TWIN METRİKLE BOZULMUŞ SASAKİ-MOK METRİĞİNE SAHİP ÇATI DEMETLERİNİN GEOMETRİSİ

Ayşe TORUN

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2022

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TWIN METRİKLE BOZULMUŞ SASAKİ-MOK METRİĞİNE SAHİP ÇATI DEMETLERİNİN GEOMETRİSİ

(Geometry of Frame Bundles with Sasaki-Mok Metric Deformed By Twin Metric)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe TORUN

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Erzurum

Ağustos, 2022

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Graduate School of Natural and Applied Sciences

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

TWİN METRİKLE BOZULMUŞ SASAKİ-MOK METRİĞİNE SAHİP ÇATI DEMETLERİNİN GEOMETRİSİ

Prof. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Ayşe TORUN tarafından hazırlanan bu çalışma,24/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Doç. Dr. Çağrı KARAMAN	
	Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır.
Danışman:	Prof. Dr. Aydın GEZER	
	Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır.
Jüri Üyesi:	Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI	
	Erzurum Teknik Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır.

Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …… sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Saltuk Buğrahan CEYHUN
Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır.

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında sunulan "**Twin Metrikle Bozulmuş Sasaki-Mok Metriğine Sahip Çatı Demetlerinin Geometrisi**" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	**Tezin Benzerlik Oranı (%)**	**Maksimum Oran (%)**
Giriş	*5*	**30**
Kuramsal Temeller	*15*	**30**
Materyal ve Yöntem	*14*	**35**
Araştırma Bulguları ve Tartışma	*0*	**20**
Sonuç ve Öneriler	*0*	**20**
Tezin Geneli	*9*	**25**

***Not:** Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının **%5'den** büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	**Tez Danışmanı**
Ayşe TORUN	Prof.Dr. Aydın GEZER
24.8.2022	**24.8.2022**
İmza: Aslı Islak İmzalıdır.	İmza: Aslı Islak İmzalıdır.

***** Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez çalışmamın hazırlanmasında her zaman bana araştırma ve geliştirme konusunda yol gösterici ve öğretici olan engin bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen beraber çalışmaktan gurur duyduğum ve çok şey öğrendiğim, değerli hocam, danışmanım Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e anlayışı ve desteklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte desteklerini her zaman gördüğüm değerli fikir ve bilgilerinden istifade ettiğim Sayın Doç. Dr. Çağrı KARAMAN'a, Sayın Dr. Olgun DURMAZ'a ve doktora öğrencisi Sayın Erkan Karakaş'a çok teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olup göstermiş oldukları güven ve destek için aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ayşe TORUN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TWIN METRİKLE BOZULMUŞ SASAKİ-MOK METRİĞİNE SAHİP ÇATI DEMETLERİNİN GEOMETRİSİ

Ayşe TORUN

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Amaç: Bu çalışmada **ç**atı demetler üzerinde twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun geometrisini çalışılması amaçlanmıştır.
Yöntem: Bu çalışma, baz manifolddan çatı demetlere lift edilmiş geometrik objeler ile tensör hesaplama methotları kullanılarak gerçekleştirilmiştir.
Bulgular: Twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriğine sahip çatı demette Levi-Civita konneksiyonu tanımlanmıştır. Levi-Civita konneksiyonun Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Bundan başka baz manifold üzerinde alınan bir vektör alanının yatay, dikey ve tam liftinin rotasyonu ve diverjansı hesaplanmıştır.
Sonuç: Difarensiyel geometride demetler üzerinde yeni metriklerin tanımlanması ve çalışılması önemli bir konudur. Bu amaçla çatı demetler üzerinde yeni bir metric tanımlanması yeni çalışmalar için önemli bir katkı sunar. Çatı demetler üzerinde yeni bir metric tanımlanmıştır. Bu metriğin geometrisi ile ilgili önemli sonuçlar verilmiştir. Baz manifold üzerinden alınan bir vektör alanının yatay dikey ve tam liftlerinin rotasyon ve diverjansları hesaplanmıştır.

Ağustos 2022, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Çatı demet, twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriği, adapte olmuş çatı.

ABSTRACT

MASTER THESIS

GEOMETRY OF FRAME BUNDLES WITH SASAKI-MOK METRIC DEFORMED BY TWIN METRIC

Ayşe TORUN

Atatürk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Departman of Mathematics

Departman of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Aydın GEZER

Purpose: In this study, it is aimed to study the geometry of Sasaki-Mok metric deformed by the twin metric on the frame bundle.
Method: This study is using the tensor calculation methods and geometric objects lifted from the base manifold to the frame bundle.
Findings: The Levi-Civita connection of Sasaki-Mok metric deformed by the twin metric is defined in the frame bundle. The Riemann curvature tensor, Ricci tensor and scalar curvature tensor of the this metric are calculated. Also, the rotation and divergence of the horizontal, vertical and complete lifts of a vector field on the base manifold are obtained.
Results: In differential geometry, to define and study new metrics on bundles is importent topic. For this purpose, defining a new metric on frame bundles provides an important contribution for new studies. A new metric has been defined on the frame bundles. Important results regarding the geometry of this metric are given. The rotations and divergences of the horizontal, vertical and complete lifts of a vector field on the base manifold are calculated.

August 2022, 44 pages

Keywords: Frame bundle, Sasaki-Mok metric deformed by twin metric, adapted frame.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{M}_n$	n-boyutlu $\mathbb{M}$ Manifoldu
$T(\mathbb{M}_n)$	$\mathbb{M}_n$ Manifoldunun Tanjant Demeti
$F(\mathbb{M}_n)$	$\mathbb{M}_n$ Manifoldunun Çatı Demeti
D	Türev Operatörü
π	Doğal İzdüşüm Fonksiyonu
$[K,S]$	K ve S vektör alanlarının Lie çarpımı
L_K	K vektör alanı yönündeki Lie türevi
∇	$\mathbb{M}_n$ de tanımlı Afin (Lineer) Konneksiyon
∇_K	K vektör alanı yönündeki kovaryant türev
Γ_{ij}^k	∇ konneksiyonunun katsayıları (2. tür Christoffel sembolleri)
T_{ij}^k	$\mathbb{M}_n$ manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun Burulma Tensörü
$R_{ijk}{}^l$	$\mathbb{M}_n$ manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun Eğrilik Tensörü
$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$	$F(\mathbb{M}_n)$ de tanımlı Riemann konneksiyonun katsayıları
g	$\mathbb{M}_n$ de tanımlı Riemann metriği
$\tilde{g}$	$F(\mathbb{M}_n)$ de tanımlı bozulmuş Sasaki-Mok Metriği
$\tilde{\nabla}$	$F(\mathbb{M}_n)$ de tanımlı bozulmuş Sasaki-Mok Metrik konneksiyon
$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$	$F(\mathbb{M}_n)$ de bozulmuş Sasaki -Mok Metrik konneksiyonun katsayıları
$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}$	$F(\mathbb{M}_n)$ de bozulmuş Sasaki-Mok Metrik konneksiyonun Eğrilik Tensörü
$\tilde{R}_{\beta\gamma}$	$F(\mathbb{M}_n)$ de tanımlı bozulmuş Sasaki-Mok Metriğinin Ricci Tensörü
$divK$	K vektör alanının diverjansı
$rotK$	K vektör alanının rotasyonu
$T_0^1(\mathbb{M}_n)$	$\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesi

GİRİŞ

Manifold kavramı ilk olarak Riemann tarafından “yüzeylerin yüksek boyutlara genişlemesi” şeklinde tanımlanmış ve “Mannigfaltigkeit” şeklinde ifade edilmiştir.

Manifold üzerindeki çeşitli diferansiyel-geometrik yapılar, $T\mathbb{M}$ tanjant demet ve $F\mathbb{M}$ çatı demet üzerindeki yapılarla yakından ilişkilidir. Bundan dolayı geometrik nesnelerin, tanjant demetlere, tensör demetlere ve çatı demetlere taşınması ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır (Cordero and de Leon, 1983)

1958’de Sasaki, $\mathbb{M}$ üzerinde bir Riemann metriğinden $T\mathbb{M}$ üzerinde bir Riemann metriğinin nasıl oluşturulacağını gösterdi ve böylece $T\mathbb{M}$ nin diferansiyel geometrisinin çalışmasını başlattı (Mok, 1978). O zamandan beri, konu kapsamlı bir şekilde geliştirildi ve daha yüksek dereceden kotanjant ve tanjant demetlere kadar genişletildi (Mok,1978).

$F\mathbb{M}$ nin diferansiyel geometrisi ilgili çalışmalar çok daha sonra başlamıştır (Mok, 1978). Altmışlarda Okubo ile başlayan çalışmalar, yetmişlerde Mok ve ardından seksenlerde Cordero ve de Leon ile devam etti (Mok, 1978).

Birbirinden farklı düzgün manifoldlar (diferansiyellenebilir manifold) üzerindeki geometrik yapılar arasındaki bağlantı diferansiyel geometri için çözülmeye çalışılan problemdir. Diferansiyellenebilir $\mathbb{M}$ manifoldu üstünde geometri yapmak için bazı diferansiyellenebilir elemanların başka diferansiyellenebilir manifoldlara taşımak gerekir. Böylece $\mathbb{M}$ ile başka diferansiyellenebilir manifoldların geometrileri arasında bağlantı sağlanmış olur.

$\mathbb{M}$ manifoldunun her bir noktasındaki çatıların dönüşümünü sağlayan matrislerin birleşimi çatı demeti oluşturur. Çatı demetinin diferansiyel geometrisinin araştırılması tensör alanlarının ve üstünde yer alan lineer konneksiyonların yapılandırılmasıyla başlar. Cebir ve geometriden yararlanarak çatı demetlerinin geometrisi incelenebilir.

Bu tezde $F\mathbb{M}$ çatı demette Levi-Civita konneksiyonun tanımlanması, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik tensörünün hesaplanması ve bu tensörlerle ilgili bazı özelliklerinin araştırılması amaçlanmıştır. Aynı zamanda bu çalışmada çatı demette tensör hesabının daha kolay yapılmasına olanak sağlayan adapte olmuş çatı kullanılacaktır.

Materyal ve yöntem bölümünde, çatı demet, baz manifoldda tanımlanmış bazı geometrik objelerin çatı demete liftleri, çatı demette lineer konneksiyona adapte olmuş çatı ve twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriği hakkında bilgi verilmiştir.

Araştırmalar ve bulgular bölümünde ise twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriğine sahip çatı demette Levi-Civita konneksiyonu tanımlanmıştır. Levi-Civita konneksiyonun Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Bundan başka baz manifold üzerinde alınan bir vektör alanının yatay, dikey ve tam liftinin rotasyon ve diverjans hesaplanmıştır.

KURAMSAL TEMELLER

Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. : X bir küme olsun. τ, X kümesinin altkümelerinin bir kümesi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir.

1) $\emptyset \in \tau \; ve \; X \in \tau.$

2) τ ailesinin keyfi sayıda birleşimi τ kümesine aittir; $\{A_i\}_{i\in I}, A_i \in \tau \; ise \bigcup_i \; A_i \in \tau$

3) τ ailesinin sonlu sayıda kesişimi τ kümesine aittir; $\{A_i\}_{i\in J}$, J sonlu indis kümesi için, $A_i \in \tau$ ise $\bigcap_i \; A_i \in \tau$ (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.2: (X, τ) ve (X', τ') iki topolojik uzay, $f: X \to X'$ bir bir fonksiyon olsun. Eğer X' kümesindeki her açık kümenin ters görüntüsü X kümesinde bir açık küme ise f fonksiyonun süreklidir denir (Şahin, 2022).

Tanım: **2.1.3:** (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $B \subseteq \tau$ olmak üzere, (X, τ) topolojik uzayın her bir elemanı B altkümesinin elemanlarının birleşimi ise , B kümesine topolojik uzayın bazı adı verilir (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.4: X bir topolojik uzay olsun. X uzayının farklı tüm x, y noktalarının ayrık ve açık birer komşuluğu varsa, bu topolojik uzay Hausdorff uzay olarak adlandırılır (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.5: $f: X \to X'$ bir fonksiyon olsun. Eğer fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve terside sürekli ise, f fonksiyonuna homeomorfizma denir. Bu durumda X topolojik uzayı X' uzayına homeomorfiktir denir (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.6: $\mathbb{M}$ ikinci sayılabilir Hausdorff bir uzay olsun. Eğer her $p \in \mathbb{M}$ için, $\mathbb{R}^m$deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U, yani p noktasını içeren bir $U \subset \mathbb{M}$ açık kümesi , $W \subset R^m$ açık kümesi ve $\varphi(U): U \to W$ homeomorfizması (birebir, örten, sürekli ve terside sürekli) varsa, $\mathbb{M}$ Hasusdorff uzayına bir manifold denir. Manifoldun boyutu, $boy(R^m) = m$ olduğundan manifoldun boyutu m -olarak ifade edilir (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.7: $\mathbb{M}$ Hausdorf topolojik uzay olmak üzere herhangi $U \subset \mathbb{M}$ açık kümesinin

$V \subset R^n$ bölgesinde

$$\varphi: U \to V$$

homeomorfizmine $\mathbb{M}$ de n boyutlu koordinat sistemi denir. Koordinat sistemi harita olarak da adlandırılır. Burada U açık kümesi φ koordinat sisteminin koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi olarak ifade edilir. Koordinat sistemi (U, φ) şeklinde gösterilebilir (Salimov ve Mağden, 2008).

φ bir homeomorfizma, $p \in U$ ise $\varphi(p) = (p^1, \dots, p^n)$ olur. $p^1, \dots, p^n$ sayılarına φ koordinat sisteminde p noktasının koordinatları denir (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 2.1.8: $n-$boyutlu bir manifoldu $\mathbb{M}_n$ ile gösterelim.

$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in I\}$ kümesi $\mathbb{M}_n$ üzerindeki haritaların bir ailesi olsun. Bu küme aşağıdaki şartları sağlarsa A'ya "C^k-sınıfından atlas" denir (Şuhubi, 2008).

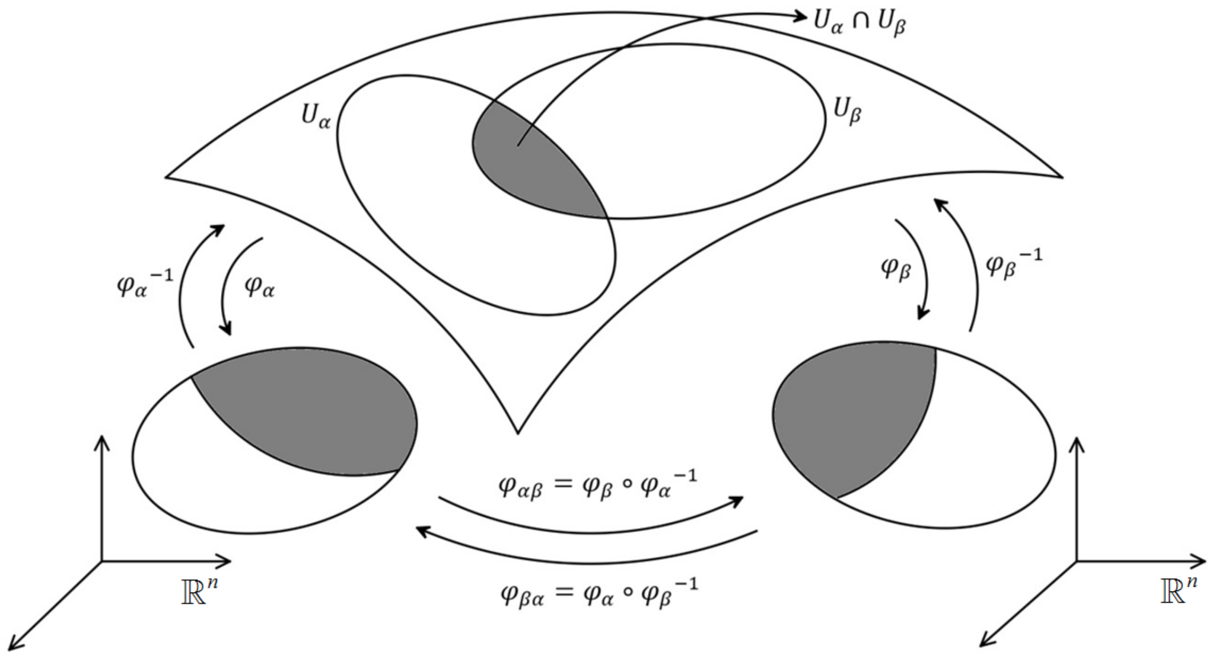
i) $\{U_\alpha\}$ açık kümeleri $\mathbb{M}_n$ manifoldunun açık örtüsüdür.Yani

$$\mathbb{M}_n = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

dir.

ii) A daki herhangi iki harita C^k sınıfındandır.

Tanım 2.1.9: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}\ ve\ \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas verilmiş olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşan ise yani $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}\ ve\ \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından ise verilen atlaslara denk atlaslar denir (Salimov ve Mağden, 2008).



Şekil 2.1. Differensiyellenebilir yapı

"Eğer bir $\mathbb{M}$ manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold varsa $\mathbb{M}$ manifolduna r.mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına $\mathbb{M}$ manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa $\mathbb{M}$ manifolduna C^{∞}-manifold veya kısaca diferensiyellenebilir manifold adı verilir" (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.10: X Hausdorff topolojik uzayı üzerinde C^k -atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

Tanım 2.2.1. $\mathbb{M}_n$, n boyutlu bir manifold ve $p \in \mathbb{M}_n$ noktasındaki düzgün fonksiyonların kümesi $C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R})$ ve $f \in C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R})$ olsun.(U, φ), p noktasındaki harita ise $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ ve $p = \varphi^{-1}(x^1, \dots x^n)$ olup

$$y = f(p) = f\big(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)\big) = g(x^1, \dots, x^n)$$

elde edilir. Bu ifadede yer alan g fonksiyonu $g = f \circ \varphi^{-1}$ şeklindedir.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}$$

n tane verilen $\zeta^i \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$K_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p$$

şeklinde ifade edilen $K_p: C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon,

$$K_p = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p$$

şeklinde olup bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesi $T_p(\mathbb{M}_n)$ şeklinde gösterilir (Karaman, 2016).

Tanım 2.2.2: n-boyutlu düzgün manifold $\mathbb{M}_n$ olsun. $\mathbb{M}_n$ üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda her $f, g \in C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

1) $K_p(af + bg) = aK_pf + bK_pg$

2) $K_p(fg) = K_p(f)g + fK_pg,$

şartlarını sağlayan $K_p: C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne $\mathbb{M}_n$ manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir (Şahin, 2022).

$\mathbb{M}_n$ manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_p(\mathbb{M}_n)$ ile gösterilir (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.3: $\mathbb{M}_n$ n boyutlu bir manifold $T_p(\mathbb{M}_n)$ ise manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. "Her $p \in \mathbb{M}$ noktasına $T_p(\mathbb{M}_n)$ uzayında bir teğet vektör karşılık getiren K türevlenebilir dönüşümüne vektör alanı denir" (Şahin, 2022). Böylece $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde bir vektör alanı

$$K: \mathbb{M}_n \rightarrow \cup_{p \in M} T_p(\mathbb{M}_n)$$

diferensiyellenebilir dönüşümüdür. Burada vektör alanının diferensiyellenebilir olması, her $f \in C^{\infty}(\mathbb{M}_n, \mathbb{R})$ için

$$Kf: \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Kf(p) = K_p(f)$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun her dereceden diferensiyellenebilir olmasıdır. Tanjant vektörlerinin birleşimi ile vektör alanlarını elde ederiz. Vektör alanlarının kümesi $K(\mathbb{M}_n)$ şeklinde gösterilir. Bir yerel haritada K vektör alanı

$$K = \sum K^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde gösterilir (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.4: $\mathbb{M}_n$ manifoldunun a noktasındaki doğal çatısı $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a\right\}$ doğal bazıdır.

Tensörler

Tensörün tanımı

Tanım 2.3.1: $\vec{x}_j \in B_n, j = 1, \ldots, q$ vektör ve $\xi^i \in B_n^*,\ i = 1, \ldots, p$ kovektör değişkenlerinin

$$w = t\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, , \ldots, \vec{x}_{q,} \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p\right)$$

gerçel değerli fonksiyonu inceleyelim. Bu fonksiyonun multilineer fonksiyon olabilmesi için her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlıyorsa, birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartını inceleyelim. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$t\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{x}_2,\dots\vec{x}_q,\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^p\right)$$
$$=\lambda t\left(\vec{x},\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_q,\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^p\right)+\ \mu t\left(\vec{y},\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_q,\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^p\right)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t:\underbrace{B_n\times B_n\times\dots\times B_n}_{q}\times\overbrace{B_n^*\times\dots\times B_n^*}^{p}\to\mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir. (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p,0)$ tipli tensöre kontravaryant tensörler (p-kovektör değişkenlerinin sayısı), $(0,q)$ tipli tensörlere (q-vektör değişkenlerinin sayısı) ise kovaryant tensörler denir. $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısına $(0,0)$ tipli tensör gibi bakabiliriz (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 2.3.2: "$(0,2)$ tipli t$(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2})$ tensörü ele alınsın. $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ için

$$t'(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=\lambda t(\vec{w}_1,\vec{w}_2)+\ \mu t(\vec{w}_2,\vec{w}_1)$$

şeklinde $t'(\vec{w}_1,\vec{w}_2)$ tensörü verilsin. $\lambda\ ve\ \mu$ reel değerleri için sonsuz sayıda tensör elde edilir. $\lambda=\ \mu=\frac{1}{2!}$ olarak seçilirse oluşan yeni tensöre t$(\vec{w}_1,\vec{w}_2)$ tensörünün simetrikleşmesi denir ve Sim(t) ile gösterilir. Yani

$$Simt(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=\frac{1}{2!}\left(t(\vec{w}_1,\vec{w}_2)+t(\vec{w}_2,\vec{w}_1)\right)$$

yazılır. Eğer değişkenlerin sayısı 3 tane olursa bu $t(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)$ tensörünün simetrikleşmesi

$$Simt(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)$$
$$=\frac{1}{3!}\left(t(\vec{w}_1,\overrightarrow{w_2},\vec{w}_3)+t(\overrightarrow{w_2},\vec{w}_3,\overrightarrow{w_1})+t(\vec{w}_3,\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2})+t(\vec{w}_1,\vec{w}_3,\vec{w}_2)\right.$$
$$\left.+\ t(\vec{w}_3,\vec{w}_2,\vec{w}_1)+t(\vec{w}_2,\vec{w}_1,\vec{w}_3)\right)$$

biçiminde yazılır. Yine, $t'(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=\ \lambda t(\vec{w}_1,\vec{w}_2)+\ \mu t(\vec{w}_2,\vec{w}_1),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

bir diğerini ise ,

$$\frac{1}{2!}\left(t(\vec{w}_1,\vec{w}_2)-t(\vec{w}_2,\vec{w}_1)\right)$$

biçiminde seçebiliriz. Buna karşılık gelen tensöre ise $t(\vec{w}_1,\vec{w}_2)$ tensörünün alterneleştirilmesi denir ve $Altt(\vec{w}_1,\vec{w}_2)$ biçiminde gösterilir.

$$Altt(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=\frac{1}{2!}\left(t(\vec{w}_1,\vec{w}_2)-t(\vec{w}_2,\vec{w}_1)\right)$$

yazılır. Benzer olarak,

$$Altt(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)$$

$$=\frac{1}{3!}\big(t(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)+t(\vec{w}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_1)+t(\vec{w}_3\vec{w}_1,\vec{w}_2)-t(\vec{w}_1,\vec{w}_3,\vec{w}_2)-t(\vec{w}_3,\vec{w}_2,\vec{w}_1\ )$$
$$-\,t(\vec{w}_2,\vec{w}_1,\vec{w}_3)\big)$$

şeklinde yazılır" (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 2.3.3: "$Simt=t(Altt=t)$ ise t tensörü simetrik (antisimetrik) tensör olarak adlandırılır" (Salimov ve Mağden, 2008).

Tensör Diferensiyellenebilmesi

Tanım 2.4.1: Keyfi $p\in\ \mathbb{M}_n$ noktasının sadece $t_p\in T_p^q(p)$ tensörünü nkarşılık geldiği $t\colon p\to t_p$ kuralına $\mathbb{M}_n$ üzerinde (p,q) tipli tensör alanı denir. Burada $T_p^q(p)$, $p\in\ \mathbb{M}_n$ noktasındaki tensör uzayıdır (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 2.4.2: Aşağıdaki şartları sağlayan $D\colon T(\mathbb{M}_{\ n})\to T(\mathbb{M}_{\ n})$ dönüşümüne $T(\mathbb{M}_{\ n})$ cebirinin "tensör diferensiyellenmesi" denir (Salimov ve Mağden, 2008).

1. D sabit katsayılara göre lineerdir, yani

$$D(at+bs)=aDt+bDs,\qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

2. D tipi korur, yani $D\left(T_q^p(\ \mathbb{M}_{\ n})\right)\subset T_q^p(\mathbb{M}_{\ n})$ dir.

3. $D(t\otimes s)=Dt\otimes s+t\otimes Ds$

4. D işlemi tensörlerin konraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir.

Lie Parantezi ve Lie Diferensiyeli

Tanım 2.5.1: $\mathbb{M}_n$, C^∞ sınıfının manifold, $\mathbb{M}_n$ manifoldunun bir U açık kümesi üzerinde $K,S\in T_0^1(\ \mathbb{M}_n)$ ve $f\in C^\infty(U,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$(Kf)=K^i\partial_i f\ ve\ (Sf)=S^j\partial_j f$$

$$K(Sf)=K\big(S^j\partial_j f\big)=S^i\big(\partial_i S^j\partial_j f+S^j\partial^2{}_{ij}f\big)$$

$$S(Kf)=S\big(K^i\partial_i f\big)=S^j\big(\partial_j K^i\partial_i f+K^i\partial^2{}_{ij}f\big)$$

bulunur. Bu ifadelerle

$$[K,S]=KS-SK=\big(K^i\partial_i S^j-S^i\partial_i K^j\big)\partial_j$$

şeklinde yeni bir vektör alanı elde edilir.

$$KS - SK = [K, S]$$

şeklinde tanımlanan vektör alanının ∂_i doğal çatısı türünden gösterimi

$$[K, S] = KS - SK = \left(K^i \partial_i S^j - S^i \partial_i K^j\right)\partial_j \qquad (2.3)$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.2: $\mathbb{M}_n$ türevlenebilir bir manifold ve $K\colon\ \mathbb{M}_n \to T_*\ \mathbb{M}_n$ bu manifold üzerinde integrali $\varphi(t, p)$ olan bir vektör alanı olmak üzere, türevlenebilir bir $f\colon \mathbb{M}_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun K vektör alanı yönündeki Lie türevi

$$L_K(f)(p) = \frac{f\left(\varphi(t, p)\right) - f(p)}{t}$$

ile tanımlanır (Ozan , 2016).

Tanım 2.5.3: Aşağıda verilen şartları sağlayan $D = L_K, K \in T_0^1(\mathbb{M}_n)$ diferensiyelleme işlemine K vektör alanı yönündeki Lie türevi denir (Salimov ve Mağden, 2008).

1) $L_K f\ = Kf, \forall f \in T_0^0(\mathbb{M}_n)$,

2) $L_K S = [K, S], \forall\ K, S \in T_0^1(\mathbb{M}_n)$

Tanım 2.5.4: $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir K ve S vektör alanları için $[K\ , S\ ]$ Lie parantezi

$$f \in C^\infty(\ \mathbb{M}_n, \mathbb{R}), p \in \mathbb{M}_n\ için\ , [K, S]_p(f) = K_p(S\, f) - S_p(Kf)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5.5: 2.3 eşitliği ile tanımlanan $[K, S]$ vektör alanına K ve S vektör alanlarının Lie parantezi denir (Salimov ve Mağden, 2008).

$\partial_i = \delta_i^k \partial_k,\quad \partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları alınırsa (2.3) formülünden

$$\left[\partial_i, \partial_j\right] = 0$$

olduğu görülür.

Lie parantezi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Salimov ve Mağden, 2008).

1)$[K, S + Z] = [K, S] + [S, Z]$, (Lineerlik)

2)$[K, fS] = K(f)S + f[K, S]$, (Leibniz şartı)

3)$[K, S] = -[S, K]$, (Antisimetriklik)

4)$\left[K,[S,Z]\right]+\left[S,[Z,K]\right]+\left[Z,[K,S]\right]=0$ (Jacobi özdeşliği)

Afin Konneksiyon - Kovaryant Türev

Tanım 2.6.1: $\mathbb{M}_n$ düzgün manfold ve $T_0^1\ de\, \mathbb{M}_n$ de vektör alanlarının kümesini göstermek üzere, $\forall\ K,S,Z \in T_0^1\ (\ \mathbb{M}_n)$ ve $\forall\ f,g \in C^\infty(\ \mathbb{M}_n,\mathbb{R})$ için

$$\nabla : T_0^1(\ \mathbb{M}_n) \to T_0^1\ (\mathbb{M}_n)$$

$$(K,S) \to \nabla(K,S) = \nabla_K S$$

ifadesi aşağıdaki şartları sağladığında ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon; $(\mathbb{M}_n,\nabla)$ ikilisine ise afin konneksiyonlu uzay denir (Hicks, 1971).

i) $\nabla_{fK+gS}Z = f\nabla_K Z + g\nabla_S Z$

ii) $\nabla_K(S+Z) = \nabla_K S + \nabla_K Z$

$iii)\ \nabla_K(fS) = (Kf)S + f\nabla_K S$

Tanım 2.6.2: ∇, C^∞ sınıfından n boyutlu bir manifold $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall\ K,S \in T_0^1(\mathbb{M}_n)$, $\forall\ \ k \in T_q^p(\mathbb{M}_n)$ ve $\forall\ f,g \in C^\infty(\ \mathbb{M}_n,\mathbb{R}) \to$ için,

$$D = \nabla_K : T(\mathbb{M}_n) \to T(\mathbb{M}_n\ )$$

aşağıdaki şartları sağlayan diferensiyelleme işleminde ∇_K ya K vektör alanı yönündeki kovaryant türev denir (Salimov ve Mağden, 2008).

$i.\nabla_{fK+gS}t = f\nabla_K t + g\nabla_S t$

$ii.\nabla_K f = Kf$

Burulma ve Eğrilik Tensörleri

∇, C^∞ sınıfından n boyutlu bir $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere $(\nabla,\ \mathbb{M}_n)$ afin konneksiyonlu uzayında bulunan bir $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ fonksiyonun tam diferensiyeli $df = \partial_i f dx^i$ biçiminde gösterilir ve $\partial_i f = f_i$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli ile elde edilen bir kovektör (1-form) belirtir. Bu kovektörün kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \nabla_i f_j &= \partial_i f_j - \Gamma_{ij}^k f_k \\ &= \partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k f_k \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Sürekli fonksiyonlarda kısmi türevler Schwarz teoremine göre yer değiştirebildiği için $\partial_i\partial_j f$=$\partial_j\partial_i f$ yazılır. Buradan

$\nabla_j f_i = \partial_j f_i - \Gamma_{ji}^k f_k$ ve $\nabla_i f_j = \partial_i f_j - \Gamma_{ij}^k f_k$

elde edilen kovaryant türevlerin farkları alınarak

$$\nabla_j f_i - \nabla_i f_j = \partial_j f_i - \Gamma_{ji}^k f_k - \left(\partial_i f_j - \Gamma_{ij}^k f_k\right)$$

$$= \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) f_k = T_{ij}^k f_k \tag{2.5}$$

elde edilir (Şuhubi, 2008).

Tanım 2.7.1: ∇, C^∞ sınıfından n boyutlu bir $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere, kovaryant türevlerin farkından elde edilen (2.5) eşitliğindeki (1,2) tipli T_{ij}^k=$\left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right)$ tensörüne ∇ konneksiyonunun burulma tensörü denir (Salimov ve Mağden, 2008).

$$T_{ij}^k = -T_{ji}^k$$

olduğu görülür. Bu tensörünün invaryant formdaki ifadesi $\forall\ K, S \in T_0^1(M_n)$ için

$$T(K, S) = \nabla_K K - \nabla_S K - [K, S] \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır. $[K, S]$, Lie parantezidir (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 2.7.2: Burulması sıfır olan uzaylara burulmasız uzaylar denir. Burulmasız uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur.

$$\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \iff T_{ij}^k = 0$$

şeklindedir (Salimov & Mağden, 2008). Bu da ∇ konneksiyonunun simetrik olması anlamına gelir. Burulma tensörünün (2.6) şeklindeki invaryant hali kullanılarak burulması sıfır olan uzaylarda

$$[K, S] = \nabla_K S - \nabla_S K$$

ifadesi yazılır (Salimov ve Mağden, 2008).

Tanım 2.7.3: ∇, C^∞ sınıfından n boyutlu $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall\ K, S, Z \in T(\mathbb{M}_n)$ olmak üzere;

$$R(K, S, Z) = \nabla_K \nabla_s Z - \nabla_S \nabla_K Z - \nabla_{[K,S]} Z \tag{2.7}$$

biçiminde gösterilen R tensörüne ∇ nın eğrilik tensörü denir (Salimov ve Mağden, 2008).

$K = \partial_i, S = \partial_j,\ Z = \partial_k$ alınarak eğrilik tensörünün doğal çatıdaki koordinatlarla ifadesini

$$R_{ijk}{}^m = \partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{il}{}^m \Gamma_{jk}^{\ l} - \Gamma_{jl}{}^m \Gamma_{ik}^{\ l} \tag{2.8}$$

şeklinde yazarız. R eğrilik tensörüne ∇ nın Riemannian Christoffel tensörü de denir. (2.8) eşitliğini koordinatlarla

$$R_{ijk}^{\ \ \ m} = -R_{jik}^{\ \ \ m}$$

veya

$$R_{(ij)k}^{\ \ \ \ \ m} = 0$$

şeklinde yazılır. Bu da eğrilik tensörünün ilk iki alt indise göre antisimetrik olduğunu gösterir. Keyfi $v = v^i \partial_i \in T_0^1\ (\mathbb{M}_n)$ vektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sk}^{\ \ i} v^k$$

şeklindedir. $(1,1)$ tipli $\nabla_s v^i$ kovaryant türevinin tekrar türevi alınırsa

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^{\ \ i} \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^{\ \ m} \nabla_m v^k$$

$$= \partial_r\left(\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^{\ \ i} v^k\right) + \Gamma_{rm}^{\ \ i}(\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^{\ \ m} v^k) - \Gamma_{rs}^{\ \ m} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_{rs}^2 v^i + \left(\partial_r \Gamma_{sk}^{\ \ i}\right) v^k + \Gamma_{sk}^{\ \ i}(\partial_r v^k) + \Gamma_{rm}^{\ \ i} \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^{\ \ i} \Gamma_{sk}^{\ \ m} v^k - \Gamma_{rs}^{\ \ m} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_{rs}^2 v^i + \left(\partial_r \Gamma_{sk}^{\ \ i} + \Gamma_{rm}^{\ \ i} \Gamma_{sk}^{\ \ m}\right) v^k + \Gamma_{sk}^{\ \ i}(\partial_r v^k) + \Gamma_{rm}^{\ \ i} \partial_s v^m - \Gamma_{rs}^{\ \ m} \nabla_m v^i \qquad (2.9)$$

ve benzer olarak

$$\nabla_s \nabla_r v^i = \partial_{sr}^2 v^i + \left(\partial_s \Gamma_{rk}^{\ \ i} + \Gamma_{sm}^{\ \ i} \Gamma_{rk}^{\ \ m}\right) v^k + \Gamma_{rk}^{\ \ i}(\partial_s v^k) + \Gamma_{sm}^{\ \ i} \partial_r v^m - \Gamma_{sr}^{\ \ m} \nabla_m v^i \quad (2.10)$$

yazılır. (2.9) eşitliğini (2.8) eşitliğinden çıkararak

$$\nabla_r \nabla_s v^i - \nabla_s \nabla_r v^i = \left(\partial_r \Gamma_{sk}^{\ \ i} - \partial_s \Gamma_{rk}^{\ \ i} + \Gamma_{rm}^{\ \ i} \Gamma_{sk}^{\ \ m} - \Gamma_{sm}^{\ \ i} \Gamma_{rk}^{\ \ m}\right) v^k - \left(\Gamma_{rs}^{\ \ m} \nabla_m v^i - \Gamma_{sr}^{\ \ m} \nabla_m v^i\ \right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^{\ \ \ i} v^k - S_{rs}^{\ \ k} \nabla_k v^i \qquad (2.11)$$

yazılır. (2.11) eşitliğine v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir (Salimov ve Mağden, 2008).

Yardımcı Teorem 2.7.1: "∇, C^∞ sınıfından n boyutlu $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerinde burulmasız bir afin konneksiyon olsun. R, burulmasız eğrilik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar . Bu şartlara 1. Bianchi ve 2. Bianchi (Bianchi-Padov) özdeşlikleri denir" (Salimov veMağden, 2008).

1) $R_{ijk}^{\ \ \ l} + R_{kij}^{\ \ \ l} + R_{jki}^{\ \ \ l} = 0,$

2) $\nabla_t R_{ijk}{}^l + \nabla_j R_{tik}{}^l + \nabla_i R_{jtk}{}^l = 0.$

Riemann Manifoldu

Tanım 2.8.1: T_0^1 $(\mathbb{M}_n)$ $, C^\infty$ sınıfından n boyutlu $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerindeki vektör alanları olsun.

$$g: T_0^1\ (\mathbb{M}_n) \times T_0^1\ (\mathbb{M}_n) \to C^\infty(\ \mathbb{M}_n, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan g bilineer formu $\forall\ K, S \in T_0^1(\mathbb{M}_n)$ için,

1) $g(K,S) = g(S,K)$,

2) $g(K,K) \geq 0$ ve $\forall\ K$ için $g(K,K) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartlarını sağlayan g bilineer formuna Riemann metriği denir. Riemann metriği metrik tensör olarakta adlandırılır. "$(\ \mathbb{M}_n, g)$ çifti ise Riemann manifoldu olarak adlandırılır" (Yano and Kon 1984). Yukarıda verilen pozitif tanımlılık şartı yerine bu şarttan daha zayıf olan, "Her $B \in T_0^1$ $(\mathbb{M}_n)$ için $g(K,S) = 0$ olması $K = 0$ olmasını gerektirir." şeklinde tanımlanan g bilineer formunun regülerlik şartı konulursa, $(\ \mathbb{M}_n, g)$ çifti yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu olarak adlandırılı (Kühnel, 2005).

Regülerlik şartı koordinatlarla $K = K^i \partial_i$ ve $S = S^j \partial_j$ için,

$$g(K,S) = g(\partial_i, \partial_j) K^i S^j = \ g_{\ ij} K^i S^j = 0$$

şeklinde ifade edilir. Her $S^j\ için\ \ g_{\ ij} K^i S^j = 0$ olduğunda $g_{\ ij} K^i = 0$ dır. Bu ifadede $K^i = 0$ olması için,

$$Det(g_{\ ij}) \neq 0$$

olmalıdır. Burada $(g_{\ ij})$, g_{ij} tensörünün matris gösterimidir.

Tanım 2.8.2: $(\mathbb{M}_n, g)$ bir Riemann manifold ve ∇ bu manifold üzerinde tanımlanmış bir lineer konneksiyon olsun.

$$\nabla g = 0$$

oluyorsa ∇ ya g ye göre metrik konneksiyon denir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.8.1: $(\mathbb{M}_n, g)$ Riemann manifoldu üzerinde,

$i)\ T(K,S) = \nabla_K S - \nabla_S K - [K,S] = 0$

$ii)\ \nabla_g = 0$

Şartlarını sağlayan bir tek metrik (afin) konneksiyon vardır.

Tanım 2.8.3: Yukarıda (2.8.1) teoreminde anlatılan metrik konneksiyon Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.8.2: $(\mathbb{M}_n, g)$ Riemann manifoldu ve bu manifoldun Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. $\forall\ K,S\ \in T_0^1\ (\mathbb{M}_n)$ için aşağıda verilen denklem geçerlidir (Salimov ve Mağden, 2008).

$$2g(\nabla_K S, Z) = Kg(S,Z) + Sg(Z,K) - Zg(K,S) - g(K,[S,Z]) + g(S,[Z,K]) + g(Z,[K,S]). \tag{2.12}$$

(2.12) ifadesine Kozsul formülü denir. Bu ifade de $K = \partial_i,\ S = \partial_j\ Z = \partial_k$ alınarak

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) \tag{2.13}$$

yazılır. (2.13) ifadesi ile Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları olan Γ_{ij}^h bileşenlerini bulunur.

Tanım 2.8.4 : $(\mathbb{M}_n, g)$ Riemann manifoldu üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonu ∇ nın eğrilik tensörü $\forall\ K,S,Z \in T_0^1\ (\mathbb{M}_n)$ için,

$$R(K,S,Z) = \nabla_K \nabla_S Z - \nabla_S \nabla_S Z - \nabla_{[K,S]} Z$$

ile tanımlanır. Bu tensöre Riemann eğrilik tensörü adı verilir (Karaman, 2016).

Riemann eğrilik tensörünün kovaryant tensörü indirilmesiyle $(0,4)$ tipli bir kovaryant türev elde edilir. Bu kovaryant türev,

$$R_{ijk}^{\ \ \ m} g_{ml=} R_{ijkl}$$

şeklindedir (Karaman, 2016).

Teorem 2.8.3: Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir (Karakaş, 2016).

1) $R_{ijkl} = -R_{jikl,}$

2) $R_{ijkl} = -R_{ijlk\,.}$

3) $R_{ijkl} = R_{klij}$

4) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$

5) $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

Tanım 2.8.5: **:** $(1,3)$ tipli $R_{ijk}^{\ \ \ l}$ eğrilik tensörü ile tanımlanan,

$$C_1^1(R_{ijk}^{\ \ \ l}) = R_{ljk}^{\ \ \ l} = R_{jk}$$

tensörüne "Ricci eğrilik tensörü" adı verilir. Ricci eğrilik tensörü simetriktir. Yani,

$$R_{jk} = R_{kj}$$

şeklindedir (Kühnel, 2005).

Tanım 2.8.6: Ricci tensörünün tam kontraksiyonuyla oluşan tensöre ricci tensörünün skaler eğriliği denir ve τ sembolüleyle gösterilir. τ skaler eğriliği

$$\tau = g^{jk}R_{jk}$$

şeklindedir .

Anti- Kähler Manifold

Tanım 2.9.1: $\mathbb{M}_n$ bir $n = 2m$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olmak üze $\mathbb{M}_n$ üzerinde $(1,1)$ tipli J afinoru için $J^2 = -I$ tensör alanına almost kompleks yapı, $(\mathbb{M}_n, J)$ ikilisine "hemen hemen kompleks manifold" denir.

Tanım 2.9.2: (Anti-Kähler Manifold) $\mathbb{M}_n$ bir $n = 2m$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve F, $\mathbb{M}_n$ üzerinde almost kompleks yapı olmak üzere eğer

$$F_i^k g_{jk} = F_j^k g_{ik}$$

ve

$$\nabla_k F_i^j = 0$$

şartları sağlanırsa $\mathbb{M}_n$ ye anti-Kahler manifoldu denir. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonu, g ise pseudo-Riemann metriğidir.

MATERYAL VE METOT

Çatı Demetleri

Tanım 3.1.1:

$\mathbb{M}_n$ bir diferansiyellenebilir manifold ve (U, x^i), $\mathbb{M}_n$ de bir koordinat sistemi olsun. Burada U, $\mathbb{M}_n$ nin herhangi bir x noktasındaki koordinat komşuluğudur. $x\in \mathbb{M}_n$ noktasındaki tanjant uzayımız $T_x \mathbb{M}_n$ olsun. x noktasındaki bir çatı $(K_1, \ldots, K_n)$ sıralı bazıdır. $F(\mathbb{M}_n)$, $\mathbb{M}_n$ nin herbir noktasındaki çatıların bir kümesi olsun. $\pi\colon F(\mathbb{M}_n) \to \mathbb{M}_n$ dönüşümüde $F(\mathbb{M}_n)$ den $\mathbb{M}$ ye doğal projeksiyondur. Bu dönüşüm $F(\mathbb{M}_n)$ nin çatılarını $\mathbb{M}$ nin noktalarına taşır. $\mathbb{M}_n$ deki (U, x_i) koordinat sistemi için $F\ U = \pi^{-1}(\ U)$ şeklindedir. x noktasında K_α çatısı K_α=$K_\alpha^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)_x$ olarak tek bir şekilde ifade edilebilir. Yani $\{FU,\left(x^i, K_\alpha^i\right)\}$ $F\mathbb{M}$ nin bir koordinat sistemidir. Bu sisteme $F(\mathbb{M}_n)$, den $\mathbb{M}_n$ ye indirgenmiş koordinat sistemi denir. Burada $\left[K_\alpha^i\right]$ matrisi tek değildir ve onun tersi $[K_i^\alpha]$ olarak yazılabilir (Cordero , Dodson and Manuel de, 1989)

K, $\mathbb{M}_n$ üzerinde vektör alanı olmak üzere $\mathbb{M}_n$ üzerindeki K vektör alanının tam lifti, yatay lifti ve dikey lifti sırasıyla;

$$^{C}K = K^i \partial_i + \left(K_\alpha^k \partial_k K^i\right)\partial_{i_\alpha}$$

$$^{H}K = K^j\left(\partial_j - \Gamma_{jk}^h K_\alpha^k \partial_{ha}\right)$$

$$^{V}K = K^i \partial_i - K^i \Gamma_{ik}^h K_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_h} \quad K^\alpha = K^{ik} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$$

şeklinde tanımlanır (Cordero , Dodson and Manuel de, 1989).

Adapte Olmuş Çatı

Adapte olmuş çatı, $F(\mathbb{M}_n)$ çatı demeti üzerinde tensörlerle ilgili işlemlerin daha kullanılabilir bir şekilde yapılmasına olanak sağlayan bir yapıdır. $F(\mathbb{M}_n)$ de doğal çatıya göre,

$$K_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \left(K_i = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

olarak alınırsa K vektör alanının yatay lifti

$$ {}^{H}K = K^{i}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}} - x_{\alpha}^{s}\Gamma_{si}^{k}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}^{k}}\right), \ {}^{H}K = \begin{pmatrix} K^{i} \\ -x_{\alpha}^{s}\Gamma_{sk}^{i}K^{k} \end{pmatrix} $$

ve dikey lifti

$$ {}^{V_\alpha}K = \delta_{\gamma}^{\alpha}K^{i}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}^{i}}, \ {}^{V_\alpha}K = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{\gamma}^{\alpha}K^{i} \end{pmatrix} $$

olacak şekilde vektör alanları elde edilir. Bu vektör alanları $U, \mathbb{M}$ manifoldunun koordinat bir komşuluğu olmak üzere FU da

$$ {}^{H}K_{h} = \delta_{h}^{j}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}} - x_{\gamma}^{\alpha}\Gamma_{j\alpha}^{m}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}^{m}}\right) \Rightarrow {}^{H}K_{h} = \frac{\partial}{\partial x^{h}} - x_{\gamma}^{\alpha}\Gamma_{j\alpha}^{m}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}^{m}} $$

ve

$$ {}^{V_\alpha}K_{h} = \delta_{\gamma}^{\alpha}\delta_{h}^{i}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}^{i}} $$

şeklinde ifade edilir. K vektör alanının yatay ve dikey lifleri lineer bağımsızdır. K vektör alanının yatay ve dikey lifleri sırasıyla ∇ nın yatay dağılımını ve $F(\mathbb{M}_n)$ nin dikey dağılımını meydana getirir $\{ {}^{H}K_{h}, {}^{V_\alpha}K_{h}\}$ kümesine, ∇ konneksiyonuna "adapte olmuş çatı" denir.

$$ E_{i} = {}^{H}K_{h} \quad , \quad E_{i_\alpha} = {}^{V_\alpha}K_{h} $$

olarak alındığında adapte olmuş çatı $\{E_\lambda\} = \{E_i, E_{i_\alpha}\}$ şeklinde yazılır.

Adapte olmuş çatı $F(\mathbb{M}_n)$'de şu şekilde ifade edilir.

$$ E_{h} = \partial_{h} - x_{\gamma}^{\alpha}\Gamma_{h\alpha}^{m}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}^{m}} $$

$$ E_{h} = \begin{pmatrix} \delta_{h}^{i} \\ -x_{\gamma}^{\alpha}\Gamma_{h\alpha}^{i} \end{pmatrix} $$

$$ E_{h_\gamma} = \delta_{h}^{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma}^{\sigma}} $$

$$ E_{h_\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{\gamma}^{\alpha}\delta_{h}^{i} \end{pmatrix} $$

Doğal çatının kobazından adapte olmuş çatının kobazına geçişinde kullanılan dönüşüm matrisi;

$$ A^{I}{}_{J} = \begin{pmatrix} \delta_{j}^{i} & 0 \\ x_{\alpha}^{m}\Gamma_{jm}^{i} & \delta_{\beta}^{\alpha}\delta_{j}^{i} \end{pmatrix} $$

şeklindedir.

Doğal çatıdan adapte olmuş çatıya geçerken kullanılan dönüşüm matrisi ise;

$$A_K{}^J = \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ -x_\beta^m \Gamma_{km}^j & \delta_\gamma^\beta \delta_k^j \end{pmatrix}$$

şeklinde olup

$$A^I{}_J\, A_K{}^J = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ x_\alpha^m \Gamma_{jm}^i \delta_k^j - x_\beta^t \Gamma_{kt}^j \delta_\beta^\alpha \delta_j^i & \delta_\gamma^\alpha \delta_j^i \delta_k^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^k & 0 \\ 0 & \delta_\gamma^\alpha \delta_k^i \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Çatı demet $F\mathbb{M}$ de tanımlanan twin metrikle bozulmuş olmuş Sasaki-Mok metriğinin kovaryant ve kontravaryant bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} a g_{ij} & 0 \\ 0 & b\delta^{\alpha\beta} G_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} g^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}\delta_{\alpha\beta} G^{ij} \end{pmatrix}.$$

Burada g pseudo Riemann metriği ve
$\mathrm{G(K,S)} = g(\mathrm{JK,S})$ ve $\mathrm{J}^2 = -I$

şeklindedir.

Lemma 3.2.1: $F(\mathbb{M}_{\boldsymbol{n}})$ de adapte olmuş çatıya göre Lie parantezi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$[E_i, E_j] = -x_\gamma^m R_{ijm}{}^h E_{h\gamma}$$

$$[E_{i_\alpha}, E_j] = -\delta_\alpha^\gamma \Gamma_{ij}^h E_{h\gamma}$$

$\left[E_{i_\alpha}, E_{j_\beta}\right] = 0$ (Okubo , 1966; Cordero , Dodson and Manuel de, 1989).

Burada $R_{ijm}{}^h$, $\mathbb{M}_{\boldsymbol{n}}$ nin eğrilik tensörünün bileşenleridir.

ARAŞTIRMA BULGULARI

Çatı Demette Levi-Civita Konneksiyon Katsayıları

∇, $F(\mathbb{M}_n)$ de Riemann konneksiyonu olsun. $F(\mathbb{M}_n)$ çatı demette adapte olmuş çatıya göre Riemann konneksiyonunun katsayılarını

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\left(E_{\gamma}\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_{\beta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma} - E_{\varepsilon}\tilde{g}_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}_{\gamma\beta} + \Omega_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\right) \tag{4.1}$$

formülü yardımıyla hesaplanır (Mok, 1978). Burada

$$\left[E_{\gamma}, E_{\beta}\right] = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}E_{\alpha} \tag{4.2}$$

eşitliği yardımıyla $\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ bileşenleri

1) $\Omega_{ij}{}^{k} = [E_iA_j{}^{A} - E_jA_i{}^{A}]A^{k}{}_{A}$

$= [E_iA_j{}^{h} - E_jA_i{}^{h}]A^{k}{}_{h} + [E_iA_j{}^{h_\tau} - E_jA_i{}^{h_\tau}]A^{k}{}_{h_\tau}$

$= \left[E_i\delta^h_j - E_j\delta^h_i\right]$

$= 0,$

2) $\Omega_{ij}{}^{k_\gamma} = [E_iA_j{}^{A} - E_jA_i{}^{A}]A^{k_\gamma}{}_{A}$

$= [E_iA_j{}^{h} - E_jA_i{}^{h}]A^{k_\gamma}{}_{h} + [E_iA_j{}^{h_\tau} - E_jA_i{}^{h_\tau}]A^{k_\gamma}{}_{h_\tau}$

$= \left[E_i\left(x^m_\tau \Gamma_{jm}{}^{h}\right) - E_j\left(x^m_\tau \Gamma_{im}{}^{h}\right)\right].\,\delta^\gamma_\tau\delta^k_h$

$$= \left[\left(\partial_i - x^t_\alpha\Gamma^s_{it}\frac{\partial}{\partial x^s_\alpha}\right)\left(-x^m_\tau\delta^\tau_\alpha\Gamma_{jm}{}^{h}\right) - \left(\partial_j - x^t_\beta\Gamma^s_{jt}\frac{\partial}{\partial x^s_\beta}\right)\left(-x^m_\tau\delta^\tau_\beta\Gamma_{im}{}^{h}\right)\right]\delta^\gamma_\tau\delta^k_h$$

$= \left(-x^m_\alpha\partial_i\Gamma^h_{jm} + x^t_\alpha\Gamma^s_{it}\delta^m_s\Gamma^h_{jm} + x^m_\beta\partial_j\Gamma^h_{im} - x^t{}_\beta\Gamma^s_{jt}\delta^m_s\Gamma^h_{im}\right)\delta^\gamma_\tau\delta^k_h$

$= -x^m_\alpha\left(\partial_i\Gamma^h_{jm} - \partial_j\Gamma^h_{im} + \Gamma^h_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma_{js}{}^{h}\Gamma^s_{im}\right)\delta^\alpha_\tau\delta^k_h$

$= -x^m_\alpha R_{ijm}{}^{h}\delta^\gamma_\tau\delta^k_h$

$= -R_{ijm}{}^{k}x^m_\alpha,$

3) $\Omega_{i_\alpha j}{}^{k} = \left[E_{i_\alpha} A_J{}^{A} - E_J A_{i_\alpha}{}^{A}\right] A^{k}{}_{A}$

$$= \left[E_{i_\alpha} A_j{}^{h} - E_j A_{i_\alpha}{}^{h}\right] A^{k}{}_{h} + \left[E_{i_\alpha} A_j^{h_\tau} - E_j A_{i_\alpha}{}^{h_\tau}\right] A^{k}{}_{h_\tau}$$

$$= \left[(\delta_i^\sigma \frac{\partial}{\partial x_\alpha^\sigma})\delta_j^h\right] - \left(\partial_j - x_\beta^t \Gamma_{jt}^s \frac{\partial}{\partial x_\beta^s}\right).0)\delta_h^k$$

$$= 0,$$

4) $\Omega_{i_\alpha j}{}^{k_\gamma} = \left[E_{i_\alpha} A_j{}^{h} - E_j A_{i_\alpha}{}^{h}\right] A^{k_\gamma}{}_{h} + \left[E_{i_\alpha} A_j{}^{h_\tau} - E_j A_{i_\alpha}^{h_\tau}\right] A^{k_\gamma}{}_{h_\tau}$

$$= \left[\left(\delta_i^\sigma \frac{\partial}{\partial x_\alpha^\sigma}\right)\right].(-x_\tau^m \Gamma_{jm}^h) - \left(\partial_j - x_\beta^t \Gamma_{jt}^s \frac{\partial}{\partial x_\beta^s}\right)\delta_\alpha^\tau \delta_i^h]\delta_\tau^\gamma \delta_h^k$$

$$= (\delta_i^\sigma \delta_\sigma^m \delta_\alpha^\tau \Gamma_{jm}^h)\delta_\tau^\gamma \delta_h^k$$

$$= -\Gamma_{ji}^k \delta_\alpha^\gamma,$$

5) $\Omega_{i j_\beta}{}^{k} = [E_i A_{j_\beta}{}^{h} - E_{j_\beta} A_i{}^{h}] A^{k}{}_{h} + [E_i A_{j_\beta}{}^{h_\tau} - E_{j_\beta} A_i{}^{h_\tau}] A^{k}{}_{h_\tau}$

$$= 0,$$

6) $\Omega_{i j_\beta}{}^{k_\gamma} = [E_i A_{j_\beta}{}^{h} - E_{j_\beta} A_i{}^{h}] A^{k_\gamma}{}_{h} + [E_i A_{j_\beta}{}^{h_\tau} - E_{j_\beta} A_i{}^{h_\tau}] A^{k_\gamma}{}_{h_\tau}$

$$= \left(\left(\partial_i - x_\alpha^t \Gamma_{it}^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right)\delta_\beta^\tau \delta_j^h - \left(\delta_j^\sigma \frac{\partial}{\partial x_\beta^\sigma}\right)(-x_\tau^m \Gamma_{im}^h)\right).\delta_\tau^\gamma \delta_h^k$$

$$= \delta_j^\sigma \delta_\sigma^m \delta_\beta^\tau \Gamma_{im}^h \delta_\tau^\gamma \delta_h^k$$

$$= \Gamma_{ij}^k \delta_\beta^\gamma,$$

7) $\Omega_{i_\alpha j_\beta}{}^{k} = [E_{i_\alpha} A_{j_\beta}{}^{h} - E_{j_\beta} A_{i_\alpha}{}^{h}] A^{k}{}_{h}$

$$= 0,$$

8) $\Omega_{i_\alpha j_\beta}{}^{k_\gamma} = [E_{i_\alpha} A_{j_\beta}{}^{h_\tau} - E_{j_\beta} A_{i_\alpha}{}^{h_\tau}] A^{k_\gamma}{}_{h_\tau}$

$$= \left[\left(\delta_i^\sigma \frac{\partial}{\partial x_\alpha^\sigma}\right) \delta_\beta^\tau \delta_j^h - \left(\delta_j^\sigma \frac{\partial}{\partial x_\beta^\sigma}\right) \delta_\alpha^\tau \delta_j^h\right] \delta_\tau^\gamma \delta_h^k$$

$$= 0$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca

$$\Omega_{\gamma\beta}^{\alpha} = \tilde{g}^{\alpha\varepsilon} \tilde{g}_{\sigma\beta} \Omega_{\varepsilon\gamma}{}^{\sigma}$$

olmak üzere $\Omega_{\gamma\beta}^{\alpha}$ bileşenleri

1) $\Omega^k{}_{ij} = \tilde{g}^{k\varepsilon} \tilde{g}_{\sigma j} \Omega_{\varepsilon i}{}^{\sigma}$

$$= \tilde{g}^{ka} \tilde{g}_{\sigma j} \Omega_{ai}{}^{\sigma} + \tilde{g}^{k a_\lambda} \tilde{g}_{\sigma j} \Omega_{a_\lambda i}^{\sigma}$$

$$= \tilde{g}^{ka} \tilde{g}_{hj} \Omega_{ai}{}^{k} + \tilde{g}^{ka} \tilde{g}_{h_\tau j} \Omega_{ai}{}^{h_\tau}$$

$$= 0,$$

2) $\Omega_{ij}^{k_\gamma} = \tilde{g}^{k_\gamma \varepsilon} \tilde{g}_{\sigma j} \Omega_{\varepsilon i}{}^{\sigma}$

$$= \tilde{g}^{k_\gamma a_\lambda} \tilde{g}_{hj} \Omega_{a_\lambda i}^{h}$$

$$+\tilde{g}^{k_\gamma a_\lambda} \tilde{g}_{h_\tau j} \Omega_{a_\lambda i}^{h_\tau}$$

$$= 0,$$

3) $\Omega_{i j_\beta}^{k} = \tilde{g}^{ka} \tilde{g}_{h j_\beta} \Omega_{ai}^{h} + \tilde{g}^{ka} \tilde{g}_{h_\tau j_\beta} \Omega_{ai}{}^{h_\tau}$

$$= \frac{1}{a} g^{ka} b \delta^{\tau\beta} G_{hj} \left(-R_{ais}{}^{h} x_\tau^s\right)$$

$$= -\frac{b}{a} \delta^{\tau\beta} g^{ka} g_{hm} J_j^m R_{ais}{}^{h} x_\tau^s$$

$$= -\frac{b}{a} R_{msi}{}^{k} x_\beta^s J_j^m,$$

4) $\Omega^{k_\gamma}{}_{i j_\beta} = \tilde{g}^{k_\gamma a_\lambda} \tilde{g}_{h_\tau j_\beta} \Omega_{a_\lambda i}{}^{h_\tau}$

$$= \frac{1}{b} \delta_{\gamma\lambda} G^{ka} b.\, \delta^{\tau\beta} G_{hj} \left(-\Gamma_{ia}^{h} \delta_\lambda^\tau\right)$$

$$= -G^{ka} G_{hj} \Gamma_{ia}^{h} \delta_\beta^\gamma,$$

5) ${\Omega^{k}}_{i_\alpha j} = \tilde{g}^{k\varepsilon}\tilde{g}_{\sigma j}{\Omega_{\varepsilon i_\alpha}}^{\sigma}$

$= \tilde{g}^{ka}\tilde{g}_{hj}{\Omega_{a i_\alpha}}^{k}$

$= 0,$

6) ${\Omega^{k_\gamma}}_{i_\alpha j} = \tilde{g}^{k_\gamma\varepsilon}\tilde{g}_{\sigma j}{\Omega_{\varepsilon i_\alpha}}^{\sigma}$

$= \tilde{g}^{k_\gamma a_\lambda}\tilde{g}_{hj}{\Omega_{a_\lambda i_\alpha}}^{h}$

$= 0,$

7) ${\Omega^{k}}_{i_\alpha j_\beta} = \tilde{g}^{k\varepsilon}\tilde{g}_{\sigma j_\beta}{\Omega_{\varepsilon i_\alpha}}^{\sigma} \qquad (\varepsilon = a\,, \sigma = h_\tau)$

$= \tilde{g}^{ka}\tilde{g}_{h_\tau j_\beta}{\Omega_{a i_\alpha}}^{h_\tau}$

$= \dfrac{1}{a}g^{ka}b\delta^{\tau\beta}G_{hj}\Gamma_{ai}^{h}\delta_{\alpha}^{\tau}$

$= \dfrac{b}{a}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^{h}\delta^{\tau\beta}\delta_{\alpha}^{\tau}$

$= \dfrac{b}{a}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^{h}\delta_{\alpha\beta},$

8) ${\Omega^{k_\gamma}}_{i_\alpha j_\beta} = \tilde{g}^{k_\gamma\varepsilon}\tilde{g}_{\sigma j_\beta}{\Omega_{\varepsilon i_\alpha}}^{\sigma}$

$= \tilde{g}^{k_\gamma a_\lambda}\tilde{g}_{h_\tau j_\beta}{\Omega_{a_\lambda i_\alpha}}^{h_\tau}$

$= 0$

bileşenleri hesaplanır. Bu bileşenler (4.1) eşitliğinde kullanılarak Levi-Civita konneksiyonun katsayıları,

$\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \dfrac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\left(E_\gamma\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_\beta\tilde{g}_{\varepsilon\gamma} - E_\varepsilon\tilde{g}_{\alpha\beta}\right) + \dfrac{1}{2}\left({\Omega_{\gamma\beta}}^{\alpha} + \Omega_{\gamma\beta}^{\alpha} + {\Omega_{\beta\gamma}}^{\alpha}\right)$

1) $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \dfrac{1}{2}\tilde{g}^{k\varepsilon}\left(E_i\tilde{g}_{\varepsilon j} + E_j\tilde{g}_{\varepsilon i} - E_\varepsilon\tilde{g}_{ij}\right) + \dfrac{1}{2}\left({\Omega_{ij}}^{k} + {\Omega^{k}}_{ij} + {\Omega^{k}}_{ji}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\tilde{g}^{ka}\left(E_i\tilde{g}_{aj} + E_j\tilde{g}_{ai} - E_a\tilde{g}_{ij}\right) + \dfrac{1}{2}\left({\Omega_{ij}}^{k} + {\Omega^{k}}_{ij} + {\Omega^{k}}_{ji}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a}g^{ka}\left[\left(\partial_i - x_\alpha^t\Gamma_{it}^{s}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right)ag_{aj} + \left(\partial_j - x_\alpha^t\Gamma_{jt}^{s}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right)ag_{ai} - \left(\partial_a - x_\alpha^t\Gamma_{at}^{s}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right)ag_{ij}\right]$

$= \dfrac{1}{2}g^{ka}\left(\partial_i g_{aj} + \partial_j g_{aj} - \partial_a g_{ij}\right)$

$$= \Gamma_{ij}^{k},$$

2) $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k_\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k_\gamma \varepsilon}\left(E_i\tilde{g}_{\varepsilon j} + E_j\tilde{g}_{\varepsilon i} - E_\varepsilon \tilde{g}_{ij}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{ij}{}^{k_\gamma} + \Omega^{k_\gamma}{}_{ij} + \Omega^{k_\gamma}{}_{ji}\right)$

$$= -\frac{1}{2}x_\gamma^m R\ {}_{ijm}{}^{k},$$

3) $\tilde{\Gamma}_{ij_\beta}^{k} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\varepsilon}\left(E_i\tilde{g}_{\varepsilon j_\beta} + E_{j_\beta}\tilde{g}_{\varepsilon i} - E_\varepsilon \tilde{g}_{ij_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{ij_\beta}{}^{k} + \Omega^{k}{}_{ij_\beta} + \Omega^{k}{}_{j_\beta i}\right)$

$$= -\frac{b}{a}x_\beta^s J_j^t R_{tsi}{}^{k},$$

4) $\widetilde{\Gamma}_{ij_\beta}^{k_\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k_\gamma \varepsilon}\left(E_i\tilde{g}_{\varepsilon j_\beta} + E_{j_\beta}\tilde{g}_{\varepsilon i} - E_\varepsilon \tilde{g}_{ij_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{ij_\beta}{}^{k_\gamma} + \Omega^{k_\gamma}{}_{ij_\beta} + \Omega^{k_\gamma}{}_{j_\beta i}\right)$

$$= \frac{1}{2}\tilde{g}^{k_\gamma a_\lambda}\left(\left(\partial_i - x_\alpha^t \Gamma_{it}^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right)\left(b\delta^{\lambda\beta}G_{aj}\right) + 0 - 0\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k \delta_\beta^\gamma - G^{ka}G_{hj}\Gamma_{ia}^h \delta_\beta^\gamma + 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{b}\delta_{\gamma\lambda}G^{ka}\left(b\delta^{\lambda\beta}\right)\left(\partial_i G_{aj}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta G^{ka}\left(\Gamma_{ia}^h G_{hj} + \Gamma_{ij}^h G_{ah}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k \delta_\beta^\gamma - G^{ka}G_{hj}\Gamma_{ia}^h \delta_\beta^\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta G^{ka}G_{hj}\Gamma_{ia}^h + \frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta G^{ka}G_{ah}\Gamma_{ij}^h + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^k \delta_\beta^\gamma - G^{ka}G_{hj}\Gamma_{ia}^h \delta_\beta^\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta G^{ka}G_{hj}\Gamma_{ia}^h + \frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta \delta_h^k \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{2}G^{ka}G_{hj}\Gamma_{ia}^h \delta_\beta^\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k \delta_\beta^\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\beta \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k \delta_\beta^\gamma$$

$$= \delta_\beta^\gamma \Gamma_{ij}^k,$$

3) $\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{k} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\varepsilon}\left(E_{i_\alpha}\tilde{g}_{\varepsilon j} + E_j\tilde{g}_{\varepsilon i_\alpha} - E_\varepsilon \tilde{g}_{i_\alpha j}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{i_\alpha j}{}^{k} + \Omega^{k}{}_{i_\alpha j} + \Omega^{k}{}_{j i_\alpha}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}R\ {}_{taj}{}^{k}x_\beta^a J_i^t,$$

6) $\widetilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{k_\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k_\gamma \varepsilon}\left(E_{i_\alpha}\tilde{g}_{\varepsilon j} + E_j\tilde{g}_{\varepsilon i_\alpha} - E_\varepsilon \tilde{g}_{i_\alpha j}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{i_\alpha j}{}^{k_\gamma} + \Omega^{k_\gamma}{}_{i_\alpha j} + \Omega^{k_\gamma}{}_{j i_\alpha}\right)$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{b}\delta_{\gamma\lambda}G^{ka}\left[\left(\partial_j - x_\beta^t \Gamma_{jt}^s \frac{\partial}{\partial x_\beta^s}\right)b\delta^{\lambda\alpha}G_{ai}\right] + \frac{1}{2}\left(-\Gamma_{ji}^k \delta_\alpha^\gamma - G^{ka}G_{hi}\Gamma_{ja}^h \delta_\alpha^\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha G^{ka}(\partial_j G_{ai}) + \frac{1}{2}\left(-\Gamma_{ji}^k \delta_\alpha^\gamma - G^{ka}G_{ih}\Gamma_{ja}^h \delta_\alpha^\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha G^{ka}\left(\Gamma_{ja}^h G_{hi} + \Gamma_{ji}^h G_{ah}\right) + \frac{1}{2}\left(-\Gamma_{ji}^k \delta_\alpha^\gamma - G^{ka}G_{ih}\Gamma_{ia}^h \delta_\beta^\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha G^{ka}G_{hi}\Gamma_{ja}^h + \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha G^{ka}G_{ah}\Gamma_{ji}^h - \frac{1}{2}\Gamma_{ji}^k\delta_\alpha^\gamma - \frac{1}{2}G^{ka}G_{ih}\Gamma_{ia}^h\delta_\beta^\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha G^{ka}G_{hi}\Gamma_{ja}^h + \frac{1}{2}\delta_\gamma^\alpha \Gamma_{ji}^k - \frac{1}{2}\Gamma_{ji}^k\delta_\alpha^\gamma - \frac{1}{2}G^{ka}G_{ih}\Gamma_{ia}^h\delta_\beta^\gamma$$

$$= 0,$$

7) $$\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j_\beta}^k = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\varepsilon}\left(E_{i_\alpha}\tilde{g}_{\varepsilon j_\beta} + E_j\tilde{g}_{\varepsilon i_\alpha} - E_\varepsilon \tilde{g}_{i_\alpha j_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{i_\alpha j_\beta}{}^k + \Omega^k{}_{i_\alpha j_\beta} + \Omega^k{}_{j_\beta i_\alpha}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{a}g^{ka}\left(\left(\partial_a - x_\lambda^t\Gamma_{at}^s\frac{\partial}{\partial x_\lambda^s}\right)b\delta^{\alpha\beta}G_{ij}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^h\delta_{\alpha\beta} + \frac{b}{a}g^{ka}G_{hi}\Gamma_{aj}^h\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$$= -\frac{b}{2a}\delta^{\alpha\beta}g^{ka}\left(\partial_a G_{ij}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^h\delta_{\alpha\beta} + \frac{b}{a}g^{ka}G_{hi}\Gamma_{aj}^h\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$$= -\frac{b}{2a}\delta^{\alpha\beta}g^{ka}\left(\Gamma_{ai}^s G_{sj} + \Gamma_{aj}^s G_{is}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^h\delta_{\alpha\beta} + \frac{b}{a}g^{ka}G_{hi}\Gamma_{aj}^h\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$s = h$ *alınarak*

$$= -\frac{b}{2a}\delta^{\alpha\beta}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^h - \frac{b}{2a}\delta^{\alpha\beta}g^{ka}G_{ih}\Gamma_{aj}^h + \frac{b}{2a}g^{ka}G_{hj}\Gamma_{ai}^h\delta_{\alpha\beta}$$

$$+\frac{b}{2a}g^{ka}G_{hi}\Gamma_{aj}^h\delta_{\alpha\beta}$$

$$= 0,$$

8) $$\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j_\beta}^{k_\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{k_\gamma\varepsilon}\left(E_{i_\alpha}\tilde{g}_{\varepsilon j_\beta} + E_j\tilde{g}_{\varepsilon i_\alpha} - E_\varepsilon\tilde{g}_{i_\alpha j_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{i_\alpha j_\beta}{}^{k_\gamma} + \Omega^{k_\gamma}{}_{i_\alpha j_\beta} + \Omega^{k_\gamma}{}_{j_\beta i_\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{k_\gamma a_\lambda}\left[\left(\delta_i^\sigma\frac{\partial}{\partial x_\alpha^\sigma}\right)b\delta^{\lambda\beta}G_{aj} + \delta_j^\sigma\frac{\partial}{\partial x_\beta^\sigma}b\delta^{\lambda\alpha}G_{ai} - \left(\delta_a^\sigma\frac{\partial}{\partial x_\lambda^\sigma}\right)b\delta^{\alpha\beta}G_{ij}\right]$$

$$= 0$$

şeklinde elde edilir.

Önerme 4.1: Adapte olmuş çatıya göre $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunun $\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}$ katsayıları aşağıdaki gibidir.

1) $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$,

2) $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k_\gamma} = -\dfrac{1}{2} x_\gamma^m R\ _{ijm}{}^{k}$,

3) $\tilde{\Gamma}_{ij_\beta}^{k} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{b}{a} x_\beta^s J_j^t R\ _{tsi}{}^{k}$,

4) $\tilde{\Gamma}_{ij_\beta}^{k_\gamma} = \delta_\beta^\gamma \Gamma_{ij}^{k}$,

5) $\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{k} = -\frac{1}{2}\frac{b}{a} R\ _{taj}{}^{k} x_\beta^a J_i^t$,

6) $\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{k_\gamma} = 0$,

7) $\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j_\beta}^{k} = 0$,

8) $\tilde{\Gamma}_{i_\alpha j_\beta}^{k_\gamma} = 0$.

Çatı Demette Levi-Civita Konneksiyonun Eğrilik Tensörü

Adapte olmuş çatıya göre $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunun katsayılarının bileşenleri $\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}$ olsun.

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = E_\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\sigma} - E_\beta \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\sigma} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\varepsilon} - \Omega_{\gamma\beta}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^{\sigma}$$

ifadesi ile $\widetilde{\nabla}$ nın adapte olmuş çatıda $(1,3)$ tipli $\tilde{R}$ eğrilik tensörünün bileşenlerini hesaplanır. Eğrilik tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

1) $\alpha = i,\ \beta = j,\ \gamma = k\ ,\sigma = h. \varepsilon = m,\ m_\tau$

$$\tilde{R}_{ijk}{}^{h} = E_i \tilde{\Gamma}_{jk}^{h} - E_j \tilde{\Gamma}_{ik}^{h} + \tilde{\Gamma}_{i\varepsilon}^{h}\tilde{\Gamma}_{jk}^{\varepsilon} - \tilde{\Gamma}_{j\varepsilon}^{h}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\varepsilon} - \Omega_{ij}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{h}$$

$$= \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^{h} - \partial_j \tilde{\Gamma}_{jk}^{h} + \tilde{\Gamma}_{im}^{h}\tilde{\Gamma}_{jk}^{m} + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{h}\tilde{\Gamma}_{jk}^{m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{jm}^{h}\tilde{\Gamma}_{ik}^{m} - \tilde{\Gamma}_{\mathrm{jm}_\tau}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{m}_\tau}$$

$$-\Omega_{ij}{}^{m}\tilde{\Gamma}_{mk}^{h} - \Omega_{ij}{}^{m_\tau}\tilde{\Gamma}_{m_\tau k}^{h}$$

$$= \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^{h} - \partial_j \tilde{\Gamma}_{jk}^{h} + \tilde{\Gamma}_{im}^{h}\tilde{\Gamma}_{jk}^{m} - \tilde{\Gamma}_{jm}^{h}\tilde{\Gamma}_{ik}^{m} + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsi}{}^{h} x_\tau^t J_m^s\right)\left(-\frac{1}{2} R_{jka}{}^{m} x_\tau^a\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsj}{}^{h} x_\tau^t J_m^s\right)\left(-\frac{1}{2} R_{ika}{}^{m} x_\tau^a\right) - \left(-x_\tau^a R_{ija}{}^{m}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsk}{}^{h} x_\tau^t J_m^s\right)$$

$$= R_{ijk}^{h} + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{tsj}{}^{h} R_{ika}{}^{m} - R_{tsi}{}^{h} R_{jka}{}^{m}\right) x_\tau^t x_\tau^a J_m^s + \frac{1}{2} R_{tsk}{}^{h} R_{ija}{}^{m} x_\tau^t x_\tau^a J_m^s,$$

2) $\tilde{R}_{ijk_\gamma}{}^{h} = E_i \tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{h} - E_j \tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{h} + \tilde{\Gamma}_{i\varepsilon}^{h}\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{\varepsilon} - \tilde{\Gamma}_{j\varepsilon}^{h}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{\varepsilon} - \Omega_{ij}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{h}$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^l \Gamma_{il}^{a}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^a}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsj}{}^{h} x_\gamma^t J_k^s\right) - \left(\partial_j - x_\beta^l \Gamma_{jl}{}^{a}\frac{\partial}{\partial x_\beta^a}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsi}{}^{h} x_\gamma^t J_k^s\right)$$

$$+\tilde{\Gamma}_{\mathrm{im}}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{m} + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{h}\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{jm}^{h}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{jm_\tau}^{h}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{m_\tau} - \Omega_{ij}{}^{m}\tilde{\Gamma}_{mk_\gamma}^{h}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[\partial_i x_\gamma^t \left(R_{tsj}{}^{h} J_k^s\right) - x_\alpha^l \Gamma_{il}^{a} R_{tsj}{}^{h} J_k^s \delta_\alpha^t \delta_\gamma^\alpha - \partial_j x_\gamma^t \left(R_{tsi}{}^{h} J_k^s\right)\right]$$

$$-x^l_\beta R_{tsi}{}^h \Gamma^a_{jl}\delta^t_\alpha \delta^\beta_\gamma J^s_k + \Gamma_{im}{}^h\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsj}{}^m x^t_\gamma J^s_k\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}{}^h x^t_\tau J^s_m\right)\left(\delta^\tau_\gamma \Gamma_{jk}{}^m\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^t_\gamma\left[\left(\partial_i R_{tsj}{}^h\right)J^s_k + R_{tsj}{}^h(\partial_i J^s_k) - \Gamma^a_{it}R_{asj}{}^h J^s_k - \left(\partial_j R_{tsi}{}^h\right)J^s_k - R_{tsi}{}^h(\partial_i J^s_k) + \Gamma_{jt}{}^a R_{asi}{}^h J^s_k\right]$$

$$+\Gamma_{im}{}^h R_{tsj}{}^m J^s_k + \Gamma_{jk}{}^m R_{tsi}{}^h J^s_m - \Gamma_{jm}{}^h R_{tsi}{}^h J^s_k - \Gamma_{ik}{}^m R_{tsj}{}^h$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^t_\gamma\Big[\left(\partial_i R_{tsj}{}^h\right)J^s_k + \Gamma_{ik}{}^m R_{tsj}{}^m J^s_m - \Gamma_{im}{}^s R_{tsj}{}^h J^m_k - \Gamma^a_{it}R_{asj}{}^h J^m_k - \left(\partial_j R_{tsi}{}^h\right)J^s_k$$
$$- \Gamma_{jk}{}^m R_{tsi}{}^h J^s_m + \Gamma_{jm}{}^s R_{tsi}{}^h J^m_k + \Gamma_{jt}{}^a R_{asi}{}^h J^s_k + \Gamma_{im}{}^h R_{tsj}{}^m J^s_k + \Gamma_{jk}{}^m R_{tsi}{}^h J^s_m$$
$$- \Gamma_{jm}{}^h R_{tsi}{}^m J^s_k - \Gamma_{ik}{}^m R_{tsj}{}^h J^s_m\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^t_\gamma\left[\partial_i R_{tsj}{}^h + \Gamma_{im}{}^h R_{tsj}{}^m - \Gamma^a_{it}R_{asj}{}^h - \Gamma_{is}{}^m R_{tmj}{}^h - \Gamma^m_{ij}R_{tsm}{}^h\right]J^s_m$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^t_\gamma\left[\partial_j R_{tsi}{}^h + \Gamma_{jm}{}^h R_{tsi}{}^m - \Gamma^a_{jt}R_{asi}{}^h - \Gamma_{js}{}^m R_{tmi}{}^h - \Gamma^m_{ji}R_{tsm}{}^h\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^t_\gamma J^s_k\left[\nabla_i R_{tsj}{}^h - \nabla_j R_{tsi}{}^h\right],$$

3) $\tilde{R}_{ijk}{}^{h_\sigma} = E_i\tilde{\Gamma}_{jk}^{\ h_\sigma} - E_j\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ h_\sigma} + \tilde{\Gamma}_{im}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{jk}^{\ m} + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{jk}^{\ m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{jm}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ m} - \tilde{\Gamma}_{jm_\tau}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ m_\tau}$

$$-\Omega_{ij}{}^\varepsilon\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}{}^h$$

$$= \left(\partial_i - x^t_\alpha\Gamma^l_{it}\frac{\partial}{\partial x^l_\alpha}\right)\left(-\frac{1}{2}R_{jka}{}^h x^a_\sigma\right) - \left(\partial_j - x^t_\beta\Gamma^l_{jt}\frac{\partial}{\partial x^l_\beta}\right)\left(-\frac{1}{2}R_{ika}{}^h x^a_\sigma\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}x^a_\sigma R_{ima}{}^h\,\Gamma^m_{jk}\right) + \left(\delta^\sigma_\tau\Gamma_{im}{}^h\right)\left(-\frac{1}{2}R_{jka}{}^m x^a_\tau\right) - \left(-\frac{1}{2}x^a_\sigma R_{jma}{}^h\Gamma^m_{ik}\right)$$

$$-\left(\delta^\sigma_\tau\Gamma_{jm}{}^h\right)\left(-\frac{1}{2}x^a_\tau R_{ika}{}^m\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^a_\sigma\left(\partial_i R_{jka}{}^h\right) + \frac{1}{2}x^t_\alpha\Gamma^l_{it}R_{jka}{}^h\delta^a_l\delta^a_\sigma + \frac{1}{2}x^a_\sigma\left(\partial_j R_{ika}{}^h\right) - \frac{1}{2}x^t_\beta\Gamma^l_{jt}R_{ika}{}^h\delta^a_l\delta^\beta_\sigma$$

$$-\frac{1}{2}x^a_\sigma R_{ima}{}^h\Gamma^m_{jk} + \left(\delta^\sigma_\tau\Gamma_{im}{}^h\right)\left(-\frac{1}{2}R_{jka}{}^m x^a_\tau\right) - \left(-\frac{1}{2}R_{jma}{}^h x^a_\sigma\right)\Gamma^m_{ik}$$

$$-\left(\delta^\sigma_\tau\Gamma_{jm}{}^h\right)\left(-\frac{1}{2}x^a_\tau R_{ika}{}^m\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\partial_i R_{jka}{}^h + \Gamma_{im}{}^h R_{jka}{}^m - \Gamma_{ij}{}^m R_{mka}{}^h - \Gamma_{ik}{}^m R_{jma}{}^h - \Gamma_{ia}{}^l R_{jkl}{}^h\right]x^a_\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\left[\partial_j R_{ika}{}^h + \Gamma_{jm}{}^h R_{ika}{}^h - \Gamma_{ij}{}^m R_{mka}{}^h - \Gamma^m_{jk}R_{ima}{}^h - \Gamma_{ja}{}^l R_{ikl}{}^h\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\nabla_i R_{jka}{}^{h} - \nabla_j R_{ika}{}^{h}\right)x_\sigma^a,$$

4) $\tilde{R}_{ijk_\gamma}{}^{h_\sigma} = E_i\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{\ h_\sigma} - E_j\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{\ h_\sigma} + \tilde{\Gamma}_{im}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{\ m} + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{\ m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{jm}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{\ m} - \tilde{\Gamma}_{jm_\tau}^{\ h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{\ m_\tau}$

$$-\Omega_{ij}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{\ h}$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^t\Gamma_{it}^s\frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right)\left(\delta_\gamma^\sigma\Gamma_{jk}^{\ h}\right) - \left(\partial_j - x_\beta^t\Gamma_{jt}^s\frac{\partial}{\partial x_\beta^s}\right)\left(\delta_\gamma^\sigma\Gamma_{ik}^{\ h}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}R_{ima}{}^{h}x_\sigma^a\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsj}{}^{m}x_\gamma^t J_k^s\right) + \left(\delta_\tau^\sigma\Gamma_{im}^h\right)\left(\delta_\gamma^\tau\Gamma_{jk}^{\ m}\right) - \left(-\frac{1}{2}R_{jma}{}^{h}x_\sigma^a\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}{}^{m}x_\gamma^t J_k^s\right)$$

$$-\left(\delta_\tau^\sigma\Gamma_{jm}^h\right)\left(\delta_\gamma^\tau\Gamma_{ik}^{\ m}\right)$$

$$= \delta_\gamma^\sigma\left(\partial_i\Gamma_{jk}^{\ h} - \partial_j\Gamma_{ik}^{\ h}\right) + \left(-\frac{1}{2}R_{ima}{}^{h}x_\sigma^a\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}{}^{m}x_\gamma^t J_k^s\right) + \delta_\tau^\sigma\Gamma_{im}^h\delta_\gamma^\tau\Gamma_{jk}^{\ m}$$

$$-\left(-\frac{1}{2}R_{jma}{}^{h}x_\sigma^a\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}{}^{m}x_\gamma^t J_k^s\right) - \left(\delta_\tau^\sigma\Gamma_{jm}^h\right)\delta_\gamma^\tau\Gamma_{ik}^m$$

$$= \delta_\gamma^\sigma\left(\partial_i\Gamma_{jk}^{\ h} - \partial_j\Gamma_{ik}^{\ h} + \Gamma_{im}^h\Gamma_{jk}^{\ m} - \Gamma_{jm}^h\Gamma_{ik}^{\ m}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{ima}{}^{h}R_{tsj}{}^{m} - R_{jma}{}^{h}R_{tsi}{}^{m}\right)x_\sigma^a x_\gamma^t J_k^s$$

$$= \delta_\gamma^\sigma R_{ijk}{}^{h} + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{ima}{}^{h}R_{stj}{}^{m} - R_{jma}{}^{h}R_{tsi}{}^{m}\right)x_\sigma^a x_\gamma^t J_k^s$$

$$= \delta_\gamma^\sigma R_{ijk}{}^{h}\frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{ima}{}^{h}R_{stj}{}^{m} - R_{jma}{}^{h}R_{tsi}{}^{m}\right)x_\sigma^a x_\gamma^t J_k^s$$

$$= \delta_\gamma^\sigma R_{ijk}{}^{h} + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{ima}{}^{h}R^{m}_{\ jts} - R_{jma}{}^{h}R^{m}_{\ its}\right)x_\sigma^a x_\gamma^t J_k^s,$$

5) $\tilde{R}_{ij_\beta k}{}^{h} = E_i\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{\ h} - E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ h} + \tilde{\Gamma}_{i\varepsilon}^{\ h}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{\ \varepsilon} - \tilde{\Gamma}_{j_\beta\varepsilon}^{\ h}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ \varepsilon} - \Omega_{ij_\beta}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{\ h}$

$$= \left(\left(\partial_i - x_\alpha^t\Gamma_{kt}^m\frac{\partial}{\partial x_\alpha^m}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^{h}x_\beta^t J_j^s\right) + \tilde{\Gamma}_{im}^h\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{\ h} + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{\ h}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{\ m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{j_\beta m}^{\ h}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ m}$$

$$-\tilde{\Gamma}_{j_\beta m_\tau}^{\ h}\tilde{\Gamma}_{ik}^{\ m_\tau} - \Omega_{ij_\beta}{}^{m}\tilde{\Gamma}_{mk}^{\ h} - \Omega_{ij_\beta}{}^{m_\tau}\tilde{\Gamma}_{m_\tau k}^{\ h}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[\left(\partial_i R_{tsk}{}^{h}\right)x_\beta^t J_j^s + R_{tsk}{}^{h}\left(\partial_i x_\beta^t\right)J_j^s + R_{tsk}{}^{h}x_\beta^t\left(\partial_i J_j^s\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[\Gamma_{it}^m R_{msk}{}^{h} - \Gamma_{im}^h R_{tsk}{}^{m} + \Gamma_{ik}^m R_{tsm}{}^{h}\right]x_\beta^t J_j^s - \frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^{h}x_\beta^t\Gamma_{ij}^m J_m^s$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[\partial_i R_{tsk}{}^{h} + \Gamma_{im}^h R_{tsk}{}^{m} - \Gamma_{it}^m R_{msk}{}^{h} - \Gamma_{is}^m R_{tmk}{}^{h} - \Gamma_{ik}^m R_{tsm}{}^{h}\right]x_\beta^t J_j^s$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}\nabla_i R_{tsk}{}^h x_\beta^t J_j^s,$$

6) $\tilde{R}_{ij_\beta k_\gamma}{}^h = E_i \tilde{\Gamma}_{j_\beta k_\gamma}^h - E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^h + \tilde{\Gamma}_{i\varepsilon}{}^h \tilde{\Gamma}_{j_\beta k_\gamma}^\varepsilon - \tilde{\Gamma}_{j_\beta \varepsilon}^h \tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^\varepsilon - \Omega_{ij_\beta}{}^\varepsilon \tilde{\Gamma}_{\varepsilon k_\gamma}^h$

$$= \left(-\delta_j^m \frac{\partial}{\partial x_\beta^m}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}{}^h x_\gamma^t J_m^s\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsm}{}^h x_\beta^t J_j^s\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{lpi}{}^m x_\gamma^l J_k^p\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}\delta_j^m R_{tsi}{}^h \delta_m^t \delta_\gamma^\beta J_k^s - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(R_{tsm}{}^h R_{lpi}{}^m\right) x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a} J_k^s R_{jsi}{}^h \delta_\gamma^\beta - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 R_{tsm}{}^h R_{lpi}{}^m x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p,$$

7) $\tilde{R}_{ij_\beta k}{}^{h_\sigma} = E_i \tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{h_\sigma} - E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{ik}^{h_\sigma} + \tilde{\Gamma}_{i\varepsilon}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^\varepsilon - \tilde{\Gamma}_{j_\beta\varepsilon}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik}^\varepsilon - \Omega_{ij_\beta}{}^\varepsilon \tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{h_\sigma}$

$$= E_i \tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{h_\sigma} - E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{ik}^{h_\sigma} + \tilde{\Gamma}_{im}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^m + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{j_\beta m}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik}^m - \tilde{\Gamma}_{j_\beta m_\tau}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik}^{m_\tau} - \Omega_{ij_\beta}{}^\varepsilon \tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{h_\sigma}$$

$$= \left(-\delta_j^t \frac{\partial}{\partial x_\beta^t}\right)\left(-\frac{1}{2}R_{ika}{}^h x_\sigma^a\right) + \tilde{\Gamma}_{im}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^m +$$

$$= \frac{1}{2}\delta_j^t R_{ika}{}^h \delta_t^a \delta_\beta^\sigma + \left(-\frac{1}{2}R_{ima}{}^h x_\sigma^a\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^m x_\beta^t J_j^s\right)$$

$$= \frac{1}{2}R_{ikj}{}^h \delta_\beta^\sigma - \frac{1}{4}\frac{b}{a}R_{ima}{}^h R_{tsk}{}^m x_\sigma^a x_\beta^t J_j^s,$$

8) $\tilde{R}_{ij_\beta k_\gamma}{}^{h_\sigma} = E_i \tilde{\Gamma}_{j_\beta k_\gamma}^{h_\sigma} - E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^{h_\sigma} + \tilde{\Gamma}_{i\varepsilon}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k_\gamma}^\varepsilon - \tilde{\Gamma}_{j_\beta\varepsilon}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{ik_\gamma}^\varepsilon - \Omega_{ij_\beta}{}^\varepsilon \tilde{\Gamma}_{\varepsilon k_\gamma}^{h_\sigma}$

$$= 0,$$

9) $\tilde{R}_{i_\alpha j_\beta k}{}^h = E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^h - E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^h + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^h \tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^m + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m_\tau}^h \tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{m_\tau} - \tilde{\Gamma}_{j_\beta m}^h \tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^m - \tilde{\Gamma}_{j_\beta m_\tau}^h \tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{m_\tau}$

$$-\Omega_{i_\alpha j_\beta}^\varepsilon \tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^h$$

$$= \delta_i^m \frac{\partial}{\partial x_\alpha^m}\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^h x_\beta^t J_j^s\right) - \delta_j^m \frac{\partial}{\partial x_\beta^m}\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^h x_\alpha^t J_i^s\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsm}{}^h x_\alpha^t J_i^s\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{lpk}{}^m x_\beta^l J_j^p\right)$$

$$-\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(R_{tsm}{}^h x_\beta^t J_j^s\right)\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(R_{lpk}{}^m x_\alpha^l J_i^p\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}\delta_\alpha^\beta\left[R_{isk}{}^h J_j^s - R_{jsk}{}^h J_i^s\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[R_{tsm}{}^h R_{lpk}{}^m\right] x_\alpha^t x_\beta^l J_i^s J_j^p$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[R_{tsm}{}^{h}R_{lpk}{}^{m}\right]x_\beta^t x_\alpha^l J_i^p J_j^s$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\delta_\alpha^\beta\left[R_{ksi}{}^{h}J_j^s-R_{ksj}{}^{h}J_i^s\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[R_{tsm}{}^{h}R_{lpk}{}^{m}\right]x_\alpha^t x_\beta^l J_i^s J_j^p$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[R_{tsm}{}^{h}R_{lpk}{}^{m}\right]x_\beta^t x_\alpha^l J_i^p J_j^s,$$

10) $\tilde{R}_{\mathrm{i}_\alpha j_\beta k_\gamma}{}^{h}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k_\gamma}^{h}-E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k_\gamma}^{h}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}{}^{h}\Gamma_{j_\beta k_\gamma}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{j_\beta\varepsilon}^{h}\Gamma_{i_\alpha k_\gamma}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha j_\beta}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k_\gamma}^{h}=0,$

11) $\tilde{R}_{\mathrm{i}_\alpha j_\beta k}{}^{h_\sigma}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{h_\sigma}-E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{h_\sigma}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}{}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{j_\beta\varepsilon}^{h_\sigma}\Gamma_{i_\alpha k}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha j_\beta}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{h_\sigma}=0,$

12) $\tilde{R}_{\mathrm{i}_\alpha j_\beta k_\gamma}{}^{h_\sigma}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{j_\beta k_\gamma}^{h_\sigma}-E_{j_\beta}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k_\gamma}^{h_\sigma}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}^{h_\sigma}\Gamma_{j_\beta k_\gamma}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{j_\beta\varepsilon}^{h_\sigma}\Gamma_{i_\alpha k_\gamma}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha j_\beta}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k_\gamma}^{h_\sigma}=0,$

13) $\tilde{R}_{i_\alpha jk}{}^{h_\sigma}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k}{}^{h_\sigma}-E_{\mathrm{j}}\tilde{\Gamma}_{ik}{}^{h_\sigma}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}\varepsilon}{}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha j}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}{}^{h_\sigma}$

$$=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k}{}^{h_\sigma}-E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{jk}{}^{h_\sigma}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{m}\tilde{\Gamma}_{jm}{}^{h_\sigma}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{m_\tau}\tilde{\Gamma}_{jm_\tau}^{h_\sigma}-\tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{jk}^{m}-\tilde{\Gamma}_{i_\alpha m_\tau}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{jk}{}^{m_\tau}-\Omega_{i_\alpha j}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}^{h_\sigma}$$

$$=\left(\delta_i^t\frac{\partial}{\partial x_\alpha^t}\right)\left(-\frac{1}{2}R_{jka}{}^{h}x_\sigma^a\right)+\left(\partial_j-x_\beta^t\Gamma_{jm}^l\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right)0-\tilde{\Gamma}_{jm}{}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{m}-\tilde{\Gamma}_{jm_\tau}{}^{h_\sigma}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{m}$$

$$=-\frac{1}{2}\delta_i^t R_{jka}{}^{h}\,\delta_t^a\delta_\alpha^\sigma-\left(-\frac{1}{2}R_{jma}{}^{h}x_\sigma^a\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^{m}x_\beta^t J_j^s\right)$$

$$=-\tfrac{1}{2}R_{jki}{}^{h}\delta_\alpha^\sigma-\tfrac{1}{4}\tfrac{b}{a}R_{jma}{}^{h}R_{tsk}{}^{m}x_\sigma^a x_\alpha^t J_i^s,$$

14) $\tilde{R}_{\mathrm{i}_\alpha jk_\gamma}{}^{h_\sigma}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k_\gamma}{}^{h_\sigma}-E_{\mathrm{j}}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k_\gamma}^{h_\sigma}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}^{h_\sigma}\Gamma_{\mathrm{j}k_\gamma}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}\varepsilon}{}^{h_\sigma}\Gamma_{i_\alpha k_\gamma}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha\mathrm{j}}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k_\gamma}^{h_\sigma}=0,$

15) $\tilde{R}_{\mathrm{i}_\alpha\mathrm{j}k_\gamma}{}^{\mathrm{h}}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k_\gamma}{}^{\mathrm{h}}-E_{\mathrm{j}}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k_\gamma}^{\mathrm{h}}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}^{\mathrm{h}}\Gamma_{\mathrm{j}k_\gamma}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}\Gamma_{i_\alpha k_\gamma}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha\mathrm{j}}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k_\gamma}^{\mathrm{h}}$

$$=\left(\delta_i^t\frac{\partial}{\partial x_\alpha^t}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsj}{}^{h}x_\gamma^t J_k^s\right)+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^{h}\Gamma_{\mathrm{j}k_\gamma}^{m}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha m_\tau}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{jk_\gamma}^{m_\tau}-\Omega_{i_\alpha\mathrm{j}}{}^{m}\tilde{\Gamma}_{mk_\gamma}^{\mathrm{h}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\delta_i^t R_{tsj}{}^{h}\delta_m^t\delta_\gamma^\alpha J_k^s+\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsm}{}^{h}x_\alpha^t J_i^s\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{lpj}{}^{m}x_\gamma^l J_k^p\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{isj}{}^{h}\delta_\gamma^\alpha J_k^s+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2x_\alpha^t x_\gamma^l J_i^s J_k^p R_{tsm}{}^{h}R_{lpj}{}^{m},$$

16) $\tilde{R}_{i_\alpha jk}{}^{\mathrm{h}}=E_{i_\alpha}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k}{}^{\mathrm{h}}-E_{\mathrm{j}}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{\mathrm{h}}+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha\varepsilon}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k}{}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{\varepsilon}-\Omega_{i_\alpha j}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon k}{}^{\mathrm{h}}$

$$=-\left(\partial_j-x_\beta^t\Gamma_{jt}^l\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^{h}x_\alpha^t J_i^s\right)+\tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{j}k}{}^{m}-\tilde{\Gamma}_{jm}{}^{\mathrm{h}}\tilde{\Gamma}_{i_\alpha k}^{m}-\Omega_{i_\alpha j}{}^{m_\tau}\tilde{\Gamma}_{m_\tau k}^{\mathrm{h}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\alpha^t\left[\partial_j\left(R_{tsk}{}^h J_i^s\right) - x_\beta^t \Gamma_{jt}^l R_{tsk}{}^h \delta_l^t \delta_\alpha^\beta J_i^s\right] + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsm}{}^h x_\alpha^t J_i^s\right)\Gamma_{jk}{}^m$$

$$-\Gamma_{jm}^h\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^m x_\alpha^t J_i^s\right) + \Gamma_{ji}{}^m \delta_\alpha^\tau\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^h x_\tau^t J_m^s\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\alpha^t\left[J_i^s\left(\partial_j R_{tsk}{}^h\right) + R_{tsk}{}^h\left(\partial_j J_i^s\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\beta^t \Gamma_{ji}{}^l R_{tsk}{}^h \delta_l^t \delta_\alpha^\beta J_i^s + \frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsm}{}^h \Gamma_{jk}{}^m x_\alpha^t J_i^s$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsk}{}^h \Gamma_{jm}^h x_\alpha^t J_i^s + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\alpha^t R_{tsk}{}^h \Gamma_{jk}{}^m J_m^s$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\alpha^t\left[G_j R_{tsk}{}^h J_i^s + R_{tsk}{}^h\left(\Gamma_{ji}{}^m J_m^s - \Gamma_{jm}^s J_i^m\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\alpha^t\left[\Gamma_{jt}{}^l R_{lsk}{}^h J_i^s + \Gamma_{jk}{}^h R_{tsm}{}^h J_i^s - \Gamma_{jm}^h R_{tsk}{}^m J_i^s + R_{tsk}{}^h \Gamma_{ji}{}^m J_m^s\right]$$

s=m alınarak

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\alpha^t \nabla_j R_{tsk}{}^h J_i^s.$$

Önerme 4.2.1: $\widetilde{\nabla}$ nın Adapte olmuş çatıda $\tilde{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir.

1) $\tilde{R}_{ijk}{}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{tsj}{}^h R_{ika}{}^m - R_{tsi}{}^h R_{jka}{}^m\right)x_\tau^t x_\tau^a J_m^s + \frac{1}{2}R_{tsk}{}^h R_{ija}{}^m x_\tau^t x_\tau^a J_m^s,$

2) $\tilde{R}_{ijk_\gamma}{}^h = \frac{1}{2}\frac{b}{a}x_\gamma^t J_k^s\left[\nabla_i R_{tsj}{}^h - \nabla_j R_{tsi}{}^h\right],$

3) $\tilde{R}_{ijk}{}^{h_\sigma} = -\frac{1}{2}\left(\nabla_i R_{jka}{}^h - \nabla_j R_{ika}{}^h\right)x_\sigma^a,$

4) $\tilde{R}_{ijk_\gamma}{}^{h_\sigma} = \delta_\gamma^\sigma R_{ijk}^h + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{ima}{}^h R_{jts}^m - R_{jma}{}^h R_{its}^m\right)x_\sigma^a x_\gamma^t J_k^s,$

5) $\tilde{R}_{ij_\beta k}{}^h = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\nabla_i R_{tsk}{}^h x_\beta^t J_j^s,$

6) $\tilde{R}_{ij_\beta k_\gamma}{}^h = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}J_k^s R_{jsi}{}^h \delta_\gamma^\beta - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 R_{tsm}{}^h R_{lpi}{}^m x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p,$

7) $\tilde{R}_{ij_\beta k}{}^{h_\sigma} = \frac{1}{2}R_{ikj}{}^h \delta_\beta^\sigma - \frac{1}{4}\frac{b}{a}R_{ima}{}^h R_{tsk}{}^m x_\sigma^a x_\beta^t J_j^s,$

8) $\tilde{R}_{ij_\beta k_\gamma}{}^{h_\sigma} = 0,$

9) $\tilde{R}_{i_\alpha j_\beta k}{}^h = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\delta_\alpha^\beta\left[R_{ksi}{}^h J_j^s - R_{ksj}{}^h J_i^s\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[R_{tsm}{}^h R_{lpk}{}^m\right]x_\alpha^t x_\beta^l J_i^s J_j^p$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[R_{tsm}{}^h R_{lpk}{}^m\right]x_\beta^t x_\alpha^l J_i^p J_j^s,$$

10) $\tilde{R}_{\dot{\imath}_\alpha j_\beta k_\gamma}{}^{h} = 0,$

11) $\tilde{R}_{\dot{\imath}_\alpha j_\beta k}{}^{h_\sigma} = 0,$

12) $\tilde{R}_{\dot{\imath}_\alpha j_\beta k_\gamma}{}^{h_\sigma} = 0,$

13) $\tilde{R}_{i_\alpha j k}{}^{h_\sigma} = -\frac{1}{2} R_{jki}{}^{h} \delta_\alpha^\sigma - \frac{1}{4}\frac{b}{a} R_{jma}{}^{h} R_{tsk}{}^{m} x_\sigma^a x_\alpha^t J_i^s,$

14) $\tilde{R}_{\dot{\imath}_\alpha j k_\gamma}{}^{h_\sigma} = 0,$

15) $\tilde{R}_{\dot{\imath}_\alpha j k_\gamma}{}^{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{isj}{}^{h} \delta_\gamma^\alpha J_k^s + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_\alpha^t x_\gamma^l J_i^s J_k^p R_{tsm}{}^{h} R_{lpj}{}^{m},$

16) $\tilde{R}_{i_\alpha j k}{}^{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\frac{b}{a} x_\alpha^t \nabla_j R_{tsk}{}^{h} J_i^s$

şeklindedir.

Çatı Demette Twin Metrikle Bozulmuş Sasaki-Mok Metriğinin Ricci Tensörü

$\mathrm{F}(\mathbb{M}_n)$ çatı demette twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriğinin Ricci eğrilik tensörü

$$\tilde{R}_{\beta\gamma} = \tilde{R}_{\varepsilon\beta\gamma}{}^{\varepsilon}$$

şeklindedir. Ricci tensörünün bileşenleri,

1) $\beta = j, \gamma = k$

$$\tilde{R}_{jk} = \tilde{R}_{\varepsilon jk}{}^{\varepsilon} = \tilde{R}_{ijk}{}^{i} + \tilde{R}_{i_\alpha jk}{}^{i_\alpha}$$

$$= R_{ijk}{}^{i} + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{tsj}{}^{i} R_{ika}{}^{m} - R_{tsi}{}^{i} R_{jka}{}^{m}\right) x_\tau^t x_\tau^a J_m^s + \frac{1}{2} R_{tsk}{}^{i} R_{ija}{}^{m} x_\tau^t x_\tau^a J_m^s - \frac{1}{2} R_{jki}{}^{i} \delta_\tau^\sigma$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{b}{a} R_{jma}{}^{i} R_{tsk}{}^{m} x_\tau^a x_\tau^t J_i^s$$

$$= R_{ijk}{}^{i} + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(R_{tsj}{}^{i} R_{ika}{}^{m}\right) x_\tau^t x_\tau^a J_m^s + \frac{1}{2} R_{tsk}{}^{i} R_{ija}{}^{m} x_\tau^t x_\tau^a J_m^s + \frac{1}{4}\frac{b}{a} R_{jma}{}^{i} R_{tsk}{}^{m} x_\sigma^a x_\alpha^t J_i^s$$

$$= R_{jk} - \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(J_m^s R_{stj}{}^{i} R_{ika}{}^{m} x_\tau^t x_\tau^a + J_i^s R_{stk}{}^{m} R_{jma}{}^{i} x_\sigma^a x_\alpha^t\right) - \frac{1}{2} J_m^s R_{ija}{}^{m} R_{stk}{}^{i} x_\tau^t x_\tau^a,$$

2) $\tilde{R}_{jk_\gamma} = \tilde{R}_{\varepsilon jk_\gamma}{}^{\varepsilon} = \tilde{R}_{ijk_\gamma}{}^{i} + \tilde{R}_{i_\alpha jk_\gamma}{}^{i_\alpha}$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a} x_\gamma^t J_k^s \left[\nabla_i R_{tsj}{}^{i} - \nabla_j R_{tsi}{}^{i}\right] + 0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a} x_\gamma^t J_k^s \nabla_i R_{tsj}^{\ \ \ i}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a} x_\gamma^t J_k^s (\nabla_t R_{sj} - \nabla_s R_{tj}),$$

$$3)\tilde{R}_{j_\beta k} = \tilde{R}_{\varepsilon j_\beta k}^{\ \ \ \ \ \varepsilon} = \tilde{R}_{i j_\beta k}^{\ \ \ \ \ i} + \tilde{R}_{i_\alpha j_\beta k}^{\ \ \ \ \ \ i_\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a} \nabla_i R_{tsk}^{\ \ \ i} x_\beta^t J_j^s + 0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b}{a} \nabla_i R_{tsk}^{\ \ \ i} x_\beta^t J_j^s,$$

$$4)\tilde{R}_{j_\beta k_\gamma} = \tilde{R}_{\varepsilon j_\beta k_\gamma}^{\ \ \ \ \ \ \ \varepsilon} = \tilde{R}_{i j_\beta k_\gamma}^{\ \ \ \ \ \ \ i} + \tilde{R}_{i_\alpha j_\beta k_\gamma}^{\ \ \ \ \ \ \ \ i_\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{jsi}^{\ \ \ i} \delta_\gamma^\beta J_k^s - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 R_{tsm}^{\ \ \ i} R_{lpi}^{\ \ \ m} x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 R_{tsm}^{\ \ \ i} R_{lpi}^{\ \ \ m} x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p$$

olarak bulunur.

Önerme 4.3.1: Ricci tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$1)\ \tilde{R}_{jk} = R_{jk} - \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(J_m^s R_{stj}^{\ \ \ i} R_{ika}^{\ \ \ m} x_\tau^t x_\tau^a + J_i^s R_{stk}^{\ \ \ m} R_{jma}^{\ \ \ i} x_\sigma^a x_\alpha^t\right) - \frac{1}{2} J_m^s R_{ija}^{\ \ \ m} R_{stk}^{\ \ \ i} x_\tau^t x_\tau^a,$$

$$2)\tilde{R}_{jk_\gamma} = \frac{1}{2}\frac{b}{a} x_\gamma^t J_k^s (\nabla_t R_{sj} - \nabla_s R_{tj}),$$

$$3)\tilde{R}_{j_\beta k} = \frac{1}{2}\frac{b}{a} \nabla_i R_{tsk}^{\ \ \ i} x_\beta^t J_j^s,$$

$$4)\tilde{R}_{j_\beta k_\gamma} = -\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 R_{tsm}^{\ \ \ i} R_{lpi}^{\ \ \ m} x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p.$$

Çatı Demette Twin Metrikle Bozulmuş Sasaki-Mok Metriğinin Skaler Eğriliği

$F(\mathbb{M}_n)$ çatı demette twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriğinin skaler eğriliği

$$\tilde{\sigma} = \tilde{R}_{\beta\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriğinin skaler eğriliği

$$\tilde{\sigma} = \tilde{R}_{\beta\gamma}\tilde{g}^{\beta\gamma} = \tilde{R}_{jk}\tilde{g}^{jk} + \tilde{R}_{jk_\gamma}\tilde{g}^{jk_\gamma} + \tilde{R}_{j_\beta k}\tilde{g}^{j_\beta k} + \tilde{R}_{j_\beta k_\gamma}\tilde{g}^{j_\beta k_\gamma}$$

$$= \frac{1}{a} g^{jk} \left[R_{jk} - \frac{1}{4}\frac{b}{a}\left(J_m^s R_{stj}{}^i R_{ika}{}^m x_\tau^t x_\tau^a - R_{jma}{}^i R_{tsk}{}^m x_\tau^a x_\tau^t J_i^s\right) - \frac{1}{2} J_m^s R_{ija}{}^m R_{stk}{}^i x_\tau^a x_\tau^t \right]$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[R_{stm}{}^i R_{pli}{}^m x_\beta^t x_\gamma^l J_j^s J_k^p\right] \frac{b}{a} \delta_{\beta\gamma} G^{jk}$$

$$= \frac{1}{a}\sigma - \frac{1}{4}\frac{b}{a^2} - \frac{1}{2a} R_{anij} R_{ts}{}^{ij} G^{ns} - \frac{b}{4a^2} R_{anij} R_{ts}{}^{ij} G^{ns}$$

$$= \frac{1}{a}\sigma - \frac{(2a+b)}{4a^2} R_{anij} R_{ts}{}^{ij} G^{ns}$$

$$= \frac{1}{a}\sigma - \frac{(2a+b)}{4a^2} G^{il} G^{jk} G^{ns} R_{anij} R_{tslk}$$

$$= \frac{1}{a}\sigma - \frac{(2a+b)}{4a^2} \parallel R_K \parallel_G$$

şeklinde elde edilir.

K Vektör Alanının Diverjansı

Bir $\mathbb{M}_n$ Riemann manifoldu üzerinde K vektör alanının diverjansı

$$divK = \nabla_i \mathrm{K}^i$$

olarak tanımlanır.

$F(\mathbb{M}_n)$ üzerindeki bir $\widetilde{K}$ vektör alanının diverjansı ise

$$div\widetilde{K} = \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{K}^\alpha = \widetilde{\nabla}_i \widetilde{K}^i + \widetilde{\nabla}_{i_\alpha} \widetilde{K}^{i_\alpha}$$

şeklinde tanımlanır. $K \in \mathbb{M}$ olmak üzere burada $\widetilde{K}$ vektör alanının yerine sırasıyla K nın tam, dikey ve yatay liftleri dikkate alınırsa

${}^C K$ vektör alanının diverjansı

$$E_i \widetilde{K}^i + \tilde{\Gamma}_{im}^{\,i} \widetilde{K}^m + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{\,i} \widetilde{K}^{m_\tau} + E_{i_\alpha} \widetilde{K}^{i_\alpha} + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^{\,i_\alpha} \widetilde{K}^m + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m_\tau}^{\,i_\alpha} \widetilde{K}^{m_\tau}$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^s \Gamma_{is}^r \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right) K^i + \Gamma_{im}{}^i K^m + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsi}{}^i x_\alpha^t J_m^s\right) \widetilde{K}^{m_\tau} + \delta_i^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\left(x_\alpha^n \nabla_n K^i\right)$$

$$= \partial_i K^i + \Gamma_{im}{}^i K^m + \delta_i^s \delta_s^n \delta_\alpha^\alpha \nabla_n K^i$$

$$= (1+n) \nabla_i K^i$$

şeklinde bulunur

${}^V K$ dikey liftinin diverjansı ise

$$div = \tilde{\nabla}_\alpha \widetilde{K}^\alpha = \tilde{\nabla}_i \widetilde{K}^i + \tilde{\nabla}_{i_\alpha} \widetilde{K}^{i_\alpha}$$

$$= 0 + \tilde{\nabla}_{i_\alpha}\widetilde{K}^{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha}\widetilde{K}^{i_\alpha} + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^{\ i_\alpha}\widetilde{K}^{m} + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m_\tau}^{\ i_\alpha}\widetilde{K}^{m_\tau}$$

$$= \delta_i^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s} K^i + 0$$

$$= 0$$

şeklindedir ve son olarak

${}^{H}K$ vektör alanın diverjansı ise

$$E_i\widetilde{K}^i + \tilde{\Gamma}_{iA}^{\ i}\widetilde{K}^A + E_{i_\alpha}\widetilde{K}^{i_\alpha} + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha A}^{\ i_\alpha}\widetilde{K}^A$$

$$= E_i\widetilde{K}^i + \tilde{\Gamma}_{im}^{\ i}\widetilde{K}^m + \tilde{\Gamma}_{im_\tau}^{\ i}\widetilde{K}^{m_\tau} + E_{i_\alpha}\widetilde{K}^{i_\alpha} + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m}^{\ i_\alpha}\widetilde{K}^m + \tilde{\Gamma}_{i_\alpha m_\tau}^{\ i_\alpha}\widetilde{K}^{m_\tau}$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^s \Gamma_{is}^r \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\right) K^i + \tilde{\Gamma}_{im}^{\ i}\widetilde{K}^m + \delta^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s} 0$$

$$= \partial_i K^i + \Gamma_{im}^{\ i} K^m$$

$$= \nabla_i K^i = divK$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.5.1: K vektör alanının diverjansı $divK$=0 ise K vektör alanı incompressible vektör alanı olarak adlandırılır. Yani $(\mathbb{M}_n, g)$ üzerindeki bir K vektör alanı sonsuz küçük bir dönüşüm olarak $(\mathbb{M}_n, g\ )$ nin hacim elamanını değiştirmiyorsa (invaryant bırakıyorsa) K bir incompressible (sıkıştırılmış) vektör alanıdır (Mok, 1978).

Önerme 4.5.1: i. $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerindeki bir K vektör alanını $F(\mathbb{M}_n)$ ye tam liftinin incompressible olması için K vektör alanı incompressible olmalıdır ($n \neq -1$).

ii. $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerindeki bir K vektör alanını $F(\mathbb{M}_n)$ ye yatay liftinin incompressible olması için K vektör alanı $\mathbb{M}_n$ de incompressible olmalıdır.

iii. $\mathbb{M}_n$ manifoldu üzerindeki bir K vektör alanını $F(\mathbb{M}_n)$ ye dikey lifti incompressible vektör alanıdır.

Rotasyon

Bir $(\mathbb{M}_n, g)$ Riemann manifoldu üzerindeki K vektör alanının rotasyonu

$$(rotK)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha K_\beta - \nabla_\beta K_\alpha$$

olarak tanımlanır.

$F(\mathbb{M}_n)$ çatı demette bir K vektör alanının rotasyonu $\mathrm{rot}\widetilde{K}$

$$\left(rot\widetilde{K}\right)_{\alpha\beta} = \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{K}_\beta - \widetilde{\nabla}_\beta \widetilde{K}_\alpha \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada yer alan $\widetilde{K}_\alpha$ kovektör bileşenleri,

$$\widetilde{K}_\alpha = \tilde{g}_{\alpha\beta} K^\beta$$

eşitliği kullanılarak sırasıyla K vektör alanının yatay, dikey ve tam liftlerine göre aşağıdaki gibi hesaplanır.

1) ${}^H K$ yatay liftin ${}^H K_\alpha$ kovektör bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$\alpha = i$ için,

$\widetilde{K}_i = \tilde{g}_{i\beta} K^\beta$

$\widetilde{K}_i = \tilde{g}_{ij} \widetilde{K}^j + \tilde{g}_{ij_\beta} \widetilde{K}^{j_\beta}$

$= a g_{ij} K^j$

$= a K_i$

$\alpha = i_\alpha\ için$

$\widetilde{K}_{i_\alpha} = \tilde{g}_{i_\alpha \beta} K^\beta$

$\widetilde{K}_{i_\alpha} = \tilde{g}_{i_\alpha j} K^j + \tilde{g}_{i_\alpha j_\beta} K^{j_\beta}$

$= 0$

şeklindedir. Yani ${}^H K$ bileşenleri

$${}^H K_\alpha = \begin{pmatrix} a g_{ij} K^j \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

2) ${}^V K$ dikey liftinin ${}^V K_\alpha$ kovektörünün bileşenleri;

$\alpha = i \qquad \widetilde{K}_i = \tilde{g}_{i\beta} K^\beta$

$\widetilde{K}_i = \tilde{g}_{ij} \widetilde{K}^j + \tilde{g}_{ij_\beta} \widetilde{K}^{j_\beta}$

$= 0$

$\alpha = i_\alpha$

$\widetilde{K}_{i_\alpha} = \tilde{g}_{i_\alpha j} K^j + \tilde{g}_{i_\alpha j_\beta} K^{j_\beta}$

$= b\delta^{\alpha\beta} G_{ij} K^j$

şeklindedir. Yani ${}^V K$ bileşenleri

$${}^V K_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ b\delta^{\alpha\beta} G_{ij} K^j \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

${}^C K$ liftinin ${}^C K_\alpha$ kovektörünün bileşenleri ise

$\alpha = i \qquad \widetilde{K}_i = \tilde{g}_{i\beta} K^\beta$

$\widetilde{K}_i = \tilde{g}_{ij} \widetilde{K}^j + \tilde{g}_{ij_\beta} \widetilde{K}^{j_\beta}$

$= a g_{ij} K^j$

$= a K_i$

$\alpha = i_\alpha \quad için$

$\widetilde{K}_{i_\alpha} = \tilde{g}_{i_\alpha j} K^j + \tilde{g}_{i_\alpha j_\beta} K^{j_\beta}$

$= b\delta^{\alpha\beta} G_{ij} X^a_\beta \nabla_a K^j$

$${}^C K_\alpha = \begin{pmatrix} a K_i \\ b\delta^{\alpha\beta} G_{ij} X^a_\beta \nabla_a K^j \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Bulunan bileşenler (4.2) eşitliğinde kullanılarak K vektör alanının dikey, yatay ve tam liftlerine göre rotasyonlarının bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\left(rot\widetilde{K}\right)_{\alpha\beta} = \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{K}_\beta - \widetilde{\nabla}_\beta \widetilde{K}_\alpha$$

${}^V K$ dikey liftinin rotasyonunun bileşenleri aşağıdaki hesaplamalarla elde edilir.

1)$\alpha = i, \beta = j$ için

$(rotK)_{ij} = \widetilde{\nabla}_i \widetilde{K}_j - \widetilde{\nabla}_j \widetilde{K}_i$

$= E_i \widetilde{K}_j - \widetilde{\Gamma}^A_{ij} \widetilde{K}_A - \left(E_j \widetilde{K}_i - \widetilde{\Gamma}^A_{ji} \widetilde{K}_A\right)$

$= 0 - \widetilde{\Gamma}^m_{ij} \widetilde{K}_m - \widetilde{\Gamma}^{m_\tau}_{ij} \widetilde{K}_{m_\tau} + \widetilde{\Gamma}^m_{ji} \widetilde{K}_m + \widetilde{\Gamma}^{m_\tau}_{ji} \widetilde{K}_{m_\tau}$

$= \left(\frac{1}{2} R_{ija}^{\ \ \ m} x^a_\tau\right) b\delta^{\tau\beta} G_{mh} K^h - \left(\frac{1}{2} R_{jia}^{\ \ \ m} x^a_\tau\right) b\delta^{\tau\sigma} G_{mh} K^h$

$= b\delta^{\tau\sigma} R_{ija}^{\ \ \ m} x^a_\tau G_{mh} K^h$

$2)\alpha = i_\alpha,\ \beta = j$ için

$$(rotK)_{i_\alpha j} = \widetilde{\nabla}_{i_\alpha}\widetilde{K}_j - \widetilde{\nabla}_j\widetilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha}\widetilde{K}_j - \widetilde{\Gamma}^A_{i_\alpha j}\widetilde{K}_A - \left(E_j\widetilde{K}_{i_\alpha} - \widetilde{\Gamma}^A_{j i_\alpha}\widetilde{K}_A\right)$$

$$= 0 - \widetilde{\Gamma}^m_{i_\alpha j}\widetilde{K}_m - \widetilde{\Gamma}^{m_\tau}_{i_\alpha j}\widetilde{K}_{m_\tau} - \left[\left(\partial_j - x^s_\beta \Gamma^{\ l}_{js}\frac{\partial}{\partial x^l_\beta}\right)(b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}K^h) + \widetilde{\Gamma}^m_{j i_\alpha}\widetilde{K}_m + \widetilde{\Gamma}^{m_\tau}_{j i_\alpha}\widetilde{K}_{m_\tau}\right]$$

$$= -\partial_j b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}K^h + \delta^\tau_\alpha\Gamma^m_{ji}(b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}K^h)$$

$$= -\mathrm{b}\delta^{\alpha\sigma}\left[\partial_j(G_{ih}K^h) + \Gamma^m_{ji}G_{mh}K^h\right]$$

$$= -b\delta^{\alpha\sigma}\nabla_j(G_{ih}K^h)$$

3) $\alpha = i,\ \beta = j_\beta$ için;

$$(rotK)_{ij_\beta} = \widetilde{\nabla}_i\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\nabla}_{j_\beta}\widetilde{K}_i$$

$$= E_i\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\Gamma}^A_{ij_\beta}\widetilde{K}_A - \left(E_{j_\beta}\widetilde{K}_i - \widetilde{\Gamma}^A_{j_\beta i}\widetilde{K}_A\right)$$

$$= \left(\partial_i - x^s_\alpha \Gamma^{\ l}_{is}\frac{\partial}{\partial x^l_\alpha}\right)\left(b\delta^{\beta\sigma}G_{jh}K^h\right) - \widetilde{\Gamma}^m_{ij_\beta}\widetilde{K}_m - \widetilde{\Gamma}^{m_\tau}_{ij_\beta}\widetilde{K}_{m_\tau} - 0 + \widetilde{\Gamma}^m_{j_\beta i}\widetilde{K}_m + \widetilde{\Gamma}^{m_\tau}_{j_\beta i}\widetilde{K}_{m_\tau}$$

$$= b\delta^{\alpha\beta}\left(\partial_i G_{jh}K^h\right) - \delta^\tau_\beta\Gamma^m_{ij}(b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}K^h)$$

$$= b\delta^{\alpha\gamma}\nabla_i\left(G_{jh}K^h\right)$$

4) $\alpha = i_\alpha,\ \beta = j_\beta$ için

$$(rotK)_{i_\alpha j_\beta} = \widetilde{\nabla}_{i_\alpha}\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\nabla}_{j_\beta}\widetilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha}\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\Gamma}^{\ A}_{i_\alpha j_\beta}\widetilde{K}_A - \left(E_{j_\beta}\widetilde{K}_{i_\alpha} - \widetilde{\Gamma}^{\ A}_{j_\beta i_\alpha}\widetilde{K}_A\right)$$

$$= \delta^s_i\frac{\partial}{\partial x^s_\alpha}\left(b\delta^{\beta\sigma}G_{jh}K^h\right) - 0 - \left(\delta^s_j\frac{\partial}{\partial x^s_\beta}b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}K^h - 0\right)$$

$$= 0$$

$$rot\ ^V K = \begin{pmatrix} b\delta^{\tau\sigma}R_{ija}^{\ \ \ m}x^a_\tau G_{mh}K^h & -b\delta^{\alpha\sigma}\nabla_j(G_{ih}K^h) \\ b\delta^{\alpha\gamma}\nabla_i\left(G_{jh}K^h\right) & 0 \end{pmatrix}$$

${}^{H}K$ yatay liftinin bileşenleri aşağıdaki gibidir:

1) $\alpha = i, \beta = j$

$$(rotK)_{ij} = \tilde{\nabla}_i \widetilde{K}_j - \tilde{\nabla}_j \widetilde{K}_i$$

$$= E_i \widetilde{K}_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^{A} \widetilde{K}_A - \left(E_j \widetilde{K}_i - \tilde{\Gamma}_{ji}^{A} \widetilde{K}_A\right)$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^s \Gamma_{is}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}\right) a g_{ji} K^i - \tilde{\Gamma}_{ij}^{m} \widetilde{K}_m - \tilde{\Gamma}_{ij}^{m_\tau} \widetilde{K}_{m_\tau}$$

$$-\left(\left(\partial_j - x_\beta^s \Gamma_{js}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right) a g_{ij} K^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^{m} \widetilde{K}_m - \tilde{\Gamma}_{ji}^{m_\tau} \widetilde{K}_{m_\tau}\right)$$

$$= a\partial_i\left(g_{ji} K^i\right) - \Gamma_{ij}^{m}\left(a g_{mj} K^j\right) - a\partial_j\left(g_{ij} K^j\right) - \Gamma_{ji}^{m}\left(a g_{mj} K^j\right)$$

$$= a\left(\partial_i K_j - \Gamma_{ij}^{m} K_m\right) - a\left(\partial_j K_i - \Gamma_{ji}^{m} K_m\right)$$

$$= a\left(\nabla_i K_j - \nabla_j K_i\right)$$

$$= a(rotK)_{ij}$$

2) $\alpha = i_\alpha, \beta = j$ için

$$(rotK)_{i_\alpha j} = \tilde{\nabla}_{i_\alpha} \widetilde{K}_j - \tilde{\nabla}_j \widetilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha} \widetilde{K}_j - \tilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{A} \widetilde{K}_A - \left(E_j \widetilde{K}_{i_\alpha} - \tilde{\Gamma}_{j i_\alpha}^{A} \widetilde{K}_A\right)$$

$$= \delta_i^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\left(a g_{ji} K^i\right) - \tilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{m} \widetilde{K}_m - 0 - \left[\left(\partial_j - x_\beta^s \Gamma_{js}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right) 0 - \tilde{\Gamma}_{j i_\alpha}^{m} \widetilde{K}_m - 0\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsj}^{\ \ m} x_\alpha^t J_i^s a g_{mj} K^j + \frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsj}^{\ \ m} x_\alpha^t J_i^s a g_{mj} K^j$$

$$= 0$$

3) $\alpha = i, \beta = j_\beta$ için;

$$(rotK)_{i j_\beta} = \tilde{\nabla}_i \widetilde{K}_{j_\beta} - \tilde{\nabla}_{j_\beta} \widetilde{K}_i$$

$$= E_i \widetilde{K}_{j_\beta} - \tilde{\Gamma}_{i j_\beta}^{A} \widetilde{K}_A - \left(E_{j_\beta} \widetilde{K}_i - \tilde{\Gamma}_{j_\beta i}^{A} \widetilde{K}_A\right)$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^s \Gamma_{is}^{\ l} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}\right) 0 - \tilde{\Gamma}_{i j_\beta}^{m} \widetilde{K}_m - 0 - \left(\delta_i^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha^s} a g_{ij} K^j - \tilde{\Gamma}_{j_\beta i}^{m} \widetilde{K}_m - \tilde{\Gamma}_{j_\beta i}^{m_\tau} \widetilde{K}_{m_\tau}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsi}^{\ \ m} x_\beta^t J_j^s a g_{mj} K^j + \frac{1}{2}\frac{b}{a} R_{tsi}^{\ \ m} x_\beta^t J_j^s a g_{mj} K^j$$

$$= 0$$

4) $\alpha = i_\alpha, \beta = j_\beta$ için

$$= (rotK)_{i_\alpha j_\beta} = \tilde{\nabla}_{i_\alpha}\tilde{K}_{j_\beta} - \tilde{\nabla}_{j_\beta}\tilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha}\tilde{K}_{j_\beta} - \tilde{\Gamma}_{i_\alpha j_\beta}^{A}\tilde{K}_A - \left(E_{j_\beta}\tilde{K}_{i_\alpha} - \tilde{\Gamma}_{j_\beta i_\alpha}^{A}\tilde{K}_A\right)$$

$$= 0$$

$$rot^H K = \begin{pmatrix} a(rotK)_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tanım 4.6.1: Bir K vektör alanıyla bağlantılı K_j 1-formunun rotasyonu $(rotK)_{ij} = 0$ ise K vetör alanı kapalıdır denir. Burada $K_j = g_{ij}K^i$ ve $(rotK)_{ij} = \partial_i K_j - \partial_j K_i = \nabla_i K_j - \nabla_j K_i = 0$ şeklindedir (Mok, 1978).

Önerme 4.61.

${}^H K$ nin kapalı olması için $\mathbb{M}_n$ deki K vektör alanının kapalı ve $a \neq 0$ olması gerekir.

${}^C K$ tam liftinin bileşenleri ise;

1)$\alpha = i, \beta = j$

$$(rotK)_{ij} = \tilde{\nabla}_i\tilde{K}_j - \tilde{\nabla}_j\tilde{K}_i$$

$$= E_i\tilde{K}_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^{A}\tilde{K}_A - \left(E_j\tilde{K}_i - \tilde{\Gamma}_{ji}^{A}\tilde{K}_A\right)$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^s \Gamma_{is}^{\ l}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}\right) a g_{ji}K^i - \tilde{\Gamma}_{ij}^{m}\tilde{K}_m - \tilde{\Gamma}_{ij}^{m_\tau}\tilde{K}_{m_\tau}$$

$$-\left(\left(\partial_j - x_\beta^s \Gamma_{js}^{\ l}\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right) a g_{ij}K^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^{m}\tilde{K}_m - \tilde{\Gamma}_{ji}^{m_\tau}\tilde{K}_{m_\tau}\right)$$

$$= a\partial_i K_j - \Gamma_{ij}^{m} aK_m + \frac{1}{2}R_{ija}^{\ \ m} x_\tau^a (b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}X_\sigma^s\nabla_s K^h)$$

$$-\left(a\partial_j K_i - \Gamma_{ji}^{m} aK_m + \frac{1}{2}R_{jia}^{\ \ m} x_\tau^a (b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}x_\sigma^s\nabla_s K^h)\right)$$

$$= a\left[\partial_j K_i - \Gamma_{ji}^{m}K_m\right] - a\left[\partial_j K_i - \Gamma_{ji}^{m}K_m\right] + bR_{ija}^{\ \ m}G_{mh}x_\tau^a x_\sigma^s \nabla_s K^h$$

$$= a\nabla_i K_j - a\nabla_j K_i + bR_{ija}^{\ \ m}G_{mh}x_\tau^a x_\sigma^s \nabla_s K^h$$

$$= a(rotK)_{ij} + bR_{ija}^{\ \ m}G_{mh}x_\tau^a x_\sigma^s \nabla_s K^h$$

$$= a(rotK)_{ij} + bR_{ija}^{\ \ \ m}G_{mh}x_\tau^a x_\sigma^s \nabla_s K_m$$

2) $\alpha = i_\alpha,\ \beta = j$ için

$$(rotK)_{i_\alpha j} = \widetilde{\nabla}_{i_\alpha}\widetilde{K}_j - \widetilde{\nabla}_j\widetilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha}\widetilde{K}_j - \widetilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{A}\widetilde{K}_A - \left(E_j\widetilde{K}_{i_\alpha} - \widetilde{\Gamma}_{j i_\alpha}^{A}\widetilde{K}_A\right)$$

$$= \delta_i^s\frac{\partial}{\partial x_\alpha^s}\left(a g_{ji}K^i\right) - \widetilde{\Gamma}_{i_\alpha j}^{m}\widetilde{K}_m - 0$$

$$-\left[\left(\partial_j - x_\beta^s\Gamma_{js}^{\ l}\frac{\partial}{\partial x_\beta^l}\right)(b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}x_\sigma^a\nabla_a K^h) - \widetilde{\Gamma}_{j i_\alpha}^{m}\widetilde{K}_m - \widetilde{\Gamma}_{j i_\alpha}^{m_\tau}\widetilde{K}_{m_\tau}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsj}^{\ \ \ m}x_\alpha^t J_i^s\left(a g_{mj}K^j\right) - b\delta^{\alpha\sigma}x_\sigma^a\partial_j(G_{ih}\nabla_a K^h) + x_\beta^s\Gamma_{js}^{\ l}b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}\delta_l^a\delta_\beta^\sigma\nabla_a K^h$$

$$+\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsj}^{\ \ \ m}x_\alpha^t J_i^s\left(a g_{mj}K^j\right) + \delta_\alpha^\tau\Gamma_{ji}^{\ m}(b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}x_\sigma^a\nabla_a K^h)$$

$s = a$ alalım;

$$= -b\delta^{\alpha\sigma}x_\sigma^a\left[\partial_j(G_{ih}\nabla_a K^h) - \Gamma_{ji}^{\ m}G_{mh}\nabla_a K^h - \Gamma_{ja}^{\ l}G_{ih}\nabla_a K^h\right]$$

$$= -bx_\alpha^a\left[\nabla_j(G_{ih}\nabla_a K^h)\right]$$

$$= -bx_\alpha^a G_{ih}\left[\nabla_j\nabla_a K^h\right]$$

3) $\alpha = i, \beta = j_\beta$ için;

$$(rotK)_{ij_\beta} = \widetilde{\nabla}_i\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\nabla}_{j_\beta}\widetilde{K}_i$$

$$= E_i\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\Gamma}_{ij_\beta}^{A}\widetilde{K}_A - \left(E_{j_\beta}\widetilde{K}_i - \widetilde{\Gamma}_{j_\beta i}^{A}\widetilde{K}_A\right)$$

$$= \left(\partial_i - x_\alpha^s\Gamma_{is}^{\ l}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}\right)\left(b\delta^{\beta\sigma}G_{jh}x_\sigma^a\nabla_a K^h\right) - \frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}^{\ \ \ m}x_\beta^t J_j^s\left(a g_{mj}K^j\right)$$

$$-\delta_\tau^\beta\Gamma_{ij}^{\ m}b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}x_\sigma^a\nabla_a K^h - \left(\delta_j^s\frac{\partial}{\partial x_\beta^s}a g_{ij}K^j - \frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}^{\ \ \ m}x_\beta^t J_j^s\left(a g_{mj}K^j\right) - 0\right)$$

$$= b\delta^{\beta\sigma}x_\sigma^a\partial_i\left(G_{jh}\nabla_a K^h\right) - x_\alpha^s\Gamma_{is}^{\ l}\, b\delta^{\beta\sigma}\, G_{jh}\delta_l^a\,\delta_\alpha^\sigma\nabla_a K^h - \delta_\tau^\beta\Gamma_{ij}^m b\delta^{\tau\sigma}G_{mh}x_\sigma^a\nabla_a K^h$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}^{\ \ \ m}x_\beta^t J_j^s a g_{mj}K^j + \frac{1}{2}\frac{b}{a}R_{tsi}^{\ \ \ m}x_\beta^t J_j^s a g_{mj}K^j$$

$$= b\delta^{\beta\sigma}x_\sigma^a\left[\partial_i\left(G_{jh}\nabla_a K^h\right) - \Gamma_{ij}^m G_{mh}\nabla_a K^h - \Gamma_{ia}^{\ l}G_{jh}\nabla_a K^h\right]$$

$$= bx^a_\beta\left[\nabla_i\left(G_{jh}\nabla_a K^h\right)\right]$$

$$= bx^a_\beta G_{jh}[\nabla_i\nabla_a K^h]$$

4) $\alpha = i_\alpha, \beta = j_\beta$ için

$$(rotK)_{i_\alpha j_\beta} = \widetilde{\nabla}_{i_\alpha}\widetilde{K}_{j_\beta} - \widetilde{\nabla}_{j_\beta}\widetilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= E_{i_\alpha}\widetilde{K}_{j_\beta} - \tilde{\Gamma}^{\ A}_{i_\alpha j_\beta}\widetilde{K}_A - \left(E_{j_\beta}\widetilde{K}_{i_\alpha} - \tilde{\Gamma}^{\ A}_{j_\beta i_\alpha}\widetilde{K}_A\right)$$

$$= E_{i_\alpha}\widetilde{K}_{j_\beta} - \tilde{\Gamma}^{\ m}_{i_\alpha j_\beta}\widetilde{K}_m - \tilde{\Gamma}^{\ m_\tau}_{i_\alpha j_\beta}\widetilde{K}_{m_\tau} - E_{j_\beta}\widetilde{K}_{i_\alpha}$$

$$= \delta^s_i\frac{\partial}{\partial x^s_\alpha}\left(b\delta^{\beta\sigma}G_{jh}x^a_\sigma\nabla_a K^h\right) - 0 - \delta^s_j\frac{\partial}{\partial x^s_\beta}\left(b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}x^a_\sigma\nabla_a K^h\right)$$

$$= \delta^s_i b\delta^{\beta\sigma}G_{jh}\delta^a_s\delta^\alpha_\sigma\nabla_a K^h - \delta^s_j b\delta^{\alpha\sigma}G_{ih}\delta^a_s\delta^\beta_\sigma\nabla_a K^h$$

$$= \delta^{\beta\alpha}\left(G_{jh}\nabla_i K^h - G_{ih}\nabla_j K^h\right)$$

$$= \delta^{\beta\alpha}b(Rot_G K)_{ij}$$

$$rot^c K = \begin{pmatrix} a(rotK)_{ij} + bR_{ija}^{\ \ \ m}G_{mh}x^a_\tau x^s_\sigma\nabla_s K_m & -bx^a_\alpha G_{ih}\left[\nabla_j\nabla_a K^h\right] \\ bx^a_\beta G_{jh}[\nabla_i\nabla_a K^h] & \delta^{\beta\alpha}b(Rot_G K)_{ij} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer $(rotK)_{ij} = 0$ ve $\nabla_i\nabla_a K^h = 0$ ise $R_{ija}^{\ \ \ m}\nabla_s K_m = 0$ olur. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.6.2: $\mathbb{M}_{\boldsymbol{n}}$ üzerindeki K vektör alanının $F(\mathbb{M}_{\boldsymbol{n}})$ ye tam lifti ${}^C K$ nin kapalı olması için gerek ve yeter şart K nın kapalı ve K nın ikinci mertebeden kovaryant türevinin sıfır olmasıdır.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak, $F(\mathbb{M}_n)$ çatı demette adapte olmuş çatıya göre- kovaryant ve kontravaryant bileşenleri sırasıyla,

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} ag_{ij} & 0 \\ 0 & b\delta^{\alpha\beta}G_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}g^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}\delta_{\alpha\beta}G^{ij} \end{pmatrix}$$

şeklinde olan twin metrikle bozulmuş Sasaki-Mok metriği ve

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\left(E_\gamma \tilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_\beta \tilde{g}_{\varepsilon\gamma} - E_\varepsilon \tilde{g}_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}_{\gamma\beta} + \Omega_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\right)$$

eşitliği kullanılarak $\tilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonunun katsayıları hesaplanmıştır.

İkinci olarak,

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = E_\alpha \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\sigma} - E_\beta \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\sigma} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}{}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\sigma} - \tilde{\Gamma}_{\beta\varepsilon}{}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} - \Omega_{\gamma\beta}{}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}{}^{\sigma}$$

eşitliği kullanılarak $F(\mathbb{M}_n)$ de $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun $\tilde{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri bulunmuştur.

Üçüncü olarak, $F(\mathbb{M}_n)$ de $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörünün bileşenleri bulunmuştur.

Dördüncü olarak, $F(\mathbb{M}_n)$ de $\tilde{\nabla}$ konneksiyonun skaler eğriliği hesaplanmıştır.

Beşinci olarak, $F(\mathbb{M}_n)$ de K vektör alanının yatay, dikey ve tam liftlerine göre diverjansları hesaplanmıştır.

Altıncı olarak, $F(\mathbb{M}_n)$ de yatay, dikey ve tam liftlerine göre K vektör alanı ile bağlantılı K_j kovektör alanlarının rotasyonları hesaplanıp, K vektör alanının liftlerinin kapalı olması için gerekli şartlar belirtilmiştir.

KAYNAKÇA

Cordero , L., Dodson, C., and Manuel de, L. (1989). *Differential Geometry of Frame Bundles* . Klwer Academic Publisher.

Hicks, N. (1971). *Notes on Differential Geometry* . New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Kühnel, W. (2005). *Differential Geometry Curves -Surfaces-Mnifolds.* New York,London: American Wiley &Sons.

Karakaş, E. (2016). *Tanjant Demette Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon.* Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Karaman, Ç. (2016). *Riemann Manifoldları Üzerindeki Bazı Özel Yapılar ve F-Konneksiyonlar*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Mok, K. (1978). On the differential geometry of frame bundles of Riemann manifolds.

Okubo , T. (1966, 12 01). On the differential geometry of frame bundles . *Annali di Matematica*.

Ozan , Y. (2016). *Türevlenenebilir Manifoldlara Giriş.* Ankara : ODTÜ Basım İşliği.

Salimov, A. ve Mağden, A. (2008). *Diferensiyel Geometri.* Erzurum: Aktif Yayınevi.

Şahin, B. (2022). *Diferensiyel Geometri.* Ankara: Palme.

Şuhubi, E. (2008). *Dış Form Analizi.* Ankara: TÜBA.

Yano, K. and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds* . Singapore: Word Scientific Publishing.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	**Ayşe TORUN**
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	**Nenehatun Kz Lisesi (YDA)**
Lisans:	**Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümü**
Yüksek lisans:	**Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Alanı**
Doktora:	
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	
Almanca:	-
Rusça:	-
Diğer	
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	