

**KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARI ANALİTİK YÖNTEMLERİN
HİDROELEKTRİK SANTRALİ DENGİ BACASI
PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İLE KİYASLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kürşat CANEVİ

Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN 2022

**KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARI ANALİTİK YÖNTEMLERİN
HİDROELEKTRİK SANTRALİ DENGİ BACASI
PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İLE KİYASLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Kürşat CANEVİ
180831201**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Galip OTURANÇ

HAZİRAN 2022

TEZ ONAYI

Kürşat CANEVİ tarafından hazırlanan **Yarı Analitik Yöntemlerin Hidroelektrik Santrali Denge Bacası Probleminin Çözümü ile Kıyaslanması** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:
Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Jüri Üyeleri

İmza:

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Doç.Dr. İbrahim AKTAŞ

Dr. Öğr. Üyesi Sema SERVİ

Tez Savunma Tarihi: 23/06/2022

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç.Dr. Ahmet KAYABAŞI
Enstitü Müdürü



BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Kürşat CANEVİ







Biricik aileme,



ÖNSÖZ

Bu tez hazırlanırken bilgilerinden, tecrübelerinden, birikimlerinden faydalandığım, benden değerli yardımlarını esirgemeyen kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Galip OTURANÇ’a çok teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitimim boyunca tecrübelerinden faydalandığım ve kendilerini tanıdığımı çok memnun olduğum Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Kamil Özdağ Fen Fakültesi Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Ayrıca benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ve tüm dostlarıma teşekkür ederim.

Haziran 2022

Kürşat CANEVİ



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	ix
İÇİNDEKİLER	xi
KISALTMALAR	xiii
SEMBOLLER	xv
ÇİZELGE LİSTESİ	xvii
ŞEKİL LİSTESİ	xix
ÖZET	xxi
ABSTRACT	xxiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	1
1.2 Literatür Araştırması	2
1.2.1 Diferansiyel dönüşüm yöntemi	2
1.2.2 Varyasyonel iterasyon yöntemi	3
1.2.3 Adomian ayrıştırma yöntemi	4
1.2.4 Runge-Kutta yöntemi	4
2. KURAMSAL TEMELLER	7
2.1 Adi Diferansiyel Denklemler	7
2.2 Fonksiyon Aileleri ve Bunların Diferansiyel Denklemleri	8
2.3 Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler	9
3. YARI ANALİTİK YÖNTEMLER	13
3.1 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi	13
3.1.1 Tek boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı işlemler	13
3.1.2 Lineer olmayan fonksiyonun diferansiyel dönüşümü	19
3.1.3 $Nu(x) = u^2(x)$ şeklindeki fonksiyonun diferansiyel dönüşümü	19
3.1.4 $Nu(x) = \sin(u(x))$ şeklindeki fonksiyonun diferansiyel dönüşümü	20
3.2 Varyasyonel İterasyon Yöntemi	25
3.3 Adomian Ayrıştırma Yöntemi	28
3.4 Runge-Kutta Yöntemi	31
4. DENGİ BACASI PROBLEMİNİN YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİ	33
4.1 Dengi Bacası Problemi	33
4.2 Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Uygulanması	36
4.3 Adomian Ayrıştırma Yönteminin Uygulanması	39
4.4 Varyasyonel İterasyon Yönteminin Uygulanması	42
4.5 Runge-Kutta-Fehlberg Yönteminin Uygulanması	45
4.6 Kullanılan Yöntemlerin Kıyaslanması	48
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55



KISALTMALAR

ADM	: Adomian Decomposition Method (Adomian Ayrıştırma Yöntemi)
DTM	: Differential Transform Method (Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi)
VIM	: Variational Iteration Method (Varyasyonel İterasyon Yöntemi)
RK	: Runge-Kutta-Method (Runge-Kutta Yöntemi)
RKF45	: Runge-Kutta-Fehlberg Method (Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi)





SEMBOLLER

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
Σ	: Toplam sembolü
$n!$	: Faktöriyel
e	: Euler sabiti
$\lim$	: Limit
$\sin()$	: Sinüs fonksiyonu
$\cos()$	: Kosinüs fonksiyonu
$\sinh()$	: Hiperbolik sinüs fonksiyonu
$\cosh()$	: Hiperbolik kosinüs fonksiyonu
$\ln()$	: Doğal logaritma fonksiyonu
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
d/dx	: x değişkenine göre türev
$\partial/\partial x$	: x değişkenine göre kısmi türev



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1:	Bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları.....	18
Çizelge 3.2:	$Nu(x)=u^2(x)$ şeklindeki lineer olmayan fonksiyonun diferansiyel dönüşüm kodları ve çıktıları.	20
Çizelge 3.3:	$Nu(x)=\sin(u(x))$ şeklindeki lineer olmayan fonksiyonun diferansiyel dönüşüm kodları ve çıktıları.	21
Çizelge 3.4:	Lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm fonksiyonları.	21
Çizelge 3.5:	(3.7) probleminin DTM ile çözümü için Maple kodları.	23
Çizelge 3.6:	(3.7) problemde DTM ve analitik çözüm kıyaslama kodları.	23
Çizelge 3.7:	Bazı denklemler için Lagrange çarpanları.	25
Çizelge 3.8:	(3.8) probleminin VIM ile çözüm için Maple kodları.	25
Çizelge 3.9:	(3.9) probleminin Lagrange çarpanının bulunması için Maple kodları.	27
Çizelge 3.10:	(3.21) probleminin ADM ile çözümü için Maple kodları.	30
Çizelge 3.11:	(3.22) probleminin RKF45 ile çözümü için Maple kodları.	31
Çizelge 4.1:	Denge bacası probleminin DTM ile çözüm için kullanılan Maple kodları.	36
Çizelge 4.2:	Denge bacası probleminin DTM ile yaklaşık çözümleri.	38
Çizelge 4.3:	Denge bacası probleminin ADM ile çözüm için kullanılan Maple kodları.	39
Çizelge 4.4:	Denge bacası probleminin ADM ile yaklaşık çözümleri.	41
Çizelge 4.5:	Denge bacası probleminin VIM ile çözümü için kullanılan kodlar.	42
Çizelge 4.6:	Denge bacası probleminin VIM ile yaklaşık çözümleri.	44
Çizelge 4.7:	Denge bacası probleminin RKF45 ile çözümü için kullanılan kodlar. ..	45
Çizelge 4.8:	Denge bacası probleminin RKF45 ile yaklaşık çözümleri.	47
Çizelge 4.9:	$x_1(t)$ denklemi için dört farklı yöntemle yaklaşık çözümler.	48
Çizelge 4.10:	$x_2(t)$ denklemi için dört farklı yöntemle yaklaşık çözümler.	49
Çizelge 5.1:	DTM-ADM-VIM çözümlerinin terim sayıları ve dereceleri.....	51



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 :	(3.7) probleminin analitik ve DTM ile çözüm grafikleri.....	24
Şekil 3.2 :	(3.8) probleminin analitik ve VIM ile çözüm grafikleri.....	26
Şekil 3.3 :	(3.21) probleminin analitik ve ADM ile çözüm grafikleri.	30
Şekil 3.4 :	(3.22) probleminin RKF45 ile çözüm grafiği.....	31
Şekil 4.1 :	Hidroelektrik santral su transfer sistemi.....	34
Şekil 4.2 :	Denge bacası probleminin DTM ile yaklaşık çözüm grafiği.....	37
Şekil 4.3 :	Denge bacası probleminin ADM ile yaklaşık çözüm grafiği.	40
Şekil 4.4 :	Denge bacası probleminin VIM ile yaklaşık çözüm grafiği.....	43
Şekil 4.5 :	Denge bacası probleminin RKF45 ile yaklaşık çözüm grafiği.....	46





ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI ANALİTİK YÖNTEMLERİN HİDROELEKTRİK SANTRALİ DENGİ BACASI PROBLEMİ ÇÖZÜMÜ İLE KİYASLANMASI

Kürşat CANEVİ

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Galip OTURANÇ

Haziran, 2022, 55 sayfa

Hidroelektrik santraller alternatif enerji kaynakları arasında önemli bir yere sahiptir. Bu santrallerin su transfer sistemindeki ani basınç değişimleri su darbesi adı verilen bir kavramı ortaya çıkarmaktadır. Hidroelektrik santrallerinde su basıncının kontrol altına alınması ve su darbesinin bu sistem üzerindeki elemanlara zarar vermemesi için genellikle denge bacası adı verilen bir yapı inşa edilir. Denge bacası barajın fiziksel özelliklerine göre inşa edilir. Denge bacasının tasarımında karşılaşılan mühendislik problemi, lineer olmayan ve analitik çözümü elde edilemeyen bir diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilir. Bu tezde literatürde mevcut olan ve bir başlangıç değer problemi olarak ifade edilmiş denge bacası probleminin, dört farklı nümerik yöntemle çözümünün bulunarak bu yöntemlerin etkinliğinin kıyaslanması amaçlanmıştır. Kullanılan yöntemler; diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi ve Runge-Kutta-Fehlberg yöntemidir. Hesaplama algoritmalarının uygulanması için Maple paket programı kullanılmıştır. Her bir yöntemle elde edilen çözümlerin grafikleri de elde edilmiştir. Ayrıca tüm sayısal sonuçlar tablolar halinde sunulmuştur. Elde edilen çözümlerin birbirlerine yakın ve tutarlı oldukları görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Denge bacası, diferansiyel dönüşüm yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, Runge-Kutta yöntemi, Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi



ABSTRACT

MsThesis

COMPARISON OF SEMI-ANALYTICAL METHODS WITH SOLVING SURGE TANK PROBLEM

Kürşat CANEVI

**Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof.Dr. Galip OTURANÇ

June, 2022, 55 pages

Hydroelectric power plants have an important place among alternative energy sources. Sudden pressure changes in the water transfer system in these power plants reveal a concept called water hammer. In hydroelectric power plants, a structure called surge tank is usually built in order to control the water pressure and to prevent the water hammer from damaging the elements on this system. The surge tank is constructed according to the physical characteristics of the dam. The engineering problem encountered in the design of the surge tank is expressed by a nonlinear differential equation system whose analytical solution cannot be obtained. In this thesis, it is aimed to compare the effectiveness of four different numerical methods by finding the solution of the surge tank problem, which is available in the literature and expressed as an initial value problem. The methods those are used for calculations are differential transform method, Adomian decomposition method, variational iteration method and Runge-Kutta-Fehlberg method. Maple software was used for the execution of the calculation algorithms. The graphs of the solutions were also obtained and also all numerical results are presented in tables. It has been observed that the obtained solutions are consistent with each other.

Keywords: Surge tank, differential transform method, variational iteration method, Adomian decomposition method, Runge-Kutta method, Runge-Kutta-Fehlberg method



1. GİRİŞ

Matematik, fizik ve mühendislik alanındaki pek çok problem diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu denklemlerin bazılarının analitik olarak çözümünü veren yöntemler mevcut olsa da analitik çözümüne ulaşmanın mümkün olmadığı türden diferansiyel denklemlerle de sık sık karşılaşmaktadır. Problemi ifade eden diferansiyel denklemlerin lineer olmaması veya mevcut analitik yöntemlerin bilgisayar yardımıyla çözüme ulaşmak için uygun olmaması sebeplerinden ötürü nümerik yöntemler önem kazanmaktadır.

1980’li yıllardan bu yana, analitik olarak çözülemeyen diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine ulaşabilmek için çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları Adomian (1984) tarafından tanıtılan Adomian ayrıştırma yöntemi, Zhou (1986) tarafından tanıtılan diferansiyel dönüşüm yöntemi ve He (1997) tarafından tanıtılan varyasyonel iterasyon yöntemidir.

1.1 Tezin Amacı

Hidroelektrik santralleri, alternatif enerji kaynakları içerisinde önemli bir yere sahiptir. Bu santrallerin barajlarındaki su transfer borularında, türbin vanalarının açma kapama manevraları suyun akış hızında ani değişimler meydana getirir. Bu ani hız değişimi sebebiyle basınç dalgalanmaları oluşmaktadır. Su darbesi adı verilen bu olgu, suyun ilerlediği boruya veya boruyla aynı hatta bulunan diğer elemanlara zarar verebilmektedir. Su rezervuarından türbinlere su taşıyan boru sisteminde türbin vanasından önce yerleştirilen ve su bacası olarak adlandırılan bir yapı sayesinde su darbesinin önüne geçilebilmektedir.

Bu tezde, denge bacası problemi tanıtılıp, bu problemi ifade eden lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin çözümleri yarı analitik yöntemlerle araştırılacaktır. Kullanılan yöntemlerin algoritmaları Maple 2021 paket programı üzerinde yazılmış kodlarla uygulanarak çözümler elde edilecektir. Problemin çözümünde kullanılacak

yöntemler, diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi ve Runge-Kutta-Fehlberg yöntemleridir.

1.2 Literatür Araştırması

Bu kısımda, genel anlamda çalışmaya yönelik literatür araştırması sunulmuştur. Aşağıda verilen yöntemlere ilişkin daha geniş bilgiye çeşitli kaynaklardan ulaşmak mümkündür (Keskin ve Oturanç, 2010). Çalışmada kullanacağımız yöntemler burada literatürden yararlanarak sunulmuştur.

1.2.1 Diferansiyel dönüşüm yöntemi

Literatürde lineer, lineer olmayan, adi türevli diferansiyel denklem şeklinde ifade edilen pek çok problemin çözümünde başarılı sonuçlar veren diferansiyel dönüşüm metodu Zhou (1986) tarafından tanıtılmıştır. İlk kez kullanıldığı bu çalışmada elektrik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri incelenmiştir. Daha sonra lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için kapalı seri çözüm formları elde edilerek bu yöntem geliştirilmiştir (Chen ve Ho, 1999).

Verilen fonksiyonların ilgili türevlerinin sembolik hesaplamalarının gerektiği Taylor yönteminde büyük mertebeler için yapılacak işlemler oldukça zahmetlidir ve uzun süre uğraştırır. Diferansiyel dönüşüm yöntemi ise hesaplanacak kısmın miktarını azaltır ve pek çok probleme kolayca uygulanabilmektedir. Bu çözüm yöntemi, diferansiyel denklem ve başlangıç değer bilgisi kullanarak seri çözümünün katsayılarını hesaplamayı kapsar. Hatta bu yöntemin, diferansiyel denklemlerin Taylor serisi çözümünü elde etmek için bir iteratif işlem olarak ele aldığı çalışmalar literatürde mevcuttur (Jang ve diğerleri, 2001).

Diferansiyel dönüşüm yöntemi, bir seri şeklinde hemen hemen analitik çözüm oluşturur. Sonsuz seri kapatılabildiğinde analitik çözüm fonksiyonu elde edilir. Bu yöntem ile diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir. Elde edilen denklemler de bazı basit işlemlerle sistematik bir şekilde kolayca çözülebilir.

Bu yöntemin dönüşüm ve ters dönüşüm fonksiyonlarının tanımı aşağıda verilmiştir.

Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere, $u(x)$ 'in tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır.

$U(k)$ dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, bu fonksiyonun diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) x^k \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır. (1.2) eşitliğinde (1.1) ifadesi yazılarak

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} x^k \quad (1.3)$$

eşitliği elde edilir.

1.2.2 Varyasyonel iterasyon yöntemi

He (1997) tarafından tanıtılan varyasyonel iterasyon yöntemi analitik çözümlere hızla yakınsayan çözümler veren başarılı bir yaklaşımdır. Yöntemin kullanılmasında gereken bilgisayar işlem gücünün az olması ve elde edilen nümerik sonuçların hata miktarının az olması bu yöntemin uygulamalarını arttırmıştır. Geliştirilen bu yöntem, otonom diferansiyel denklemlere (He, 2000), lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere (He, 2004), integro diferansiyel denklemlere uygulanmıştır (Wang ve He, 2007). Ayrıca, Burger ve coupled Burger, Schrödinger-KdV, genelleştirilmiş KdV ve sığ su denklemlerinin çözümlerinin araştırılmasında kullanılmıştır (Abdou ve Soliman, 2005).

Varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmasında, L lineer operatörü, N lineer olmayan operatörü ve $g(x)$ ise homojenliği bozan terim olmak üzere, çözüm aranan diferansiyel denklem,

$$Lu + Nu = g(x) \quad (1.4)$$

biçiminde ele alınır.

Varyasyonel iterasyon yöntemine göre denklemin,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\} ds \quad (1.5)$$

biçimindeki varyasyon fonksiyonu oluşturulur. Buradaki λ değeri, Lagrange çarpanı (Inokuti, 1978) olup varyasyon teorisinden hareketle Mathematica ve Maple gibi bazı programlar kullanılarak hesaplanır. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış varyasyon (He, 1999) olup $\delta\tilde{u}_n = 0$ 'dır. Bulunan λ çarpanına göre varyasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek çözümü verecek olan fonksiyon için rekürans bağıntısı elde edilmiş olur. Başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon u_0 olarak seçilerek $n > 0$ için u_n terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur. Nihayetinde çözüm fonksiyonu,

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (1.6)$$

eşitliğinden elde edilir.

1.2.3 Adomian ayrıştırma yöntemi

Adi diferansiyel denklemler için bir başka nümerik çözüm yöntemi de Adomian (1984) tarafından tanıtılan Adomian ayrıştırma yöntemidir. Adomian, bu yöntemi Picard yönteminden türetmiştir. Picard yönteminde kullanılan lineer olmayan fonksiyonların yerine kendi ismiyle anılan Adomian polinomlarını kullanmış ve ardışık integraller alarak yaklaşık çözüm elde etmiştir. Adomian polinomları lineer olmayan fonksiyonlara karşılık gelen Taylor seri açılımındaki katsayılardır.

1.2.4 Runge-Kutta yöntemi

Bir anlamda integrallerin yaklaşık hesabına ait Simpson kuralına dayanan bu yöntem ilk olarak Runge (1895) tarafından tanıtılmış ve kullanıldığı yıllarda diğer yöntemlere göre nispeten daha hassas sonuçlar vermiştir. Daha sonra Kutta (1901) bazı değişiklikler yaparak yöntemi daha iyi sonuçlar verecek hale getirmiştir.

Runge-Kutta tipi bağıntıların belirleyici özellikleri olarak; programlanmasının basit olması, kararlılık karakteristiklerinin olumlu oluşu, karmaşıklığa yol açmadan adım büyüklüklerinin değişebilir olması, çözümün başında özel hesaplamalar gerektirmeyişi söylenebilir.

Runge-Kutta yöntemi, değişik mertebelerden oluşan bağıntılar içerir. En çok kullanılan ve en etkin formül dördüncü mertebeden olan bağıntılardır.

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4)h \\
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + a_1h, y_i + b_{11}k_1h) \\
k_3 &= f(t_i + a_2h, y_i + b_{21}k_1h + b_{22}k_2h) \\
k_4 &= f(t_i + a_3h, y_i + b_{31}k_1h + b_{32}k_2h + b_{33}k_3h)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \frac{h}{6} \\
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1h}{2}\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2h}{2}\right) \\
k_4 &= f(t_i + h, y_i + k_3h)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

bulunur. Adi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için,

$$\begin{aligned}
y' &= f(t, y, z) ; \quad y(t_0) = y_0 \\
z' &= g(t, y, z) ; \quad z(t_0) = z_0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

sistemini göz önüne alırsak, bu denklem sisteminin çözümünü, dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemindeki formüllere benzer olarak

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k, z_k) & \Rightarrow l_1 &= g(t_k, y_k, z_k) \\
k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}, z_k + \frac{hl_1}{2}\right) & \Rightarrow l_2 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}, z_k + \frac{hl_1}{2}\right) \\
k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_2}{2}, z_k + \frac{hl_2}{2}\right) & \Rightarrow l_3 &= g\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_2}{2}, z_k + \frac{hl_2}{2}\right) \\
k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3, z_k + hl_3) & \Rightarrow l_4 &= g(t_k + h, y_k + hk_3, z_k + hl_3)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
z_{k+1} &= z_k + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

şeklinde verilir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde literatürde bilinen diferansiyel denklemler konusu ele alınacaktır. Matematikte önemli yere sahip olan bu konu için kolayca çok sayıda kaynağa erişmek mümkündür (Ross, 1984).

2.1 Adi Diferansiyel Denklemler

Bir bağımsız değişken, bu değişkenin fonksiyonu ve bu fonksiyonun bazı türevleri arasındaki bir bağıntıya diferansiyel denklem adı verilir. x değişkeninin fonksiyonu $y(x)$ olmak üzere, n .mertebeden bir diferansiyel denklem şu şekilde gösterilebilir:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Denklemin n .mertebeden olabilmesi için n .türevi denklemde görülmelidir.

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0 \quad (2.2)$$

F fonksiyonu $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ cinsinden lineer bir fonksiyon ise bu diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Eğer lineer değilse lineer olmayan(non-linear) diferansiyel denklem denir.

Bir diferansiyel denklemin mertebesi o denklemde yer alan en yüksek mertebeli türevin mertebesidir.

Eğer (2.1) denkleminde $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ yerinde $y = f(x)$ fonksiyonu ve bunun $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ türevleri konulduğunda denklem sağlanıyorsa $y = f(x)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin özel çözümü denir. Özel çözümler denklemin genel çözümündeki keyfi sabite özel değerler verilerek elde edilir.

2.2 Fonksiyon Aileleri ve Bunların Diferansiyel Denklemleri

Herhangi bir aralıkta diferansiyellenebilen fonksiyonların ailesi belirli bir aralıkta değişen C parametresi yardımıyla

$$y = f(x, C)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu fonksiyon ailesi denklemi ve bu denklemin türevi alınarak elde edilen

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} f(x, C)$$

denklemi arasında C parametresi yok edilirse x, y, y' arasında

$$u(x, y, y') = 0$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur. Bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

- Genel ikinci derecede eğrilerin diferansiyel denklemi $y''' = 0$ denklemdir. Çünkü bu tip eğrilerin denklemi

$$y = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

şeklinde olup, arka arkaya üç kez türev alındığında

$$y' = 2c_1x + c_2 \Rightarrow y'' = 2c_1 \Rightarrow y''' = 0$$

keyfi sabit içermeyen $y''' = 0$ denklemi elde edilir.

- Merkezi Ox ekseninde bulunan R yarıçaplı dairelerin denklemi olan

$$(x - c)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

denkleminin ve bu denklemin bir kez türevi alındığında elde edilen

$$2(x - c) + 2yy' = 0 \Rightarrow x - c = -yy'$$

denklemi arasında keyfi sabit yok edilirse bu dairelerin diferansiyel denklemleri elde edilmiş olur:

$$(yy')^2 + y^2 - R^2 = 0$$

- $y = (\ln x + C)x$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulmak için bu denklemde x değişkenine göre bir kez türev alınarak C sabiti çekilir ve verilen denklemde yerine yazılır.

$$y' = 1 + \ln x + C$$

$$C = y' - 1 - \ln x$$

$$y = y'x - x$$

2.3 Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.3)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemin çözümü

$$f(x, y, C) = 0 \quad (2.4)$$

şeklindedir. (2.4) denkleminde (2.3) ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümü denir. C'ye verilecek herhangi bir değere karşılık elde edilen çözüme özel çözüm denir. Ayrıca genel çözüm üzerinden elde edilemeyen ancak (2.3) denklemini sağlayan çözümlere de tekil çözüm denir.

$P(x), Q(y)$ fonksiyonları ile verilen,

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (2.5)$$

diferansiyel denkleminde değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem denir ve C keyfi sabit olmak üzere genel çözüm şu şekildedir:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \quad (2.6)$$

Değişkenlerine ayıramayan bazı denklemler değişken dönüşümleriyle değişkenlerine ayrılabilen hale dönüştürülebilir. Örneğin;

- $y' = \omega(ax + b) \Rightarrow \{u = ax + b\} \Rightarrow dy = \frac{1}{a} \omega(u) du$
- $y' = \omega(ay + b) \Rightarrow \{u = ay + b\} \Rightarrow \frac{du}{\omega(u)} = a dx$
- $y' = \omega(ax + by + c) \Rightarrow \{u = ax + by + c\} \Rightarrow \frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$
 $\Rightarrow \frac{du}{b\omega(u)+a} = dx$

$P(x, y), Q(x, y)$ fonksiyonları x ve y değişkenlerinin aynı dereceden homojen fonksiyonları ve homojenlik derecesi m ise,

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x, y)$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q(x, y)$$

olur. $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ aynı dereceden homojen fonksiyonlar olmak üzere

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.7)$$

denklemine homojen diferansiyel denklem denir. Bu denklemler $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ şekline getirilebilir. Bu tip denklemlerde $u = y/x$ veya $y = ux$ dönüşümleri uygulanarak değişkenlerine ayrılabilen tipe indirgenir. Genel çözüm için hesaplanacak olan integral için $u = y/x$ yazmak yeterlidir.

Eğer, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ şeklinde verilen diferansiyel denklem için,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu denkleme tam diferansiyel denklem denir. Bu halde,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = P(x, y) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = Q(x, y) \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir $\omega(x, y)$ fonksiyonu mevcuttur. Bu kısmi türevler (2.8) denkleminde yazılırsa

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sağlanır. Böylece diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy = d\omega = 0$$

şeklinde yazılır. Genel çözüm C keyfi sabit olmak üzere

$$\omega(x, y) = C$$

olduğu görülür. Çözüm için $\omega(x, y)$ fonksiyonunu bulmak yeterlidir. Fonksiyonu bulmak için ilk olarak (1.9) denkleminin integrali alınır.

$$\omega(x, y) = \int P(x, y)dx + f(y) = S(x, y) + f(y) \quad (2.11)$$

$f(y)$ 'nin bulunması için

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} + f'(y) = Q(x, y) \quad (2.12)$$

eşitliği kullanılır. Daha sonra buradan elde edilen $f(y)$, $\omega(x, y) = S(x, y) + f(y)$ denkleminde yerine yazılır ve $\omega(x, y) = C$ genel çözümü bulunur. $\omega(x, y)$ fonksiyonunu bulmak için (2.9) denklemi yerine (2.10) denkleminde integral alınabilir. Böylece (2.11) denkleminde $S(x, y) + f(y)$ şeklinde elde edilen çözüm adımı

$$\omega(x, y) = \int Q(x, y)dy + g(x) = T(x, y) + g(x) \quad (2.13)$$

halini alır. $g(x)$ fonksiyonunu bulmak için (2.12)'ye benzer şekilde ancak bu kez x değişkenine göre kısmi türev alınır.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemde (2.8) şartı sağlanmıyorsa bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. Ancak bu denklemle çarpılarak tam diferansiyel denklem haline dönüşmesini sağlayacak bir $\varphi(x, y)$ fonksiyonu bulunabilir. Bu fonksiyona integrasyon çarpanı denir.

$$\varphi(x, y)P(x, y)dx + \varphi(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

denkleminde tam diferansiyel olma şartı olan

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi P) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi Q)$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} P + \varphi \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} Q + \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow P \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

şeklinde birinci mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denklem olup çözümünü bulmak zor olduğundan bazı özel halleri ile alınabilir.

Diferansiyel operatörünün üç özelliği aşağıda verilmiştir:

$$\frac{d}{dx}(u(x) \pm \alpha v(x)) = \frac{d}{dx}u(x) \pm \alpha \frac{d}{dx}v(x) \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}u(x) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(u(x)v(x)) &= v(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x) + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x) + \\ &\dots + \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d^n}{dx^n}v(x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. YARI ANALİTİK YÖNTEMLER

Bu bölümde, literatür araştırmasında sözü geçen dört adet yöntemin özellikleri hakkında detaylar verilecektir. Yöntemlerin birer örnek üzerinde çözümü için uygulanan Maple program kodları (Keskin ve Oturanç, 2010) tarafından verilmiştir.

3.1 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu bölümde literatürde var olan diferansiyel dönüşüm yöntemi ve özellikleri hakkında bilgi verilecektir (Zhou, 1986), (Chen ve Ho, 1996), (Ayaz, 2003), (Kurnaz ve Oturanç, 2005).

Tek değişkene bağlı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması için kullanılabilecek bir yöntemdir.

3.1.1 Tek boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı işlemler

Bu bölümde, $w(x)$ dönüşümü bulunacak olan fonksiyon ve $W(k)$ ise bu fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, (1.1) ve (1.2) tanımlarından faydalanarak tek boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı cebirsel işlemler verilecektir (Chen ve Ho, 1996), (Chen ve Liu, 1998), (Chen ve Ho, 1999), (Hassan, 2004), (Arıkoğlu ve Özkol, 2005).

Teorem 3.1

Tek değişkenli $u(x)$, $v(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = u(x) \pm v(x)$$

ise sırasıyla $U(k)$, $V(k)$ ve $W(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = U(k) \pm V(k) \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$u(x) \Rightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \quad \text{ve} \quad v(x) \Rightarrow V(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}$$

olmak üzere

$$w(x) = u(x) \pm v(x) \quad \text{ise} \quad W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (u(x) \pm v(x)) \right]_{x=0}$$

Diferansiyel operatörünün (2.14) özelliğinden

$$\begin{aligned} W(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \pm \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} = \underbrace{\frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}}_{U(k)} \pm \underbrace{\frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}}_{V(k)} \\ W(k) &= U(k) \pm V(k) \end{aligned}$$

Teorem 3.2

Tek değişkenli $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer

$$w(x) = cu(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ fonksiyonları $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonların dönüşümleri olmak üzere

$$W(k) = cU(k) \quad (3.2)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$u(x)$ fonksiyonunun dönüşümü

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$$

olduğundan $w(x) = cu(x)$ ise

$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} cu(x) \right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün (2.14) özelliğinden

$$W(k) = c \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} = cU(k)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3

Tek değişkenli $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = \frac{d}{dx} u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ fonksiyonları $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonların diferansiyel dönüşümleri olmak üzere

$$W(k) = (k + 1)U(k + 1) \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$u(x) \Rightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0}$ olduğunu biliyoruz. $w(x) = \frac{du(x)}{dx}$ ise

$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d}{dx} u(x) \right) \right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün (2.15) özelliğinden

$$\begin{aligned} W(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x) \right]_{x=0} \\ &= (k + 1) \underbrace{\frac{1}{(k + 1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x) \right]_{x=0}}_{U(k+1)} \\ &= (k + 1)U(k + 1) \end{aligned}$$

Teorem 3.4

Tek değişkenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$w(x) = \frac{d^r}{dx^r} u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ fonksiyonları $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleri olmak üzere

$$W(k) = (k + 1)(k + 2) \dots (k + r)U(k + r) = \frac{(k + r)!}{k!} U(k + r) \quad (3.4)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.5

Tek değişkenli $w(x), u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer $w(x) = u(x).v(x)$ ise sırasıyla $W(k), U(k)$ ve $V(k)$ fonksiyonları $w(x), u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleri olmak üzere

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k - r) \quad (3.5)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$u(x) \Rightarrow U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \quad \text{ve} \quad v(x) \Rightarrow V(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0}$$

olmak üzere $w(x) = u(x)v(x)$ ise $W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (u(x)v(x)) \right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün (2.16) özelliğinden

$$\begin{aligned} W(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} (u(x)v(x)) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[v(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) + \binom{k}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) + \binom{k}{2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} u(x) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \binom{k}{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) + u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\ W(k) &= \frac{1}{k!} \left[v(x) \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \left[\binom{k}{1} \frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left[\binom{k}{2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} u(x) \right]_{x=0} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \left[u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\ W(k) &= \frac{1}{k!} \left[\left(\frac{d^k}{dx^k} u(x) \right) v(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[\frac{d}{dx} v(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} u(x) \right]_{x=0} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} v(x) \frac{d}{dx} u(x) \right]_{x=0} + \frac{1}{k!} \left[u(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \end{aligned}$$

$$W(k) = U(k)V(0) + U(k-1)V(1) + \dots + U(1)V(k-1) + U(0)V(k)$$

$$= \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$$

Teorem 3.6

Tek değişkenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer

$$w(x) = x^m$$

ise $W(k)$ fonksiyonu $w(x)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşümü olmak üzere

$$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.6)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

Öncelikle $\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0}$ ifadesinin eşitini bulalım. Karşımıza üç durum çıkmaktadır.

$k < m$ ise

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-k+1)x^{m-k}]_{x=0} = 0$$

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

$k = m$ ise

$$\left[\frac{d^m}{dx^m} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-m+1)x^{m-m}]_{x=0} = m!$$

$$W(m) = \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m}{dx^m} x^m \right]_{x=0} = \frac{1}{m!} = 1$$

$k > m$ ise

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = [m(m-1) \dots (m-m+1)0]_{x=0} = 0$$

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^m \right]_{x=0} = \frac{0}{k!} = 0$$

Bu üç durum göz önüne alınarak $w(x) = x^m$ olmak üzere

$$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları Çizelge 3.1’de yer almaktadır(Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.1: Bazı fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları.

Fonksiyon	Dönüşüm
$w(x) = u(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$
$w(x) = \frac{d}{dx} u(x) \frac{d}{dx} v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k (r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$
$w(x) = u(x)v(x)s(x)$	$W(k) = U(k) \otimes V(k) \otimes S(k)$ $= \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r-t)$
$w(x) = u(x)v(x) \frac{d^2}{dx^2} s(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r)V(t)S(k-r-t+2)$
$w(x) = a^{\lambda x}$	$W(k) = \frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$
$w(x) = \sinh(\lambda x)$	$W(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ tek ise} \\ 0, & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$w(x) = \cosh(\lambda x)$	$W(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$
$w(x) = \sin(ax + b)$	$W(k) = \frac{a^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$
$w(x) = \cos(ax + b)$	$W(k) = \frac{a^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + b\right)$
$w(x) = \int_{x_0}^x u(t)v(t)dt$	$W(k) = \frac{U(k-1) \otimes V(k-1)}{k}$

3.1.2 Lineer olmayan fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $U(k)$ olmak üzere, lineer olmayan $Nu(x)$ 'in diferansiyel dönüşümü ($Nu(x)$ fonksiyonu $u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan fonksiyonu)

$$N(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} Nu(x) \right]_{x=0}$$

veya

$$N(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} Nu(x) \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} N \left(\sum_{r=0}^{\infty} U(r)x^r \right) \right]$$

olarak tanımlanır. İlgili iki özel durum aşağıda verilmiştir.

3.1.3 $Nu(x) = u^2(x)$ şeklindeki fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$Nu(x) = u^2(x)$ olsun. $u(x)$ ' in diferansiyel dönüşüm karşılığının $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k$ olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi yerine yazarsak

$$Nu(x) = u^2(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k \right)^2 = (U(0) + U(1)x + U(2)x^2 + U(3)x^3 + \dots)^2$$

Bu denklemi x değişkeninin kuvvetlerine göre düzenlersek

$$\begin{aligned} Nu(x) &= \overbrace{U^2(0)}^{N(0)} + \overbrace{2U(0)U(1)}^{N(1)}x + \overbrace{(2U(0)U(2) + U^2(1))}^{N(2)}x^2 \\ &+ \underbrace{(2U(0)U(3) + 2U(1)U(2))}_{N(3)}x^3 + \underbrace{(2U(0)U(4) + 2U(1)U(3) + U^2(2))}_{N(4)}x^4 + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle $Nu(x) = u^2(x)$ lineer olmayan fonksiyonuna karşılık gelen diferansiyel dönüşümün karşılığı

$$N(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} u^2(x) \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{r=0}^{\infty} U(r)x^r \right)^2 \right]_{x=0}$$

ile tanımlanıp

$$N(0) = U^2(0)$$

$$N(1) = 2U(0)U(1)$$

$$N(2) = 2U(0)U(2) + U^2(1)$$

$$N(3) = 2U(0)U(3) + 2U(1)U(2)$$

$$N(4) = 2U(0)U(4) + 2U(3)U(1) + U^2(2)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Bu dönüşümün Maple kodları Çizelge 3.2 ile verilmiştir (Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.2: $Nu(x)=u^2(x)$ şeklindeki lineer olmayan fonksiyonun diferansiyel dönüşüm kodları ve çıktıları.

Kodlar	Çıktılar
$f1 := \text{add}(a[k]*x^k, k=0..3);$	$f1 := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$q := \text{collect}(f1^2, x);$	$q := a_3^2x^6 + 2a_3a_2x^5 + (2a_1a_3 + a_2^2)x^4$ $+ (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3$ $+ (2a_0a_2 + a_1^2)x^2$ $+ 2a_0a_1x + a_0^2$
for k from 0 to 3 do coeftayl(q, x=0, k)	a_0^2
end do;	$2a_0a_1$
	$2a_0a_2 + a_1^2$
	$2a_0a_3 + 2a_1a_2$

3.1.4 $Nu(x) = \sin(u(x))$ şeklindeki fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$Nu(x) = \sin(u(x))$ olsun. Dönüşüm karşılığı

$$N(0) = \sin(Y(0))$$

$$N(1) = \cos(Y(0))Y(1)$$

$$N(2) = \cos(Y(0))Y(2) - \frac{1}{2!}\sin(Y(0))Y^2(1)$$

$$N(3) = \cos(Y(0))Y(3) - \sin(Y(0))Y(2)Y(1) - \frac{1}{3!}\cos(Y(0))Y^3(1)$$

⋮

şeklinde olur.

Bu dönüşümün Maple kodları Çizelge 3.3 ile verilmiştir (Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.3: Nu(x)=sin(u(x)) şeklindeki lineer olmayan fonksiyonun diferansiyel dönüşüm kodları ve çıktıları.

Kodlar	Çıktılar
f1 :=add(a[k]*x^k, k=0 ..5);	$f1 := a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
q :=collect(sin(f1), x);	$q := \sin(a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$
for k from 0 to 3 do coeftayl(q, x=0, k) end do;	$\begin{aligned} &\sin(a_0) \\ &a_1 \cos(a_0) \\ &-\frac{\sin(a_0) a_1^2}{2} + \cos(a_0) (a_2) \\ &\cos(a_0) a_3 - \sin(a_0) a_1 a_2 - \frac{\cos(a_0) a_1^3}{6} \end{aligned}$

Lineer olmayan fonksiyonlar için (Keskin ve Oturanç, 2008) tarafından verilen dönüşümler Çizelge 3.4 ile gösterilmiştir.

Çizelge 3.4: Lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm fonksiyonları.

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$Ny(x) = y^m(x)$	$\begin{aligned} N(0) &= Y^m(0) \\ N(1) &= mY^{m-1}(0)Y(1) \\ N(2) &= \frac{1}{2}m(m-1)Y^{m-2}(0)Y^2(1) + mY^{m-1}(0)Y(2) \\ N(3) &= \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)Y^{m-3}(0)Y^3(1) \\ &\quad + m(m-1)Y^{m-2}(0)Y(2)Y(1) \\ &\quad + mY^{m-1}(0)Y(3) \\ &\vdots \end{aligned}$

Çizelge 3.4 (devamı):

Lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm fonksiyonları.

Fonksiyon	Dönüşüm Karşılığı
$Ny(x) = \cos(y(x))$	$N(0) = \cos(Y(0))$ $N(1) = -\sin(Y(0))Y(1)$ $N(2) = -\sin(Y(0))Y(2) - \frac{1}{2!}\cos(Y(0))Y^2(1)$ $N(3) = -\sin(Y(0))Y(3)$ $\quad - \cos(Y(0))Y(2)Y(1)$ $\quad + \frac{1}{3!}\sin(Y(0))Y^3(1)$ $\vdots$
$Ny(x) = e^{y(x)}$	$N(0) = e^{Y(0)}$ $N(1) = Y(1)e^{Y(0)}$ $N(2) = \left(Y(2) + \frac{1}{2!}Y^2(1)\right)e^{Y(0)}$ $N(3) = \left(Y(3) + Y(1)Y(2) + \frac{1}{3!}Y^3(1)\right)e^{Y(0)}$ $\vdots$
$Ny(x)$	<pre> #Maple Kodu restart; NF:=N(y(x)): #Fonksiyon m:=5: #Mertebe y[x]:=sum(y[b]*x^b, b=0..m): NF[x]:=subs(y(x)=y[x],NF): s:=expand(NF[x],x): dt:=unapply(s,x): for i from 0 to m do: n[i]:=((D@@i)(dt)(0)/i!): print(N[i],n[i]); od: #for ve od: arasi tek satirda yazilmali </pre>

$$y'' + 9y = 0; y(0) = -3; y'(0) = 1 \quad (3.7)$$

başlangıç değer probleminin çözümünü DTM ile bulmak için Maple kodları Çizelge 3.5 ile verilmiştir (Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.5: (3.7) probleminin DTM ile çözümü için Maple kodları.

Kodlar	Açıklama
restart;	-
y[0] := -3; y[1] := 1;	#başlangıç değerleri
m:=10;	#mertebe
for k from 0 to 10 do y[k + 2] := -9*y[k]/((k + 1)*(k + 2)); end do;	#seri katsayıları hesaplanır
s := 0;	#çözüm denklemi
for k from 0 to 10 do s := s + y[k]*x^k; end do;	oluşturulur
print(s);	#çözüm ekrana yazdırılır

Bu kodlara karşılık elde edilen çözüm 11 terimli bir polinom olarak bulunmuş olur. Analitik çözümü olan,

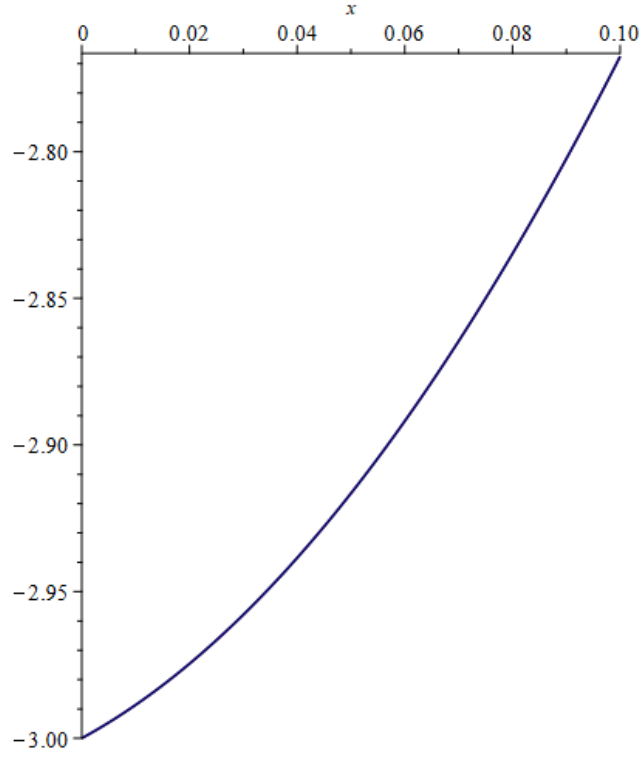
$$y(x) = \frac{1}{3} \sin(3x) - 3\cos(3x)$$

ile kıyaslamak için Çizelge 3.6'daki kodlar ilave edilebilir.

Çizelge 3.6: (3.7) probleminde DTM ve analitik çözüm kıyaslama kodları.

Kodlar	Açıklama
ode := diff(u(x), x \$ 2) = -9*u(x);	#denklem
ics := u(0) = -3, D(u)(0) = 1;	#başlangıç şartları
ds := dsolve({ics, ode});	#analitik çözüm
plot([s, rhs(ds)], x = 0 .. 0.1, color[red, blue], style = [line, line]);	#sayısal ve analitik çözüm grafikleri

Şekil 3.1’de görüleceği üzere (3.7) probleminin analitik çözümü ve DTM ile çözümü aynı sonucu vermektedir.



Şekil 3.1 : (3.7) probleminin analitik ve DTM ile çözüm grafikleri.

3.2 Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Bu yöntemin uygulanmasında ihtiyaç duyulan integrasyon çarpanı, bazı fonksiyonlar için Çizelge 3.7’de verilmiştir (Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.7: Bazı denklemler için Lagrange çarpanları.

Denklem	Lagrange çarpanı
$y' = f(t)$	$\lambda(s) = -1$
$y'' = f(t)$	$\lambda(s) = s - t$
$y' + y = f(t)$	$\lambda(s) = -e^{s-t}$
$y' - y = f(t)$	$\lambda(s) = -e^{-s+t}$

Varyasyonel iterasyon yöntemi için

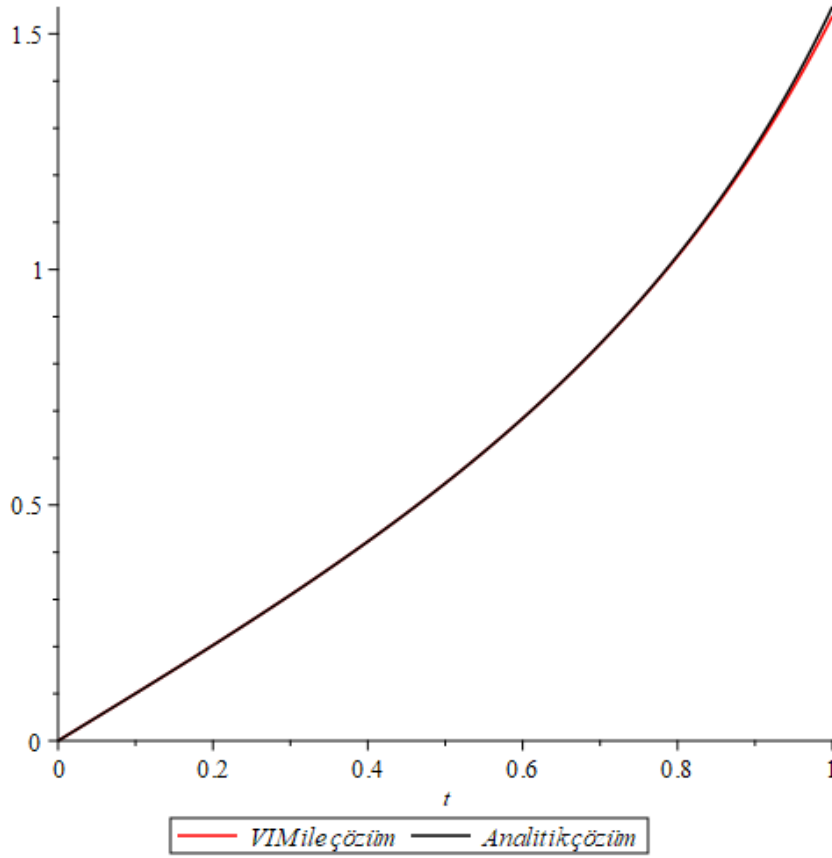
$$y' = 1 + y^2, y(0) = 0 \quad (3.8)$$

denklemini üzerinde Maple program kodları Çizelge 3.8 ile verilmiştir (Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.8: (3.8) probleminin VIM ile çözüm için Maple kodları.

Kodlar	Açıklamalar
restart:	
y[0]:=0:	#başlangıç değeri
for k from 0 to 3 do y[k+1]:=y[k]-int(diff(y[k],t)-y[k]^2-1,t=0..t); od:	#çözüm adımları
print(Adim,k,Yaklaşık_Çözüm,y[k]):	#bulunan çözüm ekrana yazdırılır
with(plots):	
fig1:=plot(tan(t),t=0..1,color=black,legend=Analitik çözüm):	#analitik ve
fig2:=plot(y[k],t=0..1, color=red,legend=VIM ile çözüm):	VIM çözüm grafikleri oluşturma
display({fig1,fig2});	#grafikleri yazdırma

Problemin VIM ile çözüm ve analitik çözüm grafikleri Şekil 3.2’de birlikte verilmiştir.



Şekil 3.2 : (3.8) probleminin analitik ve VIM ile çözüm grafikleri.

Lagrange çarpanının,

$$y' = -y + y^2; y(0) = 2 \quad (3.9)$$

problemi için bulunması Çizelge 3.9 ile verilen kodlarla yapılır (Keskin ve Oturanç, 2010).

Çizelge 3.9: (3.9) probleminin Lagrange çarpanının bulunması için Maple kodları.

Kodlar

restart:

with(PDEtools):

linear_part:=diff(u(t),t): #lineer kısım

m:=1: #mertebe

equ[m]:=linear_part:

for h from m by -1 to 1 do a[h]:=coeff(equ[h],diff(u(t),t\$h)): equ[h-1]:=equ[h]-
a[h]*diff(u(t),t\$h):end do:

a[0]:=coeff(equ[0],u(t)):

for i1 from 1 by 1 to m+1 do b[i1]:=0:end do:

k:=m+1:

n1:=1:

for r1 from 0 by 1 to m-1 do k:=k-1: n1:=n1*(-1): for r from 1 by 1 to k do
b[r]:=b[r]+a[r+r1]*n1*diff(lambda(s),s\$(r1+1)):end do:end do:

for r2 from 1 by 1 to m+1 do b[r2]:=b[r2]+a[r2-1]*lambda(s):end do:

b[2]:=b[2]+1:

for r3 from 1 by 1 to m do b[r3]:end do:

for r4 from 2 by 1 to m+1 do b[r4]:=eval(b[r],s=t)=0:end do:

dsolve({seq(b[i],i=1..m+1)},lambda(s));

simplify(factor(%));

3.3 Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Yöntemi yapısal olarak tanıtmak için

$$F[u(t)] = g(t) \quad (3.10)$$

denklemini ele alınır. Bu denklemde $u(t)$ bilinmeyen fonksiyonu, $g(t)$ sürekli bir fonksiyon ve F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren nonlinear bir diferansiyel operatörü gösterir. Lineer terim $L+R$ şeklinde ayrıştırılır. R lineer operatörün geri kalan kısmı ve L ise yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatör olmak üzere (3.10) denklemi

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.11)$$

şeklinde verilebilir. Burada N lineer olmayan diferansiyel operatörü ve L de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, (3.11) denkleminin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.12)$$

bulunur. Ayrıştırma yöntemi, $u(t)$ 'nin çözümünü

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.13)$$

şeklinde seri biçiminde hesaplar ve lineer olmayan Nu terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.14)$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n 'ler $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır. u ve N_u 'lar sırasıyla,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i$$
$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n 'ler (3.15) denkleminde,

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.16)$$

ifadesiyle bulunur. (3.13) ve (3.14) ifadeleri (3.12)'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada $\theta = u(0)$ 'dır. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$u_0 = \theta + L^{-1}g$$

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0$$

⋮

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, n \geq 0 \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. Böylece (3.11) ifadesinin doğru çözümü seri biçiminde gösterilmiş olur. Fakat uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin tüm terimlerinin hesaplanması zordur. Bu nedenle kesme serisinden itibaren yaklaşık çözümü,

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \quad (3.19)$$

veya

$$\phi_1 = u_0$$

$$\phi_2 = u_0 + u_1$$

$$\phi_3 = u_0 + u_1 + u_2$$

⋮

$$\phi_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, n \geq 0 \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur.

$$y' - y^2 = 1; \quad y(0) = 0 \quad (3.21)$$

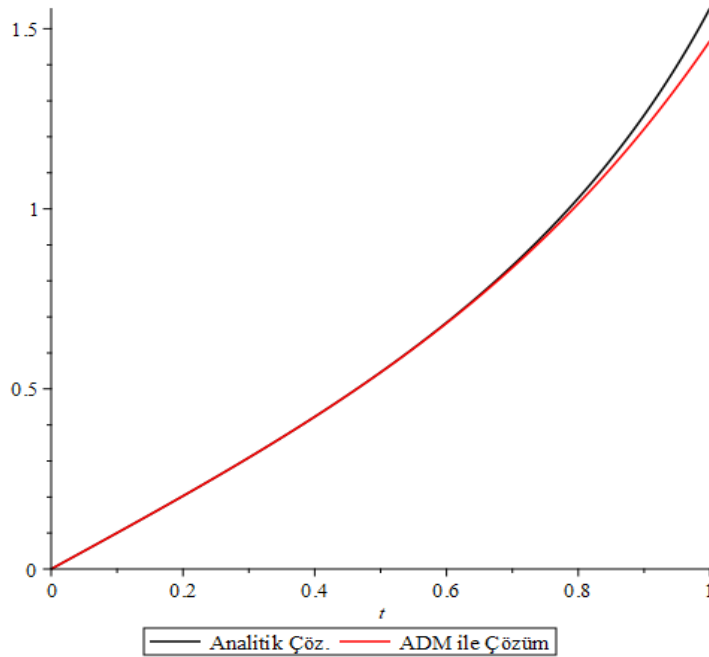
denkleminin ADM ile çözümü için Maple kodları Çizelge 3.10 ile verilmiştir.

Çizelge 3.10: (3.21) probleminin ADM ile çözümü için Maple kodları.

Kodlar

```
restart;
NF := y(x)^2:
m := 2: #Adım sayısıdır
y[x] := sum(y[b]*x^b, b = 0 .. m):
NF[x] := subs(y(x) = y[x], NF):
s := expand(NF[x], x):
dt := unapply(s, x):
for i from 0 to m do a[i] := (D@@i)(dt)(0)/i!; print(A[i] = a[i]); end do:
y[0] := 0 + int(1, t = 0 .. t):
for k from 0 to m do y[k + 1] := int(a[k], t = 0 .. t); end do:
fonk := 0:
for k from 0 to m do fonk := fonk + y[k]; end do:
print(k adımdayaklaşık çözüm, fonk):
with(plots):
fig1 := plot(tan(t), t = 0 .. 1, color = black, style = line, legend = "Analitik Çöz."):
fig2 := plot(fonk, t = 0 .. 1, color = red, legend = "ADM ile Çözüm"):
display(fig1, fig2);
```

Bu kodlar uygulandığında elde edilen çözüm ve analitik çözüm grafiği Şekil 3.3 ile verilmiştir.



Şekil 3.3 : (3.21) probleminin analitik ve ADM ile çözüm grafikleri.

3.4 Runge-Kutta Yöntemi

Fehlberg (1970) tarafından uygulandığı haliyle Maple paket programı içinde bir çözüm yöntemi olarak sunulan bu yöntemin

$$(4 - x^2)y' + 4y = (2 + x)(y(x))^2; y(0) = -1 \quad (3.22)$$

problemi için kullanımı Çizelge 3.11'deki kodlar ile verilmiştir.

Çizelge 3.11: (3.22) probleminin RKF45 ile çözümü için Maple kodları.

Kodlar

restart:

dsys1 := {(-x^2 + 4)*diff(y(x), x) + 4*y(x) = (2 + x)*y(x)^2, y(0) = -1}:

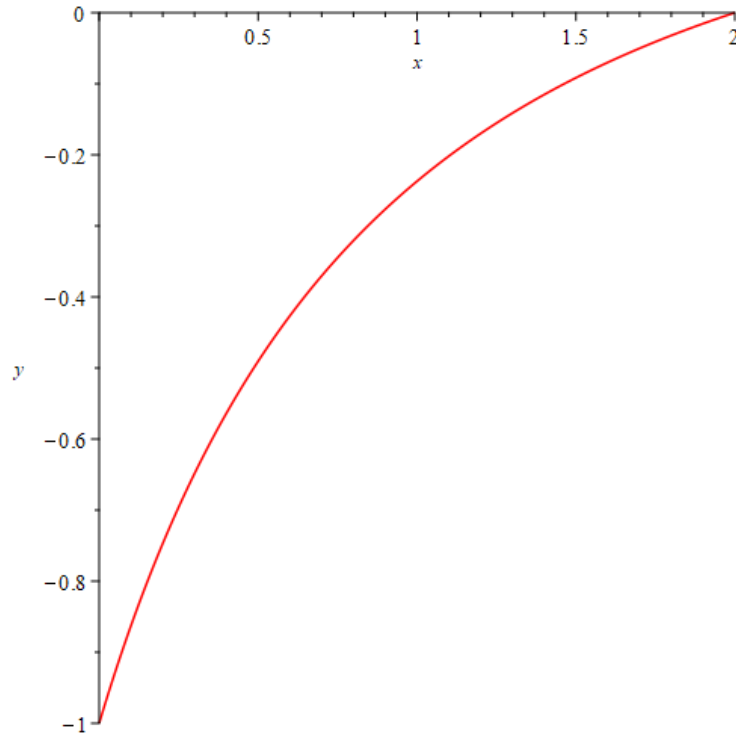
init1 := {y(0) = -1}:

dsol1 := dsolve(dsys1 union init1, numeric, method = rkf45, range = 0 .. 2):

with(plots):

odeplot(dsol1, [x, y(x), color = red]);

Programın çizdiği çözüm grafiği de Şekil 3.4 ile verilmiştir.



Şekil 3.4 : (3.22) probleminin RKF45 ile çözüm grafiği.



4. DENGELİ BACASI PROBLEMİNİN YARI ANALİTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde öncelikle hidroelektrik santralinde yer alan dengeli bacasının bu sistemdeki yeri ve inşa edilmesinde karşılaşılan mühendislik problemi verilecektir. Daha sonrasında bir diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilen bu problemin çözümü, diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi ve Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi ile araştırılacaktır.

4.1 Dengeli Bacası Problemi

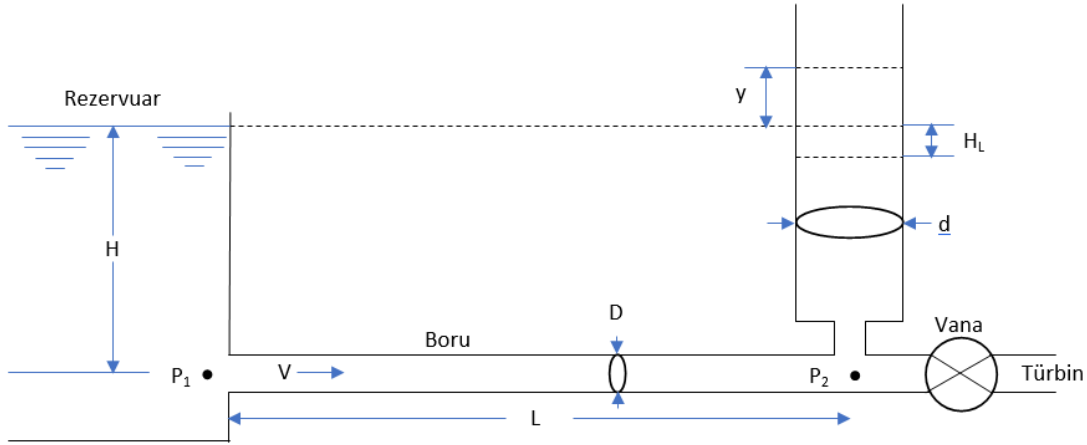
Bu bölümde çalışmanın amacı doğrultusunda çözümü elde edilecek olan dengeli bacası problemi tanımlanmıştır(Crandall, 1956).

Hidrolik bir türbine su getiren bir boru hattı Şekil 4.1’de ele alınmıştır. Kararlı durumda vana açıkken borudaki hız V_0 ‘dır. Uzun boru hattındaki akışkan sürtünmesinden dolayı p_2 basıncı p_1 basıncından daha azdır ve su bacasında su seviyesi tam olarak H yüksekliğine çıkmaz. Burada meydana gelen yük kaybı

$$H_L = f \frac{L}{D} \frac{V_0^2}{2g} \quad (4.1)$$

ile ifade edilir (Hunsaker ve Rightmire, 1947), (Rich, 1951). Burada f sürtünme faktörü g ise yerçekimi ivmesidir.

Burada, $t = 0$ anında aniden vananın kapanması ile yukarıda anlatılan durumu ve akabinde propagasyon problemi incelenecektir.



Şekil 4.1 : Hidroelektrik santral su transfer sistemi.

Su bacasındaki su seviyesi, bütün fazla kinetik enerji, akışkan sürtünmesi ile kaybolana kadar yukarı aşağı hareket edecektir. Birinci dalgada erişilen y değeri pratik bakımdan önemlidir.

Yukarı aşağı hareket etme sürecinin bağlı olduğu fizik kanunları akımın sürekliliği ve Newton ikinci hareket kanunudur. Su basıncındaki ani seviye y ve hız dy/dt ise süreklilik

$$\frac{\pi d^2}{4} \frac{dy}{dt} = \frac{\pi D^2}{4} V \quad (4.2)$$

eşitliğini gerektirir. Burada V borudaki ani hızdır. Borudaki sıvının yavaşlaması $p_2 - p_1$ basınç farkından ve sürtünmeden dolayıdır. Eğer ρ sıvının kütle yoğunluğu ise Newton kanuna göre

$$-\rho L \frac{\pi D^2}{4} \frac{dV}{dt} = (p_2 - p_1) \frac{\pi D^2}{4} + \tau \pi D L \quad (4.3)$$

yazılabilir. Burada τ boru civarındaki kayma gerilmesidir. Su darbesinin yavaşlığından dolayı, $p_2 - p_1$ hidrolik yüklerdeki y farkından ileri gelen $\rho g y$ statik basınç farkı ile yaklaşık olarak ifade edilebilir. Boru cidarındaki kayma gerilmesi $\tau = f \rho V^2 / 8$ dir. Bunlar (4.3) de yerine konulursa

$$L \frac{dV}{dt} = -g y - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.2) ve (4.4) denklemleri y ve V değişkenleri için simultane adi diferansiyel denklemlerdir.

Propagasyon problemi, $t = 0$ daki

$$V = V_0$$

$$g = -f \frac{L}{D} \frac{V_0^2}{2g} \quad (4.5)$$

başlangıç şartlarını da sağlayan çözümler bulmaktan iberettir.

Aşağıdaki boyutsuz değişkenler kullanılarak boyutsuz bir formülasyon elde edilebilir:

$$x_1 = \frac{y}{f(L/D) (V_0^2/2g)} \quad x_2 = \frac{V}{V_0} \quad t' = \frac{t}{2D/fv_0} \quad (4.6)$$

Böylece (4.5) başlangıç şartları ve (4.2), (4.4) esas denklemleri

$$\begin{aligned} t = 0 & \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ t > 0 & \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \theta x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

halini alır. Burada, boyutsuz parametre

$$\theta = \frac{g}{L} \left(\frac{2D^2}{fdV_0} \right)^2 \quad (4.8)$$

olarak belirtilmiştir.

Bu çalışmanın odağında olan ve (4.7) denklem sistemi ile verilen problemde $\theta = 1$ kabul edilerek elde edilen

$$\begin{aligned} t = 0 & \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ t > 0 & \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

denklem sisteminin çözümleri araştırılacaktır.

4.2 Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Uygulanması

Diferansiyel dönüşüm yönteminin (4.9) başlangıç değer problemi ile gösterilen denge bacası problemine uygulanması için kullanılan Maple kodları Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1: Denge bacası probleminin DTM ile çözüm için kullanılan Maple kodları.

Kodlar

restart:

y1[0] := -1: y2[0] := 1:

m:=100:

for k from 0 to m do y1[k + 1] := y2[k]/(k + 1): y2[k + 1] := (-y1[k] -
sum(y2[r]*y2[k - r], r = 0 .. k))/(k + 1): end do:

s1 := 0: s2 := 0:

for k from 0 to m do s1 := s1 + y1[k]*x^k: s2 := s2 + y2[k]*x^k: end do:

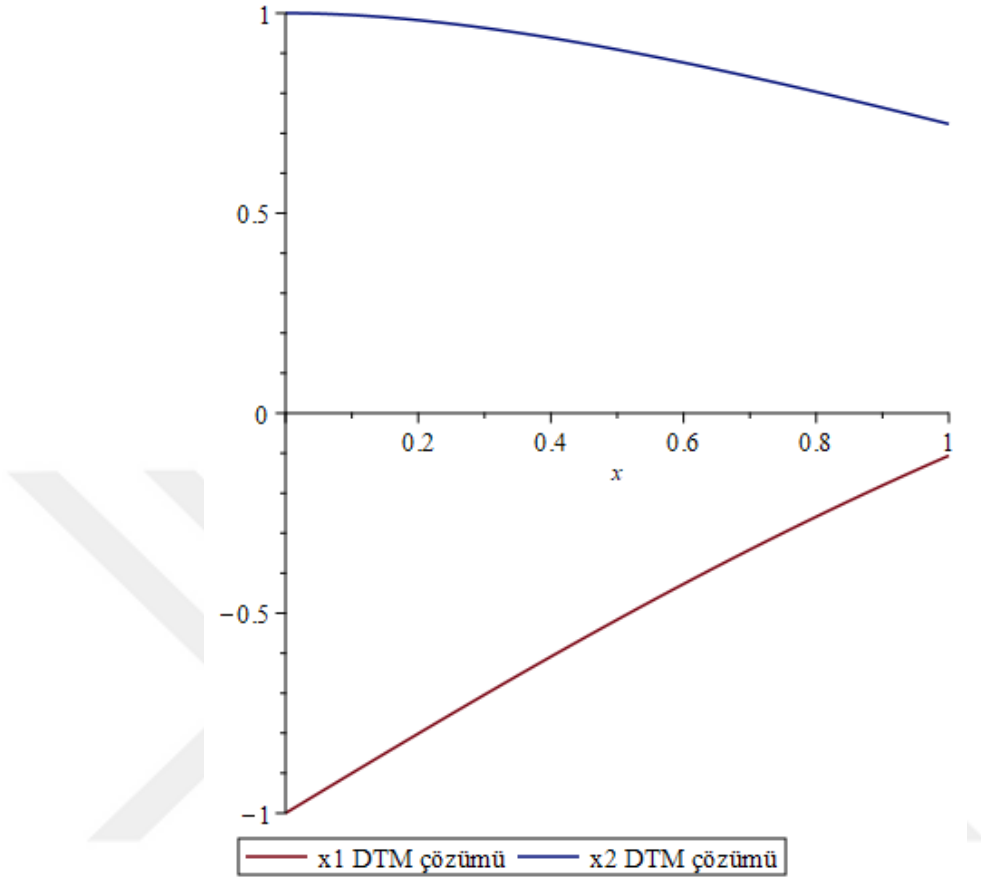
print(s1): print(s2): #Adım çok ise ekranı doldurmaması için bu iki kod atlanabilir.

for q from 0 by 0.05 to 1 do evalf[15](subs(x = q,s1)) end do;

for q from 0 to 1 by .05 do evalf[15](subs(x=q,s2)) end do;

plot([s1, s2], x = 0 .. 1, color[red, blue], legend = ["x1 DTM çözümü", "x2 DTM
çözümü"]);

Bu kodlar uygulandığında elde edilen grafik Şekil 4.2, çözüm değerleri ise Çizelge 4.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.2 : Denge bacası probleminin DTM ile yaklaşık çözüm grafiği.

Çizelge 4.2: Denge bacası probleminin DTM ile yaklaşık çözümleri.

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	-1	1
.05	-0.950020320348868	0.998790881188479
.10	-0.900158585241291	0.995320726949663
.15	-0.850522228223087	0.989811113087334
.20	-0.801208073887312	0.982464897919403
.25	-0.752303259403008	0.973466850749209
.30	-0.703886117410602	0.962984549871985
.35	-0.656027009420721	0.951169449751527
.40	-0.608789103276202	0.938158040180724
.45	-0.562229091595942	0.924073039641673
.50	-0.516397850598531	0.909024580900489
.55	-0.471341040474416	0.893111359476081
.60	-0.427099649686862	0.876421725452623
.65	-0.383710486362194	0.859034706613830
.70	-0.341206620383321	0.841020956490296
.75	-0.299617780013107	0.822443625006561
.80	-0.258970706912843	0.803359152319770
.85	-0.219289473338398	0.783817988427547
.90	-0.180595765133170	0.763865242411313
.95	-0.142909133922470	0.743541265949987
1	-0.106247221671221	0.722882176127569

4.3 Adomian Ayrıştırma Yönteminin Uygulanması

Adomian ayrıştırma yönteminin (4.9) başlangıç değer problemi ile gösterilen denge bacası problemine uygulanması için kullanılan Maple program kodları Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3: Denge bacası probleminin ADM ile çözüm için kullanılan Maple kodları.

Kodlar

restart:

NF := y(t)^2:

m := 6:

y[t] := sum(y[b]*t^b, b = 0 .. m):

NF[y] := subs(y(t) = y[t], NF):

s := expand(NF[y], t):

dt := unapply(s, t):

for i from 0 to m do a[i] := (D@@i)(dt)(0)/i!: print(A[i] = a[i]): end do:

x[0] := -1 + int(1, t = 0 .. t):

y[0] := 1 + int(0, t = 0 .. t):

for k from 0 to m do x[k + 1] := -1 + int(y[k], t = 0 .. t): y[k + 1] := 1 + int(-y[k]^2 - x[k], t = 0 .. t): end do:

with(plots):

fig1 := plot(x[k], t = 0 .. 1, color = blue, style = line, legend = "x1 ADM çözümü"):

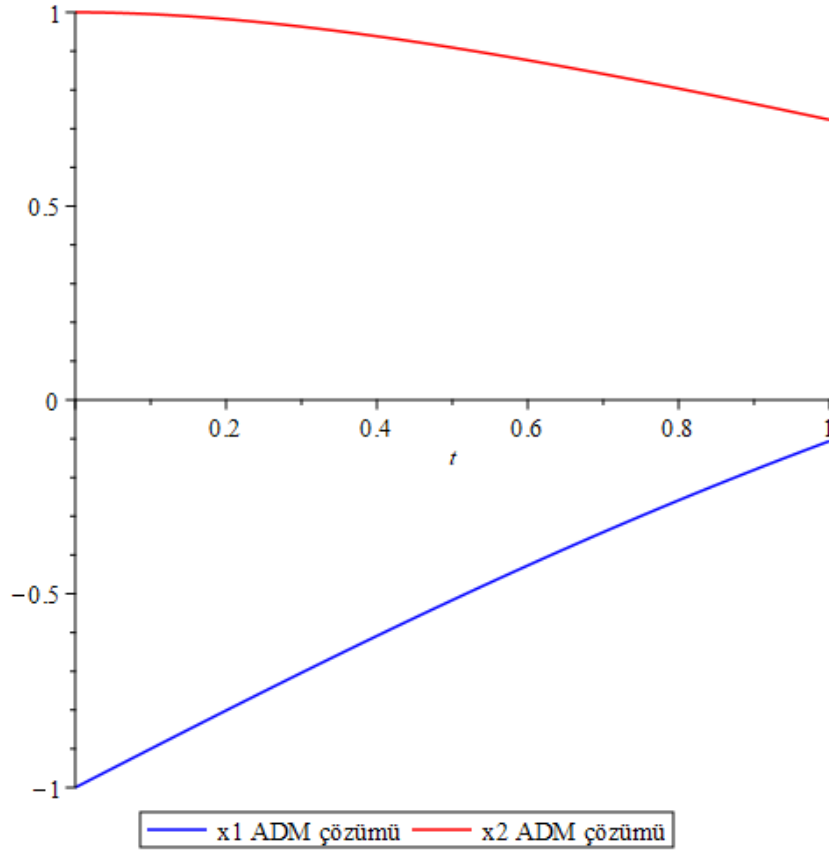
fig2 := plot(y[k], t = 0 .. 1, color = red, style = line, legend = "x2 ADM çözümü"):

for q from 0 by 0.05 to 1 do evalf[15](subs(t = q, x[k])): end do;

for q from 0 by 0.05 to 1 do evalf[15](subs(t = q, y[k])): end do;

display({fig1, fig2});

Bu kodlar uygulandığında elde edilen çözüm grafiği Şekil 4.3 ile, çözüm değerleri ise Çizelge 4.4 ile verilmiştir.



Şekil 4.3 : Denge bacası probleminin ADM ile yaklaşık çözüm grafiği.

Çizelge 4.4: Denge bacası probleminin ADM ile yaklaşık çözümleri.

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	-1	1
.05	-0.950020320348868	0.998790881188480
.10	-0.900158585241272	0.995320726949650
.15	-0.850522228222394	0.989811113086570
.20	-0.801208073878586	0.982464897909980
.25	-0.752303259341823	0.973466850685320
.30	-0.703886117116899	0.962984549577860
.35	-0.656027008339784	0.951169448723980
.40	-0.608789100013168	0.938158037274130
.45	-0.562229083162373	0.924073032722260
.50	-0.516397831396051	0.909024566739180
.55	-0.471341001207698	0.893111334411080
.60	-0.427099576652400	0.876421687665090
.65	-0.383710361896721	0.859034661164970
.70	-0.341206425649566	0.841020924490630
.75	-0.299617501717176	0.822443658334960
.80	-0.258970349928809	0.803359355093610
.85	-0.219289081504976	0.783818545865580
.90	-0.180595452609756	0.763866456775180
.95	-0.142909129383027	0.743543597881250
1	-0.106247927206731	0.722886287944110

4.4 Varyasyonel İterasyon Yönteminin Uygulanması

Varyasyonel iterasyon yönteminin (4.9) başlangıç değer problemi ile gösterilen denge bacası problemine uygulanması için kullanılan Maple kodları Çizelge 4.5 ile verilmiştir. Burada $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ Lagrange çarpanları kullanılarak çözüme ulaşılmıştır.

Çizelge 4.5: Denge bacası probleminin VIM ile çözümü için kullanılan kodlar.

Kodlar

restart:

$x[1][0] := -1;$

$x[2][0] := 1;$

$m := 7;$

for k from 0 to m do

$x[1][k + 1] := x[1][k] + \text{int}((-1) * (\text{diff}(x[1][k], t) - x[2][k]), t = 0 .. t);$

$x[2][k + 1] := x[2][k] + \text{int}((-1) * (\text{diff}(x[2][k], t) + x[1][k] + x[2][k]^2), t = 0 .. t);$

end do;

with(plots):

$\text{fig1} := \text{plot}(x[1][k], t = 0 .. 1, \text{color} = \text{blue}, \text{legend} = \text{"x1 VIM çözümü"});$

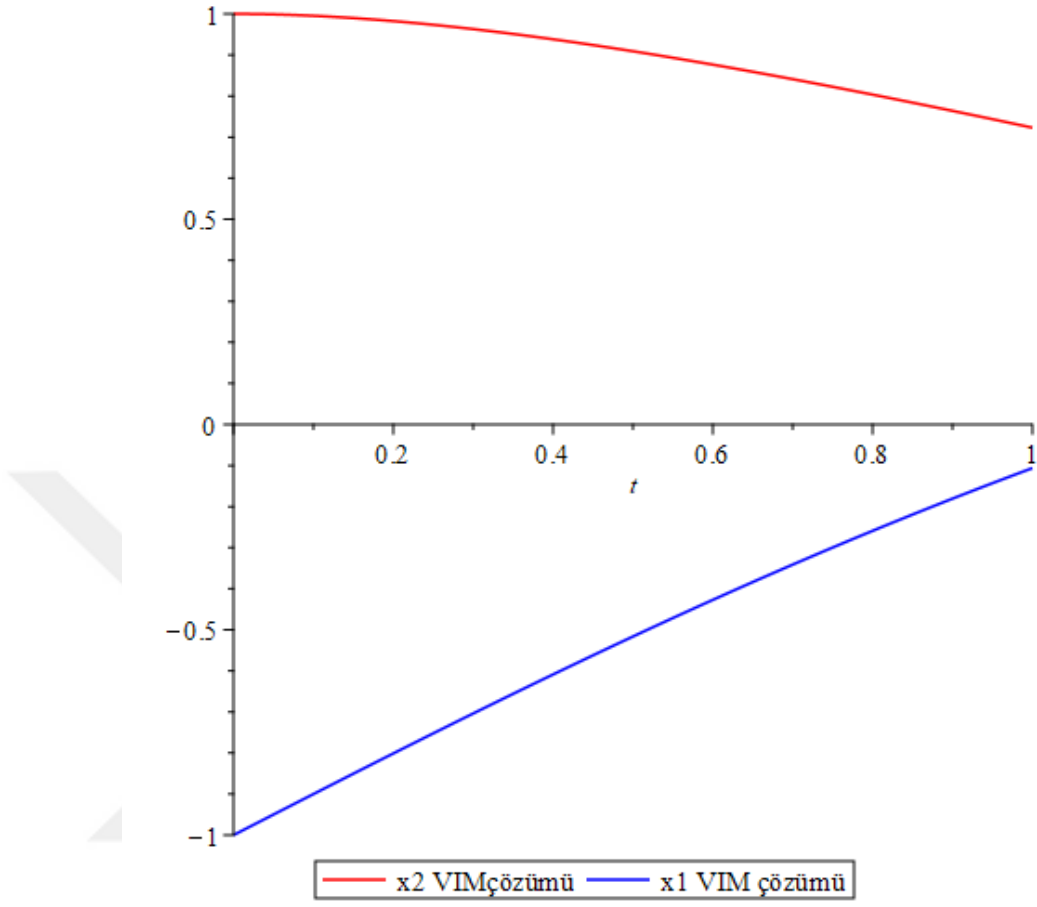
$\text{fig2} := \text{plot}(x[2][k], t = 0 .. 1, \text{color} = \text{red}, \text{legend} = \text{"x2 VIM çözümü"});$

$\text{display}(\{\text{fig1}, \text{fig2}\});$

for q from 0 by 0.05 to 1 do $\text{evalf}[15](\text{subs}(t = q, x[1][k]));$ end do;

for q from 0 by 0.05 to 1 do $\text{evalf}[15](\text{subs}(t = q, x[2][k]));$ end do;

Bu kodlar uygulandığında elde edilen çözüm grafiği Şekil 4.4 ile, çözüm değerleri ise tablo halinde Çizelge 4.6 ile verilmiştir.



Şekil 4.4 : Denge bacası probleminin VIM ile yaklaşık çözüm grafiği.

Çizelge 4.6: Denge bacası probleminin VIM ile yaklaşık çözümleri

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	-1	1
.05	-0.950020320348868	0.998790881188470
.10	-0.900158585241271	0.995320726949640
.15	-0.850522228222400	0.989811113086570
.20	-0.801208073878586	0.982464897909990
.25	-0.752303259341813	0.973466850685320
.30	-0.703886117116894	0.962984549577870
.35	-0.656027008339786	0.951169448723980
.40	-0.608789100013173	0.938158037274130
.45	-0.562229083162357	0.924073032722260
.50	-0.516397831396061	0.909024566739150
.55	-0.471341001207690	0.893111334411090
.60	-0.427099576652411	0.876421687665080
.65	-0.383710361896700	0.859034661164970
.70	-0.341206425649572	0.841020924490640
.75	-0.299617501717167	0.822443658334960
.80	-0.258970349928821	0.803359355093610
.85	-0.219289081504980	0.783818545865590
.90	-0.180595452609743	0.763866456775180
.95	-0.142909129383047	0.743543597881250
1	-0.106247927206749	0.722886287944130

4.5 Runge-Kutta-Fehlberg Yönteminin Uygulanması

Runge-Kutta-Fehlberg yönteminin (4.9) başlangıç değer problemi ile gösterilen denge bacası problemine uygulanması için kullanılan Maple kodları Çizelge 4.7 ile verilmiştir.

Çizelge 4.7: Denge bacası probleminin RKF45 ile çözümü için kullanılan kodlar.

Kodlar

restart:

$\text{dsys1} := \{\text{diff}(x1(t), t) = x2(t), \text{diff}(x2(t), t) = -x1(t) - x2(t)^2, x1(0) = -1, x2(0) = 1\};$

$\text{init1} := \{x1(0) = -1, x2(0) = 1\};$

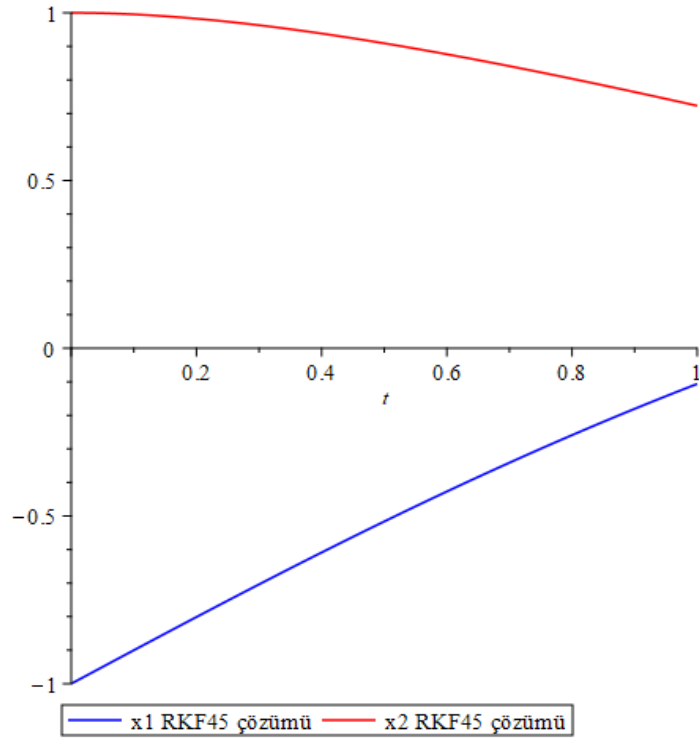
$\text{dsol1} := \text{dsolve}(\text{dsys1} \text{ union } \text{init1}, \text{numeric}, \text{method} = \text{rkf45}, \text{range} = 0 .. 1);$

with(plots):

for q from 0 by 0.05 to 1 do $\text{dsol1}(q)$: end do;

$\text{odeplot}(\text{dsol1}, [[t, x1(t), \text{color} = \text{blue}], [t, x2(t), \text{color} = \text{red}]]);$

Bu kodlar uygulandığında elde edilen çözüm grafiği Şekil 4.5 ile, çözüm değerleri ise tablo halinde Çizelge 4.8 ile verilmiştir.



Şekil 4.5 : Denge bacası probleminin RKF45 ile yaklaşık çözüm grafiği.

Çizelge 4.8: Denge bacası probleminin RKF45 ile yaklaşık çözümleri.

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	-1	1
.05	-0.950020320488403	0.998790881299406
.10	-0.900158651137040	0.995320802179370
.15	-0.850522288138037	0.989811188210914
.20	-0.801208101084884	0.982464917193271
.25	-0.752303340819832	0.973466963037912
.30	-0.703886181579279	0.962984623490116
.35	-0.656027051147845	0.951169466749572
.40	-0.608789191450155	0.938158155044822
.45	-0.562229161038078	0.924073103177451
.50	-0.516397899747668	0.909024583806395
.55	-0.471341127533067	0.893111450830977
.60	-0.427099722630276	0.876421774339811
.65	-0.383710538687662	0.859034692213251
.70	-0.341206702983327	0.841021014907688
.75	-0.299617854959021	0.822443658047400
.80	-0.258970760418445	0.803359122853020
.85	-0.219289549757939	0.783818013002297
.90	-0.180595839518595	0.763865257141036
.95	-0.142909188026089	0.743541226269680
1	-0.106247292337712	0.722882173782271

4.6 Kullanılan Yöntemlerin Kıyaslanması

Denge bacası problemine ait denklem sisteminin yaklaşık çözümleri Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10 ile bir arada gösterilmiştir.

Çizelge 4.9: $x_1(t)$ denklemleri için dört farklı yöntemle yaklaşık çözümler.

t	$\sim x_1(t)$ DTM	$\sim x_1(t)$ ADM	$\sim x_1(t)$ VIM	$\sim x_1(t)$ RKF45
0	-1	-1	-1	-1
.05	-0.950020320348868	-0.950020320348868	-0.950020320348868	-0.950020320488403
.10	-0.900158585241291	-0.900158585241272	-0.900158585241271	-0.900158651137040
.15	-0.850522228223087	-0.850522228222394	-0.850522228222400	-0.850522288138037
.20	-0.801208073887312	-0.801208073878586	-0.801208073878586	-0.801208101084884
.25	-0.752303259403008	-0.752303259341823	-0.752303259341813	-0.752303340819832
.30	-0.703886117410602	-0.703886117116899	-0.703886117116894	-0.703886181579279
.35	-0.656027009420721	-0.656027008339784	-0.656027008339786	-0.656027051147845
.40	-0.608789103276202	-0.608789100013168	-0.608789100013173	-0.608789191450155
.45	-0.562229091595942	-0.562229083162373	-0.562229083162357	-0.562229161038078
.50	-0.516397850598531	-0.516397831396051	-0.516397831396061	-0.516397899747668
.55	-0.471341040474416	-0.471341001207698	-0.471341001207690	-0.471341127533067
.60	-0.427099649686862	-0.427099576652400	-0.427099576652411	-0.427099722630276
.65	-0.383710486362194	-0.383710361896721	-0.383710361896700	-0.383710538687662
.70	-0.341206620383321	-0.341206425649566	-0.341206425649572	-0.341206702983327
.75	-0.299617780013107	-0.299617501717176	-0.299617501717167	-0.299617854959021
.80	-0.258970706912843	-0.258970349928809	-0.258970349928821	-0.258970760418445
.85	-0.219289473338398	-0.219289081504976	-0.219289081504980	-0.219289549757939
.90	-0.180595765133170	-0.180595452609756	-0.180595452609743	-0.180595839518595
.95	-0.142909133922470	-0.142909129383027	-0.142909129383047	-0.142909188026089
1	-0.106247221671221	-0.106247927206731	-0.106247927206749	-0.106247292337712

Çizelge 4.10: $x_2(t)$ denklemi için dört farklı yöntemle yaklaşık çözümler.

t	$x_2(t)$ DTM	$\sim x_2(t)$ ADM	$\sim x_2(t)$ VIM	$\sim x_2(t)$ RKF45
0	1	1	1	1
.05	0.998790881188479	0.998790881188480	0.998790881188470	0.998790881299406
.10	0.995320726949663	0.995320726949650	0.995320726949640	0.995320802179370
.15	0.9898111113087334	0.9898111113086570	0.9898111113086570	0.989811188210914
.20	0.982464897919403	0.982464897909980	0.982464897909990	0.982464917193271
.25	0.973466850749209	0.973466850685320	0.973466850685320	0.973466963037912
.30	0.962984549871985	0.962984549577860	0.962984549577870	0.962984623490116
.35	0.951169449751527	0.951169448723980	0.951169448723980	0.951169466749572
.40	0.938158040180724	0.938158037274130	0.938158037274130	0.938158155044822
.45	0.924073039641673	0.924073032722260	0.924073032722260	0.924073103177451
.50	0.909024580900489	0.909024566739180	0.909024566739150	0.909024583806395
.55	0.893111359476081	0.893111334411080	0.893111334411090	0.893111450830977
.60	0.876421725452623	0.876421687665090	0.876421687665080	0.876421774339811
.65	0.859034706613830	0.859034661164970	0.859034661164970	0.859034692213251
.70	0.841020956490296	0.841020924490630	0.841020924490640	0.841021014907688
.75	0.822443625006561	0.822443658334960	0.822443658334960	0.822443658047400
.80	0.803359152319770	0.803359355093610	0.803359355093610	0.803359122853020
.85	0.783817988427547	0.783818545865580	0.783818545865590	0.783818013002297
.90	0.763865242411313	0.763866456775180	0.763866456775180	0.763865257141036
.95	0.743541265949987	0.743543597881250	0.743543597881250	0.743541226269680
1	0.722882176127569	0.722886287944110	0.722886287944130	0.722882173782271

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada analitik çözümleri bulunamayan diferansiyel denklemler için literatürde var olan dört farklı yöntem tanıtılmış ve bu yöntemler bir mühendislik problemi üzerinde uygulanarak sonuçların kıyaslanması amaçlanmıştır. Çözülmesi amaçlanan problem, hidroelektrik santrallerinde karşılaşılan su darbesi olayının etkilerini telafi etmek amacıyla inşa edilen denge bacasındaki propagasyon problemidir. Söz konusu problem (4.7) ile gösterilen bir başlangıç değer problemi olup, buradaki boyutsuz değişken $\theta = 1$ kabul edilerek (4.9) denklem sistemi şeklinde ele alınarak çözümü araştırılmıştır.

Çözümler; diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, Varyasyonel iterasyon yöntemi ve Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi ile elde edilmiştir. Başlangıç değer problemleri için oldukça etkili bir çözüm olan Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi Maple programında bir nümerik çözüm seçeneği olarak yer almaktadır. Diğer üç yöntem için (4.9) problemine özel yazılmış algoritmalar kullanılmıştır.

Bu çalışma için oluşturulan kodların uygulanması sonucu olarak diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi için polinom şeklinde birer çözüm elde edilmiştir. Elde edilen bu polinomların terim sayılarını tespit etmek için Maple programında *nops()* komutu kullanılmıştır. Derecenin tespiti içinse *sort()* komutu kullanılmıştır. Bu üç yöntemle elde edilen çözümlerin derece ve terim sayısı bilgileri Çizelge 5.1 ile verilmiştir.

Çizelge 5.1: DTM-ADM-VIM çözümlerinin terim sayıları ve dereceleri

Yöntemler	$x_1(t)$		$x_2(t)$	
	Terim sayısı	Derece	Terim sayısı	Derece
DTM	100	100	100	100
ADM	95	96	190	191
VIM	95	96	190	191

Daha sonra bu polinomların $t = [0,1]$ için 0,05 adım aralığında verdiği sonuçlar Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi çözümleriyle birlikte Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'da bir arada verilmiştir. Elde edilen bu sonuçların birbirlerine çok yakın oldukları birbirlerine alternatif olarak kullanılabileceği görülmüştür.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi, Adomian ayrıştırma yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi için yapılan denemelerde adım sayısının artırılması çözümlerdeki hassasiyeti de arttırmıştır. Ancak Adomian ayrıştırma yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi için mertbe sayısının artırılması terim sayısının çok hızlı bir şekilde artmasına ve örneğin $m = 10$ mertbesi için yapılan denemede Maple programının çok geç cevap vermesi ve çözüm grafiğini çizememesi ile sonuçlanmıştır. Bu sebeple Adomian ayrıştırma yöntemi ve varyasyonel iterasyon yönteminin aynı terim sayısı ile çözüm vereceği ve programın grafik çizmeyi başarabileceği şekilde mertbe tercihi yapılmıştır.

Tüm yöntemler birbirleriyle tutarlı çözümler sunmuştur. Ayrıca yöntemlerin birbirlerine göre avantajlı veya dezavantajlı durumları gözlemlenmiştir. Örneğin, diferansiyel dönüşüm yönteminin diğer yöntemlere daha yakın sonuç verebilmesi için ADM veya VIM çözümlerine kıyasla çok daha fazla adımda uygulanması gerekmiştir. Ancak DTM uygulaması bilgisayar gücüyle gerçekleştirildiği için bu durumun olumsuz etkisi görülmemiştir. Varyasyonel iterasyon yönteminin, Lagrange çarpanının tespit edilmesi zor olan başka problemler üzerinde uygulanmasının bu yöntemin uygulanmasını zorlaştırdığı ve doğru Lagrange çarpanı olmadan tutarlı çözüm elde edilemediği görülmüştür. Ancak Lagrange çarpanı tespit edilebildiği takdirde bu yöntemin anlaşılması ve programlanmasının kolay olduğu görülmüştür. (4.9) probleminde de Çizelge 3.7 ile verilen $y' = f(t)$ biçimine karşılık gelen şekilde yani $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ Lagrange çarpanları kullanılarak tutarlı çözüm elde edilmiştir. Runge-Kutta-Fehlberg yönteminin daha az mertbede uygulanan bir yöntem olmasının yanı sıra diğer yöntemlerin mertbelerinin artırılmasıyla elde edilen çözümlerin RKF45 çözümüne yaklaştığı görülmüş ve Runge-Kutta-Fehlberg yönteminin en etkili çözüm olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- Abdou, M., ve Soliman, A. (2005). New applications of variational iteration method. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1-8.
- Adomian, G. (1984). A new approach to nonlinear partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 420-434.
- Arıkoğlu, A., ve Özkol, İ. (2005). Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 1145-1158.
- Ayaz, F. (2003). On the two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 361-374.
- Chen, C., ve Ho, S. (1996). Application of Differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation*, 173-188.
- Chen, C., ve Ho, S. (1999). Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 171-179.
- Chen, C.-L., ve Liu, Y.-C. (1998). Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems. *Applied Mathematics and Computation*, 155-164.
- Crandall, S. (1956). *Engineering Analysis: A Survey of Numerical Procedures*. New York: McGraw-Hill.
- Fehlberg, E. (1970). Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing* 6, 61-71.
- Hassan, I. A.-H. (2004). Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 299-311.
- He, J. (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 203-205.
- He, J. (1999). Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 699-708.
- He, J. (2000). Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, 115-123.
- He, J. (2004). Variational Principles For Some Nonlinear Partial Differential Equations With Variable Coefficients. *Chaos, Solitons & Fractals*, 847-851.
- Hunsaker, J., ve Rightmire, B. (1947). *Engineering Applications of Fluid Mechanics*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc.
- Inokuti, M. (1978). General Use of the Lagrange Multiplier in Nonlinear Mathematical Physics. N. Nasser içinde, *Variational Method in the Mechanics of Solid* (s. 156-162). Oxford: Pergamon Press.

- Jang, M., Chen, C., ve Liu, Y. (2001). Two-dimensional differential transform for partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 171-179.
- Keskin, Y., ve Oturanç, G. (2008). Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*.
- Keskin, Y., ve Oturanç, G. (2010). *Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi*. Konya: Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.
- Kurnaz, A., ve Oturanç, G. (2005). The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 709-719.
- Kutta, M. (1901). Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 435-453.
- Maple 2021. <https://www.maplesoft.com>.
- Rich, G. (1951). *Hydraulic Transients*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons Inc.
- Runge, C. D. (1895). Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 167-178.
- Wang, S., ve He, J. (2007). Variational iteration method for solving integro-differential equations. *Physics Letters A*, 188-191.
- Zhou, J. K. (1986). *Differential transformation and its applications for electrical circuits*. Wuhan: Huazong University Press.