



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SHEHU DÖNÜŞÜMÜ VE
SHEHU AYRIŞTIRMA METODU İLE
ÇÖZÜMÜ

Hayriye BOZBURUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2022
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Hayriye BOZBURUN tarafından hazırlanan “VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SHEHU DÖNÜŞÜMÜ VE SHEHU AYRIŞTIRMA METODU İLE ÇÖZÜMÜ” adlı tez çalışması 12/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Kemâl AYDIN

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

Üye

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Sait GEZGİN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Hayriye BOZBURUN

Tarih: 12.08.2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SHEHU DÖNÜŞÜMÜ VE SHEHU AYRIŞTIRMA METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hayriye BOZBURUN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

2022, 62+ix Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER
Prof. Dr. Kemâl AYDIN
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Bu çalışmada, integral dönüşümlerinden biri olan Shehu dönüşümünden bahsedilip bu dönüşüm ikinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlere ilk kez uygulanmıştır.

Ayrıca, Shehu ayrıştırma metodu hakkında bilgi verilmiştir. Bu metot, ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem ve denklem sistemine ilk kez uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Shehu dönüşümü, Shehu ayrıştırma metodu, Volterra integral denklemi, lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi, ikinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi, ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklemi, ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem sistemi.

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

SOLUTION OF VOLTERRA TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SHEHU TRANSFORM AND SHEHU DECOMPOSITION METHOD

Hayriye BOZBURUN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

Advisor: Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

2022, 62+ix Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

Prof. Dr. Kemâl AYDIN

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

In this study, the Shehu transform, which is one of the integral transformations, is mentioned and this transformation is applied to the second kind of linear Volterra integro-differential equations for the first time.

In addition, Shehu decomposition method, which is available in the literature, is mentioned. This method has been applied for the first time to the second kind of nonlinear Volterra integro-differential equations and system of equations.

Keywords: Shehu transform, Shehu decomposition method, Volterra integral equation, the linear Volterra integro-differential equation, the linear Volterra integro-differential equation of the second kind, the nonlinear Volterra integro-differential equation of the second kind, the nonlinear system of Volterra integro-differential equation of the second kind.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada yol gösteren ve destek olan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER'e ve desteklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.

Hayriye BOZBURUN
KONYA-2022



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
1.1. İntegral Dönüşümü.....	5
1.2. Bazı İntegral Dönüşüm Örnekleri.....	6
1.2.1. Fourier Dönüşümü.....	6
1.2.2. Laplace Dönüşümü.....	6
1.2.3. Sumudu Dönüşümü.....	6
1.2.4. Elzaki Dönüşümü.....	7
1.2.5. Doğal (Natural) Dönüşümü.....	7
1.2.6. Novel Dönüşümü.....	7
1.2.7. M Dönüşümü.....	8
1.2.8. Yang Dönüşümü.....	8
2. SHEHU DÖNÜŞÜMÜ.....	9
2.1. Shehu Dönüşümünün Bazı Özellikleri.....	10
2.2. Konvolüsyon İntegrali.....	12
2.3. Shehu, Sumudu ve Laplace Dönüşümleri Arasındaki İlişki.....	12
2.4. Bazı Fonksiyonların Shehu, Sumudu ve Laplace Dönüşümleri Tablosu.....	13
2.5. Shehu Dönüşümünün Uygulamaları.....	14
3. SHEHU AYRIŞTIRMA METODU.....	17
3.1. Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Shehu Ayrıştırma Metodu ile Çözümü.....	17
3.2. Shehu Ayrıştırma Metodunun Uygulamaları.....	19
4. SHEHU DÖNÜŞÜMÜNÜN VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI.....	24

4.1. İkinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklemlerin Shehu Dönüşümü ile Çözümü.....	24
4.2. İkinci Tür Lineer Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Shehu Dönüşümü ile Çözümü.....	28
5. SHEHU AYRIŞTIRMA METODUNUN VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI.....	36
5.1. İkinci Tür Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Shehu Ayırıştırma Metodu ile Çözümü.....	36
5.2. İkinci Tür Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Shehu Ayırıştırma Metodu ile Çözümü.....	45
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	56
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{S}[v(t)]$	: v fonksiyonunun Shehu dönüşümü
$\mathbb{S}^{-1}[v(t)]$	: v fonksiyonunun ters Shehu dönüşümü
$F[v(t)]$	: v fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$S[v(t)]$	: v fonksiyonunun Sumudu dönüşümü
$L[v(t)]$	: v fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$E[v(t)]$	: v fonksiyonunun Elzaki dönüşümü
$N^+[v(t)]$	: v fonksiyonunun Doğal (Natural) dönüşümü
$M_{k,m}[v(t)](p,q)$	: v fonksiyonunun M dönüşümü
$M_n[v(t)](s)$	: v fonksiyonunun Novel dönüşümü
$Y[v(t)]$	: v fonksiyonunun Yang dönüşümü
L	: Lineer diferensiyel operatör
R	: Lineer diferensiyel operatörden kalan kısım
N	: Lineer olmayan diferensiyel operatör
$g(t)$	: Homojen olmayan terim
$G(t)$	: Kaynak terim

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Bazı Fonksiyonların Shehu, Sumudu ve Laplace Dönüşümlerinin Tablosu.....	13
---	----

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Fizik, mühendislik, kimya, biyoloji, ekonomi, sosyal bilimler, tıp, zooloji ve diğer uygulamalı bilim dallarında büyük önem arz eden, lineer ve lineer olmayan pek çok model, diferensiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu modellerin çözümü için son yıllarda çok sayıda metot geliştirilmiştir ve geliştirilmeye devam etmektedir. İntegral dönüşümleri, diferensiyel denklemleri çözmek için kullanılan metotlardan biridir. Bunlara örnek olarak; Fourier, Laplace, Sumudu, Elzaki, Mohand, Mahgoub, Aboodh, Mellin, Doğal (Natural) gibi dönüşümler verilebilir. Bu yöntemlere alternatif olarak 2019 yılında Maitama ve Zhao tarafından literatüre kazandırılan Shehu dönüşüm metodu kullanılmaya başlanmıştır. Bu dönüşüm Laplace ve Sumudu integral dönüşümlerinin genelleştirilmesi olup son yıllardaki literatür çalışmalarında dikkat çekmektedir. Shehu integral dönüşümü, klasik Fourier integral dönüşümünden başarıyla türetilip bu integral dönüşümünün basitliliğini, verimliliğini ve yüksek doğruluğunu göstermek için adi ve kısmi diferensiyel denklemlere başarıyla uygulanmaktadır.

İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında başladı. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken on dokuzuncu yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve birtakım sonuçların alınmaya başlandığı görülmektedir. 1823 yılında, Abel tarafından bir integral denkleme rastlanılmış ve ilk defa integral denklem deyimi, 1888 yılında Du Bois Reymond tarafından kullanılmıştır (Bôcher, 1926; Wazwaz, 2011). Gerçek hayat problemlerinin matematiksel modellemesinin sonucu olarak kesirli diferensiyel denklemler, gecikmeli diferensiyel denklemler, kısmi diferensiyel denklemler, tam diferensiyel denklemler gibi denklem türleri ortaya çıkmaktadır. 1959 yılında, Volterra tarafından nüfus büyüme modeli incelenirken kalıtsal etkiler konusundaki araştırmasının doğrudan sonucu olarak Volterra integro-diferensiyel denklemler tanıtıldı (Volterra, 1959). Bu denklemler, birinci ve ikinci tür olarak iki gruba ayrılmıştır. Özellikle integro-diferensiyel denklemlerde hem integral hem de operatör bir arada ortaya çıkmıştır. İntegro-diferensiyel denklemlerle; nükleer reaktörler, devre analizi, dalga yayılma, cam şekillendirme süreci, nanohidrokinamik, visko-elastisite, biyolojik popülasyon, çölde rüzgar dalgalanması gibi mühendislik biliminin farklı alanlarında çalışmalar yapılmıştır (Rahman, 2007; Wazwaz, 2011). Son zamanlarda, integro-diferensiyel denklemlerin çözümleri için çok adımlı çok değişkenli yöntemler gibi iki veya üç boyutlu birçok yöntem kullanılmaktadır (Wazwaz, 2009). Bunlara; Homotopi

pertürbasyon tekniği, Adomian ayrıştırma metodu, Laplace ayrıştırma metodu, Sumudu ayrıştırma metodu, Elzaki ayrıştırma metodu ve Shehu ayrıştırma metodu örnek olarak verilebilir.

2019 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, birinci tür Volterra integral denklemlerine uygulanmıştır (Aggarwal ve ark., 2019a). Volterra integral denklemleri, özel bir integral denklem türüdür. Birinci ve ikinci tür olarak adlandırılan iki gruba ayrılırlar. Volterra integral denklemlerinin başlangıç değer problemlerinden türetilebileceği gösterilmiştir. Bu nedenle, Volterra integral denkleminin çözümü, başlangıç değerli problemlerin çözümünden çok daha kolaydır. Volterra integral denklemleri; salgınların yayılması, popülasyon dinamikleri, nötron difüzyon problemleri, ısı transfer problemleri, radyasyon transfer problemleri ve elektrik devresi problemleri gibi birçok bilimsel uygulamada kullanılmaktadır. Bu çalışmalarında, Shehu dönüşümünü kullanarak birinci tür lineer Volterra integral denklemlerinin çözümü için çok kullanışlı bir integral dönüşüm metodu olduğunu göstermiştir.

2019 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, Abel integral denklemi üzerinde uygulanmıştır (Aggarwal ve Gupta, 2019). Abel integral denklemi önemli bir singüler (tekil) integral denklem türüdür. Genellikle atomik saçılma, mekanik, radyo, astronomi, fizik, elektron emisyonu, X-ışını radyografisi ve sismoloji gibi birçok bilim dalında görülmektedir. Bu çalışmalarında, Abel integral denklemini çözmek için Shehu dönüşümü kullanılarak bazı sayısal uygulamalar verilmiştir.

2019 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, Hardling Growth ve Decay problemleri üzerinde uygulanmıştır (Aggarwal ve ark., 2019b). İntegral dönüşümleri, mühendislik ve diğer bilim dallarında ileri dereceli problemleri çözmek için kullanılan bir metottur. Bu problemler ekonomi, kimya, biyoloji ve fizik gibi alanlarda çok önemlidir. Bu çalışmalarında, büyüme ve azalma problemlerini çözmek için Shehu dönüşümü uygulanarak oldukça yararlı bir metot olduğu gösterilmiştir.

2019 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, hata fonksiyonu üzerinde uygulanmıştır (Aggarwal ve Singh, 2019). Fick'in ikinci yasası, ısı ve kütle transferi titreşen kırımlar gibi pek çok ileri düzey mühendislik probleminin çözümü, hata ve tamamlayıcı fonksiyonu içerir. Bu tip problemleri çözmek için herhangi bir integral dönüşümünü kullandığımızda hata fonksiyonunun integralini bilmek çok gerekli ve önemlidir. Bu çalışmalarında, olasılık fonksiyonunu içeren integralleri çözmek için Shehu dönüşümü kullanılmıştır.

2019 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, Caputo-kesirli tipinde yüksek mertebeden diferensiyel denklemlere uygulanmıştır (Belgacem ve ark., 2019). Bu çalışmalarında, kesirli Riemann-Liouville ve Caputo operatörleri için Shehu dönüşüm ifadeleri oluşturulmuştur.

2019 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, kesirli mertebeden Caputo tipi başlangıç değerli problemlere uygulanmıştır (Qureshi ve Kumar, 2019). Bu çalışmalarında, lineer kesirli mertebeden adi diferensiyel denklemler bazı koşullar ile tanımlanmış olup bu denklemler, $\alpha > 0$ mertebeye sahip Caputo diferensiyel operatörü ile Shehu integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. n . mertebeden integralin Shehu dönüşümü ile ispatı için fonksiyon, üstel mertebeden ve parçalı sürekli olmalıdır. Kesirli problem türlerini çözmek için Laplace ve Doğal (Natural) gibi mevcut integral dönüşüm tekniklerinden yararlanılmıştır.

2019 yılında, (2+zaman kesirli mertebeden) boyutlu fiziksel modelleri çözmek için Shehu ayrıştırma metodu kullanılmıştır (Khan ve ark., 2019). Önerilen metot, Adomian ayrıştırma yöntemi ile birlikte kullanılan hibrit metottur ve serilerin çözümünde istenen yakınsama oranını sağlamaktadır. Lineer ve lineer olmayan kesirli kısmi diferensiyel denklemlere uygulanarak iyi bir analitik teknik olduğu gösterilmiştir.

2019 yılında, Shehu dönüşümün Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasındaki ilişki açıklanmıştır (Bokhari, 2019). Bu çalışmalarında, Sumudu ve Laplace integral dönüşümlerinin genelleştirilmesi olan Shehu integral dönüşümünün yeni özellikleri verilmiştir. Bazı kesirli diferensiyel denklem problemlerini çözmek için bu metot, Caputo ve Riemann–Liouville anlamındaki Atangana–Baleanu türevlerine uygulanır. Ayrıca, 2020 yılında Shehu dönüşümünün temel özelliklerinin Laplace dönüşümünden kolayca elde edilebileceği gösterilmiş ve iki dönüşüm arasındaki bağlantıyı vermişlerdir (Issa ve Mensah, 2020). Bu çalışmalarında, Shehu dönüşüm metodunun hesaplama yönü geliştirilerek ters çevirme formülleri verilmiş, ölçümler ve dağıtımlar genişletilmiştir.

2020 yılında, iki katlı Shehu dönüşümünün özellikleri ve uygulamaları verilmiştir (Alfaqueih ve Mısırlı, 2020). Bu çalışmalarında, Shehu dönüşümünün tek katlı integral dönüşüm kavramını genelleştirilerek iki katlı Shehu Dönüşüm Metodu oluşturulmuştur. Ayrıca, iki katlı Shehu dönüşümü ile ilgili temel özellikler ve teoremler verilmiştir. Gerçek hayatta ve mühendisliğin farklı alanlarındaki başlangıç ve sınır değer problemlerini çözmek için iki katlı Shehu dönüşüm metodu kullanılarak verimliliği, yüksek doğruluk ve uygulanabilirliği gösterilmiştir.

2020 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu, fizik ve mühendislik alanında zaman-kesirli diferensiyel modelleri çözmek için kullanılmıştır (Akinyemi ve Iyiola, 2020). Bu algoritma ile lineer olmayan terimler ayrıştırılmıştır. Böylece metodun verimli, kesin sonuçlar verdiğini ve kullanımın çok kolay olduğu gösterilmiştir.

2020 yılında, Shehu integral dönüşümü, ikinci tür lineer Volterra integral denklemlerine uygulanmıştır (Aggarwal ve ark., 2020). Volterra integral denklemleri, uygulamalı matematik, fizik, mekanik, istatistik, biyoloji, ekonomi ve kontrol sistemleri teorisi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, birçok adi ve kısmi diferensiyel denklemin başlangıç değer problemlerini kapsamaktadır. Bu çalışmalarında, ikinci tür lineer Volterra integral denkleminin çekirdeğini konvolüsyon tipi çekirdek olarak düşünmüşlerdir. Bazı sayısal problemleri Shehu dönüşümü yardımıyla çözerek tüm metot açıklanmış ve Shehu metodunun çok etkili bir integral dönüşümü olduğu gösterilmiştir.

2020 yılında, çok boyutlu kesirli difüzyon denklemlerini çözmek için Homotopi Analizi Shehu İntegral Dönüşüm Metodu (HASTM) adı verilen yeni bir yarı analitik yöntem sunulmuştur (Maitama ve Zhao, 2020). Önerilen teknik, homotopi analiz metodu ile Shehu dönüşümünün bir kombinasyonudur. Metodun yakınsama analizi kanıtlanmış olup tekniğin verimliliği ve yüksek doğruluğunu göstermek için kesirli difüzyon denklemlerinin bazı uygulamaları verilmiştir. HASTM kullanılarak elde edilen sonuçlar, mevcut tekniklerin sonuçlarıyla tam uyum içindedir.

2020 yılında, Shehu integral dönüşüm metodu kullanılarak HIV-1 (insan immün yetmezlik virüsü tip 1) enfeksiyonları sırasında enfekte olmuş hücrelerin sayısını ve plazmada enfekte olmuş (viral) partiküllerin konsantrasyonu belirlenmiştir (Higazy ve ark., 2020).

2021 yılında, kesirli kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için üç katlı Shehu integral dönüşüm metodu sunulmuştur (Alkaleeli ve ark., 2021). Ayrıca, 2021 yılında ise üç katlı Shehu dönüşümü Volterra integro-kesirli diferensiyel denklemlere uygulanmıştır (Alkaleeli, 2021).

Bu tez çalışması, altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; integral dönüşümünün tanımı ve bazı çok iyi bilinen integral dönüşüm örneklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde; Shehu integral dönüşüm metodunun tanımı, literatürde mevcut olan bazı teoremleri, konvolüsyon integral tanımı verilerek Shehu dönüşümünün Sumudu ve Laplace dönüşümleri ile arasındaki ilişkiden bahsedilip bunlarla ilgili tablo verilmiştir. Üçüncü bölümde; literatürde mevcut olan Shehu

ayırıştırma metodu hakkında bilgi verilip bununla ilgili uygulamalara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde; ikinci tür lineer Volterra integral ve integro-diferensiyel denklemlerinin Shehu dönüşümü ile çözümü verilip örneklerle desteklenmiştir. Beşinci bölümde; ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem ve denklem sisteminin Shehu ayırıştırma metodu ile çözümü verilmiştir. Bu bölümü daha iyi anlayabilmek adına uygulamalar çözülmüştür. Son bölümde ise, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

1.1. İntegral Dönüşümü

Bir $v(x)$ fonksiyonunun integral dönüşümü $F(p)$,

$$F(p) = \int_a^b K(p, x)v(x)dx; \quad a \leq x \leq b \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Burada p ve x ' e bağlı K fonksiyonu dönüşüm çekirdeği olarak adlandırılmaktadır (Srivastava ve ark., 2015; Debnath ve Bhatta, 2016) İntegral dönüşüm tanımı birçok ünlü matematikçinin çalışmalarında yer almaktadır. İntegral dönüşümünün tarihsel gelişim süreci şu şekildedir: Ünlü İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından ikinci dereceden diferensiyel denklemlerin çözümünde integral dönüşümü kullanılmıştır (1707-1783). O günden bugüne de aynı tarz problemlerin çözümünde güçlü bir yol olarak görülmektedir. Her ne kadar bu problemleri çözmek için kullanılan, Hankel, Abel, Hilbert, Poisson, Doğal (Natural), Mellin, Elzaki, Mahgoub, Mohand, Aboodh, Kamal gibi birçok integral dönüşüm türü bulunsa da bunların içlerinde en ünlüleri Fourier, Laplace ve Sumudu dönüşümleridir.

İlk olarak olasılık teorisinde Pierre-Simon Laplace (1749-1827) tarafından kullanılan Laplace dönüşümü; matematikte sınır-değer, başlangıç-değer problemlerinde ve mühendislik alanında zamandan bağımsız lineer sistemleri modellemekte kullanılan önemli bir dönüşümdür (Mısır, 2016). Fourier dönüşümü ise, Joseph Fourier (1768-1830) tarafından 1822'de yayımlanan *La Theoric Analytique de la Chaleur* isimli tezinde kullanılmıştır (Bochner ve ark., 1949) ve bu dönüşüm diferensiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutar. İlerleyen zamanda, 1993 yılında kontrol mühendisliğindeki problemleri çözmek için Watugala tarafından literatüre kazandırılan

Sumudu integral dönüşüm metodu, 2019 yılında ise Maitama ve Zhao tarafından bir Laplace tipi integral dönüşüm yöntemi olan ve hem adi hem de kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için Shehu integral dönüşüm metodu kullanılmaya başlanmıştır.

1.2. Bazı İntegral Dönüşüm Örnekleri

1.2.1. Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü, diferensiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutan integral dönüşümlerinden biridir. Fizik ve mühendislik alanında birçok çalışmalarda kullanılmıştır (Bracewell ve Bracewell, 1986). Bir $v(t)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü,

$$F[v(t)] = f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-iwt} v(t) dt \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır (Bochner ve ark., 1949).

1.2.2. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü, integral dönüşümlerin ilk örneklerinden biridir. Bir $v(t)$, $t > 0$ fonksiyonu için Laplace dönüşümü,

$$L[v(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt; \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır (Schiff, 1999).

1.2.3. Sumudu Dönüşümü

1993 yılında, Sumudu integral dönüşüm metodu kullanılmaya başlanmıştır (Watugala, 1993). Bir $v(t)$, $t > 0$ fonksiyonu için Sumudu dönüşümü,

$$S[v(t)] = G(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} v(ut) dt; \quad u \in (-\tau_1, \tau_2) \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır (Belgacem ve Karaballi, 2006).

1.2.4. Elzaki Dönüşümü

Elzaki dönüşümü, klasik Fourier integralinden türetilmiştir. Fourier, Laplace ve Sumudu dönüşümlerine tipik olarak benzeyen, zaman alanında adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bu dönüşüm 2011 yılında tanıtılmıştır. Bir $v(t)$, $t > 0$ fonksiyonu için Elzaki dönüşümü,

$$E[v(t)] = T(u) = u \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{u}\right)} v(t) dt; \quad k_1 \leq u \leq k_2 \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır (Elzaki, 2011).

1.2.5. Doğal (Natural) Dönüşümü

Doğal (Natural) dönüşümü, Fourier integralinden türetilmiştir. 2012 yılında Laplace ve Sumudu integral dönüşümlerinin yakınsaması olarak literatüre kazandırılmıştır. Bir $v(t)$, $t > 0$ ve $v(t) = 0$, $t < 0$ fonksiyonu için Doğal (Natural) dönüşümü,

$$N^+[v(t)] = R(s, u) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(ut) dt; \quad s > 0, \quad u > 0 \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır (Belgacem ve Silambarasan, 2012).

1.2.6. Novel Dönüşümü

Novel dönüşümü, 2013 yılında yeni bir integral dönüşümü olarak tanıtıldı ve bazı diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanıldı. Bir $v(t)$, $t > 0$ fonksiyonu için Novel dönüşümü,

$$M_n(s) = M_n[v(t)](s) = \int_0^{\infty} t^n e^{(-ts)} v(t) dt \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır, $n = 0$ olursa Laplace dönüşümü olur (Atangana ve Kılıçman, 2013).

1.2.7. M Dönüşümü

M dönüşümü, Doğal (Natural) dönüşüme benzeyen bir integral dönüşümü olup 2015 yılında tanıtılmıştır. Birinci mertebeden başlangıç ve sınır değer problemlerinde başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Bir $v(t)$, $t \geq 0$ fonksiyonu için M dönüşümü,

$$M_{k,m}[v(t)](p,q) = \int_0^{\infty} \frac{e^{(-pt)} v(qt)}{(t^m + v^m)^k} dt \quad (1.8)$$

$(k \in \mathbb{C}; \Re(k) \geq 0; m \in \mathbb{Z}^+ = 1, 2, 3, \dots)$, $p \in \mathbb{C}$ ve $q \in \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanır (Srivastava ve ark., 2015).

1.2.8. Yang Dönüşümü

Yang dönüşümü, 2016 yılında bir Laplace tipi bir integral dönüşümü olarak tanıtıldı ve ısı problemlerini çözmek için kullanıldı. Bir $v(t)$, $t > 0$ fonksiyonu için Yang dönüşümü,

$$Y[v(t)] = f(\varpi) = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\varpi}\right)} v(t) dt \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır (Yang, 2016).

2. SHEHU DÖNÜŞÜMÜ

2019 yılında, Shehu Maitama ve Weidong Zhao tarafından literatüre kazandırılan Shehu integral dönüşüm metodu kullanılmaya başlanmıştır. Diferensiyel denklemler, uygulamalı matematiğin her alanında her zaman merkezi rol oynamıştır. Diferensiyel denklemleri çözmek için çok sayıda farklı teknik vardır ama integral dönüşümü en yaygın kullanılanıdır. Shehu dönüşümü, klasik Fourier integral dönüşümünden başarıyla türetilir ve basitliğini, verimliliğini ve yüksek doğruluğunu göstermek için hem adi hem de kısmi diferensiyel denklemlere kolaylıkla uygulanır (Maitama ve Zhao, 2019). Burada amacımız bu ilginç dönüşümün uygulanabilirliği ve problemlerin çözümlerinde etkisini göstermektir.

Bir $v(t)$ fonksiyonu için Shehu dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır. Bir A fonksiyonlar kümesi,

$$A = \left\{ v(t) : \exists N, \eta_1, \eta_2 > 0, |v(t)| < N \exp\left(\frac{|t|}{\eta_j}\right), t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}$$

şeklinde verilir. A kümesinde verilen bir fonksiyon için N sayısı sonlu sayıda olup η_1 ve η_2 sonlu veya sonsuz olabilir. $\mathbb{S}$ operatörü ile gösterilen Shehu dönüşümü,

$$\mathbb{S}[v(t)] = V(s, u) = \int_0^\infty e^{\left(\frac{st}{u}\right)} v(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{\left(\frac{st}{u}\right)} v(t) dt ; s > 0, u > 0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır (Maitama ve Zhao, 2019).

Ters Shehu dönüşümü ise,

$$\mathbb{S}^{-1}[V(s, u)] = v(t) ; t \geq 0 \quad (2.2)$$

veya

$$v(t) = \mathbb{S}^{-1}[V(s, u)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{u} e^{\left(\frac{st}{u}\right)} V(s, u) ds \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Maitama ve Zhao, 2019).

Bir diferensiyel denklemin Shehu dönüşümü yardımıyla çözümüne ulaşabilmek için önce her iki tarafın Shehu dönüşümü alınır. Sonrasında gerekli işlemler yapılarak bağımlı değişken yalnız bırakılır ve ters Shehu dönüşümü uygulandığında sonuca varılır.

2.1. Shehu Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 2.1.1. (Maitama ve Zhao, 2019):

a. (Lineerlik özelliği)

$v, w \in A$ olmak üzere v ve w fonksiyonlarının lineer toplamının Shehu dönüşümü,

$$\mathbb{S}[av(t) + bw(t)] = a\mathbb{S}[v(t)] + b\mathbb{S}[w(t)]; \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

şeklinde verilir

b. (Shehu dönüşümünün ölçek değiştirme özelliği)

$v(bt)$ 'nin Shehu dönüşümü,

$$\mathbb{S}[v(bt)] = \frac{u}{b} V\left(\frac{s}{b}, u\right); \quad b \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

şeklinde verilir.

c. $V(s, u), v$ fonksiyonunun Shehu dönüşümü olmak üzere, $v(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin Shehu dönüşümü,

$$\mathbb{S}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = \frac{s}{u} V(s, u) - v(0) \quad (2.6)$$

şeklinde verilir.

d. v fonksiyonunun ikinci mertebeden türevinin Shehu dönüşümü,

$$\mathbb{S} \left[\frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right] = \left(\frac{s}{u} \right)^2 V(s, u) - \frac{s}{u} v(0) - \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.7)$$

şeklinde verilir.

e. v fonksiyonunun n . mertebeden türevinin Shehu dönüşümü,

$$\mathbb{S} \left[\frac{d^n v(t)}{dt^n} \right] = \left(\frac{s}{u} \right)^n V(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u} \right)^{n-(k+1)} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0} \quad (2.8)$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.1.2. (Qureshi ve Kumar, 2019):

$V(s, u)$, v fonksiyonu için Shehu dönüşümü olmak üzere,

$$\mathbb{S} \left\{ \int_0^t \dots \int_0^t v(u) du^n \right\} = \left(\frac{u}{s} \right)^n V(s, u) \quad (2.9)$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.1.3. (Öteleme özelliği)

$V(s, u)$, v fonksiyonu için Shehu dönüşümü olmak üzere,

$$\mathbb{S} \left[e^{(\alpha t)} v(t) \right] = \left(\frac{u}{s - \alpha u} \right) V(s - \alpha u, u) \quad (2.10)$$

şeklindedir (Belgacem ve ark., 2019).

2.2. Konvolüsyon İntegrali

v ve w fonksiyonlarının Shehu dönüşümleri sırasıyla $V(s, u)$ ve $W(s, u)$ olsun. Shehu dönüşümü v ve w konvolüsyon çarpımı için,

$$(v * w)(t) = \int_0^{\infty} v(t - \tau) w(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

olup

$$\mathbb{S}[(v * w)(t)] = V(s, u)W(s, u) \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir (Belgacem ve ark., 2019).

2.3. Shehu, Sumudu ve Laplace Dönüşümleri Arasındaki İlişki

$v(t) \in A$ olsun. v fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L(s)$, Sumudu dönüşümü $S(u)$ ve Shehu dönüşümü $\mathbb{S}(s, u)$ olmak üzere,

$$\mathbb{S}(s, u) = \frac{u}{s} S\left(\frac{u}{s}\right) \quad (2.13)$$

şeklindedir. $u = 1$ alınırsa,

$$\mathbb{S}(s, 1) = \frac{1}{s} S\left(\frac{1}{s}\right) = L(s) \quad (2.14)$$

olduğu görülür (Bokhari, 2019).

2.4. Bazı Fonksiyonların Shehu, Sumudu ve Laplace Dönüşümleri Tablosu

Bazı fonksiyonların Shehu dönüşümü literatürde mevcuttur. Bu tabloya aynı fonksiyonların literatürde mevcut Sumudu ve Laplace dönüşümleri de ilave edilerek aşağıdaki tablo oluşturulmuştur (Maitama ve Zhao, 2019).

Tablo 2.1. Bazı fonksiyonların Shehu, Sumudu ve Laplace dönüşümü tablosu

Fonksiyon	Shehu Dönüşümü	Sumudu Dönüşümü	Laplace Dönüşümü
$v(t)$	$\mathbb{S}[v(t)]$	$S[v(t)]$	$L[v(t)]$
1	$\left(\frac{u}{s}\right)$	1	$\frac{1}{s}$
$a; a \in \mathbb{R}$	$a\left(\frac{u}{s}\right)$	a	$a\left(\frac{1}{s}\right)$
t	$\left(\frac{u}{s}\right)^2$	u	$\left(\frac{1}{s}\right)^2$
$\frac{t^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}$	u^n	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}$	u^n	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\exp(\alpha(t))$	$\frac{u}{s - \alpha u}$	$\frac{1}{1 - \alpha u}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{u^2}{s^2 + \alpha^2 u^2}$	$\frac{u}{1 + \alpha^2 u^2}$	$\frac{1}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{us}{s^2 + u^2}$	$\frac{1}{1 + \alpha^2 u^2}$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$\frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{u^2}{s^2 - \alpha^2 u^2}$	$\frac{u}{1 - \alpha^2 u^2}$	$\frac{1}{s^2 - \alpha^2}$
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{us}{s^2 - \alpha^2 u^2}$	$\frac{1}{1 - \alpha^2 u^2}$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$

2.5. Shehu Dönüşümünün Uygulamaları

Bu kısımda, bazı diferensiyel denklemlerin Shehu dönüşümü ile çözümleri verilecektir.

Örnek 2.5.1.

$$v'(t) + v(t) = 0, \quad v(0) = 1 \quad (2.15)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(t) = e^{-t}$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)\mathbb{S}[v(t)] - v(0) = -\mathbb{S}[v(t)]$$

$$\mathbb{S}[v(t)] = \left(\frac{u}{s}\right) - \left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v(t)]$$

Tablodaki bilgiler kullanılarak ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{u}{s}\right] - \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v(t)]\right]$$

$$v(t) = 1 - \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v(t)]\right]$$

$$v_0(t) = 1$$

$$v_1(t) = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v_0(t)]\right] = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[1]\right] = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s}\right)\right] = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^2\right] = -t$$

$$v_2(t) = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v_1(t)]\right] = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[-t]\right] = \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s}\right)^2\right] = \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^3\right] = \frac{t^2}{2!}$$

$$v_3(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [v_2(t)] \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[\frac{t^2}{2!} \right] \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \left(\frac{u}{s} \right)^3 \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^4 \right] = -\frac{t^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

elde edilen yaklaşık çözüm yakınsak olduğu için bir analitik çözüm olur.

Örnek 2.5.2.

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + v(t) = 0; \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 1 \quad (2.16)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(t) = \cos t + \sin t$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u} \right)^2 \mathbb{S} [v(t)] - \left(\frac{s}{u} \right) v(0) - v'(0) = -\mathbb{S} [v(t)]$$

$$\mathbb{S} [v(t)] = \left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S} [v(t)]$$

Tablodaki bilgiler kullanılarak ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(t) = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S} [v(t)] \right]$$

$$v_0(t) = 1$$

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S}[v_0(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S}[1] \right] \\
&= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \left[\left(\frac{u}{s} \right) \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^3 \right] = 1 + t - \frac{1}{2!} t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(t) &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S}[v_1(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S} \left[1 + t - \frac{t^2}{2!} \right] \right] \\
&= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^3 \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) + \left(\frac{u}{s} \right)^2 - \left(\frac{u}{s} \right)^3 - \left(\frac{u}{s} \right)^4 + \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right] \\
&= 1 + t - \frac{1}{2!} t^2 - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 - \frac{1}{6!} t^6 + \dots \right) + \left(t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 - \frac{1}{7!} t^7 + \dots \right)$$

$$= \cos t + \sin t$$

elde edilen yaklaşık çözüm yakınsak olduğu için bir analitik çözüm olur.

3. SHEHU AYRIŞTIRMA METODU

3.1. Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Shehu Ayırıştırma Metodu ile Çözümü

Bu kısımda, Shehu dönüşümü ile Adomian ayırıştırma metodunu hibritleyerek oluşan ve literatürde mevcut olan Shehu ayırıştırma metodundan bahsedeceğiz (Khalouta ve Kadem, 2020). Lineer olmayan $Fv(t) = g(t)$ diferensiyel denklemini ele alalım. Burada F , lineer olmayan diferensiyel operatörü temsil eder. Bu metot F 'nin lineer kısmının $L + R$ şeklinde ayrıştırılmasıyla oluşur.

$$Lv(t) + Rv(t) + Nv(t) = g(t) \quad (3.1)$$

denklemini, $v(0) = h(t)$ başlangıç koşulu ile verilsin. Burada L lineer bir operatör, R lineer operatörden kalan kısım, N ise lineer olmayan bir operatördür. L verilen denklemin en yüksek mertebeden türevi ve $g(t)$ homojen olmayan bir terim olsun.

Lineer olmayan diferensiyel denklemini çözmek için aşağıdaki adımları uygulayalım.

- i. Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanır.
- ii. Ters Shehu dönüşümü alınır.
- iii. Elde edilen denklem sonsuz seri şeklinde olduğu düşünülür.
- iv. Lineer olmayan terim için Adomian polinomları kullanılarak hesaplama yapılır.
- v. Böylece yaklaşık çözüme ulaşırız. Bu yaklaşık çözüm yakınsak ise analitik çözüm, aksi halde seri çözüm olarak kalır.

i. Adım: L birinci mertebeden bir operatör ise Shehu dönüşümü alınır;

$$\left(\frac{s}{u}\right) \mathbb{S}[v(t)] - v(0) + \mathbb{S}[Rv(t)] + \mathbb{S}[Nv(t)] = \mathbb{S}[g(t)]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right) \mathbb{S}[v(t)] = v(0) + \mathbb{S}[g(t)] - \mathbb{S}[Rv(t)] - \mathbb{S}[Nv(t)]$$

$$\mathbb{S}[v(t)] = \left(\frac{u}{s}\right) h(t) + \left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}[g(t)] - \left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}[Rv(t)] - \left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}[Nv(t)]$$

ifadesi elde edilir.

ii. Adım: Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(t) = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) h(t) \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [g(t)] \right] - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Rv(t)] \right] - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Nv(t)] \right]$$

$$v(t) = G(t) - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Rv(t) + Nv(t)] \right]$$

Burada $G(t)$ kaynak terimidir.

iii. Adım: Verilen denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde kabul edilirse;

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \quad (3.2)$$

iv. Adım: Lineer olmayan terim için (A_i : Adomian polinomları (Wazwaz, 1997))

$$N(v) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad (3.3)$$

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right) \right]; \quad i \geq 0 \quad (3.4)$$

$$A_0 = N(v_0),$$

$$A_1 = v_1 N'(v_0),$$

$$A_2 = v_2 N'(v_0) + \frac{1}{2!} v_1^2 N''(v_0),$$

$$A_3 = v_3 N'(v_0) + v_1 v_2 N''(v_0) + \frac{1}{3!} v_1^3 N'''(v_0),$$

$$A_4 = v_4 N'(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_2^2 + v_1 v_3 \right) N''(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_1^2 v_2 N'''(v_0) \right) + \left(\frac{1}{4!} v_1^4 N^{(iv)}(v_0) \right),$$

$\vdots$

formu kullanarak kolayca hesaplanır.

v. Adım: Genel olarak;

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) = G(t) - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[R \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) + N \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \right] \right] \quad (3.5)$$

$$v_0(t) = G(t),$$

$$v_1(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Rv_0(t) + NA_0(t)] \right],$$

$$v_2(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Rv_1(t) + NA_1(t)] \right],$$

$$v_3(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Rv_2(t) + NA_2(t)] \right],$$

$$\vdots$$

$$v_{i+1}(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [Rv_i(t) + NA_i(t)] \right]; i \geq 0$$

verilen diferensiyel denklemin yaklaşık çözümüne ulaşmış oluruz.

3.2. Shehu Ayırıştırma Metodunun Uygulamaları

Örnek 3.2.1. (Eltayeb ve Abdeldaim, 2017):

$$\frac{dv(t)}{dt} = 1 - 2v^2 \left(\frac{t}{2} \right), \quad v(0) = 0 \quad (3.6)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu ayırıştırma metodu kullanılarak $v(t) = \sin t$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v'(t)] = \mathbb{S}[1] - \mathbb{S}\left[2v^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)\mathbb{S}[v(t)] - v(0) = \left(\frac{u}{s}\right) - \mathbb{S}\left[2v^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$\mathbb{S}[v(t)] = \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}\left[2v^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

Tablodaki bilgiler kullanılıp ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$\mathbb{S}^{-1}[v(t)] = \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^2\right] - \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}\left[2v^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right]$$

$$v(t) = t - \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}\left[2v^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right]$$

Verilen denklemin çözümü sonsuz seri şeklinde,

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \quad (3.7)$$

olup denklemde kullanılırsa,

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) = t + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}\left[2v^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right]$$

$$v_0(t) = t$$

$$v_{i+1}(t) = -\mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[2A_i]\right]; \quad i \geq 0.$$

$$A_0 = v_0^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$A_1 = 2v_0 \left(\frac{t}{2} \right) v_1 \left(\frac{t}{2} \right)$$

$$A_2 = 2v_2 \left(\frac{t}{2} \right) v_0 \left(\frac{t}{2} \right) + v_1^2 \left(\frac{t}{2} \right)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [2A_0] \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[2v_0^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[2 \left(\frac{t^2}{4} \right) \right] \right] \\ &= -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \left(\frac{u}{s} \right)^3 \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^4 \right] = -\frac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(t) &= -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [2A_1] \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[2 \left(2v_0 \left(\frac{t}{2} \right) v_1 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] \right] = -\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[\left(4 \left(\frac{t}{2} \right) \left(-\frac{t^3}{48} \right) \right) \right] \right] \\ &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[\frac{t^4}{4!} \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^6 \right] = \frac{t^5}{5!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

$$v(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$= \sin(t)$$

elde edilen bu fonksiyon yakınsak olduğu için için analitik çözümdür.

Örnek 3.2.2. (Rawashdeh ve Maitama, 2015):

$$\frac{dv(t)}{dt} - 1 = v^2(t), \quad v(0) = 0 \tag{3.8}$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu ayrıştırma metodu kullanılarak $v(t) = \tan t$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)\mathbb{S}[v(t)] - v(0) - \mathbb{S}[1] = \mathbb{S}[v^2(t)]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)\mathbb{S}[v(t)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \mathbb{S}[v^2(t)]$$

$$\mathbb{S}[v(t)] = \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v^2(t)]$$

Tablodaki bilgiler kullanılıp ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$v(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^2\right] + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v^2(t)]\right]$$

$$v(t) = t + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v^2(t)]\right]$$

Verilen denklemin çözümü sonsuz seri şeklinde,

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \quad (3.9)$$

olup denklemde kullanılırsa;

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) = t + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[v^2(t)]\right]$$

$$v_0(t) = t$$

$$v_{i+1}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}[A_i(t)]\right], \quad i \geq 0.$$

$$A_0 = v_0^2(t)$$

$$A_1 = 2v_0(t)v_1(t)$$

$$A_2 = 2v_0(t)v_2(t) + v_1^2(t)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [A_0(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [v_0^2(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [t^2] \right] \\
&= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \left[2! \left(\frac{u}{s} \right)^3 \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[2! \left(\frac{u}{s} \right)^4 \right] = \frac{1}{3} t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(t) &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [A_1(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [2v_0(t)v_1(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[2t \left(\frac{1}{3} t^3 \right) \right] \right] \\
&= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[2 \frac{t^4}{3} \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \left[\frac{2}{3} 4! \left(\frac{u}{s} \right)^5 \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[16 \left(\frac{u}{s} \right)^6 \right] = \frac{2}{15} t^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3(t) &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [A_2(t)] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} [2v_0(t)v_2(t) + v_1^2(t)] \right] \\
&= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[2t \left(\frac{2}{15} t^5 \right) + \left(\frac{1}{3} t^3 \right)^2 \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right) \mathbb{S} \left[\frac{17}{45} t^6 \right] \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{12240}{45} \left(\frac{u}{s} \right)^8 \right] = \frac{17}{315} t^7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

$$= t + \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 + \frac{17}{315} t^7 + \dots$$

$$= \tan t$$

elde edilen bu fonksiyon yakınsak olduğu için için analitik çözümdür.

4. SHEHU DÖNÜŞÜMÜNÜN VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

4.1. İkinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklemlerin Shehu Dönüşümü ile Çözümü

Bu kısımda, ikinci tür lineer Volterra integral denklemlere Shehu dönüşümünü uyguladık. İkinci tür lineer Volterra integral denklemleri çözmek için aşağıdaki adımları uygulayalım.

- i. Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanır.
- ii. Konvolüsyon teoremi uygulanır.
- iii. Ters Shehu dönüşümü uygulanarak sonuca ulaşılır.

İkinci tür lineer Volterra integral denklemi,

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)v(t)dt \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $v(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $f(x)$ reel değerli bir fonksiyon, λ sabit bir parametre, $K(x,t)$ ise integralin çekirdek kısmı olup bu çalışmada $(x-t)$ farkı şeklinde ifade edilen fark çekirdekleri olarak kabul edilecektir. (Örneğin, $\sinh(x-t)$, $(x-t)^3$, $\tan(x-t)$, ...) (Wazwaz, 2011).

i. Adım: Denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \mathbb{S}\{f(x)\} + \mathbb{S}\left\{\lambda \int_0^x K(x-t)v(t)dt\right\} \quad (4.2)$$

ii. Adım: Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \mathbb{S}\{f(x)\} + \lambda \mathbb{S}\{K(x)\} \mathbb{S}\{v(x)\} \quad (4.3)$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \left[\frac{\mathbb{S}\{f(x)\}}{1 - \lambda \mathbb{S}\{K(x)\}} \right] \quad (4.4)$$

iii. Adım: Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{\mathbb{S}\{f(x)\}}{1 - \lambda \mathbb{S}\{K(x)\}} \right\} \quad (4.5)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.1.

$$v(x) = \sin x - 2 \int_0^x \cos(x-t) v(t) dt \quad (4.6)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = xe^{-x}$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \mathbb{S}\{\sin x\} - 2\mathbb{S}\left\{\int_0^x \cos(x-t) v(t) dt\right\} \quad (4.7)$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2} \right) - 2\mathbb{S}\{\cos x\} \mathbb{S}\{v(x)\}$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2} \right) - 2 \left(\frac{us}{s^2 + u^2} \right) \mathbb{S}\{v(x)\}$$

$$\left(1 + 2 \left(\frac{us}{s^2 + u^2} \right) \right) \mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2} \right)$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \frac{u^2}{(s+u)^2}$$

Ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{u^2}{(s+u)^2} \right\} = x e^{-x}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.2.

$$v(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t) v(t) dt \quad (4.8)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = x^2 + \frac{x^4}{12}$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \mathbb{S}\{x^2\} + \mathbb{S}\left\{\int_0^x \sin(x-t) v(t) dt\right\}$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + \mathbb{S}\{\sin x\} \mathbb{S}\{v(x)\}$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) \mathbb{S}\{v(x)\}$$

$$\left(1 - \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right)\right) \mathbb{S}\{v(x)\} = 2\left(\frac{u}{s}\right)^3$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^5$$

Ters Shehu d6m6ş6m6 alınırrsa;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^5 \right\} = \mathbb{S}^{-1} \left\{ 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 \right\} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ 2\left(\frac{u}{s}\right)^5 \right\} = x^2 + \frac{x^4}{12}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.3.

$$v(x) = \cos x + \sin x - \int_0^x v(t) dt \quad (4.9)$$

Diferensiyel denkleminin 66z6m6n6n Shehu metodu kullanılarak $v(x) = \cos x$ şeklinde olduğunu g6sterelim.

Ç6z6m: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu d6n6ş6m6 uygulanırssa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \mathbb{S}\{\cos x\} + \mathbb{S}\{\sin x\} - \mathbb{S}\left\{\int_0^x v(t) dt\right\}$$

Konvol6syon teoremi uygulanırssa;

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right) + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) - \mathbb{S}\{1\} \mathbb{S}\{v(x)\}$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right) + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) - \left(\frac{u}{s}\right)\mathbb{S}\{v(x)\}$$

$$\left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)\right)\mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right) + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right)$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right)\left(\frac{s}{s + u}\right) + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right)\left(\frac{s}{s + u}\right)$$

$$\mathbb{S}\{v(x)\} = \frac{us^2 + u^2s}{(s + u)(s^2 + u^2)} = \frac{us(s + u)}{(s + u)(s^2 + u^2)} = \frac{us}{s^2 + u^2}$$

Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1}\left\{\frac{us}{s^2 + u^2}\right\} = \cos x$$

elde edilir.

4.2. İkinci Tür Lineer Volterra Integro-Diferensiyel Denklemlerin Shehu Dönüşümü ile Çözümü

Literatürde, ikinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlere Shehu dönüşümünün uygulanmasına rastlanmamış olup bu kısımda ilk kez uygulanmıştır (Bozburun ve Peker, 2021). İkinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemleri çözmek için bölüm 4.1.'deki adımlar takip edilir.

İkinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi,

$$v^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)v(t)dt \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $v(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $v^{(n)}(x)$, $v(x)$ 'in x 'e göre n . mertebeden türevi, $f(x)$ reel değerli bir fonksiyon, λ sabit bir parametre, $K(x,t)$ ise

integralin çekirdek kısmı olup bu çalışmada $(x-t)$ farkı şeklinde ifade edilen fark çekirdekleri olarak kabul edilecektir (Wazwaz, 2011). Başlangıç koşulları $a_i \in \mathbb{R}, (i = 0, \dots, n-1)$ olmak üzere,

$$v(0) = a_0, v'(0) = a_1, \dots, v^{(n-1)}(0) = a_{n-1} \quad (4.11)$$

şeklinde verilmiş olsun.

i. Adım: Denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)^n \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-1} v(0) - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-2} v'(0) - \dots - v^{(n-1)}(0) = \mathbb{S}[f(x)] + \lambda \mathbb{S}\left[\int_0^x K(x-t)v(t)dt\right]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)^n \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-1} a_0 - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-2} a_1 - \dots - a_{n-1} = \mathbb{S}[f(x)] + \lambda \mathbb{S}\left[\int_0^x K(x-t)v(t)dt\right]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) a_0 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 a_1 + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n a_{n-1} + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f(x)] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \lambda \mathbb{S}\left[\int_0^x K(x-t)v(t)dt\right]$$

ifadesi elde edilir.

ii. Adım: Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) a_0 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 a_1 + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n a_{n-1} + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f(x)] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \lambda \mathbb{S}[K(x)] \mathbb{S}[v(x)] \quad (4.12)$$

iii. Adım: Ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$v(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f(x)]\right] + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^n \lambda \mathbb{S}[K(x)] \mathbb{S}[v(x)]\right] \quad (4.13)$$

elde edilir.

Örnek 4.2.1.

$$v'(x) = 3 + \int_0^x v(t) dt, \quad v(0) = 3 \quad (4.14)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = 3e^x$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right) \mathbb{S}[v(x)] - v(0) = \mathbb{S}[3] + \mathbb{S}\left[\int_0^x v(t) dt\right]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right) + 3\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}\left[\int_0^x v(t) dt\right]$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right) + 3\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}[1] \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right) + 3\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right)\left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)\right) \mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right)\left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)\right) \mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right)$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s-u}\right)$$

Ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1} \left[3 \left(\frac{u}{s-u} \right) \right] = 3 \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{u}{s-u} \right] = 3e^x$$

elde edilir.

Örnek 4.2.2.

$$v''(x) = x + \int_0^x (x-t)v(t)dt; \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \quad (4.15)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = \sinh x$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{u} \right)^2 \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u} \right) v(0) - v'(0) &= \mathbb{S}[x] + \mathbb{S} \left[\int_0^x (x-t)v(t)dt \right] \\ \mathbb{S}[v(x)] &= \left(\frac{u}{s} \right)^2 + \left(\frac{u}{s} \right)^4 + \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S} \left[\int_0^x (x-t)v(t)dt \right] \end{aligned}$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s} \right)^2 + \left(\frac{u}{s} \right)^4 + \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S}[x] \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s} \right)^2 + \left(\frac{u}{s} \right)^4 + \left(\frac{u}{s} \right)^2 \left(\frac{u}{s} \right)^2 \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s} \right)^4 \right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{u}{s} \right)^2 \right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{u}{s} \right)^2 \right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{u}{s} \right)^2 \right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right)^2$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \frac{u^2}{s^2 - u^2}$$

Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{u^2}{s^2 - u^2}\right] = \sinh x$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3.

$$v'''(x) = -1 + \int_0^x v(t) dt; \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 1, \quad v''(0) = -1 \quad (4.16)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = \cos x + \sin x$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)^3 \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^2 v(0) - \left(\frac{s}{u}\right) v'(0) - v''(0) = -\mathbb{S}[1] + \mathbb{S}\left[\int_0^x v(t) dt\right]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}\left[\int_0^x v(t) dt\right]$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}[1] \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \left(\frac{u}{s}\right) \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^4\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) \left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \left(\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right)$$

$$\left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \frac{us}{s^2 + u^2} + \frac{u^2}{s^2 + u^2}$$

Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{us}{s^2 + u^2} + \frac{u^2}{s^2 + u^2} \right] = \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{us}{s^2 + u^2} \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{u^2}{s^2 + u^2} \right] = \cos x + \sin x$$

elde edilir.

Örnek 4.2.4.

$$v''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)v(t) dt; \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 1 \quad (4.17)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = e^x$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)^2 \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right) v(0) - v'(0) = \mathbb{S}[1] + \mathbb{S}[x] + \mathbb{S} \left[\int_0^x (x-t)v(t) dt \right]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S} \left[\int_0^x (x-t)v(t) dt \right]$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S}[x] \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^4\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^2\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right)\right)$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s-u}\right)$$

Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{u}{s-u} \right] = e^x$$

elde edilir.

Örnek 4.2.5.

$$v'''(x) = 1 + x - x^2 + \int_0^x (x-t)v(t)dt; \quad v(0) = 3, \quad v'(0) = 1, \quad v''(0) = 1 \quad (4.18)$$

Diferensiyel denkleminin çözümünün Shehu metodu kullanılarak $v(x) = e^x + 2$ şeklinde olduğunu gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)^3 \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^2 v(0) - \left(\frac{s}{u}\right) v'(0) - v''(0) = \mathbb{S}[1] + \mathbb{S}[x] - \mathbb{S}[x^2] + \mathbb{S}\left[\int_0^x (x-t)v(t) dt\right]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^5 - 2\left(\frac{u}{s}\right)^6 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}\left[\int_0^x (x-t)v(t) dt\right]$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^5 - 2\left(\frac{u}{s}\right)^6 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}[x] \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = 3\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4 + \left(\frac{u}{s}\right)^5 - 2\left(\frac{u}{s}\right)^6 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S}[v(x)]$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^5\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right) \left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^5\right)$$

$$\left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4\right) \mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) \left(1 + \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^4\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right) \left(1 - \left(\frac{u}{s}\right)^5\right)$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s-u}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)$$

Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{u}{s-u} + 2\frac{u}{s}\right] = \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{u}{s-u}\right] + \mathbb{S}^{-1}\left[2\frac{u}{s}\right] = e^x + 2$$

elde edilir.

5. SHEHU AYRIŞTIRMA METODUNUN VOLTERRA TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

5.1. İkinci Tür Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Shehu Ayırıştırma Metodu ile Çözümü

Literatürde, ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklemlere Shehu ayırıştırma metodunun uygulanmasına rastlanmamış olup bu kısımda ilk kez uygulanmıştır. Bu denklemleri çözmek için aşağıdaki adımları takip edelim.

- i. Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanır.
- ii. Konvolüsyon teoremi uygulanır.
- iii. Ters Shehu dönüşümü alınır.
- iv. Elde edilen denklem sonsuz seri şeklinde düşünülür.
- v. Lineer olmayan terim için Adomian polinomları kullanılarak hesaplama yapılır.
- vi. Yineleme bağıntısı uygulanır.
- vii. Böylece yaklaşık çözüme ulaşırız. Bu yaklaşık çözüm yakınsak ise analitik çözüm aksi halde seri çözüm olarak kalır.

İkinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklemi,

$$v^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)F(v(t))dt \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $v(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $v^{(n)}(x)$, $v(x)$ 'in x 'e göre n . mertebeden türevi, $f(x)$ reel değerli bir fonksiyon, $F(v(x))$ lineer olmayan bir fonksiyon olup $v^3(x)$, $v^2(x)$ gibi farklı şekillerde ifade edilebilir. $K(x,t)$ ise integralin çekirdek kısmı olup bu çalışmada $(x-t)$ farkı şeklinde ifade edilen fark çekirdekleri olarak kabul edilecektir (Wazwaz, 2011). Başlangıç koşulları,

$$v(0) = a_0, \quad v'(0) = a_1, \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 0, \dots, n-1) \quad (5.2)$$

şeklinde verilmiş olsun.

- i. Adım: Denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}\left[v^{(n)}(x)\right]=\mathbb{S}\left[f(x)\right]+\mathbb{S}\left[\int_0^x K(x-t)F(v(t))dt\right] \quad (5.3)$$

ii. Adım: Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\left(\frac{s}{u}\right)^n \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-1} v(0) - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-2} v'(0) - \dots - v^{(n-1)}(0) = \mathbb{S}[f(x)] + \mathbb{S}[K(x-t)] \mathbb{S}[F(v(x))]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)^n \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-1} a_0 - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-2} a_1 - \dots - a_{n-1} = \mathbb{S}[f(x)] + \mathbb{S}[K(x-t)] \mathbb{S}[F(v(x))]$$

$$\mathbb{S}[v(x)] = \left(\frac{u}{s}\right) a_0 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 a_1 + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n a_{n-1} + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f(x)] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K(x-t)] \mathbb{S}[F(v(x))]$$

ifadesi elde edilir.

iii. Adım: Ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v(x) = v(0) + xv'(0) + \dots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} v^{(n-1)}(0) + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f(x)] \right] \\ + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K(x-t)] \mathbb{S}[F(v(x))] \right] \quad (5.4)$$

iv. Adım: Denklemin çözümü için $v(x)$ sonsuz seri şeklinde kabul edilirse;

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) \quad (5.5)$$

v. Adım: Lineer olmayan terim için (A_i : Adomian polinomları (Wazwaz, 1997))

$$F(v) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad (5.6)$$

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[F \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right) \right]; i \geq 0 \quad (5.7)$$

$$A_0 = F(v_0),$$

$$A_1 = v_1 F'(v_0),$$

$$A_2 = v_2 F'(v_0) + \frac{1}{2!} v_1^2 F''(v_0),$$

$$A_3 = v_3 F'(v_0) + v_1 v_2 F''(v_0) + \frac{1}{3!} v_1^3 F'''(v_0),$$

$$A_4 = v_4 F'(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_2^2 + v_1 v_3 \right) F''(v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_1^2 v_2 F'''(v_0) \right) + \left(\frac{1}{4!} v_1^4 F^{(iv)}(v_0) \right),$$

$$\vdots$$

formu kullanarak kolayca hesaplanır. (5.6) ve (5.7) denklemleri (5.5) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) &= v(0) + xv'(0) + \dots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} v^{(n-1)}(0) + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^n \mathbb{S}[f(x)] \right] \\ &+ \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^n \mathbb{S}[K(x-t)] \mathbb{S} \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i(x) \right] \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

vi. Adım: Yineleme bağlantısından,

$$\begin{aligned} v_0(x) &= v(0) + xv'(0) + \dots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} v^{(n-1)}(0) + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^n \mathbb{S}[f(x)] \right] \\ \mathbb{S}[v_{i+1}(x)] &= \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s} \right)^n \mathbb{S}[K(x-t)] \mathbb{S} \left[\sum_{i=0}^{\infty} A_i(x) \right] \right]; \quad i \geq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir.

vii. Adım: Burada yaklaşık çözümün yakınsak olması için $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{s} \right)^n \mathbb{S}[K(x-t)] = 0$

olmalıdır (Wazwaz, 2010; 2011).

Örnek 5.1.1.

$$v'(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{3x} + \int_0^x e^{(x-t)} v^3(t) dt, \quad v(0) = 1 \quad (5.10)$$

şeklinde verilen ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümünün $v(x) = e^x$ olduğunu Shehu ayrıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v'(x)] = \mathbb{S}\left[\frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{3x}\right] + \mathbb{S}[e^{(x-t)} * v^3(x)]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)V(s, u) - v(0) = \frac{3}{2}\left(\frac{u}{s-u}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{s-3u}\right) + \left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[v^3(x)]$$

$$V(s, u) = \left(\frac{u}{s}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-3u}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[v^3(x)]$$

$$V(s, u) = \left(\frac{u}{s}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{s(s-3u)}\right) + \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right)\mathbb{S}[v^3(x)]$$

(5.9) denklemine göre;

$$\begin{aligned} V_0(s, u) &= \left(\frac{u}{s}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{s(s-3u)}\right) \\ \mathbb{S}[v_{i+1}(x)] &= \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right)\mathbb{S}[A_i(x)]; \quad i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Lineer olmayan terim $F[v(x)] = v^3(x)$ için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned} A_0 &= v_0^3, \\ A_1 &= 3v_0^2v_1, \\ A_2 &= 3v_0^2v_2 + 3v_0v_1^2, \\ A_3 &= 3v_0^2v_3 + 6v_0v_1v_2 + v_1^3. \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılır. (5.11) denkleminin ters Shehu dönüşümü alınır;

$$v_0(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{40}x^5 + \dots,$$

$$v_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \frac{7}{120}x^5 + \dots,$$

$$v_2(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{11}{40}x^5 + \dots,$$

Sonsuz seri çözümünden,

$$v(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$v(x) = e^x$$

bulunup, elde edilen bu sonucun Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2010) çözümle aynı sonucu verdiği görülmüştür.

Örnek 5.1.2.

$$v'(x) = \frac{9}{4} - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - 3e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \int_0^x (x-t)v^2(t)dt, \quad v(0) = 2 \quad (5.12)$$

şeklinde verilen ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümünün $v(x) = 1 + e^{-x}$ olduğunu Shehu ayrıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v'(x)] = \mathbb{S}\left[\frac{9}{4} - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - 3e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + \mathbb{S}\left[(x-t)*v^2(x)\right]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)V(s,u) - v(0) = \frac{9}{4}\left(\frac{u}{s}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - 3\left(\frac{u}{s+u}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{u}{s+2u}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S}[v^2(x)]$$

$$V(s,u) = 2\left(\frac{u}{s}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{u}{s}\right)^3 - \left(\frac{u}{s}\right)^4 - 3\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s+u}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s+2u}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S}[v^2(x)]$$

$$V(s,u)=2\left(\frac{u}{s}\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{u}{s}\right)^3-\left(\frac{u}{s}\right)^4-3\left(\frac{u^2}{s(s+u)}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{s(s+2u)}\right)+\left(\frac{u}{s}\right)^3\mathbb{S}\left[v^2(x)\right]$$

(5.9) denklemine göre;

$$\begin{aligned} V_0(s,u) &= 2\left(\frac{u}{s}\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{u}{s}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{u}{s}\right)^3-\left(\frac{u}{s}\right)^4-3\left(\frac{u^2}{s(s+u)}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{s(s+2u)}\right), \\ \mathbb{S}\left[v_{i+1}(x)\right] &= \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}\left[A_i(x)\right]; \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lineer olmayan terim $F[v(x)] = v^2(x)$ için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned} A_0 &= v_0^2, \\ A_1 &= 2v_0v_1, \\ A_2 &= 2v_0v_2 + v_1^2, \\ A_3 &= 2v_0v_3 + 2v_1v_2. \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılır. (5.13) denkleminin ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{7}{120}x^5 + \dots, \\ v_1(x) &= 2x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots, \end{aligned}$$

olup sonsuz seri çözümünden,

$$v(x) = 1 + \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots\right)$$

$$v(x) = 1 + e^{-x}$$

bulunup, elde edilen bu sonucun Sumudu ayrıştırma metodu ile bulunan (Ahmed ve Elzaki, 2013) ve Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2011) çözümlerle aynı sonucu verdiği görülmüştür.

Örnek 5.1.3.

$$v''(x) = -1 - \frac{1}{3}(\sin(x) + \sin(2x)) + 2\cos(x) + \int_0^x \sin(x-t)v^2(t)dt \quad (5.14)$$

$$v(0) = -1, \quad v'(0) = 1$$

şeklinde verilen ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümünün $v(x) = \sin x - \cos x$ olduğunu Shehu ayrıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[v''(x)] = \mathbb{S}\left[-1 - \frac{1}{3}(\sin(x) + \sin(2x)) + 2\cos(x)\right] + \mathbb{S}\left[\sin(x-t) * v^2(x)\right]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)^2 V(s, u) - \left(\frac{s}{u}\right)v(0) - v'(0) = -\left(\frac{u}{s}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{u^2}{s^2 + 4u^2}\right) + 2\left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right) + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right)\mathbb{S}[v^2(x)]$$

$$V(s, u) = -\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{u}{s}\right)^2\left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{u}{s}\right)^2\left(\frac{u^2}{s^2 + 4u^2}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2\left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2\left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right)\mathbb{S}[v^2(x)]$$

$$V(s, u) = -\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{s^2(s^2 + u^2)}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{2u^4}{s^2(s^2 + 4u^2)}\right) + 2\left(\frac{u^3}{s(s^2 + u^2)}\right) + \left(\frac{u^4}{s^2(s^2 + u^2)}\right)\mathbb{S}[v^2(x)]$$

(5.9) denklemine göre;

$$V_0(s, u) = -\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - \left(\frac{u}{s}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{u^4}{s^2(s^2 + u^2)} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{2u^4}{s^2(s^2 + 4u^2)} \right) + 2 \left(\frac{u^3}{s(s^2 + u^2)} \right), \quad (5.15)$$

$$\mathbb{S}[v_{i+1}(x)] = \left(\frac{u^4}{s^2(s^2 + u^2)} \right) \mathbb{S}[A_i(x)], \quad i \geq 0.$$

Lineer olmayan terim $F[v(x)] = v^2(x)$ için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned} A_0 &= v_0^2, \\ A_1 &= 2v_0v_1, \\ A_2 &= 2v_0v_2 + v_1^2, \\ A_3 &= 2v_0v_3 + 2v_1v_2. \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılır. (5.15) denkleminin ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$\begin{aligned} v_0(x) &= -1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{360}x^6 - \frac{11}{5400}x^7 + \dots, \\ v_1(x) &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{504}x^7 + \dots, \end{aligned}$$

bulunur. Sonsuz seri çözümünden,

$$v(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right) - \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \right)$$

$$v(x) = \sin x - \cos x$$

bulunup, elde edilen bu sonucun Sumudu ayrıştırma metodu ile bulunan (Ahmed ve Elzaki, 2013; Eltayeb ve ark., 2014) ve Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2011) çözümlerle aynı sonucu verdiği görülmüştür.

Örnek 5.1.4.

$$v''(x) = 2 + 2x + x^2 - x^2 e^x - e^{2x} + \int_0^x e^{(x-t)} v^2(t) dt; \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 2 \quad (5.16)$$

şeklinde verilen ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümünün $v(x) = x + e^x$ olduğunu Shehu ayrıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa

$$\mathbb{S}[v''(x)] = \mathbb{S}\left[2 + 2x + x^2 - x^2 e^x - e^{2x}\right] + \mathbb{S}\left[e^{(x-t)} * v^2(x)\right]$$

$$\left(\frac{s}{u}\right)^2 V(s, u) - \left(\frac{s}{u}\right) v(0) - v'(0) = 2\left(\frac{u}{s}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 - 2\left(\frac{u}{s-u}\right)^3 - \left(\frac{u}{s-2u}\right) + \left(\frac{u}{s-u}\right) \mathbb{S}[v^2(x)]$$

$$V(s, u) = \left(\frac{u}{s}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^4 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^5 - 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 \left(\frac{u}{s-u}\right)^3 - \left(\frac{u}{s}\right)^2 \left(\frac{u}{s-2u}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \left(\frac{u}{s-u}\right) \mathbb{S}[v^2(x)]$$

$$V(s, u) = \left(\frac{u}{s}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^4 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^5 - 2\left(\frac{u^5}{s^2(s-u)^3}\right) - \left(\frac{u^3}{s^2(s-2u)}\right) + \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) \mathbb{S}[v^2(x)]$$

(5.9) denklemine göre;

$$V_0(s, u) = \left(\frac{u}{s}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^3 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^4 + 2\left(\frac{u}{s}\right)^5 - 2\left(\frac{u^5}{s^2(s-u)^3}\right) - \left(\frac{u^3}{s^2(s-2u)}\right), \quad (5.17)$$

$$\mathbb{S}[v_{i+1}(x)] = \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) \mathbb{S}[A_i(x)]; \quad i \geq 0.$$

Lineer olmayan terim $F[v(x)] = v^2(x)$ için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned}
A_0 &= v_0^2, \\
A_1 &= 2v_0v_1, \\
A_2 &= 2v_0v_2 + v_1^2, \\
A_3 &= 2v_0v_3 + 2v_1v_2.
\end{aligned}$$

ifadeleri kullanılır. (5.17) denkleminin ters Shehu dönüşümü alınır;

$$\begin{aligned}
v_0(x) &= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{60}x^5 - \frac{7}{180}x^6 + \dots, \\
v_1(x) &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{3}{80}x^6 + \dots, \\
v_2(x) &= \frac{1}{360}x^6 + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonsuz seri çözümünden,

$$\begin{aligned}
v(x) &= x + \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \right) \\
v(x) &= x + e^x
\end{aligned}$$

bulunup, elde edilen bu sonucun Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2011) çözümle aynı sonucu verdiği görülmüştür.

5.2. İkinci Tür Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklem Sisteminin Shehu Ayrıştırma Metodu ile Çözümü

Literatürde, ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem sistemine Shehu ayrıştırma metodunun uygulanmasına rastlanmamış olup bu kısımda ilk kez uygulanmıştır. Bu denklem sistemini çözmek için aşağıdaki adımlar takip edilir.

- i. Verilen denklemin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanır.
- ii. Konvolüsyon teoremi uygulanır.
- iii. Elde edilen denklem sonsuz seri şeklinde düşünülür.
- iv. Lineer olmayan terim için Adomian polinomları kullanılarak hesaplama yapılır.
- v. Yineleme bağıntısı uygulanır.

vi. Ters Shehu dönüşümü alınır.

vii. Böylece yaklaşık çözüme ulaşırız. Bu yaklaşık çözüm yakınsak ise analitik çözüm aksi halde seri çözüm olarak kalır.

İkinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem sistemi,

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f_1(x) + \int_0^x [K_1(x-t)F_1(u(t)) + R_1(x-t)G_1(v(t))] dt \\ v^{(n)}(x) = f_2(x) + \int_0^x [K_2(x-t)F_2(u(t)) + R_2(x-t)G_2(v(t))] dt \end{cases} \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $u(x)$ ve $v(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar, $u^{(n)}(x)$, $u(x)$ 'in x 'e göre n . mertebeden türevi, $v^{(n)}(x)$, $v(x)$ 'in x 'e göre n . mertebeden türevi, $f_i(x)$, $i=1,2$ reel değerli fonksiyonlar, $F_i, G_i, i=1,2$ lineer olmayan fonksiyonlar, $K_i(x,t) = K_i(x-t)$, $i=1,2$ ve $R_i(x,t) = R_i(x-t)$, $i=1,2$ integrallerin çekirdek kısımları olup $(x-t)$ farkı şeklinde ifade edilen fark çekirdekleri olarak kabul edilecektir. Kesin çözüme ulaşabilmek için $u^{(j-1)}(0)$ ve $v^{(j-1)}(0)$, $1 \leq j \leq n$ başlangıç koşulları verilmelidir (Wazwaz, 2011).

i. Adım: Verilen denklem sisteminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{u}\right)^n \mathbb{S}[u(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-1} u(0) - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0) &= \mathbb{S}[f_1(x)] \\ + \mathbb{S}[(K_1(x-t) * F_1(u(x))) + (R_1(x-t) * G_1(v(x)))] & \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{u}\right)^n \mathbb{S}[v(x)] - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-1} v(0) - \left(\frac{s}{u}\right)^{n-2} v'(0) - \dots - v^{(n-1)}(0) &= \mathbb{S}[f_2(x)] \\ + \mathbb{S}[(K_2(x-t) * F_2(u(x))) + (R_2(x-t) * G_2(v(x)))] & \end{aligned}$$

ii. Adım: Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[u(x)] &= \left(\frac{u}{s}\right)u(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 u'(0) + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n u^{(n-1)}(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f_1(x)] \\ &+ \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K_1(x-t)]\mathbb{S}[F_1(u(x))] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[R_1(x-t)]\mathbb{S}[G_1(v(x))]\end{aligned}\quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[v(x)] &= \left(\frac{u}{s}\right)v(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 v'(0) + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n v^{(n-1)}(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f_2(x)] \\ &+ \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K_2(x-t)]\mathbb{S}[F_2(u(x))] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[R_2(x-t)]\mathbb{S}[G_2(v(x))]\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

iii. Adım: Denklemin çözümü için $u(x)$ ve $v(x)$ sonsuz seri şeklinde kabul edilirse;

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) \quad , \quad v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) \quad (5.21)$$

kullanılır.

iv. Adım: Lineer olmayan terim $F_i[u(x)]$, $i = 1, 2$ için (A_i : Adomian polinomları (Wazwaz, 1997))

$$F(v) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad (5.22)$$

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} \left[F \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right) \right]; \quad i \geq 0 \quad (5.23)$$

(5.21) ve (5.22) denklemlerini (5.20) denklem sisteminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)\right] &= \left(\frac{u}{s}\right)u(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 u'(0) + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n u^{(n-1)}(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f_1(x)] \\ &+ \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K_1(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}A_i\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[R_1(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\bar{A}_i\right],\end{aligned}\tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}v_i(x)\right] &= \left(\frac{u}{s}\right)v(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 v'(0) + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n v^{(n-1)}(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f_2(x)] \\ &+ \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K_2(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}B_i\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[R_2(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\bar{B}_i\right].\end{aligned}$$

v. Adım: Yineleme bağıntısından,

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[u_0(x)] &= \left(\frac{u}{s}\right)u(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 u'(0) + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n u^{(n-1)}(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f_1(x)], \\ \mathbb{S}[u_{i+1}(x)] &= \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K_1(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}A_i\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[R_1(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\bar{A}_i\right], \\ \mathbb{S}[v_0(x)] &= \left(\frac{u}{s}\right)v(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 v'(0) + \dots + \left(\frac{u}{s}\right)^n v^{(n-1)}(0) + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[f_2(x)], \\ \mathbb{S}[v_{i+1}(x)] &= \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[K_2(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}B_i\right] + \left(\frac{u}{s}\right)^n \mathbb{S}[R_2(x-t)]\mathbb{S}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\bar{B}_i\right].\end{aligned}\tag{5.25}$$

elde edilir. Devamında ise vi. ve vii. adımlar uygulanır.

Örnek 5.2.1.

$$\begin{aligned}u'(x) &= e^x - 2e^{2x} + 2 + \int_0^x e^{(x-t)} \left(u^2(t) + v^2(t)\right) dt, \quad u(0) = 2 \\ v'(x) &= -e^x - 4xe^x + \int_0^x e^{(x-t)} \left(u^2(t) - v^2(t)\right) dt, \quad v(0) = 0\end{aligned}\tag{5.26}$$

İkinci tür lineer olmayan Völterra integro-diferensiyel denklem sisteminin çözümünün $u(x) = 1 + e^x$, $v(x) = 1 - e^x$ olduğunu Shehu ayırıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[u'(x)] &= \mathbb{S}[e^x - 2e^{2x} + 2] + \mathbb{S}[e^{(x-t)} * (u^2(x) + v^2(x))] \\ \mathbb{S}[v'(x)] &= \mathbb{S}[-e^x - 4xe^{2x}] + \mathbb{S}[e^{(x-t)} * (u^2(x) - v^2(x))]\end{aligned}$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{u}\right)U(s, u) - u(0) &= \left(\frac{u}{s-u}\right) - 2\left(\frac{u}{s-2u}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)] \\ \left(\frac{s}{u}\right)V(s, u) - v(0) &= -\left(\frac{u}{s-u}\right) - 4\left(\frac{u}{s-u}\right)^2 + \left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(s, u) &= 2\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right) - 2\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-2u}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)] \\ V(s, u) &= -\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right) - 4\left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)\left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)] \\ U(s, u) &= 2\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right) - 2\left(\frac{u^2}{s(s-2u)}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right)\mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)] \\ V(s, u) &= -\left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right) - 4\left(\frac{u^3}{s(s-u)^2}\right) + \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right)\mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)]\end{aligned}$$

(5.25) denklemine göre;

$$\begin{aligned}U_0(s, u) &= 2\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right) - 2\left(\frac{u^2}{s(s-2u)}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2, \\ U_{i+1}(s, u) &= \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right)\mathbb{S}[A_i(x) + B_i(x)],\end{aligned}$$

(5.27)

$$\begin{aligned}V_0(s, u) &= -\left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right) - 4\left(\frac{u^3}{s(s-u)^2}\right), \\ V_{i+1}(s, u) &= \left(\frac{u^2}{s(s-u)}\right)\mathbb{S}[A_i(x) - B_i(x)], \quad i \geq 0.\end{aligned}$$

Lineer olmayan $u^2(x)$ ve $v^2(x)$ fonksiyonları için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, & B_0 &= v_0^2, \\ A_1 &= 2u_0u_1, & B_1 &= 2v_0v_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, & B_2 &= 2v_0v_2 + v_1^2, \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, & B_3 &= 2v_0v_3 + 2v_1v_2. \end{aligned}$$

kullanılır. (5.27) denklem sisteminde ters Shehu dönüşümü alınır;

$$u_0(x) = 2 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 - \frac{5}{8}x^4 - \frac{31}{120}x^5 + \dots,$$

$$u_1(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \dots,$$

$$u_2(x) = \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^5 + \dots,$$

$$v_0(x) = -x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{13}{24}x^4 - \frac{17}{120}x^5 + \dots,$$

$$v_1(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \dots,$$

$$v_2(x) = \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^5 + \dots,$$

Sonsuz seriden,

$$u(x) = 1 + \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \right)$$

$$v(x) = 1 - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \right)$$

$$(u(x), v(x)) = (1 + e^x, 1 - e^x)$$

elde edilir. Bu sonuç Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2011) çözümle karşılaştırılarak aynı sonucu verdiği görülmüştür.

Örnek 5.2.2.

$$u'(x) = 1 + \frac{7}{3} \sin x - \frac{2}{3} \sin(2x) - 4x + \int_0^x \cos(x-t) (u^2(t) + v^2(t)) dt, \quad u(0) = 1 \quad (5.28)$$

$$v'(x) = 1 - 7 \sin x + 4x \cos x + 4x + \int_0^x (x-t) (u^2(t) - v^2(t)) dt, \quad v(0) = -1$$

İkinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem sisteminin çözümünün $u(x) = x + \cos x$, $v(x) = x - \cos x$ olduğunu Shehu ayrıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[u'(x)] &= \mathbb{S}\left[1 + \frac{7}{3} \sin x - \frac{2}{3} \sin(2x) - 4x\right] + \mathbb{S}\left[\cos(x-t) * (u^2(x) + v^2(x))\right] \\ \mathbb{S}[v'(x)] &= \mathbb{S}[1 - 7 \sin x + 4x \cos x + 4x] + \mathbb{S}\left[(x-t) * (u^2(x) - v^2(x))\right] \end{aligned}$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{u}\right) U(s, u) - u(0) &= \left(\frac{u}{s}\right) + \frac{7}{3} \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) - \frac{2}{3} \left(\frac{2u^2}{s^2 + 4u^2}\right) - 4 \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{us}{s^2 + u^2}\right) \mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)] \\ \left(\frac{s}{u}\right) V(s, u) - v(0) &= \left(\frac{u}{s}\right) - 7 \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) + 4 \left(\frac{u^2(s^2 - u^2)^2}{(s^2 + u^2)^2}\right) + 4 \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s}\right)^2 \mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(s, u) &= \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \frac{7}{3} \left(\frac{u^3}{s(s^2 + u^2)}\right) - \frac{4}{3} \left(\frac{u^3}{s(s^2 + 4u^2)}\right) - 4 \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) \mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)] \\ V(s, u) &= -\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - 7 \left(\frac{u^3}{s(s^2 + u^2)}\right) + 4 \left(\frac{u^3(s^2 - u^2)^2}{s(s^2 + u^2)^2}\right) + 4 \left(\frac{u}{s}\right)^3 + \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)] \end{aligned}$$

(5.25) denklemine göre;

$$\begin{aligned}
U_0(s, u) &= \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \frac{7}{3} \left(\frac{u^3}{s(s^2 + u^2)}\right) - \frac{4}{3} \left(\frac{u^3}{s(s^2 + 4u^2)}\right) - 4 \left(\frac{u}{s}\right)^3, \\
U_{i+1}(s, u) &= \left(\frac{u^2}{s^2 + u^2}\right) \mathbb{S}[A_i(x) + B_i(x)], \\
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
V_0(s, u) &= -\left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 - 7 \left(\frac{u^3}{s(s^2 + u^2)}\right) + 4 \left(\frac{u^3(s^2 - u^2)^2}{s(s^2 + u^2)^2}\right) + 4 \left(\frac{u}{s}\right)^3, \\
V_{i+1}(s, u) &= \left(\frac{u}{s}\right)^3 \mathbb{S}[A_i(x) - B_i(x)], \quad i \geq 0.
\end{aligned}$$

Lineer olmayan $u^2(x)$ ve $v^2(x)$ fonksiyonları için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2, & B_0 &= v_0^2, \\
A_1 &= 2u_0u_1, & B_1 &= 2v_0v_1, \\
A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, & B_2 &= 2v_0v_2 + v_1^2, \\
A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, & B_3 &= 2v_0v_3 + 2v_1v_2.
\end{aligned}$$

(5.29) denklem sisteminde ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{19}{720}x^6 + \dots, \\
u_1(x) &= x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{41}{360}x^6 + \dots, \\
u_2(x) &= \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{15}x^6 + \dots, \\
u_3(x) &= \frac{2}{45}x^6 + \dots, \\
v_0(x) &= -1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{13}{720}x^6 + \dots, \\
v_1(x) &= \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{30}x^6 + \dots, \\
v_2(x) &= \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{60}x^6.
\end{aligned}$$

Sonsuz seriden,

$$u(x) = x + \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right)$$

$$v(x) = x - \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right)$$

$$(u(x), v(x)) = (x + \cos x, x - \cos x)$$

elde edilir. Bu sonuç Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2011) çözümle karşılaştırılarak aynı sonucu verdiği görülmüştür.

Örnek 5.2.3.

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{7}{3}e^x - e^{2x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \int_0^x e^{(x-t)}(u^2(t) + v^2(t))dt; \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1 \\ v''(x) &= \frac{2}{3}e^x + 3e^{2x} + \frac{1}{3}e^{4x} + \int_0^x e^{(x-t)}(u^2(t) - v^2(t))dt; \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

İkinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem sisteminin çözümünün $u(x) = e^x$, $v(x) = e^{2x}$ olduğunu Shehu ayrıştırma metodunu kullanarak gösterelim.

Çözüm: Verilen denklem sisteminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[u''(x)] &= \mathbb{S}\left[\frac{7}{3}e^x - e^{2x} - \frac{1}{3}e^{4x}\right] + \mathbb{S}\left[e^{(x-t)} * (u^2(x) + v^2(x))\right] \\ \mathbb{S}[v''(x)] &= \mathbb{S}\left[\frac{2}{3}e^x + 3e^{2x} + \frac{1}{3}e^{4x}\right] + \mathbb{S}\left[e^{(x-t)} * (u^2(x) - v^2(x))\right] \end{aligned}$$

Konvolüsyon teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{u}\right)^2 U(s, u) - \left(\frac{s}{u}\right)u(0) - u'(0) &= \frac{7}{3}\left(\frac{u}{s-u}\right) - \left(\frac{u}{s-2u}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{u}{s-4u}\right) + \left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)] \\ \left(\frac{s}{u}\right)^2 V(s, u) - \left(\frac{s}{u}\right)v(0) - v'(0) &= \frac{2}{3}\left(\frac{u}{s-u}\right) + 3\left(\frac{u}{s-2u}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{s-4u}\right) + \left(\frac{u}{s-u}\right)\mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)] \end{aligned}$$

$$U(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \frac{7}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) - \left(\frac{u^3}{s^2(s-2u)}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-4u)}\right) + \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) \mathbb{S}[u^2(x) + v^2(x)]$$

$$V(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) + 3 \left(\frac{u^3}{s^2(s-2u)}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-4u)}\right) + \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) \mathbb{S}[u^2(x) - v^2(x)]$$

(5.25) denklemine göre;

$$U_0(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right) + \left(\frac{u}{s}\right)^2 + \frac{7}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) - \left(\frac{u^3}{s^2(s-2u)}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-4u)}\right),$$

$$U_{i+1}(s,u) = \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) \mathbb{S}[A_i(x) + B_i(x)],$$

(5.32)

$$V_0(s,u) = \left(\frac{u}{s}\right) + 2\left(\frac{u}{s}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) + 3 \left(\frac{u^3}{s^2(s-2u)}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{s^2(s-4u)}\right),$$

$$V_{i+1}(s,u) = \left(\frac{u^3}{s^2(s-u)}\right) \mathbb{S}[A_i(x) - B_i(x)], \quad i \geq 0.$$

Lineer olmayan $u^2(x)$ ve $v^2(x)$ fonksiyonları için Adomian polinomlarından,

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, & B_0 &= v_0^2, \\ A_1 &= 2u_0u_1, & B_1 &= 2v_0v_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, & B_2 &= 2v_0v_2 + v_1^2, \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, & B_3 &= 2v_0v_3 + 2v_1v_2. \end{aligned}$$

(5.32) denklem sisteminde ters Shehu dönüşümü alınırsa;

$$u_0(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3 - \frac{7}{24}x^4 - \frac{9}{40}x^5 + \dots,$$

$$u_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \dots,$$

$$v_0(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{23}{60}x^5 + \dots,$$

$$v_1(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{7}{60}x^5 + \dots$$

Sonsuz seriden,

$$u(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \right)$$

$$v(x) = \left(1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \dots \right)$$

$$(u(x), v(x)) = (e^x, e^{2x})$$

elde edilir. Bu sonuç Sumudu ayrıştırma metodu ile bulunan (Eltayeb ve ark., 2014) ve Laplace ayrıştırma metodu ile bulunan (Wazwaz, 2011) çözümlerle karşılaştırılarak aynı sonucu verdiği görülmüştür.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemler matematik, fizik ve mühendislik gibi uygulamalı birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Bir integral dönüşümü olan Shehu dönüşümü de diferensiyel denklemlerin çözümünde kolaylık sağlayan literatürde yeni kullanılan bir dönüşümdür. Bu dönüşümün yeni olması ve literatürde bu konuyla ilgili fazla çalışma olmaması nedeniyle bu konuda yapılan çalışmalar her zaman önem arz etmektedir.

Bu tez çalışmasında; Shehu integral dönüşümünün tanımına, özelliklerine ve bazı teoremlerine yer verilmiştir. İkinci tür lineer Volterra integral denklemlerini çözmek için Shehu dönüşümü kullanılmıştır ve bu dönüşüm ikinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerine ilk kez uygulanıp örneklerle gösterilmiştir. Ayrıca, Shehu dönüşümü ile Adomian ayrıştırma yöntemini hibritleyerek literatürde mevcut olan Shehu ayrıştırma metodu hakkında bilgi verilip bu metot ilk kez ikinci tür lineer olmayan Volterra integro-diferensiyel denklem ve denklem sistemi çözümünde kullanılmış ve uygulamalarla desteklenmiştir.

Bu tez çalışmasında da görüldüğü üzere gerek Shehu dönüşümü gerekse Shehu ayrıştırma metodu uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan matematiksel problemlerin analitik veya yaklaşık çözümlerini bulmak için kolay, uygulanabilir, güvenilir ve güçlü bir alternatif teknik olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Aggarwal, S. ve Gupta, A. R., 2019, Shehu transform for solving Abel's integral equation, *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, 6 (5), 101-110.
- Aggarwal, S., Gupta, A. R. ve Sharma, S. D., 2019a, A new application of Shehu transform for handling Volterra integral equations of first kind, *International Journal of Research in Advent Technology*, 7 (4), 439-445.
- Aggarwal, S., Sharma, S. D. ve Gupta, A. R., 2019b, Global journal of engineering science and researches application of Shehu transform for handling growth and decay problems, (C) *Global Journal of Engineering Science and Researches*, 6 (4), 190-198.
- Aggarwal, S. ve Singh, G. P., 2019, Shehu transform of Error function (Probability integral), *International Journal of Research in Advent Technology*, 7 (6), 54-60.
- Aggarwal, S., Vyas, A. ve Sharma, S. D., 2020, Primitive of second kind linear Volterra integral equation using Shehu transform, *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management and Applied Science*, 9 (8), 26-32.
- Ahmed, S. ve Elzaki, T., 2013, The solution of nonlinear Volterra integro-differential equations of second kind by combine Sumudu transforms and Adomian decomposition method, *International Journal of Advanced and Innovative Research*, 2 (12), 90-93.
- Akinyemi, L. ve Iyiola, O. S., 2020, Exact and approximate solutions of time-fractional models arising from physics via Shehu transform, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43 (12), 7442-7464.
- Alfaqeh, S. ve Mısırlı, E., 2020, On double Shehu transform and its properties with applications, *International Journal of Analysis and Applications*, 18 (3), 381-395.
- Alkaleeli, S. R., 2021, Application of Triple Shehu Transformation for solving Volterra integro-partial differential equation, *Journal of Pure & Applied Sciences*, 20 (4), 132-136.
- Alkaleeli, S. R., Mtawal, A. A. ve Hmad, M. S., 2021, Triple Shehu transform and its properties with applications, *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, 14 (1), 4-12.
- Atangana, A. ve Kılıçman, A., 2013, A novel integral operator transform and its application to some FODE and FPDE with some kind of singularities, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-7.

- Belgacem, F. B. M. ve Karaballi, A. A., 2006, Sumudu transform fundamental properties investigations and applications, *International Journal of Stochastic Analysis*, 2006, 1-23.
- Belgacem, F. B. M. ve Silambarasan, R., 2012, Theory of Natural transform, *Mathematics in Engineering Science and Aerospace*, 3 (1), 105-135.
- Belgacem, R., Baleanu, D., Bokhari, A. ve Issa, A., 2019, Shehu transform and applications to Caputo-fractional differential equations, *International Journal of Analysis and Applications*, 17 (6), 917-927.
- Bôcher, M., 1926, An introduction to the study of integral equations, 10, University Press, p. 1-88.
- Bochner, S., Chandrasekharan, K. ve Chandrasekharan, K., 1949, Fourier transforms, 19, Princeton University Press, p. 1-219.
- Bokhari, A., 2019, Application of Shehu transform to Atangana-Baleanu derivatives, *J. Math. Computer Sci*, 20, 101-107.
- Bozburun, H. ve Peker, H. A., 2021, Solution of linear Volterra integro-differential equations of second kind using Shehu transform, *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, Special Issue (8), 177-186.
- Bracewell, R. N. ve Bracewell, R. N., 1986, The Fourier transform and its applications, McGraw-hill New York, p. 1-640.
- Debnath, L. ve Bhatta, D., 2016, Integral transforms and their applications, Chapman and Hall/CRC, p. 1-210.
- Eltayeb, H., Kılıçman, A. ve Mesloub, S., 2014, Application of Sumudu decomposition method to solve nonlinear system Volterra integrodifferential equations, *Abstract and Applied Analysis*, 1-6.
- Eltayeb, H. ve Abdeldaim, E., 2017, Sumudu decomposition method for solving fractional delay differential equations, *Research in Applied Mathematics*, 1, 13.
- Elzaki, T. M., 2011, The new integral transform Elzaki transform, *Global Journal of pure and applied mathematics*, 7 (1), 57-64.
- Higazy, M., Aggarwal, S. ve Hamed, Y., 2020, Determination of number of infected cells and concentration of viral particles in plasma during HIV-1 infections using Shehu transformation, *Journal of Mathematics*, 2020, 1-13.
- Issa, A. ve Mensah, Y., 2020, Shehu transform: extension to distributions and measures, *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis*, 2 (4), 541-549.
- Khalouta, A. ve Kadem, A., 2020, A comparative study of Shehu variational iteration method and Shehu decomposition method for solving nonlinear Caputo time-

- fractional wave-like equations with variable coefficients, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 15 (1), 1-24.
- Khan, H., Farooq, U., Shah, R., Baleanu, D., Kumam, P. ve Arif, M., 2019, Analytical solutions of (2+ time fractional order) dimensional physical models, using modified decomposition method, *Applied Sciences*, 10 (1), 1-122.
- Maitama, S. ve Zhao, W., 2019, New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations, *arXiv preprint arXiv:1904.11370*.
- Maitama, S. ve Zhao, W., 2020, New homotopy analysis transform method for solving multidimensional fractional diffusion equations, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 27 (1), 27-44.
- Mısıır, A., 2016, Teori teknik ve uygulamalı diferensiyel denklemler, *Gazi Kitabevi*, Ankara, p. 1-394.
- Qureshi, S. ve Kumar, P., 2019, Using Shehu integral transform to solve fractional order Caputo type initial value problems, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 18 (2), 75-83.
- Rahman, M., 2007, Integral equations and their applications., *WIT Press, Southampton*, Bostan, p. 1-385.
- Rawashdeh, M. S. ve Maitama, S., 2015, Solving nonlinear ordinary differential equations using the NDM, *J. Appl. Anal. Comput*, 5 (1), 77-88.
- Schiff, J. L., 1999, The Laplace transform: theory and applications, Springer Science & Business Media, p. 1-245.
- Srivastava, H., Minjie, L. ve Raina, R., 2015, A new integral transform and its applications, *Acta Mathematica Scientia*, 35 (6), 1386-1400.
- Volterra, V., 1959, Theory of functional of integral and integro-differential equations, *Dover, New York*, 1-347.
- Watugala, G., 1993, Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *Integrated Education*, 24 (1), 35-43.
- Wazwaz, A.-M., 1997, Necessary conditions for the appearance of noise terms in decomposition solution series, *Applied Mathematics and Computation*, 81 (2-3), 265-274.
- Wazwaz, A.-M., 2009, Solitary waves theory, In: Partial differential equations and solitary waves theory, Eds: Springer, p. 479-502.

- Wazwaz, A.-M., 2010, The combined Laplace transform–Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro–differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 216 (4), 1304-1309.
- Wazwaz, A.-M., 2011, Linear and nonlinear integral equations, Springer, p. 1-638.
- Yang, X.-J., 2016, A new integral transform method for solving steady heat-transfer problem, *Thermal Science*, 20 (suppl. 3), 639-642.

