T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DETERMİNANTSAL İDEALLERİN GRÖBNER BAZLARI

PELİN ATMACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Pınar METE (Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Seher TUTDERE KAVUT
Prof. Dr. Müge KANUNİ ER

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2022

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan “**Determinantsal İdeallerin Gröbner Bazları**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Pelin ATMACA

ÖZET

DETERMİNANTSAL İDEALLERİN GRÖBNER BAZLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
PELİN ATMACA
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, AĞUSTOS - 2022

Determinantsal idealler ve ilgili oldukları nesnelerin, invaryant teori, temsil teorisi ve kombinatorik ile çok sayıda bağlantısı vardır. Bu bağlantı nedeniyle, determinantsal idealler, değişmeli cebir ve cebirsel geometrinin temel çalışma konularından birisidir. Bu tez, hesapsal cebir bakış açısından, determinantsal idealler hakkında bilinen bazı sonuçların bir derlemesidir.

ANAHTAR KELİMELER: Determinantsal idealler, Young tablolar, düzeltme kuralı**,** Schensted algoritması

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 33

ABSTRACT

GRÖBNER BASES OF DETERMINANTAL IDEALS
MSC THESIS
PELİN ATMACA
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. PINAR METE)
BALIKESİR, AUGUST - 2022

Determinantal ideals and the objects related them has many connections with invariant theory, representation theory and combinatorics. Because of this relation, they have been a central topic of commutative algebra and algebraic geometry. This thesis is a survey of some known results about the determinantal ideals from a computer algebra point of view.

KEYWORDS: Determinantal ideals, Young tableaux, straightening law, Schensted' s algorithm

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 33

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{Z}^+$	: Negatif olmayan tam sayılar
$\boldsymbol{\lambda}$	: Bir pozitif tam sayının parçalanışı
$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$	: λ parçalanışının eşleniği
$\boldsymbol{T^{\tau}}$	: T numaralandırmasının transpozu
$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{p}$	: 0' dan büyük veya eşit tam sayıların oluşturduğu p koordinatlı vektör
R(p,q)	: R bir tablo olmak üzere R' nin (p, q) hücresindeki girdisi
X=$\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$	: X alfabesi
k	: Cisim
P	: k üzerinde $(x_i\|u_j)$ bilinmeyenli polinomlar cebiri
$\boldsymbol{\sigma}$	: Sigma permütasyonu
sgn($\boldsymbol{\sigma}$**)**	: σ' nın işareti
$\boldsymbol{\mathcal{G}_p}$	: p sembollü simetrik grup
P($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$**)**	: (α, β) içeriği tarafından üretilen P' nin alt uzayı
cont(p)	: p' nin içeriği
$[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T'}]$	: T ve T' Young tablolarının oluşturduğu ikili tablo
$(\boldsymbol{T}\|\boldsymbol{T'})$	: $[T, T']$' nin bideterminantı
$\boldsymbol{M_{m\times n}}$**(A)**	: Girdileri A halkasından olan m×n matris
rank($\boldsymbol{M_{m\times n}}$**(R))**	: $M_{m\times n}$(R)' nin rankı
$\boldsymbol{S_n}$	: Tüm n-li permütasyonların kümesi
detA	: A matrisinin determinantı
Δ	: Bir matrisin t×t – minörü
I	: R halkasının ideali
$\boldsymbol{M_{n\times n}}$**(I)**	: $M_{n\times n}$(R)' nin ideallerinin kümesi
$\boldsymbol{DI_r}$	: A matrisinin r×r – minörleri tarafından üretilen ideal
k$[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}]$	: Katsayıları k cisminden olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenli polinom halkası

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, kariyerim açısından ilk ve eşsiz bir deneyimdi. Kolay olmayan bu süreci, bana, çok güzel bir yol olarak sunan, desteğini ve yardımını her daim hissettiğim, hem akademik hem de insani yönüyle kendisinden istifade ettiğim ve istifade edeceğimi umduğum saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Pınar METE' ye teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışma sürecimde kaybettiğim, hayattayken her zaman beni cesaretlendirip yanımda olan, hiçbir zaman desteğini esirgemeyen canım abim Ersel ATMACA' ya, daha sonrasında başta annem olmak üzere bu zorlu yolu benim için kolaylaştıran aileme teşekkür ederim.

Balıkesir, 2022 **Pelin Atmaca**

1. GİRİŞ

Determinantsal idealler, bir homojen polinomsal matrisin minörleri tarafından üretilen ideallerdir. Değişmeli cebir ve cebirsel geometrinin, temel çalışma konularından olan determinantsal ideallerin, invaryant teori, temsil teori ve kombinatorik ile çok sayıda bağlantıları vardır. Bu nedenle, literatürde oldukça ilgi görmektedirler. En dikkat çekici sonuçlardan bazıları Eagon, Hochster [1] ve Eagon, Nortcott [2] tarafından verilmiştir. Sturmfels [3], determinantsal varyeteleri, hesaplamalı cebir bakış açısı ile çalışmıştır. Bu varyetelere karşılık gelen ideallerin indirgenmiş Gröbner bazlarını belirleyerek, sınırlı ranktan matrislerdeki polinomsal fonksiyonlar ile hesaplamak için etkili algoritmalar elde etmiştir. Bu Gröbner bazları hesaplamak için Knuth-Robinson-Schensted (KRS) karşılık gelmesini kullanmıştır.

Determinantsal halkaların araştırılması sırasında seçilebilecek yaklaşımların neredeyse tamamı standart ikili tabloları ve düzeltme kuralını kullanır. Tezin 2. bölümünde parçalanış, Young tablolar ve Young tablolara ait şekil, uzunluk, kanca, hücre, numaralandırma, transpoz gibi kavramların, ayrıca standard Young tablo ve genelleştirilmiş Young tablonun tanımları verilerek örneklendirilmiştir. Daha sonra düzeltme kuralı verilerek, ikili tablo ve bideterminant tanımlarına geçiş yapılıp örneklerle açıklanmıştır. Devamında genelleştirilmiş Young tabloların matrisler ve permütasyonlarla olan bağlantısı verilmiştir.

Tezin 3. bölümünde, genelleştirilmiş Young tablolar ile permütasyonlar arasındaki bağlantının özel durumu seçilerek Schensted yöntemi ile bir Young tabloya ekleme ve silme algoritmalarının uygulanabileceği, bu şekilde yeni tablolar elde edilebileceği gösterilmiştir. Devamında iki sıralı dizilerle genelleştirilmiş Young tablolar arasındaki birebir karşılık gelme algoritması verilmiştir.

Tezin 4. bölümünde, değişmeli halkalar üzerinde matrisler kümesi tanıtılarak, bir matrisin determinantı, minörü ve determinantsal ideal kavramları açıklanmıştır. Son olarak, bir ddeterminantsal idealin Gröbner bazını hesaplamak için Sturmfels [3] tarafından verilen algoritma tanıtılarak, örnekle açıklanmıştır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ YOUNG TABLOLAR

Young tablo, Alfred Young tarafından 1901 yılında invaryant teori için bir araç olarak keşfedilmiştir. Young, bu tabloları, Frobenius ve Schur' un o zamana ait çalışmalarını kullanarak, karmaşık sayılar üzerinde S_n simetrik grubunun indirgenemez temsillerinin tam bir sınıflandırmasını elde etmiştir. Yine, Young, ikili formların invaryantlarını hesaplamak için tablosunu kullanmıştır [4]. Young tablolar matematik ve fiziğin pek çok alanında kullanılmış olmasına rağmen, herhangi bir teori veya yapının kavramsal bir parçası olmadıkları için, matematiğe tam olarak nasıl uyduğunu söylemek zordur. Ancak bu tabloların şekillerinin, n nesne arasındaki simetrileri temsil etmeleri bir istisnadır.

2.1 Young Tablolar

2.1.1 Tanım. $N \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = N$$

olacak şekilde pozitif sayıların $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ artmayan sonlu dizisine, N pozitif tam sayısının $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ parçalanışı denir. Her i=1, 2, …, n için $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ ise λ' ya kesin baskın parçalanış denir. Eğer $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, N' nin bir parçalanışı ise

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \vdash N$$

ile gösterilir.

2.1.2 Tanım. Bir Young tablo her bir sütundaki kutuların sayısı, hemen sağındaki sütundaki kutuların sayısından az olmayacak şekilde, kutuların üste hizalanmış bir dizi sütunlarıdır. Bir sütundaki (veya satırdaki) kutuların sayısına, o sütunun (veya satırın) uzunluğu denir.

2.1.3 Tanım. Bir Young tablonun bir kutusu verildiğinde onun hemen sağındaki kutular ile hemen altındaki kutuların, kutunun kendisiyle beraber oluşturduğu şekle o kutunun kancası denir. Sağdaki kutular, kancanın kolunu, aşağıdaki kutular kancanın ayağını oluşturur. Bir kutunun kancası kolu yoksa bir sütundur, ayağı yoksa bir satırdır. Kolu ve ayağı yoksa kutunun kendisinden oluşur. Bir kutunun kancasındaki kutuların sayısına, o kutunun kanca uzunluğu denir.

2.1.4 Not. Bir pozitif tam sayının her parçalanışı, bir Young tablo ile temsil edilebilir. Herhangi bir λ = (λ_1, λ_2, …, λ_n) ⊦ N verildiğinde, λ' ya karşılık gelen Y_λ Young tablosu, uzunlukları λ_1, λ_2, …, λ_n olan kutuların oluşturduğu n satırdan meydana gelir.

2.1.5 Örnek. (5, 4, 4, 2, 1, 1)' in, 17' nin bir parçalanışı olduğunu görelim:

$$5 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1 = 17 \text{ ve } 5 > 4 \geq 4 > 2 > 1 \geq 1$$

azalan bir dizi olduğundan

λ = (5, 4, 4, 2, 1, 1) ⊦ 17

yazabiliriz. Y_λ Young tablosundaki her bir kutunun kanca uzunluğu aşağıdaki gibidir:

10	7	5	4	1
8	5	3	2	
7	4	2	1	
4	1			
2				
1				

Her Young tablo bir tek parçalanış temsil eder. Böylece,

$$\lambda \rightarrow Y_\lambda$$

birebir ve örten bir karşılık gelme vardır. Bir Young tabloda farklı satırlar aynı uzunluğa sahip olabilir. Bir satırın uzunluğu en fazla sütunlarının sayısı kadardır. Bir Young tabloda n tane satır ve i=1, 2, …, n olmak üzere uzunlukları i olan u_i sütunları olduğunu varsayalım. Böylece bir Young tablo,

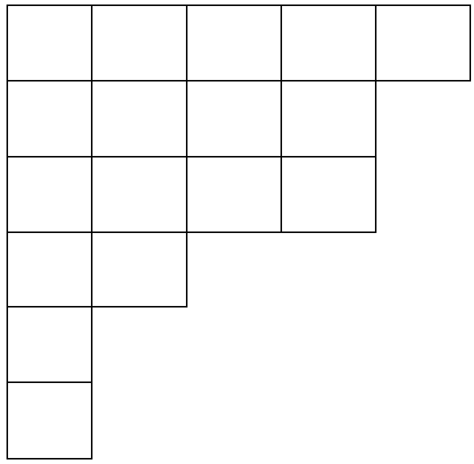
$$Y = 1^{u_1} 2^{u_2} \ldots n^{u_n}$$

ile gösterilir. Y =$1^{u_1}.2^{u_2}\ldots n^{u_2}$ 'e karşılık gelen parçalanış λ = ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) ise, $\lambda_j = \sum_{i=j}^{n} u_i$, 1 ≤ j ≤ n ve ∀ j=1, 2, …, n-1 için,

$$\lambda_j - \lambda_{j+1} = u_j \text{ ve } \lambda_n = u_n$$

olur.

2.1.6 Örnek. 17' nin λ = (5, 4, 4, 2, 1, 1) parçalanışını ve buna karşılık gelen



Y = $1^{u_1}2^{u_2}\ldots n^{u_n}$ Young tablosunu düşünelim. Burada,

$$u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 2,\ u_4 = 1,\ u_5 = 1$$

olur.

j = 1 için;

$\sum_{i=1}^{5} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$= 1 + 0 + 2 + 1 + 1$

$= 5 = \lambda_1$

ve

$\lambda_j - \lambda_{j+1} = \lambda_1 - \lambda_2 = 5 - 4 = 1 = u_1$

j = 2 için;

$\sum_{i=2}^{5} u_i = u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$= 0 + 2 + 1 + 1$

$= 4 = \lambda_2$

ve

$\lambda_2 - \lambda_3 = 4 - 4 = 0 = u_2$

j = 3 için;

$\sum_{i=3}^{5} u_i = u_3 + u_4 + u_5$

$= 2 + 1 + 1$

$= 4 = \lambda_3$

ve

λ_3- λ_4= 4 - 2 = 2 = u_3

j = 4 için;

$\sum_{i=4}^{5} u_i$ = $u_4 + u_5$

= 1 + 1

= 2 = λ_4

ve

λ_4- λ_5= 2 - 1 = 1 = u_4

son olarak j = 5 için;

$\sum_{i=5}^{5} u_i$ = u_5 = 1 = λ_5

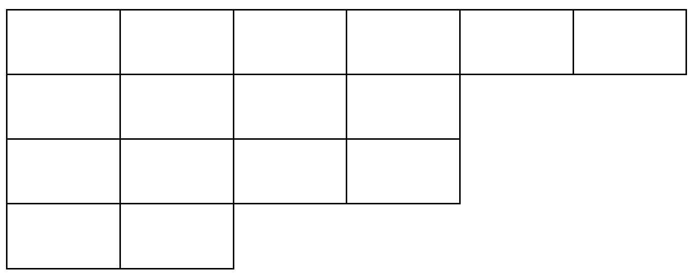
ve

$\lambda_5 = u_5 = 1$

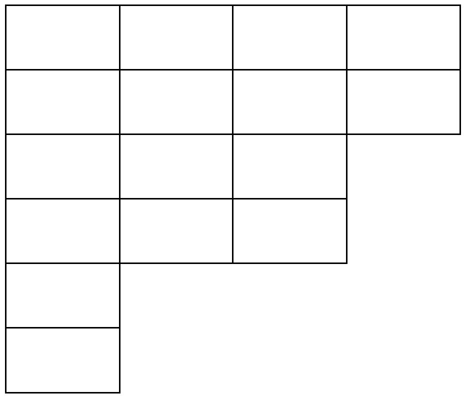
2.1.7 Tanım. Bir Young tabloyu ana köşegeninde döndürmek (üst soldan sağ alta), bize diyagramın eşleniğini verir. λ’ nın eşleniği $\tilde{\lambda}$ ile gösterilir.

2.1.8 Örnek. λ = (6, 4, 4, 2) parçalanışını alalım.

λ’ ya karşılık gelen Young tablo,



ise, λ’ nın $\tilde{\lambda}$ eşleniği



olur.

2.1.9 Tanım. Bir Young tablonun her bir kutusuna bir pozitif tam sayı yerleştirmenin herhangi bir yoluna, bir diyagramın numaranlandırılması denir. Bir diyagramın herhangi bir T numaralandırılması, eşleniğin bir numaralandırılmasını belirler. Buna T numaralandırmasının transpozu denir ve T^{τ} ile gösterilir.

2.1.10 Tanım. λ = $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, N tam sayısının bir parçalanışı olsun. Bir başka deyişle, λ,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{N}$$

ve

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$$

olacak şekilde pozitif sayıların sonlu bir dizisidir. λ, N' nin parçalanışı ise λ' nın şekli, $1 \leq j \leq n$ ve $1 \leq i \leq \lambda_j$ olmak üzere düzlemdeki (i, -j) tam sayı noktalarının bir kümesidir.

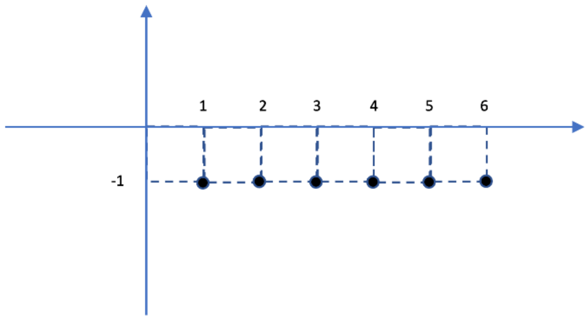
2.1.11 Örnek. λ = (6, 4, 2, 2, 1) şeklini çizelim.

$\lambda = (6, 4, 2, 2, 1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$

eşitliğinden n = 5 elde edilir. $1 \leq j \leq n = 5$ ve $1 \leq i \leq \lambda_j$ için (i, -j) noktalarını belirleyelim.

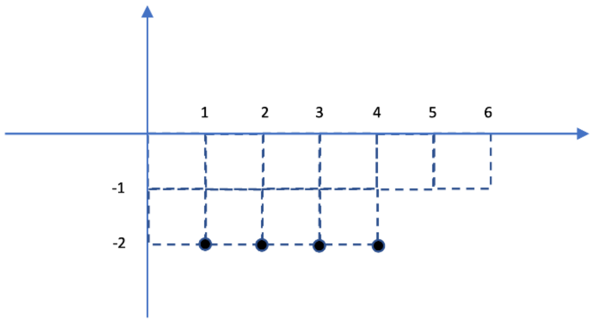
j = 1 ve $1 \leq i \leq \lambda_1 = 6$ olmasından j = 1 ve i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 elde edilir.

Böylece, (i, j) ikilileri, (1, -1), (2, -1), (3, -1), (4, -1), (5, -1), (6, -1) olur. Bu noktalar düzlemde işaretlenirse,



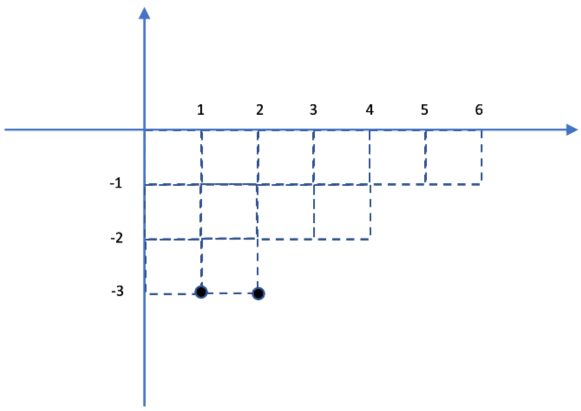
Düzlem

j = 2 ve $1 \leq i \leq \lambda_2 = 4$ olmasından j = 2 ve i = 1, 2, 3, 4 elde edilir.Böylece (i, -j) ikilileri, (1, -2), (2, -2), (3, -2), (4, -2) olur. Düzlemde işaretlersek,



Düzlem

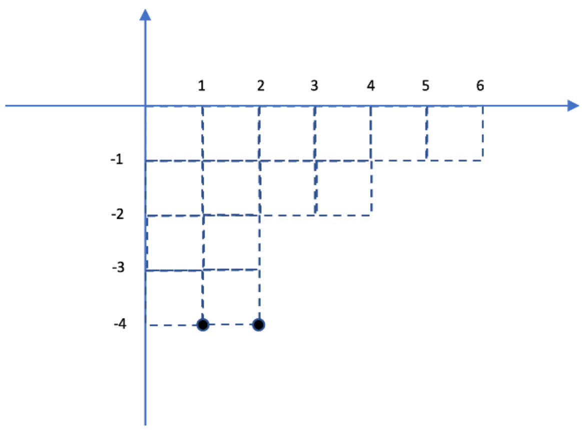
j = 3 ve $1 \leq i \leq \lambda_3 = 2$ olmasından j =3 ve i = 1, 2 elde edilir. Böylece (i, -j) ikilileri, (1, -3), (2, -3) olur ve bu ikilileri düzlemde işaretlersek,



Düzlem

elde edilir.

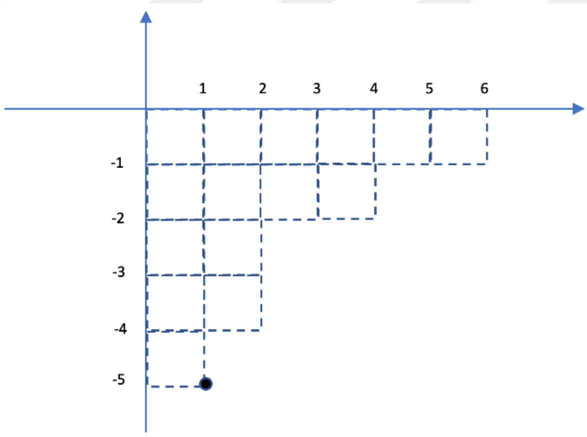
j = 4 ve $1 \leq i \leq \lambda_4 = 2$ olmasından j = 4 ve i = 1, 2 elde edilir. Böylece (i, -j) ikilileri (1, -4), (2, -4) olur ve bu ikilileri düzlemde işaretlersek,



Düzlem

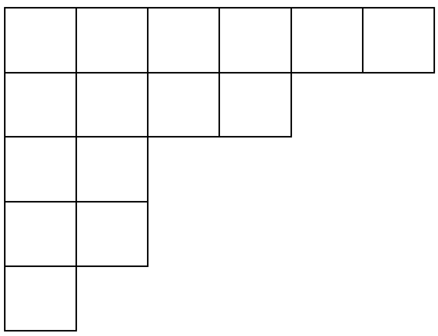
elde edilir. Son olarak,

$j = 5$ ve $1 \leq i \leq \lambda_5 = 1$ olmasından $i = 1$ elde edillir. Böylece $(i, -j)$ ikilisi $(1, -5)$ olur ve bu nokta düzlemde,



Düzlem

şeklinde işaretlenir. Böylece, $\lambda = (6, 4, 2, 2, 1)$' e karşılık gelen



Young tablo elde edilir.

2.1.12 Tanım. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ ve β = $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in Z^p_{\geq 0}$ için α - β vektör farkında en soldaki sıfırdan farklı değer pozitif ise, α $>_{lex}$ β denir.

2.1.13 Örnek. α = (3, 2, 4) ve β = (5, 7, 2) olsun.

$$\alpha \text{ - } \beta = (3, 2, 4) - (5, 7, 2) = (-2, -5, 2)$$

Burada -2 < 0 olduğundan β $>_{lex}$ α olur.

2.1.14 Tanım. λ = $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ ve μ = $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$ parçalanışları, eğer bir sonlu dizi olarak düşünüldüğünde, λ $>_{lex}$ μ ise λ' nın şekli μ' nün şeklinden uzundur denir.

2.1.15 Not. Lex sıralamasının tanımı aşağıdaki uyarıya göre koşullandırılmalıdır:
$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ sonlu dizisi, $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$ sonlu dizisinde, t > s ve
$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t)$
ise λ $>_{lex}$ μ olur.

2.1.16 Örnek. λ = (3, 1) parçalanışında s = 2 ve μ = (3, 1, 2) parçalanışında t = 3
Burada, t = 3 > s = 2 ve (3, 1) = (3, 1).
Sonuçta, λ $>_{lex}$ μ olduğundan λ = (3, 1), μ = (3, 1, 2)' den uzundur.

E kümesindeki değerlere sahip ve λ' nın şekli olan bir Young tablo, E' nin bir elemanının λ' nın şeklindeki her bir noktaya atanmasıdır.

2.1.17 Örnek. λ = (6, 4, 2, 2, 1) parçalanışının Young tabloları,

T_1:

3	2	4	4	7	8
1	2	3	5		
2	1				
6	2				
4					

T_2:

1	2	4	5	7	8
1	2	4	6		
2	3				
2	4				
3					

olarak verilebilir.

2.1.18 Tanım. R bir tablo, p ve q, (p, q), λ’ ya ait olan bir hücre olacak şekilde iki pozitif tam sayı olsun. R’ nin bu (p, q) hücresine karşılık gelen elemanını R(p, q) ile gösterelim. R(p, q) elemanına, R’ nin (p, q) hücresindeki girdisi denir.

p ≥ 1 verildiğinde, R tablosunun p. satırı, q ≥ 1 olmak üzere, R’ nin (p, q) formundaki tüm hücrelerindeki girdilerden (artan q sırasında) oluşur. Benzer şekilde, q ≥ 1 verildiğinde R tablosunun q. sütunu, p ≥ 1 olmak üzere, R’ nin (p, q) formundaki tüm hücrelerindeki girdilerden (artan p sırasında) oluşur.

2.1.19 Tanım. Bir Young tablonun her bir satırındaki girdiler soldan sağa doğru artıyor ve her bir sütunundaki girdiler aşağıya doğru azalmıyor ise, bu Young tabloya standart Young tablo denir.

2.1.20 Örnek. 2.1.17 Örnek’ teki T_2 tablosu standarttır ancak T_1 tablosu standart değildir.

2.2 Düzeltme Kuralı

Bir kısmi sıralı küme üzerinde düzeltme kuralına sahip bir cebir, poset ve kullanışlı özelliklere sahip olan bağıntılar tarafından indekslenen üreteçlerle bir temsili olan cebirdir. Düzeltme kuralına sahip, doğal olarak oluşan birçok cebir örneği vardır.

2.2.1 Tanım. S bir küme ve S üzerinde bir $\mathcal{R}$ bir bağıntısı verilsin. Eğer, $\mathcal{R}$ bağıntısı, yansıyan, ters-simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise, $\mathcal{R}$’ ye S üzerinde kısmi sıralama bağıntısı ve S kümesine kısmi sıralı küme (poset) denir.

2.2.2 Tanım. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_k$ olmak üzere $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$ formundaki çarpıma standart tek terimli denir.

2.2.3 Tanım. (R, +, .) bir halka olsun. (M, +) bir değişmeli grup ve $r, r_1, r_2 \in$ R ve herhangi m, n ∈ M için,

φ : R × M ⟼ M

(r,m) ⟼ r.m

dönüşümü,

(i) $(r_1 + r_2)$.m = r_1.m + r_2.m

(ii) r.(m + n) = r.m + r.n

(iii) $(r_1 . r_2)$.m = r_1.(r_2.m)

koşullarını sağlıyor ise M’ ye bir R - modül denir.

2.2.4 Tanım. A halka ve R bir birimli, değişmeli halka olsun. A, her r ∈ R ve a, b ∈ A için;
r.(ab) = (r.a)b = a(r.b),
özelliğini sağlayan bir sol R – modül ise, A’ ya R – cebiri denir.

2.2.5 Tanım. R bir halka, A bir R – cebiri ve S, A’ yı bir R-cebir olarak üreten sonlu bir poset olsun. Eğer,

(i) A-cebiri, tabanı standart tek terimliler olan serbest bir R - modül

(ii) α, β ∈ S karşılaştırılamaz ve

$\alpha\beta = \sum r_i \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \cdots \gamma_{i_{k_i}}$

ifadesi $0 \neq r_i \in$ R ve $\gamma_{i_1} \leq \gamma_{i_2} \leq \cdots$ olmak üzere standart tek terimlilerin bir lineer kombinasyonu olarak A’ da tek türlü ise her i için $\gamma_{i_1} \leq$ α, β oluyor ise A’ ya, R üzerinde S’ de düzeltme kuralı ile bir cebirdir, denir.

2.2.5 Tanımda (ii)’ deki bağıntılara düzeltme bağıntıları denir.

X = $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\}$ ve U = $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_k}\}$ iki alfabe ve P, k cismi üzerinde $\left(\boldsymbol{x_i} \middle| \boldsymbol{u_j}\right)$ bilinmeyenli polinomlar cebiri olsun. P’ ye harf yerleştirme cebiri denir.

$(\boldsymbol{x_{i_1}}, \boldsymbol{x_{i_2}}, \ldots, \boldsymbol{x_{i_p}})$ ve $(\boldsymbol{u_{j_1}}, \boldsymbol{u_{j_2}}, \ldots, \boldsymbol{u_{j_p}})$**,** X ve U alfabelerinin harflerinden oluşan aynı uzunlukta sonlu iki dizi olsun.

$\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p} \middle| u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_p}\right)$ iç çarpımı, P’ de

$$\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p} \middle| u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_p}\right) = \sum_{\sigma \epsilon \mathcal{g}_p} sgn(\sigma) \left(x_{i\sigma(1)} \middle| u_{j_1}\right) \ldots \left(x_{i\sigma(p)} \middle| u_{jp}\right)$$

ile tanımlanan polinomdur. Burada $\mathcal{g}_p$, p sembollü simetrik grup, sgn(σ) ise σ’ nın işaretidir.

Bu çarpım, x_i ve u_j' lerde bir ters-simetrik fonksiyondur. Böylece işarete bağlı olarak, herhangi bir iç çarpımda, x ve u' ların indislerini artan kabul edebiliriz. Üstelik, bir iç çarpım ancak ve ancak hiç bir harf tekrarlanmıyor ise sıfır değildir.

U kümesi üzerinde, $u_1 < u_2 < \cdots < u_k$ olarak bir tam sıralama tanımlarız. Benzer şekilde, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ olarak, X üzerinde bir tam sıralama tanımlanabilir. Böylece girdileri X ve U' dan olan tablo standart tablo olur.

P' deki bir tek terimlinin içeriği (content), α_s (sırasıyla β_t), $1 \leq j \leq k$ (sırasıyla $(x_i|u_t)$, $1 \leq i \leq n$), $(x_s|u_j)$ formundaki tek terimlilerdeki çarpanların toplam derecesi olmak üzere,

$$(\alpha, \beta) = ((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k))$$

vektör çiftidir. İçeriği (α, β) olan tek terimliler, P(α, β) ile gösterilen P' nin bir alt uzayını üretirler. P(α, β) alt uzayının elemanları, her bir tek terimlisi aynı içeriğe sahip olan homojen elemanlardır.

p ∈ P(α, β) bir polinom olsun. Bu durumda cont(p) = (α, β) yazabiliriz.

p_1 ∈ P(α, β), cont(p_1) = (α, β) ve p_2 ∈ P(α, β), cont(p_2) = (α', β') ise

$p_1.p_2$ ∈ P(α, β) ve cont($p_1.p_2$)=(α, β) + (α', β') = (α + α', β + β') olur.

2.2.6 Örnek. $x_1 < x_2 < x_3$ ve $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ olsun.

$p_1 = (x_2x_3|u_1u_2)$ için,

cont(p_1) = (α, β) = ((0, 1, 1), (1, 1, 0, 0))

$p_2 = (x_1x_2x_3|u_1u_3u_4)$ için,

cont(p_2) = (α', β') = ((1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)).

Buradan;

cont($p_1.p_2$) = ((0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)) + ((1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)

= ((1,2,2),(2,1,1,1)).

2.2.7 Tanım. Bir ikili tablo, aynı şekle sahip, T tablosunun girdileri X alfabesinden ve T' tablosunun girdileri U alfabesinden olan bir $[T, T']$ Young tablolar çiftidir. $[T, T']$ ikili tablosunun içeriği, cont($[T, T']$), α_i' ler T tablosundaki x_i' lerin bulunma sayısı (sırasıyla β_j' ler u_j' lerin T tablosundaki bulunma sayısı) olmak üzere (α, β) vektör çiftidir.

2.2.8 Örnek.

T:

x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	
x_1		

T':

u_1	u_3	u_4
u_1	u_2	
u_3		

Tabloları λ = (3, 2, 1) şekline sahiptir.

cont($[T, T']$) = (α, β) = ((2, 2, 2), (2, 1, 2, 1)).

İçeriği (α, β) olan $[T, T']$ ikili tablosu, (T, T') ile gösterilen ve T' nin her bir satırındaki (iç) çarpımların, T' tablosunda karşılık geldiği satırdakiler ile çarpımlarını alarak elde edilen polinom ile ilişkilendirilebilir. P(α, β)' nın bir elemanı olan (T, T') polinomu, $[T, T']$ ikili tablosunun bideterminantı olarak adlandırılır ve $(T|T')$ olarak gösterilir.

2.2.9 Örnek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_3 & u_4 \\ x_2 & x_3 & & u_1 & u_2 & \\ x_1 & & & u_3 & & \end{array}\right)$$

$(T|T')$ = $((x_1x_2x_3|u_1u_3u_4).(x_2x_3|u_1u_2).(x_1|u_3))$

ifadesine, $[T|T']$ ikili tablosunun bideterminantı denir.

Burada,

$$(x_1x_2x_3|u_1u_3u_4) = \begin{vmatrix} (x_1|u_1) & (x_1|u_3) & (x_1|u_4) \\ (x_2|u_1) & (x_2|u_3) & (x_2|u_4) \\ (x_3|u_1) & (x_3|u_3) & (x_3|u_4) \end{vmatrix}.$$

2.2.10 Not. $(T|T') \neq 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul veya T veya T' tablosundaki herhangi bir satırda harf tekrarı olmamalıdır.

2.2.11 Tanım. $[T, T']$ ikili tablosu, eğer T ve T' tabloları standart ise standart tablodur.

2.2.12 Örnek.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & u_1 & u_2 & u_4 \\ x_1 & x_3 & & ,u_1 & u_3 & \\ x_2 & & & u_3 & & \end{bmatrix}$$

tablosu, standart ikili tablodur.

2.2.13 Teorem. $[T, T']$, λ parçalanışının şekline sahip ve içeriği (α, β) olan bir ikili tablo olsun. Bu durumda, $(T|T')$ bideterminantı, tam sayı katsayılı, aynı içeriğe, aynı veya daha uzun şekle sahip standart ikili tabloların bideterminantlarının bir lineer kombinasyonudur.

İspat. [7].

2.2.14 Örnek. $\begin{bmatrix} x_2 & u_1 \\ x_1, & u_2 \end{bmatrix}$ ikili tablosunu alalım.

cont($[T, T']$) = ((1, 1), (1, 1))

$(T|T') = \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right) - (x_1x_2|u_1u_2)$

$= (x_1|u_1)(x_2|u_2) - \begin{vmatrix} (x_1|u_1) & (x_1|u_2) \\ (x_2|u_1) & (x_2|u_2) \end{vmatrix}.$

2.2.15 Sonuç. P(α, β) vektör uzayı, içeriği (α, β) olan standart ikili tabloların bidetermintları tarafından üretilir.

2.3 Matrisler ve Genelleştirilmiş Young Tablolar

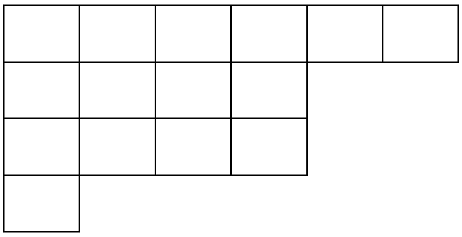
Matrislerin ilgili satır ve sütunları kullanılarak Young tablolara geçiş yapmak mümkündür. Böylece matrisler ve Young tablolar arasında bir ilişki kurulmuş olur.

2.3.1 Tanım. $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m \geq 1$ olmak üzere şekli, $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ parçalanışının şekli olan genelleştirilmiş Young tablo, monoton azalmayan satırlara ve kesin artan sütunlara sahip olan, girdileri y_{ij} ($1 \leq j \leq p_i$, $1 \leq i \leq m$) pozitif tam sayılarının olduğu bir Y dizisidir.

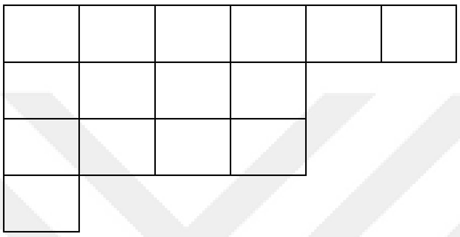
Bir başka deyişle, şekli, $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ parçalanışının şekli olan bir genelleştirilmiş Young tablo, yine, $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m$ koşulu sağlanmak üzere, i. satırı p_i elemanlı ve m tane sola dayalı satırı olan $p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ pozitif tam sayılarının bir dizisidir. Her bir satırdaki sayılar soldan sağa azalmayandır ve her bir sütundakiler yukarıdan aşağıya kesin artandır.

2.3.2 Örnek.

P :



Q :



tabloları, şekli (6, 4, 4, 1) parçalanışının şekli olan (P, Q) genelleştirilmiş Young tablolarıdır.

A, girdileri negatif olmayan tam sayılar olan bir m×n matris olsun. P ve Q aynı şekle sahip olmak üzere, genelleştirilmiş Young tabloların (P, Q) sıralı ikilileri ile A matrisi arasında birebir karşılık gelme vardır. Burada, i tam sayısı Q' da tam olarak $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$ kez ve j tam sayısı, P' de tam olarak $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}$ kere oluşur.

2.3.3 Örnek.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini alalım. A' nın ilgili sütunlarının toplamı,

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = (3, 2, 3, 2, 1, 3, 1)$$

ve ilgili satırlarının toplamı,

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) = (1, 2, 5, 2, 4, 1).$$

Q :

1	2	2	3	3	6
3	3	3	4		
4	5	5	5		
5					

A mattrisinden $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ = (1, 2, 5, 2, 4, 1) olduğunu biliyoruz. Q = (6, 4, 4, 1) parçalanışının tablosunda,

i = 1, Q’ da r_1 = 1 kere

i = 2, Q’ da r_2 = 2 kere

i = 3, Q’ da r_3 = 5 kere

i = 4, Q’ da r_4 = 2 kere

i = 5, Q’ da r_5 = 4 kere

i = 6, Q’ da r_6 = 1 kere bulunmaktadır.

P :

1	1	1	2	4	7
2	3	3	5		
3	4	6	6		
6					

A matrisinden $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$ = (3, 2, 3, 2, 1, 3, 1) olmasından ve P = (6, 4, 4, 1) parçalanışının tablosundan,

j = 1, P’ de c_1 = 3 kere

j = 2, P’ de c_2 = 2 kere

j = 3, P’ de c_3 = 3 kere

j = 4, P’ de c_4 = 2 kere

j = 5, P’ de c_5 = 1 kere

j = 6, P’ de c_6 = 3 kere

j = 7, P’ de c_7 = 1 kere bulunmaktadır.

2.3.4 Örnek. B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

matrisini alalım. B’ nin ilgili sütunlarının toplamı,

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (2, 1, 2, 1, 1)$$

ve ilgili satırlarının toplamı,

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)=(1,3,1,1,1).$$

P :

1	1	3
2	4	
3		
5		

P = (3, 2, 1, 1)

Q :

1	2	2	4
2	5		
3			

Q = (4, 2, 1).

Şekilleri üstteki örnekteki gibi birbirinin transpozu olan iki genelleştirilmiş Young tablo ile girdileri 0 ve 1 olan matrisler arasında da birebir karşılık gelme vardır.

2.4 Permütasyonlar ve Genelleştirilmiş Young Tablolar

Negatif olmayan tam sayıların bir A matrisi ile pozitif tam sayıların, (u_k, v_k) ikilileri soldan sağa azalmayan alfabetik sıralı ve (i, j) ikilisi tam olarak a_{ij} bulunuşu var iken,

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \ldots & u_N \\ v_1 & v_2 \ldots & v_N \end{pmatrix}$$

iki sıralı dizileri arasında bir karşılık gelme olduğu açıktır.

2.4.1 Örnek. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisini alalım.

i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 olmak üzere,

(u_k, v_k)	(u_k, v_k)
(1, 1) için $a_{11} = 0$	(4, 1) için $a_{41} = 0$
(1, 2) için $a_{12} = 0$	(4, 2) için $a_{42} = 0$
(1, 3) için $a_{13} = 1$	(4, 3) için $a_{43} = 1$
(1, 4) için $a_{14} = 0$	(4, 4) için $a_{44} = 0$
(1, 5) için $a_{15} = 0$	(4, 5) için $a_{45} = 1$
(1, 6) için $a_{16} = 0$	(4, 6) için $a_{46} = 0$
(1, 7) için $a_{17} = 0$	(4, 7) için $a_{47} = 0$
(2, 1) için $a_{21} = 0$	(5, 1) için $a_{51} = 2$
(2, 2) için $a_{22} = 0$	(5, 2) için $a_{52} = 1$
(2, 3) için $a_{23} = 0$	(5, 3) için $a_{53} = 0$
(2, 4) için $a_{24} = 0$	(5, 4) için $a_{54} = 1$
(2, 5) için $a_{25} = 0$	(5, 5) için $a_{55} = 0$
(2, 6) için $a_{26} = 2$	(5, 6) için $a_{56} = 0$
(2, 7) için $a_{27} = 0$	(5, 7) için $a_{57} = 0$
(3, 1) için $a_{31} = 1$	(6, 1) için $a_{61} = 0$
(3, 2) için $a_{32} = 1$	(6, 2) için $a_{62} = 0$
(3, 3) için $a_{33} = 1$	(6, 3) için $a_{63} = 0$
(3, 4) için $a_{34} = 1$	(6, 4) için $a_{64} = 0$
(3, 5) için $a_{35} = 0$	(6, 5) için $a_{65} = 0$
(3, 6) için $a_{36} = 1$	(6, 6) için $a_{66} = 0$
(3, 7) için $a_{37} = 0$	(6, 7) için $a_{67} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böyle iki sıralı dizilere, genelleştirilmiş permütasyonlar denir. A matrisi sadece 0 ve 1' den oluşursa, iki sıralı dizideki (u_k, v_k) ikililerinin hepsi farklı olur.

3. SCHENSTED ALGORİTMASI

Craige Schensted, 1961' de, iki satırlı dizilerin $1 \leq k \leq N$ için u_k = k özel durumunu ele aldı [10]. Bu özel durumda A, N – satırlı sıfır-bir matris ve her satır toplamı 1' e eşittir. Schensted' in algoritması, A matrisinin yer değiştirmesinin P ve Q' nun yer değiştirmesine karşılık geldiği sonucuna varmamızı sağlar. Dolayısıyla simetrik olan matrisler ile Young tablolar arasında kullanışlı birebir denklik elde edilir. Schensted algoritmaları her biri önceden doğrulanmış iddialar ile kolayca doğrulanan mevcut durum hakkında parantez içinde iddialar içerir. Bu nedenle, algoritmanın kendisi sunulurken aynı zamanda algoritmanın geçerliliğinin ispatı da verilir [11].

Şimdi Schensted' in algoritmasını vereceğiz.

Şekli $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ olan bir Y genelleştirilmiş Young tabloyu, i = 0 veya j = 0 ise, y_{ij} = 0; i > m veya j < p_i ise, y_{ij} = ∞ ve 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ p_i iken $y_{ij} \neq \infty$ olan bir

$$Y: \quad \begin{array}{|cccc} \hline y_{00} & y_{01} & y_{03} & \cdots \\ y_{10} & y_{11} & y_{13} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

dizisi ile gösterilebilir.

Tabloyu üstte ve solda sıfırlar ile sınırlandırıyoruz ve bunun dışındakilere ∞ sembolü yerleştiriyoruz. ∞ < ∞ kuralını kullanarak bu dizi, her i, j ≥ 0 için

$$y_{ij} \leq y_{i(j+1)},\ y_{ij} < y_{(i+1)j}$$

eşitsizliklerini sağlar.

3.1 Ekleme Algoritması

Schensted ekleme algoritması, bir genelleştirilmiş Young tablolaya yeni bir pozitif bir tam sayı eklemek için kullanılır.

3.1.1 (x) Eklemek

$\boldsymbol{I_1}$**.** i = 1, x_1 = x ve

y_{ij} = ∞ olacak şekilde bir j değeri alınır.

$\boldsymbol{I_2}$**.** ($y_{(i-1)j} < x_i < y_{ij}$ ve $x_i \neq \infty$).

Eğer, x_i < $y_{i(j-1)}$ ise, j' yi 1 azalt ve bu adımı tekrarla. Diğer durumda x_{i+1} = y_{ij} ve r_i = j al.

$\boldsymbol{I_3}$**.** ($y_{i(j-1)} \leq x_i \leq x_{i+1} = y_{ij} \leq y_{i(j+1)}$,

$y_{(i-1)j} < x_i < x_{i+1} = y_{ij} < y_{(i+1)j}$

r_i = j ve $x_i \neq \infty$).

$y_{ij} = x_i$ al.

$\boldsymbol{I_4}$**.** ($y_{i(j-1)} \leq y_{ij} = x_i < x_{i+1} \leq y_{i(j+1)}$,

$y_{(i-1)j} < y_{ij} = x_i < x_{i+1} < y_{(i+1)j}$, r_i = j, $x_i \neq \infty$).

Eğer $x_{i+1} \neq \infty$ ise, i' yi 1 attır ve I_2 adımına geri dön.

$\boldsymbol{I_5}$**.** s = i ve t = j ve algoritmayı sonlandır.

($y_{st} \neq \infty$, $x_{s+1} = y_{s(t+1)} = y_{(s+1)t} = \infty$ sağlanır.)

I_3 ve I_4 adımlarındaki parantez içindeki ifadeler, algoritma boyunca Y' nin bir genelleştirilmiş Young tablo olarak kaldığını doğrular. Y, sonlu tane pozitif tam sayı içerdiğinden algoritma sonlu adımda durur. Bu yöntem, tabloya sadece bir x sayısı eklemek için değildir, aynı zamanda

$$x = x_1 < x_2 < \ldots < x_s$$

$$r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_s = t$$

pozitif tam sayılarının bu iki dizisinin oluşturulmasını sağlar.

3.1.2 Örnek.

Y :

1	3	3	5	8
2	4	6	6	
3	5	8		
4				

Young tablosuna x = 3 sayısını ekleyelim.

$\boldsymbol{I_1}$**.** i = 1, x_1 = x = 3

i = 0 veya j = 0 ⇒ y_{ij} = 0

i > 4 veya j < p_1 = 5 ise $y_{ij} = \infty$

Tablodan y_{11} = 1.

$\boldsymbol{I_2}$**.** j = 1 olduğunda

$y_{01} < x_1 < y_{11}$ için 0 < 3 < 1 durumu sağlanmaz.

$y_{04} < x_1 < y_{14}$ için 0 < 3 < 5 durumu sağlandığından j = 4 olmalı.

$x_1 < y_{13}$ için 3 < 3 durumu sağlanmaz.

$x_2 = y_{14} = 5$ olmalı.

$r_1 = 4$ olur.

i = 2 alalım. O halde,

$x_2 = 5$ ve j = 3 olmalı.

$x_3 = y_{23} = 6$ ve $r_2 = 3$ olur.

i = 3 alalım. O halde,

$x_3 = 6$ ve j = 3 olduğunda $x_4 = y_{33}$ =8 ve $r_3 = 3$ olur.

$\Rightarrow x_4 = 8$.

i = 4 alalım. O halde,

j = 3 olduğunda $x_4 < y_{42}$ için 8 < ∞ durumu sağlanır.

j = 2 durumunda da $r_4 = 2$ ve s = 4, t = 2 olur.

Bu durumda Y Young tablosu,

1	3	3	3	8
2	4	5	6	
3	5	6		
4	8			

Young tablosuna dönüşür.

Schensted ekleme algoritmasının en önemli özelliği, bir tersinin olmasıdır : Y tablosunu ilk durumuna geri getirebiliriz.

3.2 Silme Algoritması

Schensted silme algoritması, ekleme algoritmasını tersine çalıştırarak tabloyu ekleme algoritması uygulanmadan önceki haline çevirir.

3.2.1 (s,t)' yi Silmek

$\boldsymbol{D_1}$**.** j = t, i = s, $x_{s+1} = \infty$.

$\boldsymbol{D_2}$**.** ($y_{ij} < x_{i+1} < y_{(i+1)j}$ ve $y_{ij} \neq \infty$).

Eğer, $y_{i(j+1)} < x_{i+1}$ ve $y_{i(j+1)} \neq \infty$ ise, j' yi 1 arttır ve bu adımı tekrarla. Diğer durumda, $x_i = y_{ij}$ ve r_i = j al.

$\boldsymbol{D_3}$**.** ($y_{i(j-1)} \leq y_{ij} = x_i < x_{i+1} \leq y_{i(j+1)}$, $y_{(i-1)j} < y_{ij} = x_i < x_{i+1} < y_{i(j+1)}$,

r_i = j ve $x_i \neq \infty$).

y_{ij}=x_{i+1} al.

$\boldsymbol{D_4}$**.** ($y_{i(j-1)} \leq x_i < x_{i+1} = y_{ij} \leq y_{i(j+1)}$, $y_{(i-1)j} < x_i < x_{i+1} = y_{ij} < y_{(i+1)j}$,

r_i = j ve $x_i \neq \infty$).

Eğer i ≠ 1 ise, i' yi 1 azalt ve D_2 adımına geri dön.

$\boldsymbol{D_5}$**.** x = x_1 al ve algoritmayı sonlandır. (x ≠ ∞ olmalı).

Y tablosu, sonlu tane pozitif tam sayı içerdiğinden algoritma belli bir yerden sonra durur.

3.3 Birebir Karşılık Gelme

P ve Q iki Young tablo olsun. P' nin elemanları $v_1, v_2, \dots, v_N$ ve yine Q' nun elemanları $u_1, u_2, \dots, u_N$ iken aynı şekle sahip (P, Q) genelleştirilmiş Young tablo sıralı çifti ile, soldan sağa azalmayan alfabetik olarak sıralanmış (u_k,v_k) pozitif tam sayı çiftlerinin oluşturduğu

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{pmatrix}$$

iki sıralı dizileri arasındaki birebir karşılık gelmeyi verelim.

A' yı oluşturacak olan prosedür, boş bir tablo ile başlar : ∀ i, j ≥ 1 için,

$$p_{00} = p_{0j} = p_{i0} = 0,\ p_{ij} = \infty,$$

$$q_{00} = q_{0j} = q_{i0} = 0,\ q_{ij} = \infty.$$

Üstteki inşa etmeden, ekleme algoritması ∞' u tablonun s satırı ve t sütunundan ortadan kaldırdığı için P ve Q tabloları aynı şekle sahiptirler.

$k = 1, 2, \ldots, N$ için aşağıdaki adımları izleyelim.

$\boldsymbol{A_1}$**.** I_5 adımındaki $\mathrm{s_k}, \mathrm{t_k}$ değerlerini belirlemek için P tablosuna (v_k) ekle.

$\boldsymbol{A_2}$**.** $\mathrm{q}_{\mathrm{s_k t_k}} = \mathrm{u_k}$ al.

B yapısı olarak adlandıracağımız ters yapı, $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ parçalanışının şekline sahip olan iki genelleştirilmiş P ve Q Young tabloları ile başlar. $N = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ toplam eleman sayısı olsun. $k = N, \ldots, 2, 1$ için aşağıdaki adımları izliyoruz.

$\boldsymbol{B_1}$**.** $\mathrm{t_k}$ mümkün olduğunca büyük iken, $\mathrm{q}_{\mathrm{s_k t_k}}$, Q' nun en büyük tam sayısı olacak şekilde $\mathrm{s_k}$, $\mathrm{t_k}$ bul. $\mathrm{u_k} = \mathrm{q}_{\mathrm{s_k t_k}}$ al ve sonrasında $\mathrm{q}_{\mathrm{s_k t_k}} = \infty$ al.

$\boldsymbol{B_2}$**.** P tablosundan $(\mathrm{s_k}, \mathrm{t_k})$' yı sil, D_5 adımında bir x değeri belirleyerek $\mathrm{v_k}$ = x al.

Bu algoritma, A yapısını tersine çevirir. Böylece, birebir karşılık gelme kurulmuş olur.

3.3.1 Teorem. Birbirinin tersi olan A ve B yapıları, iki satırlı diziler ile yukarıda belirtilen özelliklere sahip genelleştirilmiş Young tablolar arasında birebir bir karşılık gelme kurar.

4. DETERMİNANTSAL HALKALAR

Determinantsal halkalar cebirsel geometride klasik cebirsel varyetelerin koordinat halkaları olarak ortaya çıkarlar. Cebirsel açıdan, bu halkalar, düzeltme kuralına sahip derecelendirilmiş cebirlerdir [15].

4.1 Değişmeli Halkalarda Matrisler

4.1.1 Tanım. R değişmeli bir halka olmak üzere

$M_{m\times n}$(R) = $\{[a_{ij}] \mid a_{ij} \in R, i = 1,2,\dots,m \ ve \ j = 1,2,\dots,n\}$

kümesine girdileri R halkasından olan m×n matrisler kümesi denir.

A = $[a_{ij}]$, B = $[b_{ij}]$, r∈R alalım. $M_{m\times n}$(R) üzerinde toplama işlemi,

A + B = $[a_{ij}]$ + $[b_{ij}]$ = $[a_{ij} + b_{ij}]$

ve skaler ile çarpım,

r.A = r.$[a_{ij}]$ = $[r.a_{ij}]$

olarak tanımlanır.

$M_{m\times n}$(R) kümesinin bu toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir R – modüldür.

i = 1, 2, …, m ve j = 1, 2, …, n için,

$$E_{ij} = [e_{ij}]_{pq} = \begin{cases} 1, & (p,q) = (i,j) \\ 0 & (p,q) \neq (i,j) \end{cases}$$

olur.

A = $[a_{ij}] \in M_{m\times n}$(R) olsun. i = 1,2,…,m; j = 1, 2, …, n ve a_{ij} ∈ R olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{11}.\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{1n}.\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\ldots + a_{m1}.\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{mn}.\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

A = $a_{11}.E_{11} + \ldots + a_{1n}.E_{1n} + \ldots + a_{m1}.E_{mn} + \ldots + a_{mn}.E_{mn}$

A = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.E_{ij}$

olarak yazılabilir. $\{E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$, $M_{m\times n}$(R)' nin tabanıdır. Buradan, $M_{m\times n}$(R)' nin sonlu üretilmiş serbest R - modül olduğunu söyleyebiliriz.

Bir serbest R-modülün rankı, modülün bazındaki üreteç sayısı olduğundan

rank($M_{m\times n}$(R)) = m.n

olur.

4.1.2 Tanım. S_n, n - li tüm permütasyonların kümesi ve $\sigma \in S_n$ olsun.

i < j ve σ(i) > σ(j)

ise (σ(i), σ(j)) ikilisine, σ permütasyonunun bir inversiyonu denir.

4.1.3 Tanım. $\sigma \in S_n$ olmak üzere σ permütasyonunun inversiyon sayısı m ise $(-1)^m$ sayısına σ permütasyonunun işareti denir. sgn(σ) ile gösterilir.

4.1.4 Tanım. σ permütasyonunun işareti -1 ise bu permütasyona tek permütasyon, +1 ise çift permütasyon denir.

4.1.5 Tanım. A = $[a_{ij}] \in M_{n\times n}$(R) olsun. A matrisinin determinantı,

detA = $\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma).a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$

olarak tanımlanır.

4.1.6 Tanım. A $\in M_{m\times n}$(R) ve 1 ≤ t ≤ min$\{m, n\}$ olsun. A matrisinin t×t alt matrisi, A matrisinden t satır ve t sütun seçilerek elde edilir. A matrisinin t×t - minörü Δ(delta), A' nın t×t alt matrisinin determinantıdır.

$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq$ m ve $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq$ n olduğunu varsayalım. Özellikle hangi satırlar ve sütunlar alındığını belirtmek istiyorsak,

$$\Delta(i_1, \ldots, i_t, j_1, \ldots, j_t)$$

yazarız.

4.1.7 Örnek. R = $\mathbb{Z}$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 4}(\mathbb{Z})$$

matrisini alalım.

$\Delta(1; 1) = \det([1]) = 1$ $\quad$ $\Delta(2; 3) = \det([-1]) = -1$

$\Delta(1, 2; 1, 2) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -2$ $\quad$ $\Delta(1, 2; 1, 4) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = -4.$

I, R halkasının bir ideali olsun.

$M_{n\times n}(\mathrm{I}) = \left\{A \in M_{n\times n}(R) \mid a_{ij} \in I, \forall i, j = 1,2, \ldots, n\right\}$

kümesini alalım. $M_{n\times n}$(I), ($M_{n\times n}(R)$, +, .) halkasının bir idealidir. $M_{n\times n}$(R) kümesinin tüm idealleri bu formdadır.

4.1.8 Teorem. J, $M_{n\times n}$(R) halkasının bir ideali olsun. Bu durumda, R halkasının bir tek I ideali, J = $M_{n\times n}$(I) formundadır.

İspat. [11].

4.2 Minörler ve Determinantsal İdealler

R değişmeli ve birimli bir halka olmak üzere, A=$\left[u_{ij}\right] \in M_{m\times n}$(R) bir matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}, u_{ij} \in R, \text{ i=1, 2, …, m}$$

ve j = 1, 2, …, n, $a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t$ indisler, $1 \leq a_i \leq$ m, $1 \leq b_i \leq$ n olmak üzere,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_t \quad | \quad b_1, b_2, \ldots, b_t] = \det\begin{pmatrix} u_{a_1 b_1} & \cdots & u_{a_1 b_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_t b_1} & \cdots & u_{a_t b_t} \end{pmatrix}$$

olarak gösterilir. Burada $a_1, a_2, \ldots, a_t$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_t$' ler artan sırada olması zorunlu değildir.

$[a_1, a_2, \ldots, a_t \quad | \quad b_1, b_2, \ldots, b_t]$ sembolünün iki anlamı vardır: Birisi yukarıda tanımlanan, diğeri ise negatif olmayan tam sayıların sıralı t-li çiftleri olarak $[a_1, a_2, \ldots, a_t \quad | \quad b_1, b_2, \ldots, b_t] \in N^t \times N^t$ ifadesidir. Burada,

i) $t > \min(m, n) \Rightarrow [a_1, a_2, \ldots, a_t \quad | \quad b_1, b_2, \ldots, b_t] = 0$,

ii) $[\emptyset \quad | \quad \emptyset] = 1$.

4.2.1 Tanım. A = $[u_{ij}] \in M_{m \times n}$(R) bir matris ve i = 1, 2, …, t için $1 \leq a_i \leq$ m ve $1 \leq b_i \leq$ n olmak üzere $a_1, a_2, \ldots, a_t$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_t$ indislerini alalım. Eğer, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_t$ ve $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_t$ ise, $[a_1, a_2, \ldots, a_t \quad | \quad b_1, b_2, \ldots, b_t]$ determinantına A' nın t - minörü denir. t' ye $[a_1, a_2, \ldots, a_t \quad | \quad b_1, b_2, \ldots, b_t]$' nin uzunluğu denir.

t = min(m, n) için m ≤ n kabul edeceğimizden,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_m] = [1,2, \ldots, m \quad | \quad a_1, a_2, \ldots, a_m]$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gösterimini kullanacağız.

m - minörlere maksimal minörler ve m - 1 uzunlukta olanlara alt maksimal minörler denir.

4.2.2 Tanım. R = k$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom halkası ve A, R' de bir matris olsun. Herhangi bir 0 ≤ r ≤ min$\{m, n\}$ için, A' nın r. determinantsal ideali, A matrisinin r×r - minörleri ile üretilen idealidir ve bu ideal DI_r(A) ile gösterilir.

4.2.3 Not.

i) r = 0 ⇒ A' nın 0×0 – minörü = 1

⇒ DI_0(A) = $\langle 1 \rangle$ = k$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

ii) r = 1 ⇒ A' nın 1×1 - minörü = DI_1(A) = A' nın girdileri ile üretilir.

Dikkat edilirse,

k$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ = DI_0(A) ⊇ DI_1(A) ⊇ … ⊇ $DI_{min\{m,n\}}$(A)

olur.

4.2.4 Örnek. R = k$[x, y]$ polinom halkası için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & x & 1 \\ 0 & y & 1 & 1 \\ x & y & y & 1 \\ 0 & x & y & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times4}(\mathrm{R})$$

matrisini alalım.

DI_0(A) = k$[x, y]$,

DI_1(A) = $\langle x, y, 1 \rangle$ = k$[x, y]$,

DI_2(A) = $\langle x, x-1, y, y-1, y-x, x^2, yx, yx-x, yx-x^2, y^2-x, y^2-y, y^2-xy \rangle$

= k$[x, y]$.

4.3 Gröbner Bazlar ve Determinantsal İdealler

k bir cisim, A∈ $M_{m\times n}$(k) ve k$[A]$, A = $[a_{i,j}]$ matrisinin girdileri ile üretilen polinom halkası olsun. r ≤ min(m, n) pozitif tam sayı olmak üzere, k$[A]$ halkasında, A matrisinin r×r – minörleri ile üretilen DI_r = DI_r(A) idealini düşünelim. A matrisinin minörleri için

$$[l_1\ l_2 \ldots l_s \quad | \quad p_1\ p_2 \cdots p_s] = \begin{vmatrix} a_{l_1,p_1} & a_{l_1,p_2} & \cdots & a_{l_1,p_s} \\ a_{l_2,p_1} & a_{l_2,p_2} & \cdots & a_{l_1,p_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l_s,p_1} & a_{l_s,p_2} & \cdots & a_{l_s,p_s} \end{vmatrix}$$

notasyonunu kullanalım. $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_v$ ve her i, j için $l_{i,j} < l_{i,j+1}$ ve $p_{i,j} < p_{i,j+1}$ olmak üzere minörlerin

$$T = [l_{11}\ l_{12} \ldots l_{1s_1} \quad | \quad p_{11}\ p_{12} \cdots p_{1s_1}].[l_{21}\ l_{22} \ldots l_{2s_2} \quad | \quad p_{21}\ p_{22} \cdots p_{2s_2}]$$

$\ldots\left[l_{v1}\, l_{v2} \ldots l_{vs_v} \quad | \quad p_{v1}\, p_{v2} \cdots p_{vs_v}\right]$

çarpımına Young ikili tablosu denir. s_1 tam sayısı, T ikili tablosunun uzunluğudur. Her i, j için $l_{i,j} \leq l_{i+1,j}$ ve $p_{i,j} \leq p_{i+1,j}$ olduğunda, T standart ikili tablodur.

4.3.1 Tanım. k$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom halkasında, a = $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ vektörü için

m = $X^a = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2} \ldots {x_n}^{a_n}$

çarpımına bir tek terimli denir. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ toplamına, m tek terimlisinin derecesi denir ve der(m) ile gösterilir.

Aynı dereceden tek terimliler ile standart ikili tablolar arasında birebir bir karşılık gelme vardır [11]:

m = $\prod_{i=1}^{d} x_{l_i, p_i}$ tek terimlisi, $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_d$ ve eğer $l_i = l_{i+1}$ iken $p_i \leq p_{i+1}$ olmak üzere, bir tek

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_d \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_d \end{matrix}$$

genelleştirilmiş permütasyonuna karşılık gelir.

$p_1, p_2, \ldots, p_d$ dizisinde en uzun kesin artan $p_{i_1} > p_{i_2} > \cdots > p_{i_w}$ alt dizisinin uzunluğuna m tek terimlisinin genişliği denir ve gen(m) ile gösterilir.

4.3.2 Önerme. k$[X]$ polinom halkasında tüm tek terimliler ile tüm standart ikili tablolar arasında

φ : M $\longmapsto$ T

dönüşümü

(i) der(m) = der(T)

(ii) gen(m) = uzunluk(T)

olmak üzere bir birebir karşılık gelmedir.

İspat. [11].

Bir idealin Gröbner bazı, ideale karşılık gelen çeşitli invaryantların, en yüksek dereceli tek terimlileri aracılığıyla hesaplanmasını sağlayan özel bir üreteç kümesidir. Tek terimli sıralamaları ve Gröbner bazlar ile ilgili tanımlar ve algoritmalar için [16] temel kaynak olarak verilebilir.

4.3.3 Tanım. I, k$[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom halkasında bir ideal, G, I idealinin Gröbner bazı olsun.

(i) ∀g ∈ G için LC(g) = 1

(ii) ∀ g ∈ G için g polinomunun hiçbir terimi LT(G \ $\{g\}$)' nin bir elemanı değil ise, G' ye I idealinin indirgenmiş Gröbner bazı denir. Burada, LC(g), g polinomunun en yüksek dereceli teriminin katsayısı ve LT(g), g polinomunun en yüksek dereceli terimidir.

Sturmfels, [3] makalesinde, determinantsal ideallerin indirgenmiş Gröbner bazlarını hesaplamak için oldukça etkili bir algoritma vermiştir:

4.3.4 Teorem. A = $(a_{i,j})$ ∈ $M_{m\times n}$(k) matrisinin, (r + 1) × (r + 1) – minörlerinin kümesi $a_{1,n} > a_{1,n-1} > \cdots > a_{1,1} > a_{2,n} > a_{2,n-1} > \cdots > a_{2,1} > \cdots > a_{m,n} > a_{m,n-1} > \cdots > a_{m,1}$ olmak üzere alfabetik tek terimli sıralamasına göre, DI_r(A) idealinin indirgenmiş Gröbner bazıdır.

İspat. [3].

4.3.5 Örnek. R = k$[x, y]$ halkasında

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & x & 1 \\ 0 & y & 1 & 1 \\ x & y & y & 1 \\ 0 & x & y & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathrm{R})$$

matrisini alalım. r = 1 olsun.

4.2.4 Örnek' ten A matrisinin (1 + 1) × (1 + 1) = 2 × 2 – minörlerinin kümesinin

G = $\{x, x-1, \dots, y^2 - xy\}$

olduğunu biliyoruz. x, x - 1 ∈ G ve 1.x + (-1).(x – 1) = 1 olduğundan 1 ∈ $\langle G \rangle$ bulunur. Böylece,

$\langle G \rangle$ = $\langle 1 \rangle$ = k$[x, y]$

olur. 4.3.4 Teorem' den DI_1(A) = k$[x, y]$ yazabiliriz.

r = 2 alalım. (2 + 1) × (2 + 1) = 3 × 3 – minörlerinin kümesi

G = $\{x^2, x^2 - x, yx, yx - x, yx - x^2, y^2 - yx - y + x, y^2 - 2yx + x^2, y^2 - yx + x^2 - x, yx^2 - x^2, yx^2 - x^3, y^2x - x^2\}$

olarak bulunur. x^2, $x^2 - x \in$ G ve x^2 + (-1)($x^2 - x$) = $x^2 - x^2 + x = x$ olduğundan x ∈ $\langle G \rangle$. Böylece, $x^2 = x.x \in \langle G \rangle$.

$y^2 - 2yx + x^2$, $y^2 - yx - y + x \in$ G. Buradan,

$(y^2 - 2yx + x^2)$ + (-1)($y^2 - yx - y + x$) = $y^2 - 2yx + x^2$ - $y^2 + yx + y - x$

= - yx + x^2 + y – x ∈ $\langle G \rangle$.

Yine, x^2, x, yx ∈ $\langle G \rangle$ olmasından

(- yx + x^2 + y – x) + (-1).x + 1.x + 1.yx = -yx + x^2 + y – x - x^2 + x + yx

= y ∈ $\langle G \rangle$

olur. Buradan, x, y ∈ $\langle G \rangle$ bulunur. Böylece, $\langle G \rangle = \langle x, y \rangle$. 4.3.4 Teorem' den, $\{x, y\}$, DI_2(A) idealinin Gröbner bazıdır ve DI_2(A) = $\langle x, y \rangle$ elde edilir.

5. KAYNAKLAR

[1] J.A. Eagon and M. Hochster, "Cohen-Macaulay Rings, Invariant Theory, and the Generic Perfection of Determinantal Loci", *American Journal of Matematics*, 93, 1971.

[2] J.A. Eagon and N.G. Nortcott, "Ideals Defined by Matrices and a Certain Complex Associated with them" *Proceedings of the Royal Society of London*, 269, 188-204, 1962.

[3] B. Sturmfels, "Gröbner Bases and Stanley Decompositions of Determinantal Rings", *Mathematische Zeitschrift*, 205, 137-144, 1990.

[4] A. Young, "The Application of Substitutional Analysis to Invariants", *Philosophical Transactions of The Royal Society a*, 234, 79-114, 1935.

[5] R.M. Miró-Roig, Determinantal Ideals, Progress in Mathematics, 264, Birkhäuser, 2008.

[6] N. Tutaş, H.İ. Karakaş and N. Gümüşbaz, "Young Tableaux and Arf Partitions", Turkish Journal of Mathematics, 43, 448-459, 2019.

[7] J. Désarménien, J.P.S. Kung and G.C. Rota, "Invariant Theory, Young Bitableaux, and Combinatorics", *Advances in Mathematics*, 27, 63-92, 1978.

[8] D. Eisenbud, *Ring Theory and Algebra III*, Marcel Dekker, 1980.

[9] A.O. Asar, A. Arıkan, Aynur and A. Arıkan, *Cebir*, Gazi Kitabevi, 2012.

[10] C. Schensted, "Longest Increasing and Decreasing Subsequences", *Canadian Journal of Mathematics*, 13, 179-191, 1961.

[11] J. P. S. Kung, *Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory and Algebra,* Academic Press, 1982.

[12] D. E. Knuth, "Permutations, Matrices and Generalized Young Tableaux", *Pacific Journal of Mathematics*, 34, 709-727, 1970.

[13] M.C. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, 1993.

[14] A. Sabuncuoğlu, Lineer Cebir, Nobel, 2016.

[15] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[16] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer-Verlag, 1992.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Pelin Atmaca

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2022
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2019
Lise	Hasan Ali Yücel Anadolu Lisesi	2015