



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HARDY TIPLI
EŞİTSİZLİKLER**

Candan CAN BİLİŞİK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA**

DÜZCE, 2018

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HARDY TİPLİ
EŞİTSİZLİKLER

Candan CAN BİLİŞİK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 08/01/2018

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

08 Ocak 2018



Candan CAN BİLİŞİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Düzce Üniversitesi BAP-2017.05.04.533 numaralı Bilimsel Araştırma Projesiyle desteklenmiştir.

08 Ocak 2018

Candan CAN BİLİŞİK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
İÇİNDEKİLER.....	V
KISALTMALAR VE SİMGELER	VI
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. AMAÇ VE KAPSAM	1
1.2. GENEL KAVRAMLAR.....	4
2. KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	22
2.1. OPİAL EŞİTSİZLİKLERİ YARDIMIYLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN YENİ HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER	22
2.2. k -KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER	28
3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	33
4. KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ	37

KISALTMALAR VE SİMGELER

$a=\{ a_n \}$	Reel Terimli Dizi
h	Kesikli Hardy Operatörü
H	Sürekli Hardy Operatörü
I	Reel Sayılarda Bir Aralık
R	Reel Sayılar
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
Γ_k	k- Gamma fonksiyonu
β_k	k- Beta Fonksiyonu
F'	F Fonksiyonunun Birinci Mertebe Türevi
l_p, L_p	Ölçülebilir f fonksiyonlarından oluşan Lebesgue Uzayları
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonların Kümesi
$J_{a^+}^\alpha f(x)$	α Riemann-Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$J_{b^-}^\alpha f(x)$	α Riemann-Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegral
$J_a^{\alpha,k} f(x)$	α mertebeli k-Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Candan CAN BİLİŞİK
Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Ocak 2018, 36 sayfa

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından ortaya atılan “türev ve integraller sadece tamsayılar için mi vardır?” sorusuna aranan yanıtla ortaya çıkmıştır. Kesirli türev tanımıyla ilk olarak Euler ilgilenmiştir. Daha sonra sırasıyla Leibniz, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin kesirli türev ve integrallerin genelleştirmesine dayalı çalışmaları sayesinde gelişmeye devam etmektedir. Hilbert eşitsizliğinin farklı ve daha kolay bir ispatını yapmak üzere yola çıkan G. H. Hardy, 1920 yılında adıyla bilinen eşitsizliğin integral formunu bulmuştur. 1925 yılında da yayınlamış olduğu ünlü makalesinde bu eşitsizliğin diziler için olan formunu ispatlarıyla birlikte sunmuştur. Hardy eşitsizliğinin birçok bilim adamı tarafından farklı koşullar altında çalışılmış olmasının sebebi ise bu eşitsizliğin matematiğin birçok alanında uygulamasının olmasıdır. Hardy eşitsizliği ve genelleştirmesi; adi ve kısmi diferansiyel denklem teorisi, operatör teorisi, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, sınır değer problemleri ve matematiksel modelleme vb. matematiğin birçok alanında uygulamalarda önemli bir rol oynar. Ayrıca fizik alanında elektroeolojik akışkanların davranışlarının matematiksel modellemesi gibi farklı bilim dallarında da uygulama imkânı bulmaktadır. Benzer şekilde kesirli türev ve kesirli integrallerin uygulamaları da fizik, kimya, elektrodinamik, aerodinamik ve matematiksel modelleme gibi birçok bilim dalında ortaya çıkmaktadır. İlk bölümde tezimizde kullanacağımız temel kavramlardan, kesirli türev ve integraller ile ilgili genel bilgilerden bahsedilecektir. İkinci bölümde ise tüm bu bilgilerden yararlanarak kesirli integraller içeren Hardy Tipli Eşitsizlikler elde edilecektir.

Anahtar sözcükler: Hardy eşitsizliği, k-kesirli integral, Opial eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integral.

ABSTRACT

ON HARDY TYPE INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRALS

Candan CAN BİLİŞİK

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

January 2018, 36 pages

The notions fractional derivative and fractional integral are emerged with responses which are being looking for question “Do derivatives and integrals are only exist for integer numbers?” which are firstly proposed by Liouville. The definition of fractional derivative and firstly interested by Euler. After, respectively, Leibniz, Lagrange, Abel, Liouville and other many mathematicians’ fractional derivatives and integrals generalization based on their work, it continues to grow up thanks to them. G. H. Hardy, who takes on the road in order to Hilbert inequalities’ different and easier proof, found out the form of the inequality that known in 1920 name. Also he presented this inequalities’ series’ form with their proofs in his famous article in 1925. The main reason why Hardy inequalities’ was being studied by many scientists in different conditions is that this inequality have many application of mathematics Hardy inequality and generalization takes important role of mathematics such as ordinary and partial theory of differential equations, theory of operator, functional analysis, harmonic analysis, boundary value problems, mathematical modelling. Besides, in the field of physics, it finds opportunity to apply different field of science such as electrorheological fluids of mathematical modelling’s behavior. Similarly, the applications of fractional derivative and fractional integral emerges many science branch such as physics, chemistry, electrodynamic, aero dynamical, mathematical modelling. In the first part, fractional derivative and integrals which we will use in our dissertation will be mentioned about general information. Latter, Hardy Type Inequalities which contains fractional integral will be acquired by benefiting from all of that information’s.

Keywords: Hardy Inequality, k - Fractional Integral, Opial Inequality, Riemann Liouville Fractional Integral.

1. GİRİŞ

1.1 AMAÇ VE KAPSAM

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından ortaya atılan “türev ve integraller sadece tamsayılar için mi vardır?” sorusuna aranan yanıtla ortaya çıkmıştır. Kesirli türev tanımıyla ilk olarak Euler ilgilenmiştir. Daha sonra sırasıyla Leibniz, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin kesirli türev ve integrallerin genelleştirmesine dayalı çalışmaları sayesinde gelişmeye devam etmektedir. Kesirli türev ve integraller ile bunların genelleştirmeleri fark denklemleri gibi adi ve kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin varlığını ve tekliğini saptamakta önemli bir rol oynamaktadır. İlk bölümde tezimizde kullanacağımız temel kavramlardan, kesirli türev ve integraller ile ilgili genel bilgilerden bahsedilecektir. İkinci bölümde Opial ve çeşitli eşitsizlikler yardımıyla k-kesirli integraller içeren Hardy tipli eşitsizlikler elde edilecektir. Son bölümde ise elde ettiğimiz sonuçlardan bahsedilecektir. Bu tezdeki amacımız, farklı tipte eşitsizliklerden yararlanarak kesirli integraller içeren Hardy tipli integral eşitsizlikleri elde etmektir. Bu yüzden, ilk olarak aşağıda Hardy eşitsizliği ile ilgili olarak kısa bir bilgi sunalım.

Modern matematiğin en bilinen eşitsizliklerinden biri olan Hardy eşitsizliği(sürekli ve kesikli formu) [9], [26], 1906-1928 yılları arasında geliştirilmeye başlanmıştır. Eşitsizliğe ismi verilen G.H. Hardy’ nin yanı sıra E. Landau, G. Polya, I. Schur, M. Riesz gibi önemli matematikçiler bu eşitsizliğin geliştirilmesi konusunda önemli katkılar sağlamışlardır. Hardy eşitsizliği kesikli ve sürekli olmak üzere iki farklı şekilde incelenmiş, bu eşitsizliğin hangi koşullar altında sağlandığı araştırma konusu olmuştur.

Eşitsizliğin kesikli formu: $p > 1$ ve $\{a_k\}_1^\infty$ negatif olmayan gerçel terimli bir dizi olsun, bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \quad (1.1)$$

şeklinde Hardy eşitsizliğinin kesikli formu verilmiştir.

Eşitsizliğin sürekli formu: $p > 1$ ve f negatif olmayan $(0, \infty)$ aralığı üzerinde p -integrallenebilir fonksiyon ise f fonksiyonu her bir $x \in (0, \infty)$ için $(0, x)$ aralığında integrallenebilir olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t) dt \right) \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx \quad (1.2)$$

şeklinde sürekli Hardy eşitsizliği verilmiştir.

Dikkat:

- (i) Hardy eşitsizliğinin sürekli ve kesikli formunda ortaya çıkan $(p/(p-1))^p$ sabiti değişmezdir. Yani, daha küçük bir sayı için sürekli ve kesikli formdaki eşitsizliğe uygun olan dizi ve fonksiyonlar için sağlanmaz.

- (ii) Eşitsizliğin kesikli formu ve eşitsizliğin zayıf formu: $\sum_{n=1}^\infty a_n^p < \infty$, $a_n \geq 0$ olmak

üzere $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p < \infty$ ve $\int_0^\infty f^p(x) dx < \infty$, $f(x) \geq 0$ olmak üzere

$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx < \infty$ şeklindedir.

- (iii) Sürekli ve kesikli formlar ile birlikte (ii) ifadesinden kesikli Hardy operatörü

h ve sürekli Hardy operatörü H , $p > 1$ ve $p' = \frac{p}{p-1}$ olmak üzere sırasıyla “ l_p

den l_p ” ye ve “ L_p den L_p ”, $h(\{a_n\}) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right\}$, $Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ şeklinde

tanımlanır. Burada l_p ve L_p sırasıyla, $\|a\|_{l_p} := \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$,

$\|f\|_{L_p} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ olacak şekilde sırasıyla $a = \{a_n\}$ reel terimli dizilerden ve $(0, \infty)$ aralığında ölçülebilir f fonksiyonlarından oluşan Lebesgue uzaylarıdır.

Eşitsizliğin sürekli formu klasik Hardy Eşitsizliği olarak kabul edilir. Bu eşitsizlik daha sonra çok geniş bir şekilde araştırılmış, incelenmiş ve daha genel eşitsizliklerin elde edilmesinde kullanılmıştır. G. H. Hardy' nin eşitsizliğin sürekli formunu 1925 yılında ispatlamış bundan çok kısa bir süre sonra bu eşitsizlik değiştirilerek ilk ağırlıklı Hardy Eşitsizliği, $p > 1$, $\varepsilon < p-1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{p-\varepsilon-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) x^\varepsilon dx \quad (1.3)$$

şeklinde verilmiştir. Bu eşitsizliğin dual formu, $p > 1$, $\varepsilon > p-1$ ve f negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_x^\infty f(t) dt \right)^p x^\varepsilon dx \leq \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) x^\varepsilon dx \quad (1.4)$$

şeklinde dir. Bu eşitsizlik bir önceki eşitsizlikten kolayca elde edilebilir. Hardy eşitsizliğinin gelişimindeki önemli çalışmalar ağırlık fonksiyonlarının eşitsizlik içinde kullanılmasıyla elde edilmiştir. Hangi özelliklere sahip ağırlık fonksiyonlarıyla eşitsizlik gerçekleşir? sorusundan hareketle araştırmalar derinleştirilmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bunlardan bazıları aşağıda verelim:

1) N. Levinson, eşitsizliği aşağıda belirtildiği gibi tanımlamıştır [36]:

$f > 0$ fonksiyonu $[a, b] \subseteq [0, \infty[$ aralığı üzerinde pozitif fonksiyon, $p > 1$ ve

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ olsun. O halde,

$$\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b f^p(t) dt \quad (1.5)$$

eşitsizliği vardır.

- 2) W. T. Sulaiman, ise Hardy Eşitsizliğinin bir benzerini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir [43]:

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x} \right)^p dx - \int_a^b \left(1 - \frac{a}{x} \right)^p f^p(x) dx. \quad (1.6)$$

- 3) Son olarak, B. Sroysang, yukarıdaki sonuçların en genel aşağıdaki şekilde vermiştir [42].

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q} dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x) dx. \quad (1.7)$$

bu tezde amacımız ilk olarak yukarıdaki 1, 2 ve 3 Hardy tipindeki eşitsizlikleri genelleştirmektir.

1.2 GENEL KAVRAMLAR

Bu tezde kullanacağımız bazı temel kavramları aşağıdaki şekilde verelim.

Tanım 1. $f \in L_1[a, b]$. olsun. Riemann-Liouville integralleri $J_{a+}^\alpha f$ ve $J_{b-}^\alpha f$ mertebeleri $\alpha > 0$ ile $a \geq 0$ sırasıyla

$$J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a \quad (1.8)$$

ve

$$J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \quad (1.9)$$

tanımlıdır. Burada, $\Gamma(\alpha)$ gama fonksiyonudur ve $J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x)$.

Diaz and Pariguan tarafından tanımlanan k -gamma fonksiyon Γ_k , k -beta fonksiyon B_k ve Pochhammer k -sembol $(x)_{n,k}$ yani klasik anlamda gama, beta ve Pochhammer sembolünün genelleştirmesidir [30]. Γ_k aşağıdaki formül ile verilir.

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}, \quad k > 0. \quad (1.10)$$

$e^{-\frac{t^k}{k}}$ üstel fonksiyonunun Mellin Dönüşümü altında k -gamma fonksiyonu açıkça aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_k(\alpha) := \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{\alpha-1} dt \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu fonksiyona ait bazı özellikler

$$\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x), \quad \Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow 1} \Gamma_k(x) \quad \text{ve} \quad \Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1} \Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

şeklinde elde edilmiştir. Daha sonra, Mubeen and Habibullah tarafından Riemann-Liouville tipli k -kesirli integrali

$$J^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad x > 0, \quad k > 0. \quad (1.12)$$

şeklinde tanımlamışlardır [38]. Buna ek olarak, Romero ve arkadaşları tarafından aşağıdaki tanım verilmiştir [39].

Tanım 2. α negatif olmayan reel sayı olsun. f , $I' = (0, \infty)$ aralığı üzerinde parçalı sürekli fonksiyon ve integrallenebilir, ayrıca $I = [0, \infty]$ alt aralığında sınırlı olsun. O zaman, f fonksiyonunun α mertebeli k -Riemann Liouville kesirli integrali

$$J_a^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad x > a, \quad k > 0. \quad (1.13)$$

şeklinde dir. $k=1$ için yukarıdaki integral, klasik anlamda Riemann-Liouville kesirli integralini verir. Ayrıca, $f(x) = (x-a)^\mu$, fonksiyonu seçilirse:

$$J_a^{\alpha,k} (x-a)^\mu = \frac{\Gamma_k(\mu k + k)}{\Gamma_k(\alpha + \mu k + k)} (x-a)^{\mu + \frac{\alpha}{k}}, \quad x \in [a, b] \quad (1.14)$$

bulunur. Son yıllarda, k -gamma fonksiyonu, k -beta fonksiyonu ve k -kesirli integral eşitsizlikleri ile ilgili olarak verilen sonuçlar kaynaklarımızda mevcuttur [30], [31], [35], [38], [39], [41]. Son zamanlarda verilen bazı sonuçlarla bağlantılı kesirli integral eşitsizlikleri için incelenebilir [30]-[34].

İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği: $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçel fonksiyonlar $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.15)$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

Reel Sayılarda Eşitsizlik Özellikleri: $x, y, z, t \in R$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $z \in R \vee x < y \Rightarrow x + z < y + z$
2. $z > 0 \vee x < y \Rightarrow xz < yz$
3. $z < 0 \vee x < y \Rightarrow xz > yz$
4. $x < y \vee z < t \Rightarrow x + z < y + t$

Opial Eşitsizliği: x fonksiyonu $[0, h]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = x(h) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_0^h |x(t)| |x'(t)| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h |x'(t)|^2 dt \quad (1.16)$$

dir.

İspat. İlk olarak $y(t) = \int_0^t |x'(s)| ds$ ve $z(t) = \int_t^h |x'(s)| ds$ olarak tanımlayalım. Dolayısıyla

$$y'(t) = |x'(t)| = -z'(t) \text{ ve } |x(t)| \leq y(t), |x(t)| \leq z(t), t \in [0, h]$$

olarak yazılır. Yukarıdaki ifadelerden faydalanarak

$$\int_0^{\frac{h}{2}} |x(t)x'(t)| dt \leq \int_0^{\frac{h}{2}} y(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{h}{2} \right) \quad (1.17)$$

ve

$$\int_{\frac{h}{2}}^h |x(t)x'(t)| dt \leq -\int_{\frac{h}{2}}^h z(t)z'(t) dt = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{h}{2} \right) \quad (1.18)$$

olup (1.17) ve (1.18) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|dt \leq \frac{1}{2} \left(y^2\left(\frac{h}{2}\right) + z^2\left(\frac{h}{2}\right) \right)$$

elde edilir. Diğer yandan, Cauchy- Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak,

$$y^2\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\int_0^{\frac{h}{2}} |x'(t)|dt \right)^2 \leq \frac{h}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} (x'(t))^2 dt$$

ve

$$z^2\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\int_{\frac{h}{2}}^h |x'(t)|dt \right)^2 \leq \frac{h}{2} \int_{\frac{h}{2}}^h (x'(t))^2 dt$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left(\int_0^{\frac{h}{2}} |x'(t)|dt \right)^2 = \frac{h}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} (x'(t))^2 dt \text{ ve } \left(\int_{\frac{h}{2}}^h |x'(t)|dt \right)^2 = \frac{h}{2} \int_{\frac{h}{2}}^h (x'(t))^2 dt$$

elde edilir. Bu ifadelerden ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\int_0^h |x(t)x'(t)|dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h |x'(t)|^2 dt$$

ispat tamamlanır. Burada $h/4$ en iyi sabittir. Bununla beraber Opial eşitsizliğinin daha basit hali Olech, Beesack, Levinson, Mallows ve Pederson tarafından da ispatlanmıştır [24], [4], [37], [22], [23].

y fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon , $y(a)=0$ olsun. O halde

$$\int_a^b |y(x)y'(x)|dx \leq \frac{(b-a)}{2} \int_a^b |y'(x)|^2 dx \quad (1.19)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Opial eşitsizliği ve genelleştirmeleri, fark denklemleri gibi adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç sınır değer problemlerinin varlık ve tekliğinde önemli rol oynar.

Son yirmi yıldır literatürdeki pek çok çalışma temel ispatları ve çeşitli genelleştirmeleri için Opial Eşitsizlikleri ile genişlemelerinden faydalanılmıştır [1], [12], [13], [16], [17], [20]-[22].

Beesack eşitsizliği: y fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon,

$y(a)=0$ ($y(b)=0$) ile $r(t)$ pozitif-sürekli fonksiyon ve $\int_a^b \frac{dt}{r(t)} < \infty$ sınırlı olmak üzere,

$$\int_a^b |y(t)| |y'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{r(t)} dt \int_a^b r(t) |y'(t)|^2 dt \quad (1.20)$$

eşitsizliği vardır.

Maroni Eşitsizliği : y fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon ve

$y(a)=0$ ($y(b)=0$) ile $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\int_a^b \left(\frac{1}{r(t)} \right)^{p-1} dt < \infty$ sınırlı olsun. O

halde,

$$\int_a^b |y(t)| |y'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{r(t)} \right)^{p-1} dt \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b r(t) |y'(t)|^q dt \right)^{\frac{2}{q}} \quad (1.21)$$

dir.

Teorem 1.1. $r, s, (a, b)$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun.

$R(x, b) = \int_x^b r(x) dx$ olmak üzere, tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\left(\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{R^2(x, b)}{s(x)} dx \left(\int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \right) \quad (1.22)$$

dir.

İspat. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ olsun. $F(a) = 0$ ve $F'(x) = f(x)$ olduğu açıktır. Bu ifadeler bize aşağıdaki eşitliği verir.

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx = \int_a^b r(x) F(x) dx.$$

Eşitliğin sağ tarafının integrali hesaplayalım. O halde,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx = -R(x, b) F(x) \Big|_a^b + \int_a^b R(x, b) F'(x) dx.$$

olur ve buradan da, $R(b, b) = 0$ ve $F(a) = 0$ varsayımlarını kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx &= \int_a^b R(x, b) F'(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{R(x, b)}{\sqrt{s(x)}} \sqrt{s(x)} F'(x) dx \end{aligned}$$

$p = q = 2$ için Hölder Eşitsizliğini uygulayalım.

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx \leq \left(\int_a^b \frac{R^2(x, b)}{s(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b s(x) (F'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Böylece teorem ifadesine ulaşarak ispat tamamlandı. Teorem 1.1' in ispatında olduğu gibi benzer olarak $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ seçilerek Teorem 1.2' yi ispatlayalım.

Teorem 1.2. $r, s, (a, b)$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun.

$R(a, x) = \int_a^x r(x) dx$ olmak üzere, tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\left(\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{R^2(a, x)}{s(x)} dx \left(\int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \right) \quad (1.23)$$

dir.

İspat. $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ olsun. $F(b) = 0$ ve $F'(x) = f(x)$ olduğu açıktır. Bu ifadeler bize aşağıdaki eşitliği verir.

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \int_a^b r(x) F(x) dx.$$

Eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = R(a, x) F(x) \Big|_a^b + \int_a^b R(a, x) F'(x) dx.$$

olur ve $R(a, a) = 0$ ve $F(b) = 0$ varsayımlarını kullanırsak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \int_a^b R(a, x) F'(x) dx$$

olur. Elde ettiğimiz ifadenin sağ tarafını $\sqrt{s(x)}$ ifadesi ile çarpıp bölersek,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \int_a^b \frac{R(a, x)}{\sqrt{s(x)}} \sqrt{s(x)} F'(x) dx$$

yazılır. Yukarıdaki ifadeye, $p = q = 2$ için Hölder Eşitsizliğini uygularsak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx \leq \left(\int_a^b \frac{R^2(a, x)}{s(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 1.3. r fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. O halde, tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx \leq (b-a) \sup_{a < x < b} \left(\int_x^b r(x) dx \right) \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (1.24)$$

dir.

İspat. Teorem 1.1' in kanıtında olduğu gibi ilerleyelim. Yani,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx = \int_a^b r(x) F^2(x) dx.$$

integralinin sağ tarafına kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx = -R(x, b) F^2(x) \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(x, b) F(x) F'(x) dx.$$

olur ve $R(b, b) = 0$ ve $F(a) = 0$ varsayımlarını kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx &= 2 \int_a^b R(x, b) F(x) F'(x) dx \\ &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b F(x) F'(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da Opial eşitsizliğini uygulayalım ve $F(a)=0$ ifadesinden faydalanarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx &\leq (b-a) \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b (F'(x))^2 dx \\ &= (b-a) \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 1.4. r fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. O halde tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx \leq (b-a) \sup_{a < x < b} \left(\int_a^x r(x) dx \right) \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (1.25)$$

dir.

İspat. $F(x) = \int_x^b f(t) dt$ olsun. O halde,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx = \int_a^b r(x) F^2(x) dx.$$

Eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_a^b r(x) F^2(x) dx = R(a, x) F^2(x) \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx$$

yazılır ve burada $R(a, a)=0$ ve $F(b)=0$ olduğu kullanılırsa,

$$\int_a^b r(x) F^2(x) dx = 2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx$$

bulunur. Burada, $F(b)=0$ ve (1.19) ifadesinden faydalanarak,

$$\begin{aligned}
\int_a^b r(x) F^2(x) dx &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \frac{(b-a)}{2} \int_a^b (F'(x))^2 dx \\
&\leq (b-a) \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b (f(x))^2 dx \\
&= (b-a) \sup_{a < x < b} \left(\int_a^x r(x) dx \right) \int_a^b (f(x))^2 dx.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 1. 5. r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. O halde tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \frac{dx}{s(x)} \right) \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \quad (1.26)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Önceki teoremlerde olduğu gibi kısmi integrasyondan faydalanalım.

$$\int_a^b r(x) F^2(x) dx = 2 \int_a^b R(x, b) F(x) F'(x) dx$$

olup buradan da,

$$2 \int_a^b R(x, b) F(x) F'(x) dx \leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b F(x) F'(x) dx$$

yazılır. Beesack eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned}
2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b F(x) F'(x) dx &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \\
&= \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 1.6. r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. O halde tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \frac{dx}{s(x)} \right) \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \quad (1.27)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Önceki teoremlerde olduğu gibi kısmi integrasyondan faydalanalım.

$$\int_a^b r(x) F^2(x) dx = 2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx$$

olup buradan da,

$$2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx \leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b F(x) F'(x) dx$$

bulunur. Beesack eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b F(x) F'(x) dx &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx \\ &= \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 1.7. r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar ve $p > 1$ öyle ki

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_a^b r(x) \left(\int_a^x f(t) dt \right)^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \quad (1.28)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx = -R(x, b) F^2(x) \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(x, b) F(x) F'(x) dx$$

olup ve buradan da $R(b, b) = 0$ ve $F(a) = 0$ varsayımlarını kullanarak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx = 2 \int_a^b R(x, b) F(x) F'(x) dx$$

$$\leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b F(x) F'(x) dx$$

yazılır. $F(a)=0$ faydalanalım. Opial ispatının farklı bir formunu veren Maroni eşitsizliği ile integraller için Hölder Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 1.8. r fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde pozitif bir fonksiyon ve $p > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ öyle ki } \int_a^b \left(\frac{1}{R(a, x)} \right)^{p-1} dx < \infty \text{ ifadesinin sınırlı olduğunu kabul edelim.}$$

Öyleyse tüm $f \geq 0$ fonksiyonları için

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \quad (1.29)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx = R(a, x) F^2(x) \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx$$

olup buradan da, $R(a, a)=0$ ve $F(b)=0$ ifadelerinden yararlanırsak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx = 2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx$$

$$2 \int_a^b R(a, x) F(x) F'(x) dx \leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b F(x) F'(x) dx$$

yazılır. Elde ettiğimiz eşitsizlik ve $F(b)=0$ ifadesi ile Maroni Eşitsizliğinden faydalanırsak,

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) (F'(x))^2 dx$$

$$\leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b s(x) dx \int_a^b s(x) (f(x))^2 dx$$

yazabiliriz. Hölder Eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \end{aligned}$$

$$\int_a^b r(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right)^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) (f(x))^q dx \right)^{\frac{2}{q}}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 1.9. η negatif olmayan bir reel sayı ve $f > 0$ ve $g > 0$ fonksiyonları $[a, b] \subseteq [0, \infty[$ aralığı üzerinde pozitif fonksiyonlar olsun. Eğer $\frac{x-a+\eta}{g(x)}$ artmayan fonksiyon ise, o halde tüm $p > 1$, $\alpha > 0$ için aşağıdaki kesirli eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx &\leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\left(\alpha(p-1) - p + \frac{1}{p} \right) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right)} \\ &\times \left[(b-a)^{\alpha(p-1) + \frac{1}{p} - p} \left(J_a^\alpha \left[\left(\frac{f(b)}{g(b)} (b-a+\eta) \right)^p (b-a)^{\frac{1}{p}} \right] \right) - J_a^\alpha \left[\left(\frac{f(b)}{g(b)} (b-a+\eta) \right)^p (b-a)^{1+\alpha(p-1)-p} \right] \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

İspat. İlk olarak

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx = \int_a^b g^{-p}(x) \left(\int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-t)^{\alpha-1} f(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p^2}} (t-a)^{\frac{1-p}{p^2}} dt \right)^p dx$$

şeklinde yazalım. Hölder Eşitsizliği yardımıyla,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x) \times \left[\int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\left(\frac{1-p}{p^2} \right) \left(\frac{p}{p-1} \right)} dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p dx.$$

yazılır. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx &\leq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x) \int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right) \times \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\frac{-1}{p}} dt \right)^{p-1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x) \int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right) \left(J_a^\alpha (x-a)^{\frac{-1}{p}} \right)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Gerekli düzeltmeler yapılırsa,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right)} \int_a^b g^{-p}(x) (x-a)^{\left(\alpha - \frac{1}{p} \right) (p-1)} \times \int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right) dx.$$

olur. Buradan da,

$$\leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right)} \int_a^b \left(\frac{x-a+\eta}{g(x)} \right)^p (x-a)^{\alpha(p-1)-1-p+\frac{1}{p}} \times \int_a^x \left((x-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right) dx$$

olur. $\frac{x-a+\eta}{g(x)}$ fonksiyonunun artmayan olması ile integrasyon sırasının değişiminden

faidalanırsak,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx &\leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right)} \int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(t)} \right)^p (b-t)^{\alpha(p-1)} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\times \left(\int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)-1-p+\frac{1}{p}} dx \right) dt \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\Gamma^{p-1}(\alpha) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right) \left(\alpha(p-1) - p + \frac{1}{p} \right)} \\ \times \int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(t)} \right)^p (b-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} \times \left((b-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}} - (t-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}} \right) dt.$$

yazılır. Buradan da integralleri ayırırsak,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right) \left(\alpha(p-1) - p + \frac{1}{p} \right)} \\ \times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}} \int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(t)} \right)^p (b-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} - \int_a^b \left(\frac{t-a+\eta}{g(t)} \right)^p (b-t)^{\alpha-1} f^p(t) (t-a)^{\alpha(p-1)-p+1} \right].$$

bulunur. Son olarak,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right) \left(\alpha(p-1) - p + \frac{1}{p} \right)} \\ \times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)-p+\frac{1}{p}} J_a^\alpha \left[\left(\frac{f(b)}{g(b)} (b-a+\eta) \right)^p (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \right] - J_a^\alpha \left[\left(\frac{f(b)}{g(b)} (b-a+\eta) \right)^p (b-a)^{1+\alpha(p-1)-p} \right] \right].$$

şeklinde elde edilir.

Dikkat 1.9.1. Yukarıdaki teoremden $\alpha = 1$ için, Sroysang[42, Theorem 3.1] elde ederiz.

Sonuç 1.9.1.1. $a > 0$ ve $0 < \eta < a$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Tüm $p > 1$, $\alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{(x-a+\eta)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\left(\alpha(p-1) - p + \frac{1}{p} \right) \Gamma^{p-1} \left(1 - \frac{1}{p} + \alpha \right)} \\ \times \left[(b-a)^{\alpha(p-1)+\frac{1}{p}-p} J_a^\alpha \left(f^p(b) (b-a)^{\frac{1}{p}-1} \right) - J_a^\alpha (f^p(b) (b-a)^{1+\alpha(p-1)-p}) \right]. \quad (1.31)$$

Dikkat 1.9.2. Sonuç ifadesinde $\alpha = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} & \int_a^b (x-a+\eta)^{-p} \left(\int_a^x f(t) dt \right)^p dx \\ & \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \left[\int_a^b f^p(t) \left(1 - \frac{(t-a)^{1-\frac{1}{p}}}{(b-a)^{1-\frac{1}{p}}} \right) dt \right] \\ & \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b f^p(t) dt. \end{aligned}$$

Üstelik $0 < \eta < a$ için

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{x} \right)^p dx \leq \int_a^b \left(\frac{J_a^\alpha f(x)}{x-a+\eta} \right)^p dx$$

dır. Bundan dolayı Dikkat 9.2 de eşitsizlik Levinson eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.10. $f > 0, g > 0$ fonksiyonları $[a, b] \subseteq [0, \infty[$ aralığı üzerinde pozitif fonksiyonlar ve g fonksiyonu azalmayan olsun. O halde tüm $p > 1, q > 0, \alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{(\alpha p - \alpha + 1) \Gamma^{p-1}(\alpha + 1)} \times \left[(b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} J_a^\alpha \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)} \right) - J_a^\alpha \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)} (b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} \right) \right]. \quad (1.32)$$

İspat. İlk olarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &= \int_a^b g^{-q}(x) \left(\int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)^p dx \\ \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\leq \int_a^b g^{-q}(x) \left[(J_a^\alpha f^p(x))^{\frac{1}{p}} (J_a^\alpha 1)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p dx \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Buradan da Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{p-1} \right] dx$$

yazılır. Böylece aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b g^{-q}(x) \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) (x-a)^{\alpha(p-1)} dx.$$

g fonksiyonunun azalmayanlığından ve integrasyon sınırlarının değişiminden faydalanırsak,

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b g^{-q}(t) (b-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \int_t^b (x-a)^{\alpha(p-1)} dx.$$

olup böylece,

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{(\alpha p - \alpha + 1)\Gamma(\alpha)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b g^{-q}(t) (b-t)^{\alpha-1} f^p(t) \times [(b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} - (t-a)^{\alpha p - \alpha + 1}] dt$$

ya da

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{(\alpha p - \alpha + 1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \times \left[(b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} J_a^\alpha \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)} \right) - J_a^\alpha \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)} \right) (b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} \right].$$

eşitsizliği elde edilir.

Dikkat 1.10.1. Teoremde $\alpha=1$ için, Sroysang[42, Theorem3.5] in ilk kısmını elde ederiz.

Dikkat 1.10.2. Teoremde $\alpha=1$ ve $g(x)=x$ için Sroysang[42], (1.7) eşitsizliğini elde ederiz.

Dikkat 1.10.3. Teoremde $\alpha=1$ ve $g(x)=x$ ve $p=q$ için Sulaiman[43], (1.6) eşitsizliği elde ederiz.

Teorem 1.11. $f > 0, g > 0$ fonksiyonları $[a, b] \subseteq [0, \infty[$ aralığı üzerinde pozitif fonksiyonlar ve g fonksiyonu azalmayan olsun. O halde tüm $0 < p < 1, q > 0, \alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\geq \frac{g^{-q}(b)}{(\alpha p - \alpha + 1)\Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \\ &\times \left[\frac{(-1)^{\alpha p - \alpha + 1}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha p + 1) J_b^{\alpha p + 1} f^p(a) - (b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} J_b^\alpha f^p(a) \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

İspat. Ağırlıklı ters Hölder Eşitsizliğinden faydalanalım. O halde,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\geq \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) (J_a^\alpha 1)^{p-1} \right]^p dx. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b g^{-q}(x) (x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) dx.$$

olur. g fonksiyonunun azalmayanlığı sayesinde ve integrasyon sınırlarının değişimi ile,

$$\int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_a^b g^{-q}(b) (x-a)^{\alpha(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^p(t) dt \right) dx.$$

olup buradan da,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1}(\alpha+1)} \int_b^a g^{-q}(b) (a-t)^{\alpha-1} f^p(t) \left(\int_b^t (x-a)^{\alpha(p-1)} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1}(\alpha+1) (\alpha p - \alpha + 1)} \int_b^a g^{-q}(b) (a-t)^{\alpha-1} f^p(t) \left[(t-a)^{\alpha p - \alpha + 1} - (b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} \right] dt. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma^{p-1}(\alpha+1) (\alpha p - \alpha + 1)} \\ &\times \left[(b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} \int_a^b (a-t)^{\alpha-1} g^{-q}(b) f^p(t) dt - \int_a^b (a-t)^{\alpha-1} g^{-q}(b) f^p(t) (t-a)^{\alpha p - \alpha + 1} dt \right] \end{aligned}$$

veya daha düzenli olarak,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{(J_a^\alpha f(x))^p}{g^q(x)} dx \\
& \geq \frac{g^{-q}(b)}{\Gamma^{p-1}(\alpha+1)(\alpha p - \alpha + 1)} \left[\frac{(-1)^{\alpha p - \alpha + 1}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha p + 1) J_b^{\alpha p + 1} f^p(a) - (b-a)^{\alpha p - \alpha + 1} J_b^\alpha f^p(a) \right].
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.



2. KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN HARDY TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

2.1. OPİAL EŞİTSİZLİKLERİ YARDIMIYLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN YENİ HARDY TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu çalışmadaki amaçlarımızdan biri kesirli integraller içeren bazı Opial tipli ve Hölder eşitsizliklerden faydalanarak Hardy Tipli yeni eşitsizlikler elde etmektir.

Kesirli integraller için Opial Eşitsizliğinden faydalanarak ilk teoremimizi verelim.

Teorem 2.1.1. $f \geq 0$ ve $r, s, (a, b)$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $R(x, b) = \int_x^b r(u)du$ olmak üzere

$$\int_a^b r(x) J_{a^+}^\alpha f(x) dx \leq \left(\int_a^b R^2(x, b) / s(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (J_{a^+}^{\alpha-1} f(x))^2 s(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

vardır.

İspat. İlk olarak

$$J_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

alalım. Dolayısıyla tanımdan $J_{a^+}^\alpha f(a) = 0$ ve

$$\begin{aligned} DJ_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

olduğu açıktır. Böylece kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_a^b r(x) J_{a^+}^\alpha f(x) dx = -R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) \Big|_a^b + \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx$$

yazılır. Buradan da, $R(b, b) = 0$ ve $J_{a^+}^\alpha f(a) = 0$ ifadeleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_a^b r(x) J_{a^+}^\alpha f(x) dx &= \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx \\ &= \int_a^b R(x, b) \frac{\sqrt{s(x)}}{\sqrt{s(x)}} J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx.\end{aligned}$$

elde edilir. O halde yukardaki eşitliğin sağ tarafına, $p=q=2$ için Hölder Eşitsizliği uyguladığımızda,

$$\int_a^b r(x) J_{a^+}^\alpha f(x) dx \leq \left(\int_a^b R^2(x, b) / s(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (J_{a^+}^{\alpha-1} f(x))^2 s(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.2. $f \geq 0$ ve r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. O halde, $R(a, x) = \int_a^x r(u) du$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b r(x) J_{b^-}^\alpha f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b R^2(a, x) / s(x) dx \right) \left(\int_a^b (J_{b^-}^{\alpha-1} f(x))^2 s(x) dx \right), \quad (2.3)$$

vardır.

İspat. $J_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$ olsun. $R(a, a) = 0$ ve $J_{b^-}^\alpha f(b) = 0$ ifadelerinden faydalanırsak,

$$DJ_{b^-}^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt = J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)$$

olur. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\int_a^b r(x) J_{b^-}^\alpha f(x) dx = -R(a, x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) \Big|_a^b + \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx. \quad (2.4)$$

elde edilir. Buradan, $p=q=2$ için Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}\int_a^b r(x) J_{b^-}^\alpha f(x) dx &= \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx \\ &= \int_a^b R(a, x) \frac{\sqrt{s(x)}}{\sqrt{s(x)}} J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx.\end{aligned}$$

$$\int_a^b r(x) J_{b^-}^\alpha f(x) dx \leq \left(\int_a^b R^2(a, x) / s(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (J_{b^-}^{\alpha-1} f(x))^2 s(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Buradan da eşitsizlik (2.5)' in her iki tarafının karesini alırsak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.3. $r, (a, b)$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b r(x) [J_{a^+}^\alpha f(x)]^2 dx \leq (b-a) \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx. \quad (2.6)$$

vardır.

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_a^b r(x) [J_{a^+}^\alpha f(x)]^2 dx = -R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx.$$

elde edilir. $R(b, b) = 0$ ve $J_{a^+}^\alpha f(a) = 0$ ifadelerinden faydalanarak,

$$\int_a^b r(x) [J_{a^+}^\alpha f(x)]^2 dx = 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx.$$

elde edilir. Dolayısıyla, eşitsizlik (1.19) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \frac{(b-a)}{2} \int_a^b [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx \\ &\leq (b-a) \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 2.1.4. $f \geq 0$ ve $r, (a, b)$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^2 dx \leq (b-a) \sup_{a < x < b} \left(\int_a^x r(x) dx \right) \int_a^b [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx \quad (2.7)$$

İspat. Kısmi integrasyon yardımı ile $R(a, a) = 0$ ve $J_{b^-}^\alpha f(b) = 0$ ifadelerinden faydalanarak,

$$\int_a^b r(x) \left[J_{b^-}^\alpha f(x) \right]^2 dx = -R(a, x) \left[J_{b^-}^\alpha f(x) \right]^2 \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx.$$

$$\int_a^b r(x) \left[J_{b^-}^\alpha f(x) \right]^2 dx = 2 \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$\leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx$$

olur. Buradan da, eşitsizlik (1.19)' dan,

$$\begin{aligned} & \int_a^b r(x) \left[J_{b^-}^\alpha f(x) \right]^2 dx \\ & \leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \frac{(b-a)}{2} \int_a^b \left[J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) \right]^2 dx \\ & = (b-a) \sup_{a < x < b} \left(\int_a^x r(x) dx \right) \int_a^b \left[J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) \right]^2 dx. \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 2.1.5. $f \geq 0$ ve r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b r(x) \left[J_{a^+}^\alpha f(x) \right]^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \right) \int_a^b s(x) \left[J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) \right]^2 dx \quad (2.8)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Başta kısmi integrasyondan daha sonra da $R(b, b) = 0$ ve $J_{a^+}^\alpha f(a) = 0$ ifadelerinden faydalanalım. O halde,

$$\int_a^b r(x) \left[J_{a^+}^\alpha f(x) \right]^2 dx = -R(x, b) \left[J_{a^+}^\alpha f(x) \right]^2 \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$\int_a^b r(x) \left[J_{a^+}^\alpha f(x) \right]^2 dx = 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$\leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx$$

bulunur. Buradan da, Beesack eşitsizliğinin sol terimi üzerinden kullanırsak,

$$\begin{aligned}
& 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx \\
& \leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx \\
& \leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx \\
& = \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \right) \int_a^b s(x) [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.6. $f \geq 0$ ve r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. Dolayısıyla,

$$\int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^2 dx \leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \right) \int_a^b s(x) [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^2 dx \quad (2.9)$$

dır.

İspat. Yukarıdaki teorem de kullandığımız yöntem ile $R(a, a) = 0$ ve $J_{b^-}^\alpha f(b) = 0$ ifadeleri ve Beesack eşitsizliğinden faydalananarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^2 dx = -R(a, x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^2 \Big|_a^b + 2 \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$\int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^2 dx = 2 \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx$$

$$\leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx.$$

Buradan da,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^p dx \\
& \leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^p dx \\
& = \sup \left(\int_a^x r(x) dx \right) \int_a^b \frac{1}{s(x)} dx \int_a^b s(x) [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^p dx
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.7. $f \geq 0$ ve r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\int_a^b r(x) [J_{a^+}^\alpha f(x)]^p dx \leq \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \quad (2.10)$$

dır.

İspat. Kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned}
\int_a^b r(x) [J_{a^+}^\alpha f(x)]^2 dx &= 2 \int_a^b R(x, b) J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx \\
&\leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \int_a^b J_{a^+}^\alpha f(x) J_{a^+}^{\alpha-1} f(x) dx.
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da, Maroni eşitsizliğini uygularsak eşitsizliğin sağ tarafı,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b r(x) [J_{a^+}^\alpha f(x)]^2 dx \\
& \leq 2 \sup_{a < x < b} R(x, b) \frac{1}{2} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \\
& = \sup_{a < x < b} R(x, b) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) [J_{a^+}^{\alpha-1} f(x)]^q dx \right)^{\frac{2}{q}}.
\end{aligned}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.8. $f \geq 0$ ve r, s (a, b) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar

olsun. Burada $\int_a^b \left(\frac{1}{R(a, x)} \right)^{p-1} dx < \infty$ sınırlı, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^p dx \leq \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^q dx \right)^{\frac{2}{q}}, \quad (2.11)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Benzer yöntem ile Maroni eşitsizliğini uygulayalım. Böylece,

$$\begin{aligned} \int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^p dx &= 2 \int_a^b R(a, x) J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx \\ &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \int_a^b J_{b^-}^\alpha f(x) J_{b^-}^{\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\begin{aligned} &\int_a^b r(x) [J_{b^-}^\alpha f(x)]^p dx \\ &\leq 2 \sup_{a < x < b} R(a, x) \frac{1}{2} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^q dx \right)^{\frac{2}{q}} \\ &= \sup_{a < x < b} R(a, x) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{s(x)} \right)^{p-1} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b s(x) [J_{b^-}^{\alpha-1} f(x)]^q dx \right). \end{aligned}$$

olarak elde edilmiş olur.

2.1. k-KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Çalışmalarımıza dayanak olan sonuçlardan söz etmiştik. W.T. Sulaiman, ve B. Sroysang tarafından verilen sonuçların yanı sıra bizi motive eden diğer bir çalışma da S.Wu ve arkadaşları tarafından verilen önemli sonuçlardır [37], [36], [44]. Çünkü bu sonuçlar, referanslarımızdaki bazı eşitsizliklerin özel durumlar olarak bir çıkarım yapmamıza olanak sağlayacaktır. Ayrıca, burada Amina tarafından verilen bazı sonuçları da genelleştireceğiz [34].

Çalışmamızdaki bir diğer amacımız k- kesirli integraller yardımıyla yeni Hardy Tipli

eşitsizlikler kurmaktır. Bunun için aşağıdaki teoremimizi inceleyelim.

Teorem 2.2.1. η negatif olmayan reel sayı ve $f > 0, g > 0$ $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ aralığı üzerinde pozitif fonksiyonlar olsun. Eğer $\frac{x-a+\eta}{g(x)}$ artmayan ise o zaman tüm $p > 1$, ve $\frac{\alpha}{k} \geq 1$ için k-kesirli integral eşitsizliği geçerlidir.

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^{\alpha, k} f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma_k^{p-1} \left(k - \frac{k}{p} \right)}{\Gamma_k^{p-1} \left(\alpha + k - \frac{k}{p} \right) \left(\frac{\alpha}{k} (p-1) - p + \frac{1}{p} \right)} \quad (2.12)$$

$$\times \left[(b-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)-p+\frac{1}{p}} J_a^{\alpha, k} \left[\frac{f(b)}{g(b)} (b-a+\eta)^p (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \right] - J_a^{\alpha, k} \left[\frac{f(b)}{g(b)} (b-a+\eta)^p (b-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)-p+1} \right] \right].$$

İspat. İlk olarak,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^{\alpha, k} f(x)}{g(x)} \right)^p dx = \int_a^b g^{-p}(x) \left(\int_a^x \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p^2}} (t-a)^{\frac{1-p}{p^2}} \right)^p dt$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, sağdaki integral için Hölder Eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^{\alpha, k} f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^b g^{-p}(x) \left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right) \left(J_a^{\alpha, k} (x-a)^{\frac{1}{p}} \right)^{p-1} dx$$

elde ederiz. Buradan da,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^{\alpha, k} f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma_k^{p-1} \left(k - \frac{k}{p} \right)}{k\Gamma_k(\alpha) \Gamma_k^{p-1} \left(\alpha + k - \frac{k}{p} \right)} \times \left[\int_a^b \left(\frac{(x-a)}{g(x)} \right)^p (x-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)-p-1+\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} dt \right) dx \right]$$

olur. Diğer yandan, $\frac{x-a+\eta}{g(x)}$ artmayan ve integrasyon sırasının değiştirilmesi ile aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^{\alpha,k} f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma_k^{p-1} \left(k - \frac{k}{p} \right)}{k \Gamma_k(\alpha) \Gamma_k^{p-1} \left(\alpha + k - \frac{k}{p} \right)} \\ \times \left[\int_a^b \left(\frac{(t-a+\eta)}{g(t)} \right)^p (b-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_t^b (x-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)-1+\frac{1}{p}-p} dx \right) dt \right].$$

Buradan da,

$$\int_a^b \left(\frac{J_a^{\alpha,k} f(x)}{g(x)} \right)^p dx \leq \frac{\Gamma_k^{p-1} \left(k - \frac{k}{p} \right)}{k \Gamma_k(\alpha) \Gamma_k^{p-1} \left(\alpha + k - \frac{k}{p} \right) \left(\frac{\alpha}{k} (p-1) + \frac{1}{p} - p \right)} \\ \times \left[\int_a^b \left(\frac{(t-a+\eta)}{g(t)} \right)^p (b-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) (t-a)^{\frac{p-1}{p}} \left((b-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)+\frac{1}{p}-p} - (t-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)+\frac{1}{p}-p} \right) dt \right]$$

olup, gerekli düzenleme yapılarak istenilen sonuç elde edilir.

Dikkat. Teorem 2.2.1 için $\alpha=1$ ve $k=1$ alındığında, [44, Theorem 3.1].e ulaşılır.

Teorem 2.2.2. $f > 0$ ve $g > 0$ $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ aralığı üzerinde pozitif ve g azalmayan fonksiyon olsun. Tüm $p > 1$, $q > 0$, $\frac{\alpha}{k} \geq 1$, olmak üzere

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{\Gamma_k^{p-1}(\alpha+k) \left(\frac{\alpha}{k} (p-1) + 1 \right)} \\ \times \left[(b-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)+1} J_a^{\alpha,k} \left(\frac{f^p(b)}{g^q(b)} \right) - J_a^{\alpha,k} \left[\frac{f^p(b)}{g^q(b)} (b-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)+1} \right] \right]. \quad (2.13)$$

dir.

İspat. Soldaki ifadenin eşitinden,

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx = \int_a^b g^{-q}(x) \left(\int_a^x \frac{1}{k \Gamma_k(\alpha)} (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt \right)^p dx$$

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(J_a^{\alpha,k} f^p(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(J_a^{\alpha,k} (1) \right)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p dx$$

Buna göre,

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) dt \right) \left(\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} dt \right)^{p-1} \right] dx.$$

elde edilir ve buradan da,

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k^{p-1}(\alpha+k)} \int_a^b g^{-q}(x) (x-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) dt \right) dx$$

yazılır. g fonksiyonunun azalmayanlığından faydalanalım ve integrasyon sırasını değiştirirsek,

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \leq \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k^{p-1}(\alpha+k)} \int_a^b g^{-q}(t) f^p(t) (b-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} dt \int_b^t (x-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)} dx$$

olup yukarıdaki eşitsizlikleri yeniden düzenleyerek, istenilen sonuca ulaşırız.

Dikkat. (i) Yukarıdaki teoremden $\alpha=1$ ve $k=1$ aldığımızda, [44, Theorem 3.5] çalışmasındaki teoremin ilk kısmını elde ederiz.

(ii) Yukarıdaki teoremden $\alpha=1$, $k=1$ ve $g(x)=x$ seçildiğinde, Sroysang eşitsizliği elde edilir.

(iii) Yukarıdaki teoremden $\alpha=1$, $k=1$, $g(x)=x$ ve $p=q$ seçildiğinde Sulaiman eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 2.2.3. $f \geq 0$ ve $g > 0$ $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ aralığı üzerinde pozitif fonksiyonlar

olmak üzere g azalmayan fonksiyon olsun. $0 < p < 1$, $q > 0$, $\frac{\alpha}{k} \geq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx &\geq \frac{g^{-q}(b)}{\Gamma_k^{p-1}(\alpha+k) \left(\frac{\alpha}{k}(p-1)+1 \right)} \\ &\times \left[\frac{(-1)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)+1}}{\Gamma_k(\alpha)} \Gamma_k(\alpha p+k) J_b^{\alpha p+k,k} f^p(\alpha) - (b-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)+1} J_b^{\alpha,k} f^p(\alpha) \right] \quad (2.14) \end{aligned}$$

dır.

İspat. Ağırlıklı ters Hölder Eşitsizliği sayesinde,

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \geq \frac{1}{k^p \Gamma_k^p(\alpha)} \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} dt \right)^{1-\frac{1}{p}} \right]^p dx$$

$$= \frac{1}{k \Gamma_k(\alpha)} \int_a^b g^{-q}(x) \left[\left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} (J_a^{\alpha,k}(1))^{p-1} \right] dx$$

yazılır. Dolayısıyla, g fonksiyonunun azalmayanlığı ile integrasyon sınırının değiştirilmesiyle ve son olarak da aşağıdaki eşitsizliklerin düzenlenmesi ile istenen sonuca ulaşırız.

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \geq \frac{1}{k \Gamma_k(\alpha) \Gamma_k^{p-1}(\alpha+k)} \int_a^b g^{-q}(x) (x-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) dt \right) dx.$$

$$\int_a^b \frac{(J_a^{\alpha,k} f(x))^p}{g^q(x)} dx \geq \frac{1}{k \Gamma_k(\alpha) \Gamma_k^{p-1}(\alpha+k)} \int_a^b g^{-q}(b) (x-a)^{\frac{\alpha}{k}(p-1)} \left(\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f^p(t) dt \right) dx.$$

Dikkat. Yukarıdaki teoremde $k=1$ seçildiğinde [34] çalışmasındaki sonuçların bir genelleştirmesini elde ederiz.

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kesirli integral teorisi matematik ve mühendislik alanlarında ciddi bir çalışma alanına sahip bir konudur. Diferansiyel denklemlerin çözümünden gelen integrallerin davranışları ile ilgili olarak ortaya çıkmış olan Opial ve Hardy eşitsizlikleri son otuz yıldır önemli bir çalışma alanına sahiptir. Bu tezde biz kesirli integrallerin bir genelleşmesi olan k -kesirli integral ile Opial ve Hardy eşitsizliklerinin yeni bir yaklaşım ile ispatı verilerek bu tezden iki önemli çalışma elde edilerek yayınlanma aşamasına getirilmiştir.

Benzer düşünce ile yeni integral eşitsizlikleri için önemli bir yardımcı kaynak olarak oldukça faydalı bir çalışma olacağı kanaatindeyiz.



4. KAYNAKLAR

- [1] G. Anastassiou, "Opial type inequalities for vector valued functions", *Bulletin of Greek Mathematical Society*, vol. 55, pp. 1-8, 2008.
- [2] G. Anastassiou, M.R. Hooshmandasl, A. Ghasemi and F. Moftakharzadeh, "Montgomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities", *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, vol. 10, no. 4, 2009.
- [3] S. Belarbi and Z. Dahmani, "On some new fractional integral inequalities", *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, vol. 10, no. 3, 2009.
- [4] P.R. Beesack, "On an integral inequality of Z.Opial", *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 104, pp. 470-475, 1962.
- [5] Z. Dahmani, "New inequalities in fractional integrals", *International Journal of Nonlinear Scinece*, vol. 9, no. 4, pp. 493-497, 2010.
- [6] Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf, "Some fractional integral inequalities", *Nonl. Sci. Lett. A*, vol. 1, no. 2, pp. 155-160, 2010.
- [7] Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf, "New generalizations of Gruss inequality usin Riemann-Liouville fractional integrals", *Bull. Math. Anal. Appl.*, vol. 2, no. 3, pp. 93-99, 2010.
- [8] R. Gorenflo, F. Mainardi, "*Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order*", Wien, Austria: Springer Verlag, pp. 223-276, 1997.
- [9] G.H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, "*Inequalities*", 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1952.
- [10] D. S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities*, Berlin, Germany: Springer- Verlag, 1970.
- [11] S. Miller and B. Ross, "*An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*", New York, USA: John Wiley & Sons, 1993.
- [12] P. Maroni, "Sur l'inégalité d'Opial-Beesack", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, vol. 264, pp. A62-A64, 1967.
- [13] W. S. Cheung, "Some new Opial-type inequalities", *Mathematika*, vol. 37, pp. 136-142, 1990.
- [14] W .S. Cheung, "Some generalized Opial-type inequalities", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 162, pp. 317- 321, 1991.
- [15] Z. Opial, "Sur une inegaliti", *Ann. Polon. Math.*, vol. 8, pp. 29-32, 1960.
- [16] B. G. Pachpatte, "On Opial-type integral inequalities", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 120, pp. 547-556, 1986.
- [17] B. G. Pachpatte, "Some inequalities similar to Opial's inequality", *Demonstratio Math.* vol. 26, pp. 643-647, 1993.

- [18] B. G. Pachpatte, "A note on some new Opial type integral inequalities", *Octagon Math. Mag.* vol. 7, pp. 80-84, 1999.
- [19] B. G. Pachpatte, "On some inequalities of the Weyl type", *An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi*, vol. 40, pp. 89-95, 1994.
- [20] I. Podlubni, "*Fractional Differential Equations*", San Diego, America: Academic Press, 1999.
- [21] S. H. Saker, "New Hardy type inequalities via Opial inequalities", *arXiv:1112.4122v2[math.CA]*, 2011.
- [22] C. L. Mallows, An even simpler proof of Opial inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* vol. 16, pp. 173, 1965.
- [23] R. N. Pederson, On an inequality of Opial, Beesack and Levinson, *Proc. Amer. Soc.* vol.16, pp. 174, 1965.
- [24] J. Traple, "On a boundary value problem for systems of ordinary differential equations of second order", *Zeszyty Nauk. Univ. Jagiello. Prace Mat.*, vol. 15, pp. 159-168, 1971.
- [25] C. Olech, A simple proof of a certain result of Z. Opial, *Ann. Polon. Math.*, vol. 8, pp. 61-63, 1960.
- [26] A. Kufner and L.-E. Persson, "*Weighted Inequalities of Hardy Type*", Prague, Chzech Republic: WSPC, 2003.
- [27] R.P. Agarwal and P. H.Y. Pang, "*Opial Inequalities with Applications in Differential and Difference Equations*", Dordrecht, Netherlands: Springer, 2010.
- [28] C.-J. Zhao and W.-S. Cheung, "On Opial-type integral inequalities and applications", *Math. Inequal. Appl.* vol. 17, no. 1, pp. 223-232, 2014.
- [29] S. Abramovich, K. Knlic, J. Pecacard, E. Presson, "Some new refined Hardy type inequalities with general kernel and measures", *Aequat. Math.*, vol. 79, pp. 157-172, 2010.
- [30] R. Diaz, E. Pariguan, On hypergeometric functions and Pochhammer k- symbol, *Divulg. Math*, vol. 15, pp. 179-192, 2007.
- [31] R. Diaz, C. Ortiz, E. Pariguan, On the k- gamma q-distribution, *Cent. Eur. J. Math.*, vol. 8, pp. 448-458, 2010.
- [32] G. H. Hardy, Notes on a Theorem of Hilbert, *Math. Z.*, vol 6 , pp. 314-317,1920.
- [33] G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus, *Messenger Math.*, vol. 57, no. 3, pp. 12-16, 1928.
- [34] A. Khameli, Z. Dahmani, K. Freha, M. Z. Sarıkaya, New Riemann- Liouville generalizations for some inequalities of Hardy type, *Malaya J. Mat.*, vol. 4, no. 2, pp. 277-283, 2016.
- [35] C. G. Kokologiannaki, Properties and inequalities of generalized k- gamma, beta, zeta function, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 5, no. 14, pp. 653-660, 2010.
- [36] N. Levinson, Generalizations of an inequality of Hardy, *Duke Math. J.*, vol. 31, pp. 389-394, 1964.
- [37] N. Levinson, On an inequality of Opial- Beesack, *Proc. Amer. Soc.*, vol. 16, pp. 565-566, 1965.

- [38] S. Mubeen, G. M. Habibullah, k -fractional integrals and application, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 7, no. 2, pp. 89-94, 2012.
- [39] L. G. Romero, L. L. Luque, G. A. Dorrego, R. A. Cerutti, On the k - Riemann-Liouville fractional Derivative, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 8, no. 1, pp. 41-51, 2013.
- [40] M. Z. Sarikaya, H. Yildirim, Some Hardy type integral inequalities, *JIPAM Journal*, vol. 7, no. 5, Art. 178, pp. 1-5, 2006.
- [41] M. Z. Sarikaya, A. Karaca, On the k - Riemann- Liouville fractional integral and applications, *International Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 1, no. 3, pp. 33-43, 2014.
- [42] B. Sroysang, A generalization of some integral inequalities similar to Hardy's inequality, *Math. Aeterna*, vol. 3, pp. 593-593, 2013.
- [43] W. T. Sulaiman, Reverses of Minkowski's Hölder's and Hardy's integral inequalities, *Int. J. Mod. Math. Sci.*, vol. 1, no. 1, pp. 14-24, 2012.
- [44] S. Wu, B. Sroysang and S. Li, A further generalization of certain integral inequalities similar to Hardy' s inequality, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, vol. 9, pp. 1093-1102, 2016.
- [45] H. Yıldız , "Kesirli integraller ile ilgili bazı eşitsizlikler," Doktora tezi, Matematik Bölümü, Düzce Üniversitesi, Düzce, Türkiye, 2016.
- [46] M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik, On a new Hardy type inequalities involving fractional integrals via Opial type inequalities, Giresun, Türkiye, 2016.
- [47] M.Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik, T.Tunç, On Hardy type inequalities via k - fractional integrals, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, In press.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Candan CAN BİLİŞİK
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.06.1989- Karşıyaka
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : candancanbilisik@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik Bölümü	Ege Üniversitesi	2011
Lise	Fen –Matematik	Şemikler Lisesi	2006

YAYINLAR

1. M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik, On a new Hardy type inequalities involving farctional integrals via Opial type inequalities, 7-9 October, 2016, Giresun, Turkey.(Tam metin basılan bildiri)

2. M.Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik, T.Tunç, On Hardy Type İnequalities via k- fractional integrals, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, in press.

ULUSLARARASI KONFERANSLARDA / SEMPOZYUMLARDA SUNULAN MAKALELER

1. M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik, On a new Hardy type inequalities involving fractional integrals via Opial type inequalities, Xth International Statistics Days Conference- ISDC'2016 (IGS 2016),7-9 October, 2016, Giresun, Turkey.

2. M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik, and Tuba Tunç, On Hardy type inequalities via k-fractional integrals, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), 18-21 April 2017, Antalya, Turkey.