{1}{(1+x)^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k \\
&+ \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right) \frac{1}{(1+x)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\|L_n(e_2) - e_2\|_{C_B} = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \right|$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$\left| \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \right| \leq \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \left| \frac{-(3n+1)}{(n+1)^2} \right| + \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)$$

bulunur. (3.14) den

$$\left| \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \right| \leq \frac{(3n+1)}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{(4n+1)}{(n+1)^2}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\|L_n(e_2) - e_2\|_{C_B} \leq \frac{4n-1}{(n+1)^2} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_2) - e_2\|_{C_B} = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3. BBH Operatörlerinin Monotonluk Özelliği

3.3.1. Tanım (Bölünmüş Farklar)

$f(x)$ sonlu $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0, x_1, x_2, \dots$ ler $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ olacak şekilde bu aralığın keyfi noktaları olsunlar

f fonksiyonunun keyfi bir $x_k; k = 0, 1, 2, \dots$ noktasındaki değerini $[x_k; f]$ ile gösterelim. $f(x_k) = [x_k; f]$ olsun. Buna f fonksiyonunun sıfırıncı bölünmüş farkı denir.

$$[x_0, x_1; f] = \frac{[x_0; f] - [x_1; f]}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

ifadesine f fonksiyonunun birinci bölünmüş farkı,

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2; f] &= \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2} \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

ifadesine f fonksiyonunun ikinci bölünmüş farkı,

bu şekilde devam edilirse,

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_0 - x_1}$$

İfadesine f fonksiyonunun n - yinci bölünmüş farkı denir.

Öte yandan ortalama değer teoremini göz önüne alırsak;

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \text{ olmak üzere}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \text{ dir.}$$

O halde $[x_0, x_1; f] = f'(\xi_1)$ dir. Yani birinci bölünmüş fark türevin yerini alır.

$$x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \text{ için}$$

$[x_1, x_2; f] = f'(\xi_2)$ olup bunlar ikinci bölünmüş fark ifadesinde kullanılır ve ortalama değer teoremi göz önüne alınırsa

$$x_0 \leq \xi_2 \leq x_2 \text{ olmak üzere}$$

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{x_0 - x_2} = \frac{f'(\xi_1) - f'(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\xi_1 - \xi_2}{x_0 - x_2} = f''(\xi) \frac{\xi_1 - \xi_2}{x_0 - x_2}$$

olur. Böylece ikinci bölünmüş fark ile ikinci türevin işaretlerinin aynı olduğu görülür.

Bir fonksiyonun birinci türevinin işareti o fonksiyonun artan ya da azalan olmasını, ikinci türevin işareti ise konkav ya da konveks olmasını belirler. Bu durumda türevi zor hesaplanan fonksiyonların konveks, konkav ya da doğrusal olup olmadıkları hakkında bilgi sahibi olmak için bölünmüş farklardan faydalanabiliriz (Demirtürk, 2005).

O halde bölünmüş farklar yardımıyla yapılan konveksliğin tanımını verecek olursak;

3.3.2. Tanım

$f, [0, \infty)$ da tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere f nin $[0, \infty)$ daki ayırık üç noktadaki $(x_0 < x_1 < x_2)$ 2. bölünmüş farkı negatif olmayan ise f konveks(konkav olmayan) fonksiyondur.

3.3.3. Tanım

$f, [0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ negatif olmayan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sayıları için $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ olmak üzere

$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ şartı sağlanıyorsa f ye $[0, \infty)$ da konvektir denir (Hacıyev ve Hacısalıhoğlu, 1995).

3.3.1. Teorem

$\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ ve $\Delta^2 \lambda_n = \Delta \lambda_n - \Delta \lambda_{n+1}$ olmak üzere, $\{\lambda_n\}$ konveks ve sınırlı ise $\{\lambda_n\}$ artmayandır. $n \Delta \lambda_n \rightarrow 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Delta^2 \lambda_n$ serisinin toplamı $\lambda_0 - \lim \lambda_n$ dir (Zygmund, 1959).

3.3.2. Teorem

Eğer $f, [0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ve ayrıca

$$f(n) \leq sbt, \quad n \in N \quad (3.20)$$

ise her $x \geq 0$ ve her $n \in N$ için

$$L_n(f; x) \geq L_{n+1}(f; x)$$

sağlanır. (DellaVecchia 1991).

İspat:

3.1. den

$$L_{n+1}(f; x) = \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \binom{n+1}{k} x^k \quad (3.21)$$

yazılabilir. Bu operatörün $n+1$. terimi çıkarılırsa

$$L_{n+1}(f; x) = \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} f(n+1) + \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \binom{n+1}{k} x^k$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} L_{n+1}(f; x) - L_n(f; x) &= \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} f(n+1) \\ &+ \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \binom{n+1}{n+1-k} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k \\ &- \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \binom{n}{k} x^k (1+x) \\ &= \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} f(n+1) \\ &+ \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) x^k \left\{ \binom{n+1}{n+1-k} f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \right. \\ &\quad \left. - (1+x) f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \right\} \\ &= \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} f(n+1) \\ &+ \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \left(\frac{n+1}{n+1-k} \right) f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \\
& -\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \binom{n}{k} x^k
\end{aligned} \tag{3.22}$$

yazılabilir. (3.22) ifadesindeki son toplamda n . terim çıkartılıp k yerine $k-1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} f(n) \\
& + \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k f\left(\frac{k-1}{n-k+2}\right) \\
& = \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} f(n) \\
& + \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \left(\frac{k}{n+1-k}\right) f\left(\frac{k-1}{n-k+2}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23) ün (3.22) ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(f; x) - L_n(f; x) &= \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \left[\left(\frac{n+1}{n+1-k}\right) f\left(\frac{k}{n-k+2}\right) \right. \\
& \left. - f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) - \frac{k}{n+1-k} f\left(\frac{k-1}{n-k+2}\right) \right] \\
& + \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} [f(n+1) - f(n)]
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemelerle yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(f; x) - L_n(f; x) &= \frac{n+1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{k}{(n+1-k)^2 (n+2-k)^2} \binom{n}{k} x^k \\
& \times \left[\frac{f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)}{\left(\frac{k}{n+1-k} - \frac{k}{n+2-k}\right) \left(\frac{k}{n+1-k} - \frac{k-1}{n-k+2}\right)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f\left(\frac{k}{n-k+2}\right)}{\left(\frac{k}{n+2-k} - \frac{k}{n+1-k}\right)\left(\frac{k}{n+2-k} - \frac{k-1}{n-k+2}\right)} \\
& + \frac{f\left(\frac{k-1}{n-k+2}\right)}{\left(\frac{k-1}{n-k+2} - \frac{k}{n-k+1}\right)\left(\frac{k-1}{n-k+2} - \frac{k}{n+2-k}\right)} \Bigg] \\
& + \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} [f(n+1) - f(n)] \\
& = - \frac{n+1}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{k}{(n+1-k)^2 (n+2-k)^2} \binom{n}{k} x^k \\
& \times \left[\frac{k-1}{n-k+2}, \frac{k}{n-k+2}, \frac{k}{n-k+1}; f \right] \\
& + \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} [f(n+1) - f(n)]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

biçimine indirgenir. Teorem (3.3.1) den ispat tamamlanır.



4. YAKLAŞIMLAR TEORİSİNDE q -ANALİZ

Lupaş, Phillips polinomlarına göre daha az bilinmekle birlikte, ilk kez Bernstein polinomlarının q tipli genelleşmesini yaparak, q analiz yaklaşım teorisine ilk olarak uygulanmasını sağlamıştır (Lupaş, 1987). Bu operatörün yaklaşım özelliklerini araştırmış, özellikle $f \in C[0,1]$ için herhangi bir f fonksiyonuna yaklaşık olması için bazı yeterli sonuçlar elde etmiş ve süreklilik modülü ile yakınsama oranını tahmin etmiş ayrıca konveks fonksiyonlar için bu operatörün davranışını da araştırmıştır. Daha sonra Ostrovska, bu operatörlerin yakınsama özellikleriyle ilgili sonuçlar sunmuş ve özellikle bu operatör için $[0,1]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsar ancak ve ancak $q_n \rightarrow 1$ olduğunu ve herhangi bir $q > 0$, $q \neq 1$ sabit olmak üzere $f(x)$ 'e düzgün yakınsar ancak ve ancak $f(x) = ax + b$ $a, b \in R$ olduğunu kanıtlamıştır (Ostrovska, 2006).

Öte yandan bu polinomlar tüm $q > 0$ için pozitif lineer operatör üretme avantajına sahipken Phillips polinomları sadece $q \in (0,1)$ için pozitif lineer operatör üretir.

Phillips, 1997' de Bernstein polinomlarının farklı bir q tipli genelleşmesini tanımlamış, bu genelleşme q -Bernstein polinomları olarak literatüre girmiştir (Phillips, 1997).

Phillips'in bu operatörlerin düzgün yakınsaklığını incelediği teorem;

4.1. Teorem

$0 < q_n \leq 1$ ve $q_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) olmak üzere $q = (q_n)$ dizisi alalım. $\forall f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f; q, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \quad (4.1)$$

operatörü $[0,1]$ de $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar (Phillips, 1997).

Philips, q tabanlı bu yeni Bernstein operatörleri için Voronovskaya tipi asimptotik formül elde etmiş ve yakınsaklık hızını süreklilik modülü ile değerlendirip daha iyi sonuçlar bulmuştur.

Şimdi q -BBH operatörlerini tanıtmadan önce q tamsayıları ile ilgili bazı tanımları verelim;

$q > 0$ herhangi bir reel sayı ve k , negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, k sayısının

q genelleşmesi;

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{1-q^k}{1-q}, & q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Ayrıca $[0] = 0$ dır.

q -faktöriyel;

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q [k-1]_q \dots [1]_q, & k = 1, 2, \dots \\ 1, & k = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ayrıca $[0]! = 1$ dir.

q -binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} \quad (n \geq k \geq 0) \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır (Andrews, Askey and Roy, 1999).

Aşağıdaki Euler özdeşliğini göz önüne alırsak

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) = \sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \quad (4.5)$$

Burada $q = 1$ için q - binom katsayıları sıradan binom katsayılarına indirgendiği görülebilir.

Operatörlerin q tipli genelleşmeleri yapılırken $q = 1$ seçimiyle operatörün klasik operatörlere dönüşmesi sağlanır. q genelleşmesi elde etmekteki diğer amaç q nun seçimiyle daha iyi bir yaklaşım hızı elde etmektir.

4.1. q -BBH Operatörleri

Aral ve Doğru, BBH operatörlerinin q -genelleşmesini (q -BBH)

$x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli f fonksiyonları için

$$L_n(f; q, x) = \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlamışlardır (Doğru and Aral, 2007).

Burada $0 < q \leq 1$ ve

$$\ell_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^{n-1} (1 + q^s x) \quad (4.7)$$

olarak tanımlanmıştır.

$q = 1$ seçimiyle q -binom katsayılarının sıradan binom katsayılarına indirgeneceği ve klasik BBH operatörünün elde edileceği açıktır.

Ayrıca basit bir hesaplamayla

$$q^k [n-k+1]_q = [n+1]_q - [k]_q, \quad q[k-1]_q = [k]_q - 1 \quad (4.8)$$

Aynı çalışmada operatörün, reel sayıların kapalı ve sınırlı aralıkları üzerinde sürekli olan fonksiyon uzayı H_ω da düzgün yakınsadığını göstermek üzere aşağıdaki özellikler bulunmuştur;

$$\begin{aligned} L_n(1; q, x) &= 1 \\ L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q, x\right) &= \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \frac{x}{1+x}, \\ L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right) &= \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} q^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} + \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \frac{x}{1+x}, \\ L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^3; q, x\right) &= q^6 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^3} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\ &\quad + (q^3 + 2q^2) \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\ &\quad + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^3} \frac{x}{(1+x)}, \\ L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q, x\right) &= q^{12} \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^4}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)} \\ &\quad + (q^8 + 2q^7 + 3q^6) \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\ &\quad + (q^4 + 3q^3 + 3q^2) \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\ &\quad + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x}{(1+x)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.5), (4.6) ve (4.8) den

$$\begin{aligned}
L_n(1; q, x) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{\sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k}{\sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k} = 1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q, x\right) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^n \frac{\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{\begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q} \frac{\begin{bmatrix} n-1 \end{bmatrix}_q!}{\begin{bmatrix} n-k \end{bmatrix}_q! \begin{bmatrix} k-1 \end{bmatrix}_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \\
&= \frac{\begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^k
\end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) da k yerine $k+1$ yazılır ve (4.5) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q, x\right) &= \frac{\begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^{k+1} \\
&= \frac{x}{\ell_{n,q}(x)} \frac{\begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} (qx)^k \\
&= x \frac{\begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q} \frac{\prod_{k=0}^{n-2} (1+q^k(qx))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&= \frac{x}{1+x} \frac{\begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+1 \end{bmatrix}_q}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir.

(4.9) daki $L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right)$ eşitliğini göstermeden önce burada kullanacağımız $[k]_q^2$ eşitini verelim;

$$\begin{aligned}
[k]_q^2 &= \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)^2 = \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^k}{1-q}\right) \\
&= \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^k - q + q}{1-q}\right) \\
&= \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)\left(\frac{q-q^k}{1-q} + \frac{1-q}{1-q}\right) \\
&= \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)\left(\frac{q-q^k}{1-q} + 1\right) \\
&= \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)\left[q\left(\frac{1-q^{k-1}}{1-q}\right) + 1\right] \\
&= q\left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^{k-1}}{1-q}\right) + \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right) \\
&= q[k]_q[k-1]_q + [k]_q
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right) = \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q^2}{[n+1]_q^2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

burada (4.13) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q^2}{[n+1]_q^2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{q[k]_q[k-1]_q}{[n+1]_q^2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n+1]_q^2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{q[k]_q[k-1]_q}{[n+1]_q^2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n+1]_q^2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
& = \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix} x^k \\
& + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) eşitliğinin sağ tarafında ilk toplamda k yerine $k+2$, ikinci toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; q, x \right) & = q^2 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2 x)^k \\
& + x \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (qx)^k \\
& = q^2 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} \frac{\prod_{k=0}^{n-3} (1 + q^k (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n-2} (1 + q^s x)} \\
& + x \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \frac{\prod_{k=0}^{n-2} (1 + q^k (qx))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1 + q^s x)} \\
& = \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} q^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \left(\frac{x}{1+x} \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir.

$L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3; q, x \right)$ eşitliğini göstermeden önce burada kullanacağımız $[k]_q^3$ eşitini verelim;

$[k]_q^2 = q[k]_q [k-1]_q + [k]_q$ eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
[k]_q^3 &= [k]_q (q[k]_q [k-1]_q + [k]_q) \\
&= q[k]_q^2 [k-1]_q + [k]_q^2 \\
&= q(q[k]_q [k-1]_q + [k]_q) [k-1]_q + (q[k]_q [k-1]_q + [k]_q) \\
&= q^2 [k]_q [k-1]_q^2 + q[k]_q [k-1]_q + q[k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
&= q^2 [k]_q (q[k-1]_q [k-2]_q + [k-1]_q) + 2q[k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
&= q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + q^2 [k]_q [k-1]_q + 2q[k]_q [k-1]_q + [k]_q
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3; q, x \right) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q^3}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{q^2 [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{2q [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3; q, x \right) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{q^2 [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{2q [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n+1]_q^3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^3; q, x\right) &= \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n q^3 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k-3 \end{bmatrix} x^k \\
&+ \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n q^2 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix} x^k \\
&+ \frac{2[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix} x^k \\
&+ \frac{[n]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k
\end{aligned}$$

Son eşitlikteki ilk toplamda k yerine $k+3$, ikinci ve üçüncü toplamda k yerine $k+2$ ve dördüncü toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^3; q, x\right) &= q^6 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k \end{bmatrix} (q^3 x)^k \\
&+ q^3 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2 x)^k \\
&+ 2q^2 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2 x)^k \\
&+ x \frac{[n]_q}{[n+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (qx)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3 ; q, x \right) &= q^6 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^3} \frac{\prod_{k=0}^{n-4} (1+q^k (q^3 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + q^3 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{\prod_{k=0}^{n-3} (1+q^k (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + 2q^2 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{\prod_{k=0}^{n-3} (1+q^k (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + x \frac{[n]_q}{[n+1]_q^3} \frac{\prod_{k=0}^{n-2} (1+q^k (qx))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3 ; q, x \right) &= q^6 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^3} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2 x)} \\
&\quad + (q^3 + 2q^2) \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^3} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\
&\quad + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^3} \frac{x}{(1+x)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^4 ; q, x \right)$ eşitliğini göstermeden önce burada kullanacağımız $[k]_q^4$ eşitini verelim;

Daha önce elde ettiğimiz

$$[k]_q^2 = q[k]_q [k-1]_q + [k]_q \text{ ve}$$

$$[k]_q^3 = q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + q^2 [k]_q [k-1]_q + 2q [k]_q [k-1]_q + [k]_q$$

eşitliklerini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
[k]_q^4 &= [k]_q \left(q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + q^2 [k]_q [k-1]_q + 2q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \right) \\
&= q^3 [k]_q^2 [k-1]_q [k-2]_q + q^2 [k]_q^2 [k-1]_q + 2q [k]_q^2 [k-1]_q + [k]_q^2 \\
&= q^3 [k-1]_q [k-2]_q \left(q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \right) + q^2 [k-1]_q \left(q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \right) \\
&\quad + 2q [k-1]_q \left(q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \right) + q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
&= q^4 [k]_q [k-1]_q^2 [k-2]_q + q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + q^3 [k]_q [k-1]_q^2 + q^2 [k]_q [k-1]_q \\
&\quad + 2q^2 [k]_q [k-1]_q^2 + 2q [k]_q [k-1]_q + q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
&= q^4 [k]_q [k-2]_q \left(q [k-1]_q [k-2]_q + [k-1]_q \right) + q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q \\
&\quad + q^3 [k]_q \left(q [k-1]_q [k-2]_q + [k-1]_q \right) + q^2 [k]_q [k-1]_q \\
&\quad + 2q^2 [k]_q \left(q [k-1]_q [k-2]_q + [k-1]_q \right) + 3q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
&= q^5 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q^2 + 2q^4 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + 3q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q \\
&\quad + q^3 [k]_q [k-1]_q + 3q^2 [k]_q [k-1]_q + 3q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
&= q^5 [k]_q [k-1]_q \left(q [k-2]_q [k-3]_q + [k-2]_q \right) + 2q^4 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + 3q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q \\
&\quad + q^3 [k]_q [k-1]_q + 3q^2 [k]_q [k-1]_q + 3q [k]_q [k-1]_q + [k]_q \\
\\
[k]_q^4 &= q^6 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q [k-3]_q + q^5 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + 2q^4 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q \\
&\quad + 3q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q + q^3 [k]_q [k-1]_q + 3q^2 [k]_q [k-1]_q + 3q [k]_q [k-1]_q + [k]_q
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q, x\right) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q^4}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=4}^n \frac{q^6 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q [k-3]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{q^5 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{2q^4 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{3q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{q^3 [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{3q^2 [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{3q [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q, x\right) &= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q^4}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=4}^n \frac{q^6 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q [k-3]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{q^5 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{2q^4 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n \frac{3q^3 [k]_q [k-1]_q [k-2]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{q^3 [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{3q^2 [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n \frac{3q [k]_q [k-1]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n \frac{[k]_q}{[n+1]_q^4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!} x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q, x\right) &= \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=4}^n q^6 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-4 \\ k-4 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n q^5 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k-3 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{2[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n q^4 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k-3 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{3[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=3}^n q^3 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k-3 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n q^3 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{3[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n q^2 q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{3[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=2}^n q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix} x^k \\
&\quad + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=1}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k
\end{aligned}$$

Son eşitlikte birinci toplamda k yerine $k+4$, ikinci, üçüncü ve dördüncü toplamda k yerine $k+3$, beşinci, altıncı ve yedinci toplamda k yerine $k+2$ ve sekizinci toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^4 ; q, x \right) &= q^{12} x^4 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-4} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-4 \\ k \end{bmatrix} (q^4 x)^k \\
&+ q^8 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k \end{bmatrix} (q^3 x)^k \\
&+ 2q^7 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k \end{bmatrix} (q^3 x)^k \\
&+ 3q^6 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-3} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-3 \\ k \end{bmatrix} (q^3 x)^k \\
&+ q^4 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2 x)^k \\
&+ 3q^3 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2 x)^k \\
&+ 3q^2 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-2} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2 x)^k \\
&+ x \frac{[n]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (qx)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q, x\right) &= q^{12}x^4 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-5} (1+q^k (q^4 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + q^8 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-4} (1+q^k (q^3 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + 2q^7 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-4} (1+q^k (q^3 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + 3q^6 x^3 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-4} (1+q^k (q^3 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + q^4 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-3} (1+q^k (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + 3q^3 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-3} (1+q^k (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + 3q^2 x^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-3} (1+q^k (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \\
&\quad + x \frac{[n]_q}{[n+1]_q^4} \frac{\prod_{k=0}^{n-2} (1+q^k (qx))}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^4; q, x \right) &= q^{12} \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^4}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)} \\
&+ q^8 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\
&+ 2q^7 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\
&+ 3q^6 \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\
&+ q^4 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\
&+ 3q^3 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\
&+ 3q^2 \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\
&+ \frac{[n]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x}{(1+x)} \\
L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^4; q, x \right) &= q^{12} \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^4}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)} \\
&+ (q^8 + 2q^7 + 3q^6) \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\
&+ (q^4 + 3q^3 + 3q^2) \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} \\
&+ \frac{[n]_q}{[n+1]_q^4} \frac{x}{(1+x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $q = 1$ seçilirse L_n operatörleri klasik BBH operatörelere dönüşür.

4.2. q -BBH Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı

Aral ve Doğru, (L_n) operatör dizisinin $C_B[0, \infty)$ uzayının bir alt uzayındaki fonksiyonlar için $[0, \infty)$ da düzgün yakınsadığını göstermek amacıyla Tanım (3.2.2) ile verilen H_ω uzayını kullanmışlardır (Doğru and Aral, 2007). ω süreklilik modülü tipli bi fonksiyon olmak üzere H_ω , $\forall x, y \in [0, \infty)$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega\left(\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right|\right) \quad (4.16)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonları sınıfını gösterebilir. Bu durumda $H_\omega \subset C_B[0, \infty)$ dur.

Tanım 3.2.1 in (ii) koşulundan $n \in N$ için

$$\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta) \quad (4.17)$$

sağlanır.

Tanım 3.2.1 in (i) koşulundan ve (4.15) den, $\lambda > 0$ için ve $[\lambda]$, λ nın tam kısmı olmak üzere

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega(1 + [\lambda]\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(\delta) \quad (4.18)$$

bulunur.

4.2.1. Teorem

$q = q_n$, ve $n \in N$ için $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ ve $0 < q_n < 1$ olsun. Her $f \in H_\omega$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{C_B} = 0 \quad (4.19)$$

gerçeklenir (Doğru and Aral, 2007).

İspat:

Teorem 3.2.1'i kullanarak aşağıdaki üç şartın sağlandığını göstermek ispat için yeterli olacaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^v; q, x \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right)^v \right\|_{C_B} = 0 \quad , \quad v = 0, 1, 2 \quad (4.20)$$

(4.10) dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; q, x) - 1\|_{C_B} = 0$$

olduğu açıktır. 4.20'nin ilk şartı $v = 0$ için yerine getirilmiştir.

$v = 1$ için ve her $x \in [0, \infty)$ için $\frac{x}{1+x} < 1$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \left\| L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right); q, x \right) - \frac{x}{1+x} \right\|_{C_B} &= \sup_{x \geq 0} \left| \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \left(\frac{x}{1+x} \right) - \frac{x}{1+x} \right| \\ &= \sup_{x \geq 0} \left| \left(\frac{[n]_q}{[n+1]_q} - 1 \right) \frac{x}{1+x} \right| \\ &= \left| \frac{[n]_q}{[n+1]_q} - 1 \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_n [n+1]_q} - 1 \right| \end{aligned} \quad (4.21)$$

ve $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ ve $[n+1]_q \rightarrow \infty$ olduğundan $v = 1$ için (4.20) un ikinci şartının da sağlandığı görülür.

Son olarak $v = 2$ için sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim.

Öncelikle

$$\sup_{x \geq 0} \left\{ \frac{1+x}{1+qx} \right\} = \frac{1}{q} \quad (4.22)$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} = \frac{1}{q^n} \left[1 - \frac{2+q_n}{[n+1]_q} + \frac{1+q_n}{[n+1]_q^2} \right] \quad (4.23)$$

eşitliği basit bir hesaplamayla görülebilir. (4.8) den

$$[n]_q = q[n-1]_q + 1$$

(4.24)

$$[n+1]_q = q[n]_q + 1$$

(4.25)

(4.24)ve (4.25) den

$$[n-1]_q = \frac{[n]_q - 1}{q}$$

olup (4.25) den

$$[n-1]_q = \frac{[n+1]_q - 1 - q}{q^2}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafı $\frac{[n]_q}{[n+1]_q^2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} = \frac{[n]_q ([n+1]_q - 1 - q)}{q^2 [n+1]_q^2} \\
& = \frac{\left(\frac{[n+1]_q - 1}{q} \right) \left(\frac{[n+1]_q - 1 - q}{q^2} \right)}{[n+1]_q^2} \\
& = \frac{1}{q_n^3} \left(\frac{[n+1]_q^2 - 2[n+1]_q - q[n+1]_q + 1 + q}{[n+1]_q^2} \right) \\
& = \frac{1}{q_n^3} \left[1 - \frac{2 + q_n}{[n+1]_q} + \frac{1 + q_n}{[n+1]_q^2} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Her $x \in [0, \infty)$ için $\frac{x}{1+x} < 1$ olduğu dikkate alınarak (4.22) dan

$$\begin{aligned}
& \left\| L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; q, x \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right\|_{C_B} = \\
& \sup_{x \geq 0} \left| \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} q_n^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+qx)} + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \left(\frac{x}{1+x} \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right| \\
& = \sup_{x \geq 0} \left| \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \left(\frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} q_n^2 \frac{(1+x)}{(1+q_n x)} - 1 \right) + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \left(\frac{x}{1+x} \right) \right| \\
& = \left| \left(\frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} q_n^2 \frac{1}{q_n} - 1 \right) \right| + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

(4.23) ve (4.25), (4.26) da kullanılırsa

$$\left\| L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; q, x \right) - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right\|_{C_B} \leq \frac{1}{q_n^2} \left(1 - q_n^2 - \frac{2}{[n+1]_q} + \frac{1}{[n+1]_q^2} \right) \tag{4.27}$$

eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ ve $[n+1]_q \rightarrow \infty$ olduğundan $v=2$ için (4.20) un üçüncü şartının da sağlandığı görülür. İspat tamamlanır (Doğru and Aral, 2007).

4.3. Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı.

Bu bölümde süreklilik modülü kullanılarak q -BBH operatörlerinin yaklaşım hızı incelenecektir.

4.3.1. Teorem

$q = q_n$, ve $n \in \mathbb{N}$ için $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ ve $0 < q_n < 1$ olsun. Seçilmiş bir $x \geq 0$ ve herhangi bir $f \in H_\omega$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq 2\omega(\sqrt{\mu_n(x)}) \quad (4.28)$$

Burada $\mu_n(x)$

$$\mu_n(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \left(1 - 2\frac{[n]_q}{[n+1]_q} + \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} q_n^2 \frac{1+x}{1+q_n x}\right) + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \left(\frac{x}{1+x}\right) \quad (4.29)$$

dir (Doğru and Aral, 2007) .

İspat:

$$L_n(1; q, x) = 1$$

Olduğundan

$$f(x) = L_n(f(x); q, x)$$

yazabiliriz. Buradan ve Lemma 2.1.3 den

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; q, x) \quad (4.30)$$

elde edilir. Öte yandan (4.16) ve (4.18) den ve $\lambda = \frac{1}{\delta} \left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|$ seçimiyle;

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right| \right) \leq \left(1 + \frac{\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|}{\delta} \right) \omega(\delta) \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) göz önüne alınarak (4.30)

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq \omega(\delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} L_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|; q, x \right) \right) \quad (4.32)$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre

$$L_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|; q, x \right) \leq \left[L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q, x \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

(4.33) (4.32) de kullanılırsa

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq \omega(\delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \left[L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q, x \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

(4.34)

elde edilir. (4.34) de (4.8), (4.10) ve (4.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2; q, x\right) &= L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right) - 2\frac{x}{1+x}L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q, x\right) \\
&\quad + L_n\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^2; q, x\right) \\
&= \frac{[n]_q[n-1]_q}{[n+1]_q^2}q^2\frac{x^2}{(1+x)(1+qx)}\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2} \\
&\quad + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2}\left(\frac{x}{1+x}\right) - 2\frac{x}{1+x}\left(\frac{[n]_q}{[n+1]_q}\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left(1 - 2\frac{[n]_q}{[n+1]_q} + \frac{[n]_q[n-1]_q}{[n+1]_q^2}q_n^2\frac{1+x}{1+q_nx}\right) + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mu_n(x)$ (4.29) ile verilen fonksiyon olduğundan

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2; q, x\right) = \mu_n(x)$$

yazılabilir.

$\delta = \sqrt{\mu_n(x)}$ alınırsa (4.32) (4.33) ve (4.34) den

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq 2\omega\left(\sqrt{\mu_n(x)}\right)$$

elde edilir. $\frac{x}{1+x} < 1$ ve $\frac{q_n + q_n x}{1 + q_n x} < 1$ olduğu kullanılarak

$$\sqrt{\mu_n(x)} \leq \sqrt{1 - 2\frac{[n]_q}{[n+1]_q} + \frac{[n]_q[n-1]_q}{[n+1]_q^2}q_n + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2}}$$

yazılabilir. Buradan $n \rightarrow \infty$ için L_n operatör dizisinin yaklaşım hızı $\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}$ olarak bulunur.

4.4. Lipschitz Tipli Maksimal Fonksiyonlar Uzayında Yaklaşım Hızı

Şimdi $\tilde{W}_{\alpha,E}$ ile gösterilen Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar uzayı tanımlanacak ve bu uzaydaki fonksiyonlar için (L_n) operatör dizisinin yaklaşım hızı hesaplanacaktır.

$E \subset [0, \infty)$ üzerinde $\tilde{W}_{\alpha,E}$ ile gösterilen Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar uzayı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\tilde{W}_{\alpha,E} = \left\{ f : \sup (1+x)^\alpha f_\alpha(x, y) \leq M \frac{1}{(1+y)^\alpha}, \quad x \geq 0, y \in E \right\} \quad (4.35)$$

Burada $f, [0, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon ve M bir pozitif sabit, $0 < \alpha \leq 1$ ve f_α ;

$$f_\alpha(x, y) = \frac{|f(t) - f(x)|}{|x - t|^\alpha} \quad (4.36)$$

şeklinde tanımlıdır. x ve E arasındaki uzaklık $d(x, E)$ olsun;

$$d(x, E) = \inf \{|x - y|; y \in E\} \quad (4.37)$$

(Doğru and Aral, 2007)

4.4.1. Teorem

(4.6) da tanımlı L_n operatörleri ve $\mu_n(x)$ (4.29) da tanımlı fonksiyon olmak üzere her $f \in \tilde{W}_{\alpha,E}$ için

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq M \left(\mu_n^{\alpha/2}(x) + 2d(x, E)^\alpha \right) \quad (4.38)$$

eşitsizliğini gerçekler (Doğru and Aral, 2007).

İspat:

$\bar{E}$, E kümesinin kapanışını belirtsin. Bu durumda $x \in [0, \infty)$ için $|x - x_0| = d(x, E)$ olacak şekilde bir $x_0 \in \bar{E}$ vardır. Şimdi aşağıdaki şekilde bir eşitsizliği yazalım;

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| \quad (4.39)$$

L_n , lineer ve pozitif bir operatör ve $f \in \tilde{W}_{\alpha, E}$ olduğundan (4.39) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |L_n(f; q, x) - f(x)| &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; q, x) \\ &\leq L_n(|f(t) - f(x_0)|; q, x) + L_n(|f(x_0) - f(x)|; q, x) \\ &= L_n(|f(t) - f(x_0)|; q, x) + |f(x_0) - f(x)| \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde ederiz.

$f \in \tilde{W}_{\alpha, E}$ olduğu göz önüne alınarak (4.35) ve (4.36) den

$$\begin{aligned} (1+x_0)^\alpha \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|x_0 - t|^\alpha} &\leq M \frac{1}{(1+t)^\alpha} \\ |f(t) - f(x_0)| &\leq M \frac{|x_0 - t|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+t)^\alpha} \\ &= M \left| \frac{t}{1+t} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^\alpha \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|f(x_0) - f(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+x)^\alpha} \quad (4.42)$$

de vardır. (4.41) ve (4.42) in (4.40) da kullanılmasıyla

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq ML_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^\alpha; q, x \right) + M \frac{|x - x_0|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+x)^\alpha} \quad (4.43)$$

elde edilir. $\alpha \geq 0$ ve $b \geq 0$ için $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ eşitsizliğini kullanırsak;

$t \in [0, \infty)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^\alpha \leq \left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|^\alpha + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^\alpha \quad (4.44)$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$L_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^\alpha; q, x \right) \leq L_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|^\alpha; q, x \right) + \frac{|x - x_0|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+x)^\alpha}$$

elde ederiz.

$$L_n(1; q, x) = 1$$

olduğundan son eşitsizliğe $p = 2/\alpha$ ve $q = 2/(2-\alpha)$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$L_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|^\alpha; q, x \right) \leq L_n \left(\left| \frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right|^2; q, x \right)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{|x - x_0|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+x)^\alpha}$$

elde edilir. Son ifade (4.43) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f; q, x) - f(x)| &\leq ML_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q, x \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad + M \frac{|x - x_0|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+x)^\alpha} + M \frac{|x - x_0|^\alpha}{(1+x_0)^\alpha (1+x)^\alpha}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.29) ve (4.37) den (4.45)

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq M \left(\mu_n^{\alpha/2}(x) + 2d(x, E)^\alpha \right)$$

olarak yazılabilir ve ispat tamamlanır (Doğru and Aral, 2007).

$E = [0, \infty)$ olduğunda Teorem 4.4.1 in özel bir durumu olarak aşağıdaki sonuç gerçekleşir;

4.4.1. Sonuç

$f \in \tilde{W}_{\alpha, E}$ ise ve $\mu_n(x)$, (4.29) ile verilen fonksiyon olmak üzere

$$|L_n(f; q, x) - f(x)| \leq M \mu_n^{\alpha/2}(x)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Doğru and Aral, 2007).

4.5. q -BBH Operatörlerinin Monotonluk Özelliği

4.5.1. Lemma

q -binom katsayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q [n]_q}{[n-k]_q [k+1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q}{[k+1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

İspat: q -binom katsayılarının tanımından ispat kolaylıkla elde edilebilir.

4.5.2. Lemma

$$\lambda_1 = \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q}, \quad \lambda_2 = \frac{[n-k]_q}{[n+1]_q}, \quad \alpha_1 = \frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}, \quad \alpha_2 = \frac{[k+1]_q}{[n-k]_q q^{k+1}}$$

olmak üzere ($\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$) ve

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{4.47}$$

dir. Ayrıca

$$\frac{[k+1]_q}{[n-k+1]_q q^{k+1}} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \tag{4.48}$$

gerçeklenir (Doğru and Gupta, 2005).

İspat:

q - tam sayıları tanımından

$$[k+1]_q = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \text{ ve } [n-k]_q = \frac{1-q^{n-k}}{1-q} \tag{4.49}$$

elde ederiz.

$$\lambda_1 = \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{[n-k]_q}{[n+1]_q} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{q^{n-k} [k+1]_q + [n-k]_q}{[n+1]_q} \\
&= \frac{q^{n-k} \left(\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right) + \frac{1-q^{n-k}}{1-q}}{[n+1]_q} \\
&= \frac{\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)}{[n+1]_q} \\
&= \frac{[n+1]_q}{[n+1]_q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde ederiz. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 &= \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q} \frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k} + \frac{[n-k]_q}{[n+1]_q} \frac{[k+1]_q}{[n-k]_q q^{k+1}} \\
&= \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q} \frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k} + \frac{[k+1]_q}{[n+1]_q q^{k+1}} \\
&= \frac{[k+1]_q}{[n+1]_q q^{k+1}} \left(\frac{q^{n-k+1} [k]_q}{[n-k+1]_q} + 1 \right) \\
&= \frac{[k+1]_q}{[n+1]_q q^{k+1}} \left(\frac{q^{n-k+1} [k]_q + [n-k+1]_q}{[n-k+1]_q} \right) \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Ayrıca q -tamsayıları tanımından

$$\begin{aligned}
q^{n-k+1} [k]_q + [n-k+1]_q &= q^{n-k+1} \left(\frac{1-q^k}{1-q} \right) + \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= [n+1]_q \tag{4.51}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.51) nin (4.50) te kullanılmasıyla (4.48) elde edilir ve ispat tamamlanır (Doğru and Gupta, 2005).

4.5.1. Teorem

Eğer f , $[0, \infty)$ da konveks ve azalan fonksiyon ise her $x > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(f; q, x)$ azalandır.

$$L_n(f; q, x) \geq L_{n+1}(f; q, x)$$

sağlanır (Doğru and Gupta, 2005).

İspat:

$$\begin{aligned} L_{n+1}(f; q, x) - L_n(f; q, x) &= \frac{1}{\ell_{n+1,q}(x)} \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+2]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad - \frac{1}{\ell_{n,q}(x)} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \end{aligned} \quad (4.52)$$

(4.52) ifadesinde eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplam $1 + q^n x$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned} L_{n+1}(f; q, x) - L_n(f; q, x) &= \frac{1}{\ell_{n+1,q}(x)} \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+2]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad - \frac{1}{\ell_{n+1,q}(x)} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad - \frac{1}{\ell_{n+1,q}(x)} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

bulunur. (4.53) de eşitliğin sağ tarafında birinci ve üçüncü toplamın son terimleri ile birinci ve ikinci toplamın $k = 0$. Terimleri çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(f; q, x) - L_n(f; q, x) &= \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} \left[f\left(\frac{[n+1]_q}{q^{n+1}}\right) - f\left(\frac{[n]_q}{q^n}\right) \right] \\
&+ \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+2]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&- \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&- \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1}
\end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafındaki birinci ve ikinci toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(f; q, x) - L_n(f; q, x) &= \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} \left[f\left(\frac{[n+1]_q}{q^{n+1}}\right) - f\left(\frac{[n]_q}{q^n}\right) \right] \\
&+ \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k+1]_q q^{k+1}}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1} \\
&- \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} \\
&- \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k]_q q^{k+1}}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.46) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(f; q, x) - L_n(f; q, x) &= \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^{n+1} \left[f\left(\frac{[n+1]_q}{q^{n+1}}\right) - f\left(\frac{[n]_q}{q^n}\right) \right] \\
&+ \frac{1}{\ell_{n+1, q}(x)} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k+1]_q q^{k+1}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{[n-k]_q}{[n+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k]_q q^{k+1}}\right) \Bigg\} \\
& \times q^k \frac{[n+1]_q [n]_q}{[n-k]_q [k+1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\frac{[n+1]_q}{q^{n+1}} - \frac{[n]_q}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}} \geq 0 \text{ ve } f \text{ azalan fonksiyon olduğundan}$$

$$f\left(\frac{[n+1]_q}{q^{n+1}}\right) - f\left(\frac{[n]_q}{q^n}\right) \leq 0 \tag{4.55}$$

sağlanır. f konveks olduğundan (4.47) ve (4.48) den

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k+1]_q q^{k+1}}\right) - \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) \\
& - \frac{[n-k]_q}{[n+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k]_q q^{k+1}}\right) \leq 0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

dır. (4.55) ve (4.56), (4.54) de kullanılırsa ispat tamamlanır.

f lineer ise

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k+1]_q q^{k+1}}\right) - \frac{q^{n-k} [k+1]_q}{[n+1]_q} f\left(\frac{[k]_q}{[n-k+1]_q q^k}\right) \\
& - \frac{[n-k]_q}{[n+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n-k]_q q^{k+1}}\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

eşitliği vardır. (4.57) ifadesine göre aşağıdaki sonuç yazılabilir (Doğru and Gupta, 2005).

4.5.1 Sonuç

L_n ile tanımladığımız Q -BBH operatörleri aşağıdaki monotonluk özelliklerine sahiptir (Doğru and Gupta, 2005).

- i) f lineer ve azalan fonksiyon ise her $x \geq 0$ için L_n de n ye göre azalandır.
- ii) f lineer ve artan fonksiyon ise her $x \geq 0$ için L_n de n ye göre artandır.





5. İKİ DEĞİŞKENLİ OPERATÖRLERİN OLUŞTURULMASI

A. Altın, O. Doğru ve M. A. Özarslan tarafından iki değişkenli BBH operatörleri tanımlanarak yaklaşım özellikleri elde edilmiştir (Altın, Doğru and Özarslan, 2005). Bu bölümde iki değişkenli q -BBH operatörleri tanımlanacak, bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilecektir. Bu operatörlerin yaklaşım hızı süreklilik modülü fonksiyonu ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar uzayındaki fonksiyonlar için hesaplanacak ve iki değişkenli q -BBH operatörlerinin voronovskaya asimptotik yaklaşımı verilerek klasik sonuçlardan daha hızlı yaklaşıma sahip olduğunu gösterilecektir.

5.1. İki Değişkenli q -BBH Operatörleri

İki değişkenli lineer pozitif operatörler için Korovkin teoremi Volkov tarafından 1957 de verilmiştir.

5.1.1. Teorem

$$\begin{aligned} f(x, y) &\in C(a, b; c, d) \text{ ve } R^2 \text{ de} \\ |f(x, y)| &\leq M_f \end{aligned} \quad (5.1)$$

olsun $A_n(f(t, r); x, y)$ lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & A_n(1; x, y) \xrightarrow{\quad} 1 \\ \text{ii)} \quad & A_n(t; x, y) \xrightarrow{\quad} x \\ \text{iii)} \quad & A_n(r; x, y) \xrightarrow{\quad} y \\ \text{iv)} \quad & A_n(t^2 + r^2; x, y) \xrightarrow{\quad} x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

şartları sağlanıyorsa bu durumda $(a, b; c, d)$ dikdörtgensel bölgesinde

$$A_n(f(t, r); x, y) \xrightarrow{\quad} f(x, y) \quad (5.3)$$

sağlanır (Volkov, 1957).

İspat:

$f(x, y) \in C(a, b; c, d)$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta$ vardır öyle ki

$$|(x, y) - (t, r)| < \delta \text{ yani } \sqrt{(x-t)^2 + (y-r)^2} < \delta \text{ olduğunda } |f(x, y) - f(t, r)| < \varepsilon \text{ sağlanır.}$$

diğer taraftan $\sqrt{(x-t)^2 + (y-r)^2} \geq \delta$ olduğunda

$$\frac{(x-t)^2 + (y-r)^2}{\delta^2} \geq 1 \text{ elde edilir ve burada (5.1) in kullanılmasıyla}$$

$$|f(x, y)| \leq M_f$$

$$|f(x, y) - f(t, r)| \leq 2M_f \left[\frac{(x-t)^2 + (y-r)^2}{\delta^2} \right]$$

yazılabilir. O halde

$$|f(t, r) - f(x, y)| \leq \varepsilon + 2M_f \left[\frac{(x-t)^2 + (y-r)^2}{\delta^2} \right]$$

$$= \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} [x^2 + y^2 - 2(xt - yr) + t^2 + r^2]$$

(5.4)

yazılabilir. Öte yandan A_n operatörünün lineerliğinden ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |A_n(f(t, r); x, y) - f(x, y)| &\leq |A_n(f(t, r) - f(x, y); x, y)| + |f(x, y)| |A_n(1; x, y) - 1| \\ &\leq |A_n(f(t, r) - f(x, y); x, y)| + M_f |A_n(1; x, y) - 1| \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. A_n operatörünün monotonluğundan

$$\left| A_n \left(f(t, r) - f(x, y); x, y \right) \right| \leq A_n \left(\left| f(t, r) - f(x, y) \right|; x, y \right) \quad (5.6)$$

yazılabilir. Lineerlikten ve (5.4) ün (5.6) da kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \left| A_n \left(f(t, r) - f(x, y); x, y \right) \right| &\leq \varepsilon + \varepsilon (A_n(1; x, y) - 1) \\ &+ \frac{2M_f}{\delta^2} \left[(x^2 + y^2) (A_n(1; x, y) - 1) \right. \\ &- 2x (A_n(t; x, y) - x) - 2y (A_n(r; x, y) - y) \\ &\left. + (A_n(t^2 + r^2; x, y) - (x^2 + y^2)) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

yazılabilir. (5.7) nin (5.5) de kullanılması ve (i),(ii),(iii),(iv) koşullarından

$$\left| A_n \left(f(t, r) - f(x, y); x, y \right) \right| \leq \varepsilon$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

İki değişkenli q - BBH operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Ersan, 2008).

$$\begin{aligned} R_+^2 &= [0, \infty) \times [0, \infty), \quad f: R_+^2 \longrightarrow R, \quad 0 \leq q_{n_2} < 1 \text{ ve } 0 \leq q_{n_1} < 1 \text{ olmak üzere} \\ L_{n_1, n_2} (f; q_1, q_2, x, y) &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\ &\times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Burada

$$\ell_{n_1, q_1}(x) = \prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_1^s x) \text{ ve } \ell_{n_2, q_2}(y) = \prod_{s=0}^{n_2-1} (1 + q_2^s y) \quad (5.9)$$

dir. Bu operatörün lineer ve pozitif operatör olduğu açıktır ve $q_{n_1} = q_{n_2} = 1$ alındığında iki değişkenli BBH operatörüne dönüşecektir (Altın, Doğru and Özarslan, 2005).

$$L_{n_1, n_2}(f; x, y) = \frac{1}{(1+x)^{n_1}} \frac{1}{(1+y)^{n_2}} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{k_1}{n_1 - k_1 + 1}, \frac{k_2}{n_2 - k_2 + 1}\right) \times \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} x^{k_1} y^{k_2} \quad (5.10)$$

5.1.1. Lemma

(5.8) de tanımlanan L_{n_1, n_2} operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\begin{aligned} i) \quad L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) &= U_{n_1}^x(V_{n_2}^y(f; q_2, x, y)), \\ ii) \quad L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) &= V_{n_2}^y(U_{n_1}^x(f; q_1, x, y)). \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} U_{n_1}^x(f; q_{n_1}, x, y) &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}}, y\right) q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}, \\ V_{n_2}^y(f; q_{n_2}, x, y) &= \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x, \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}}\right) q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

dir (Ersan, 2008).

İspat:

$$i) \quad U_{n_1}^x(V_{n_2}^y(f; q_2, x, y))$$

$$\begin{aligned}
&= U_{n_1}^x \left[\frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_2=0}^{n_2} f \left(x, \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}} \right) q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2} \right] \\
&= \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_2=0}^{n_2} U_{n_1}^x \left[f \left(x, \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}} \right), q_{n_1}, x, y \right] q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2} \\
&= \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_2=0}^{n_2} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} y^{k_2} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \\
&\quad \times f \left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}} \right) q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f \left(\frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}} \right) \\
&\quad \times q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2} \\
&= L_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)
\end{aligned}$$

ii) Benzer şekilde ispatlanır (Ersan, 2008).

5.1.2. Lemma

$e_{ij} : R_+^2 \longrightarrow R_+$ iki boyutlu test

fonksiyonu $e_{ij} = \left(\frac{x}{1+x} \right)^i \left(\frac{y}{1+y} \right)^j$ $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere (5.8) de tanımlanan

L_{n_1, n_2} lineer pozitif operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar;

$$i) L_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = 1,$$

$$ii) L_{n_1, n_2} (e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x},$$

$$iii) L_{n_1, n_2} (e_{01}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}} \frac{y}{1+y},$$

$$iv) L_{n_1, n_2} (e_{20}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x},$$

$$v) L_{n_1, n_2} (e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^2} q_{n_2}^2 \frac{y^2}{(1+y)(1+q_{n_2}y)} + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y},$$

$$vi) L_{n_1, n_2} (e_{30}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = q_{n_1}^6 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^3} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)} \\ + (q_{n_1}^3 + 2q_{n_1}^2) \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^3} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} \\ + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^3} \frac{x}{(1+x)},$$

$$vii) L_{n_1, n_2} (e_{03}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = q_{n_2}^6 \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}} [n_2 - 2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^3} \frac{y^3}{(1+y)(1+q_{n_2}y)(1+q_{n_2}^2y)} \\ + (q_{n_2}^3 + 2q_{n_2}^2) \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^3} \frac{y^2}{(1+y)(1+q_{n_2}y)} \\ + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^3} \frac{y}{(1+y)},$$

$$viii) L_{n_1, n_2} (e_{40}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) =$$

$$q_{n_1}^{12} \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}} [n_1 - 2]_{q_{n_1}} [n_1 - 3]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^4}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)(1+q_{n_1}^3x)} \\ + (q_{n_1}^8 + 2q_{n_1}^7 + 3q_{n_1}^6) \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)} \\ + (q_{n_1}^4 + 3q_{n_1}^3 + 3q_{n_1}^2) \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} \\ + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x}{(1+x)}$$

$$\begin{aligned}
ix) L_{n_1 n_2} (e_{04}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = & \\
q_{n_2}^{12} \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}} [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^4} \frac{y^4}{(1+x)(1+q_{n_2} y)(1+q_{n_2}^2 y)(1+q_{n_2}^3 y)} & \\
+ (q_{n_2}^8 + 2q_{n_2}^7 + 3q_{n_2}^6) \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}} [n_2 - 2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^4} \frac{y^3}{(1+x)(1+q_{n_2} y)(1+q_{n_2}^2 y)} & \\
+ (q_{n_2}^4 + 3q_{n_2}^3 + 3q_{n_2}^2) \frac{[n_1]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^4} \frac{y^2}{(1+y)(1+q_{n_2} y)} & \\
+ \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^4} \frac{y}{(1+y)}. & \quad (5.12)
\end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
i) \quad L_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = & \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \\
& \times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2}
\end{aligned}$$

$0 \leq q \leq 1$ için

$$\sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) = \ell_{n, q}(x)$$

Olduğundan (i) sağlanır (Andrews, Askey and Roy, 1999).

$$\begin{aligned}
ii) \quad L_{n_1, n_2} (e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = & \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \\
& \times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2} \\
= & \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x) [n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \sum_{k_1=1}^{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 - 1 \\ k_1 - 1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}
\end{aligned}$$

k_1 yerine k_1+1 yazılırsa

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} (q_{n_1}x)^{k_1} \\
 &= \frac{x}{1+x} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \frac{1}{\ell_{n_1-1, q_{n_1-1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} (q_{n_1}x)^{k_1} \\
 &= \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x}.
 \end{aligned}$$

(iii) ifadesi (ii) ifadesine benzer olarak gösterilir.

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad L_{n_1, n_2}(e_{20}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^2}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \\
 &\times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2}
 \end{aligned}$$

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right) \text{ ispatına benzer olarak}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^2}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
 &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{q_{n_1} [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
 &+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_q}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{q_{n_1} [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&= \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} q_{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1-1 \end{bmatrix} x^{k_1}
\end{aligned}$$

son eşitliğin sağ tarafında ilk toplamda k_1 yerine k_1+2 , ikinci toplamda k_1 yerine k_1+1 yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= q_{n_1}^2 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^2 x)^{k_1} \\
&+ x \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix} (qx)^{k_1} \\
&= q_{n_1}^2 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-3} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^2 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-2} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ x \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-2} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1} x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&= \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1} x)} + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \left(\frac{x}{1+x} \right)
\end{aligned}$$

(v) ifadesi de (iv) benzer şekilde gösterilir.

$$\begin{aligned}
vi) \quad L_{n_1, n_2} (e_{30}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^3}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \\
&\times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2}
\end{aligned}$$

$$L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3; q, x \right) \text{ ispatına benzer olarak}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^3}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{q_{n_1}^3 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{q_{n_1}^2 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{2q_{n_1} [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} \frac{q_{n_1}^3 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{q_{n_1}^2 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{2q_{n_1} [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} q_{n_1}^3 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1-3 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} q_{n_1}^2 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{2[n_1]_q [n_1-1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} q_{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} q^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1-1 \end{bmatrix} x^{k_1}
\end{aligned}$$

son eşitlikteki ilk toplamda k_1 yerine k_1+3 , ikinci ve üçüncü toplamda k_1 yerine k_1+2 ve dördüncü toplamda k_1 yerine k_1+1 yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&= q_{n_1}^6 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-3} q^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1 \end{bmatrix} (q^3 x)^{k_1} \\
&+ q^3 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-2} q^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix} (q^2 x)^{k_1} \\
&+ 2q^2 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-2} q^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix} (q^2 x)^{k_1} \\
&+ x \frac{[n_1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{1}{\ell_{n_1, q}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} q^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix} (qx)^{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{n_1}^6 x^3 \frac{[n_1]_q [n_1-1]_q [n_1-2]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-4} (1+q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^3 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1+q_{n_1}^s x)} \\
&+ q_{n_1}^3 x^2 \frac{[n_1]_q [n_1-1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-3} (1+q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^2 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1+q_{n_1}^s x)} \\
&+ 2q_{n_1}^2 x^2 \frac{[n_1]_q [n_1-1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-3} (1+q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^2 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1+q_{n_1}^s x)} \\
&+ x \frac{[n_1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-2} (1+q_{n_1}^{k_1} (qx))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1+q_{n_1}^s x)} \\
&= q_{n_1}^6 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^3} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1} x)(1+q_{n_1}^2 x)} \\
&+ (q_{n_1}^3 + 2q_{n_1}^2) \frac{[n_1]_q [n_1-1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1} x)} \\
&+ \frac{[n_1]_q}{[n_1+1]_q^3} \frac{x}{(1+x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. (vii) ifadeside (vi) ifadesine benzer şekilde gösterilir.

$$\begin{aligned}
\text{viii)} L_{n_1 n_2} (e_{40}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) &= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_{n_2}}(y)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^4}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_{n_2}^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \\
&\times \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{n_2}} x^{k_1} y^{k_2}
\end{aligned}$$

$$L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^4; q, x \right) \text{ ispatına benzer olarak}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^4}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=4}^{n_1} \frac{q_{n_1}^6 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}} [k_1-3]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} \frac{q_{n_1}^5 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} \frac{2q_{n_1}^4 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} \frac{3q_{n_1}^3 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{q_{n_1}^3 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{3q_{n_1}^2 [k_1]_q [k_1-1]_q}{[n_1+1]_q^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1} \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} \frac{3q_{n_1} [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{n_1}} x^{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}^4}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q x^{k_1} \\
&= \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{q_{n_1}^6 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}} [k_1-3]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{q_{n_1}^5 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{2q_{n_1}^4 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{3q_{n_1}^3 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}} [k_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{q_{n_1}^3 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{3q_{n_1}^2 [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{3q_{n_1} [k_1]_{q_{n_1}} [k_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1} \\
&+ \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}!}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}! [k_1]_{q_{n_1}}!} x^{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[n]_q [n-1]_q [n-2]_q [n-3]_q}{[n+1]_q^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=4}^{n_1} q_{n_1}^6 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-4 \\ k_1-4 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} q_{n_1}^5 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1-3 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{2[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} q_{n_1}^4 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1-3 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{3[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=3}^{n_1} q_{n_1}^3 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1-3 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} q_{n_1}^3 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{3[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} q_{n_1}^2 q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{3[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=2}^{n_1} q_{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1-2 \end{bmatrix} x^{k_1} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=1}^{n_1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1-1 \end{bmatrix} x^{k_1}
\end{aligned}$$

son eşitlikte birinci toplamda k_1 yerine k_1+4 , ikinci, üçüncü ve dördüncü toplamda k_1 yerine k_1+3 , beşinci, altıncı ve yedinci toplamda k_1 yerine k_1+2 ve sekizinci toplamda k_1 yerine k_1+1 yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&= q_{n_1}^{12} x^4 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}} [n_1-3]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-4} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-4 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^4 x)^{k_1} \\
&+ q_{n_1}^8 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^3 x)^{k_1} \\
&+ 2q_{n_1}^7 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-3} q_{n_1}^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^3 x)^{k_1} \\
&+ 3q_{n_1}^6 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-3} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-3 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^3 x)^{k_1} \\
&+ q_{n_1}^4 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^2 x)^{k_1} \\
&+ 3q_{n_1}^3 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^2 x)^{k_1} \\
&+ 3q_{n_1}^2 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-2} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-2 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1}^2 x)^{k_1} \\
&+ x \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{1}{\ell_{n_1, q_{n_1}}(x)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} q_{n_1}^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix} (q_{n_1} x)^{k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{n_1}^{12} x^4 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}} [n_1-3]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-5} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^4 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ q_{n_1}^8 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-4} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^3 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ 2q_{n_1}^7 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-4} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^3 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ 3q_{n_1}^6 x^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-4} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^3 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ q_{n_1}^4 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-3} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1}^2 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ 3q_{n_1}^3 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-3} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ 3q_{n_1}^2 x^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-3} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q^2 x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)} \\
&+ x \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{\prod_{k_1=0}^{n_1-2} (1 + q_{n_1}^{k_1} (q_{n_1} x))}{\prod_{s=0}^{n_1-1} (1 + q_{n_1}^s x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{n_1}^{12} \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}} [n_1-3]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^4}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)(1+q_{n_1}^3x)} \\
&+ q_{n_1}^8 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)} \\
&+ 2q_{n_1}^7 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)} \\
&+ 3q_{n_1}^6 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)} \\
&+ q_{n_1}^4 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} \\
&+ 3q_{n_1}^3 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} \\
&+ 3q_{n_1}^2 \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x}{(1+x)} \\
&= q_{n_1}^{12} \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}} [n_1-3]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^4}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)(1+q_{n_1}^3x)} \\
&+ (q_{n_1}^8 + 2q_{n_1}^7 + 3q_{n_1}^6) \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}} [n_1-2]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^3}{(1+x)(1+q_{n_1}x)(1+q_{n_1}^2x)} \\
&+ (q_{n_1}^4 + 3q_{n_1}^3 + 3q_{n_1}^2) \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} \\
&+ \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^4} \frac{x}{(1+x)}
\end{aligned}$$

elde edilir

(ix) ifadesi de (viii) ifadesine benzer şekilde gösterilir.

5.2. İki Değişkenli q -BBH Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

R_+^2 de tanımlı sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı $C_B(R_+^2)$ olmak üzere bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{C_B(R_+^2)} = \sup_{x,y \in [0,\infty)} |f(x,y)|$$

biçiminde tanımlanır. Eğer

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_{n,m} - f\|_{C_B(R_+^2)} = 0$ şartı sağlanıyorsa $(f_{n,m})$ fonksiyon dizisi f 'e düzgün yakınsar ve

$f_{n,m} \xrightarrow{\quad} f$ ile gösterilir.

İki değişkenli q - BBH operatörlerinin yakınsaklığı üzerine konuşabilmek için öncelikle Teorem 3.2.1. in $H_\omega(R_+^2)$ de iki değişkenli lineer pozitif operatörler için de sağlandığını göstermeliyiz.

5.2.1. Teorem

$q = (q_{n_1})$ ve $q = (q_{n_2})$, $0 < q_{n_1} q_{n_2} \leq 1$ ve $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ iken $q_{n_1}, q_{n_2} \rightarrow 1$ şartlarını sağlayan iki dizi olsun.

$A_{n_1, n_2} : H_\omega(R_+^2) \longrightarrow C_B(R_+^2)$ lineer pozitif operatör dizisi

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|A_{n_1, n_2}(e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{00}\|_{C_B(R_+^2)} = 0, \\ ii) \quad & \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|A_{n_1, n_2}(e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{10}\|_{C_B(R_+^2)} = 0, \\ iii) \quad & \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|A_{n_1, n_2}(e_{01}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{01}\|_{C_B(R_+^2)} = 0, \\ iv) \quad & \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|A_{n_1, n_2}(e_{20} + e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - (e_{20} + e_{02})\|_{C_B(R_+^2)} = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

şartlarını sağlıyorsa $\forall f \in H_w(R_+^2)$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|A_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y)\|_{C_B(R_+^2)} = 0 \quad \text{sağlanır. Burada } e_{ij} : R_+^2 \longrightarrow R_+^2 \quad \text{iki}$$

boyutlu test fonksiyonu $e_{ij} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^i \left(\frac{y}{1+y}\right)^j$ olarak tanımlanır (Ersan, 2008).

İspat:

Her $f \in H_w(R_+^2)$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta$ vardır. Öyle ki

$$\sqrt{\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y}\right)^2} < \delta \quad \text{için}$$

$$|f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon \text{ dir.}$$

$$\text{Öte yandan } \sqrt{\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y}\right)^2} \geq \delta$$

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq \frac{2M}{\delta^2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y}\right)^2 \right] \text{ dir.}$$

Dolayısıyla her $(u, v), (x, y) \in R_+^2$ için

$$|f(u, v) - f(x, y)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y}\right)^2 \right] \quad (5.14)$$

dir.

A_{n_1, n_2} lineer pozitif bir operatör olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left| A_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f \right| \\ &= \left| A_{n_1, n_2}(f(u, v) - f(x, y) + f(x, y); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| A_{n_1, n_2} \left(f(u, v) - f(x, y); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) + f(x, y) \left(A_{n_1, n_2} (1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - 1 \right) \right| \\
&\leq A_{n_1, n_2} \left(\left| f(u, v) - f(x, y) \right|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) + \left| f \right| \left| A_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{00} \right|
\end{aligned}$$

5.14 eşitsizliği son eşitsizlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| A_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f \right| \\
&\leq A_{n_1, n_2} \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right)^2 + \left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left| f \right| \left| A_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{00} \right| \right. \\
&\leq (\varepsilon + M) \left| A_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{00} \right| + \varepsilon \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left[\left| A_{n_1, n_2} (e_{20} + e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - (e_{20} + e_{02}) \right| \right. \\
&\quad \left. + 2 \left| A_{n_1, n_2} (e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{10} \right| + 2 \left| A_{n_1, n_2} (e_{01}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{01} \right| \right] \quad \text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

Burada 5.13 koşulları uygulanırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0$$

elde edilir (Ersan, 2008).

Bu teoremin iki değişkenli q -BBH operatörleri için doğruluğunu gösterelim.

5.2.2. Teorem

$q = (q_{n_1})$ ve $q = (q_{n_2})$, $0 < q_{n_1} q_{n_2} \leq 1$ ve $q_{n_1}, q_{n_2} \rightarrow 1 (n_1, n_2 \rightarrow \infty)$ şartlarını sağlayan iki dizi olsun.

$L_{n_1, n_2} : H_\omega(R_+^2) \longrightarrow C_B(R_+^2)$ lineer pozitif operatörü

$$i) \quad \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{00} \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0, \quad (5.15)$$

$$ii) \quad \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{10} \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0, \quad (5.16)$$

$$iii) \quad \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{01}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{01} \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0, \quad (5.17)$$

$$iv) \quad \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{20} + e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - (e_{20} + e_{02}) \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0 \quad (5.18)$$

koşullarını sağlıyorsa her $f \in H_w(R_+^2)$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0$$

dir. Burada

$$e_{ij} : R_+^2 \longrightarrow R_+^2 \quad e_{ij} = \left(\frac{x}{1+x} \right)^i \left(\frac{y}{1+y} \right)^j \quad i, j = 0, 1, 2 \text{ dir (Ersan, 2008).}$$

İspat:

Lemma (5.1.2) in (i) şıkkı gereğince

$$L_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = 1$$

olduğundan

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{00}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{00} \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0$$

elde edilir ve (5.15) gösterilmiş olur. Öte yandan

$$\left\| L_{n_1, n_2} (e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{10} \right\|_{C_B(R_+^2)} = \sup_{x, y \geq 0} \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x} - \frac{x}{1+x} \right| \leq \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} - 1 \right|$$

elde edilir. q -analizin tanımı gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} = 1 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{10}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - e_{10} \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0$$

elde edilir ve (5.16) sağlanır. Simetri gereğince (5.17) de açıktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} (e_{20} + e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - (e_{20} + e_{02}) \right\|_{C_B(R_+^2)} \\ &= \sup_{x, y \geq 0} \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^2} q_{n_2}^2 \frac{y^2}{(1+y)(1+q_{n_2}y)} + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} - \frac{x^2}{(1+x)^2} - \frac{y^2}{(1+y)^2} \right| \\ &= \left| \sup_{x, y \geq 0} \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^2 \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right) + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 - 1]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^2} q_{n_2}^2 \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} - 1 \right) + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2 + 1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right| \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} = A + \frac{B}{[n+1]_q} + \frac{C}{[n+1]_q^2} \quad (5.20)$$

alınırsa tanım gereği $[n]_q = q[n-1]_q + 1$ olduğundan bu özellik (5.20) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{[n+1]_q - 1}{q}\right) \left(\frac{[n]_q - 1}{q}\right)}{[n+1]_q^2} \\
&= \frac{[n+1]_q [n]_q - [n+1]_q - [n]_q + 1}{q^2 [n+1]_q^2} \\
&= \frac{[n+1]_q \left(\frac{[n+1]_q - 1}{q}\right) - [n+1]_q - \left(\frac{[n+1]_q - 1}{q}\right) + 1}{q^2 [n+1]_q^2} \\
&= \frac{1}{q^3 [n+1]_q^2} \{ [n+1]_q^2 - [n+1]_q (2+q) + 1 + q \} \\
& \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} = \frac{1}{q^3} \left(1 - \frac{2+q}{[n+1]_q} + \frac{1+q}{[n+1]_q^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu sonuç (5.19) da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(e_{20} + e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - (e_{20} + e_{02})\|_{C_B(R_+^2)} \\
&= \sup_{x, y \geq 0} \left| \frac{x^2}{(1+x)^2} \left[\frac{1}{q_{n_1}} \left(1 - \frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \right) \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} + \frac{y^2}{(1+y)^2} \left[\frac{1}{q_{n_2}} \left(1 - \frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \right) \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} - 1 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right| \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \left| \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{1}{q_{n_1}} \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right) \right| + \sup_{x \geq 0} \left| \frac{x^2}{(1+x)^2} \left[\frac{1}{q_{n_1}} \left(-\frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \right) \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{x \geq 0} \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right| + \sup_{y \geq 0} \left| \frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{1}{q_{n_2}} \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} - 1 \right) \right| \\
& + \sup_{y \geq 0} \left| \frac{y^2}{(1+y)^2} \left[\frac{1}{q_{n_2}} \left(-\frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \right) \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} \right] \right| \\
& + \sup_{y \geq 0} \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right| \\
& = \sup_{x \geq 0} \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{1}{q_{n_1}} \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} - 1 \right) \\
& + \sup_{x \geq 0} \frac{x^2}{(1+x)^2} \left[\frac{1}{q_{n_1}} \left(\frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} - \frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \right) \frac{1+x}{1+q_{n_1}x} \right] + \sup_{x \geq 0} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \\
& + \sup_{y \geq 0} \frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{1}{q_{n_2}} \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} - 1 \right) \\
& + \sup_{y \geq 0} \frac{y^2}{(1+y)^2} \left[\frac{1}{q_{n_2}} \left(\frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} - \frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \right) \frac{1+y}{1+q_{n_2}y} \right] + \sup_{y \geq 0} \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \\
& \leq \left(\frac{1}{q_{n_1}^2} - 1 \right) + \frac{1}{q_{n_1}^2} \left(\frac{2+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} - \frac{1+q_{n_1}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \right) + \frac{1}{q_{n_1} [n_1+1]_{q_{n_1}}} - \frac{1}{q_{n_1} [n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \\
& + \left(\frac{1}{q_{n_2}^2} - 1 \right) + \frac{1}{q_{n_2}^2} \left(\frac{2+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} - \frac{1+q_{n_2}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \right) + \frac{1}{q_{n_2} [n_2+1]_{q_{n_2}}} - \frac{1}{q_{n_2} [n_2+1]_{q_{n_2}}^2}
\end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için $[n+1]_q \rightarrow \infty$ ve $q_n \rightarrow 1$ olduğundan

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \left\| L_{n_1, n_2} \left(e_{20} + e_{02}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) - (e_{20} + e_{02}) \right\|_{C_B(R_+^2)} = 0$$

bulunur ve (5.18) sağlanmış olur. Böylece Teorem (5.2.1) gereğince $\forall f \in H_w(R_+^2)$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f\|_{C_B(R_+^2)} = 0$$

sonucu ve bu sonuçla birlikte iki değişkenli q -BBH operatörlerinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı elde edilir (Ersan, 2008).

5.3. İki Değişkenli q -BBH Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Bu bölümde iki değişkenli q -BBH operatörlerinin yaklaşım hızını, önce iki değişkenli süreklilik modülü ve daha sonra Lipchitz tipli maksimal fonksiyonlar yardımıyla elde edeceğiz.

5.3.1. İki değişkenli q -BBH operatörlerinin süreklilik modülü ile yaklaşım hızının bulunması

Lorentz, iki değişkenli süreklilik modülünü

$$\omega(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) = \sup_{u, x \geq 0} \{ |f(u, v) - f(x, y)|; |u - x| \leq \delta_{n_1}, |v - y| \leq \delta_{n_2}, (u, v), (x, y) \in R_+^2 \}$$

biçiminde tanımlamıştır (Lorentz, 1966).

Burada $\forall f \in H_\omega(R_+^2)$ için

$$\tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) = \sup_{u, x \geq 0} \left\{ |f(u, v) - f(x, y)|; \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right| \leq \delta_{n_1}, \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right| \leq \delta_{n_2}, \right.$$

$$\left. (u, v), (x, y) \in R_+^2 \right\}$$

(5.21)

olacak şekilde iki değişkenli süreklilik modülü tanımlarsak bu süreklilik modülü $\forall f \in H_\omega(R_+^2)$ için aşağıdaki koşulları sağlar.

$$i) \quad \delta_{n_1} \rightarrow 0 \text{ ve } \delta_{n_2} \rightarrow 0 \text{ iken } \tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \rightarrow 0,$$

$$ii) \quad |f(u, v) - f(x, y)| \leq \tilde{\omega} \left(f; \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|, \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right| \right), \quad (5.22)$$

$$iii) \quad |f(u, v) - f(x, y)| \leq \tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \left(1 + \frac{\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|}{\delta_{n_1}} \right) \left(1 + \frac{\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|}{\delta_{n_2}} \right).$$

Şimdi iki değişkenli q -BBH operatörlerinin yaklaşım hızını (5.21) de tanımlanan süreklilik modülü ile değerlendirelim.

5.3.1. Teorem

$q = (q_{n_1})$ ve $q = (q_{n_2})$, $q_{n_1}, q_{n_2} \rightarrow 1$ ($n_1, n_2 \rightarrow \infty$) şartlarını sağlayan iki dizi olsun.

$\forall f \in H_{\omega}(R_+^2)$ ve $x_0, y_0 \geq 0$ olmak üzere

$$\left| L_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}(x), \delta_{n_2}(y)) \text{ dir.}$$

Burada

$$\delta_{n_1}(x) = \left\{ \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{q_{n_1}^2 [n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{(1+x)}{(1+q_{n_1}x)} - \frac{2[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + 1 \right) \right. \\ \left. \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.23)$$

$$\delta_{n_2}(y) = \left\{ \frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{q_{n_2}^2 [n_2]_{q_{n_2}} [n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{(1+y)}{(1+q_{n_2}y)} - \frac{2[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + 1 \right) \right. \\ \left. \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

ile tanımlanır (Ersan and Doğru, 2009) .

İspat:

Burada L_{n_1, n_2} operatörü lineerliği ve $\tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2})$ nin (5.22) de tanımlanan özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 & \left| L_{n_1, n_2} \left(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) - f(x, y) \right| \\
 & \leq L_{n_1, n_2} \left(\left| f(u, v) - f(x, y) \right|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
 & \leq L_{n_1, n_2} \left[\tilde{\omega} \left(f; \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|, \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right| \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right] \\
 & \leq \tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{n_1}} L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \right] \\
 & \times \left[1 + \frac{1}{\delta_{n_2}} L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \right]
 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilebilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) & \leq \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
 L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) & \leq \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right] \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left| L_{n_1, n_2} \left(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) - f(x, y) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{n_1}} \left[L_{n_1, n_2} \left(\left(\frac{u}{1+u} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2x}{1+x} L_{n_1, n_2} \left(\frac{u}{1+u}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + 1 + \frac{1}{\delta_{n_2}} \left[L_{n_1, n_2} \left(\left(\frac{v}{1+v} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) - \frac{2y}{1+y} L_{n_1, n_2} \left(\frac{v}{1+v}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) + \left(\frac{y}{1+y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq \tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{n_1}} \left[\frac{[n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} q_{n_1}^2 \frac{x^2}{(1+x)(1+q_{n_1}x)} + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2x^2}{(1+x)^2} \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + 1 + \frac{1}{\delta_{n_2}} \left[\frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} q_{n_2}^2 \frac{y^2}{(1+y)(1+q_{n_2}y)} + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2y^2}{(1+y)^2} \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \left(\frac{y}{1+y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq \tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{n_1}} \left[\frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{q_{n_1}^2 [n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{(1+x)}{(1+q_{n_1}x)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + 1 \right) + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + 1 + \frac{1}{\delta_{n_2}} \left[\frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{q_{n_2}^2 [n_2]_{q_{n_2}} [n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{(1+y)}{(1+q_{n_2}y)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + 1 \right) + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\delta_{n_1}(x) = \left\{ \frac{x^2}{(1+x)^2} \left[\frac{q_{n_1}^2 [n_1]_{q_{n_1}} [n_1-1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{(1+x)}{(1+q_{n_1}x)} - \frac{2[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} + 1 \right] + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\delta_{n_2}(y) = \left\{ \frac{y^2}{(1+y)^2} \left[\frac{q_{n_2}^2 [n_2]_{q_{n_2}} [n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{(1+y)}{(1+q_{n_2}y)} - \frac{2[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + 1 \right] + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

alınırsa, ayrıca $\frac{x}{1+x} < 1$, $\frac{y}{1+y} < 1$ ve $\frac{q_{n_1} + q_{n_1}x}{1+q_{n_1}x} < 1$, $\frac{q_{n_2} + q_{n_2}y}{1+q_{n_2}y} < 1$ olduğu göz önünde

bulundurulursa

$$\left| L_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}(x), \delta_{n_2}(y))$$

elde edilir.

Burada

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{n_1} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{n_2} = 1$$

olduğundan ve

$$[n_1]_{q_{n_1}} = \frac{1-q^{n_1}}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^{n_1-1}$$

$$[n_2]_{q_{n_2}} = \frac{1-q^{n_2}}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^{n_2-1}$$

olduğu bilindiğinden

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1]_{q_{n_1}} = \infty \text{ ve } \lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2]_{q_{n_2}} = \infty$$

bulunur.

Buradan $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ için $\delta_{n_1}, \delta_{n_2} \rightarrow 0$ elde edilir.

Böylece (5.22) ile verilen özellikler dikkate alındığında iki değişkenli q -BBH operatörlerinin sıfıra yaklaşma hızının $\frac{1}{\sqrt{n_1+1}} + \frac{1}{\sqrt{n_2+1}}$ ve $\tilde{\omega}(f; \delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \rightarrow 0$ olduğu görülür. Böylece iki değişkenli süreklilik modülü yardımıyla iki değişkenli q -BBH operatörlerinin sıfıra yaklaşma hızı değerlendirilmiş olur.

5.3.2. İki değişkenli q -BBH operatörlerinin yaklaşım hızının lipschitz tipli maksimal fonksiyonlar ile elde edilmesi

Lipschitz tipli maksimal fonksiyonu Lenze tarafından

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \sup_{\substack{u>0 \\ u \neq x}} \frac{|f(u) - f(x)|}{|x - u|^\alpha}$$

(5.25)

olarak tanımlanmıştır (Lenze, 1990).

$E \times E \subset R_+ \times R_+$ da tanımlı iki değişkenli fonksiyonlar için Lipschitz tipli maksimal fonksiyon uzayını

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\alpha_1, \alpha_2, E^2} = & \left\{ f : \sup (1+u)^{\alpha_1} (1+v)^{\alpha_2} \tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) \right. \\ & \left. \leq M \frac{1}{(1+x)^{\alpha_1}} \frac{1}{(1+y)^{\alpha_2}}; x, y \geq 0, (u, v) \in E^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

biçiminde tanımlanır (Ersan, 2008).

Burada f , R_+ ’da tanımlı ve sürekli fonksiyon, $M > 0$, $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ ve $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ olmak üzere $\tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}$ fonksiyonu;

$$\tilde{f}_{\alpha_1, \alpha_2}(x, y) = \sup_{u, v > 0} \frac{|f(u, v) - f(x, y)|}{|u - x|^{\alpha_1} |v - y|^{\alpha_2}} \quad (5.27)$$

biçiminde tanımlıdır.

İki değişkenli q -BBH operatörlerinin $\bar{W}_{\alpha_1, \alpha_2, E^2}$ fonksiyon uzayındaki fonksiyonlar için yakınsaklık hızını bulalım.

5.3.2. Teorem

$0 \leq \alpha_2 \leq 1$, $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ ve $\forall f \in \bar{W}_{\alpha_1, \alpha_2, E^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| L_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right| \\ & \leq M \left\{ [\delta_{n_1}(x)]^{\alpha_1} [\delta_{n_2}(y)]^{\alpha_2} + [d(y, E)]^{\alpha_2} [\delta_{n_1}(x)]^{\alpha_1} \right. \\ & \quad \left. + [d(x, E)]^{\alpha_1} [\delta_{n_2}(y)]^{\alpha_2} + 2[d(x, E)]^{\alpha_1} [d(y, E)]^{\alpha_2} \right\} \end{aligned}$$

olarak bulunabilir. Burada

$\delta_{n_1}(x)$ ve $\delta_{n_2}(y)$;

$$\delta_{n_1}(x) = \left\{ \frac{x^2}{(1+x)^2} \left(\frac{q_{n_1}^2 [n_1]_{q_{n_1}} [n_1 - 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} \frac{(1+x)}{(1+q_{n_1}x)} - \frac{2[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} + 1 \right) \right. \\ \left. \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}^2} \frac{x}{1+x} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta_{n_2}(y) = \left\{ \frac{y^2}{(1+y)^2} \left(\frac{q_{n_2}^2 [n_2]_{q_{n_2}} [n_2-1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{(1+y)}{(1+q_{n_2}y)} - \frac{2[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} + 1 \right) \right. \\ \left. \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}^2} \frac{y}{1+y} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ olarak tanımlıdır.}$$

Öte yandan $d(x, E)$, x noktasının E kümesine olan uzaklığıdır ve

$$d(x, E) = \inf \{ |x - y|; y \in E \} \text{ biçiminde tanımlıdır (Ersan and Doğru, 2009).}$$

İspat:

$x, y \geq 0$ ve $(x_0, y_0) \in \bar{E}$ olsun.

$$\begin{aligned} |f(u, v) - f(x, y)| &= |f(u, v) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) - f(x, y)| \\ &\leq |f(u, v) - f(x_0, y_0)| + |f(x_0, y_0) - f(x, y)| \end{aligned}$$

son eşitsizliğin her iki tarafına L_{n_1, n_2} lineer pozitif operatörü uygulanır ve $f \in \bar{W}_{\alpha_1, \alpha_2, E^2}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} &|L_{n_1, n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y)| \\ &\leq L_{n_1, n_2}(|f(u, v) - f(x_0, y_0)|; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) + |f(x_0, y_0) - f(x, y)| \\ &\leq M \left(L_{n_1, n_2} \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\ &+ M \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $0 \leq \alpha \leq 1$ ve her $a, b \geq 0$ için $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ yazılabildiğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \\
&= \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} + \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \\
&\leq \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1} + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \right) \\
&\quad \times \left(\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2} + \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \right) \\
&= \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2} + \left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \\
&\quad + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2} + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \text{ elde edilebilir.}
\end{aligned}$$

bu eşitsizliğe L_{n_1, n_2} lineer pozitif operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} ; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
&\leq L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2} ; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
&\quad + \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1} ; q_{n_1}, x \right) \\
&\quad + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2} ; q_{n_2}, y \right) \\
&\quad + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} L_{n_1, n_2} (1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&= L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1} ; q_{n_1}, x \right) L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2} ; q_{n_2}, y \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right|^{\alpha_1}; q_{n_1}, x \right) \\
& + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right|^{\alpha_2}; q_{n_2}, y \right) \\
& + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} L_{n_1, n_2} (1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

biçiminde yazabiliriz. $L_{n_1, n_2} (1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) = 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$p_1 = \frac{2}{\alpha_1}$, $p_1' = \frac{2}{2-\alpha_1}$ ve $p_2 = \frac{2}{\alpha_2}$, $p_2' = \frac{2}{2-\alpha_2}$ olarak seçilip (5.29) a Hölder Eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& L_{n_1, n_2} \left(\left| \frac{u}{1+u} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{v}{1+v} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
& \leq \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_{n_1}, x \right] \right\}^{\frac{\alpha_1}{2}} \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_2}, y \right] \right\}^{\frac{\alpha_2}{2}} \\
& + \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_{n_1}, x \right] \right\}^{\frac{\alpha_1}{2}} \\
& + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_2}, y \right] \right\}^{\frac{\alpha_2}{2}} \\
& + \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonucu (5.28) da kullanırsak

$$\left| L_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_{n_1}, x \right] \right\}^{\frac{\alpha_1}{2}} \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_2}, y \right] \right\}^{\frac{\alpha_2}{2}} \\
&+ M \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_{n_1}, x \right] \right\}^{\frac{\alpha_1}{2}} \\
&+ M \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left\{ L_{n_1, n_2} \left[\left(\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_2}, y \right] \right\}^{\frac{\alpha_2}{2}} \\
&+ 2M \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{1+x_0} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{y}{1+y} - \frac{y_0}{1+y_0} \right|^{\alpha_2} \\
&\leq M \left\{ \left[\delta_{n_1}(x) \right]^{\alpha_1} \left[\delta_{n_2}(y) \right]^{\alpha_2} + \left[d(y, E) \right]^{\alpha_2} \left[\delta_{n_1}(x) \right]^{\alpha_1} \right. \\
&\left. + \left[d(x, E) \right]^{\alpha_1} \left[\delta_{n_2}(y) \right]^{\alpha_2} + 2 \left[d(x, E) \right]^{\alpha_1} \left[d(y, E) \right]^{\alpha_2} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır (Ersan and Doğru, 2009).

Teorem 5.3.2 de özel olarak $E = R_+$ alındığında $d(x, E) = 0$ ve $d(y, E) = 0$ olacağından

$f \in \bar{W}_{\alpha_1, \alpha_2, E^2}$ olmak üzere

$$\left| L_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - f(x, y) \right| \leq M \left\{ \left[\delta_{n_1}(x) \right]^{\alpha_1} \left[\delta_{n_2}(y) \right]^{\alpha_2} \right\}$$

elde edilir. Burada $\delta_{n_1}(x)$ ve $\delta_{n_2}(y)$ (5.23) ve (5.24) de tanımlanmıştır.

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{n_1} = 1 \text{ ve } \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{n_2} = 1$$

olduğundan $n_1 \rightarrow \infty$ ve $n_2 \rightarrow \infty$ için $\delta_{n_1} \rightarrow 0$ ve $\delta_{n_2} \rightarrow 0$ bulunur ve operatörün yaklaşım hızı Lipschitz sınıfı fonksiyonlar ile değerlendirilmiş olur.

5.3.3. İki değişkenli q -BBH operatörlerinin monotonluk özelliği

q -binom katsayılarının (4.46) eşitliklerini sağladığından daha önce bahsetmiştik.

5.3.1. Tanım

$f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2, \eta_1 \beta_1 + \eta_2 \beta_2) \leq \lambda_1 \eta_1 f(\alpha_1, \beta_1) + \lambda_2 \eta_2 f(\alpha_2, \beta_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu konvektir.

5.3.2 Tanım

$f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y, z, t \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $x \leq y, z \leq t$ için

$$f(x, z) \geq f(y, t)$$

oluyorsa fonksiyonu monoton azalandır denir.

5.3.1. Lemma

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{q_{n_1}^{n_1-k_1} [k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}, \lambda_2 = \frac{[n_1-k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}}, \alpha_1 = \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}}, \alpha_2 = \frac{[k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1+1}} \\ \eta_1 &= \frac{q_{n_2}^{n_2-k_2} [k_2+1]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}, \eta_2 = \frac{[n_2-k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}}, \beta_1 = \frac{[k_2]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2}}, \beta_2 = \frac{[k_2+1]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2+1}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

olmak üzere ($\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0$) ve

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \eta_1 + \eta_2 = 1 \quad (5.31)$$

dir. Ayrıca

$$\frac{[k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1+1}} = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2, \quad \frac{[k_2+1]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2+1}} = \eta_1 \beta_1 + \eta_2 \beta_2 \quad (5.32)$$

gerçeklenir.

İspat:

q - tam sayıları tanımından

$$[k_1 + 1]_{q_{n_1}} = \frac{1 - q_{n_1}^{k_1+1}}{1 - q_{n_1}} \text{ ve } [n_1 - k_1]_{q_{n_1}} = \frac{1 - q_{n_1}^{n_1-k_1}}{1 - q_{n_1}} \quad (5.33)$$

elde ederiz.

$$\lambda_1 = \frac{q_{n_1}^{n_1-k_1} [k_1 + 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{[n_1 - k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \text{ olduğundan}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{q_{n_1}^{n_1-k} [k_1 + 1]_{q_{n_1}} + [n_1 - k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}}$$

$$= \frac{q_{n_1}^{n_1-k} \left(\frac{1 - q_{n_1}^{k_1+1}}{1 - q_{n_1}} \right) + \frac{1 - q_{n_1}^{n_1-k}}{1 - q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1 - q_{n_1}^{n_1+1}}{1 - q_{n_1}} \right)}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}}$$

$$= \frac{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}}$$

$$= 1$$

elde edilir. $\eta_1 + \eta_2 = 1$ ifadesi de benzer şekilde ispatlanır. Öte yandan

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = \frac{q_{n_1}^{n_1-k_1} [k_1 + 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}} + \frac{[n_1 - k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1 + 1]_{q_{n_1}}} \frac{[k_1 + 1]_{q_{n_1}}}{[n_1 - k_1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_{n_1}^{n_1-k_1} [k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \frac{[k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1}} + \frac{[k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1+1}} \\
&= \frac{[k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1+1}} \left(\frac{q_{n_1}^{n_1-k_1+1} [k_1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}}} + 1 \right) \\
&= \frac{[k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}} q_{n_1}^{k_1+1}} \left(\frac{q_{n_1}^{n_1-k_1+1} [k_1]_{q_{n_1}} + [n_1-k_1+1]_{q_{n_1}}}{[n_1-k_1+1]_{q_{n_1}}} \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Ayrıca q -tamsayıları tanımından

$$\begin{aligned}
q_{n_1}^{n_1-k_1+1} [k_1]_{q_{n_1}} + [n_1-k_1+1]_{q_{n_1}} &= q_{n_1}^{n_1-k_1+1} \left(\frac{1-q_{n_1}^{k_1}}{1-q_{n_1}} \right) + \frac{1-q_{n_1}^{n_1-k_1+1}}{1-q_{n_1}} \\
&= \frac{1-q_{n_1}^{n_1+1}}{1-q_{n_1}} \\
&= [n_1+1]_{q_{n_1}}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

bulunur. (5.35) nın (5.34) te kullanılmasıyla (5.32) elde edilir ve ispat tamamlanır.

$$\frac{[k_2+1]_{q_{n_2}}}{[n_2-k_2+1]_{q_{n_2}} q_{n_2}^{k_2+1}} = \eta_1 \beta_1 + \eta_2 \beta_2 \text{ eşitliği de benzer biçimde ispatlanır.}$$

5.3.3. Teorem

Eğer $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow R$ ve f konveks ve azalan fonksiyon ise her $x, y > 0$ ve her

$n_1, n_2 \in N$ için $L_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ azalandır.

$$L_{n_1, n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \geq L_{n_1+1, n_2+1} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$$

sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned}
& L_{n_1+1, n_2+1}(f; q_1, q_2, x, y) - L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = \\
& \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1+1} \sum_{k_2=0}^{n_2+1} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1 - k_1 + 2]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2 - k_2 + 2]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1+1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2+1 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

(5.36) ifadesinde eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplam $(1 + q^{n_1} x)(1 + q^{n_2} y)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
& L_{n_1+1, n_2+1}(f; q_1, q_2, x, y) - L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = \\
& \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1+1} \sum_{k_2=0}^{n_2+1} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1 - k_1 + 2]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2 - k_2 + 2]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1+1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2+1 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1 - k_1 + 1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2 - k_2 + 1]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} q^{n_1} q^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1+1} y^{k_2+1}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

bulunur. (5.37) de eşitliğin sağ tarafında birinci ve üçüncü toplamın son terimleri ile birinci ve ikinci toplamın $k_1 = 0, k_2 = 0$ terimleri çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
& L_{n_1+1, n_2+1}(f; q_1, q_2, x, y) - L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = \\
& \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} q^{\frac{n_1(n_1+1)}{2}} q^{\frac{n_2(n_2+1)}{2}} x^{n_1+1} y^{n_2+1} \left[f\left(\frac{[n_1+1]_{q_1}}{q_1^{n_1+1}}, \frac{[n_2+1]_{q_2}}{q_2^{n_2+1}}\right) - f\left(\frac{[n_1]_{q_1}}{q_1^{n_1}}, \frac{[n_2]_{q_2}}{q_2^{n_2}}\right) \right] \\
& + \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1-k_1+2]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2-k_2+2]_{q_2} q_2^{k_2}}\right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1+1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2+1 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2}}\right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2}}\right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} q^{n_1} q^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1+1} y^{k_2+1}
\end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafındaki birinci ve ikinci toplamda k_1 ve k_2 yerine k_1+1 ve k_2+1 yazılırsa

$$\begin{aligned}
& L_{n_1+1, n_2+1}(f; q_1, q_2, x, y) - L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = \\
& \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} q^{\frac{n_1(n_1+1)}{2}} q^{\frac{n_2(n_2+1)}{2}} x^{n_1+1} y^{n_2+1} \left[f\left(\frac{[n_1+1]_{q_1}}{q_1^{n_1+1}}, \frac{[n_2+1]_{q_2}}{q_2^{n_2+1}}\right) - f\left(\frac{[n_1]_{q_1}}{q_1^{n_1}}, \frac{[n_2]_{q_2}}{q_2^{n_2}}\right) \right] \\
& + \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} f\left(\frac{[k_1+1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1+1}}, \frac{[k_2+1]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \begin{bmatrix} n_1+1 \\ k_1+1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2+1 \\ k_2+1 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1+1} y^{k_2+1} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} f \left(\frac{[k_1+1]_{q_1}}{[n_1-k_1]_{q_1} q_1^{k_1+1}}, \frac{[k_2+1]_{q_2}}{[n_2-k_2]_{q_2} q_2^{k_2+1}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1+1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2+1 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1+1} y^{k_2+1} \\
& - \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \\
& \times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}} q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}} q_1^{n_1} q_2^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1+1} y^{k_2+1}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.46) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& L_{n_1+1, n_2+1}(f; q_1, q_2, x, y) - L_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = \\
& \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} q^{\frac{n_1(n_1+1)}{2}} q^{\frac{n_2(n_2+1)}{2}} x^{n_1+1} y^{n_2+1} \left[f \left(\frac{[n_1+1]_{q_1}}{q_1^{n_1+1}}, \frac{[n_2+1]_{q_2}}{q_2^{n_2+1}} \right) - f \left(\frac{[n_1]_{q_1}}{q_1^{n_1}}, \frac{[n_2]_{q_2}}{q_2^{n_2}} \right) \right] \\
& + \frac{1}{\ell_{n_1+1, q_1}(x)} \frac{1}{\ell_{n_2+1, q_2}(y)} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left\{ f \left(\frac{[k_1+1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1+1}}, \frac{[k_2+1]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2+1}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{[n_1-k_1]_{q_1}}{[n_1+1]_{q_1}} \frac{[n_2-k_2]_{q_2}}{[n_2+1]_{q_2}} f \left(\frac{[k_1+1]_{q_1}}{[n_1-k_1]_{q_1} q_1^{k_1+1}}, \frac{[k_2+1]_{q_2}}{[n_2-k_2]_{q_2} q_2^{k_2+1}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

(5.38)

$$\begin{aligned}
& - \frac{q^{n_1-k_1} [k_1+1]_{q_1}}{[n_1+1]_{q_1}} \frac{q^{n_2-k_2} [k_2+1]_{q_2}}{[n_2+1]_{q_2}} f \left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2}} \right) \Bigg\} \\
& \times q_1^{k_1} q_2^{k_2} \frac{[n_1+1]_{q_1} [n_1]_{q_1}}{[n_1-k_1]_{q_1} [k_1+1]_{q_1}} \frac{[n_2+1]_{q_2} [n_2]_{q_2}}{[n_2-k_2]_{q_2} [k_2+1]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_1-1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2-1 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1+1} y^{k_2+1} \\
& \frac{[n_1+1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^{n_1+1}} - \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^{n_1}} = \frac{1}{q_{n_1}^{n_1+1}} \geq 0, \quad \frac{[n_2+1]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^{n_2+1}} - \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^{n_2}} = \frac{1}{q_{n_2}^{n_2+1}} \geq 0
\end{aligned}$$

ve f azalan fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{[n_1+1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^{n_1+1}}, \frac{[n_2+1]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^{n_2+1}}\right) - f\left(\frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^{n_1}}, \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^{n_2}}\right) \leq 0 \quad (5.39)$$

sağlanır. f konveks olduğundan (5.31) ve (5.32) den

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{[k_1+1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1+1}}, \frac{[k_2+1]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2+1}}\right) \\ & - \frac{q^{n_1-k_1} [k_1+1]_{q_1}}{[n_1+1]_{q_1}} \frac{q^{n_2-k_2} [k_2+1]_{q_2}}{[n_2+1]_{q_2}} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1-k_1+1]_{q_1} q_1^{k_1}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2-k_2+1]_{q_2} q_2^{k_2}}\right) \\ & - \frac{[n_1-k_1]_{q_1}}{[n_1+1]_{q_1}} \frac{[n_2-k_2]_{q_2}}{[n_2+1]_{q_2}} f\left(\frac{[k_1+1]_{q_1}}{[n_1-k_1]_{q_1} q_1^{k_1+1}}, \frac{[k_2+1]_{q_2}}{[n_2-k_2]_{q_2} q_2^{k_2+1}}\right) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

dır. (5.39) ve (5.40), (5.38) de kullanılırsa ispat tamamlanır.



6. q -BBH OPERATÖRLERİNİN VORONOVSKAYA ASİMPOTOTİK YAKLAŞIMI

Burada $L_n(f; q, x)$ operatörünün Voronovskaya tipli teoremi verilecektir. Öncelikle teorem ve ispatında kullanılacak merkezi momentleri verelim.

6.1. Lemma

$L_n(f; q, x)$ operatörünün birinci merkezi momenti;

$$\mu_{n,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{[n+1]_q} \frac{-xq^n}{(1+x)} \text{ dir.}$$

Burada $\mu_{n,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = L_n\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}; q, x\right)$ olup ispatı açıktır.

6.2. Lemma

$L_n(f; q, x)$ operatörünün ikinci merkezi momenti;

$$\begin{aligned} \mu_{n,2}\left(\frac{x}{1+x}\right) = & \frac{1}{[n+1]_q} \left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \left(\frac{-[n]_q^2 q(1-q)}{(1+qx)[n+1]_q} + \frac{[n]_q(q-2)}{(1+qx)[n+1]_q} \right. \right. \\ & + \frac{1}{(1+qx)[n+1]_q} + \frac{qx[n]_q^2(1-q)^2}{(1+qx)[n+1]_q} + \frac{qx([n]_q(2q-3)+1)}{(1+qx)[n+1]_q} \Big) \\ & \left. + \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \frac{x}{1+x} \right) \end{aligned}$$

dir.

Burada $\mu_{n,2}\left(\frac{x}{1+x}\right) = L_n\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2; q, x\right)$ dir.

İspat:

$q^k [n-k+1]_q = [n+1]_q - [k]_q$, $q[k-1]_q = [k]_q - 1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\mu_{n,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) = L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; q, x \right) - 2 \frac{x}{1+x} L_n \left(\frac{t}{1+t}; q, x \right) + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 L_n(1; q, x) \text{ eşitliğinden}$$

basit bir hesaplama ile ispat tamamlanır. (Bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.)

6.3. Lemma

$L_n(f; q, x)$ operatörünün üçüncü merkezi momenti;

$$\begin{aligned} \mu_{n,3} \left(\frac{x}{1+x} \right) = & -\frac{x^3}{(1+x)^3} + \frac{3(1-q^n)x^3}{(1-q^{n+1})(1+x)^3} + \frac{(1-q^n)(1-q)^2 x}{(1-q^{n+1})^3 (1+x)} \\ & + \frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)^2 (2q^2+q^3)x^2}{(1-q^{n+1})^3 q(1+x)(1+qx)} \\ & + \frac{(-1+[n]_q)(1-q^n)(1-q)^2 (-1+[n]_q - q)q^3 x^3}{(1-q^{n+1})^3 (1+x)(1+qx)(1+q^2 x)} \\ & - \frac{3x \left(\frac{(1-q^n)(1-q)x}{(1-q^{n+1})^2 (1+x)} + \frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)qx^2}{(1-q^{n+1})^2 (1+x)(1+qx)} \right)}{(1+x)} \end{aligned}$$

dir.

İspat:

Burada

$$\begin{aligned} \mu_{n,3} \left(\frac{x}{1+x} \right) = & L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^3; q, x \right) \\ \mu_{n,3} \left(\frac{x}{1+x} \right) = & L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^3; q, x \right) - 3L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; q, x \right) \frac{x}{1+x} L_n(1; q, x) \\ & + 3L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} \right); q, x \right) \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 L_n(1; q, x) + \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 L_n(1; q, x) \end{aligned}$$

olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ispatı açıktır. (Bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.)

6.4. Lemma

$L_n(f; q, x)$ operatörünün dördüncü merkezi momenti;

$$\begin{aligned} \mu_{n,4}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= \frac{x^4}{(1+x)^4} - \frac{4(1-q^n)x^4}{(1-q^{n+1})(1+x)^4} + \frac{(1-q^n)(1-q)^3x}{(1-q^{n+1})^4(1+x)} \\ &+ \frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)^3(3q^2+3q^3+q^4)x^2}{(1-q^{n+1})^4q(1+x)(1+qx)} \\ &+ \frac{(-1+[n]_q)(1-q^n)(1-q)^3(-1+[n]_q-q)(3q^6+2q^7+q^8)x^3}{(1-q^{n+1})^4q^3(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\ &+ \frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)^3(-1+[n]_q-q)q^6(-1+[n]_q-q-q^2)x^4}{(1-q^{n+1})^4(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)} \\ &+ \frac{6x^2\left(\frac{(1-q^n)(1-q)x}{(1-q^{n+1})^2(1+x)} + \frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)qx^2}{(1-q^{n+1})^2(1+x)(1+qx)}\right)}{(1+x)^2} \\ &- \frac{4x\left(\frac{(1-q^n)(1-q)^2x}{(1-q^{n+1})^3(1+x)} + \frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)^2(2q^2+q^3)x^2}{(1-q^{n+1})^3q(1+x)(1+qx)}\right)}{1+x} \\ &- \frac{4x\left(\frac{(1-q^n)(-1+[n]_q)(1-q)^2(-1+[n]_q-q)q^3x^3}{(1-q^{n+1})^3(1+x)(1+qx)(1+q^2x)}\right)}{1+x} \end{aligned}$$

dir.

İspat :

$$\begin{aligned}
 \mu_{n,4}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_n\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^4; q, x\right) \\
 \mu_{n,4}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q, x\right) \\
 &\quad - 4L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^3; q, x\right) \frac{x}{1+x} L_n(1; q, x) \\
 &\quad + 6L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q, x\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 L_n(1; q, x) \\
 &\quad - 4L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q, x\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 L_n(1; q, x) \\
 &\quad + \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 L_n(1; q, x)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanıldığında ispatı açıkça görülebilir. (Bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.)

Şimdi de Voronovskaya tipli teoremin ispatında kullanacağımız limit değerlerini verelim. q pozitif tam sayılarının bir dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q = \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_q}{[n+1]_q} = 1$$

Ayrıca özel olarak $(q_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ seçimiyle $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = e$ elde edilir.

Yukarıdaki koşullar altında $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \mu_{n,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{-\alpha x}{(1+x)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \mu_{n,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{(1+\alpha x)x}{(1+x)^3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \mu_{n,3} \left(\frac{x}{1+x} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \mu_{n,4} \left(\frac{x}{1+x} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q^2 \mu_{n,4} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{3x^2(1+\alpha x)^2}{(1+x)^6}$$

limitleri bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.

6.1. Teorem

f fonksiyonu $[0, A]$ aralığında sınırlı ve $\frac{x}{1+x} \in [0, A]$ noktasında ikinci mertebeden türeve sahipse

$$f, f', f'' \in C[0, A] \text{ için } n \rightarrow \infty, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \left(L_n \left(f \left(\frac{t}{1+t} \right); q_n, x \right) - f \left(\frac{x}{1+x} \right) \right) = \\ \frac{-\alpha x}{(1+x)} f' \left(\frac{x}{1+x} \right) + \frac{x(1+\alpha x)}{(1+x)^3} f'' \left(\frac{x}{1+x} \right) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat :

f fonksiyonunun sabit bir $\frac{x}{1+x}$ noktası için Taylor formülü;

$$f\left(\frac{t}{1+t}\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) + f'\left(\frac{x}{1+x}\right)\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{x}{1+x}\right)\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2 \\ + \varepsilon\left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x}\right)\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2$$

biçimindedir. Taylor formülünün her iki tarafına $L_n(f; q_n, x)$ operatörü uygulanırsa;

$$L_n\left(f\left(\frac{t}{1+t}\right); q_n, x\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) + f'\left(\frac{x}{1+x}\right)L_n\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right); q_n, x\right) \\ + \frac{1}{2} f''\left(\frac{x}{1+x}\right)L_n\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2; q_n, x\right) \\ + L_n\left(\varepsilon\left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x}\right)\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2; q_n, x\right)$$

elde edilir.

$\mu_{n,1}$ ve $\mu_{n,2}$ son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$L_n\left(f\left(\frac{t}{1+t}\right); q_n, x\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) + \mu_{n,1}\left(\frac{x}{1+x}\right)f'\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\mu_{n,2}\left(\frac{x}{1+x}\right)f''\left(\frac{x}{1+x}\right) \\ + L_n\left(\varepsilon\left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x}\right)\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2; q_n, x\right)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $[n+1]_q$ ile çarpılır, $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \mu_{n,1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{-\alpha x}{(1+x)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \mu_{n,2}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x(1+\alpha x)}{(1+x)^3}$$

limitleri göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q L_n \left(f \left(\frac{t}{1+t} \right); q_n, x \right) - f \left(\frac{x}{1+x} \right) &= \frac{-\alpha x}{(1+x)} f' \left(\frac{x}{1+x} \right) + \frac{1}{2} \frac{x(1+\alpha x)}{(1+x)^3} f'' \left(\frac{x}{1+x} \right) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q L_n \left(\varepsilon \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_n, x \right) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q L_n \left(\varepsilon \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_n, x \right) = 0$$

olduğunu gösterilirse ispata bir adım daha yaklaşılmış olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned} &L_n \left(\varepsilon \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_n, x \right) \\ &\leq \sqrt{L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^4; q_n, x \right)} \sqrt{L_n \left(\varepsilon^2 \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right); q_n, x \right)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $[n+1]_q$ ile çarpılır, $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa;

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q L_n \left(\varepsilon \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_n, x \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n+1]_q^2 L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^4; q_n, x \right)} \sqrt{L_n \left(\varepsilon^2 \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right); q_n, x \right)} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q^2 L_n \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^4; q_n, x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q^2 \mu_{n,4} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{3x^2(1+\alpha x)^2}{(1+x)^6}$$

sonlu ve

$$\lim_{t \rightarrow x} L_n \left(\varepsilon^2 \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right); q_n, x \right) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q L_n \left(\varepsilon \left(\frac{t}{1+t}, \frac{x}{1+x} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2; q_n, x \right) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [n+1]_q \left(L_n \left(f \left(\frac{t}{1+t} \right); q_n, x \right) - f \left(\frac{x}{1+x} \right) \right) = \\ \frac{-\alpha x}{(1+x)} f' \left(\frac{x}{1+x} \right) + \frac{x(1+\alpha x)}{(1+x)^3} f'' \left(\frac{x}{1+x} \right) \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Böylece daha önce gösterilen q - BBH operatörlerinin süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızından daha iyi bir sonuç elde edilmiş olur.

7. İKİ DEĞİŞKENLİ q -BBH OPERATÖRLERİNİN VORONOVSKAYA ASİMPTOTİK YAKLAŞIMI

Burada $L_{n_1 n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ operatörünün Voronovskaya tipli teoremi verilecektir.

Öncelikle teorem ve ispatında kullanılacak merkezi momentleri verelim.

7.1. Lemma

$L_{n_1 n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ operatörünün birinci merkezi momentleri;

$$\mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{1}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \frac{-xq^{n_1}}{(1+x)},$$

$$\mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) = \frac{1}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} \frac{-yq^{n_2}}{(1+y)} \text{ dir.}$$

Burada

$$\mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) = L_{n_1 n_2} \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right),$$

$$\mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) = L_{n_1 n_2} \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)$$

olup ispatı açıktır.

7.2. Lemma

$L_{n_1 n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ operatörünün ikinci merkezi momentleri;

$$\begin{aligned}\mu_{n_1,2}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= \frac{1}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \left(\left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \left(\frac{-[n_1]_{q_{n_1}}^2 q(1-q)}{(1+qx)[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}(q-2)}{(1+qx)[n_1+1]_{q_{n_1}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+qx)[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \frac{qx[n_1]_{q_{n_1}}^2(1-q)^2}{(1+qx)[n_1+1]_{q_{n_1}}} + \frac{qx([n_1]_{q_{n_1}}(2q-3)+1)}{(1+qx)[n_1+1]_{q_{n_1}}} \right) \\ &\quad \left. + \frac{[n_1]_{q_{n_1}}}{[n_1+1]_{q_{n_1}}} \frac{x}{1+x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{n_2,2}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= \frac{1}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} \left(\left(\frac{y}{1+y} \right)^2 \left(\frac{-[n_2]_{q_{n_2}}^2 q(1-q)}{(1+qy)[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}(q-2)}{(1+qy)[n_2+1]_{q_{n_2}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+qy)[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \frac{qy[n_2]_{q_{n_2}}^2(1-q)^2}{(1+qy)[n_2+1]_{q_{n_2}}} + \frac{qy([n_2]_{q_{n_2}}(2q-3)+1)}{(1+qy)[n_2+1]_{q_{n_2}}} \right) \\ &\quad \left. + \frac{[n_2]_{q_{n_2}}}{[n_2+1]_{q_{n_2}}} \frac{y}{1+y} \right)\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\mu_{n_1,2}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_{n_1 n_2} \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2 ; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right), \\ \mu_{n_2,2}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= L_{n_1 n_2} \left(\left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2 ; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)\end{aligned}$$

dir.

İspat:

$$q^k [n-k+1]_q = [n+1]_q - [k]_q \quad , \quad q[k-1]_q = [k]_q - 1 \text{ eşitlikleri kullanılırsa}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) &= L_{n_1 n_2} \left(\left(\frac{t}{1+t} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
&- 2 \frac{x}{1+x} L_{n_1 n_2} \left(\frac{t}{1+t}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
&+ \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 L_{n_1 n_2} (1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
\mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) &= L_{n_1 n_2} \left(\left(\frac{s}{1+s} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
&- 2 \frac{y}{1+y} L_{n_1 n_2} \left(\frac{s}{1+s}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
&+ \left(\frac{y}{1+y} \right)^2 L_{n_1 n_2} (1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)
\end{aligned}$$

eşitliklerinden basit bir hesaplamayla ispat tamamlanır. (Bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.)

7.3. Lemma

$L_{n_1 n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ operatörünün üçüncü merkezi momentleri;

$$\begin{aligned}
\mu_{n_1,3} \left(\frac{x}{1+x} \right) &= -\frac{x^3}{(1+x)^3} + \frac{3(1-q^{n_1})x^3}{(1-q^{n_1+1})(1+x)^3} + \frac{(1-q^{n_1})(1-q)^2 x}{(1-q^{n_1+1})^3 (1+x)} \\
&+ \frac{(1-q^{n_1})(-1+[n]_{q_{n_1}})(1-q)^2 (2q^2+q^3)x^2}{(1-q^{n_1+1})^3 q(1+x)(1+qx)} \\
&+ \frac{(-1+[n]_{q_{n_1}})(1-q^{n_1})(1-q)^2 (-1+[n]_{q_{n_1}}-q)q^3 x^3}{(1-q^{n_1+1})^3 (1+x)(1+qx)(1+q^2 x)} \\
&- \frac{3x \left(\frac{(1-q^{n_1})(1-q)x}{(1-q^{n_1+1})^2 (1+x)} + \frac{(1-q^{n_1})(-1+[n]_{q_{n_1}})(1-q)qx^2}{(1-q^{n_1+1})^2 (1+x)(1+qx)} \right)}{(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{n_2,3}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= -\frac{y^3}{(1+y)^3} + \frac{3(1-q^{n_2})y^3}{(1-q^{n_2+1})(1+y)^3} + \frac{(1-q^{n_2})(1-q)^2 y}{(1-q^{n_2+1})^3(1+y)} \\
&+ \frac{(1-q^{n_2})(-1+[n]_{q_{n_2}})(1-q)^2(2q^2+q^3)y^2}{(1-q^{n_2+1})^3 q(1+y)(1+qy)} \\
&+ \frac{(-1+[n]_{q_{n_2}})(1-q^{n_2})(1-q)^2(-1+[n]_{q_{n_2}}-q)q^3 y^3}{(1-q^{n_2+1})^3(1+y)(1+qy)(1+q^2 y)} \\
&- \frac{3y\left(\frac{(1-q^{n_2})(1-q)y}{(1-q^{n_2+1})^2(1+y)} + \frac{(1-q^{n_2})(-1+[n]_{q_{n_2}})(1-q)qy^2}{(1-q^{n_2+1})^2(1+y)(1+qy)}\right)}{(1+y)}
\end{aligned}$$

dir.

Ispat:

$$\begin{aligned}
\mu_{n_1,3}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^3; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \\
\mu_{n_1,3}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^3; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \\
&- 3L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right)\frac{x}{1+x}L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&+ 3L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) + \\
&\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
\mu_{n_2,3}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}\right)^3; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \\
\mu_{n_2,3}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right)^3; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \\
&- 3L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right)\frac{y}{1+y}L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&+ 3L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right)\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) + \\
&\left(\frac{y}{1+y}\right)^3 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)
\end{aligned}$$

olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ispatı açıktır. (Bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.)

7.4. Lemma

$L_{n_1 n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ operatörünün dördüncü merkezi momentleri;

$$\begin{aligned}
 \mu_{n_1, 4} \left(\frac{x}{1+x} \right) &= \frac{x^4}{(1+x)^4} - \frac{4(1-q^{n_1})x^4}{(1-q^{n_1+1})(1+x)^4} + \frac{(1-q^{n_1})(1-q)^3 x}{(1-q^{n_1+1})^4 (1+x)} \\
 &+ \frac{(1-q^{n_1})(-1+[n_1]_{q_{n_1}})(1-q)^3 (3q^2 + 3q^3 + q^4)x^2}{(1-q^{n_1+1})^4 q(1+x)(1+qx)} \\
 &+ \frac{(-1+[n_1]_{q_{n_1}})(1-q^{n_1})(1-q)^3 (-1+[n_1]_{q_{n_1}} - q)(3q^6 + 2q^7 + q^8)x^3}{(1-q^{n_1+1})^4 q^3(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \\
 &+ \frac{(1-q^{n_1})(-1+[n_1]_{q_{n_1}})(1-q)^3 (-1+[n_1]_{q_{n_1}} - q)q^6(-1+[n_1]_{q_{n_1}} - q - q^2)x^4}{(1-q^{n_1+1})^4 (1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)} \\
 &+ \frac{6x^2 \left(\frac{(1-q^{n_1})(1-q)x}{(1-q^{n_1+1})^2 (1+x)} + \frac{(1-q^{n_1})(-1+[n_1]_{q_{n_1}})(1-q)qx^2}{(1-q^{n_1+1})^2 (1+x)(1+qx)} \right)}{(1+x)^2} \\
 &- \frac{4x \left(\frac{(1-q^{n_1})(1-q)^2 x}{(1-q^{n_1+1})^3 (1+x)} - \frac{(1-q^{n_1})(-1+[n_1]_{q_{n_1}})(1-q)^2 (2q^2 + q^3)x^2}{(1-q^{n_1+1})^3 q(1+x)(1+qx)} \right)}{1+x} \\
 &- \frac{4x \left(\frac{(1-q^{n_1})(-1+[n_1]_{q_{n_1}})(1-q)^2 (-1+[n_1]_{q_{n_1}} - q)q^3 x^3}{(1-q^{n_1+1})^3 (1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \right)}{1+x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{n_2,4}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= \frac{y^4}{(1+y)^4} - \frac{4(1-q^{n_2})y^4}{(1-q^{n_2+1})(1+y)^4} + \frac{(1-q^{n_2})(1-q)^3 y}{(1-q^{n_2+1})^4(1+y)} + \\
&\frac{(1-q^{n_2})(-1+[n_2]_{q_{n_2}})(1-q)^3(3q^2+3q^3+q^4)y^2}{(1-q^{n_2+1})^4 q(1+x)(1+qy)} \\
&+ \frac{(-1+[n_2]_{q_{n_2}})(1-q^{n_2})(1-q)^3(-1+[n_2]_{q_{n_2}}-q)(3q^6+2q^7+q^8)y^3}{(1-q^{n_2+1})^4 q^3(1+y)(1+qy)(1+q^2 y)} \\
&+ \frac{(1-q^{n_2})(-1+[n_2]_{q_{n_2}})(1-q)^3(-1+[n_2]_{q_{n_2}}-q)q^6(-1+[n_2]_{q_{n_2}}-q-q^2)y^4}{(1-q^{n_2+1})^4(1+y)(1+qy)(1+q^2 y)(1+q^3 y)} \\
&+ \frac{6y^2\left(\frac{(1-q^{n_2})(1-q)y}{(1-q^{n_2+1})^2(1+y)} + \frac{(1-q^{n_2})(-1+[n_2]_{q_{n_2}})(1-q)qy^2}{(1-q^{n_2+1})^2(1+y)(1+qy)}\right)}{(1+x)^2} \\
&- \frac{4y\left(\frac{(1-q^{n_2})(1-q)^2 y}{(1-q^{n_2+1})^3(1+y)} + \frac{(1-q^{n_2})(-1+[n_2]_{q_{n_2}})(1-q)^2(2q^2+q^3)y^2}{(1-q^{n_2+1})^3 q(1+y)(1+qy)}\right)}{1+y} \\
&- \frac{4y\left(\frac{(1-q^{n_2})(-1+[n_2]_{q_{n_2}})(1-q)^2(-1+[n_2]_{q_{n_2}}-q)q^3 y^3}{(1-q^{n_2+1})^3(1+y)(1+qy)(1+q^2 y)}\right)}{1+y}
\end{aligned}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\mu_{n_1,4}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^4; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) L_{n_1 n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
\mu_{n_1,4}\left(\frac{x}{1+x}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^4; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \\
&\quad - 4L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^3; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \frac{x}{1+x} L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&\quad + 6L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - \\
&\quad 4L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&\quad + \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{n_2,4}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}-\frac{y}{1+y}\right)^4; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) L_{n_1 n_2}(f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
\mu_{n_2,4}\left(\frac{y}{1+y}\right) &= L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right)^4; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \\
&\quad - 4L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right)^3; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \frac{y}{1+y} L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&\quad + 6L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \left(\frac{y}{1+y}\right)^2 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) - \\
&\quad 4L_{n_1 n_2}\left(\left(\frac{s}{1+s}\right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y\right) \left(\frac{y}{1+y}\right)^3 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y) \\
&\quad + \left(\frac{y}{1+y}\right)^4 L_{n_1 n_2}(1; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanıldığında ispatı açıkça görülebilir. (Bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.) Şimdi de Voronovskaya tipli teoremin ispatında kullanacağımız limit değerlerini verelim.

q pozitif tam sayılarının bir dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın;

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{n_1} = 1, \quad \lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{n_1}^{n_1} = \alpha$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1] = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1] = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{[n_1]}{[n_1 + 1]} = 1$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{n_2} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{n_2}^{n_2} = \beta$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2] = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1] = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{[n_2]}{[n_2 + 1]} = 1$$

Ayrıca özel olarak $(q_{n_1}) = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)$ ve $(q_{n_2}) = \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)$ seçimiyle $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{n_1}^{n_1} = e$ ve

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{n_2}^{n_2} = e \text{ elde edilir.}$$

Yukarıdaki koşullar altında $\alpha > 0, \beta > 0$, $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ olmak üzere;

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1] \mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{-\alpha x}{(1+x)},$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1] \mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) = \frac{-\beta y}{(1+y)},$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1] \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{(1+\alpha x)x}{(1+x)^3},$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1] \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) = \frac{(1+\beta y)y}{(1+y)^3},$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1] \mu_{n_1,3} \left(\frac{x}{1+x} \right) = 0,$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1] \mu_{n_2,3} \left(\frac{y}{1+y} \right) = 0,$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1] \mu_{n_1,4} \left(\frac{x}{1+x} \right) = 0,$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1] \mu_{n_2,4} \left(\frac{y}{1+y} \right) = 0,$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1]^2 \mu_{n_1,4} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{3x^2(1+\alpha x)^2}{(1+x)^6},$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1]^2 \mu_{n_2,4} \left(\frac{y}{1+y} \right) = \frac{3y^2(1+\beta y)^2}{(1+y)^6}$$

limitleri bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.

7.1. Teorem

f fonksiyonu $[0, A]$ aralığında sınırlı ve $\left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \in [0, A]$ noktasında ikinci mertebeden türevelere sahipse

$$f \in C(I^2) \text{ için } \forall x, y > 0$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} [n_1 + 1][n_2 + 1] \left(L_{n_1 n_2} f \left(\frac{t}{1+t}, \frac{s}{1+s} \right) - f \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \right) \\
&= -\frac{\alpha x}{1+x} f_x \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) - \frac{\beta y}{1+y} f_y \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{x(1+\alpha x)}{(1+x)^3} f_{xx} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) + 2 f_{xy} \frac{\alpha x}{1+x} \frac{\beta y}{1+y} + \frac{y(1+\beta y)}{(1+y)^3} f_{yy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \right]
\end{aligned}$$

dir.

İspat:

f fonksiyonunun iki değişkenli Taylor formülü;

$$\begin{aligned}
f \left(\frac{t}{1+t}, \frac{s}{1+s} \right) &= f \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \\
&+ \left[f_x \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right) + f_y \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[f_{xx} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2 \right. \\
&+ 2 f_{xy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right) \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \\
&\left. + f_{yy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2 \right] \\
&+ r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2 + \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Taylor formülünün her iki tarafına $L_{n_1 n_2} (f; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y)$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& L_{n_1 n_2} \left(\left(f \left(\frac{t}{1+t}, \frac{s}{1+s} \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) - f \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \right) \\
&= \left[f_x \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) + f_y \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[f_{xx} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) \right. \\
&+ 2 f_{xy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) \mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) \\
&+ \left. f_{yy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right] \\
&+ L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \left(\mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) + \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)
\end{aligned}$$

Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa ve limit alınır;

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} [n_1 + 1][n_2 + 1] L_{n_1 n_2} \left(\left(f \left(\frac{t}{1+t}, \frac{s}{1+s} \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) - f \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) \right) = \\
& \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} \left[f_x \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) [n_1 + 1] \mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) + f_y \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) [n_2 + 1] \mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} \left[f_{xx} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) [n_1 + 1] \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) \right. \\
&+ 2 f_{xy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) [n_1 + 1] \mu_{n_1,1} \left(\frac{x}{1+x} \right) [n_2 + 1] \mu_{n_2,1} \left(\frac{y}{1+y} \right) \\
&+ \left. f_{yy} \left(\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y} \right) [n_2 + 1] \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right] \\
&+ \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \left([n_1 + 1] \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) + [n_2 + 1] \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \left([n_1 + 1] \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) + [n_2 + 1] \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) = 0$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2 + \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2 \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) \\
& \leq \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} \sqrt{L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)} \\
& \sqrt{\lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} L_{n_1 n_2} \left([n_1 + 1] \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2 + [n_2 + 1] \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)^2}
\end{aligned}$$

burada;

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} L_{n_1 n_2} \left([n_1 + 1] \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x} \right)^2 + [n_2 + 1] \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)^2 \\
& = \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} [n_1 + 1]^2 \left(L_{n_1 n_2} \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)^4 \right. \\
& \quad + 2[n_1 + 1] L_{n_1 n_2} \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)^2 [n_2 + 1] L_{n_1 n_2} \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)^2 \\
& \quad \left. + [n_2 + 1]^2 L_{n_1 n_2} \left(\frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y}; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right)^4 \right) \\
& = \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} \left([n_1 + 1]^2 \mu_{n_1, 4} \left(\frac{x}{1+x} \right) \right. \\
& \quad + 2[n_1 + 1] \mu_{n_1, 2} \left(\frac{x}{1+x} \right) [n_2 + 1] \mu_{n_2, 2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \\
& \quad \left. + [n_2 + 1]^2 \mu_{n_2, 4} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1]^2 \mu_{n_1, 4} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{3x^2 (1+\alpha x)^2}{(1+x)^6},$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1]^2 \mu_{n_2, 4} \left(\frac{y}{1+y} \right) = \frac{3y^2 (1+\beta y)^2}{(1+y)^6},$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} [n_1 + 1] \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{x(1+\alpha x)}{(1+x)^3},$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} [n_2 + 1] \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) = \frac{y(1+\beta y)}{(1+y)^3}$$

limitleri sonlu ve

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ s \rightarrow y}} L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right)^2; q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} L_{n_1 n_2} \left(r \left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}, \frac{s}{1+s} - \frac{y}{1+y} \right) \left([n_1 + 1] \mu_{n_1,2} \left(\frac{x}{1+x} \right) + [n_2 + 1] \mu_{n_2,2} \left(\frac{y}{1+y} \right) \right); q_{n_1}, q_{n_2}, x, y \right) = 0$$

elde edilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

Böylece daha önce gösterilen iki değişkenli q - BBH operatörlerinin süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızından daha iyi bir sonuç elde edilmiş olur.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde tek ve iki değişkenli q -tipli Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin bazı yaklaşım özellikleri ve süreklilik modülü ile Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir. Ayrıca bu operatörlerin monotonluk özellikleri verilmiştir.

Son olarak tek ve iki değişkenli q -tipli Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin Voronovskaya Asimptotik Yaklaşımı elde edilmiş ve süreklilik modülü ile Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar yardımıyla incelenen yaklaşım hızından daha iyi bir sonuç elde edildiği görülmüştür.





KAYNAKLAR

- Altın, A., Doğru, O., and Özarslan, M. A. (2005). On the approximation properties of bivariate Bleimann, Butzer and Hahn operators. *WSEAS Transactions on Mathematics* 4(4), 327–332.
- Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. (1999). *Special functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 481-552.
- Ayık, A (2018). *Charlier polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin Kantorovich tipi genelleştirilmesi*. Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 10-11.
- Bleimann, G., Butzer, P.L., and Hahn, L. (1980). A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 83(3), 255–262.
- Cao, F., Ding, C. and Xu, Z. (2005). On multivariate Baskakov operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 307(1), 274–291.
- Cheney, E.W., and Charma, A. (1964). Bernstein power series. *Canadian Journal of Mathematics* 16, 241–252.
- Demirtürk B. (2005). *Balasz operatörleri ve bazı genelleşmeleri için Korovkin tipli hata tahminleri*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 27-28.
- Doğru, O., and Aral, A. (2007). Bleimann, Butzer and Hahn operators based on the q -Integers. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications*, 2007(Article I D 79410.).
- Doğru, O. and Gupta, V. (2005). Monotonicity and the asymptotic estimate of Bleimann, Butzer and Hahn operators based on q -integers. *Georgian Mathematical Journal*, 12; 415–422.
- Ersan, S. (2008). *İki değişkenli q -Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerinin yaklaşım özellikleri*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 13-32.
- Ersan, S. and Doğru, O. (2009). Statistical approximation properties of q -Bleimann, Butzer and Hahn operators. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(7–8).
- Gadjiev, A.D. and Cakar, Ö. (1999). On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semiaxis. *Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, 19(5), 21–26.
- Hacıyev, A. ve Hacısalıhoğlu, H. H. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara: Ankara Üniversitesi Yayınları, 100.

- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, 90, 961–964.
- Lenze, B. (1990). Bernstein-Baskakov-Kantorovich operators and Lipschitz-type maximal functions. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 58.(Approx. Th.), 469–496.
- Lorentz, G. G. (1966). *Approximation of functions*. Newyork: Holt, Rinehart and Winston, 10-188.
- Lupaş, A. (1987). q -analogue of the Bernstein operator. *University of Cluj- Napoca. Seminar on Numerical and Statistical Calculus*, (9), 35-51.
- Ostrowska, S. (2006). On the Lupaş q -analogue of the Bernstein operator. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 36(5), 1615–1629.
- Phillips, G. M. (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers. *The heritage of P.L.Chebyshev: Annals of Numerical Mathematics*, 4, 511–518.
- Temple, W. B. (1954). Stieltjes integral representation of convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 21, 527–531.
- Della Vecchia, B. (1991). Some Properties of a Rational Operator of Bernstein- Type. *Istituto per Applicazioni della Matematica-C.N.R. Via Pietro Castellino, 111-80131 Napoli, Italy*.
- Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, 115, 17–19.
- Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente. *Sitzungsberichte der Academie. Berlin*, 633–639, 789–805. 46.
- Zygmund, A. (1959). *Trigonometric Series*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1.



GAZİ GELECEKTİR...