ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TİP -2 ESNEK KÜMELER

Melike MUŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

TEZ ONAYI

Melike MUŞ tarafından hazırlanan **"Tip-2 Esnek Kümeler"** adlı tez çalışması 04/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Faruk KARAASLAN

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Doç. Dr. İrfan DELİ
Matematik Eğitimi
Kilis 7 Aralık Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Faruk KARAASLAN
Matematik Bölümü
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA
Matematik Bölümü
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum '**Tip- 2 Esnek Kümeler**' konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı'yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (04/08/2022).

Melike MUŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TİP- 2 ESNEK KÜMELER

Melike MUŞ

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Faruk KARAASLAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde esnek kümeler ile ilgili literatür taraması ve tezin amacı sunulmuştur. İkinci bölümde esnek küme tanımı ve esnek küme işlemleri örnekleri ile açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, tip-2 esnek kümenin tanımı ve küme işlemleri tanıtılmış ve örnekleri verilmiştir. Ayrıca bu bölümde tip-2 esnek küme işlemleri ve tip-2 esnek kümelerin görüntü kümeleri ile ilgili bazı özellikler sunulmaktadır. Dördüncü bölümde, tip-2 esnek kümelerin karar verme problemine bir uygulaması verilmiştir. Beşinci bölümde, tezin sonuçları ile ilgili bazı açıklamalar verilmiştir.

2022, 52 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık küme, Tip-2 bulanık küme, Esnek Küme, Tip-2 esnek küme, Tip-2 esnek küme işlemleri

ABSTRACT

Master of Science Thesis

TYPE – 2 SOFT SETS

Melike MUŞ

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Faruk KARAASLAN

This thesis consists of five sections. In the first section, a literature review related to soft sets and the aim of the thesis is presented. In the second section, the definition of the soft set and soft set operations are explained by their examples. In the third section, definition of type-2 soft set and their set operations are introduced, and their examples are given. Also, in this section, some properties related to type-2 soft set operations and images of the type-2 soft set are presented. In the fourth section, an application of type-2 soft sets to the decision-making problem is given. In section five, some information is given related to the results of the thesis.

2022, 52 pages

Keywords: Fuzzy set, Type-2 fuzzy sets, Soft set, Type-2 soft set, Type-2 soft set operations

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez tip-2 esnek küme kavramını tanıtacak Türkçe bir kaynak olması amacıyla derleme olarak hazırlanmıştır. Bu tezdeki temel kaynaklar tezin kaynaklar kısmında da belirtilen Chatterjee *et al.* (2015) ve Hayat *et al.* (2018) tarafında yayınlanan Tip-2 Esnek kümeler ile ilgili makalelerdir.

Bu tez çalışmasında desteğini esirgemeyen, bilgisini benimle cömertçe paylaşan, kıymetli vaktinden ayırıp sabırla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Faruk KARAASLAN'a teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca zamanlarından çalıp mesleğimle geçirdiğim anları anlayışla karşılayan sevgili eşime, canım oğlum İhsan'a ve araştırmalarıma vakit ayırabilmem için çok emek veren pek kıymetli kayınvalidem ve kayınbabama teşekkür ederim.

Melike MUŞ
Çankırı, Ağustos 2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

R	Reel sayılar kümesi
Z	Tam sayılar kümesi
N	Doğal sayılar kümesi
$\mu \leq \nu$	ν, μ ’yü kapsar
$P(U)$	U’nun kuvvet kümesi
Φ	Bos esnek küme
Ω_A	Tam esnek küme
$\subseteq$	Esnek alt küme
$\cup$	Esnek kümelerin birleşimi
$\cap$	Esnek kümelerin arakesiti
$\sqcup$	Tip-2 esnek kümelerin birleşimi
$\sqcap$	Tip-2 esnek kümelerin arakesiti
$\sqsubseteq$	Tip-2 esnek küme alt kümesi
$\vee$	Esnek kümelerin VEYA çarpımı
$\wedge$	Esnek kümelerin VE çarpımı
$(\mathcal{F}, A)$	Esnek fonksiyon
$(\mathcal{F}, A)^{c}$	Esnek fonksiyon tümleyeni
$[\mathfrak{F}, A]$	Tip-2 esnek küme
$h([\mathfrak{F}, A])$	Bir esnek kümenin görüntüsü
$h^{-1}([\mathfrak{F}, A])$	Bir esnek kümenin ters görüntüsü
$\mathcal{F}^{c}$	Tip-2 esnek kümenin tümleyeni
$\widetilde{\mathbb{A}}$	Mutlak tip-2 esnek küme
$\widetilde{\Phi}$	Boş tip-2 esnek küme

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaşılan birçok olayı kesin ve net bir biçimde modellemek her zaman mümkün olmayabilir. Karşılaşılan bazı olaylar belirsizlik içermekle birlikte doğrusal da olmayabilir. Bu tip belirsizlikler matematikle birlikte diğer bilim dallarında da büyük çıkmazlar neden olmaktadır. Bilim insanları belirsizlikleri anlamak ve belirsizlik içeren problemleri modellemek için birçok teori geliştirmişlerdir. Zadeh (1965)'in ortaya attığı bulanık kümeler teorisi, Pawlak (1982) tarafında ortaya atılan yaklaşımlı kümeler teorisi, Molodtsov (1999)'un esnek kümeler teorisi belirsizlikleri modellemek için sık kullanılan problem modelleme yaklaşımlardan bazılarıdır.

Bulanık kümeler teorisi belirsizlik içeren problemlerle başa çıkmak için kullanışlı bir modelleme yaklaşımı olmasına rağmen, gerçek hayatın kompleks problemleri göz önüne alındığında bazı yetersizliklere sahiptir. Bu durum bulanık kümelerin bazı yeni tiplerinin ve genellemelerinin gelişmesine yol açmıştır. Goguen (1967) tarafından L-Fuzzy kümeler teorisi, Zadeh (1975) tarafından aralık değerli bulanık küme teorisi, tip-2 bulanık küme teorisi (Zadeh 1975), yaklaşımlı kümeler teorisi (Pawlak 1982) ve sezgisel bulanık kümeler teorisi (Atanassov 1986) bunlardan birkaçıdır.

Yukarıda bahsedilen bulanık küme ve bulanık kümelerin genellemesi olan yaklaşımlar üyelik fonksiyonları ve üye olmama fonksiyonları ile karakterize edilmektedir. Üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi her zaman kolay olmamaktadır. Bu ise bahsedilen küme teorileri için bir kısıtlılıktır. Bu kısıtlılığı elimine etmek için Molodtsov (1999) tarafından üyelik fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan modellemede kullanılabilecek esnek küme olarak isimlendirilen bir küme teorisi ortaya atılmıştır. Bir esnek küme, değerlendirilecek elemanların parametrize edilmiş bir ailesidir. Molodtsov (1999), çalışmasında Zadeh'in bulanık kümelerinin özel tipte esnek kümeler olduğuna dikkat çekmiştir. Bu açıdan, esnek küme teorisinin parametreleştirme tekniğinin, gerçek hayat problemlerindeki uygulama alanlarında, bulanık küme teorisinin üyelik fonksiyonu yaklaşımına göre daha anlaşılır olduğu ve sonuca daha iyi ulaştırdığı söylenebilir. Molodtsov 'un makalesinden sonra esnek kümeler teorisi hızlı bir gelişme gösterdi.

Maji ve Roy (2002) bir parametre indirgeme metodu ortaya atarak esnek kümeleri bir karar verme problemine uygulamışlardır. Ayrıca, Maji ve Roy (2003) esnek kümelerle ilgili bazı yeni kavramları ve esnek küme işlemlerini tanımlamıştır. Pei ve Miao (2005) esnek kümelerin özel bir bilgi sistemi türü olduğunu göstermiştir. Çağman ve Enginoğlu (2010) esnek küme işlemlerini yeniden tanımlamış ve bir-kes (Birleşim-kesişim) operatörlerini tanımlayarak karar verme problemine uygulamışlardır. Esnek kümelerin diğer bazı uygulamaları, Esnek küme teorisi kullanılarak doku sınıflandırması (Mushrif *et al.* 2006) ve veri analizi (Zou ve Xiao 2008) çalışmasını içerir.

Bir bulanık küme, başlangıç evrenindeki elemanların, güzel, pahalı, ucuz vb. kişiden kişiye ya da problemin özelliğine göre değerlendirilen sıfatlara göre değerlendirilmesini sağlayan bir modelleme yaklaşımıdır. Bu yaklaşım kullanışlı olmasına rağmen, çok güzel, çok çok güzel, az güzel şeklinde güzel sıfatını derecelendirilmesinde yeterli değildir. Bu yüzden, Zadeh (1975) tip-2 bulanık küme kavramıyla bu modelleme sorununa bir çözüm getirmiştir. Esnek kümeler bulanık kümelerdeki üyelik fonksiyonu belirleme sorununa bir çözüm getirmiş olsa da tip-2 bulanık kümelerdeki benzer soruna çözüm sunmamıştır. Bu yüzden parametre kümesini parametrize eden bir yaklaşım olan tip-2 esnek küme yaklaşımı Chatterjee et *al.* (2015) tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışmasında Chatterjee et *al.* (2015) tip-2 esnek küme kavramını ve esnek kümeler arasındaki birleşim, kesişim, VE çarpımı, VEYA çarpımı gibi işlemleri tanımlamış ayrıca bazı özelliklerini incelemiştir. 2018 yılında Hayat *et al.* (2018) tarafından bazı yeni tip-2 esnek küme işlemleri tanımlanmış ve bu işlemlerin özellikleri incelemiştir. Ayrıca tanımlanan yeni kesişim, birleşim işlemlerinin De Morgan kurallarını sağladığı gösterilerek De Morgan kurallarının gerçek hayattaki bir uygulaması sunulmuştur.

Bu tezde, Chatterjee et *al.* (2015) ve Hayat *et al.* (2018) tarafından yapılan çalışmalar temel alınarak tip-2 esnek küme yaklaşımın anlaşılmasına katkı sağlanacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1. (Molodtsov 1999) U bir başlangıç evreni, E bir parametre kümesi, $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $\mathcal{F}: A \rightarrow P(U)$ tanımlı fonksiyona bir esnek küme denir ve $(\mathcal{F}, A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2. $U = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$ bir çocuğa doğum gününde alınabilecek hediye oyuncakların kümesi, $E = \{\text{pahalı, pil ile çalışan, eğitici, renkli, ucuz, yeni, eski}\}$ ise değerlendirmede temel alınacak parametrelerin kümesini göstersin. Çocuğun ailesi tarafından belirlenen parametrelerin kümesi ise $A = \{\text{pahalı, pil ile çalışan, eğitici, renkli, ucuz}\} \subseteq E$ olsun. Oyuncakçı tarafından yapılan değerlendirme sonuçları aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{F}(\text{pahalı})=\{o_2, o_4\}$$
$$\mathcal{F}(\text{pil ile çalışan}) =\{o_1, o_3\}$$
$$\mathcal{F}(\text{eğitici}) =\{o_3, o_4, o_5\}$$
$$\mathcal{F}(\text{ucuz}) =\{o_1, o_3, o_6\}$$
$$\mathcal{F}(\text{renkli}) =\{o_1, o_2, o_6\}$$

O halde, $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathcal{F} = \{(\text{pahalı}, \{o_2, o_4\}), (\text{pil ile çalışan}, \{o_1, o_3\}), (\text{eğitici}, \{o_3, o_4, o_5\}), (\text{ucuz}, \{o_1, o_3, o_6\}), (\text{renkli}, \{o_1, o_2, o_6\})\}.$$

Tanım 2.3. (Maji ve Roy 2003) U evrensel kümesi ve E parametre kümesinin üzerinde tanımlı iki esnek küme $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ olsun. Eğer;

i. $A \subset B$ ve

ii. $\forall e \in A, \mathcal{F}(e) \subseteq \mathcal{G}(e)$

ise $(\mathcal{F}, A\ )$ esnek kümesine $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $(\mathcal{F}, A) \mathrel{\tilde{\subseteq}} (\mathcal{G}, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. (Maji ve Roy 2003) U evrensel kümesi ve E parametre kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ olsun. Eğer $(\mathcal{G}, B) \mathrel{\tilde{\subseteq}} (\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{F}, A) \mathrel{\tilde{\subseteq}} (\mathcal{G}, B)$ ise $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ ‘ye U kümesi üzerinde esnek eşit küme denir.

Tanım 2.5. (Çağman ve Enginoğlu 2010) U evrensel kümesi ve E parametre kümesin üzerinde tanımlı bir esnek küme $(\mathcal{F}, A)$ olsun. $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesinin tümleyeni $\mathcal{F}^c : A \rightarrow P(U)$ dönüşümüyle tanımlanır ve $(\mathcal{F}, A)^c = (\mathcal{F}^c, A)$ ile gösterilir.

Burada $\mathcal{F}^c(e) = \{\mathcal{F}(e)\}^c = U - \mathcal{F}(e),\ \forall e \in A.$

Dikkat edilmeli ki, $((\mathcal{F}, A)^c)^c = (\mathcal{F}, A)$ olduğu açıktır.

Örnek 2.5. Örnek 2.2 de verilen $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesi göz önüne alınırsa, $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesinin tümleyeni aşağıdaki gibi elde edilir;

$$(\mathcal{F}, A)^c = \begin{Bmatrix} (\text{pahalı olmayan oyuncaklar} = \{o_1, o_3, o_5, o_6\}), \\ (\text{pil ile çalışmayan oyuncaklar} = \{o_2, o_4, o_5, o_6\}), \\ (\text{eğitici olmayan oyuncaklar} = \{o_1, o_2, o_6\}), \\ (\text{ucuz olmayan oyuncaklar} = \{o_2, o_4, o_5\}), \\ (\text{renkli olmayan oyuncaklar} = \{o_2, o_4, o_5\}) \end{Bmatrix}$$

Tanım 2.6. (Maji *et al.* 2003) $(\mathcal{F}, A)$, U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\forall e \in A$, $\mathcal{F}(e) = \emptyset$ ise $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesine boş esnek küme denir. Bir boş esnek küme Φ ile gösterilir.

Örnek 2.6. Kabul edelim ki $U = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$, göz önüne alınan şartlar altındaki silikon malzemeden yapılan oyuncakların kümesi ve $A = \{\text{plastik}, \text{ahşap}, \text{metal}, \text{karton}\}$ parametre kümesi verilsin. $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesi oyuncakların yapı malzemesi olarak tanımlansın. Plastik malzemeden yapılan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{F}(\text{plastik})$; Ahşap malzemeden yapılan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{F}(\text{ahşap})$; Metal malzemeden yapılan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{F}(\text{metal})$; yoluyla tanımlanan $(\mathcal{F}, A)$, yaklaşımların bir koleksiyonu olarak

$$(\mathcal{F}, A) = \begin{Bmatrix} \text{plastikten yapılan oyuncaklar} = \emptyset, \\ \text{ahşaptan yapılan oyuncaklar} = \emptyset, \\ \text{metalden yapılan oyuncaklar} = \emptyset, \\ \text{kartondan yapılan oyuncaklar} = \emptyset \end{Bmatrix}$$

şeklinde yazılan $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesi bir boş esnek kümedir.

Tanım 2.7. (Maji *et al.* 2003) U üzerinde tanımlı $(\mathcal{F}, A)$ esnek kümesi verilsin. $\forall e \in A$ için $\mathcal{F}(e) = U$ ise $(\mathcal{F}, A)$ kümesi mutlak esnek küme olarak isimlendirilir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Örnek 2.7. Kabul edelim ki U silikon malzemeden yapılan oyuncakların kümesi ve $B = \{\text{plastik değil}, \text{ahşap değil}, \text{metal değil}, \text{karton değil}\}$ parametre kümesi olmak üzere beş oyuncaktan oluşan $U = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\}$ başlangıç evrenini göz önüne alalım. $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümesi ‘oyuncakların yapı malzemesi’ olarak tanımlansın. Plastik olmayan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{G}(\text{plastik değil})$; ahşap olmayan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{G}(\text{ahşap değil})$; metal olmayan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{G}(\text{metal değil})$, karton olmayan oyuncaklar anlamına gelen $\mathcal{G}(\text{karton değil})$ yoluyla tanımlanan $(\mathcal{G}, B)$ yaklaşımlarının bir koleksiyonu olarak $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümesi;

$$(\mathcal{G}, B) = \begin{Bmatrix} \text{plastik olmayan oyuncaklar} = \{\mathrm{o}_1, \mathrm{o}_2, \mathrm{o}_3, \mathrm{o}_4, \mathrm{o}_5\}, \\ \text{ahşap olmayan oyuncaklar} = \{\mathrm{o}_1, \mathrm{o}_2, \mathrm{o}_3, \mathrm{o}_4, \mathrm{o}_5\}, \\ \text{metal olmayan oyuncaklar} = \{\mathrm{o}_1, \mathrm{o}_2, \mathrm{o}_3, \mathrm{o}_4, \mathrm{o}_5\}, \\ \text{karton olmayan oyuncaklar} = \{\mathrm{o}_1, \mathrm{o}_2, \mathrm{o}_3, \mathrm{o}_4, \mathrm{o}_5\} \end{Bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümesi bir mutlak esnek kümedir.

Önerme 2.8. (Maji *et al.* 2003) $\tilde{A}$ ve Φ sırasıyla U başlangıç evreni üzerinde mutlak esnek küme ve boş esnek küme olmak üzere

i. $\tilde{A}^c = \Phi$

ii. $\Phi^c = \tilde{A}$ dir.

Tanım 2.9. (Maji *et al.* 2003) $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$, U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ 'nin ∧ (VE) çarpımı,

$$(\mathcal{F}, A) \wedge (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, A \times B)$$

ile tanımlanan bir esnek kümedir. Burada, $\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \cap \mathcal{G}(\beta)$, $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ dir.

Tanım 2.10. (Maji *et al.* 2003) $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$, U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerinin ∨ (VEYA) çarpımı

$$(\mathcal{F}, A) \vee (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{K}, A \times B)$$

ile tanımlanan bir esnek kümedir. Burada, $\mathcal{K}(\alpha, \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \cup \mathcal{G}(\beta)$, $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ dir.

Önerme 2.11. (Maji *et al.* 2003) $(\mathcal{F}, A)$ ve (G, B), U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun.

i. $\big((\mathcal{F}, A) \vee (\mathcal{G}, B)\big)^{\boldsymbol{c}} = (\mathcal{F}, A)^c \wedge (\mathcal{G}, B)^c$

ii. $\big((\mathcal{F}, A) \wedge (\mathcal{G}, B)\big)^c = (\mathcal{F}, A)^c \vee (\mathcal{G}, B)^c$ dır.

Tanım 2.13. (Maji *et al.* 2003) $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}\ , B)$, U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerinin $(\mathcal{H}\ ,\ C = A \cup B)$ ile ifade edilen ve $(\mathcal{F}, A)\ \tilde{\cup}\ (\mathcal{G}, B)$ ile gösterilen birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{H}(e)=\begin{cases}\mathcal{F}(e) & ,e\in A-B \; ise\\ \mathcal{G}(e) & ,e\in B-A \; ise\\ \mathcal{F}(e)\cup\mathcal{G}(e) & ,e\in A\cap B\end{cases}$$

dir.

Tanım 2.14. (Maji *et al.* 2003) $(\mathcal{F},A)$ ve $(\mathcal{G},B)$, U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. $(\mathcal{F},A)$ ve $(\mathcal{G},B)$ esnek kümelerinin $(\mathcal{H}, C=A\cap B)$ ile ifade edilen ve $(\mathcal{F},A)\,\tilde{\cap}\,(\mathcal{G},B)$ ile gösterilen kesişimi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$(\mathcal{H},C)=(\mathcal{F},A)\,\tilde{\cap}\,(\mathcal{G},B).$$

Burada $\mathcal{H}(e)=\mathcal{F}(e)\cap\mathcal{G}(e)\;\;\forall e\in A\cap B$ dir.

Not 2.15. (Feng 2010) $(\mathcal{F},A)$ ve $(\mathcal{G},B)$, U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Bu durumda De Morgan kuralları geçerli değildir. Yani;

i. $\left((\mathcal{F},A)\,\tilde{\cup}\,(\mathcal{G},B)\right)^c \;\tilde{\subseteq}\; (\mathcal{F},A)^c\,\tilde{\cap}\,(\mathcal{G},B)^c$

ii. $\left((\mathcal{F},A)\,\tilde{\cap}\,(\mathcal{G},B)\right)^c \;\tilde{\subseteq}\; (\mathcal{F},A)^c\,\tilde{\cup}\,(\mathcal{G},B)^c$.

Eğer parametre kümeleri aynı alınırsa, De Morgan kuralları geçerlidir. Yani;

i. $\left((\mathcal{F},A)\,\tilde{\cup}\,(\mathcal{G},A)\right)^c = (\mathcal{F},A)^c\,\tilde{\cap}\,(\mathcal{G},A)^c$

ii. $\left((\mathcal{F},A)\,\tilde{\cap}\,(\mathcal{G},A)\right)^c = (\mathcal{F},A)^c\,\tilde{\cup}\,(\mathcal{G},A)^c$.

Tanım 2.17. (Nazmul 2014) X ve Y boştan farklı iki küme ve $f\colon X\to Y$ dönüşümü verilsin. $S(X,A)$ ve $S(Y,A)$ sırasıyla X kümesi ve Y kümesi üzerinde tanımlanan bütün esnek kümelerin kolleksiyonları olsun.

i. $(\mathcal{F},A)\in S(X,A)$ esnek kümesinin f dönüşümü altınndaki görüntü kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f\left((\mathcal{F},A)\right)=(f(\mathcal{F}),A)$$

Burada $[f(\mathcal{F})](\alpha) = f[\mathcal{F}(\alpha)]$ ve $\forall\alpha \in A$ dir.

ii. $(\mathcal{G}, A)$ esnek kümesinin f dönüşümü altınndaki ters görüntüsü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f^{-1}\big((\mathcal{G}, A)\big) = (f^{-1}(\mathcal{G}), A)$$

Burada $[f^{-1}(\mathcal{G})](\alpha) = f^{-1}[\mathcal{G}(\alpha)]$ ve $\forall\alpha \in A$ dir.

Önerme 2.18. (Nazmul 2014) X ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere $f: X \to$Y dönüşümü verilsin. f, birebir bir fonksiyon olmak üzere $(\mathcal{F}_1, A), (\mathcal{F}_2\ , A) \in (S, A)$ için;

i. $(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\subseteq}\ (\mathcal{F}_2, A) \Rightarrow f(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\subseteq}\ f(\mathcal{F}_2, A)$

ii. $f[(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cup}\ (\mathcal{F}_2, A)] = f(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cup}\ f(\mathcal{F}_2, A)$

iii. $f[(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cap}\ (\mathcal{F}_2, A)]\ \tilde{\subseteq}\ f(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cap}\ f(\mathcal{F}_2, A)$ dir.

Önerme 2.19. (Nazmul 2014) X ve Y boş kümeden farklı iki küme olmak üzere $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $(\mathcal{F}_1, A), (\mathcal{F}_2, B) \in (S, A)$ için;

i. $(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\subseteq}\ (\mathcal{F}_2, A) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\subseteq}\ f^{-1}(\mathcal{F}_2, A)$

ii. $f^{-1}[(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cup}\ (\mathcal{F}_2, A)] = f^{-1}(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cup}\ f^{-1}(\mathcal{F}_2, A)$

iii. $f^{-1}[(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cap}\ (\mathcal{F}_2, A)] = f^{-1}(\mathcal{F}_1, A)\ \tilde{\cap}\ f^{-1}(\mathcal{F}_2, A)$ dir.

Önerme 2.20. (Nazmul 2014) X ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere ve $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. O halde;

i. $(\mathcal{F}, A) \in S(X, A)$ ve f fonksiyonu birebir ise; $(\mathcal{F}, A)\ \tilde{\subseteq}\ f^{-1}(f[(\mathcal{F}, A)])$ dir.

ii. $(\mathcal{G}, A) \in S(Y, A)$ ve f fonksiyonu birebir ise; $f(f^{-1}[(\mathcal{G}, A)])\ \tilde{\subseteq}\ (\mathcal{G}, A)$ dir.

Tanım 2.21. (Zadeh 1975) $n = 2,3, \ldots.$ olmak üzere bir bulanık kümenin üyelik fonksiyon değerleri $(n - 1)$. tip bir bulanık kümeye ait ise bu bulanık küme n. Tip bir bulanık kümedir denir. Tip-1 bulanık kümelerde üyelik fonksiyonun derecesi [0,1] aralığındadır.

Burada dikkat edilirse, tip-2 bulanık kümelerde bir elemanın üyelik değerinin belirsizliğinden ziyade elemanlara has üyelik fonksiyonlarının ile ilgili bir belirsizlik söz konusudur.

Tanım 2.22. (Ali *et al.* 2003) $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$, U kümesi üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun.

i. $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerinin $(\mathcal{H}, C = A \cap B)$ ile ifade edilen ve $(\mathcal{F}, A) \tilde{\cup}_k (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, C)$ ile gösterilen kısıtlanmış birleşim işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{H}(e) = \mathcal{F}(e) \cup \mathcal{G}(e), \quad \forall e \in C$$

ii. $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerinin $(\mathcal{H}, C = A \cup B)$ ile ifade edilen ve $(\mathcal{F}, A) \tilde{\cap}_e (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, C)$ ile gösterilen genişletilmiş kesişim işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{H}(e) = \begin{cases} \mathcal{F}(e) & , e \in A - B \; ise \\ \mathcal{G}(e) & , e \in B - A \; ise \\ \mathcal{F}(e) \cap \mathcal{G}(e) & , e \in A \cap B \end{cases}$$

Örnek 2.23. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ başlangıç evreni ve $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ bir parametre kümesi olsun. $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$, $B = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ gibi parametre kümesinin iki altkümesi göz önüne alınarak iki esnek küme verilsin

$(\mathcal{F}, A)$=$\{(\alpha_1, \{x_1, x_3, x_4, x_7\}), (\alpha_2, \{x_1, x_3, x_5, x_6\}), (\alpha_4, \{x_2, x_3, x_4\})\}$

$(\mathcal{G}, B)$=$\{(\alpha_3, \{x_4, x_5, x_6\}), (\alpha_4, \{x_1, x_3, x_4, x_7\}), (\alpha_5, \{x_3, x_5, x_7\})\}$

O halde;

$(\mathcal{F}, A)\ \widetilde{\cap}_e\ (\mathcal{G}, B)$=$\{(\alpha_1, \{x_1, x_3, x_4, x_7\}), (\alpha_2, \{x_1, x_3, x_5, x_6\}), (\alpha_3, \{x_4, x_5, x_6\}), (\alpha_4, \{x_3, x_4\}),$
$(\alpha_5, \{x_3, x_5, x_7\})\}$

ve $(\mathcal{F}, A)\ \widetilde{\cup}_k\ (\mathcal{G}, B)$=$\{(\alpha_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\})\}$.

Tanım 2.24. (Hayat *et al.* 2018) $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerinin $(\mathcal{H}, C = A \cup B)$ ile ifade edilen ve $(\mathcal{F}, A)\ \setminus_e (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, C)$ ile gösterilen genişletilmiş fark işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{H}(e) = \begin{cases} \mathcal{F}(e) & , e \in A - B \text{ } ise \\ \mathcal{G}(e) & , e \in B - A \text{ } ise \\ \mathcal{F}(e) \setminus \mathcal{G}(e) & , e \in A \cap B \end{cases}$$

Tanım 2.25. (Ali *et al.* 2018) $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerinin $(\mathcal{H}, C = A \cap B)$ ile ifade edilen ve $(\mathcal{F}, A) \setminus_k (\mathcal{G}, B) = (\mathcal{H}, C)$ ile gösterilen kısıtlanmış fark işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{H}(e) = \mathcal{F}(e) \setminus \mathcal{G}(e), \quad \forall e \in C$$

Örnek 2.26. Örnek 2.23’te verilen $(\mathcal{F}, A)$ ve $(\mathcal{G}, B)$ esnek kümelerini göz önüne alalım. O halde;

$(\mathcal{F}, A) \setminus_e (\mathcal{G}, B) = \{(\alpha_1, \{x_1, x_3, x_4, x_7\}), (\alpha_2, \{x_1, x_3, x_5, x_6\}), (\alpha_3, \{x_4, x_5, x_6\}),$
$(\alpha_4, \{x_2\}), (\alpha_5, \{x_3, x_5, x_7\})\}$

ve $(\mathcal{F}, A) \setminus_k (\mathcal{G}, B) = \{(\alpha_4, \{x_2\})\}$.

Bundan sonraki kısımlarda Molodtsov (1999) tarafından tanımlanan esnek küme yapısı tip-1 esnek küme olarak adlandırılacaktır.

3. TİP-2 ESNEK KÜMELER

Bu bölümde Molodtsov (1999) tarafında tanımlana tip-1 esnek kümelerin bir genellemesi olarak Chatterjee *et al.* (2015) tarafından tanımlanan tip-2 esnek küme kavramı ve işlemleri ayrıca Hayat *et al.* (2018) tarafından tanımlanan bazı işlemler örnekleri ile açıklanacaktır.

Tanım 3.1. Kabul edelim ki (X, E) bir esnek evren ve $S(X)$, (X, E) esnek evreninde tip-1 esnek kümelerin kümesi olsun. $\mathfrak{F}: A \to S(X)$, $(A \subset E)$ dönüşümüne (X, E) esnek evreni üzerinde bir tip-2 esnek küme denir ve $[\mathfrak{F}, A]$ ile gösterilir.

Bu durumda A 'nın her bir elemanına karşılık gelen $\mathcal{F}(e)$ bir tip-1 esnek kümedir. Bu yüzden $\forall e \in A$ için $\mathcal{F}(e) = (\mathcal{F}_e, S_e)$ olacak şekilde bir tip-1 esnek kümesi vardı. Burada $\mathcal{F}_e: S_e \to P(X)$ ve $S_e \subset E$ dir. Ayrıca, A'ya "Birincil parametre kümesi" ve $\cup S_e$ kümesine ise "Temel Parametre Kümesi" denir.

Örnek 3.2. Segmentlerine göre satın alınabilecek arabaların kümesi aşağıda verilen X kümesi olsun.

$$X = \left\{ \begin{matrix} \text{Audi A3, Citroen C4, Ford Mondeo, Citroen C5, VW Passat, Volvo S60,} \\ \text{Volvo V40, BMW X5} \end{matrix} \right\}$$

E parametre kümesi aşağıdaki gibi verilsin

$$E = \left\{ \begin{matrix} \text{C segment, D segment,} \\ \text{Lüks Olmayan Araçlar, Az Lüks Olan Araçlar, Lüks olan Araçlar} \end{matrix} \right\}$$

$$A = \{\text{Lüks Olmayan Araçlar, Az Lüks Olan Araçlar, Lüks Olan Araçlar}\} \subset E$$

kümesini göz önüne alalım. Yapılan değerlendirme sonucunda $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesi X evreni üzerinde tanımlı, aşağıdaki gibi elde verilen tip-1 esnek kümelerin bir koleksiyonudur.

$\mathfrak{F}$: $A \to S(X)$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$\mathcal{F}_{\text{Lüks olmayan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{C Segment}}{\{\text{Audi A3,Citroen C4}\}}, \frac{\text{D Segment}}{\{\text{Ford Mondeo,Citroen C5}\}} \right\}$$
$$\mathcal{F}_{\text{Az lüks olan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{C Segment}}{\{\text{Volvo V40}\}}, \frac{\text{D Segment}}{\{\text{VW Passat,Volvo S60}\}} \right\}$$
$$\mathcal{F}_{\text{Lüks olan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{D segment}}{\{\text{BMW X3}\}} \right\}$$

Yukarıda verilen tip-2 esnek küme şu şekilde yorumlanır; Lüks olmayan C segment araçlar, $''\text{Audi A3, Citroen C4}''$ dir. Lüks olmayan D segment araçlar; $''\text{Ford Mondeo, Citroen C5}''$ tir. Az lüks olan C segment araç; $''\text{Volvo V40}''$ ve az lüks olan D segment araçlar; $''\text{VW Passat, Volvo S60}''$ tır. Lüks olan D segment araç $''\text{BMW X3}''$ tür. Burada birincil parametre kümesi olan A kümesi olup $\{\text{C Segment, D segment}\}$ kümesi ise temel parametre kümesidir.

Notlar 3.3 (Chatterjee *et al.* 2015**)**

1. Zadeh (1975) tarafından tanımlanan tip-2 bulanık kümelerde parametre kümesi [0, 1] aralığı olarak göz önüne alındığında tip-2 esnek kümelerin özel türleri olarak kabul edilebilir. Üzerinde çalışılan evrensel küme X iken $\bar{A}$ ile gösterilen tip-2 bulanık küme

$$\bar{A} = \{(x,u), \mu_{\bar{A}}(x,u) | \; \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanan bir kümedir (Mendel 2009). Burada $\mu_{\bar{A}}(x,u)$, $\forall x \in X$ için tip-2 üyelik fonksiyonudur. Herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için $\bar{A}$ 'nın α -seviye kümesi $\bar{A}_\alpha$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\bar{A} = \{(x,u), \mu_{\bar{A}}(x,u) \geq \alpha | \; \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\}$$

Belirli bir $\alpha \in [0,1]$ için;

$$S_\alpha = \{u: (x,u) \in \bar{A}_\alpha\}$$

dır. Ayrıca $F_\alpha: S_\alpha \to \mathcal{P}(X)$ için;

$$F_\alpha(u) = \{x: (x,u) \in \bar{A}_\alpha\}, \;\; u \in S_\alpha$$

dır. Böylece $[\mathfrak{F}, [0,1]]$ kümesi $(X, [0,1])$ esnek evreni üzerinde bir tip-2 esnek kümedir.

2. (X, E) esnek evreni üzerinde verilen $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesi göz önüne alınırsa $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesi ile ilişkili $(\mathcal{F}_1, B)$, $B \subset E$ tip-1 esnek kümesi tanımlanabilir. (X, E) esnek evreni üzerinde $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesi tanımlansın. Böylece $\forall e \in A$, $\mathcal{F}(e) = (\mathcal{F}_e, S_e)$ olup $\mathcal{F}_e: S_e \to P(X)$ ve $S_e \subset E$ dir.

Varsayalım ki $S = \bigcup_{e \in A} \{S_e\}$ ve $B = A \cup S$ olsun. Aşağıda verilen basamaklar uygulanarak bir tip-2 esnek küme elde edilebilir. $\mathcal{F}_1: B \to P(X)$ öyleki $\forall a \in S_e \setminus A$,

$\mathcal{F}_1(a) = \bigcup \{ \mathcal{F}_\beta(a), \forall \beta \in A\}$ ve $\forall \beta \in A$ için

$\mathcal{F}_1(\beta) = \bigcup\{x \in X \mid x \in \mathcal{F}_\beta(a), \forall a \in S_\beta\}$.

Örnek 3.4. Örnek 3.2'deki tip-2 esnek küme göz önüne alındığında bu kümeye karşılık gelen tip-1 esnek küme $(\mathcal{F}_1, B)$ olsun. Burada;

$$B = \left\{ \begin{array}{c} \text{C segment, D segment,} \\ \text{Lüks Olmayan Araçlar, Az Lüks Olan Araçlar, Lüks olan Araçlar} \end{array} \right\}$$

olarak tanımlandığında

$$(\mathcal{F}_1, B) = \left\{ \begin{array}{c} \text{(C Segment, \{Audi A3, Citroen C4\}),} \\ \text{(D Segment, \{Ford Mondeo, Citroen C5, VW Passat, Volvo S60, BMW X5\}),} \\ \text{(Lüks Olmayan Araçlar. \{Audi A3, Citroen C4, Ford Mondeo, Citroen C5\}),} \\ \text{(Az Lüks Olan Araçlar, \{VW Passat, , Volvo S60, Volvo V40\}),} \\ \text{(Lüks Olan Araçlar, \{BMW X5\})} \end{array} \right\}$$

Yukarıdaki esnek yapı bazı bilgileri temsil etmesine rağmen segmentlerine göre hangi aracın hangi sınıflandırmaya ait olduğu tam olarak anlaşılmamaktadır. Tip-1 esnek kümesi üzerinde "VE" işlemini uygulayarak daha makul bir temsil elde edebiliriz fakat bu çok fazla bir iş yükü meydana getirir. Ayrıca, türetilmiş olan tip-1 esnek kümeye bu işlemi uygulayarak elde edilen veriler birbiri ile alakası olmayan sonuçlar verebileceğinden hesaplamalarda hatalara yol açabilir. Mesela örnek 3.4'te verilen tip-1 esnek küme bir tip-2 esnek küme değildir. Ayrıca tip-2 esnek kümelerin pratik uygulamasında birincil parametreler ve temel parametreler genellikle evrensel kümenin elemanlarının farklı türlerinin özelliklerini gösterdiğinden ve verilerin iki kez parametreleşmesine imkan tanıdığında tip-2 esnek kümeler daha geneldir ve bu koşullarda tip-1 esnek küme ile kıyaslandığında problemlerin modellenmesi açısından daha kullanışlı bir yapıdır.

Tanım 3.5. (Mutlak Tip-2 Esnek Küme) (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ bir tip-2 esnek küme olsun. Eğer her $e \in A$ için $\mathcal{F}(e)$ bir tip-1 mutlak esnek küme ise $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesine mutlak tip-2 esnek küme denir ve $\widetilde{\mathbb{A}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.6. (Boş Tip-2 Esnek Küme) (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ bir tip-2 esnek küme olsun. Eğer her $e \in A$ için $\mathcal{F}(e)$ bir tip-1 boş esnek küme ise $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesine $[\mathfrak{F}, A]$ denir ve $\widetilde{\Phi}$ ile gösterilir.

Örnek 3.7. Örnek 3.2 göz önüne alınırsa,

$$\mathcal{F}_{\text{Lüks olmayan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{C Segment}}{X}, \frac{\text{D Segment}}{X} \right\}$$

$$\mathcal{F}_{\text{Az lüks olan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{C Segment}}{X}, \frac{\text{D Segment}}{X} \right\}$$

$$\mathcal{F}_{\text{Lüks olan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{C Segment}}{X}, \frac{\text{D Segment}}{X} \right\}$$

yaklaşımları ile verilen

$[\mathfrak{F}, A] = \{\mathcal{F}_{\text{Lüks olmayan araçlar}}, \mathcal{F}_{\text{Az lüks olan araçlar}}, \mathcal{F}_{\text{Lüks olan araçlar}}\}$ kümesi bir mutlak tip-2 esnek kümedir.

$$\mathcal{G}_{\text{Lüks olmayan araçlar}} = \left\{\frac{\text{C Segment}}{\emptyset}, \frac{\text{D Segment}}{\emptyset}\right\}$$
$$\mathcal{G}_{\text{Az lüks olan araçlar}} = \left\{\frac{\text{C Segment}}{\emptyset}, \frac{\text{D Segment}}{\emptyset}\right\}$$
$$\mathcal{G}_{\text{Lüks olan araçlar}} = \left\{\frac{\text{C Segment}}{\emptyset}, \frac{\text{D Segment}}{\emptyset}\right\}$$

yaklaşımları ile verilen

$[\mathfrak{G}, B] = \{\mathcal{G}_{\text{Lüks olmayan araçlar}}, \mathcal{G}_{\text{Az lüks olan araçlar}}, \mathcal{G}_{\text{Lüks olan araçlar}}\}$ kümesi bir tip-2 boş esnek kümedir.

Genellikle bir karar verme problemini veya önemli uygulamalar içeren problemleri ele alırken, çalışma evreninin farklı elemanlarına farklı önem dereceleri atanması gerekebilir. Bu gereksinim, göz önüne alınan parametre kümesindeki farklı elemanlara farklı ağırlıklar atanarak karşılanır.

Bu gibi durumlar da tip-2 esnek küme yapısı ile modellenebilir.

Tanım 3.8 (Ağırlıklı Tip-2 Esnek Küme) (Catherjee *et al.* 2015) Bir tip-2 esnek kümenin hem birincil hem de temel parametrelerinin değişen derecelerde, her bir parametre için $0 \leq w \leq 1$ olacak şekilde, ağırlıklar mevcutsa, bu tip-2 esnek kümeye ağırlıklı tip-2 esnek küme denir.

Örnek 3.9. Örnek 3.2 de verilen X evrensel küme , A birincil parametre kümesi ve temel parametre kümesi göz önüne alınarak bir ağırlıklı tip-2 esnek küme $[\mathfrak{F}, A]$ aşağıdaki gibi verilen ağırlıklandırılmış esnek kümelerin bir kolleksiyonu olarak yazılabilir.

$$\mathcal{F}_{(0.5,\text{Lüks olmayan araçlar})} = \left\{\frac{(0.6,\text{C Segment})}{\{\text{Audi A3,Citroen C4}\}}, \frac{(0.4,\text{D Segment})}{\{\text{Ford Mondeo,Citroen C5}\}}\right\}$$

$$\mathcal{F}_{(0.7,\text{Az lüks olan araçlar})} = \left\{ \frac{(0.8,\text{C Segment})}{\{\text{Volvo V40}\}}, \frac{(0.3,\text{D Segment})}{\{\text{VW Passat,Volvo S60}\}} \right\}$$

$$\mathcal{F}_{(0.9,\text{Lüks olan araçlar})} = \left\{ \frac{(0.9,\text{D segment})}{\{\text{BMW X3}\}} \right\}$$

3.1 Tip-2 Esnek Kümeler Üzerinde İşlemler

Bu bölümde Catherjee *et al.* (2015) tarafından tanımlanan tip-2 esnek kümeler üzerinde bazı işlemler verilerek bu işlemlerin temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.10. (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesinin $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümesinin alt kümesi olması için gerek ve yeter şart

i. $A \subset B$

ii. $\forall e \in A, \mathcal{F}(e) \,\tilde{\subseteq}\, \mathcal{G}(e)$ olmasıdır.

Bu durumda $[\mathfrak{F}, A]$ ya $[\mathfrak{G}, B]$ nin esnek alt kümesi denir ve $[\mathfrak{F}, A] \sqsubset [\mathfrak{G}, B]$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.11. Örnek 3.2 de verilen E parametre kümesinin aşağıdaki gibi iki alt kümesi verilsin.

$A = \{\text{Lüks Olan Araçlar}\}$

$\text{B} = \{\text{Az Lüks Olan Araçlar, Lüks olan araçlar}\}$

$A \subset B$ olduğu açıktır. A ve B parametre kümeleri üzerinde verilen tip-1 esnek kümeler

$$\mathcal{F}_{\text{Lüks olan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{D segment}}{\{\text{BMW X3}\}} \right\}$$

$$\mathcal{G}_{\text{Lüks olan araçlar}} = \left\{ \frac{\text{D segment}}{\{\text{BMW X3 }\}} \right\}$$

$$\mathcal{G}_{\text{Az Lüks Olan Araçlar}} = \left\{\frac{\text{C Segment}}{\{\text{Volvo V40}\}}, \frac{\text{D Segment}}{\{\text{VW Passat, Volvo S60}\}}\right\}$$

olarak alınırsa, $\forall e \in A$ için $[\mathfrak{F}, A] \sqsubset [\mathfrak{G}, B]$ olduğu görülür.

Tanım 3.12. (Eşitlik) (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$, (X, E) esnek evreni üzerinde iki tip-2 esnek küme olsun. Eğer bu iki küme birbirini kapsıyorsa o halde $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümeleri eşittir denir. $[\mathfrak{F}, A]$=$[\mathfrak{G}, B]$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.13. (Birleşim) (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$, (X, E) esnek evreni üzerinde iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümelerinin birleşimi $[\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C = A \cup B]$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$[\mathfrak{H}, C] = \{\mathcal{H}(e) | e \in C, H(e) \in S(X, E)\}.$$

Burada

$$\mathcal{H}(e) = \begin{cases} \mathcal{F}(e) & , e \in A - B \ ise \\ \mathcal{G}(e) & , e \in B - A \ ise, \\ \mathcal{F}(e) \ \tilde{\cup} \ \mathcal{G}(e) & , e \in A \cap B \ ise \end{cases} \qquad \forall e \in C$$

dir.

Tanım 3.14. (Kesişim) (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ve $[\mathfrak{G}, B]$, (X, E) esnek evreni üzeinde iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B]$ şeklinde gösterilen tip-2 esnek kümelerin kesişimi aşağıdaki gibi tanımlanan $[\mathfrak{K}, C = A \cap B]$ esnek kümesidir.

$$[\mathfrak{K}, C] = \{\mathcal{K}(e) | e \in C, \mathcal{K}(e) = \mathcal{F}(e) \ \tilde{\cap} \ \mathcal{G}(e)\}$$

Örnek 3.15. $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ kümesi bir galeride satışa sunulacak 5 arabayı içeren bir küme ve $E =${güzel, cam tavan, hatchback, sedan, lüks, otomatik vites, manuel vites, sunrooflu, 5 kapılı, 3 kapılı,4x4} kümesi parametre kümesi olsun. Ayrıca, parametre kümesinin $A = \{\text{güzel, lüks}\}$ ve $B = \{\text{sedan, güzel}\}$ gibi iki alt kümesini göz önüne alalım. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$, (X, E) esnek evreni üzerinde aşağıdaki gibi verilen tip-2 esnek kümeler olsun.

$$\mathcal{F}_{güzel} = \left\{\frac{\text{otomatik vites}}{\{a_1,a_5\}}, \frac{\text{3 kapılı}}{\{a_3,a_4,a_5\}}\right\}$$

$$\mathcal{F}_{lüks} = \left\{\frac{\text{otomatik vites}}{\{a_5\}}, \frac{\text{5 kapılı}}{\{a_1,a_2,a_3\}}\right\}$$

$$\mathcal{G}_{sedan} = \left\{\frac{\text{otomatik vites}}{\{a_1,a_5\}}, \frac{\text{cam tavan}}{\{a_1,a_2,a_5\}}\right\}$$

$$\mathcal{G}_{güzel} = \left\{\frac{\text{otomatik vites}}{\{a_1,a_3\}}, \frac{\text{hatchback}}{\{a_1,a_3,a_5\}}, \frac{\text{manuel vites}}{\{a_2,a_4\}}\right\}$$

O halde $[\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, A \cup B]$ kümesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{H}_{güzel} = \left\{\frac{otomatik\ vites}{\{a_1,a_3,a_5\}}, \frac{3\ kapılı}{\{a_3,a_4,a_5\}}, \frac{hatchback}{\{a_1,a_3,a_5\}}, \frac{manuel\ vites}{\{a_2,a_4\}}\right\}$$

$$\mathcal{H}_{lüks} = \left\{\frac{otomatik\ vites}{\{a_5\}}, \frac{5kapılı}{\{a_1,a_2,a_3\}}\right\}$$

$$\mathcal{H}_{sedan} = \left\{\frac{otomatikvites}{\{a_1,a_5\}}, \frac{camtavan}{\{a_1,a_2,a_5\}}\right\}$$

$\mathfrak{H} = \{\mathcal{H}_{güzel}, \mathcal{H}_{lüks}, \mathcal{H}_{sedan}\}$ kümesi bir tip-2 esnek kümedir.

Ayrıca $[\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{K}, A \cap B]$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$\mathcal{K}_{güzel} = \left\{\frac{otomatikvites}{\{a_1\}}\right\}$ ve $[\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B] = \left\{\left\{\frac{otomatikvites}{\{a_1\}}\right\}\right\}$ dir.

Önerme 3.16. (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$, $[\mathfrak{G}, B]$ ve $[\mathfrak{H}, C]$, (X, E) esnek evreni üzerinde tip-2 esnek kümeler olsun. O halde,

i. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{F}, A] = [\mathfrak{F}, A]$
ii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{F}, A] = [\mathfrak{F}, A]$
iii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{G}, B] \sqcup [\mathfrak{F}, A]$
iv. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{G}, B] \sqcap [\mathfrak{F}, A]$
v. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup ([\mathfrak{G}, B] \sqcup [\mathfrak{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B]) \sqcup [\mathfrak{H}, C]$
vi. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap ([\mathfrak{G}, B] \sqcap [\mathfrak{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B]) \sqcap [\mathfrak{H}, C]$
vii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup ([\mathfrak{G}, B] \sqcap [\mathfrak{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B]) \sqcap ([\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{H}, C])$
viii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap ([\mathfrak{G}, B] \sqcup [\mathfrak{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B]) \sqcup ([\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{H}, C])$

Tip-2 esnek kümeler, verilen kesişim ve birleşim işlemleri altında etkisiz eleman birleşme ve dağılma özelliklerini de sağlar.

Tanım 3.17. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{H}, C = A \cap B]$ ile ifade edilen kısıtlanmış birleşim işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$[\mathfrak{F}, A] \,\tilde{\sqcup}_k\, [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$$

Burada

$$\mathfrak{H}(e) = \mathfrak{F}(e) \,\tilde{\cup}\, \mathfrak{G}(e), \quad \forall e \in C$$

dir.

$\mathfrak{F}(e) \,\tilde{\cup}\, \mathfrak{G}(e)$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerininn kısıtlanmış birleşim işlemi anlamına gelir.

Tanım 3.18. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ esnek kümelerinin $[\mathfrak{H}, C = A \cup B]$ ile ifade edilen ve $[\mathfrak{F}, A]\ \tilde{\sqcap}_e\ [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$ ile gösterilen genişletilmiş kesişimi aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathfrak{H}(e) = \begin{cases} \mathfrak{F}(e) & , e \in A - B \ ise \\ \mathfrak{G}(e) & , e \in B - A \ ise \\ \mathfrak{F}(e) \cap \mathfrak{G}(e) & , e \in A \cap B \end{cases}$$

dir. Burada

$$\mathfrak{H}(e) = \mathfrak{F}(e)\ \tilde{\sqcap}\ \mathfrak{G}(e), \quad \forall e \in C$$

dir. $\mathfrak{F}(e)\ \tilde{\sqcap}\ \mathfrak{G}(e)$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin genişletilmiş kesişim işlemi anlamına gelir.

Lemma 3.19. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ 'nin genişletilmiş kesişimi, kısıtlanmış kesişimi, genişletilmiş birleşimi de kısıtlanmış birleşimi de bir tip-2 esnek kümedir.

Örnek 3.20. $U = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9\}$ bilgisayarlar kümesi olsun. $E = \{4\ GB\ RAM, 6\ GB\ RAM, 8\ GB\ RAM, 512\ GB\ SSD, 1TB\ SSD,\ 14inç, 16inç, Gümüş, Uzay\ grisi, WİNDOWS, İOS\}$ ise değerlendirmede temel alınacak parametrelerin kümesini göstersin. Bilgisayarı alacak kişi tarafından belirlenen parametre kümesi $A, B \subset E$ olmak üzere $A = \{4\ GB, WİNDOWS, 13inç\}$ ve $B = \{6\ GB, WİNDOWS, 13inç\}$ olup (U, E) üzerinde $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümeleri tanımlansın.

$$\mathfrak{F}(4GB) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3\}}, \frac{İOS}{\{m_3, m_5, m_7\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_8\}}, \frac{1TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(13inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_5, m_6, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_1, m_6\}}, \frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}\right\}$$

$$\mathfrak{G}(6\ GB) = \left\{\frac{16\ inç}{\{m_1, m_8\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}\right\}$$

$$\mathfrak{G}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3\}}, \frac{1TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\right\}$$

$$\mathfrak{G}(13\ inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_3, m_5, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_5, m_6\}}\right\}$$

Burada **Genişletilmiş Birleşim** $C = A \cup B$ için $[\mathfrak{F}, A] \sqcup_e [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{A}, C]. \forall a \in C$ için $[\mathbb{A}, C]$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathbb{A}(4GB\ RAM) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3\}}, \frac{İOS}{\{m_3, m_5, m_7\}}\right\}$$

$$\mathbb{A}(Windows) = \{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3, m_8\}}, \frac{1TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\}$$

$$\mathbb{A}(13inç\ ) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_3, m_5, m_6, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_1, m_5, m_6\}}, \frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}\right\}$$

$$\mathbb{A}(6\ GB) = \left\{\frac{16\ inç}{\{m_1, m_8\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}\right\}$$

Kısıtlanmış Kesişimi $C = A \cap B$ için $[\mathfrak{F}, A] \sqcap_k [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{B}, C]. \forall a \in C$ için $[\mathbb{B}, C]$ aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$\mathbb{B}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}, \frac{1TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\right\}$$

$$\mathbb{B}(13\ inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_5, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_6\}}\right\}$$

Genişletilmiş Kesişim $C = A \cup B$ için $[\mathfrak{F}, A] \sqcap_e [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{D}, C]$. $\forall a \in C$ için $[\mathbb{D}, C]$ aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$\mathbb{D}(4GB) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3\}}, \frac{İOS}{\{m_3, m_5, m_7\}}\right\}$$

$$\mathbb{D}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}, \frac{1TB\ SSD}{\{m_8\}}\right\}$$

$$\mathbb{D}(13inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_5, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_6\}}, \frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}\right\}$$

$$\mathbb{D}(6\ GB) = \left\{\frac{16\ inç}{\{m_1, m_8\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}\right\}$$

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi tip-2 esnek kümeler arasındaki kısıtlanmış birleşim ve genişletilmiş kesişim işlemleri, birincil parametreye karşılık gelen esnek kümeler arasındaki kısıtlanmış birleşim ve genişletilmiş kesişim ile tanımlanmaktadır. Bazen bir tip-2 esnek kümede birincil parametreler, temel parametrelere karşılık gelen kümelerden farklılık gösterebilir. Bu yüzden bazı ekstra durumların incelenmesi gerekir.

Tanım 3.21. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ ‘nin genişletilmiş-kısıtlanmış birleşimi

$$[\mathfrak{F}, A] \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $C = A \cup B, \forall a \in C$ olacak şekilde

$$\mathfrak{H}(e) = \begin{cases} \mathfrak{F}(e) & , e \in A - B \; ise \\ \mathfrak{G}(e) & , e \in B - A \; ise \\ \mathfrak{F}(e) \mathbin{\tilde{\cup}_k} \mathfrak{G}(e) & , e \in A \cap B \; ise \end{cases}$$

dir. Burada $\mathfrak{F}(e) \mathbin{\tilde{\cup}_k} \mathfrak{G}(e)$, $\forall e \in A \cap B$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin kısıtlanmış birleşimi anlamına gelir.

Tanım 3.22. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ nin genişletilmiş-kısıtlanmış kesişimi

$$[\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$$

Şeklinde tanımlanır. Burada $C = A \cup B, \forall e \in C$ için

$$\mathfrak{H}(e) = \begin{cases} \mathfrak{F}(e) & , e \in A - B \; ise \\ \mathfrak{G}(e) & , e \in B - A \; ise \\ \mathfrak{F}(e) \mathbin{\tilde{\cap}_k} \mathfrak{G}(e) & , e \in A \cap B \; ise \end{cases}$$

dir.

Burada $\mathfrak{F}(e) \mathbin{\tilde{\cap}_k} \mathfrak{G}(e), \forall e \in A \cap B$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin kısıtlanmış kesişimi anlamına gelir.

Tanım 3.23. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E)esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ 'nin kısıtlanmış-genişletilmiş birleşimi

$$[\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$$

olup burada $C = A \cap B \neq \emptyset$, $\forall e \in C$ iken $\mathfrak{F}(e)\ \tilde{\cup}_e\ \mathfrak{G}(e) = \wp(e)$ dir. Burada $\forall e \in A \cap B$ için $\mathfrak{F}(e)\ \tilde{\cup}_e\ \mathfrak{G}(e)$ şeklindeki gösterimde $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip 1 esnek kümelerinin genişletilmiş birleşimi anlamına gelir.

Tanım 3.24. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$'nin genişletilmiş kesişimi $C = A \cap B, \forall e \in C$ olmak üzere

$$[\mathfrak{F}, A] \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$$

$\mathfrak{F}(e)\ \tilde{\cap}_e\ \mathfrak{G}(e) = \wp(e)$ dir. Burada $\forall e \in A \cap B$ için $\mathfrak{F}(e)\ \tilde{\cap}_e\ \mathfrak{G}(e)$ ifadesi $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin genişletilmiş kesişimi anlamına gelir.

Lemma 3.25. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. Böyleyken $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ 'nin kısıtlanmış-genişletilmiş kesişimi, genişletilmiş-kısıtlanmış kesişimi, kısıtlanmış-genişletilmiş birleşimi ve genişletilmiş-kısıtlanmış birleşimi de tip-2 esnek kümedir.

Örnek 3.26. Örnek 3.20 deki $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümeleri tanımlansın. Buradan; **Genişletilmiş-Kısıtlanmış Birleşim** $C = A \cup B\ iken\ [\mathfrak{F}, A] \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{K}, C]$ olup $\forall a \in C\ için\ [\mathbb{K}, C]$ aşağıdaki gibidir;

$$\mathbb{K}(4GB) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3\}}, \frac{İOS}{\{m_3, m_5, m_7\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3, m_8\}}, \frac{1\ TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(13inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_3, m_5, m_6, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_1, m_5, m_6\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(6\ GB) = \left\{\frac{16\ inç}{\{m_1, m_8\}}, \frac{\dot{I}OS}{\{m_5, m_9\}}\right\}$$

Genişletilmiş-Kısıtlanmış Kesişim $C = A \cup B\ iken\ [\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{L}, C]$ olup $\forall a \in C\ için\ [\mathbb{L}, C]$ aşağıdaki gibidir;

$$\mathbb{L}(4GB) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3\}}, \frac{\dot{I}OS}{\{m_3, m_5, m_7\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}, \frac{1\ TB\ SSD}{\{m_4, m_6\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(13inç) = \left\{\frac{Gümüş}{m_5, m_7}, \frac{\dot{I}OS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_6\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(6\ GB) = \left\{\frac{16\ inç}{\{m_1, m_8\}}, \frac{\dot{I}OS}{\{m_5, m_9\}}\right\}$$

Kısıtlanmış-Genişletilmiş Birleşim: $C = A \cap B\ iken\ [\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{M}, C]$ olup $\forall a \in C\ için\ [\mathbb{M}, C]$ aşağıdaki gibidir;

$$\mathbb{K}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3, m_8\}}, \frac{1\ TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(13inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_3, m_5, m_6, m_7\}}, \frac{\dot{I}OS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_1, m_5, m_6\}}, \frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}\right\}$$

Kısıtlanmış-Genişletilmiş Kesişim: $C = A \cap B\ iken\ [\mathfrak{F}, A] \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B] = [\mathbb{H}, C]$ olup $\forall a \in C\ için\ [\mathbb{H}, C]$ aşağıdaki gibidir;

$$\mathbb{K}(Windows) = \left\{\frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2, m_3, m_8\}}, \frac{1\ TB\ SSD}{\{m_4, m_6, m_8\}}\right\}$$

$$\mathbb{K}(13inç) = \left\{\frac{Gümüş}{\{m_3, m_5, m_6, m_7\}}, \frac{İOS}{\{m_5, m_9\}}, \frac{8GB\ RAM}{\{m_1, m_5, m_6\}}, \frac{512\ GB\ SSD}{\{m_1, m_2\}}\right\}$$

Önerme 3.27. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı U esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun.

i. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup_k [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcup_e [\mathfrak{G}, B]$

ii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup_k [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcup_e [\mathfrak{G}, B]$

iii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap_k [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcap_e [\mathfrak{G}, B]$

iv. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap_k [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \sqcap_e [\mathfrak{G}, B]$

v. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B]) \sqcup_e ([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]) = [\mathfrak{F}, A] \sqcup_e [\mathfrak{G}, B]$

vi. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B]) \sqcup_k ([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]) = [\mathfrak{F}, A] \sqcup_k [\mathfrak{G}, B]$

vii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B]) \sqcap_e ([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]) = [\mathfrak{F}, A] \sqcap_e [\mathfrak{G}, B]$

viii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]) \sqcap_k ([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]) = [\mathfrak{F}, A] \sqcap_k [\mathfrak{G}, B]$

Tanım 3.28. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı U esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$'nin kısıtlanmış farkı $[\mathfrak{F}, A] \widehat{\ominus}_k [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$ şeklinde tanımlanır. Burada $C = A \cap B,\ e \in C$

$$\mathfrak{H}(e) = \mathfrak{F}(e) \ominus_k \mathfrak{G}(e)$$

dir.

$\mathfrak{F}(e) \ominus_k \mathfrak{G}(e)$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin farkı anlamına gelmektedir.

Tanım 3.29. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı U esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]'$ nin genişletilmiş farkı $[\mathfrak{H}, C] = [\mathfrak{F}, A] \widehat{\ominus}_e [\mathfrak{G}, B]$ şeklinde tanımlanır. Burada $C = A \cup B\ ve\ \forall\ e \in C$ için

$$\mathfrak{H}(e) = \begin{cases} \mathfrak{F}(e) & , e \in A - B \; ise \\ \mathfrak{G}(e) & , e \in B - A \; ise \\ \mathfrak{F}(e) \ominus_e \mathfrak{G}(e) & , e \in A \cap B \; ise \end{cases}$$

dir. Burada $\mathfrak{F}(e) \ominus_e \mathfrak{G}(e)$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin genişletilmiş farkı anlamına gelmektedir.

Tanım 3.30. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı U esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]'$ nin kısıtlanmış farkı $[\mathfrak{H}, C] = [\mathfrak{F}, A] \; \widehat{\ominus}_e \; [\mathfrak{G}, B]$şeklinde tanımlıdır. Burada $C = A \cup B \; ve \; \forall \; e \in C$ olup

$$\mathfrak{H}(e) = \begin{cases} \mathfrak{F}(e) & , e \in A - B \; ise \\ \mathfrak{G}(e) & , e \in B - A \; ise \\ \mathfrak{F}(e) \ominus_k \mathfrak{G}(e) & , e \in A \cap B \; ise \end{cases}$$

dir. Burada $\mathfrak{F}(e) \ominus_k \mathfrak{G}(e)$, $\mathfrak{F}(e)$ ve $\mathfrak{G}(e)$ tip-1 esnek kümelerinin kısıtlanmış farkı anlamına gelir.

Önerme 3.31. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $\ell \in \{k, e, k - e, e - k\}$ için aşağıdaki öncüller doğru olup ispatları açıktır.

- **i.** $[\mathfrak{F}, \mathrm{A}] \; \widehat{\ominus}_\ell \; \widetilde{\mathbb{A}} = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}] \; \widehat{\ominus}_\ell \; \widetilde{\mathbb{E}} = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]$
- **ii.** $[\mathfrak{F}, \mathrm{A}] \; \widehat{\ominus}_\ell \; [\mathfrak{F}, \mathrm{A}] = \widetilde{\Phi}$
- **iii.** $\widetilde{\mathbb{A}} \; \widehat{\ominus}_\ell \; [\mathfrak{F}, \mathrm{A}] = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]^{\mathrm{c}}$
- **iv.** $\widetilde{\mathbb{E}} \; \widehat{\ominus}_\ell \; [\mathfrak{F}, \mathrm{A}] = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]^c$

Önerme 3.32. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. Aşağıdaki öncüller doğrudur ve ispatları açıktır.

- **i.** $[\mathfrak{F}, A] \; \widehat{\ominus}_k \; [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \; \widehat{\ominus}_{e-k} \; [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \; \widehat{\ominus}_e \; [\mathfrak{G}, B]$

ii. $[\mathfrak{F}, A] \mathbin{\widehat{\ominus}_k} [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \mathbin{\widehat{\ominus}_{k-e}} [\mathfrak{G}, B] \sqsubseteq [\mathfrak{F}, A] \mathbin{\widehat{\ominus}_e} [\mathfrak{G}, B]$

Tanım 3.33 (Catherjee *et al.* 2015) $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesinin tümleyeni $[\mathfrak{F}, A]^c$ olarak gösterilir ve $[\mathfrak{F}, A]^c = [\mathfrak{F}^c, A]$ olup, tip-1 esnek kümeler yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{F}^c(a) = (\mathcal{F}_a, S_a)^c \text{ ,} \forall a \in A \text{ öyle ki } \mathcal{F}_a^c(\beta) = X - \mathcal{F}_a(\beta) \text{ ,} \forall \beta \in S_a \text{ dır.}$$

Örnek 3.34. Örnek 3.15 teki $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesini göz önüne alalım. $[\mathfrak{F}, A]$ nın tümleyeni ;

$$\mathcal{F}^c_{güzel} = \left\{\frac{otomatik\ vites}{\{a_2, a_3, a_4\}}, \frac{3\ kapılı}{\{a_1, a_2\}}\right\}$$

$$\mathcal{F}^c_{lüks} = \left\{\frac{otomatik\ vites}{\{a_1, a_2, a_3, \},}, \frac{5\ kapılı}{\{a_4, a_5\}}\right\}$$

Buradaki tip-2 esnek kümeden yola çıkarak güzel ve otomatik vites olmayan arabaların a_2, a_3, a_4 olduğu sonucuna varabiliriz. Güzel ve 3 kapılı olmayan arabaların ise $a_1\ ve\ a_2$ oldukları açıkça görülebilir. Diğer parametreleri de benzer şekilde yorumlayabiliriz.

Önerme 3.35. (Catherjee *et al.* 2015) (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı $[\mathfrak{F}, A]$, $[\mathfrak{G}, B]$ ve $[\mathfrak{H}, C]$ tip-2 esnek kümeleri verilsin. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

i. $([\mathfrak{F}, A]^c)^c = [\mathfrak{F}, A]$

ii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B])^c \sqsupset [\mathfrak{F}, A]^c \sqcup [\mathfrak{G}, B]^c$

iii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B])^c \sqsubset [\mathfrak{F}, A]^c \sqcap [\mathfrak{G}, B]^c$

iv. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcap [\mathfrak{G}, B]^c$

v. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcup [\mathfrak{G}, B]^c$

Önerme 3.36. (Catherjee *et al.* 2015) (X, E) esnek evreninde $[\mathfrak{F}, A]$ tip-2 esnek kümesi verilsin. Sırasıyla mutlak ve boş tip-2 esnek küme $\widetilde{\mathbb{A}}\ ve\ \widetilde{\Phi}$ olmak üzere,

i. $\widetilde{\Phi}^{\,c} = \widetilde{\mathbb{A}}$

ii. $\widetilde{\mathbb{A}}^c = \widetilde{\Phi}$

iii. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup \widetilde{\Phi} = [\mathfrak{F}, A]$

iv. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}$

v. $[\mathfrak{F}, A] \sqcup \widetilde{\mathbb{A}} = \widetilde{\mathbb{A}}$

vi. $[\mathfrak{F}, A] \sqcap \widetilde{\mathbb{A}} = [\mathfrak{F}, A]$ dır.

Teorem 3.37. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$ iken;

i. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_k [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]^c \sqcap_k [\mathfrak{G}, B]^c$

ii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap_k [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]^c \sqcup_k [\mathfrak{G}, B]^c$

İspat : $C = A \cap B \neq \emptyset$ ve $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_k [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{R}, A \cap B]$ olsun. $\forall a \in C$ için $\mathfrak{F}(a) = (\mathcal{F}_a, L_a)$, $\mathfrak{G}(a) = (\mathcal{G}_a, M_a)$ ve $\mathfrak{R}(a) = (\mathcal{R}_a, S_a)$ olsun. $\mathcal{R}_a = \mathcal{F}_a \,\widetilde{\cup}_k\, \mathcal{G}_a$ dir. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_k [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{R}, A \cap B]^c$, $\forall a \in C$ için; $\mathcal{R}_a^c = \tilde{X} \ominus_k (\mathcal{F}_a \,\widetilde{\cup}_k\, \mathcal{G}_a)$ olur.

Buradan ;

$$\mathcal{R}_a^c = \{\frac{\gamma}{X - (\mathcal{F}_a(\gamma)) \cup_k (\mathcal{G}_a(\gamma))} : \quad \gamma \in L_a \cap M_a\}$$

$$= \{\frac{\gamma}{(X - \mathcal{F}_a(\gamma)) \cap_k (X - \mathcal{G}_a(\gamma))} : \gamma \in L_a \cap M_a \}$$

$$= \{\frac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap_k \mathcal{G}_a(\gamma)} : \quad \gamma \in L_a \cap M_a \}$$

Diğer yandan $C = A \cap B$ iken $[\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_k [\mathfrak{G}, B]^c = [\mathfrak{F}^c, A] \sqcap_k [\mathfrak{G}^c, B] = [\mathfrak{K}, A \cap B]$ dir. $a \in A \cap B$ iken $\mathcal{K}_a = \mathcal{F}_a^c \,\widetilde{\cap}_k\, \mathcal{G}_a^c$ olup buradan;

$$\mathcal{K}_a = \left\{ \frac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap_k \mathcal{G}_a^c(\gamma)} : \gamma \in L_a^c \cap M_a^c \right\}.$$

Teorem 3.38 (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. Öyleyse ;

i. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_e [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]^c \sqcap_e [\mathfrak{G}, B]^c$

ii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap_e [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, \mathrm{A}]^c \sqcup_e [\mathfrak{G}, A]^c$

İspat : $C = A \cap B$ ve $[\mathfrak{F}, A] \sqcup_e [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{H}, C]$ olsun. $\forall a \in C$ için $\mathfrak{F}(a) = (\mathcal{F}_a, L_a)$, $\mathfrak{G}(a) = (\mathcal{G}_a, M_a)$ ve $\mathfrak{H}(a) = (\mathcal{H}_a, S_a)$ olsun. ve tanımdan ;

$$\mathcal{H}_a = \begin{cases} \mathcal{F}_a & , a \in A - B \ ise \\ \mathcal{G}_a & , a \in B - A \ ise \\ \mathcal{F}_a \mathbin{\tilde{\cup}_k} \mathcal{G}_a & , a \in A \cap B \ ise \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{H}_a^c = \begin{cases} \tilde{X} \ominus_k \mathcal{F}_a & , a \in A - B \ ise \\ \tilde{X} \ominus_k \mathcal{G}_a & , a \in B - A \ ise \\ \tilde{X} \ominus_k (\mathcal{F}_a \mathbin{\tilde{\cup}_e} \mathcal{G}_a) & , a \in A \cap B \ ise \end{cases}$$

dir. O halde

$$\tilde{X} \ominus_k \mathcal{F}_a = \{ \frac{\beta}{X - \mathcal{F}_a(\beta)} = \frac{\beta}{\mathfrak{F}_a(\beta)} : \beta \in L_a, a \in A - B\}$$

$$\tilde{X} \ominus_k \mathcal{G}_a = \{ \frac{\beta}{X - \mathcal{G}_a\,(\delta)} = \frac{\beta}{\mathfrak{F}_a(\delta)} , \delta \in M_a, a \in B - A$$

Böylece L_a ve M_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$ 'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerine karşılık gelen temel parametre kümeleri ve $\tilde{X}$ mutlak evrensel kümedir.

$$\tilde{X} \ominus_k (\mathcal{F}_a \tilde{\cup} \mathcal{G}_a) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\left(X - \mathcal{F}_a(\gamma)\right)}, \gamma \in L'_a \\ \dfrac{\gamma}{\left(X - \mathcal{G}_a(\gamma)\right)}, \gamma \in M'_a \\ \dfrac{\gamma}{\left(X - \mathcal{F}_a(\gamma) \cup \mathcal{G}_a(\gamma)\right)}, \gamma \in L'_a \cap M'_a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma)}, \gamma \in L'_a \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{G}_a^c(\gamma)}, \gamma \in M'_a \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap \mathcal{G}_a^c(\gamma)}, \gamma \in L'_a \cap M'_a \end{cases}$$

$\forall a \in A \cap B$ $için$ L'_a ve M'_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$ 'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerinin temel parametre kümeleridir.

Diğer yandan $C = A \cap B$ için $[\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_e [\mathfrak{G}, B]^c = [\mathfrak{R}, C]$ dir. $\forall a \in C$ için;

$$\mathcal{R}_a = \begin{cases} \mathcal{F}_a^c & , a \in A - B \text{ ise} \\ \mathcal{G}_a^c & , a \in B - A \text{ ise} \\ \mathcal{F}_a^c \ \tilde{\cap}_e \mathcal{G}_a^c & , a \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{F}_a^c = \{\frac{\beta}{\mathcal{F}_a^c(\beta)} : \beta \in L_a, \forall a \in A - B\},$$

$$\mathcal{G}_a^c = \left\{\frac{\beta}{\mathcal{G}_a^c(\beta)}, \beta \in L_a, \forall a \in B - A\right\}$$

dir. $\forall a \in A \cap B$ için L_a ve M_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$ 'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerine karşılık gelen temel parametre kümeleridir. $\forall a \in A \cap B$ için

$$\mathcal{F}_a^c \mathbin{\tilde{\cap}_e} \mathcal{G}_a^c = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma)} & ,\gamma \in L'_a \ ise \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{G}_a^c(\gamma)} & ,\gamma \in M'_a \ ise \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap \mathcal{G}_a^c(\gamma)} & ,\gamma \in L'_a \cap M'_a \ ise \end{cases}$$

$\forall a \in A \cap B$ için L'_a ve M'_a , sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$ 'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerine karşılık gelen temel parametre kümeleridir.

Teorem 3.39. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. Öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere

i. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B]^c$

ii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B]^c$

İspat: i. $C = A \cap B \neq \emptyset$ ve$[\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{R}, A \cap B]$ olsun. $\forall a \in C$ için $\mathfrak{F}(a) = (\mathcal{F}_a, L_a)$, $\mathfrak{G}(a) = (\mathcal{G}_a, M_a)$ ve $\mathfrak{R}(a) = (\mathcal{R}_a, C)$ olsun. $\mathcal{R}_a = \mathcal{F}_a \mathbin{\tilde{\cup}_e} \mathcal{G}_a$ dir. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{R}, A \cap B]^c$ olduğu biliniyor. O halde,

$$\mathfrak{R}^{\wr}(a) = \tilde{X} \ominus_k (\mathcal{F}_a \mathbin{\tilde{\cup}_e} \mathcal{G}_a) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{X - \mathcal{F}_a(\gamma)}, & \gamma \in L'_a \ ise \\ \dfrac{\gamma}{X - \mathcal{G}_a(\gamma)}, & \gamma \in M'_a \ ise \\ \dfrac{\gamma}{X - (\mathcal{F}_a(\gamma) \cup \mathcal{G}_a(\gamma))}, & \gamma \in L'_a \cap M'_a \ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma)}, & \gamma \in L'_a \ ise \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{G}_a^c(\gamma)}, & \gamma \in M'_a \ ise \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap \mathcal{G}_a^c(\gamma)}, & \gamma \in L'_a \cap M'_a \ ise \end{cases}$$

$\forall a \in A \cap B$ için L'_ave M'_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerine karşılık gelen temel parametre kümeleridir.

Diğer taraftan $C = A \cap B$ olmak üzere $[\mathfrak{F}, A]^c \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B]^c = [\mathfrak{K}, A \cap B]^c$ olsun. O halde $\mathcal{K}_a = \mathcal{F}_a^c \,\tilde{\cap}\, \mathcal{G}_a^c$ dir. Her $a \in C$

$$\mathcal{K}_a = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma)}, & \gamma \in L_a' \ ise \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{G}_a^c(\gamma)}, & \gamma \in M_a' \ ise \\ \dfrac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap \mathcal{G}_a^c(\gamma)}, & \gamma \in L_a' \cap M_a' \ ise \end{cases}$$

Burada dikkat edilirse her $a \in C$ için $\mathcal{H}_a^c$ kümesi ile $\mathcal{K}_a$ kümelerinin aynı olduğu görülür. O halde $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{k-e} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_{k-e} [\mathfrak{G}, B]^c$ dir.

ii. İspat i.'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.40. (Hayat *et al.* 2018) $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. Öyle ki $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere

i. $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]^c$
ii. $([\mathfrak{F}, A] \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B]^c$

İspat: i. $C = A \cap B \neq \emptyset$ ve $[\mathfrak{F}, A] \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{R}, A \cap B]$ olsun. $\forall a \in C$ için $\mathfrak{F}(a) = (\mathcal{F}_a, L_a)$, $\mathfrak{G}(a) = (\mathcal{G}_a, M_a)$ ve $\mathfrak{R}(a) = (\mathcal{R}_a, C)$ olsun. O halde,

$$\mathcal{R}_a = \begin{cases} \mathcal{F}_a, \ a \in A - B \ ise \\ \mathcal{G}_a, \ a \in B - A \ ise \\ \mathcal{F}_a \,\tilde{\cup}_k\, \mathcal{G}_a, a \in A \cap B \ ise \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}_a^c = \begin{cases} \tilde{X} \ominus_k \mathcal{F}_a, \ a \in A - B \ ise \\ \tilde{X} \ominus_k \mathcal{G}_a, \ a \in B - A \ ise \\ \tilde{X} \ominus_k (\mathcal{F}_a \,\tilde{\cup}_k\, \mathcal{G}_a), a \in A \cap B \ ise \end{cases}$$

tanımdan açıktır. Burada

$$\tilde{X} \ominus_k \mathcal{F}_a = \{ \frac{\beta}{X - \mathcal{F}_a(\beta)} = \frac{\beta}{\mathcal{F}_a^c(\beta)} : \beta \in L_a, a \in A - B \}$$

$$\tilde{X} \ominus_k \mathcal{G}_a = \{ \frac{\delta}{X - \mathcal{G}_a\,(\delta)} = \frac{\delta}{\mathcal{G}_a^c(\delta)}\,, \delta \in M_a, a \in B - A$$

$\forall a \in A \cap B$ için $L_a$ve M_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a\,, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerinin temel parametre kümeleridir.

$$\tilde{X} \ominus_k (\mathcal{F}_a \,\tilde{\cup}_k\, \mathcal{G}_a) = \{ \frac{\gamma}{(X - \mathcal{F}_a(\gamma)) \cup \mathcal{G}_a^c(\gamma)} = \frac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cup \mathcal{G}_a^c(\gamma)} : \gamma \in L'_a \cap M'_a, \forall a \in A - B\}.$$

Burada, L'_ave M'_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a\,, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerine karşılık gelen temel parametre kümeleridir.

Diğer taraftan, $C = A \cup B,$ olmak üzere $[\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]^c = [\mathfrak{K}, C]$ ($\mathfrak{K}(a) = (\mathcal{K}_a, C)$)olsun. For all $a \in C$

$$\mathcal{K}_a = \begin{cases} \mathcal{F}_a, & a \in A - B \text{ } ise \\ \mathcal{G}_a, & a \in B - A \text{ } ise \\ \mathcal{F}_a \,\tilde{\cup}_k\, \mathcal{G}_a, & a \in A \cap B \text{ } ise \end{cases}$$

dir. Burada,

$$\mathcal{F}_a^c = \{ \frac{\beta}{\mathcal{F}_a^c(\beta)} : \ \beta \in L_a, a \in A - B\}$$

$$\mathcal{G}_a^c = \{ \frac{\delta}{\mathcal{G}_a^c(\delta)} : \delta \in M_a, a \in B - A\}$$

Dikkat edelimki $L_a$ve M_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a\,, L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerinin temel parametre kümeleridir ve her $a \in C$ için,

$$(\mathcal{F}_a^c \,\tilde{\cap}_k\, \mathcal{G}_a^c) = \{ \frac{\gamma}{\mathcal{F}_a^c(\gamma) \cap \mathcal{G}_a^c(\gamma)} : \gamma \in L'_a \cap M'_a, \forall a \in A \cap B\}.$$

Burada, L'_ave M'_a, sırasıyla $\mathcal{F}_a$ ve $\mathcal{G}_a$'ya karşılık gelen $(\mathcal{F}_a\ , L_a)$ ve $(\mathcal{G}_a, M_a)$ tip-1 esnek kümelerine karşılık gelen temel parametre kümeleridir.

Görüldüğü üzere, her $a \in C$ için $\mathcal{R}_a^c$ ve $\mathcal{K}_a$ kümeleri aynı kümelerdir. Bu yüzden $[\mathfrak{R}, C]^c = [\mathfrak{K}, C]$. Sonuç olarak, $([\mathfrak{F}, A] \sqcup_{e-k} [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \sqcap_{e-k} [\mathfrak{G}, B]^c$ dir.

ii.i'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.41. (Catherjee *et al.* 2015) **(VE çarpımı)** $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümelerinin "∧" (VE) çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanan bir tip-2 esnek kümedir

$$[\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{A}, A \times B].$$

Burada, $\mathfrak{A}(a, b) = \mathcal{F}(a) \wedge \mathcal{G}(b),\ \forall (a, b) \in A \times B$ dir.

Tanım 3.42. (Catherjee *et al.* 2015) **(VEYA çarpımı)** $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ aynı (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı iki tip-2 esnek küme olsun. $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümelerinin "∨" (VEYA) çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanan bir tip-2 esnek kümedir

$$[\mathfrak{F}, A] \vee [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{B}, A \times B]$$

Burada $\mathfrak{B}_{(a,b)} = \mathcal{F}_a \vee \mathcal{G}_b,\ \forall (a, b) \in A \times B$ dir.

Not. $''$VE$''$ veya $''$VEYA$''$ işlemleri esnasında aynı parametre tekrarlanıyorsa bu parametrenin bir kez yazılması yeterlidir ve ifade edilen bilgiyi değiştirmez. Örneğin; "otomatik vites, otomatik vites" yazmak yerine " otomatik vites" yazılması tip-1 esnek kümenin anlaşılmasını kolaylaştır.

Örnek 3.43. Örnek 3.15'te verilen $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ tip-2 esnek kümelerini göz önüne alalım. O halde $[\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{A}, A \times B]$ VE çarpımını tip-1 esnek kümeler yardımıyla aşağıdaki gibi elde ederiz.

Burada; $\mathfrak{A}_{(a,b)} = \mathcal{F}_a \wedge \mathcal{G}_b,\ \forall (a,b) \in A \times B$ için

$$\mathfrak{A}_{(güzel,sedan)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,camtavan)}{\{a_5\}}, \frac{(3\ kapılı,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_5\}}, \\ \frac{(3\ kapılı,cam\ tavan)}{\{a\ _5\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{(güzel,güzel)} =$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_1,a_5\}}, \frac{(otomatik\ \ vites,\ \ hatchback)}{\{a_1,a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,manuel\ vites)}{\emptyset}, \\ \frac{(3kapılı,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_5\}}, \frac{(3\ kapılı,hatchback)}{\{a_3,a_5\}}, \frac{(3\ kapılı,manuel\ vites}{\{a_4\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{(lüks,sedan)} = \left\{ \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_5\}}, \frac{(5\ kapılı,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_1\}}, \frac{(5\ kapılı,cam\ tavan)}{\{a_1,a_2\}} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{(lüks,güzel)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,hatchback)}{\{a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,manuel\ vites)}{\emptyset}, \\ \frac{(5\ \ kapılı,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_1\}}, \frac{(5\ kapılı,hatchback)}{\{a_1,a_3\}}, \frac{(5\ kapılı,manuel\ vites)}{\{a_1\}} \end{array} \right\}$$

.

$[\mathfrak{F}, A] \vee [\mathfrak{G}, B] = [\mathfrak{B}, A \times B]$ VEYA çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$\mathfrak{B}_{(a,b)} = \mathcal{F}_a \vee \mathcal{G}_b,\ \forall (a,b) \in A \times B$ için

$$\mathcal{V}_{(güzel,sedan)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_1,a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,\ \ cam\ tavan)}{\{a_1,a_2,a_5\}}, \\ \frac{(3\ kapılı,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}}, \frac{(3\ kapılı,\ \ cam\ tavan)}{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_{(güzel,güzel)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_1,a_5\}}, \frac{(3\ kapılı\ ,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,hatchback)}{\{a_1,a_3,a_5\}}, \\ \frac{(otomatik\ vites,\ \ manuel\ vites)}{\{a_1,a_2,a_4,a_5\}}, \\ \frac{(3kapılı,hatchback)}{\{a_1,a_3,a_4,a_5\}}, \frac{(3kapılı,manuelvites)}{\{a_2,a_3,a_4,a_5\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_{(lüks,sedan)} = $$
$$\left\{ \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_1,a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,camtavan)}{\{a_1,a_2,a_5\}}, \frac{(5\ kapılı,\ \ otomatik\ \ vites)}{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}}, \frac{(5\ kapılı,cam\ tavan)}{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}} \right\}$$

$$\mathcal{V}_{(lüks,güzel)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(otomatik\ vites)}{\{a_1,a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,hatchback)}{\{a_1,a_3,a_5\}}, \frac{(otomatik\ vites,manuel\ vites)}{\{h_2,h_4,h_5\}}, \\ \frac{(5\ kapılı,\ \ otomatik\ vites)}{\{a_1,a_2,a_3,a_5\}}, \frac{(5\ kapılı,hatchback)}{\{a_1,a_2,a_3,a_5\}}, \frac{(5\ kapılı,manuel\ vites)}{\{a_1,a_2,a_3,a_4\}} \end{array} \right\}$$

$[\mathfrak{A}, A \times B]$ tip-2 esnek kümesi için $''(güzel, sedan)''$ olarak verilen birincil parametreye karşılık gelen elemanlar ile ilgili aşağıdaki açıklama yapılabilir.

a_5: Otomatik vitesli ve cam tavan olan bir araba,
a_3: 3 kapılı ve cam tavan olan bir arabadır.

Diğer yandan $[\mathfrak{B}, A \times B]$ tip-2 esnek kümesi için $''(güzel, sedan)''$ parametresi güzel veya sedan olan arabaları ifade eder.

a_2, a_5: Otomatik vites arabalar,
a_2, a_3, a_5: Otomatik vites olan veya cam tavan olan arabalar,
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5: 3 kapılı veya otomatik vites veya cam tavan olan arabalardır.

Önerme 3.44. (Catherjee *et al.* 2015) (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı $[\mathfrak{F}, A]$, $[\mathfrak{G}, B]$ ve $[\mathfrak{H}, C]$ tip-2 esnek kümeleri verilsin. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

i. $[\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathcal{G}, B] = [\mathcal{G}, B] \wedge [\mathfrak{F}, A]$, $[\mathfrak{F}, A] \vee [\mathcal{G}, B] = [\mathcal{G}, B] \vee [\mathfrak{F}, A]$
ii. $[\mathfrak{F}, A] \wedge ([\mathcal{G}, B] \wedge [\mathcal{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathcal{G}, B]) \wedge [\mathcal{H}, C]$
iii. $[\mathfrak{F}, A] \vee ([\mathcal{G}, B] \vee [\mathcal{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \vee [\mathcal{G}, B]) \vee [\mathcal{H}, C]$

iv. $[\mathfrak{F}, A] \wedge ([\mathfrak{F}, B] \vee [\mathcal{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathcal{G}, B]) \vee ([\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathcal{H}, C])$

v. $[\mathfrak{F}, A] \vee ([\mathcal{G}, B] \wedge [\mathcal{H}, C]) = ([\mathfrak{F}, A] \vee [\mathcal{G}, B]) \wedge ([\mathfrak{F}, A] \vee [\mathcal{H}, C])$

Bu önermeler üzerindeki ispatlar tip-1 esnek kümeler üzerinde tanımlanan "VE" ve "VEYA" işlemlerindeki değişme, birleşme ve dağılma özellikleri kullanılarak yapılabilir.

Önerme 3.45 (Catherjee *et al.* 2015) (X, E) esnek evreni üzerinde tanımlı $[\mathfrak{F}, A]$, $[\mathfrak{G}, B]$ ve $[\mathfrak{H}, C]$ tip-2 esnek kümeleri verilsin. O halde,

i. $([\mathfrak{F}, A] \wedge [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \vee [\mathfrak{G}, B]^c$

ii. $([\mathfrak{F}, A] \vee [\mathfrak{G}, B])^c = [\mathfrak{F}, A]^c \wedge [\mathfrak{G}, B]^c$

3.2 Tip-2 Esnek Kümelerin Görüntüsü

Tanım 3.46 (Catherjee *et al.* 2015) M ve N boştan farkı iki küme ve E bir parametre kümesi olsun. $A \subset E$ olmak üzere $[\mathfrak{F}, A]$, (M, E) esnek evreni üzerinde bir tip-2 esnek küme olsun.

$h : M \rightarrow N$ ve $[\mathfrak{F}, A]'$nın h altındaki görüntüsü aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$h([\mathfrak{F}, A]) = [h(\mathfrak{F}), A].$$

Burada $[h(\mathfrak{F})](x) = h(\mathcal{F}_x, S_x)$, $\forall x \in A$ ve $[h(\mathfrak{F})]: S_x \rightarrow \mathcal{P}(N)$ ise $h(\mathcal{F}_x)](y) = h(\mathcal{F}_x(y))$, $\forall y \in S_x$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.47. (Catherjee *et al.* 2015) M ve N boştan farkı iki küme ve E bir parametre kümesi olsun. $B \subset E$ olmak üzere $[\mathfrak{G}, B]$, (N, E) esnek evreni üzerinde tip-2 esnek kümesi olsun. Eğer $h : M \rightarrow N$ bir örten dönüşüm ise $[\mathfrak{G}, B]$ nin h altındaki ters görüntüsü aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$h^{-1}([\mathfrak{G}, B]) = [h^{-1}(\mathfrak{G}), B].$$

Burada, $[h^{-1}(\mathfrak{G})](y) = h^{-1}(\mathcal{G}_y, T_y) = (h^{-1}(\mathcal{G}_y), T_y), \forall y \in B$ ve $[h^{-1}(\mathcal{G}_y)]: T_y \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü $[h^{-1}(\mathcal{G}_y)](x) = h^{-1}\left(\mathcal{G}_y(x)\right)$, $\forall x \in T_y$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.48. Örnek 3.15 'i göz önüne alalım. $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ bir galerideki 5 arabadan oluşan bir küme olsun. $N = \{a_1', a_2', a_3', \dots, a_{10}'\}$ ise başka bir galerideki 10 arabadan oluşan bir küme olsun. Varsayalım ki 2 ayrı konumdaki arabaları ilişkilendiren bir fonksiyon $h : M \to N$ olarak tanımlansın. Buradan;

$$h(a_1) = a_6'; \ \ h(a_2) = a_3'; \ \ h(a_3) = a_5'; \ \ h(a_4) = a_1'; \ \ h(a_5) = a_8'$$

Örnek 4.5 'teki tip-2 esnek kümeyi göz önüne alalım. $[\mathfrak{F}, A]$'nın h altındaki görüntüsü;

$$[h(\mathfrak{F})](güzel) = \left\{\frac{otomatikvites}{\{a_6', a_8'\}}, \frac{3kapılı}{\{a_5', a_1', a_8'\}}\right\}$$

$$[h(\mathfrak{F})](lüks) = \left\{\frac{otomatikvites}{\{a_8'\}}, \frac{5kapılı}{\{a_6', a_3', a_5'\}}\right\}$$

Önerme 3.49. (Catherjee *et al.* 2015) M ve N boştan farkı iki küme ve E parametre kümesi olsun. (X, E) esnek evreni üzerinde iki tip-2 esnek küme $[\mathfrak{F}_1, A]$ ve $[\mathfrak{F}_2, A]$, $A \subset E$ olarak tanımlansın. $h : M \to N$ bir dönüşüm olmak üzere

i. $[\mathfrak{F}_1, A] \sqsubseteq [\mathfrak{F}_2, A] \Rightarrow h[\mathfrak{F}_1, A] \sqsubseteq h[\mathfrak{F}_2, A]$

ii. $h([\mathfrak{F}_1, A] \sqcup [\mathfrak{F}_2, A]) = h[\mathfrak{F}_1, A] \sqcup h[\mathfrak{F}_2, A]$

iii. $h([\mathfrak{F}_1, A] \sqcap [\mathfrak{F}_2, A]) \sqsubseteq h[\mathfrak{F}_1, A] \sqcap h[\mathfrak{F}_2, A]$ dir.

Burada eşitlik olma durumu h fonksiyonunun birebir olması durumunda geçerlidir.

İspat : $a \in A$ $için$ $\mathfrak{F}_1(a) = (\mathcal{F}_a^1, S_a^1)$ ve $\mathfrak{F}_2(a) = (\mathcal{F}_a^2, S_a^2)$ olsun. O halde,

i. $[\mathfrak{F}_1, A] \sqsubseteq [\mathfrak{F}_2, A]$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall a \in A, \mathfrak{F}_1(a) \,\widetilde{\subseteq}\, \mathfrak{F}_2(a)$ Yani; $(\mathcal{F}_a^1, S_a^1) \,\widetilde{\subseteq}\, (\mathcal{F}_a^2, S_a^2)$ dir.

Şimdi, $[h(\mathfrak{F}_1)](a) = h(\mathcal{F}_a^1, S_a^1) = (h(\mathcal{F}_a^1), S_a^1)$, $\forall a \in A$ ve $\forall \beta \in S_a^1$ için $[h(\mathcal{F}_a^1)](\beta) = h(\mathcal{F}_a^1(\beta)) \subseteq h\big(\mathcal{F}_a^2(\beta)\big) = [h(\mathcal{F}_a^2)](\beta)$ olup ispat tamamlanır.

ii. ve iii.'nin ispatları da benzer şekilde yapılır.

Önerme 3.50. (Catherjee *et al.* 2015) M ve N boştan farkı iki küme ve E bir paramete kümesi olsun. $B \subset E$ olmak üzere (N, E) üzerinde tanımlanan tip-2 esnek kümeler $[\mathfrak{G}_1, B]\ ve\ [\mathfrak{G}_2, B]$ verilsin. $h : M \to N$ bir örten fonksiyon olmak üzere

i. $[\mathfrak{G}_1, B] \sqsubseteq [\mathfrak{G}_2, B] \Rightarrow h^{-1}[\mathfrak{G}_1, B] \sqsubseteq h^{-1}[\mathfrak{G}_2, B]$
ii. $h^{-1}([\mathfrak{G}_1, B] \sqcup [\mathfrak{G}_2, B]) = h^{-1}[\mathfrak{G}_1, B] \sqcup h^{-1}[\mathfrak{G}_2, B]$
iii. $h^{-1}([\mathfrak{G}_1, B] \sqcap [\mathfrak{G}_2, B]) = h^{-1}[\mathfrak{G}_1, B] \sqcap h^{-1}[\mathfrak{G}_2, B]$ dir.

İspat : $y \in B$ için $\mathfrak{G}_1(y) = \big(\mathcal{G}_y^1, T_y^1\big)$ ve $\mathfrak{G}_2(y) = \big(\mathcal{G}_y^2, T_y^2\big)$ olsun.

i. Kabul edelim ki $[\mathfrak{G}_1, B] \sqsubseteq [\mathfrak{G}_2, B]$ olsun. $\forall a \in B$ için

$$[h^{-1}(\mathfrak{G}_1)](y) = h^{-1}(\mathcal{G}_a^1, T_a^1) = (f^{-1}(\mathcal{G}_a^1), T_a^1)$$

dir. Burada $\forall x \in T_y^1$ için $[h^{-1}\big(\mathcal{G}_y^1\big)](x) = h^{-1}\left(\mathcal{G}_y^1(x)\right) \subseteq f\left(\mathcal{G}_y^2(x)\right) = [f(G_a^2)](\beta)$ dır. Böylece ; $[\mathfrak{G}_1, B] \sqsubseteq [\mathfrak{G}_2, B] \Rightarrow h^{-1}[\mathfrak{G}_1, B] \sqsubseteq h^{-1}[\mathfrak{G}_2, B]$.

ii ve iii'nin ispatları da benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.44. (Catherjee *et al.* 2015) M ve N boştan farkı iki küme ve E bir parametre kümesi olsun. $A, B \subset E$ olmak üzere $[\mathfrak{F}, A]$ ve $[\mathfrak{G}, B]$ sırasıyla (M, E) ve (N, E) esnek evrenleri üzerinde keyfi tip-2 esnek kümeler olsun. $h : M \to N$ bir fonksiyonu için

i. h birebir ise $[\mathfrak{F}, A] \sqsubseteq h^{-1}\{h[\mathfrak{F}, A]\}$ dir.

ii. h örten ise $h\{h^{-1}[\mathfrak{G}, B]\} \sqsubseteq [\mathfrak{G}, B]$ dir.

İspat : i. $h[\mathfrak{F}, A] = [h(\mathfrak{F}), A]$. Burada $[h(\mathfrak{F})](x) = h(\mathcal{F}_x, S_x), \forall x \in A$ $h^{-1}\big[h[\mathfrak{F}, A]\big] = h^{-1}[h(\mathfrak{F}), A]$ dır. Böylece; $[h^{-1}h(\mathfrak{F})](x) = h^{-1}\big(h(\mathcal{F}_x), S_x \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} (\mathcal{F}_x, S_x)\big) = [\mathfrak{F}(x)]$ olup $h^{-1}\big(h(\mathcal{F}_x, S_x)\big) = (\mathcal{F}_x, S_x),\ x \in A$ eşitliği f birebir olduğunda geçerlidir.

ii'nin ispatı da benzer şekilde yapılır.

4. TİP-2 ESNEK KÜMELERİN KARAR VERME PROBLEMİ ÜZERİNE UYGULAMASI

Bu bölümde Catherjee *et al.* (2015) tarafından sunulan metot göz önüne alınıp, dükkan seçimi problemi için benzer bir uygulaması sunulmuştur.

Bir kişinin market açmak amacıyla bir dükkân satın almak istediğini varsayalım. Bu amaçla dükkân arayışına girerek satın almak istediği dükkan için ‘'Kombili, kombisiz, pahalı, ucuz, geniş alanlı, dar alanlı, depo alanı olan, tek katlı, 2 katlı" şeklinde parametrelerini belirlemiştir. Satın alınabilecek evrende 10 dükkân vardır ve her bir dükkânı d_i , $i = 1,2,3, \dots ,10$ şeklinde isimlendirilmiştir. Daha sonra alternatiflerin evreninden en idealini seçebilmek için "diğer marketlere yakınlığı, ferahlığı, iyi bir konumda olması, modern oluşu, iyi güvenlikli olması, temiz oluşu, bakımlı olması" parametrelerini birincil parametreler olarak belirlemiştir. Gösterimde kolaylık olması açısından bu parametreler için aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır.

MY: diğer marketlere yakınlığı; **S:**ferahlığı; **İK:**iyi bir konumda olması; **M:**modern oluşu; **G:** yüksek güvenlikli oluşu; **T:**temiz oluşu; **B:**bakımlı olması

Ayrıca temel parametrelerde aşağıdaki şekilde sembolize edilmiştir;

k: kombili; **nk:** otopark olması ; **p:**pahalı; **u:**ucuz; **ga:**geniş alanlı; **da:**dar alanlı; **dep:**depo alanı olan; **tk:**tek katlı; **2k:**2 katlı.

Tüm dükkanların mevcut özelliklerine göre değerlendirilerek aşağıda elde edilen tip-1 esnek kümelerin bir koleksiyonu olarak tip-2 esnek küme oluşturulsun;

$$\mathfrak{F}(MY) = \left\{\frac{k}{\{d_1,d_6,d_9\}}, \frac{nk}{\{d_3\}}, \frac{u}{\{d_1,d9\}}, \frac{p}{\{d_6,d_9\}}, \frac{da}{\{d_3\}}, \frac{ga}{\{d_1,d_7\}}, \frac{dep}{\{d_1,d_6\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(S) = \left\{\frac{k}{\{d_8\}}, \frac{nk}{\{d_2,d_3\}}, \frac{u}{\{d_8\}}, \frac{p}{\{d_2\}}, \frac{da}{\{d_3\}}, \frac{ga}{\{d_9\}}, \frac{tk}{\{d_8,d_9\}}, \frac{dep}{\{d_2,d_8,d_9\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(\dot{I}K) = \left\{\frac{k}{\{d_1,d_4\}}, \frac{nk}{\{d_2,d_7\}}, \frac{u}{\{d_1,d_4\}}, \frac{p}{\{d_2,d_7\}}, \frac{ga}{\{d_1\}}, \frac{tk}{\{d_2,d_9\}}, \frac{dep}{\{d_1,d_2,d_4\}}, \frac{2k}{\{d_4,d_7\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(G) = \left\{\frac{k}{\{d_1,d_4,d_6,d_9\}}, \frac{nk}{\{d_2,d_5,d_7,d_{10}\}}, \frac{u}{\{d_1,d_4,d_{10}\}}, \frac{p}{\{d_2,d_6,d_7,d_9\}}, \frac{da}{\{d_5\}}, \frac{ga}{\{d_1,d_6\}}, \frac{tk}{\{a_2,a_9,a_{10}\}}, \frac{dep}{\{d_1,d_2,d_4,d_5,d_8,d_9\}}, \frac{2k}{\{d_4,d_7\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(B) = \left\{\frac{k}{\{d_1,d_4,d_6,d_8,d_9\}}, \frac{nk}{\{d_2,d_{10}\}}, \frac{u}{\{d_1,d_4,d_8,d_{10}\}}, \frac{p}{\{d_2,d_6,d_9\}}, \frac{ga}{\{d_1,d_6\}}, \frac{tk}{\{d_2,d_8,d_9,d_{10}\}}, \frac{dep}{\{d_1,d_2,d_4,d_6,d_8,d_9\}}, \frac{2k}{\{d_4\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(M) = \left\{\frac{k}{\{d_4,d_8\}}, \frac{nk}{\{d_7\}}, \frac{u}{\{d_4,d_8\}}, \frac{p}{\{d_7\}}, \frac{tk}{\{d_8\}}, \frac{dep}{\{d_4,d_8\}}, \frac{2k}{\{d_4,d_7\}}\right\}$$

$$\mathfrak{F}(T) = \left\{\frac{k}{\{d_1,d_4,d_8,d_9\}}, \frac{nk}{\{d_2,d_3,d_5,d_7,d_{10}\}}, \frac{u}{\{d_1,d_4,d_8,d_{10}\}}, \frac{p}{\{d_2,d_7,d_9\}}, \frac{da}{\{d_3,d_{10}\}}, \frac{ga}{\{d_1,d_6\}}, \frac{tk}{\{d_2,d_8,d_9,d_{10}\}}, \frac{dep}{\{d_1,d_2,d_4,d_5,d_8,d_9\}}, \frac{2k}{\{d_4,d_7\}}\right\}$$

Alıcıya göre parametrelerin önem derecelerinin farklı olabilir. Bu alıcının birincil ve temel parametrelerin ağırlıklarını Tablo 4.1 deki gibi belirlediğini varsayalım.

Çizelge 4.1 Parametrelerin ağırlık dağılımı

Birincil Parametreler	İlişki Ağırlığı(w_j)	Temel Parametreler	İlişki Ağırlığı(w_j)
MY	0,95	k	0.9
S	0,7	nk	0,4
İK	0,75	u	0,8
G	0,9	p	0,5
B	0,2	da	0,01
M	0,5	ga	0,6
T	0,2	tk	0,85
-	-	dep	0,35
-	-	2k	0,25

Böylece tip-1 esnek küme tip-2 ağırlıklı esnek kümeye dönüşmüş olur.

Böylece problem alıcının talebini azami ölçüde karşılayacak dükkânı bulma problemi haline gelir. Bu amaçla Maji ve Roy (2002) tarafından geliştirilen metot tip-2 esnek kümeler için uygulanabilir.

Tip-2 esnek kümeler için genelleştirilen algoritmanın adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: Bir tip-2 esnek kümede evrensel kümenin n elemanlı ve birincil parametrelerin m elemanlı kümeler olduğunu varsayalım. Bu problem için evrenimiz $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \ldots, d_{10}$ dükkanlarının oluşturduğu 10 elemanlı küme ve birincil parametrelerin kümesi ise $''$ MY,S,İK,G,B,M,T $''$ elemanlarının oluşturduğu 7 elemanlı bir kümedir. Burda bahsedilen problem için $n = 10$, $m = 7$ dir.

Adım 2: $i = 1, j = 1$ olarak al.

Adım 3: Tip-1 esnek kümeyi, j'inci birincil parametreye karşılık gelen ağırlığı Lin (1998) ve Yao (1998) tarafından önerilen ağılık tablosu göre belirle.

Adım 4: i'inci parametrenin j'inci parametreye göre skorunu aşağıdaki formülle hesapla

$$Skor(d_i)|_j = \sum_{k=1}^{l} v_{i,k} \, . w_k$$

Burada $v_{i,k}$ dükkânın doğruluk değeri olup d_i dükkânı k ‘ıncı temel parametreyi sağlıyorsa $v_{i,k} = 1$, sağlamıyorsa $v_{i,k} = 0$ dır. k parametresi 1 den l ye kadar değer alır ve w_k , k parametresinin ağırlığını gösterir.

Adım 5: i' yi $i + 1$ ile değiştir ve $i + 1 \leq n$ olduğunu kontrol et. Eğer doğruysa 4. adıma, doğru değilse 6. Adıma git.

Adım 6: j'yi $j+1$ ile değiştir ve $j+1 \leq n$ olduğunu kontol et. Eğer doğruysa $i=1$ olarak al ve 3. Adıma git. Yanlışsa 7. Adıma git.

Adım 7: Birincil parametrelerin ilk sütunda olduğu ve bu parametrelere karşılık gelen ağırlıkların yazıldığı bir tablo hazırla. j'inci birincil parametreye göre tanımlı $\boldsymbol{i}$. dükkanın puanı $(v_{d_i})_j$;

$$(v_{d_i})_j = \text{Puan } (\mathrm{d_i})|_j$$

ile hesaplanır. Burada j, 1 ile m arasındadır ve $i = 1,2,\dots,n.$ Burada n evrensel kümenin eleman sayısıdır.

Adım 8: Son olarak tüm dükkanların net puanını aşağıdaki formülle hesapla

$$\sum_{j=1}^{m} (v_{d_i})_j . w_j$$

Burada $w_j, J = 1,2,3,\dots,m$ birincil parametrelerin ağırlıklarıdır.

Adım 9: En yüksek puana sahip dükkânı seç.

Birden fazla dükkânın puanının aynı olması durumunda birincil ağırlıklarının toplamı en yüksek olan seçilir.

Şimdi problemi çözmeye devam edelim. 7 birincil parametre 6 adımı takip ederek tablo şeklinde gösterilir ve dükkân skorları hesaplanarak skor hanesine yazılır. $''MY''ve\ ''S''$ birincil parametrelerine karşılık gelen hesaplamalar Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 te gösterilmiştir.

Çizelge 4.2 Dükkanların $''MY''$ birincil parametresi için hesaplanan skor tablosu

İlişki ağırlığı	0,9 (w_1)	0,4 (w_2)	0,8 (w_3)	0,5 (w_4)	0,01 (w_5)	0,6 (w_6)	0,35 (w_7)	
Temel Par. / **Dükkanlar**	k	nk	u	p	da	ga	dep	Skor
d_1	1	0	1	0	0	0	1	2,65
d_2	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_3	0	1	0	0	1	0	0	0,41
d_4	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_5	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_6	1	0	0	1	0	0	1	1,75
d_7	0	0	0	0	0	1	0	0,00
d_8	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_9	1	1	1	1	0	0	0	2,80
d_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0,00

Çizelge 4.3 Dükkanların $''S''$ birincil parametresi için hesaplanan skor tablosu

İlişki ağırlığı (w_j)	0,9 (w_1)	0,4 (w_2)	0,8 (w_3)	0,5 (w_4)	0,01 (w_5)	0,6 (w_6)	0,85 (w_7)	0,35 (w_8)	Skor
Temel Par. / **Dükkanlar**	k	nk	u	p	da	ga	tk	Dep	
d_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_2	0	1	0	1	0	0	1	1	2,10
d_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0,41
d_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
d_8	1	0	1	0	0	0	1	1	2,90
d_9	0	0	0	0	0	1	1	1	2,60
d_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00

Aynı şekilde diğer birincil parametreler için de benzer işlemler uygulanarak dükkanların skorları hesaplanır. Her bir birincil parametreye karşılık gelen esnek kümelere göre hesaplanan dükkân puanları ile ilgili ağırlıklar çarpılarak dükkanların net skorları hesaplanır. Bu skorları sütunlara sırası ile yerleştirip her bir dükkâna karşılık gelen birincil parametre ağırlıkları ile işleme sokup bütün satırı toplayarak net skor sütunu tamamlanır; buna göre Çizelge 6.4'te de verildiği gibi en uygun dükkân d_9 dur.

Çizelge 4.4 Dükkanların birincil parametreye göre hesaplanan $''$Net Skor$''$ tablosu

İlişkili ağırlıklar (W_j)	0,95 (W_1)	0,7 (W_2)	0,75 (W_3)	0,9 (W_4)	0,2 (W_5)	0,5 (W_6)	0,2 (W_7)	SKOR
Birincil Par. / Dükkanlar	MY	S	İK	G	B	M	T	
d_1	2,05	0,0	2,05	2,05	2,05	0,0	2,05	6,15
d_2	0,0	2,1	2,1	2,1	2,1	0,0	2,1	5,77
d_3	0,41	0,41	0,0	0,0	0,0	0,0	0,41	0,76
d_4	0,0	0,0	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	5,87
d_5	0,0	0,0	0,0	0,75	0,0	0,0	0,75	1,65
d_6	2,35	0,0	0,0	2,35	2,35	0,0	2,35	5,28
d_7	0,0	0,0	1,15	1,15	0,00	1,15	1,15	2,7
d_8	0,0	2,9	0,0	2,9	0,0	2,9	2,9	6,67
d_9	2,6	2,6	0,0	2,6	2,6	2,6	2,6	**8,97**
d_{10}	0,0	0,0	2,05	2,05	2,05	0,0	2,05	4,2

Görüldüğü gibi tip-2 esnek kümeler tip-1 esnek kümelerden daha kapsamlı, daha karmaşık yapılardır. Hem tip-2 esnek kümeler hem tip-1 esnek kümeler karşılaştırmalı karar verme yaklaşımları ile ilgili yapılardır fakat tip-2 esnek kümenin tip-1 esnek kümeye göre daha iyi bir sonuç sağladığı görülebilir. Bu sebeple 4. bölümdeki tip-2 esnek kümeye karşılık gelen tip-1 esnek küme göz önüne alınırsa

$$A = \{k, nk, p, u, ga, da, dep, tk\ 2k, MY, S, İK, M, G, T, B\}$$

için

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}, A) = \{&(k, \{d_1, d_4, d_6, d_8, d_9\}), (nk, \{d_2, d_3, d_5, d_7, d_{10}\}), (u, \{d_1, d_2, d_4, d_8, d_9, d_{10}\}),\\ &(p, \{d_2, d_6, d_7, d_9\}), (da, \{d_3, d_5\}), (ga, \{d_1, d_6, d_8, d_9\}), (tk, \{d_2, d_8, d_9, d_{10}\}),\\ &(dep, \{d_1, d_2, d_4, d_5, d_6, d_8, d_9\}), (2k, \{d_4, d_7\}), (MY, \{d_1, d_3, d_6\}),\\ &(S, \{d_2, d_3, d_8, d_9\}), (G, \{d_1, d_2, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}\}),\\ &(B, \{a_1, a_2, a_4, a_6, a_8, a_9, a_{10}\}), (M, \{a_4, a_7, a_8\}),\\ &(T, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{10}\})\ \}\end{aligned}$$

dir.

$(\mathcal{F}, A)$ Tip-1 esnek kümesini göz önüne alalım. Maji ve Roy (2002) tarafından ortaya atılan metodu kullanarak $(\mathcal{F}, A)$ tip-1 esnek kümesindeki dükkanların her biri için skor puanlarını bulalım. Hesaplanan skorlar Çizelge 4.5 te gösterilmiştir.

Çizelge 4.5 Tip-1 esnek kümeleri kullanarak hesaplanan skor tablosu

İlişki ağırlığı (W_J)	0,9 (w_1)	0,4 (w_2)	0,8 (w_3)	0,5 (w_4)	0,01 (w_5)	0,6 (w_6)	0,85 (w_7)	0,35 (w_8)	0,25 (w_9)	0,95 (W_1)	0,7 (W_2)	0,75 $(\mathbf{W}_4)$	0,9 (W_5)	0,2 (W_6)	0,5 (W_7)	0,2 (W_7)	**Skor**
Pr / **Dükkan**	k	nk	u	p	da	ga	tk	dep	2k	MY	S	İK	G	B	M	T	
d_1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	5,65
d_2	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	5,65
d_3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	2,36
d_4	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	4,65
d_5	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	2,04
d_6	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	4,4
d_7	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	3,83
d_8	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	6
d_9	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	**6,75**
d_{10}	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	3,75

Çizelge 4.5 göz önüne alındığında en yüksek skora sahip dükkân 6,75 puanla d_9 dükkanı olup ikinci en yüksek puanlı dükkan 6 puanla gelen d_8 dükkanıdır. Görüldüğü üzere iki dükkânın puanları arasında sadece 0,75 puanlık bir fark vardır. Diğer yandan Çizelge 4.4 ‘e bakıldığında ilgili dükkanların puanları sırası ile 8,97 ve 6,67 dir. Böylece ikinci durumda puanlar arasındaki farkın fazla olması, ortaya çıkan kararın daha net olduğu anlamına gelir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde tip-2 esnek kümelerle ve işlemleri ile ilgili yayınlanmış iki makale bulunmaktadır. Bu tezde tip-2 esnek kümelerin işlemlerini yayınlanmış bu iki makale ışığında sunduk ve örneklerle açıkladık. Çalışma derleme bir çalışma olup alanda yazılan ilk Türkçe kaynak olarak bu konu ile ilgili çalışma yapacak Türk araştırmacılara temel bir kaynak olarak faydalı olacağı kanaatindeyim.

KAYNAKLAR

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. Computers & Mathematics with Applications, 57(9), 1547-1553.

Atanassov, K.T. 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 20(1): 87-96.

Cagman, N. and Enginoglu, S. 2010. Soft set theory and uni-int decision making. European Journal of Operational Research, 207: 848–855.

Chatterjee, R., Majumdar, P. and Samanta, S. K. 2015. Type-2 soft sets. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29(2): 885-898.

Feng, F., Li, C.X., Davvaz, B. and Ali, M.I. 2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: A tentative approach, Soft Computing, 14: 8999–9911.

Goguen, J.A 1967. L-Fuzzy sets, Journal of Mathematical Analysis and Application, 18: 145–174.

Hayat, K., Ali, M. I., Cao, B. Y. and Karaaslan, F. 2018. New results on type-2 soft sets. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 47(4): 855-876.

Lin, T.Y. 1998. Granular computing on binary relations II: Rough set representations and brief functions, In Rough Sets Knowledge Discovery, Springer-Verlag, pp. 121–140.

Maji, P.K. and Roy, A.R. 2002. An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications, 44: 1077–1083.

Maji, P.K., Biswas, R., & Roy, A.R. 2003. Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45: 555–562.

Mendel, J. M., Liu, F., & Zhai, D. (2009). $\alpha -$plane representation for type-2 fuzzy sets: Theory and applications. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 17(5): 1189-1207.

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory–First results, Computers and Mathematics with Applications, 37: 19–31.

Mushrif, M.M., Sengupta, S. and Roy, A.K. 2006. Texture classification using a novel, soft-set theory based classification algorithm, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 246–254.

Nazmul, Sk. 2014. A Study on Topological Group Structures in the Context of Fuzzy and Soft Settings, Ph. D. Thesis, Visva- Bharati.

Pawlak, Z. 1982. Rough sets, International Journal of Computer & Information Sciences 11(5): 341–356.

Pei, D and Miao, D. 2005. From soft sets to information systems, Proceedings of Granular Computing 2 IEEE, pp. 617–621.

Yao, Y.Y. 1998. Relational interpretations of neighbourhood operators and rough set approximation operators, Information Sciences, 111(1-4): 239–259.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets, Information and Control, 8(3): 338–353.

Zadeh, L.A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, Inform Sci., 8(3): 199-249.

Zou, Y. and Xiao, Z. 2008. Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, Knowledge-Based Systems, 21(8): 941-945

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Melike MUŞ

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Anabilim Dalı	2019-Halen
Formasyon	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi	2014
Lisans	Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü	2009-2013

İş Deneyimi

Çeşitli kurumlarda lise matematik öğretmenliği yapmaktayım (10 yıl).