

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NAVİER-STOKES ZAMAN RAHATLAMA
MODELİNİN EULER ZAMAN AYRIKLAŞTIRMASI
İLE ELDE EDİLEN SONLU ELEMANLAR ÇÖZÜMÜ
ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERYEM ÖZBUNAR

EKİM 2017
MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

Meryem Özbunar tarafından hazırlanan **NAVIER -STOKES ZAMAN RAHATLAMA MODELİNİN EULER ZAMAN AYRIKLAŞTIRMASI İLE ELDE EDİLEN SONLU ELEMENLAR ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 13/10/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oy-birliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Doç. Dr. Erhan PİŞKİN (Jüri Başkanı)

Matematik Anabilim Dalı, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır

İmza:

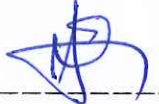


Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK (Danışman)

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü,

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

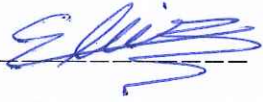


Yrd. Doç. Dr. Elçin GÖKMEN (Üye)

Matematik Anabilim Dalı,

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Matematik Bölüm Başkanı,

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

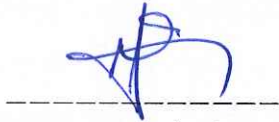


Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK

Danışman, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü,

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:



Savunma Tarihi: 13/10/2017

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Meryem ÖZBUNAR

13/10/2017

ÖZET

NAVIER-STOKES ZAMAN RAHATLAMA MODELİNİN EULER AYRIKLAŞTIRMASI İLE ELDE EDİLEN SONLU ELEMANLAR ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Meryem ÖZBUNAR

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK

Ekim 2017, 81 sayfa

Bu çalışmada Navier Stokes denkleminin (NSE) $\kappa(u-\bar{u})$ terimi eklenerek elde edilen NSE-TRM modeli ele alınmıştır. Modelin nümerik çözümü için Işık (2013) tarafından verilen Backward Euler (BE) zaman adımlı metoda dayanan algoritma ile çözümler elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin kararlılık ve yakınsaklık analizleri yapılmıştır. Yapılan analizler sonucunda, algoritma ile elde edilen çözümlerin koşulsuz kararlı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, bazı yakınsama özellikleri varsayılarak, çözümün yakınsak olduğu ve mertebesinin $O(\Delta t + \kappa \delta)$ olduğu ispatlanmıştır. NSE nin BE ile çözümünün olduğu bir örnek için κ değerleri arttıkça hatanın azaldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, NSE nin BE ile elde edilen çözümün ıraksak olduğu bir örnek için Algoritma ile yakınsak çözümler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Navier-Stokes Denklemleri, Backward-Euler Metodu, Sonlu Elemanlar, NSE Zaman Rahatlama Modeli, Zaman Filtreli Düzgünleştirme

ABSTRACT

FINITE ELEMENT SOLUTION OF NAVIER-STOKES TIME RELAXATION MODEL EULER TIME DISCRETIZATION

Meryem ÖZBUNAR

Master of Science (M. Sc.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc Prof. Dr. Osman Raşit IŞIK
October 2017, 81 pages

In this study, we consider NSE-TRM model that is obtained by adding the term $\kappa(u - \bar{u})$ into Navier-Stokes equations (NSE). By using the Algorithm, which was given by Işık (2013), depends on backward-Euler (BE) time step method, we get the numerical solution of NSE-TRM. The stability and convergence analyzes of the solution obtained by the Algorithm are constructed. As a result of the analyzes, it is proven that the solution obtained by the Algorithm is unconditionally stable. On the other hand, we prove that the solution is convergent and is of order $O(\Delta t + \kappa \delta)$ under the assumption of some convergence features. We applied the Algorithm to some test problems and found that the numerical results are consistent with the theoretical results as we expected. For an example where the NSE is solved with BE, it is observed that as the κ values increase, the error decreases. Furthermore, we get convergent solutions for an example by the Algorithm where as the solution of NSE obtained by BE diverges.

Keywords: Navier Stokes equations, Backward-Euler Method, Finite Element Method, NSE Time Relaxation Model, Time Filtering Regularization



Sevgili Aileme Adanmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, gerek ders aşamasında, gerekse tez aşamasında bilgisini, desteğini, ilgisini hiç esirgemeyen, anlayışıyla ve çalışma azmiyle birçok işi yapabileceğimizi gösteren Doç. Dr. Osman Raşit IŞIK'a, yardımlarından dolayı, Bülent DEMİR'e, Tuğba SEZEN'e ve Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına desteklerinden, sevgilerini ve ilgilerini hiç esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu çalışmada, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Koordinasyon Birimi tarafından 16/062 kod numaralı, Navier-Stokes Zaman Rahatlama Modelinin Euler Zaman Ayırıştırmasıyla Elde Edilen Sonlu Elemanlar Çözümü Üzerine başlıklı proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1.GİRİŞ	1
1.1 Navier- Stokes Denklemleri.....	1
2.KAYNAK ÖZETLERİ	7
2.1 Adi Diferansiyel Denklemler.....	7
2.1.1 Cauchy problemi	7
2.1.2 Diferansiyel denklemlerde kararlılık.....	8
2.1.3 Diferansiyel denklemlerde iyi konulmuş (well-posed) ve kötü konulmuş (ill posed)	9
2.1.4 Varlık teklik teoremi	10
2.2 Adi Diferansiyel Denklemler Nümerik Çözümleri (Zaman Adımlı Metotlar)	10
2.2.1 Zaman adımlı metotlar	10
2.2.2 Açık metot.....	11
2.2.3 Kapalı metot	11
2.2.4 Açık ve kapalı metotların avantajları ve dezavantajları	12
2.2.5 Trapezoid kuralı (Crank-Nicolson metot).....	17
2.2.6 θ metot.....	18
2.2.7 İmplicit midpoint kuralı	18
2.2.8 Heuns metot	19
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	20
3.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler	20
3.2 Eliptik Denklemler.....	21
3.2.1 Poisson denklemi	21
3.3 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri.....	22
3.4 Hilbert Uzayı $L^2(\Omega)$ ve $H^1(\Omega)$	23
3.5 Sobolev Uzayları.....	28
3.6 $L^\infty(\Omega)$ ve $L^p(\Omega)$ Uzayları ($1 \leq p \leq \infty$).....	29
3.7 Zamana Bağlı Navier Stokes Denklemleri	31
3.8 Navier Stokes Denklemlerinin Zayıf Formülasyonu	32
3.9 Sonlu Elemanlar Metodu	34
3.10 Bir Boyutta Sonlu Elemanlar Metodu	36
3.10.1 X_h^1 uzayı.....	36

3.10.2 X_h^2 uzayı.....	38
3.10.3 1 boyutta homejen dirichlet problemi	40
3.11 Diferansiyel Filtreler	48
3.11.1 Regülerizasyon.....	50
3.11.2 Parçalı polinom yaklaşımı.....	51
4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR.....	53
4.1 Navier -Stokes Zaman Rahatlama Modelinin NSETRM Backward Euler Zaman Ayrıklaştırması.....	53
4.1.1 Kararlılık analizi.....	54
4.1.2 Hata analizi.....	56
5. ÖRNEKLER.....	66
6. TARTIŞMALAR VE SONUÇLAR.....	74
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ.....	81

ÇİZELGELERLER DİZİNİ

Çizelge 5.1. Örnek 5.0.7 için mutlak hatalar ve mertebe (NSE nin) sonuçları.....	66
Çizelge 5.2. Örnek 5.0.7 için $\kappa=1$ ve $\delta = \Delta t$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları.....	67
Çizelge 5.3. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = \Delta t$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları.....	67
Çizelge 5.4. Örnek 5.0.7 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = \Delta t$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları.....	67
Çizelge 5.5. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = 1$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları.....	67
Çizelge 5.6. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \frac{1}{\Delta t}$ ve $\delta = (\Delta t)^2$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları	67
Çizelge 5.7. Örnek 5.0.7 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = \frac{1}{\Delta t}$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları.....	68
Çizelge 5.8. Örnek 5.0.7 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları.....	68
Çizelge 5.9. Örnek 5.0.7 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = 0.1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	68
Çizelge 5.10. Örnek 5.0.7 için $\kappa = 1$ ve $\delta = \sqrt{\Delta t}$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	68
Çizelge 5.11. Örnek 5.0.7 için $\kappa = 1$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	68
Çizelge 5.12. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \frac{1}{2}$ ve $\delta = 2$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	69
Çizelge 5.13. Örnek 5.0.8 için mutlak hatalar ve mertebe (NSE nin) sonuçları	69
Çizelge 5.14. Örnek 5.0.7 için $\kappa=1$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	70
Çizelge 5.15. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = \Delta t$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları	70
Çizelge 5.16. Örnek 5.0.8 için $\kappa=(\Delta t)^2$ ve $\delta = \Delta t$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları	70

Çizelge 5.17. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = 1$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları	70
Çizelge 5.18. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \frac{1}{\Delta t}$ ve $\delta = (\Delta t)^2$ kullanarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.19. Örnek 5.0.8 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = \frac{1}{\Delta t}$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.20. Örnek 5.0.8 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = 0.1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.21. Örnek 5.0.8 için $\kappa = (\Delta t)^2$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.22. Örnek 5.0.8 için $\kappa = 1$ ve $\delta = \sqrt{\Delta t}$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.23. Örnek 5.0.8 için $\kappa = 1$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.24. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \frac{1}{2}$ ve $\delta = 2$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	71
Çizelge 5.25. Örnek 5.0.9 için $\Delta t = 0.1, \delta = 1$ ve $v = 0.001$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları	72
Çizelge 5.26. Örnek 5.0.10 için BE metodun equilibrium hataları $\Delta t = 0.1, \delta = 0.1$ ve $v = 0.001$	73

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Örnek 2.2.10 için FE nin mutlak kararlılık bölgesi ve Örnek 2.2.9 için BE nin mutlak kararlılık bölgesi.....	17
Şekil 2. Örnek 3.11.1 için u fonksiyonunun grafiği	50
Şekil 3. Örnek 3.11.1 için $\bar{u}$ fonksiyonunun grafiği.....	50



SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C[\Omega]$	Ω 'dan $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı sürekli fonksiyon uzayı
u_h	Yaklaşık çözüm
$\bar{u}$	u 'nun diferansiyel filtresi
$L^2(\Omega)$	$\{p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} p ^2 dx < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^d\}$
$(., .)$	$L^2(\Omega)$ 'de tanımlı iç çarpım
$\text{Supp } f$	$\overline{\{x: f(x) \neq 0\}}$, $\text{Supp } f$, f nin destekleyeni
$\ v\ $	v vektörünün $L^2(\Omega)$ normu
Re	Reynolds sayısı
$H^k(\Omega)$	Sobolev uzayı
v	Ters fonksiyonu
ν	viskozite
$D(\Omega)$	$\{f \in C^\infty(\Omega) \exists K \subset \Omega \text{ kompakt, } \text{Supp } f \subset K\}$
$D^\alpha f$	$\frac{\partial^{ \alpha } f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
$X^h \subset X, Q^h \subset Q$	Hız ve basınç sonlu eleman aralıkları
l^p	Dizi uzayı
L	f nin Lipschitz sabiti
NSE	Navier Stokes Denklemleri
FEM	Sonlu Elemanlar metodu
BDF	Backward Diferansiyel formül
FE	Forward Euler
BE	Backward Euler

1.GİRİŞ

1.1 Navier-Stokes Denklemleri

Navier Stokes denklemi (NSE) akışkanlar mekaniğinin önem teşkil eden denklemlerinden birisidir. Bu denklem üçü hız bileşenleri, biri ise basınç bileşeni olmak üzere dört bilinmeyenli olan ikinci mertebeden lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir (Recebli, Özkaymak, 2013). Bu denklemler; akışkan içinde bulunan birim kütleye etki eden momentum (ivmelenme) değişimlerinin, sürtünme kayıplarına ve basınç değişimlerine neden olan viskoz kuvvetlerin toplamına eşit olduğunu söyler. NSE enerji, toplam kütle ve momentumun üretimini, iç üretimini ve birikimini tanımlayan diferansiyel denklem olarak bilinmektedir (Peker, Helvacı, 2003). $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $d=2, 3$ boştan farklı, açık, bağlantılı bir alt küme ve $\partial\Omega$, Ω 'nın sınırı; $0 \leq T < \infty$ olmak üzere $[0, T)$ zaman aralığı ve $t \in [0, T)$ olsun. Bu durumda NSE, $d=2, 3$ için

$$u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f, x \in \Omega, 0 \leq t < T \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, x \in \Omega, 0 \leq t < T,$$

$$u = 0, \partial\Omega, 0 \leq t < T, x = (x^1, x^2, \dots, x_d) \in \Omega$$

$$u(0) = u_0 \quad (1.2)$$

ile tanımlanır. Denklemdaki $-\nu \Delta u = -\nu(D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_d^2)$ terimi sıvı partüküllerindeki sürtünme katsayısı ve $\nabla p = (D_1, D_2, \dots, D_d)p$ basınç fonksiyonunun gradyentidir.

$u(t, x) \rightarrow$	Akış hızı
$p(t, x) \rightarrow$	Basınç fonksiyonu
$f(t, x) \rightarrow$	Dış kuvvet
$\nu \rightarrow$	Pozitif sabit viskozite katsayısı
$div = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}$	Diverjans operatörü
$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	Laplace operatörü
$\nabla = (D_1, D_2, \dots, D_d) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d})$	Gradyent

(1.1) denklem sistemi en genel halde, $(d+1)$ bilinmeyen fonksiyon $(p, u_1, u_2, \dots, u_d)$ ve $(d+1)$ değişken $(t, x_1, x_2, \dots, x_d)$ içeren $(d+1)$ diferansiyel denklemden oluşur.

$$u \mid_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.3)$$

Burada u_0 ifadesi $t = 0$ anındaki başlangıç hız anlamına gelir ve

$$u_0(0, x) = u_0(x), \forall x \in \Omega \text{ için} \quad (1.4)$$

olarak yazılır (Sohr, 2001).

Buradaki (1.1) ile gösterilen denklem Newton yasalarına göre güç korunumunu göstermektedir ve ikinci denklem ise homojen sıkıştırılamaz akışkanın koşulunu göstermektedir. u_t zaman yönünde türevi temsil eder (Sohr, 2001).

Navier Stokes denklemi ismini Fransız Navier ve İngiliz Stokes'dan almıştır. 1840'lı yıllarda bu denklemlerin temel korunum yasaları ve birinci derece yaklaşımları bulunmuştur. Poisson (1845) ve Saint Venant (1843) NSE nin sürekli türevleri için çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. 1934 yılında Jean Leray NSE nin zayıf çözümlerini matematiksel olarak tanıtmış ve varyasyonel formda zayıf çözümler olduğunu test fonksiyonları ile çarpıp integre ederek ispatlamıştır (Layton, 2008).

Son yıllarda, NSE nin nümerik çözümleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Kaya ve Riviere (2004), denge durumunda NSE nin nümerik çözümü için bir "iki ağıl stabilizasyon metodu" kullanmışlardır. Bu metot geniş ölçeklerde bir avantaja sahip olup geniş reynold sayılarında NSE nin çözümü için güçlü ve etkin bir metottur. Bu metotda elde edilen çözümün kararlılık ve hata analizlerini incelemişlerdir. Kaya ve Riviere (2003), süreksiz polinom yaklaşımını kullanarak bir metot (alt ağ (subgrid) stabilizasyon metodu) vermişler, yarı ayrık ve tam ayrık sonlu elemanlar çözümü için kararlılık ve yakınsaklık analizlerini incelemişlerdir. Yaptıkları analiz sonucunda vermiş oldukları tam ayrık iki algoritmanın bir tanesinin mertebesinin birinci mertebe ve diğerinin mertebesinin ikinci mertebe olduğunu ispatlamışlardır. Kaya, Layton ve Riviere (2005), alt ağ stabilizasyon metodu ve hata düzeltme metotlarını kullanarak algoritmalar vermiştir. Bu algoritma ile çok iyi ve etkili yakınsama özelliklerine sahip çözümler elde etmişlerdir. Layton (2008), Crank-Nicolson zaman adımı metodu kullanarak NSE nin FEM çözümünü elde etmiş ve çözümünün kararlılık ve hata analizini incelemiştir.

NSE nümerik çözümlerle türbülanslı akışlar elde edilir ve elde edilen nümerik çözümler doğrudan nümerik simülasyon (DNS) olarak adlandırılır. Re Reynolds sayısıdır ve $3d$ türbülanslı akışlar için DNS uzaydaki mesh (ağ) noktalarının her bir zaman adımı için $O(Re^{\frac{9}{4}})$ olmasını gerektirir. Bu hesaplamalar ekonomik değildir hatta bazen mümkün olmayabilir (Moin, Mahesh, 1998). Bu yüzden, düşük hesaplama maliyetli yakınsak çözümler elde etmek için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntemlerden birisi de düzgünleştirme (regülerizasyon) metodudur. Layton, Mays, Neda ve Trenchea (2011), NSE nin BDF2 zaman ayrıklaştırılması için modüler regülerizasyon analizini yaptılar. Bu çalışma ile BDF2 zaman ayrıklaştırılmasının Crank-Nicolson'dan daha iyi kararlılık özelliklerine sahip olduğu gösterilmiştir. NSE ϖ -model bu metoda örnek verilebilir. Layton, Manica, Neda ve Rebholz, (2008) NSE ϖ -modeli kullanmışlardır. Bu çalışmada ϖ -model için trapezoid kuralı zaman ayrıklaştırmasını kullanarak yakınsamanın mertebesinin 2 olduğunu göstermişlerdir. Bir başka düzgünleştirme metodu NSE α -modelidir. Layton, Manica, Neda ve Rebholz, (2008) NSE α -modeli kullanmışlardır. Connor (2010) NSE α -modelin tanımını yapmış ve sonlu elemanlar ayrıklaştırması üzerine çalışmıştır. Zaman rahatlama modelleri de bir düzgünleştirme metodu olup NSE ye zaman rahatlama terimi eklenerek elde edilir (Neda, 2010; Vincent, Layton, Neda, 2007; Stolz, Adams, Kleiser, 2001; Adams, Stolz, 2001; Rosenau, 1989; Schochet, Tadmor, 1992).

Amaç NSE çözmek yerine nümerik simülasyon için daha nitelikli özellikler içeren bir sistem çözmektir. Bunun için Layton, Pruettt ve Rebholz (2010), NSE 'ye geçici bir $\kappa(u - \bar{u})$ terimini ekleyerek üssel dalgaların gücünü azaltarak akışı düzgünleştirmişlerdir. Böylece;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p + \kappa(u - \bar{u}) &= f(x, t) \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

denklemini elde etmişlerdir. Burada $\bar{u}$, u nun zaman filtresi olup

$$\begin{aligned} \bar{u}_t &= \frac{u - \bar{u}}{\delta} \\ \bar{u}(x, 0) &= u(x, 0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

diferansiyel denklemi ile tanımlanır. u, t den bağımsız ise $\bar{u} = u$ olacaktır. NSE ye " $\kappa(u - \bar{u})$ " teriminin eklenmesiyle daha kararlı ve yakınsak çözümler elde etmişlerdir. Işık (2013) tarafından (1.5) için Backward Euler (BE) ile verilen bir algoritma tanıtılmıştır. Yaptığı çalışmada κ ve δ artması durumunda spin-up zamanının azaldığını ve çözümün denge durumuna (steady-state) daha hızlı yakınsadığını ispatlamıştır.

Layton ve Takhirov (2015), çözümlemesi yetersiz olan akışlar için duvara adapteli doğrusal olmayan filtreler kullanarak yeni yöntemler bulmuşlardır. Jiang, Kaya ve Layton (2014) istatistiksel türbülans viskozite modelini üzerine çalışmalar yapmışlar ve parametreleştirmişlerdir. Takhirov, Neda ve Waters (2015) bir zaman rahatlama metodunu vermişlerdir. Bu çalışmada Stolz, Adams ve Kleiser tarafından getirilen ve sonrasında denklemlerinde geliştirilen zaman ayrıklaştırma modelini genişleten bir yöntem kullanmışlardır. NSE ye " κu^* " terimini ekleyerek

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p + \kappa u^* &= f(x, t), x \in \Omega, 0 \leq t < T, \\ \nabla \cdot u &= 0, x \in \Omega, 0 \leq t < T, \\ u &= 0, \partial\Omega, 0 \leq t < T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

denklemini elde etmişler ve burada $u^* = \bar{u} - u$ için Layton, Pruettt ve Rebholz (2010) tarafından geliştirilen geçici filtreyi kullanmışlardır. Yaptıkları analiz

sonucunda verilen metodun koşullu kararlılık altında yakınsak olduğunu ispatlamışlardır. Jiang, Mohebujjaman, Rebholz ve Trenchea (2015) NSE nin ikinci merteye zaman adımı metodlarıyla bir düzgünleştirme modeli için bir çalışma yapmışlardır.

Sonlu elemanlar yöntemi, en genel anlamda parçadan bütüne gitme prensibine dayanmaktadır. Sonlu eleman; iki veya üç boyutlu yapıların bir parçasıdır. Bu yöntemin ilk uygulama alanı gerilme analizidir. Sonrasında ise ısı analizi, akışkan analizi, elektrik analizi gibi alanlarda kullanılmıştır. Courant (1940) yaptığı bir çalışmada burulma problemlerini araştırmak için parçalı polinom interpolasyonunu üçgensel alt bölgeler (elemanlar) üzerinde kullanmıştır. Courant, Ritz'in sayısal analiz ve varyasyonlar yönteminde minimum potansiyel enerji ilkesini kullanarak problemleri formüle etti ve sonlu elemanlar yönteminin ilk uygulayıcılarından oldu. Courant'tan sonra sonlu elemanlar yöntemleri uzay mühendisliğinde kullanılmaya başlanmıştır. Boeing'in 1950 de uçak kanatlarını modellemek için üçgen gerilim elemanları kullanmasıyla başlamıştır. Yöntemin ana fikrini oluşturan ilk makale 1956 yılında Turner ve arkadaşları tarafından yayınlanmıştır. 1960'larda araştırmacılar sonlu elemanlar yöntemini diğer mühendislik alanlarında kullanmaya başlamışlardır. Zienkiewicz ve Cheung (1967) tamamen sonlu elemanları anlatan bir kitap yazmışlardır. Clough düzlem problemlerinde sonlu elemanlar kullanımı üzerinde çalıştı. Navier Stokes denklemlerinin ilk sonlu elemanlar çözümü Taylor ve Hood tarafından 1973'de yapılmıştır (Davies, 2011).

Bu çalışmada BE metodu kullanılarak Işık (2013) tarafından verilen algoritma ile elde edilen çözümlerin kararlılığı ve yakınsaklığı incelenmiştir. Bu algoritma ile elde edilen çözümlerin koşulsuz kararlı olduğu, yakınsak ve mertebenin $O(\kappa\delta + \Delta t)$ olduğu ispatlanmıştır.

Bu tez çalışması aşağıdaki sıraya uygun olarak yazılmıştır.

İkinci bölümde, adi diferansiyel denklemler, Cauchy problemi, diferansiyel denklemlerde kararlılık tanımı, diferansiyel denklemlerde well posed ve ill posed durumları verilmiştir. Adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için açık ve kapalı metotlar ve bu metotların bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ve KDD nin nümerik çözümleri için temel tanımlar, eliptik denklemler, Hilbert uzayı, Sobolev uzayları hakkında genel bilgiler, gerekli tanım, teorem ve lemmalar verilmiştir. $L^\infty(\Omega)$ ve $L^p(\Omega)$ uzayları, zamana bağlı NSE, NSE nin zayıf

ve güçlü formülasyonları verilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi (FEM), X_h^1 ve X_h^2 uzayları hakkında genel bilgiler verilmiştir. Kararlılık ve hata analizleri için Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Poincare eşitsizliği, Poincare-Friedrichs eşitsizliği, Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi koşulu (LBB^h), Trace eşitsizliği, Ladyzhenskaya eşitsizlikleri, Young eşitsizliği, Gronwall lemma, ayrık Gronwall lemma (1. versiyon), ayrık Gronwall lemma (2. versiyon), bilineer form ve güçlü çözüm tanımı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, NSE ye $\kappa(u - \bar{u})$ terimi eklenerek Layton (2010) tarafından verilen NSE-TRM verilmiştir. NSETRM nin Işık (2013) tarafından verilen zaman adımında BE metodu kullanılarak oluşturulmuş Algoritma 4.1.1 verilmiştir. Bu algoritma ile elde edilen çözümlerin koşulsuz kararlı olduğu, yakınsak ve mertebenin $O(\kappa\delta + \Delta t)$ olduğu ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, Algoritma 4.1.1 farklı örneklerle uygulanmış ve sonuçlar çizelgelerde gösterilmiştir. Test sonuçlarında, metodun mertebesi, teoriden beklediğimiz gibi $O(\kappa\delta + \Delta t)$ olmuştur. Bununla birlikte çözümün yakınsak olduğu bir örnek için Algoritma 4.1.1 uygulanmış ve κ artarken daha tutarlı çözümler elde edilmiştir. Ayrıca Algoritma 4.1.1 ile elde edilen çözümlerin $\kappa \geq 1$ için yakınsak olduğu gözlemlenmiştir.

Son bölümde de bulunan sonuçlar özetlenmiştir.

2.KAYNAK ÖZETLERİ

2.1 Adi Diferansiyel Denklemler

Bilinmeyen fonksiyon tek bir değişkene bağımlı ise, diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir (Çağlayan, Çelebi, 2002).

2.1.1 Cauchy problemi

Cauchy problemi verilen uygun başlangıç koşullarında bir diferansiyel denklemin çözümünün bulunması problemidir. $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ birinci mertebeden adi diferansiyel denklem için Cauchy problemi,

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= f(t, y), t \in I \\ y_0 &= y(t_0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

denklemini sağlayan $y \in C^1(I)$ fonksiyonu bulmaktır. Burada $f(t, y)$ fonksiyonu, $S = I \times (-\infty, \infty)$ üzerinde tanımlı her iki değişkene göre sürekli gerçel değerli bir fonksiyondur. Eğer f fonksiyonu t ye göre sürekliyse (2.8) 'nin çözümü

$$y(t) - y(t_0) = \int f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (2.9)$$

integral denklemi (2.9) denklemini sağlar.

Tersine; y fonksiyonu (2.9) ile tanımlı ise I da sürekli ve $y(t_0) = y_0$ dır. y fonksiyonu $f(\cdot, y(\cdot))$ nin ilkel olduğundan $y \in C^1(I)$ ve $y^{(1)} = f(t, y)$ sağlanır (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.1.2. Diferansiyel denklemlerde kararlılık

Tanım 2.1.1. (Liapunov Anlamında Kararlılık) $\delta_0 \in \mathbb{R}$, I sınırlı aralığı üzerinde sürekli (2.8) den pertürbasyon ile elde edilmiş,

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, z(t)) + \delta(t), \quad t \in I \\ z(t_0) &= y_0 + \delta_0 \end{aligned}$$

problemini ele alalım. Eğer $|\delta_0| < \varepsilon$, $|\delta(t)| < \varepsilon$ ve $\forall t \in I$ şartını sağlayan $\forall(\delta_0, \delta(t))$ pertürbasyonu ve $\exists C > 0$ için $|z(t) - y(t)| < C\varepsilon$ şartı sağlanırsa (2.8) Cauchy problemi Liapunov anlamında kararlıdır. Burada C genellikle t_0 , y_0 ve f ye bağlı olup ε bağlı değildir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Örnek 2.1.2. Tam çözümü $y(x) = 1$ olan $[0, b]$ de

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y(x) + 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$z'(x) = -z(x) + 1$, $0 \leq x \leq b$ olup $z(x) = 1 + \varepsilon e^{-x}$ çözümüne sahiptir.

$y(x) - z(x) = -\varepsilon e^{-x}$ ve $|y(x) - z(x)| = |-\varepsilon e^{-x}| \leq \varepsilon$ olur ve denklem Liapunov anlamında kararlıdır (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Tanım 2.1.3. (Asimptotik Kararlılık) Eğer I sınırlı aralığında (2.8) problemi Liapunov anlamında kararlı ve

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } |z(t) - y(t)| \rightarrow 0 \text{ ise}$$

denklem asimptotik kararlıdır denir. (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Örnek 2.1.4. Tam çözümü $y(x) = 1$ olan ve $y'(x) = -y(x) + 1$ ve $0 \leq x \leq b$, $y(0) = 1$ diferansiyel denklemini Liapunov anlamında kararlıdır. Asimptotik kararlılığımı inceleyelim.

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } |1 + \varepsilon e^{-t} - 1| = |\varepsilon e^{-t}| \rightarrow 0$$

olur, o halde problem asimptotik kararlıdır.

2.1.3. Diferansiyel denklemlerde iyi konulmuş (well-posed) ve kötü konulmuş (ill posed) problemler.

(2.8) problemi için aşağıdaki ifadeler sağlanırsa iyi konulmuş (well posed) denir.

i)(2.8) tek çözüme sahiptir

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k(\varepsilon)$ sabiti vardır öyle ki

$$|\varepsilon_0| < \varepsilon \text{ ve } |\delta(t)| < \varepsilon, [a, b] \text{ olmak üzere} \quad (2.10)$$

$$z' = f(t, z) + \delta(t), a \leq t \leq b, z(a) = \alpha + \varepsilon_0 \quad (2.11)$$

problemi tek çözüme sahiptir ve $|z(t) - y(t)| < \varepsilon k(\varepsilon)$ olur (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Cauchy probleminin kararlı olması durumu onun iyi konulmuş (well posed) olmasına eşdeğerdir. Eğer kararlı değilse kötü konulmuş (ill-posed) olmasına eşdeğerdir (Atkinson, 1988).

Tanım 2.1.5. (Lipschitz Şartı) $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

olacak şekilde $L > 0$ varsa f Lipschitz şartını sağlar (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Teorem 2.1.6. $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ olsun. Eğer f fonksiyonu D de y değişkenine göre sürekli ve Lipschitz şartını sağlıyor ise başlangıç değer probleminin iyi konulmuştur (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.1.4. Varlık ve teklik teoremi

$D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ konveks bölgesi üzerinde (2.8) Cauchy problemini ele alalım. Eğer $f(t, y)$, D bölgesi üzerinde sürekli ise ve bu bölgede Lipschitz şartını sağlıyorsa bu taktirde (t_0, y_0) noktasını içine alan bir alt bölgede (2.8) Cauchy probleminin çözümü vardır ve tektir. Bu bölge

$$\max_{(\zeta, \tau) \in D} |f(\zeta, \tau)| \leq M, h = \min(a, \frac{b}{M})$$

olmak üzere $D_0 = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$ dir (Brock, Malliaris, 1989; Carroll, 2002).

2.2. Adi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri (Zaman Adımlı Metotlar)

2.2.1. Zaman adımlı metotlar

$$y' = f(t, y), t > t_0, y(t_0) = y_0 \quad (2.12)$$

Cauchy problemini ele alalım. Burada $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ bir fonksiyon, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ bir vektör, t bağımsız değişken, $y(t)$ bağımlı değişkendir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Euler metot (2.12) diferansiyel denklemi incelenirse, y nin t_0 noktasındaki değerini ve y fonksiyonunun eğimini bilmekteyiz. y nin herhangi bir değerini hesaplamak için temel yaklaşım olan bir interpolasyon kullanılabilir. İnterpolasyon; elde var olan bilinen noktalardan yola çıkarak bu noktalar arasında farklı bir yerde ve değeri bilinmeyen bir noktadaki olası değeri tahmin etmeye yarayan yöntemlerin tümüne verilen isimdir. Yani; $y \in [t_0, t_0 + h]$ olmak üzere $y(t)$ değerini $f(t, y(t)) \simeq f(t_0, y(t_0))$ yaparak ve (2.12) denkleminin iki tarafının integralini alarak;

$$y(t) - y(t_0) = \int f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

$$y(t) \simeq y(t_0) + (t - t_0)f(t_0, y(t_0)) \quad (2.13)$$

elde edilir. Verilen $h>0$ ve $t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_1 + h, \dots, t_{n+1} = t_n + h = t_0 + nh$ dizisinde h büyüklüğündeki adımlarla ilerleyerek, $y(t_n)$ ifadesinin yaklaşık değerini $n=0,1,2,\dots$ için y_n ile gösterelim. Böylece $t=t_n$ için (2.13) eşitliği; $y(t_0)=y_0$, $y(t_1)=y_1$ ise aşağıdaki gibi elde edilecektir

$$y(t_1)=y(t_0)+hf(t_0,y(t_0)).$$

Benzer işlemler $y_1, y_2, \dots, y_n$ için yapılırsa

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Euler (forward-Euler) metot olarak adlandırılan plan elde edilir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.2.2 Açık metot

Bir bilinmeyen bir denklemden birden fazla bilinmeyenle çözüldüğü metotlardır. Bulunan zaman değerlerinden faydalananarak bir sonraki zaman değeri hesaplanır. Böylelikle istenilen zamana ulaşınca kadar bu işlem tekrarlanır. Yani y_{n+1} terimi her bir adımda $k \leq n$ için y_k terimleri ile doğrudan hesaplanabiliyorsa bu metoda açık metot denir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.2.3 Kapalı metot

Birden fazla bilinmeyen bir ya da daha fazla bilinmeyenle çözüldüğü metotlardır. Yani y_{n+1} terimi her bir adımda $k \leq n$ için y_k terimleri ile doğrudan hesaplanamıyorsa kapalı metot denir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Tanım 2.2.1. Cauchy probleminin çözümü için verilen bir nümerik metod $\forall n \geq 0$ için y_{n+1} ifadesi sadece y_n e bağlı ise tek adımlı bir metod olarak adlandırılır (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.2.4. Açık ve kapalı metotların avantajları ve dezavantajları

Kapalı metotlar hesaplama bakımından açık metotlara göre daha zahmetli ve zaman isteyen yöntemdir. Açık yöntemle kıyaslandığında bu kötü bir özellik gibi görünse de kapalı yöntemlerin tutarlılık özellikleri, kapalı yöntemleri tercih sebebi yapmaktadır (Strang, 2007). Açık metodun kararlılığı için zaman adım boyutunun çok küçük olması gerekir, ancak bazı kapalı metotlar koşulsuz kararlıdır ve kararlılık için zaman adımına kısıtlama getirmeye gerek duyar. Kapalı metotlarda, dezavantaj ise her bir zaman adımında daha karmaşık bir cebirsel sistemin çözülmesi gerekebilir. Açık metodun avantajı, basit ve hızlı çözüm vermesidir, dezavantajı ise yalnızca çok küçük zaman adımları için kararlı çözümler üretir ve kararlılık genelde bir koşula bağlıdır (Butcher, 2008).

Tanım 2.2.2. (Sıfır (Zero) Kararlılık) (2.8) Cauchy problemi için (2.14) tek adımlı metodu, eğer $\exists h_0 > 0$, $\exists C > 0$ ve $\forall h \in (0, h_0]$, $0 \leq n \leq N_h$ için z_n^h, u_n^h sırasıyla

$$\begin{aligned} z_{n+1}^h &= z_n^h + h [\Phi(t_n, z_n^h, f(t_n, z_n^h); h) + \delta_{n+1}] , \quad z_0 = y_0 + \delta_0 \\ u_{n+1}^h &= u_n^h + h [\Phi(t_n, u_n^h, f(t_n, u_n^h); h)] , \quad y_0 = u_0 \end{aligned}$$

denkleminin çözümleri olmak üzere

$$|\delta_k| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq k \leq N_h \implies |z_n^h - u_n^h| \leq C\varepsilon$$

şartı sağlanırsa Cauchy problemi sıfır kararlıdır (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Zaman adımlı metotlar için mutlak kararlılık tanımı aşağıdaki test problemi için olacaktır.

Test Problemi:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), t > 0 \\ y(0) &= 1, \lambda \in \mathbb{C}, y(t) = e^{\lambda t} \text{ tam çözümü} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Tanım 2.2.3. (Mutlak (Absolute) Kararlılık) $t_n \rightarrow \infty$ için y_n sınırlı kalıyorsa nümerik metot mutlak kararlı denir.

$$t_n \rightarrow \infty \text{ için } |y_n| \rightarrow 0$$

ise mutlak (absolute) kararlıdır (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Problemin mutlak kararlı olduğu bölgeye mutlak kararlılık bölgesi denir

$$A = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} \mid t_n \rightarrow \infty \text{ için } |y_n| \rightarrow 0\}$$

(Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Tanım 2.2.4. Herhangi bir tek adımlı açık

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, f_n; h), 0 \leq n \leq N_h - 1$$

metot için $y_n = y(t_n)$ yerine yazılarak

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, f_n; h) + \varepsilon_{n+1}, 0 \leq n \leq N_h - 1$$

olmak üzere

$$\varepsilon_{n+1} = h\tau_{n+1}(h)$$

ifadedeki $\tau_{n+1}(h)$, t_{n+1} deki yerel kesme hatası (LTE) olarak adlandırılır. Global kesme hatası da

$$\tau_n(h) = \max_{0 \leq n \leq N_h - 1} |\tau_{n+1}(h)|$$

olarak tanımlanır (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Tanım 2.2.5. Verilen herhangi bir

$$y_{n+1} = \Phi(t_n, h, y_n), 0 \leq n \leq N_h - 1$$

zaman adımlı metot için

$$y(t_{n+1}) - \Phi(t_n, h, y(t_n)) = Ch^{p+1}, 0 \leq t \leq N_h - 1$$

ise metodun mertebesi p dir denir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Tanım 2.2.6. (Yakınsaklık) Nümerik metod yakınsaktır eğer

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \|u - u_N\| \rightarrow 0.$$

Başka bir ifadeyle $u(g) \rightarrow u_N(g_N)$ ancak ve ancak

$$\begin{aligned} &(\forall \epsilon > 0)(\exists N_0 = N_0(\epsilon) > 0)(\exists \delta = \delta(N_0, \epsilon)) \\ &(\forall N > N_0)(\forall g_N)(\|g - g_N\| < \delta \Rightarrow \|u(g) - u_N(g_N)\| < \epsilon) \end{aligned}$$

Nümerik bir metodun yakınsak olduğunu doğrudan göstermek kolay olmayabilir. Bunun yerine, metodun tutarlılık (consistency) ve kararlılık (stabilite) özelliklerinin sağlandığı, yakınsaklık yerine gösterilebilir (Quarteroni, 2009).

Tanım 2.2.7. (Tutarlılık) Eğer (2.8) Cauchy problemi için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$$

oluyorsa nümerik metot tutarlıdır denir (Quarteroni, 2009).

$$Tutarlı + Kararlı \Rightarrow Yakınsak$$

Teorem 2.2.8. (2.14) ile verilen Euler metot yakınsaktır.

Kanıt: Teoremi f nin analitik olması durumunda ispatlayalım. Verilen herhangi

bir $h > 0$ için hatayı

$$e_{n+1} = y_{n+1} - u_{n+1}$$

ile gösterelim. Taylor açılımı ile

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\ &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \dots \\ &= y(t_n) + hf(t_n, y_n) + O(h^2) \end{aligned} \tag{2.16}$$

elde edilir. y sürekli diferansiyellenebilir olduğundan $O(h^2)$ terimi herhangi bir normda ve $\forall h > 0$ için düzgün olarak sınırlandırılabilir

(2.16) ifadesinden (2.14) ifadesi çıkarılırsa;

$$e_{n+1} = e_n + h[f(t_n, y(t_n) + e_n) - f(t_n, y(t_n))] + O(h^2)$$

elde edilir. Taraf tarafa norm alınarak, üçgen eşitsizliği ve Lipschitz şartı kullanılarak $M = \max_{\xi \in I} |y''(\xi)|$ olmak üzere aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n| + hL|e_n| + Mh^2 \\ &\leq (1 + hL)|e_n| + Mh^2, \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

veya

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{L}h((1 + hL)^{n+1} - 1).$$

$hL > 0$ olduğundan $(1 + hL) \leq e^{hL}$ ve $(1 + hL)^{n+1} \leq e^{(n+1)hL}$ elde edilir. Böylece $\lim_{h \rightarrow 0, \forall n \geq 0} |e_{n+1}| = 0$ olacaktır. $\square$

Backward Euler (BE) metot Euler metotta $\int f(t, y)dt$ integralinin f nin t_n yerine t_{n+1} de interpolasyon polinomu alınarak nümerik olarak hesaplanırsa,

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

metodu elde edilir. Kapalı olan bu metot BE metot olarak adlandırılır.

Backward-Euler metotun mertebesi 1 dir. Gerçekten,

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = O(h^2) = O(h^{p+1}), p = 1$$

(Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Örnek 2.2.9. BE metodun mutlak kararlılık bölgesini bulalım

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= h\lambda y_{n+1}, y_0 = 1 \\ y_{n+1} &= \frac{1}{(1 - h\lambda)^{n+1}} y_0, y_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} y_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

olacaktır. Burada

$$|y_n| = |(1 - h\lambda)^{-n}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |(1 - h\lambda)| > 1$$

elde edilir. Bu da merkezi $(1, 0)$ da olan birim çemberin dışında kalan bölge olup Şekil 1 de verilmiştir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

Örnek 2.2.10. Forward-Euler metodun mutlak kararlılık bölgesini bulalım

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda) y_n = (1 + h\lambda)^{n+1}$$

olacaktır.

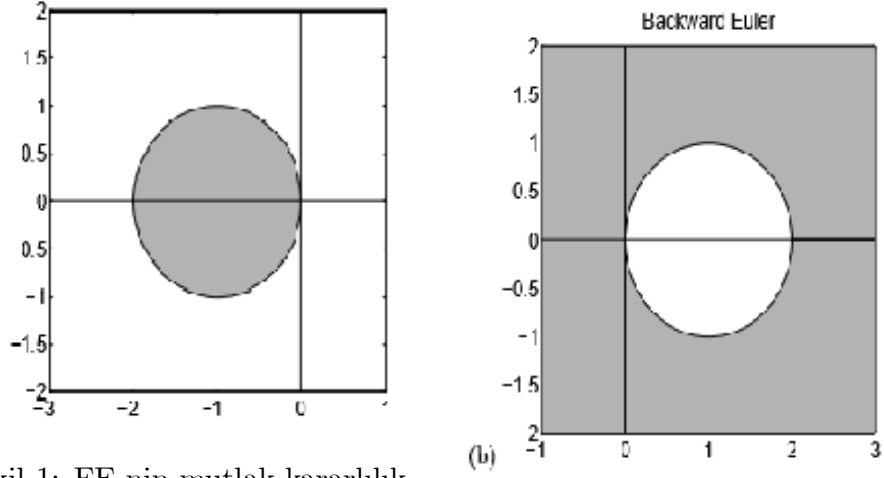
$$|y_n| = |(1 + h\lambda)^n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |(1 + h\lambda)| < 1$$

ile sağlanır. Bu da

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) < 0\} \text{ olmak üzere}$$

$$h\lambda \in \mathbb{C}^-, \quad 0 < h < \frac{-2 \text{Re } \lambda}{|\lambda|^2} \quad (2.18)$$

için geçerli olup bölge Şekil 1 de verilmiştir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).



Şekil 1: FE nin mutlak kararlılık bölgesi

BE nin mutlak kararlılık bölgesi

2.2.5. Trapezoid kuralı (Crank-Nicolson metot)

Cauchy probleminin (2.9) de verilen integral denklem formunda, $\int f(t, y)dt$ integraline f nin t_n ve t_{n+1} in orta noktasındaki interpolasyon polinomu yazılarak integral alınırsa trapezoid kuralı elde edilir.

$$y(t) \cong y(t_n) + \frac{1}{2}(t - t_n)[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \quad (2.19)$$

(2.19) ile verilen metodun mertebesini bulmak için gerçek çözümü (2.19) de yazarak, $y(t_{n+1})$ i t_n civarında Taylor serisine açalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{1}{2}h[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \\ &= [y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_n) + O(h^4)] - y(t_n) \\ &\quad - \frac{1}{2}h[y'(t_n) + y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}y'''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(4)}(t_n) + O(h^4)] \\ &= \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{4}\right)y'''(t_n) + O(h^4) = O(h^3) \end{aligned}$$

Yani trapezoid metodunun mertebesi 2 olarak elde edilir (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.2.6. θ - metot

FE metot, trapezoid metot ve BE metodu sırası ile $\theta = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ ve $\theta = 0$ için veren

$$y_{n+1} = y_n + h[\theta f(t_n, y_n) + (1 - \theta)f(t_{n+1}, y_{n+1})], n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

denklemini ele alalım. (2.20) denklemini kullanarak $\forall \theta \in [0, 1]$ için bir zaman adımlı metot elde ederiz. Bu metot θ - metot olarak isimlendirilir.

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h[\theta f(t_n, y(t_n)) + (1 - \theta)f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \\ &= [y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(t_n) + O(h^4)] \\ &= y(t_n) + h[\theta y'(t_n)] + h(1 - \theta)[y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}y'''(t_n)] \\ &= h^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \right) y''(t_n) + \frac{h^3}{2} \left(\theta - \frac{2}{3} \right) y'''(t_n) + O(h^4) \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir. θ - metodun sadece $\theta = \frac{1}{2}$ için mertebesi 2 dir. Diğer θ değerleri için mertebe 1 olur (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.2.7. İmplicit midpoint kuralı

Trapezoid metoda benzer bir şekilde eğer ortalamayı t yerine f nin içinde yaparsak

$$y_{n+1} = y_n + h[f(t_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2})]$$

implicit midpoint kuralı elde ederiz (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

2.2.8. Heun metot

Trapezoid kuralında $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ yerine $f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))$ alınarak elde edilen metottur (Quarteroni, Sacco, Saleri, 2000).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))]$$



3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler

Kısmi diferansiyel denklem (KDD), çok değişkenli bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha çok kısmi türevlerini içeren denklemdir. u bağımsız değişkenli bir fonksiyon; örneğin $u=u(x, y, z, t)$ olsun. u nun x e göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{h} \quad (3.21)$$

limiti ile tanımlanır ve $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ dir. Eğer u nun m . mertebeye kadar kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli ise u fonksiyonu $C^m(\Omega)$ sınıfındadır. u bağımsız değişkenli bir fonksiyonu içeren en genel kısmi diferansiyel denklem:

$$F(x, y, z, t; u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.22)$$

ile gösterilebilir. Kısmi diferansiyel denklemler mertebe, lineerlik, homojenlik gibi özelliklerine göre sınıflandırılır.

(3.22) denkleminde mertebe, denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesidir (Duchateau, Zachmann, 1988). Bir kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve onun kısmi türevleri birinci dereceden, denklemde çarpım halinde olmuyorsa, bu denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir. Eğer (3.22) denklemini u 'dan bağımsız hiç bir terim içermiyorsa kısmi diferansiyel denklem homojendir denir (Quarteroni, 2009).

En yüksek mertebeden türeve göre lineer olan kısmi türevli diferansiyel denkleme quasilineer diferansiyel denklem denir. İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli quasilineer denklem

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = F(x, y, u_x, u_y) \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada x, y bağımsız değişken ve u bağımlı değişkendir. Eğer,

$ac - b^2 > 0$ ise (3.24) denklemi eliptiktir.

$ac - b^2 = 0$ ise (3.24) denklemi paraboliktir.

$ac - b^2 < 0$ ise (3.24) denklemi hiperboliktir.

(Quarteroni, 2009).

3.2. Eliptik Denklemler

3.2.1. Poisson denklemi

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f = f(x)$ fonksiyon ve Δ iki boyutta Laplace operatörü

$$\Delta u = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

olmak üzere Poisson denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f, (x_1, x_2) \in \Omega \quad (3.25)$$

(3.25) eliptik, lineer ve ikinci mertebe homojen olmayan bir denklemdir. Eğer $f = 0$ ise (3.25) denkleminde Laplace denklemi denir. Sınır koşulları üç şekilde verilir:

Sınır şartı u cinsinden veriliyorsa buna Dirichlet sınır koşulu denir.

$$u = g, (x_1, x_2) \in \partial\Omega \quad (3.26)$$

Eğer $g = 0$ ise homojendir.

Eğer koşul u nun gradiyenti şeklinde verilirse

$$\nabla u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n} = h, (x_1, x_2) \in \partial\Omega \quad (3.27)$$

Neumann sınır koşulu denir. Burada n , $\partial\Omega$ 'da dış birim normal vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal türevidir. Eğer $h = 0$ ise homojendir.

Karışık Sınır Koşullar,

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \Gamma_D \cup \Gamma_N, \Gamma_D^\circ \cap \Gamma_N^\circ = \emptyset \text{ olmak üzere} \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = g, (x_1, x_2) \in \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h, (x_1, x_2) \in \Gamma_N \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

ile verilir. Eğer $g = 0$ ve $f \in C(\bar{\Omega})$ ise (3.26), (3.27) denklemi regüler (düzgün) bir çözüme sahip olmayabilir (Quarteroni, 2009).

3.3. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

Sınır koşullarının keyfi fonksiyonlara bağlı olması KDD lerin analitik olarak çözümlerinin nadir olarak elde edilmesi ile sonuçlanır. Böylelikle verilen bir kısmi diferansiyel denklemin çözümlerinin hesaplama eksikliklerinden dolayı, çözümler ile ilgili çalışmalar çözümlerin varlığı, regüler olup olmadıkları ve tekliğinin araştırılması ile sınırlı kalmıştır. Bundan dolayı u tam çözümünün bir u_N yaklaşık çözümünü, $u - u_N$ hatasının uygun bir normda hesaplanmasına olanak verecek şekilde nümerik metodların bulunması büyük önem taşımaktadır. $N \geq 1$ (pozitif tamsayı) sayısı yaklaşım probleminin boyutunu gösterebilir.

$$\begin{aligned} P(u, g) &= 0 \text{ KDD nin tam çözümü} \\ &\downarrow \text{(nümerik metotlar)} \\ P_N(u_N, g_N) &= 0 \text{ KDD nin yaklaşık çözümü} \end{aligned}$$

olarak verilebilir. Burada g_N , g veri kümesinin dayandığı bir yaklaşımı, P_N yak-

laşık problemi karakterize eden yeni fonksiyonel bir bağıntı olsun. Tam çözüm $u = u(g)$ ve yaklaşık çözüm de $u_N = u_N(g_N)$ ile gösterilmiştir (Quarteroni, 2009).

3.4. Hilbert Uzayı $L^2(\Omega)$ ve $H^1(\Omega)$

Tanım 3.4.1. ($L^2(\Omega)$ fonksiyonları) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ açık ve sınırlı bir bölge olmak üzere $L^2(\Omega)$, tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesidir.

$$L^2(\Omega) = \{p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |p|^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$ üzerinde norm;

$$\|p\| = \sqrt{(p, p)} = \left[\int_{\Omega} |p|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$L^2(\Omega)$ üzerinde iç çarpım;

$$(p, q) = \int_{\Omega} p(x)q(x)dx, \quad q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır (Layton, 2008).

Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe $(\cdot, \cdot)$ ve $\|\cdot\|$ ile sırasıyla $L^2(\Omega)$ da tanımlı iç çarpım ve norm kastedilecektir.

$L^2(\Omega)^d$ uzayı $L^2(\Omega)$ dan hareketle;

$$L^2(\Omega)^d = \{v = (v_1, \dots, v_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, v_j \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, d\}$$

ve $L^2(\Omega)^d$ da norm

$$\|v\| = \|v\|_{L^2(\Omega)^d} = \left[\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_d\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır (Layton, 2008).

Örnek 3.4.2. $v = (\tan x, \cot x, x, x^2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\Omega = (0, \frac{\pi}{4})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2(\Omega)^d} &= \left[\|\tan x\|^2 + \|\cot x\|^2 + \|x\|^2 + \|x^2\|^2 + \|1\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx \right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot^2(x) dx \right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 dx \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^4 dx \right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1^2 dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left((\tan(x) - x)^2 + (-\cot(x) - x)^2 + \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 + \left(\frac{x^5}{5}\right)^2 + (x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(-1 - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi^3}{192}\right)^2 + \left(\frac{\pi^5}{5120}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2 + \frac{3\pi^2}{16} + \frac{\pi^6}{(192)^2} + \frac{\pi^{10}}{(5120)^2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Örnek 3.4.3.

$$\begin{aligned}
p(x), q(x) &: (0, \frac{\pi}{4}) \rightarrow \mathbb{R} \\
p(x) &= \tan(x), q(x) = \cot(x)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(p, q)_{L^2} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \cot(x) dx \right) = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
\|p\|_{L^2} &= \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2(x) + 1 - 1) dx} \\
&= \sqrt{(\tan(x) - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Tanım 3.4.4. (Tensör) Ω da bir d-tensör, $L^2(\Omega)^{d \times d} = \{V = (V_{ij}) : i, j = 1, \dots, d, V_{ij} \in L^2(\Omega)\}$ ile tanımlanır. V bir tensör olmak üzere ($\|V\| < \infty$) V üzerinde norm ve iç çarpım sırasıyla

$$\|V\| = \left[\sum_{i,j=1}^d \|V_{ij}\|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(S, T) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d S_{ij}(x) T_{ij}(x) dx, \quad S, T \in L^2(\Omega)^{d \times d}$$

ile tanımlanır (Layton, 2008).

Tanım 3.4.5. Hız ve basınç uzayları (X, Q) olmak üzere

$$X = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega) \text{ ve } u = 0 \text{ } \partial\Omega \text{ 'da}\}$$

$$Q = \{q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, q \in L^2(\Omega) \text{ ve } \int_{\Omega} q dx = 0\}$$

ile tanımlanır. $u \in C^1(\Omega)$, $\partial\Omega$ üzerinde sıfır olan bir fonksiyon olsun. X üzerinde tanımlı norm ve iç çarpım sırayla

$$\|v\|_X = \sqrt{(v, v)_X}$$

$$(u, v)_X = (u, v) + (\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

ile tanımlanır (Layton, 2008).

Örnek 3.4.6.

$$u, v : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u = (x, 1 + x^2), v = (x^3, x^2 - 1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
(u, v)_X &= \int ((x, 1+x^2) \cdot (x^3, x^2-1) + (1, 2x) \cdot (3x^2, 2x)) dx \\
&= \int (2x^4 - 1 + 7x^2) dx \\
&= \frac{2x^5}{5} - x + \frac{7x^3}{3} \Big|_1^2 \\
&= \frac{64}{5} - 2 + \frac{56}{3} - \left(\frac{2}{5} - 1 + \frac{7}{3} \right) = \frac{416}{15} \\
\|v\|_X &= \sqrt{\int ((3x^2, 2x) \cdot (3x^2, 2x) + (x^3, x^2-1) \cdot (x^3, x^2-1)) dx} \\
&= \sqrt{\int ((10x^4 + 2x^2 + x^6 + 1) dx)} \\
&= \sqrt{2x^5 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + x} \Big|_1^2 \\
&= \sqrt{\left(64 + \frac{16}{3} + \frac{128}{7} - \left(3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \right) \right)} = \sqrt{\frac{1760}{21}}
\end{aligned}$$

Tanım 3.4.7. $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan tamsayılar, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $D^\alpha f$ fonksiyonu

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

olarak tanımlanır. Burada $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ dir. Bu gösterim multi-index notasyonu olarak adlandırılır (Quarteroni, 2009).

Tanım 3.4.8. (Distribution Anlamında Zayıf Türev) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $T \in D^{(1)}(\Omega)$:

$D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. T nin distribution anlamında zayıf türevi $\frac{\partial T}{\partial x_i}$,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega), i = 1, \dots, n$$

ile tanımlanır. Benzer biçimde, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ çoklu indeks gösterimi ile

$D^\alpha T$

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \forall \phi \in D(\Omega)$$

ile verilir (Quarteroni, 2009).

$\alpha \in \Omega$ keyfi nokta olsun. α noktası ile ilişkili Dirac delta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlı bir δ_α distributionıdır.

$$\langle \delta_\alpha, \phi \rangle = \phi(\alpha), \forall \phi \in D(\Omega). \quad (3.29)$$

Örnek 3.4.9. $\Omega = \mathbb{R}$ ve $\chi_{[a,b]}(x)$ karakteristik fonksiyon olarak tanımlayalım

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{d. y.} \end{cases} \quad (3.30)$$

$f_n(x) = \frac{n}{2} \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x)$ olduğunu düşünelim. Dirac delta'nın olduğunu doğrulamaya çalışalım.

$$\langle T_{f_n}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_n(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \phi(x) dx = \frac{n}{2} [\phi(\frac{1}{n}) - \phi(-\frac{1}{n})] \quad (3.31)$$

ϕ nin ilkeli Φ dir. $h = \frac{1}{n}$ olarak alırsak

$$\langle T_{f_n}, \phi \rangle = \frac{[\Phi(h) - \Phi(-h)]}{2h}. \quad (3.32)$$

$n \longrightarrow \infty, h \longrightarrow 0$ olduğunda türevin tanımından

$$\frac{\Phi(h) - \Phi(-h)}{2h} \longrightarrow \Phi'(0). \quad (3.33)$$

$\Phi' = \phi$ olduğundan

$$\langle T_{f_n}, \phi \rangle \longrightarrow \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \quad (3.34)$$

δ_0 distributiondır (Quarteroni, 2009).

3.5. Sobolev Uzayları

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olsun. Ω 'da k mertebeli $H^k(\Omega)$ Sobolev uzayı

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \text{ ve } |\alpha| \leq k \text{ için } D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$$

olarak tanımlanır. Sobolev uzayının tanımından $\forall k \geq 0$ için $H^{k+1}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ olur. L^2 uzayı $H^0(\Omega)$ ifadesi ile de gösterilir (Quarteroni, 2009).

$H^k(\Omega)$ Sobolev uzayları aşağıdaki iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)(D^\alpha g) d\Omega$$

$H^k(\Omega)$ üzerinde norm ve yarı norm sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır (Quarteroni, 2009):

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_k} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 d\Omega}$$

$$|f|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_k} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 d\Omega}$$

Örnek 3.5.1.

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^1(\Omega)} &= \sqrt{\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)dx + \int_0^1 4x^2 dx} \\ &= \sqrt{\frac{x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + x \Big|_0^1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{5} + 3\right)} = \sqrt{\frac{16}{5}}\end{aligned}$$

Örnek 3.5.2.

$$\begin{aligned}f &: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= e^{3x+5}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^1(\Omega)} &= \sqrt{\int_{-3}^3 e^{6x+10} dx + \int_{-3}^3 9e^{6x+10} dx} \\ &= \sqrt{\int_{-3}^3 10e^{6x+10} dx} \\ &= \sqrt{\frac{10}{6} e^{6x+10} \Big|_{-3}^3} \\ &= \sqrt{\frac{10}{6} e^{28} - \frac{10}{6} e^{-8}}\end{aligned}$$

3.6. $L^\infty(\Omega)$ ve $L^p(\Omega)$ Uzayları ($1 \leq p \leq \infty$)

$L^2(\Omega)$ uzayı aşağıdaki şekilde genişletilebilir: $1 \leq p \leq \infty$ için ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarının uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |v|^p d\Omega < \infty\},$$

olup $L^p(\Omega)$ üzerinde norm

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanır. $L^1_{loc}(\Omega)$ uzayı da

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall K \subset \Omega \text{ kompakt kümesi için } f|_K \in L^1(K)\}.$$

ile tanımlanır. $p = \infty$ olduğu durumda $L^\infty(\Omega)$ fonksiyonlar uzayı üzerinde norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf\{C \in \mathbb{R} : |v(x)| \leq C \text{ } \Omega \text{ da}\} \\ &= \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\}. \end{aligned}$$

$1 \leq p \leq \infty$ için $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ normu ile $L^p(\Omega)$ uzayları Banach uzayıdır.

Hölder eşitsizliği, $1 \leq p \leq \infty, v \in L^p(\Omega)$ ve $w \in L^{p'}(\Omega)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ için $vw \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |v(x)w(x)| d\Omega \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

ile verilir. Her lineer ve sürekli $\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ formu $L^{p'}(\Omega)$ uzayının bir elemanı ile eşlenebilir. Yani teklikle bir $g \in L^{p'}(\Omega)$ vardır öyleki $\forall f \in L^p(\Omega)$ için

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\Omega$$

dır. $p = 2, p' = 2$ için Hölder eşitsizliği Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir ve

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}, \forall v, w \in L^2(\Omega)$$

formunu alır. Ayrıca,

$$\|vw\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)}, \forall v, w \in L^2(\Omega)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ise $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

sağlanır. Eğer Ω sınırsız ise $\forall p \geq 1$ için

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

ifadesi daima sağlanır (Quarteroni, 2009).

3.7 Zamana Bağlı Navier Stokes Denklemleri

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ açık, bağlantılı ve boştan farklı bir küme $f(x, t)$ dış kuvvet, $u(x, t)$ akışkan hızı ve $p(x, t)$ basınç fonksiyonları sırasıyla

$$u: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, f \in L^2(\Omega)$$

olmak üzere Navier-Stokes denklemleri (NSE),

$$u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f, x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (3.35)$$

$$\nabla \cdot u = 0, x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

$$u = 0, \partial\Omega \text{ üzerinde } 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega$$

ile verilir ve genellikle kullanılan normalizasyon şartı $\int_{\Omega} p(x, t) dx = 0$, $0 \leq t \leq T$ olarak alınır (Layton, 2008).

Navier Stokes Denklemlerini matematiksel olarak anlayabilmek için zayıf form notasyonu önemlidir. Zayıf form kavramı Leray (1934) tarafından verilmiştir. (u, p) zamana bağlı NSE nin düzgün çözümleri olmak üzere momentum denklemini u ile çarpıp Ω bölgesinde integre edersek;

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \int_0^t \nu \|\nabla u(t')\|^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t (f(t'), u(t')) dt'$$

elde edilir. Bu eşitlik enerji eşitliği olarak adlandırılır. Enerji eşitliğinin fiziksel yorumu aşağıdaki gibidir:

Kinetik enerji(t) + [0, t] üzerindeki toplam enerji=İlk Kinetik enerji +Toplam güç girişi (Layton, 2008).

3.8. Navier Stokes Denklemlerinin Zayıf Formülasyonu

(3.35) sisteminin zayıf formülasyonu için (3.35) sistemindeki ilk denklemi $v \in V$ test fonksiyonu ile çarpıp Ω bölgesi üzerinde integre edersek;

$$\int_{\Omega} u_t \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \nu \Delta u \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega$$

olur. Green formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nu \Delta u \cdot v d\Omega &= \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v d\gamma \\ \int_{\Omega} \nabla p \cdot v d\Omega &= - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} v d\Omega + \int_{\partial\Omega} p v \cdot n d\gamma \end{aligned}$$

eşitlikleri yukarıda ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} v \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} v d\Omega \\ = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - p n \right) \cdot v d\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. (3.35) sisteminin ikinci terimi $q \in Q$ ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinden integre edilirse;

$$\int q \cdot \nabla u d\Omega = 0, \forall q \in Q$$

elde edilir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} v \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} v d\Omega \\ = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_N} \psi \cdot v d\gamma, \forall v \in V, \quad \int_{\Omega} q \cdot \nabla u d\Omega = 0, \forall q \in Q \end{aligned}$$

(Quarteroni, 2009).

Tanım 3.8.1. (u, p) , NSE 'nin güçlü bir çözümüdür eğer $u \in L^2(0, T; X) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ve aşağıdaki koşullar sağlanırsa:

1) $u: [0, T] \rightarrow X$ türevlenebilir, $u_t: (0, T] \rightarrow X^*$ integrallenebilir ve $p: (0, T] \rightarrow Q$ sürekli,

2) $\forall t' \in (0, T]$, $(u, p) \in (X, Q)$ için aşağıdaki şartları sağlanır.

$$\int_0^{t'} [(u_t, v) + (u \cdot \nabla u, v) + v(\Delta u, v) - (p, \nabla v)] dt' = \int_0^{t'} (f, v) dt'$$

$\forall v \in L^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ve

$$\int_0^{t'} q \cdot \nabla u dt' = 0, \forall q \in L_0^{-2}(0, T; L^2(\Omega))$$

3) $u_0 \in V$ ve $t \rightarrow 0$ iken $\|u(t) - u_0\| \rightarrow 0$

4) $u \in L^4(0, T; X)$ (Layton, 2008).

Tanım 3.8.2. $u_0 \in H(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ olmak üzere $u(x, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ölçülebilir fonksiyonu NSE 'nin zayıf çözümüdür eğer;

1) $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H(\Omega))$ ve

2) u aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\begin{aligned} & (u(T), \phi(T)) + \int_0^T - \left(u, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + v(\nabla u, \nabla \phi) + (u \cdot \nabla u, \phi) dt \\ &= \int_0^T (f, \phi) dt + (u(0), \phi(0)), \forall \phi \in D_T \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$D_T = \{ \phi(x, t) \in C^\infty(\Omega \times [0, T]) : \phi(x, t) \in D(\Omega), 0 \leq t \leq T \}$$

3) $\forall t \in [0, T]$ için (Leray enerji eşitsizliği)

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \int_0^t v \|\nabla u(t')\|^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t (f(t'), u(t')) dt'$$

4) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_0\| = 0$ (Layton, 2008).

3.9. Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar yöntemi, birçok mühendislik problemlerine kabul görebilecek bir yaklaşımla çözüm arayan sayısal bir çözüm yöntemidir. Bu yöntemin matematiksel temeli çok önceden bilinmesine karşın bu yöntemlerin etkin kullanılmaları çok hızlı ve hafızalı bilgisayarların kullanılmasıyla mümkün olmuştur. Sonlu elemanlar metodu günümüzde aktif olarak kullanılarak diğer nümerik metotlardan daha iyi sonuçlar sağladığı için tercih edilmektedir (Gök, Demirci, 2009). "Günümüzde değişen malzeme özellikleri (örneğin kompozit malzemeler) karmaşık sınır koşulları ve karmaşık geometrileri nedeniyle analitik çözüm yöntemleri ile çözülebilecek problemlerin sayısı azdır. Bu nedenle sayısal çözüm

yöntemlerinin kullanılması kaçınılmazdır. Verilen problemin analitik çözümü mümkünse bu çözüm yolu tercih edilmelidir. Sonlu elemanlar (FEM), sınır elemanları (BEM), sonlu farklar (FDM) vb. gibi yöntemler sayısal çözüm yöntemleridir (Bircan, 2005). Bir problemin sonlu elemanlar metoduyla yaklaşık çözümlerinin oluşturulması için işlem adımları aşağıdaki şekilde verilmiştir;

1. İncelencek olan olay için kullanılacak bir matematiksel model hazırlanır veya hazır olarak alınır.
2. Ele alınmış olan matematiksel modele ait bir V uzayı tanımlanır ve varyasyonel formülasyon kurulur.
3. Elde edilen çözüm bölgesi alt bölgelere ayrıştırılır. Ayrıklaştırma, sonlu eleman ağı(mesh) olarak da adlandırılabilir. Çözüm bölgesinin geometrisine uygun olacak şekilde elemanlar seçilir. Çözüm için her bir sonlu eleman polinom olarak kabul edilir.
4. Her bir sonlu eleman için seçilen bu cisimler varyasyonel formülasyonda yerine yazılarak, her bir sonlu elemana ait K_{ij} şeklinde cebrik denklem takımı oluşturulur. Bu denklemlerin uygun şekilde birleştirilmesiyle lineer denklem sistemi

$$k.\mu = f$$

elde edilir. Burada k katsayılar matrisidir ve stiffness matrisi ve μ bilinmeyenleri içeren vektördür

5. Elde edilen denklem sistemine sınır koşulları da dahil edilir.

Sonlu elemanlar yöntemi, geometrisi karmaşık problemlere uygulanabilir. Bölge, alt bölgelere ayrılabilir ve çözümde değişik sonlu elemanlar kullanılabilir. Gerektiğinde bazı alt bölgelerde daha hassas çözümler yapılabilir. Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık kısıtlamaların üstesinden gelerek belirsiz yapıları kolaylıkla çözümleyebilir.

Sonlu elemanlar yönteminin başlıca dezavantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Elde edilen sonucun doğruluğu verilerin doğruluğuna bağlıdır. Metot uygulanırken bir bilgisayar programına gereksinim duyulmaktadır. Kabul gören doğru sonucun oluşturulabilmesi için bölgenin ayrıklaştırılması deneyim ister. Elde edilen sonuçların doğruluğunun bilinen matematiksel ve fiziksel gerçeklerle test edilmesi gerekir (Bircan, 2005)."

3.10. Bir Boyutta Sonlu Elemanlar Metodu

$\Omega = (a, b)$ olmak üzere bu alt kısımda, $H^1(\Omega)$ için h a bağlı yaklaşımlar oluşturacağız. (a, b) 'nin bir τ_h parçalanışı aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = b \\ K_j &= (x_{j-1}, x_j) \\ h_j &= x_j - x_{j-1} \\ h &= \max_j h_j. \end{aligned}$$

$H^1(a, b)$ 'deki elemanlar sürekli olduklarından, aşağıdaki parçalı polinom uzayını tanımlayabiliriz.

$$X_h^r = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h|_{K_j} \in P_r, \forall K_j \in \tau_h\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Yani X_h^r uzayları, $H^1(a, b)$ 'nin sonlu nokta dışında diferansiyellenebilir fonksiyonlardan oluşan tüm alt uzaylarıdır.

X_h^r uzayı için bir $\{\varphi_i\}$ bazını seçelim. Bu bazı, bir baz elemanının destekleyeni (support) sadece sonlu sayıda diğer baz elemanlarıyla kesişimleri boş olacak şekilde seçmek, stiffness matrisin bir çok elemanını sıfır yapacağından uygun olacaktır. Ayrıca baz elemanının Lagrangian olması, bazdaki bir v_h elemanının açılımındaki katsayıların, özel seçilmiş noktadaki v_h 'ın değerine eşit olacağından kullanışlıdır (Quarteroni, 2009).

3.10.1. X_h^1 uzayı

X_h^1 uzayı parçalı lineer fonksiyonlardan oluşur.

$$X_h^1 = \{v_h \in C_0[0, 1] : v_h|_{K_j} \in P_1\}$$

Tek olarak bir v_h elemanını belirlemek için gerekli olan v_h 'ın değerlerine serbest-

lik derecesi (degree of freedom) denir ve X_h^1 uzayı için bu sayı, $N + 2$ olup $(0, 1)$ in parçalanışındaki köşe sayısına eşittir. Karakteristik Lagrangian bazı,

$$\{\varphi_i \in X_h^1 : \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, N + 1\}$$

ile verilir. Tanım olarak ise φ_i ;

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & , \text{ d. y.} \end{cases} \quad (3.37)$$

dir. φ_i 'nin destekleyeni, $i \neq 0, N + 1$ için $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}]$ olduğundan stiffness matris tridiagonal matristir, $j \notin \{i - 1, i, i + 1\}$ için $a_{ij} = 0$. (a, b) 'nin (x_i, x_{i+1}) alt aralığında (generic aralığı) φ_i ler,

$$\begin{aligned} \phi & : [0, 1] \rightarrow [x_i, x_{i+1}] \\ x & = \phi(\xi) = x_i + \xi(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

fonksiyonu ile $(0, 1)$ den elde edilir. $[0, 1]$ aralığında $\widehat{\varphi}_0$ ve $\widehat{\varphi}_1$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_0(\xi) & = 1 - \xi \\ \widehat{\varphi}_1(\xi) & = \xi \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa, $[x_i, x_{i+1}]$ 'de φ_i ve φ_{i+1} fonksiyonları

$$\xi(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

olduğundan

$$\phi_i(x) = \widehat{\phi}_0(\xi(x))$$

$$\phi_{i+1}(x) = \widehat{\phi}^1(\xi(x))$$

ile verilir (Quarteroni, 2009).

3.10.2 X_h^2 uzayı

X_h^2 uzayı derecesi 2 olan parçalı polinomlardan oluşur.

$$X_h^2 = \{v_h \in C^0[0, 1]: v_h|_{K_j} \in P_1\}$$

$\forall v_h \in X_h^2$ elemanını belirlemek için üç farklı noktada aldığı değerlerin bilinmesi gerekir. Sürekliliği garanti etmek için bu noktalardan ikisi uç noktalar ve bir tanesi de orta nokta olmalıdır. X_h^2 için Lagrangian baz

$$\{\phi_i \in X_h^2: \phi_i(x_j) = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, 2N + 2\}$$

kümesidir. ϕ_i baz fonksiyonları i çift için,

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})}, & x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & d.y \end{cases}$$

ve i tek için

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+2})}, & x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{(x_{i+1} - x)(x_{i+2} - x)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_i)}, & x_i \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & d.y \end{cases}$$

ile tanımlanır. Stiffness matris pentadiagonal matristir. ϕ_i ler baloncuk (bubble) fonksiyonları

$$\hat{\phi}_0(\xi) = (1 - \xi)(1 - 2\xi)$$

$$\hat{\phi}_1(\xi) = 4\xi(1 - \xi)$$

$$\hat{\phi}_2(\xi) = \xi(2\xi - 1)$$

$[0, 1]$ aralığında çizilip referans aralığına taşınarak elde edilir (Quarteroni, 2009).

Sonlu elemanlar metodunun güçlü ve zayıf formülasyon yaklaşımları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$u_n \rightarrow u$ olması, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ (güçlü form)

ve $\langle u_n, f \rangle \rightarrow \langle u, f \rangle$ olması yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f | u_n \rangle = \langle f | u \rangle, \forall f$ (zayıf form.)

Tanım 3.10.1. (Bilineer Form) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $u, v, w \in X$, $a(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ formu

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$$

şartını sağlarsa $a(\cdot, \cdot)$ ya bilineer form denir (Layton, 2008).

Tanım 3.10.2. $a_1 > 0$ sabiti $\forall u, v \in X$ için

$$a(u, v) \leq a_1 \|u\|_X \|v\|_X$$

şartı sağlanırsa a formuna sürekli form denir (Layton, 2008).

Tanım 3.10.3. $\exists \alpha > 0$ ve $\forall u, v \in X$ için

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2$$

sağlanırsa a 'ya coercive denir (Layton, 2008).

Teorem 3.10.4. (Lax-Milgram Varlık-Teklik Teoremi) X Hilbert uzayı $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve coercive bilinear form, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonel sürekli ise,

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in X \quad (3.38)$$

koşulunu sağlayan $u \in X$ için problemin tek bir çözümü vardır (Layton, 2008).

3.10.3. 1 boyutta homojen dirichlet problemi

$\Omega = (0, 1)$ olsun. 1- boyutta homojen Dirichlet problemini

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, u(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

ele alalım. Güçlü formül, ikinci mertebe diferansiyellenebilirlik şartı içerdiği için uygulamada çözümleri içermeye genelde yetersizdir. Bunun yerine, u çözümünün türev mertebesine sahip ve güçlü formülasyona alternatif bir formülasyona ihtiyaç duyulur (Quarteroni, 2009). İkinci mertebe problemi birinci mertebe integral formuna indiren formülasyona problemin zayıf formülasyonu denir. (3.39) denkleminin her iki tarafını test fonksiyonu $v \in X$ ile çarpıp varyonel formülasyonu oluşturalım;

$$\begin{aligned} -u''v &= fv \\ -\int_0^1 u''v dx &= \int_0^1 f v dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

Kısmi integrasyon ile (3.40) ile sol tarafı

$$-\int_0^1 u''v dx = \int_0^1 u'v' dx - [u'v]_0^1 \quad (3.41)$$

olur ve aralığın uçlarında v sıfır ise denklem

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx \quad (3.42)$$

haline dönüştür. Böylece V test fonksiyonları uzayı $v(0) = v(1) = 0$ olacak şekilde seçilmelidir. Formülün anlamlı olması için $u'v' \in L(0, 1)$ olmalıdır. Çünkü u türevi olmayan bir fonksiyondur. Bu durumda $a(., .) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve coercive bir bilinear form, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli lineer bir fonksiyonel ($F(v) = \langle F, v \rangle$, $a(u, v) = \langle u', v' \rangle$) olmak üzere

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in X \quad (3.43)$$

denklemini elde edilir. Oluşan bilinear form $a(u, v)$ sürekli ve coercivedir (Layton, 2008).

Galerkin yaklaşımı, sonlu boyutlu bir $X^h \subset X$ uzayının seçilmesiyle oluşturulur. (3.43) problemi için Galerkin yaklaşımı,

$$a(u^h, v^h) = F(v^h), \forall v^h \in X^h$$

denklemini sağlayan $u^h \in X^h$ bulmaktır (Layton, 2008).

Teorem 3.10.5. $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve coercive bilinear form, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı lineer fonksiyon. $X^h \subset X$ sonlu boyutlu bir alt uzay olsun. Eğer $u^h \in X^h$,

$$a(u^h, v^h) = F(v^h), \forall v^h \in X^h \quad (3.44)$$

denkleminin çözümü (Galerkin yaklaşımı ile elde edilen çözüm) ise $\|u - u^h\|$ hatası

$$\|u - u^h\|_X \leq (1 + \frac{a_1}{a_0}) \inf_{v^h \in X^h} \|u - v^h\|_X$$

eşitsizliği sağlar. Burada a_1, a_0 pozitif sabitlerdir (Layton, 2008).

Teorem 3.10.6. (Hölder Eşitsizliği): $1 \leq p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olsun. Bu durumda $x = (x_i) \in l^p, y = (y_i) \in l^q$ için;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Özel olarak $p = 2, q = 2$ için elde edilen.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 3.10.7. (Poincaré-Friedrichs Eşitsizliği)

$X = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega) \text{ ve } v|_{\Gamma} = 0\}$ olsun. Bu durumda

$$\|v\| \leq C_{PF} \|\nabla v\|, \forall v \in X$$

olacak şekilde $\exists C = C_{PF} > 0$ sabiti vardır (Layton, 2008).

Kanıt: $\Omega = (a, b)$ olduğunda ispatı verelim.

$$v(x) = \int_a^x v'(t) dt \text{ böylece } v(x)^2 = \left(\int_a^x v'(t) dt \right)^2$$

olmak üzere Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} v(x)^2 &= \left(\int_a^x 1 \cdot v'(t) dt \right)^2 \leq \left(\left(\int_a^x 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^x v'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\leq (b-a) \|v'\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik aşağıdaki ifadeye uygulanırsa

$$\|v\|^2 = \int_a^b v(x)^2 dx \leq \int_a^b (b-a) \|v'\|^2 dx \leq (b-a)^2 \|v'\|^2$$

olur. Burada $C = \sqrt{a-b}$ pozitif bir sabittir. Eğer $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ şeklinde bir bölge $\Gamma_0 = \partial\Omega$ ise

$$v(x, y)^2 = \left(\int_a^x \frac{\partial v}{\partial x}(t, y) dt \right)^2 \leq \dots \leq (b-a) \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2$$

elde edilir (Layton, 2008). □

Condition 3.10.8. (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi koşulu (LBB^h koşulu)) $(v^h, q^h) \in (X^h, Q^h)$ olmak üzere

$$\inf_{q^h \in Q^h} \sup_{v^h \in X^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot v^h)}{\|\nabla v^h\| \|q^h\|} \geq \beta^h > 0$$

koşuluna LBB^h koşulu denir. Başka bir ifade ile, LBB^h koşulu aşağıdaki şekilde de verilebilir (Layton, 2008).

$$\beta^h \|q^h\| \leq \sup_{v^h \in X^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot v^h)}{\|\nabla v^h\|}$$

Teorem 3.10.9. (İz (Trace) Eşitsizliği) $\partial\Omega$ Lipschitz sürekli bir fonksiyon olsun. $u \in L^2(\Omega)$, $\nabla u \in L^2(\Omega)$ ise $u|_{\partial\Omega} \in L^2(\Omega)$ dir ve

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq C [\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2]^{\frac{1}{2}} = C \|u\|_X \\ \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq C \|u\|_X^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlar (Layton, 2008).

Teorem 3.10.10. (Ladyzhenskaya Eşitsizlikleri) $\forall u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tanımlı bir vektör fonksiyonu kompakt destekleyene sahip ve $\|u\|_{L^p} < \infty$ ise

$$\begin{aligned}
i) \quad \|u\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} &\leq 2^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}, (d=2) \\
ii) \quad \|u\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} &\leq \frac{4}{3\sqrt{3}} \|u\|^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{4}}, (d=3) \\
iii) \quad \|u\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \|\nabla u\|, (d=3).
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçekenir (Layton, 2008).

Örnek 3.10.11. $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$u = (x^2, x^3)$$

olmak üzere Ladyzhenskaya eşitsizliklerinden (i) nin sağladığını gösterelim

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} &= \left(\int_0^1 (x^2 \cdot x^3)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\int_0^1 x^{20} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\frac{x^{21}}{21} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{21} \right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} &= \left(\left(\int_0^1 (x^2 \cdot x^3)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 x^{10} dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\frac{x^{11}}{11} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{11} \right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} &= \left(\left(\int_0^1 (2x \cdot 3x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (36x^6) dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\frac{36x^7}{7} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{36}{7} \right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

(3.45), (3.46) ve (3.47) denklemlerini Ladyzhenskaya eşitsizliklerinden (i) de yerine yazarsak

$$\left(\frac{1}{21}\right)^{\frac{1}{4}} \leq 2^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{36}{7}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{72}{77}\right)^{\frac{1}{4}}$$

eşitsizlik sağlanmış olur.

Teorem 3.10.12. (Young Eşitsizliği) $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır (Kreyszig, 1978).

Özel olarak $p, q=2$ olarak seçilirse;

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q}$$

olur.

Sonuç 3.10.13. Young eşitsizliği genel olarak aşağıdaki formlarda karşımıza çıkar (Layton, 2008);

$$\alpha\beta = \sqrt{2\varepsilon}\alpha \frac{\beta}{\sqrt{2\varepsilon}} \leq \frac{(\sqrt{2\varepsilon}\alpha)^2}{2} + \frac{\frac{\beta^2}{\sqrt{2\varepsilon}}}{2}, \forall \varepsilon > 0$$

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$$

Lemma 3.10.14. $u, v, w \in X$ için

$$\int_{\Omega} |u||v||w|dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q} \|w\|_{L^r}$$

dir. $1 \leq p, q, r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ olmak üzere $\exists C=C(\Omega)$ sabiti vardır öyle ki;

$$\left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \cdot w dx \right| \leq C \|\nabla u\| \|\nabla v\| \|\nabla w\|$$

$$\left| \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \cdot w dx \right| \leq C \|u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\| \|\nabla w\|$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Layton, 2008).

Örnek 3.10.15. $w, v, u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$u = x, v = x^2, w = x^3$$

ve $p = q = 4, r = 2$ için

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R})} = \left(\int_0^1 (x)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.48)$$

$$\|v\|_{L^4(\mathbb{R})} = \left(\int_0^1 (x^2)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.49)$$

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_0^1 (x^3)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{7} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x \cdot x^2 \cdot x^3) dx &= \frac{1}{7} \leq C \|u\|_{L^4(\mathbb{R})} \|v\|_{L^4(\mathbb{R})} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ \frac{1}{7} &\leq \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{7} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$1 \leq p, q, r \leq \infty$ için gerçekleşir $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ olmak üzere $C = C(\Omega)$ sabiti vardır öyle ki;

$$\|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R})} = \left(\int_0^1 (1)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}} = 1 \quad (3.52)$$

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\int_0^1 (x)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (3.53)$$

$$\|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\int_0^1 1^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 1 dx \right)^{\frac{1}{8}} = 1 \quad (3.54)$$

$$\|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R})} = \left(\int_0^1 (2x)^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{16}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.55)$$

$$\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_0^1 (3x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

$$\left| \int_0^1 x \cdot 2x \cdot x^3 dx \right| = \frac{2}{6}$$

$$\frac{2}{6} \leq C_1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{16}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{9}{5} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{6} \leq C_2 \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{8}} \cdot 1 \cdot \left(\frac{16}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{9}{5} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C_1 \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{16}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{9}{5} \right)^{\frac{1}{2}}} \text{ ve } C_2 \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{16}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{9}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{8}}} \text{ seçilerek eşitlikler gerçeklenir.}$$

Lemma 3.10.16. (Gronwall Lemma) $A \in L^1(t_0, T)$ negatif olmayan bir fonksiyon, g ve ϕ $[t_0, T]$ üzerinde sürekli iki pozitif fonksiyon olsun. Eğer ϕ fonksiyonu

$$\phi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t A(x)\phi(x)dx \quad \forall t \in [t_0, T]$$

şartını sağlar ise

$$\phi(t) \leq \exp \left(\int_{t_0}^t A(x)dx \right) g(t) \quad \forall t \in [t_0, T]$$

eşitsizliği sağlanır (Quarteroni, 2009).

Teorem 3.10.17. (Ayrık Gronwall (1. versiyon)) $\Delta t, B, a_n, b_n, c_n, d_n$

negatif olmayan tamsayılar ve

$$a_n + \Delta t \sum_{n=0}^l b_n \leq \Delta t \sum_{n=0}^{l-1} d_n a_n + \Delta t \sum_{n=0}^l c_n + B, \quad l \geq 0$$

olsun. Bu durumda $\Delta t > 0$ için,

$$a_n + \Delta t \sum_{n=0}^l b_n \leq \exp \left(\Delta t \sum_{n=0}^{l-1} d_n \right) \left(\Delta t \sum_{n=0}^l c_n + B \right), \quad l \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Layton, 2008).

Teorem 3.10.18. (Ayrık Gronwall (2. versiyon)) $\Delta t, H, a_n, b_n, c_n, d_n$ negatif olmayan tamsayılar ve

$$a_n + \Delta t \sum_{n=0}^l b_n \leq \Delta t \sum_{n=0}^l d_n a_n + \Delta t \sum_{n=0}^l c_n + H, \quad l \geq 0$$

olsun. Varsayalım ki $\forall n$ için $\Delta t d_n < 1$ olsun. Bu durumda

$$a_n + \Delta t \sum_{n=0}^l b_n \leq \exp \left(\Delta t \sum_{n=0}^{l-1} \frac{d_n}{1 - \Delta t d_n} \right) \left(\Delta t \sum_{n=0}^l c_n + B \right), \quad l \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Layton, 2008).

3.11. Diferansiyel Filtreler

Diferansiyel filtreler geniş girdap simülasyonlarında (large eddy simulation) çok kullanılır. Diferansiyel filtreler basit, oldukça kolay ve güçlü sonuçlar verir. Germano (1986)'nın çalışmaları ile diferansiyel filtreler başlamıştır. Diferansiyel filtre ile filtreleme aynı zamanda en eliptik tekil pertürbasyon problemlerinden biridir. Filtrelenmiş hızlar önemli sınır noktalarına sahip olmalıdır. Periyodik sınır koşullarında, 2π periyodik dağılımında $O(\delta)$ uzunluk ölçekleri üzerinde w sıfır ortalamalı alan olarak gösterilir. Stokes problemlerinin

$$-\delta^2 \Delta \bar{w} + \bar{w} + \nabla \pi = w, \quad \nabla \bar{w} = 0, \quad \int_{\Omega} \bar{w} = 0$$

2π periyonunda bir çözümdür. Burada π sabittir ve basınç kaybolur. Dolayısı ile periyodik durumda $w \in L^2(\Omega)$, $\bar{w}$ ortalaması $\bar{w} \in L^2(\Omega)$ ve $\nabla \bar{w} \in L^2(\Omega)$ olmak üzere

$$-\delta^2 \Delta \bar{w} + \bar{w} = w$$

bir çözümdür. Diferansiyel filtre tanımı Cauchy problemi ve periyodik sınır koşulları için korunur. Stokes problemlerine uyarlamak için $\phi \in L^2(\Omega)$, $\nabla \phi \in L^2(\Omega)$, $\bar{\phi} \in L^2(\Omega)$ ve $\nabla \bar{\phi} \in L^2(\Omega)$ olmak üzere $\bar{\phi}$ ile gösterilen ortalaması ile verilen çözüm

$$\begin{aligned} -\delta^2 \{\Delta \bar{\phi} + \nabla \lambda\} + \bar{\phi} &= \phi, \\ \nabla \cdot \bar{\phi} &= \nabla \phi \\ \bar{\phi} &= \phi, \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{aligned}$$

Genellikle diferansiyel filtreleme ortalamasının birçok özelliğini içerir: pürüzsüz olan pozitif yarı sonlu bir operatörü tanımlar, yüksek frekansları zayıflatır ve $\delta \rightarrow 0$ olarak yakınsar yani $\bar{\phi} \rightarrow \phi$, $\delta \rightarrow 0$ olarak gösterilir. Filtrelemenin matematiksel temelini çoğu, filtreleme operatörünün Fourier dönüşümüne veya Fourier serisi altındaki transfer fonksiyonuna dayandığı ifade edilir.

Periyodik durumda

$$-\delta^2 \Delta \bar{w} + \bar{w} = w$$

$\bar{w}$ periyodik çözüm olur. Filtrelenmiş fonksiyon gerçek fonksiyonun iyi bir yaklaşımıdır (Layton, Rebholz, 2010).

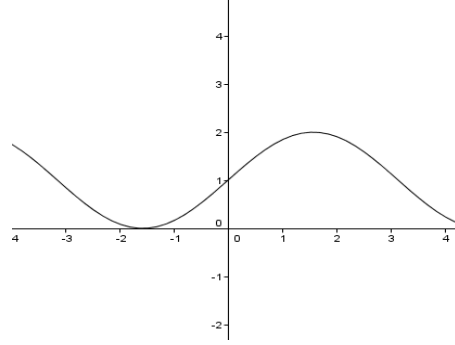
Örnek 3.11.1. $u = 1 + \sin x$, $u(0) = 1$ fonksiyonunun $\bar{u}$ ifadesi ile verilen u nun diferansiyel filtresidir.

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \frac{(u - \bar{u})}{\delta} & , \quad t > 0 \\ \bar{u}(x, 0) = u(x, 0). \end{cases} \quad (3.57)$$

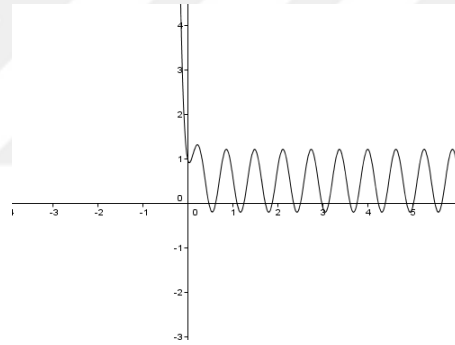
şeklinde ifade edilir. Burada $\delta = 0.1$ alınırsa diferansiyel filtre aşağıdaki denklem ile gösterilir

$$\begin{cases} \bar{u}_t + \frac{1}{0.1} \bar{u} = \frac{1 + \sin x}{0.1} \\ \bar{u}(x, 0) = u(x, 0) = 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Burada diferansiyel denklem çözülerek $u = \left(\frac{\sin(\frac{x}{0.1}) - \cos(\frac{x}{0.1}) + 1}{2} \right) + e^{-\frac{x}{0.1}}$ olur. u ve $\bar{u}$ ın grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 2: u fonksiyonunun grafiği



Şekil 3: $\bar{u}$ fonksiyonunun grafiği

3.11.1. Regülerizasyon

Uygulamada düşük hesaplama maliyetli yakınsak çözümler elde etmek için geliştirilen yöntemlerden birisi düzgünleştirme (regülerizasyon) yöntemidir. Burada amaç çözümdeki büyük sapmaları önlemektir (Çağlar, 2010; Layton, Monica, Neda, Rebholz, 2010).

Layton ve Neda (2007) NSE'ye $\kappa(u - G_N \bar{u})$ zaman rahatlama terimi eklemişlerdir öyleki;

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p + \kappa(u - G_N \bar{u}) = f \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

burada G_N , N. Van Cittert yaklaşım operatörüdür ve $\bar{u}$

$$-\delta^2 \Delta u + u = u \text{ in } \Omega \quad (3.60)$$

denkleminin çözümüdür. $L^2(\Omega \times (0, T))$ 'de $O(\delta) \rightarrow 0$ iken $\kappa \rightarrow \infty$ olduğu gösterilmiştir. Layton, Ervin ve Neda (2007) Crank-Nicolson zaman ayrıklaştırmasını kullanarak sonlu elemanlar metodu çözümlerini, (3.59) nin kararlılık ve yakınsaklığı ile (3.59) nin çözümlerini karşılaştırarak sonuçlar verdiler.

3.11.2 Parçalı polinom yaklaşımı

$I=(a, b)$ olsun. $\forall v \in C^0(I)$ nin τ_h parçalanışına göre belirli X_h^1 uzayındaki $\Pi_h^1 v$ interpolantı,

$$\Pi_h^1 v(x_i) = v(x_i), i = 0, \dots, N + 1 \text{ parçalanıştaki } \forall x_i \text{ noktası için} \quad (3.61)$$

ile verilir. $\Pi_h^1 v(x_i)$ polinomu, X_h^1 uzayının Lagrangian bazı $\{\phi_i\}$ kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Pi_h^1 v(x) = \sum v(x_i) \phi_i(x) \quad (3.62)$$

v 'yi $\Pi_h^1 v$ interpolantına götüren $\Pi_h^1: C^0(I) \rightarrow X_h^1$ operatöre interpolasyon operatörü denir.

Benzer bir ifade ile, $r \geq 1$ için $\Pi_h^r: C^0(I) \rightarrow X_h^r$ operatörleri tanımlanabilir. Burada $\Pi_{K_j}^r$ lokal interpolasyon operatörünü, yani v elemanını $K_j \in \tau_h$ 'ın $r+1$ noktada interpolasyon yapan $\Pi_{K_j}^r \in P_r(K_j)$ polinomu $\Pi_h^r v \in X_h^r$ interpolasyon fonksiyonu yardımı ile

$$\prod_h^r v \setminus K_j = \prod_{K_j}^r (v \setminus K_j), \quad \forall K_j \in \tau_h \quad (3.63)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.11.2. $v \in H^{r+1}(\Omega)$, $r \geq 1$ ve $\prod_h^r v \in X_h^r$ interpolasyon fonksiyonu olmak üzere bu durumda hata

$$\left| v - \prod_h^r v \right|_{H^k(\Omega)} \leq C_{k,r} h^{r+1-k} |v|_{H^{r+1}(\Omega)} , \quad k = 0, 1 \quad (3.64)$$

eşitsizliği ile sınırlıdır. Burada $C_{k,r}$ sabiti h ve v 'den bağımsızdır ($H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ olduğundan $|\cdot|_{H^0(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ dır.) (Quarteroni,2009).

$a(\cdot, \cdot)$ simetrik form olmak üzere dik izdüşüm operatörü

$$\begin{aligned} \prod_{1,h}^r : V &\rightarrow V^h, \quad \forall w \in V \\ a\left(\prod_{1,h}^r w - w, v^h\right) &= 0, \quad \forall v^h \in V^h \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $e = u - u^h$ hata terimi $\prod_{1,h}^r$ operatörü yardımıyla parçalı polinom uzayında ve onun ortogonal polinom uzayında

$$\|u(t) - u^h\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| u(t) - \prod_{1,h}^r u(t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \prod_{1,h}^r u(t) - u^h \right\|_{L^2(\Omega)}$$

olacak şekilde iki parça ayrılarak ele alınır. Birinci terimdeki hata sınırı Teorem 34'ten elde edilebilir. Toplam hatayı bulmak için eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim sınırlandırılmaya çalışılır (Quarteroni, 2009).

Teorem 3.11.3. ($H^1(\Omega)$ normunda hata) $\Omega = I = (a, b)$ ve $u \in V$, (3.64) in tam çözümü, u_h, u nun derecesi r olan sonlu elemanlar metodu ile yaklaşık çözümü $V_h = X_h^r \cap V$ için (3.44) problemin çözümü ve $r \leq p$ için $u \in H^{p+1}(I)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ön hata tahmini sağlanır,

$$|u - u_h|_V \leq \frac{M}{\alpha} C h^r |u|_{H^{r+1}(I)} \quad (3.65)$$

burada C sabiti h ve u dan bağımsızdır (Quarteroni, 2009).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Navier-Stokes Zaman Rahatlama Modelinin NSETRM Backward Euler Zaman Ayrıklaştırması

Bu kesimde (1.5) ile verilen NSETRM nin BE ile elde edilmiş Işık (2013) tarafından verilen algoritma ele alınacak ve bu algoritma ile elde edilen çözümün kararlılığı ve yakınsaklığı incelenecektir. $k=\Delta t>0$ zaman adımı, $t_j = jk$ olmak üzere $u_j^h(x) \cong u(x, t_j)$ ve $p_j^h(x) \cong p(x, t_j)$ ile gösterilecektir.

Algoritma 4.1.1. $\bar{u}$, u nun diferansiyel filtresi, Δt zaman adımı olmak üzere $\forall n=1, 2, \dots, M-1$ için $(u_{n+1}^h, p_{n+1}^h) \in X^h \times Q^h$ bul öyle ki aşağıdaki eşitlikler sağlansın.

$$\left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, v^h\right) + b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h v^h) + v(\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h) - (p_{n+1}^h, \nabla \cdot v^h) + \kappa(u_{n+1}^h - \bar{u}_{n+1}^h, v^h) = (f_{n+1}, v^h) \quad (4.65)$$

$$(\nabla \cdot u_{n+1}^h, q^h) = 0, \forall q^h \in Q^h.$$

$$\frac{\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h}{\Delta t} = \frac{u_{n+1}^h - \bar{u}_{n+1}^h}{\delta} \quad (4.66)$$

(4.66) kullanılarak $\bar{u}_{n+1}^h$ fonksiyonu

$$\bar{u}_{n+1}^h = \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{\Delta t}}\right) \left(u_{n+1}^h + \frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_n^h\right).$$

eşitliği ile bulunabileceğinden (4.65) da her bir zaman adımında bilinmeyen sadece u_{n+1}^h dir.

4.1.1. Kararlılık analizi

Bu alt kesimde, Algoritma (4.68) ile elde edilen çözümlerin kararlılık analizi yapılacaktır.

Teorem 4.1.2. $b^* : X \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$b^*(u, v, w) = \frac{1}{2}(u \cdot \nabla v, w) - \frac{1}{2}(u \cdot \nabla w, v)$$

olmak üzere

$$b^*(u, v, v) = 0$$

dır (Layton, 2008).

Lemma 4.1.3. Algoritma (4.66) ile her bir zaman adımında elde edilen u_n^h ($n = 0, 1, \dots, M$) çözümü koşulsuz kararlıdır ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{M-1} \left[\|u_{n+1}^h - u_n^h\|^2 + 2\nu \Delta t \|\nabla u_n^h\|^2 + \delta \kappa (2\delta + 1) \|\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h\|^2 \right] \\ & + \|u_M^h\|^2 + \kappa \delta \|\bar{u}_{n+1}^h\|^2 \\ & \leq (1 + \kappa \delta) \|u_0^h\|^2 + 2\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|f_{n+1}\|_*^2. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Kanıt: $v^h = u_{n+1}^h$ seçilirse (4.66) eşitliği

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, u_{n+1}^h \right) + b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, u_{n+1}^h) + \nu (\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) \\ & - (p_{n+1}^h, \nabla \cdot u_{n+1}^h) + \kappa (u_{n+1}^h - \bar{u}_{n+1}^h, u_{n+1}^h) = (f_{n+1}, u_{n+1}^h) \end{aligned} \quad (4.69)$$

olacaktır. (4.69) de trilineer terim ve $(p_{n+1}^h, \nabla \cdot u_{n+1}^h)$ terimi sıfır olduğundan (4.69) denklemi

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, u_{n+1}^h \right) + \nu (\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) + \kappa (u_{n+1}^h - \bar{u}_{n+1}^h, u_{n+1}^h) \\ & = (f_{n+1}, u_{n+1}^h) \end{aligned} \quad (4.70)$$

formuna indirgenir. (4.70) denkleminde $u_{n+1}^h = \bar{u}_{n+1}^h + \delta \frac{\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h}{\Delta t}$ eşitliği 3.

terimde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir

$$\left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, u_{n+1}^h\right) + \nu (\nabla u_{n+1}^h, \nabla u_{n+1}^h) + \kappa \left(\frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_{n+1}^h - \frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_n^h, \bar{u}_{n+1}^h\right) \quad (4.71)$$

$$+ \kappa \left(\frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_{n+1}^h - \frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_n^h, \frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_{n+1}^h - \frac{\delta}{\Delta t} \bar{u}_n^h\right) = (f_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\begin{aligned} (u_n^h, u_{n+1}^h) &= \frac{\|u_{n+1}^h\|^2 + \|u_n^h\|^2 - \|u_{n+1}^h - u_n^h\|^2}{2} \\ (\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h, \bar{u}_{n+1}^h) &= \frac{\|\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h\|^2 + \|\bar{u}_{n+1}^h\|^2 - \|\bar{u}_n^h\|^2}{2} \end{aligned} \quad (4.72)$$

eşitlikleri kullanılarak ve denklem $2\Delta t$ ile çarpılarak (4.73) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} &\|u_{n+1}^h\|^2 - \|u_n^h\|^2 + \|u_{n+1}^h - u_n^h\|^2 + 2\Delta t \nu \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \\ &+ \delta \kappa (2\delta + 1) \|\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h\|^2 + \delta \kappa \|\bar{u}_{n+1}^h\|^2 - \delta \kappa \|\bar{u}_n^h\|^2 = 2\Delta t (f_{n+1}, u_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Bu denklem $n = 0, 1, \dots, M-1$ 'e kadar toplam alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir

$$\sum_{n=0}^{M-1} \|u_{n+1}^h\|^2 - \sum_{n=0}^{M-1} \|u_n^h\|^2 + \sum_{n=0}^{M-1} \|u_{n+1}^h - u_n^h\|^2 + 2\Delta t \nu \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} &+ \delta \kappa (2\delta + 1) \sum_{n=0}^{M-1} \|\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h\|^2 + \delta \kappa \sum_{n=0}^{M-1} \|\bar{u}_{n+1}^h\|^2 - \delta \kappa \sum_{n=0}^{M-1} \|\bar{u}_n^h\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} 2\Delta t (f_{n+1}, u_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.75)$$

(4.74) denklemi düzenlenip Cauchy Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanarak

$$\|u_M^h\|^2 + \sum_{n=0}^{M-1} [\|u_{n+1}^h - u_n^h\|^2 + 2\nu\Delta t \| \nabla u_n^h \|^2 + \quad (4.76)$$

$$\delta\kappa(2\delta+1)\|u_{n+1}^h - u_n^h\|^2 + \kappa\delta\|\bar{u}_M^h\|^2 \leq (1+\kappa\delta)\|u_0^h\|^2 + 2\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|f_{n+1}\|_*^2.$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4.1.2. Hata analizi

Bu kesimde, NSETRM nin BE ile elde edilen çözümün hata analizi yapılacaktır.

$1 \leq p \leq \infty$ için aşağıdaki normları tanımlayalım

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty,k} &:= \max_{0 \leq n \leq M} \|v^n\|_k, \\ \|v\|_{p,k} &:= \left(\sum_{n=0}^M \|v^n\|_k^p \Delta t \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

u fonksiyonunun aşağıdaki yakınsama özelliklerini sağladığını varsayalım

$$\inf_{v \in X^h} \|u - v\| \leq Ch^{k+1} \|u\|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}(\Omega)^d$$

$$\inf_{v \in X^h} \|u - v\|_1 \leq Ch^k \|u\|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}(\Omega)^d$$

$$\inf_{p \in Q^h} \|p - r\| \leq Ch^{s+1} \|p\|_{s+1}, \quad p \in H^{s+1}(\Omega)^d$$

Lemma 4.1.4. (Tutarlılık (Consistency) Error) $\Delta t > 0$ sabit bir reel sayı, u , $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ yeterince düzgün olmak üzere

$$\left\| \frac{\bar{u}(t^{n+1}) - \bar{u}(t^n)}{\Delta t} \right\|^2 \leq C(\Delta t)^{-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\bar{u}_t\|^2 dt$$

$$\left\| \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} - u_t(t^{n+1}) \right\|^2 \leq C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt.$$

eşitlikleri sağlar.

Kanıt:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\bar{u}(t^{n+1}) - \bar{u}(t^n)}{\Delta t} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{u}_t^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1}{(\Delta t)} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\bar{u}_t|^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} \|\bar{u}_t\|^2 = C (\Delta t)^{-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\bar{u}_t\|^2 dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} - u_t(t^{n+1}) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{(t - t_{n+1})^2}{2} |u_{tt}|^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\frac{(\Delta t)^3}{6} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |u_{tt}|^2 dt \right) \\ &\leq \frac{(\Delta t)}{6} \|u_{tt}\|^2 = C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|u_{tt}\|^2 dt. \end{aligned}$$

□

Durum 4.1.5. Hata analizinde aşağıdaki adımlar izlenecektir.

1. Hata, bir parçası V^h ta diğer parçası $(V^h)^\perp$ olacak şekilde iki parçaya ayrılır.

$$u - u^h = (u - v^h) - (u^h - v^h) = \eta - \phi^h$$

2. ϕ^h terimleri, η terimleri, $\bar{\eta}$ terimleri ve $\bar{\phi}^h$ terimleri ayrı ayrı ele alınır. $\|\nabla \eta\|$ ve $\|\nabla \bar{\eta}\|$ terimleri yardımıyla $\|\nabla \phi^h\|$ ve $\|\nabla \bar{\phi}^h\|$ terimleri için bir üst sınır elde

edilir.

3. Kuadratik nonlinear terimler için aşağıdaki eşitlik kullanılabilir:

$$\begin{aligned} aa - bb &= aa - ab + ab - bb \\ &= a(a - b) + (a - b)b \end{aligned}$$

4. Sağ taraftaki $\eta, \bar{\eta}, \phi^h$ ve $\bar{\phi}^h$ terimleri için standart eşitsizlikler uygulanır. ϕ^h ve $\bar{\phi}^h$ terimleri sol tarafın $\eta, \bar{\eta}$ koşullarına dahil etmek için küçük veri koşulu (small data condition) kullanılır.

5. Üçgen eşitsizliği, Cauchy Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılır.

6. $v^h \in V^h$ üzerinden infimum alınır (Layton, 2008).

Teorem 4.1.6. $(u(t), p(t))$ NSE nin güçlü çözümü olsun. Bu durumda bir $C = C(u, p) > 0$ sabiti vardır öyleki

$$\|u - u^h\|_{\infty,0} \leq F(\Delta t, \kappa, \delta, h) + Ch^{k+1} \|u\|_{\infty,k+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$\begin{aligned} F(\Delta t, \kappa, \delta, h) &= Ch^k \|\bar{u}\|_{2,k+1} + Ch^{k+1/2} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^2 + \|\nabla u\|_{4,0}^2 \right) \\ &+ Ch^k \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^2 + v^{-1/2}((1 + \delta\chi)^{1/2} \|\bar{u}_0\| + \|f\|_{2,*}) \right) \\ &+ Ch^{s+1} \left(\|p\|_{2,s+1} \right) + C\Delta t \|u_{tt}\|_{2,0} + C(\kappa\delta) \|\bar{u}_t\|_{2,0} \end{aligned}$$

olur.

Kanıt: Aşağıdaki iki eşitliği birbirinden çıkaralım

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}, v^h \right) + b^*(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) + \nu (\nabla u_{n+1}, \nabla v^h) \\ &- (p_{n+1}, \nabla \cdot v^h) + \kappa\delta \left(\frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t}, v^h \right) = (f_{n+1}, v^h) \\ &+ \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t(t^{n+1}), v^h \right) + \kappa\delta \left(\frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t}, v^h \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t}, v^h \right) + b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) + \nu (\nabla u_{n+1}^h, \nabla v^h) + (p_{n+1}^h, \nabla \cdot v^h) \\ & + \kappa \delta \left(\frac{\bar{u}_{n+1}^h - \bar{u}_n^h}{\Delta t}, v^h \right) = (f_{n+1}, v^h). \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_{n+1} - e_n}{\Delta t}, v^h \right) + b^*(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) + \nu (\nabla e_{n+1}, \nabla v^h) \\ & + \kappa \delta \left(\frac{\bar{e}_{n+1}^h - \bar{e}_n^h}{\Delta t}, v^h \right) = (p_{n+1}, \nabla \cdot v^h) + \tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, v^h) \end{aligned} \quad (4.77)$$

eşitliği elde edilir. Burada $e_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1}^h$, $\bar{e}_{n+1} = \bar{u}_{n+1} - \bar{u}_{n+1}^h$ ve

$$\tau(u_{n+1}, p_{n+1}, v^h) = \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t(t^{n+1}) + \kappa \delta \frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t}, v^h \right).$$

Eğer $e_{n+1} = \bar{e}_{n+1} + \delta \frac{\bar{e}_{n+1} - \bar{e}_n}{\Delta t} = \left(1 + \frac{\delta}{\Delta t}\right) \bar{e}_{n+1} - \frac{\delta}{\Delta t} \bar{e}_n$, $S_1 = 1 + \frac{\delta}{\Delta t} = 1 + S_2$ ifadeleri 4.77 de yazılırsa denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_1 \bar{e}_{n+1} - (S_1 + S_2) \bar{e}_n - S_2 \bar{e}_{n-1}}{\Delta t}, v^h \right) + b^*(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) \\ & - b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) + \nu (\nabla (S_1 \bar{e}_{n+1} - S_2 \bar{e}_n), \nabla v^h) \\ & + \kappa \delta \left(\frac{\bar{e}_{n+1}^h - \bar{e}_n^h}{\Delta t}, v^h \right) = (p_{n+1}, \nabla \cdot v^h) + \tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, v^h) \end{aligned}$$

İlk olarak trilineer terimleri düzenlersek;

$$\begin{aligned} & b^*(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) \\ & = b^*(u_{n+1}, u_{n+1}, v^h) - b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}, v^h) \\ & + b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}, v^h) - b^*(u_{n+1}^h, u_{n+1}^h, v^h) \\ & = b^*(e_{n+1}, u_{n+1}, v^h) + b^*(u_{n+1}^h, e_{n+1}, v^h) \\ & = b^*(S_1 \bar{e}_{n+1} - S_2 \bar{e}_n, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, v^h) \\ & + b^*(S_1 \bar{u}_{n+1}^h - S_2 \bar{u}_n^h, S_1 \bar{e}_{n+1} - S_2 \bar{e}_n, v^h) \end{aligned}$$

olur. Hatayı bir parçası V^h da, diğer parçası $(V^h)^\perp$ de olacak şekilde iki ayıralım.

$$\bar{e}_n = (\bar{u}_n - \bar{U}_n) - (\bar{u}_n^h - \bar{U}_n) := \bar{\eta}_n - \bar{\phi}_n^h, \quad \bar{\phi}_n^h \in V^h$$

$a_{n+1} = S_1 \bar{\phi}_{n+1}^h - S_2 \bar{\phi}_n^h$, $b_{n+1} = S_1 \bar{\eta}_{n+1} - S_2 \bar{\eta}_n$ tanımlarsak;

$$\begin{aligned} & (a_{n+1} - a_n, v^h) + \nu \Delta t (\nabla a_{n+1}, \nabla v^h) \\ & + \Delta t b^* (S_1 \bar{u}_{n+1}^h - S_2 \bar{u}_n^h, a_{n+1}, v^h) + \Delta t b^* (a_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, v^h) \\ & + \kappa \delta (\bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h, v^h) = \Delta t (p_{n+1}, \nabla \cdot v^h) + (b_{n+1} - b_n, v^h) \\ & + \Delta t b^* (b_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, v^h) + \Delta t b^* (S_1 \bar{u}_{n+1}^h - S_2 \bar{u}_n^h, b_{n+1}, v^h) \\ & + \nu \Delta t (\nabla b_{n+1}, \nabla v^h) + \kappa \delta (\bar{\eta}_{n+1} - \bar{\eta}_n, v^h) + \Delta t \tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, v^h) \end{aligned}$$

elde edilir. $v^h = a_{n+1}$ olarak seçilirse, $q^h \in V^h$ için $(q^h, \nabla \cdot a_{n+1}) = 0$ kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\|a_{n+1}\|^2 - \|a_n\|^2 + \|a_{n+1} - a_n\|^2}{2} + \Delta t b^* (a_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, a_{n+1}) \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} & + \nu \Delta t \|\nabla a_{n+1}\|^2 + \kappa \delta \left(S_2 + \frac{1}{2} \right) \|\bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h\|^2 + \kappa \delta \frac{\|\bar{\phi}_{n+1}^h\|^2 - \|\bar{\phi}_n^h\|^2}{2} \\ & = \Delta t (p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot a_{n+1}) + (b_{n+1} - b_n, a_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$+ \Delta t b^* (b_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, a_{n+1}) + \Delta t b^* (S_1 \bar{u}_{n+1}^h - S_2 \bar{u}_n^h, b_{n+1}, a_{n+1}) \quad (4.80)$$

$$+ \nu \Delta t (\nabla b_{n+1}, \nabla a_{n+1}) + \kappa \delta (\bar{\eta}_{n+1} - \bar{\eta}_n, a_{n+1}) + \Delta t \tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, a_{n+1}).$$

Sağ taraftaki terimleri ele alalım. $(b_{n+1} - b_n, a_{n+1}^h) = 0$ ve $(\bar{\eta}_{n+1} - \bar{\eta}_n, a_{n+1}) = 0$ dır. Böylece (4.78) denklemi aşağıdaki denklem haline gelir

$$\begin{aligned} & \frac{\|a_{n+1}\|^2 - \|a_n\|^2 + \|a_{n+1} - a_n\|^2}{2} + \nu \Delta t \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\ & + \kappa \delta \left(S_2 + \frac{1}{2} \right) \|\bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h\|^2 + \kappa \delta \frac{\|\bar{\phi}_{n+1}^h\|^2 - \|\bar{\phi}_n^h\|^2}{2} \\ & = \Delta t (p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot a_{n+1}) + \Delta t b^* (b_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, a_{n+1}) \\ & + \Delta t b^* (S_1 \bar{u}_{n+1}^h - S_2 \bar{u}_n^h, b_{n+1}, a_{n+1}) + \nu \Delta t (\nabla b_{n+1}, \nabla a_{n+1}) \\ & + \Delta t \tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, a_{n+1}) - \Delta t b^* (a_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, a_{n+1}). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Sırasıyla Cauchy–Schwarz ve Young eşitsizlikleri sağ taraftaki terimlere uygulanırsa aşağıdaki üst sınırlar elde edilir.

$$\begin{aligned}\Delta t \nu (\nabla b_{n+1}, \nabla a_{n+1}) &\leq \Delta t \nu \|\nabla b_{n+1}\| \|\nabla a_{n+1}\| \\ &\leq \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 + C \Delta t \|\nabla b_{n+1}\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta t (p_{n+1} - q^h, \nabla \cdot a_{n+1}) &\leq \Delta t \|p_{n+1} - q^h\| \|\nabla a_{n+1}\| \\ &\leq \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 + C \Delta t \|p_{n+1} - q^h\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta t b^* (a_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, a_{n+1}) &\leq \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\ &\quad + C \Delta t \nu^{-3} \|a_{n+1}\|^2 \|\nabla u_{n+1}\|^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta t b^* (S_1 \bar{u}_{n+1}^h - S_2 \bar{u}_n^h, b_{n+1}, a_{n+1}) &\leq \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\ &\quad + C \Delta t \|b_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}^h\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta t b^* (b_{n+1}, S_1 \bar{u}_{n+1} - S_2 \bar{u}_n, a_{n+1}) &\leq \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\ &\quad + C \Delta t \|u_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\|^2\end{aligned}$$

Bulunan sınırlar (4.81) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{\|a_{n+1}\|^2 - \|a_n\|^2 + \|a_{n+1} - a_n\|^2}{2} + \nu \Delta t \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\ &+ \kappa \delta \left(S_2 + \frac{1}{2} \right) \|\bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h\|^2 + \kappa \delta \frac{\|\bar{\phi}_{n+1}^h\|^2 - \|\bar{\phi}_n^h\|^2}{2} \\ &\leq \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 + C \Delta t \|\nabla b_{n+1}\|^2 + \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 + \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\ &+ C \Delta t \nu^{-3} \|a_{n+1}\|^2 \|\nabla u_{n+1}\|^4 + \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 + C \Delta t \|p_{n+1} - q^h\|^2 \\ &+ C \Delta t \|b_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 + \Delta t \tau (u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, a_{n+1})\end{aligned}\tag{4.82}$$

$$+ \frac{\Delta t \nu}{10} \|\nabla a_{n+1}\|^2 + C \Delta t \|u_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\|^2\tag{4.83}$$

eşitsizliği elde edilir.

$n = 0, 1, \dots, M-1$ toplam alınarak ve $\left(\|\bar{\phi}_0^h\| = 0\right)$ varsayımı ile) aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned}
& \|a_M\|^2 + \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1} - a_n\|^2 + \Delta t \nu \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\
& + \kappa \delta \|\bar{\phi}_M^h\|^2 + 2\kappa \delta \left(S_2 + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{M-1} \|\bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h\|^2 \\
& \leq C \Delta t \nu^{-3} \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1}\|^2 \|\nabla u_{n+1}\|^4 + C \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla b_{n+1}\|^2 \\
& + C \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|b_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}\|^2 + C \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|u_{n+1}^h\| \|\nabla u_{n+1}^h\| \|\nabla b_{n+1}\|^2 \\
& + \Delta t \nu^{-1} \sum_{n=0}^{M-1} C \|p_{n+1} - q^h\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} C |\tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, a_{n+1})| + \|a_1\|.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$\sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla b_{n+1}\|^2$ terimini sınırlandıralım

$$\begin{aligned}
C \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla b_{n+1}\|^2 & \leq C \Delta t \sum_{n=0}^M \|\nabla b_n\|^2 \leq C \Delta t \sum_{n=0}^M h^{2k} |\bar{u}_n|_{k+1}^2 \\
& \leq C h^{2k} \|\bar{u}\|_{2,k+1}^2.
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\sum_{n=0}^{M-1} \|b_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}\|^2$ terimini sınırlayarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
C \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|b_{n+1}\| \|\nabla b_{n+1}\| \|\nabla u_{n+1}\|^2 & \leq C \Delta t h^{2k+1} \sum_{n=0}^M |\bar{u}_n|_{k+1}^2 \|\nabla u_n\|^2 \\
& \leq C \nu^{-1} h^{2k+1} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^4 + \|\nabla u\|_{4,0}^4 \right).
\end{aligned}$$

$C \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|u_{n+1}^h\| \|\nabla u_{n+1}^h\| \|\nabla b_{n+1}\|^2$ için (4.1.3) kullanılarak aşağıdaki üst sınır

elde edilir:

$$\begin{aligned}
& C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|u_{n+1}^h\| \|\nabla u_{n+1}^h\| \|\nabla b_{n+1}\|^2 \\
& \leq C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \|\nabla b_{n+1}\|^2 \\
& \leq C\Delta t h^{2k} \sum_{n=0}^{M-1} |\bar{u}_{n+1}|_{k+1}^2 \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \\
& \leq Ch^{2k} \left(\Delta t \sum_{n=0}^M |\bar{u}_n|_{k+1}^4 + \Delta t \sum_{n=0}^M \|\nabla u_{n+1}^h\|^2 \right) \\
& \leq Ch^{2k} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^4 + v^{-1}((1 + \delta\chi) \|\bar{u}_0\|^2 + \|f\|_{2,*}^2) \right).
\end{aligned}$$

(4.84) basınç terimi için,

$$\begin{aligned}
C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|p_{n+1} - q^h\|^2 & \leq Ch^{2s+2} \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|p(t_{n+1})\|_{s+1}^2 \\
& \leq Ch^{2s+2} \left(\|p\|_{2,s+1}^2 \right).
\end{aligned}$$

$C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} |\tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, a_{n+1})|$ tutarlılık (Consistency) hata terimi için

$$\begin{aligned}
C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} |\tau(u_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, a_{n+1})| &= C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t(t^{n+1}), a_{n+1} \right) \right| \\
&\quad + C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left| \left(\kappa \delta \frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t}, a_{n+1} \right) \right| \\
&\leq C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1}^h\|^2 \\
&\quad + C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left\| \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - u_t(t^{n+1}) \right\|^2 \\
&\quad + C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \left\| \kappa \delta \frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\Delta t} \right\|^2 \\
&\leq C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1}^h\|^2 + C\Delta t^2 \sum_{n=0}^{M-1} \|u_{tt}\|^2 \\
&\quad + C\kappa^2 \delta^2 \sum_{n=0}^{M-1} \|\bar{u}_t\|^2 dt \\
&= C\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1}^h\|^2 + C\Delta t^2 \|u_{tt}\|_{2,0}^2 + C(\kappa\delta)^2 \|\bar{u}_t\|_{2,0}^2.
\end{aligned}$$

Elde edilen üst sınırlar (4.84) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&\|a_M\|^2 + \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1} - a_n\|^2 + \Delta t v \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\
&\quad + \kappa \delta \|\bar{\phi}_M^h\|^2 + 2\kappa \delta \left(S_2 + \frac{1}{2} \right) \sum_{n=0}^{M-1} \|\bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h\|^2 \\
&\leq \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} C(1 + \nu^{-3} \|\nabla u_{n+1}\|^4) \|a_{n+1}^h\|^2 + Ch^{2k} \|\bar{u}\|_{2,k+1}^2 \\
&\quad + C\nu^{-1} h^{2k+1} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^4 + \|\nabla u\|_{4,0}^4 \right) \\
&\quad + Ch^{2k} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^4 + v^{-1}((1 + \delta\kappa) \|\bar{u}_0\|^2 + \|f\|_{2,*}^2) \right) \\
&\quad + C\nu^{-1} h^{2s+2} \left(\|p\|_{2,s+1}^2 \right) + C\Delta t^2 \|u_{tt}\|_{2,0}^2 + C(\kappa\delta)^2 \|\bar{u}_t\|_{2,0}^2
\end{aligned}$$

olur. Ayrık Gronwall lemma kullanılarak, $\Delta t < (1 + C\nu^{-3} \|\nabla u\|_{\infty,0}^4)^{-1}$ için

aşağıdaki gibi üst sınır elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \|a_M\|^2 + \sum_{n=0}^{M-1} \|a_{n+1} - a_n\|^2 + \Delta t v \sum_{n=0}^{M-1} \|\nabla a_{n+1}\|^2 \\
& + \kappa \delta \left\| \bar{\phi}_M^h \right\|^2 + 2\kappa \delta \left(S_2 + \frac{1}{2} \right) \sum_{n=0}^{M-1} \left\| \bar{\phi}_{n+1}^h - \bar{\phi}_n^h \right\|^2 \\
& \leq Ch^{2k} \|\bar{u}\|_{2,k+1}^2 + Ch^{2k+1} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^4 + \|\nabla u\|_{4,0}^4 \right) \\
& + Ch^{2k} \left(\|\bar{u}\|_{4,k+1}^4 + v^{-1}((1 + \delta\kappa) \|\bar{u}_0\|^2 + \|f\|_{2,*}^2) \right) \\
& + Ch^{2s+2} \left(\|p\|_{2,s+1}^2 \right) + C\Delta t^2 \|u_{tt}\|_{2,0}^2 + C(\kappa\delta)^2 \|\bar{u}_t\|_{2,0}^2.
\end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliği kullanılarak $\|e_n\| \leq \|\eta_n\| + \|\phi_n^h\| = \|\eta_n\| + \|a_n\|$ istenilen sonuç elde edilir. $\square$

5. Örnekler

Bu kesimde, NSETRM nin Algoritma 4.1.1 kullanılarak sonlu elemanlar metodu (FEM) çözümleri elde edilecektir. Bütün hesaplamalarda Freefem++ programı kullanılmıştır (Hecht, 2013). Tolerans $1.0e^{-6}$ olarak seçilmiştir.

Örnek 5.0.7. $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ karesel bölgesinde no-slip sınır koşulları ile verilen NSE yi ele alalım. $f=0$ ve u nun sınırdaki tam çözüme eşit olması durumunda çözüm

$$u(x, y, t) = e^{-2vt}(-\cos(x)\sin(y), \cos(y)\sin(x)).$$

ile verilir (Hritz, 2010). $v=1$, $T=1$ ve $h=\frac{1}{40}$ olmak üzere ve farklı κ, δ ve Δt ler için Algoritma 4.1.1 uygulanmıştır. Burada v viskozite, T final time ve h ağ (mesh) boyutu olmak üzere sonuçlar κ ve δ nın $\kappa\delta\leq\Delta t$ olacak şekilde farklı değerleri için elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1.-Çizelge 5.9. verilmiştir. Bununla birlikte $\kappa\delta=\sqrt{\Delta t}$ ve $\kappa\delta=1$ olacak şekilde üç farklı κ, δ seçimi için çözümler elde edilmiştir ve Çizelge 5.10.-Çizelge 5.12 de verilmiştir. Çizelgelerden $\kappa\delta\leq\Delta t$ olduğunda yakınsama mertebesi Teorem 4.1.6 dan beklediğimiz gibi 1 olarak elde edilmiştir. $\kappa\delta=\sqrt{\Delta t}$ olduğu durumunda yakınsama mertebesi 0.5 ve $\kappa\delta=1$ olduğunda yakınsama mertebesinin sıfır olduğu gözlenmiş olup Teorem 4.1.6 ile tutarlıdır.

Çizelge 5.1. Örnek 5.0.7 için mutlak hatalar ve mertebe sonuçları (NSE nin)

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$2.5136e - 4$		$1.9069e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.1662e - 4$	1.1078	$8.8503e - 4$	1.1074
$\frac{1}{20}$	$5.6230e - 5$	1.0523	$4.2679e - 4$	1.0521
$\frac{1}{40}$	$2.7616e - 5$	1.0258	$2.0962e - 4$	1.0256
$\frac{1}{80}$	$1.3348e - 5$	1.0488	$1.0132e - 4$	1.0487

Çizelge 5.2. Örnek 5.0.7 için $\kappa = 1$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$6.5611e - 4$		$4.9791e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$2.7157e - 4$	1.2725	$2.0603e - 3$	1.2729
$\frac{1}{20}$	$1.2040e - 4$	1.1733	$9.1376e - 4$	1.1729
$\frac{1}{40}$	$5.7030e - 5$	1.0781	$4.3286e - 4$	1.0778
$\frac{1}{80}$	$2.7800e - 5$	1.0365	$2.1102e - 4$	1.0364

Çizelge 5.3. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$3.321e - 4$		$2.5198e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.3205e - 4$	1.3304	$1.0021e - 3$	1.3302
$\frac{1}{20}$	$5.9432e - 5$	1.1517	$4.5109e - 4$	1.1515
$\frac{1}{40}$	$2.8351e - 5$	1.0677	$2.1520e - 4$	1.0677
$\frac{1}{80}$	$1.3862e - 5$	1.0297	$1.0522e - 4$	1.0321

Çizelge 5.4. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$2.6750e - 4$		$2.0294e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.1816e - 4$	1.1787	$8.9673e - 4$	1.1783
$\frac{1}{20}$	$5.6390e - 5$	1.0670	$4.2800e - 4$	1.0670
$\frac{1}{40}$	$2.7635e - 5$	1.0289	$2.0976e - 4$	1.0288
$\frac{1}{80}$	$1.3688e - 5$	1.0134	$1.0390e - 4$	1.0134

Çizelge 5.5. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$5.9930e - 4$		$4.5545e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$2.9376e - 4$	1.0285	$2.2327e - 3$	1.0284
$\frac{1}{20}$	$1.457e - 4$	1.0116	$1.1074e - 3$	1.0115
$\frac{1}{40}$	$7.2589e - 5$	1.0051	$5.5174e - 4$	1.0051
$\frac{1}{80}$	$3.6234e - 5$	1.0023	$2.7541e - 4$	1.0037

Çizelge 5.6. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \frac{1}{\Delta t}$ ve $\delta = \Delta t^2$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$5.5507e - 4$		$4.2083e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$2.4105e - 4$	1.2033	$1.8287e - 3$	1.2023
$\frac{1}{20}$	$1.139e - 4$	1.0809	$8.6476e - 4$	1.0804
$\frac{1}{40}$	$5.5556e - 5$	1.0363	$4.2167e - 4$	1.0361
$\frac{1}{80}$	$2.7447e - 5$	1.0172	$2.0834e - 4$	1.0171

Çizelge 5.7. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = \frac{1}{\Delta t}$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$3.6600e - 4$		$2.7798e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.4756e - 4$	1.3105	$1.1206e - 3$	1.3106
$\frac{1}{20}$	$6.4248e - 5$	1.1995	$4.8784e - 4$	1.1997
$\frac{1}{40}$	$2.965e - 5$	1.1152	$2.2515e - 4$	1.1154
$\frac{1}{80}$	$1.4200e - 5$	1.0623	$1.0780e - 4$	1.0624

Çizelge 5.8. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$3.2104e - 4$		$2.4371e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.3435e - 4$	1.2567	$1.0199e - 3$	1.2567
$\frac{1}{20}$	$6.0706e - 5$	1.1460	$4.6083e - 4$	1.1460
$\frac{1}{40}$	$2.8741e - 5$	1.0786	$2.1818e - 4$	1.0786
$\frac{1}{80}$	$1.3968e - 5$	1.0409	$1.0603e - 4$	1.0410

Çizelge 5.9. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = 0.1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$2.5830e - 4$		$1.9596e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.1816e - 4$	1.1282	$8.9673e - 4$	1.1277
$\frac{1}{20}$	$5.6592e - 5$	1.0620	$4.2954e - 4$	1.0618
$\frac{1}{40}$	$2.7704e - 5$	1.0304	$2.1029e - 4$	1.0304
$\frac{1}{80}$	$1.3707e - 5$	1.0186	$1.0405e - 4$	1.0150

Çizelge 5.10. Örnek 5.0.7 için $\delta = \sqrt{\Delta t}$ ve $\kappa = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$7.2512e - 5$		$2.52201e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$6.20084e - 5$	0.2256	$2.1808e - 3$	0.2096
$\frac{1}{20}$	$4.87198e - 5$	0.3478	$1.75172e - 3$	0.3160
$\frac{1}{40}$	$3.87532e - 5$	0.3300	$1.46271e - 3$	0.2600
$\frac{1}{80}$	$2.95986e - 5$	0.3886	$1.20707e - 3$	0.2770

Çizelge 5.11. Örnek 5.0.7 için $\kappa = 1$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.0205e - 4$		$3.4279e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$1.0462e - 4$	0.3328	$3.4727e - 3$	0.018
$\frac{1}{20}$	$1.0006e - 4$	0.0641	$3.2826e - 3$	0.0812
$\frac{1}{40}$	$1.0385e - 4$	0.0536	$3.3981e - 3$	0.0499
$\frac{1}{80}$	$1.0731e - 4$	0.0473	$3.5111e - 3$	0.0472

Çizelge 5.12. Örnek 5.0.7 için $\kappa = \frac{1}{2}$ ve $\delta=2$ kullanılarak mutlak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$6.6793e - 5$		$2.3247e - 3$	
$\frac{1}{10}$	$6.7686e - 5$	0.0191	$2.3265e - 3$	0.0011
$\frac{1}{20}$	$6.3840e - 5$	0.0843	$2.1745e - 3$	0.0974
$\frac{1}{40}$	$6.6295e - 5$	0.0545	$2.247e - 3$	0.0473
$\frac{1}{80}$	$6.8669e - 5$	0.0508	$2.3225e - 3$	0.0478

Örnek 5.0.8. $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ karesel bölgesinde no-slip sınır koşulları ve Örnek 5.0.7 nin genel halini ele alalım. $f=0$ için (u,p) tam çözümü

$$u(x, y, t) = e^{-2N^2\pi^2vt}(-\cos(N\pi x)\sin(N\pi y), \sin(N\pi x)\cos(N\pi y)),$$

$$p(x, y, t) = -\frac{1}{4}\cos(2N\pi x)\cos(2N\pi y)e^{-2N^2\pi^2vt}$$

ile verilir (Berselli, 2005; Connors, 2010; Işık, 2013). $N=2$, $v=0.01$, $T=1$ ve $h=\frac{1}{40}$ olarak seçilmiş ve $\kappa\delta\leq\Delta t$ olacak şekilde κ ve δ farklı değerleri için sonuçlar Çizelge 5.13.- Çizelge 5.21. verilmiştir. $\kappa\delta=\sqrt{(\Delta t)}$ ve $\kappa\delta=1$ olacak şekilde κ , δ seçimi için çözümler elde edilmiştir. Sonuçlar Çizelge 5.22- Çizelge 5.24. ile verilmiştir.

Çizelge 5.13. Örnek 5.0.8 için mutlak hatalar ve mertebeleri (NSE nin)

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.3804e - 2$		$1.0899e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$7.086e - 3$	0.9618	$5.5993e - 2$	0.9608
$\frac{1}{20}$	$3.5957e - 3$	0.9787	$2.8542e - 2$	0.9721
$\frac{1}{40}$	$1.8119e - 3$	0.9887	$1.4669e - 2$	0.9602
$\frac{1}{80}$	$9.0989e - 4$	0.9937	$7.9179e - 3$	0.8895

Çizelge 5.14. Örnek 5.0.8 için $\kappa = 1$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$3.9453e - 2$		$3.19901e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$2.2520e - 2$	0.8089	$1.80659e - 1$	0.8243
$\frac{1}{20}$	$1.2054e - 2$	0.9016	$9.59413e - 2$	0.9130
$\frac{1}{40}$	$6.2359e - 3$	0.9508	$4.94807e - 2$	0.9552
$\frac{1}{80}$	$3.17167e - 3$	0.9753	$2.52707e - 2$	0.9693

Çizelge 5.15. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.9462e - 2$		$1.5492e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$8.7328e - 3$	1.1561	$6.9170e - 2$	1.1633
$\frac{1}{20}$	$4.0341e - 3$	1.1141	$3.2006e - 2$	1.1117
$\frac{1}{40}$	$1.9247e - 3$	1.0675	$1.5538e - 2$	1.0424
$\frac{1}{80}$	$9.3844e - 4$	1.0362	$8.1226e - 3$	0.9358

Çizelge 5.16. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = \Delta t$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.4959e - 2$		$1.1834e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$7.2524e - 3$	1.0444	$5.7318e - 2$	1.0459
$\frac{1}{20}$	$3.6176e - 3$	1.0033	$2.8715e - 2$	0.9971
$\frac{1}{40}$	$1.8148e - 3$	0.9952	$1.4690e - 2$	0.9668
$\frac{1}{80}$	$9.1025e - 4$	0.9954	$7.9205e - 3$	0.8911

Çizelge 5.17. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$2.8278e - 2$		$2.2956e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$1.4723e - 2$	0.9415	$1.1959e - 1$	0.9407
$\frac{1}{20}$	$7.5152e - 3$	0.9701	$6.1128e - 2$	0.9681
$\frac{1}{40}$	$3.7970e - 3$	0.9849	$3.1026e - 2$	0.9783
$\frac{1}{80}$	$1.9086e - 3$	0.9923	$1.5865e - 2$	0.9676

Çizelge 5.18. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \frac{1}{\Delta t}$ ve $\delta = \Delta t^2$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$4.2470e - 2$		$3.4187e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$2.3374e - 2$	0.8615	$1.8619e - 1$	0.8766
$\frac{1}{20}$	$1.2272e - 2$	0.9294	$9.7262e - 2$	0.9368
$\frac{1}{40}$	$6.2906e - 3$	0.9640	$4.9801e - 2$	0.9656
$\frac{1}{80}$	$1.9086e - 3$	1.7206	$1.5865e - 2$	1.6502

Çizelge 5.19. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = \frac{1}{\Delta t}$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.8028e - 2$		$1.4419e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$8.1900e - 3$	1.1382	$6.5196e - 2$	1.1450
$\frac{1}{20}$	$3.8750e - 3$	1.0796	$3.0863e - 2$	1.0788
$\frac{1}{40}$	$1.8821e - 3$	1.0418	$1.5240e - 2$	1.0179
$\frac{1}{80}$	$9.2745e - 4$	1.0209	$8.0511e - 3$	0.9205

Çizelge 5.20. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = 0.1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.4434e - 2$		$1.1405e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$7.2524e - 3$	0.9929	$5.7318e - 2$	0.9925
$\frac{1}{20}$	$3.6382e - 3$	0.9952	$2.8880e - 2$	0.9888
$\frac{1}{40}$	$1.8227e - 3$	0.9971	$1.4753e - 2$	0.9690
$\frac{1}{80}$	$9.1261e - 4$	0.9979	$7.9376e - 3$	0.8942

Çizelge 5.21. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \Delta t^2$ ve $\delta = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$1.6838e - 2$		$1.3405e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$7.8694e - 3$	1.0973	$6.2455e - 2$	1.1018
$\frac{1}{20}$	$3.7939e - 3$	1.0524	$3.0172e - 2$	1.0495
$\frac{1}{40}$	$1.8618e - 3$	1.0269	$1.5071e - 2$	1.0013
$\frac{1}{80}$	$9.2239e - 4$	1.0132	$8.0117e - 3$	0.9115

Çizelge 5.22. Örnek 5.0.8 için $\delta = \sqrt{\Delta t}$ ve $\kappa = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$5.61705e - 2$		$4.65427e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$4.36418e - 2$	0.3640	$3.60824e - 1$	0.3672
$\frac{1}{20}$	$3.24278e - 2$	0.4284	$2.68362e - 1$	0.4270
$\frac{1}{40}$	$2.48767e - 2$	0.3823	$2.03291e - 1$	0.4005
$\frac{1}{80}$	$1.86618e - 2$	0.4146	$1.50678e - 1$	0.4319

Çizelge 5.23. Örnek 5.0.8 için $\delta = 1$ ve $\kappa = 1$ kullanılarak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$7.22944e - 2$		$6.11583e - 1$	
$\frac{1}{10}$	$6.7572e - 2$	0.0973	$5.7749e - 1$	0.0827
$\frac{1}{20}$	$6.18862e - 2$	0.1267	$5.35975e - 1$	0.1158
$\frac{1}{40}$	$6.23272e - 2$	0.0102	$5.39851e - 1$	0.0104
$\frac{1}{80}$	$6.33671e - 2$	0.0240	$5.47884e - 1$	0.0213

Çizelge 5.24. Örnek 5.0.8 için $\kappa = \frac{1}{2}$ ve $\delta=2$ kullanılarak mutlak hatalar ve yakınsama sonuçları

Δt	$\ u - u_h\ $	Yakınsama Mertebesi	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $	Yakınsama Mertebesi
$\frac{1}{5}$	$4.29259e-2$		$3.66745e-1$	
$\frac{1}{10}$	$4.74865e-2$	0.1457	$4.01727e-1$	0.1314
$\frac{1}{20}$	$4.17642e-2$	0.1852	$3.58737e-1$	0.1632
$\frac{1}{40}$	$4.14618e-2$	0.0103	$3.56834e-1$	0.0007
$\frac{1}{80}$	$4.19508e-2$	0.0169	$3.60794e-1$	0.0159

Örnek 5.0.9. $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ karesel bölgesinde no-slip sınır koşulları ile verilen NSE yi ele alalım. $f=0$ ve u nun sınırdaki tam çözüme eşit olması durumunda çözüm

$$u(x, y, t) = e^{-2vt}(-\cos(x)\sin(y), \cos(y)\sin(x)).$$

ile verilir(Hritz, 2010). $v=1$, $T=1$ ve $h=\frac{1}{40}$ olmak üzere ve farklı κ lar Algoritma 4.1.1 uygulanmıştır. Burada v viskozite, T final time ve h ağ (mesh) boyutu olmak üzere κ nın farklı değerleri için sonuçlar Çizelge 5.25 ile verilmiştir.

κ değerleri arttıkça hataların azaldığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 5.25. Örnek 5.0.9 için $\Delta t=0.1$, $\delta = 0.1$ ve $v = 0.001$ kullanılarak hatalar

κ	$\ u - u_h\ $	$\ \nabla u - \nabla u_h\ $
0	$2.34463e-4$	$5.93548e-2$
10^{-6}	$2.34463e-4$	$5.93548e-2$
10^{-4}	$2.34463e-4$	$5.93548e-2$
10^{-2}	$2.34463e-4$	$5.93548e-2$
1	$1.22661e-4$	$3.04022e-2$
10^2	$3.87795e-6$	$1.21227e-3$
10^4	$6.34992e-8$	$1.23931e-5$
10^6	$4.7729e-8$	$8.4086e-7$
10^8	$8.50647e-9$	$1.49784e-7$

Örnek 5.0.10. Birim çember üzerinde aşağıdaki değerler ile verilen yaklaşımın sınırda sıfır olduğu NSE yi ele alalım (Köseoğlu, 2011).

$$v = 0.001,$$

$$f = (-2y, 2x), t \in (0, 5]$$

$$u_0 = (-y, x)$$

$$\Delta t = 0.1, h \simeq \frac{\pi}{50}$$

problemin tam çözümü bilinmediğinden sonuçlar sadece denge hataları hesaplanarak test edilecektir.

$$Denge (equilibrium) hatası = \left\| \frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t} \right\|$$

$\Delta t=0.1$ ve $h \simeq \frac{\pi}{50}$ ile elde edilen test sonuçları Çizelge 5.26. ile verilmiştir. Çizelgede görüldüğü gibi $\kappa=0$ için çözüm patlamış (blow up), $\kappa \neq 0$ olduğu durumda κ arttırılarak BE için daha iyi sonuç elde edilmiştir.

Çizelge 5.26. Örnek 5.0.10 için BE metodun *equilibrium* hataları $\Delta t=0.1$, $\delta = 0.1$ ve $v = 0.001$

κ	$\left\ \frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\Delta t} \right\ $
0	blow up
10^{-6}	blow up
10^{-4}	blow up
10^{-2}	blow up
1	blow up
10^2	3.2072e-2
10^4	4.3159e-6
10^6	4.3315e-10

6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde NSE ye " $\kappa = u - \bar{u}$ " eklenmesiyle elde edilmiş NSETRM nin Euler zaman ayrıklaştırması kullanılarak elde edilen bir algoritmanın (Algoritma 4.1.1) FEM çözümleri incelenmiştir. Bu algoritma ile elde edilen sonlu elemanlar çözümünün kararlılık ve hata analizi yapılmıştır. Algoritma 4.1.1 ile elde edilen FEM çözümlerinin koşulsuz kararlı olduğu Lemma 4.1.3 de ispatlanmıştır.

Daha sonra, Algoritma 4.1.1 ile elde edilen çözümlerin hata analizi yapılmıştır. Hata analizi sonunda FEM çözümlerinin yakınsak ve mertebenin δ ve κ ya göre değiştiği, yani $O(\kappa\delta + \Delta t)$ olduğu ispatlanmıştır. $\kappa\delta \leq \Delta t$ olduğu durumda modelin yakınsama oranı $O(h + \Delta t)$ olduğu bulunmuş yakınsama mertebesinin 1 olduğu Teorem 4.1.6 de ispatlanmıştır.

Son kısımda verilen algoritma seçilen bazı problemlere uygulanmıştır. $\Delta t, \delta$ ve κ nın Algoritma 4.1.1 ile elde edilen çözümleri nasıl etkilediğini göstermek için, farklı δ ve κ değerlerinde bulunan sonuçlar tabloda verilmiştir. Algoritma 4.1.1 ile elde edilen çözümlerin hatası Örnek 5.0.7 için Çizelge 5.1.- Çizelge 5.9. hız vektörü için ve Örnek 5.0.8 için Çizelge 5.13.- Çizelge 5.18. hız vektörü için verilmiş ve yakınsama mertebesi 1 olarak (Teorem 4.1.6 beklediğimiz gibi) elde edilmiştir. Örnek 5.0.7 için Çizelge 5.10. dan ve Örnek 5.0.8 için Çizelge 5.22. den $\kappa\delta = \sqrt{\Delta t}$ olduğu durumda yakınsama mertebesi 0.5 olarak elde edilmiştir. Örnek 5.0.7 için Çizelge 5.11.- Çizelge 5.12. den ve Örnek 5.0.8 için Çizelge 5.23.- Çizelge 5.24. ten $\kappa\delta = 1$ olduğunda yakınsama mertebesi 0 olarak elde edilmiştir. Bu sonuçlar Teorem 4.1.6 ile örtüşmektedir. Örnek 5.0.9 da farklı κ değerleri için Algoritma 4.1.1 uygulanmış, elde edilen sonuçlarda κ değerleri arttıkça hataların azaldığı gözlemlenmiştir. Son olarak Algoritma 4.1.1 ile BE çözümü iraksak olan bir probleme uygulanmış ve elde edilen çözümler Çizelge 5.25. da verilmiştir. Çizelge 5.25. dan $\kappa \geq 1$ değerleri için yakınsak sonuçlar bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- Adams, N.A. Stolz, S. (2001) Deconvolution methods for subgrid-scale approximation in LES, *Modern Simulation Strategies for Turbulent Flow*, R. T. Edwards.
- Atkinson (1988) An Introduction To Numerical Analysis, Second Edition, Wiley, 663.
- Berselli, L.C. (2005) On the large eddy simulation of the Taylor-Green vortex, *J. Math. Fluid Mech.*, 7, 164.191.
- Bircan (2005) Kanca Traverslerinin Parametrik Tasarımları Gerilme Analizleri ve Prototip Üretim Yöntemlerinin İncelenmesi Yüksek Lisans Tezi, 64.
- Brock W.A, Malliaris A.G (1989) Diferential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- Butcher, J.C. (2008) *Numerical Methods For Ordinary Differential Equations*, Second Edition, Wiley, New Zeland, 463.
- Carroll J. (2002) Numerical Solution of ODE Initial Value Problems, Outline Lecture Notes, MS202-Nümerical Analysis II.
- Connors, J. (2010) Convergence analysis and computational testing of the finite element discretization of the Navier Stokes alpha model, *Numer. Meth. Part. D. E.*, 26, 1328.1350.
- Courant, R. (1943) Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 49, 1.23.
- Çağlayan, Çelebi (2002) Kısmi Diferansiyel Denklemler, 3. Baskı, Dora Yayıncılık.

- Çağlar, A. (2010) Convergence analysis of the Navier Stokes alpha model, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, 1154-1167.
- Davies, A.J. (2011) *The Finite Element Method An Introduction with Partial Differential Equations*, Second Edition, Oxford, 297.
- Duchateau Ph.D. , David W.Zachmann (1988) *Partial Diferential Equations*, 240.
- Ervin, V.J., Layton, W.J., Neda, M. (2007) Numerical analysis of a higher order time relaxation model of fluids, *Int. J. Numer. Anal. Model.* 648.670.
- Gök, H. İbrahim Demirci, Gök (2009) Application Of Finite Elements Method On Industrial, 5. Uluslararası İleri Teknolojiler Sempozyumu (IATS'09), Karabük, Türkiye.
- Hecht, F., Pironneau, O. (2013) *FreeFem++* webpage: <http://www.freefem.org>.
- Hritz, S, M. (2010) *Phenomenology and computations of a regularization of the NSE related to a non-Newtonian fluid flow model*, MSc thesis, University of Pittsburgh, Pittsburgh. 50.
- Işık, O.R. (2013) Spin up problem and accelerating convergence to steady state, *Appl. Math. Modell.* 37 (5), 3242-3253.
- Jiang, N., Mohebujjaman, M., Rebholz, L, G., Trenchea, C. (2015) Analysis Of A Family Of Regularization Methods For Navier-Stokes Equations. Technical Report, TR-MATH 03-14, University of Pittsburgh.
- Jiang, S. Kaya, W. Layton (2014) Analysis Of Model Variance For Ensemble Based Turbulence Modeling, Technical Report, TR-MATH 14-09, University of Pittsburgh.
- Köseoğlu, A. (2011) The Navier-Stokes Voigt Model and Convergence to Equilibrium and Statistical Equilibrium..MS thesis, Department of Zematics, University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Kreyszig, E. (1978) Introductory functional analysis with applications, p. 1. Functional analysis. I. ISBN 0-471-50731-8.

Kaya, S., Riviere, B. (2003) Analysis of a discontinuous Galerkin and eddy viscosity method for Navier Stokes equations. Technical Report, TR-MATH 03-14, University of Pitts.

Kaya, B. Riviere (2003) Analysis of a discontinuous Galerkin and eddy viscosity method for Navier-Stokes, TR-MATH 03-14, University of Pitts.

Kaya, B. Riviere (2004) A two-grid stabilization method for solving the steady-state Navier-Stokes equations, TR-MATH 04-06, University of Pitts.

Kaya, W. Layton, B. Riviere (2005) Subgrid stabilized defect correction methods for the Navier-Stokes equations, TR-MATH 05-01, University of Pitts.

Layton, W. J., Neda, M. (2007) Truncation of scales by time relaxation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325, 788-807.

Layton, W. J. (2008) Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows, Siam.

Layton, W. J., Monika, C., Neda, M., Rebholz, L. (2010) Numerical analysis and computational comparisons of the NS-alpha and NS-omega regularizations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199, 916-931.

Layton, W. J., Pruett, C. D., Rebholz, L. G. (2010) Temporally regularized direct numerical simulation, Applied Mathematics and Computation 216, 3728-3738.

Layton, A. Takhirov (2012) A Test of a Modular, Wall Adapted Nonlinear Filter Model for Underresolved Flows, TR-MATH 12-11.

Layton, (2012) The Interior Of Van Cittert Deconvolution Of Differential Filters Is Optimal, Department Of Mathematics University Of Pittsburgh, PA 15260, USA, Tr-Math 12-01.

- Layton, W. J. ,Mays, N. ,Neda, M. ,Trenchea, C. (2011). Numerical analysis of modular regularization methods for the BDF2 time discretization of the Navier-Stokes equations . ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 48, pp 765-793. doi:10.1051/m2an/2013120.
- Layton, J. Connors (2008), On The Accuract Of The Finite Element Metod Plus Time Relaxation, Tr- Math 8-19.
- Layton, Rebholz (2010), Approximate Deconvolution Models Of Turbulence Analysis, Phenomenology and Nümerical Analysis, Is Optimal,Department Of Mathematics University Of Pittsburgh, USA, 184.
- Leray, J. (1934). Sur lesmouvements dune liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math 63, 193248.
- Moin, P. ,Mahesh, K. (1998) Direct Numerical Simulation: A Tool in Turbulence Research. Annual Review in Fluid Mech., 30:53978.
- Neda, M. (2010) Discontinuous Time Relaxation Method for the TimeDependent Navier-Stokes Equations, Advances in Numerical Analysis, Volume 2010, doi:10.1155, 419021.
- Peker, Helvacı, S., S., (2003) Akışkanlar Mekaniği, 93. Cilt, Literatür Yayıncılık, Türkiye, 767.
- Recebli, Özkaymak (2013) Akışkanlar Mekaniği, Seçkin Yayıncılık, Türkiye, 94.
- Rosenau, P. (1989) Extending hydrodynamics via the regularization of the Chapman-Enskog expansion, Phys. Rev. A 40, 7193.
- Strang, G.(2007). ComputationalScienceandEngineering, Wellesley-Cambridge Press.

- Schochet, S., Tadmor, E. (1992) The regularized Chapman-Enskog expansion for scalar conservation laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 119, 95.
- Shan, L. , Layton, W. J. , Zheng, H. (2013) Numerical analysis of modular VMS methods with nonlinear eddy viscosity for the Navier-Stokes equations, *Int.J. Numer. Anal. Model.*, 10, 943-971.
- Sohr, H. (2001) *The Navier Stokes Equations an Elementary Functional Analytic Approach*, Birkhauser, 367.
- Stolz, S. , Adams, N. A. , Kleiser, L. (2001) An approximate deconvolution model for large eddy simulation with application to wall-bounded flows, *Phys. Fluids* 13, 997.
- Stolz, S. , Adams, N. A. , Kleiser, L. (2001) The approximate deconvolution model for LES of compressible flows and its application to shock-turbulent boundary layer interaction, *Phys. Fluids* 13, 2985.
- Takhirov, (2013) *Exact Solution of the Stochastic Navier-Stokes Equations*, Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA, 15260, USA .
- Takhirov, A., Neda, M., Waters, J. (2015) Time relaxation algorithm for flow ensembles. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 32, 757-777.
- Taylor, C. and Hood, P. (1973) A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Comput. Fluids*, 1, 73-100.
- Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. and Topp, L.T. (1956) Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeron. Sci.*, 23, 805-823.
- Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C. and Melosh, R. J. (1960) Large deflections of structures subjected to heating and external loads. *J. Aeron. Sci.*, 27, 971-107.
- Vincent, J. E. , Layton, W. J. , Neda, M. (2007) Numerical analysis of a higher order time relaxation model of fluids, *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, 4, 648-670.

Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F.(2000) Numerical Mathematics, Springer, 654.

Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F.(2007) Numerical Mathematics, Springer, 668.

Quarteroni, A. (2009) Numerical Models for Differential Problems, Springer, Milano, 601.

Quarteroni, A. (2014) Numerical Models for Differential Problems, Modeling, Simulation and Applications (MS&A), vol. 8.Springer-Verlag: Italia, Milano, 668.

Zienkiewicz, O.C. (1995). Origins, milestones and direction of the FEM-a personal view. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 2, 1.48.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Meryem ÖZBUNAR
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Afyon 07/12/1990
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 541 336 83 85
E-posta : meryem_ozbunar@hotmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/ Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Havva Özişbakan Lisesi	2009
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2013

Yabancı Dil(ler)

Dil(İngilizce, vs.)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma	X		
Konuşma	X		
Anlama		X	
Okuma		X	