

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

**İŞBİRLİKÇİ OLMAYAN OYUNLARDA VE ÇİFT
TARAFLI EŞLEŞME PROBLEMLERİNDE
YORDAMSAL ADALET ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Aycan VARGÜN

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet Emin DALKILIÇ

Uluslararası Bilgisayar Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi : 15.12.2017

Bornova-İZMİR

2017

Aycan Vargün tarafından doktora tezi olarak sunulan “İşbirlikçi Olmayan Oyunlarda ve Çift Taraflı Eşleşme Problemlerinde Yordamsal Adalet Üzerine Bir Çalışma” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 15 Aralık 2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	: Prof. Dr. M. Emin DALKILIÇ	Mehmet E. Sallı
Raportör Üye	: Doç. Dr. Cem EVRENDİLEK	Cem Evrendilek
Üye	: Prof. Dr. Yalçın ÇEBİ	Yalçın Çebi
Üye	: Doç. Dr. Geylani KARDAŞ	Geylani Kardeş
Üye	: Doç. Dr. Orhan DAĞDEVİREN	Orhan Dağdeviren

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “İşbirlikçi Olmayan Oyunlarda Ve Çift Taraflı Eşleşme Problemlerinde Yordamsal Adalet Üzerine Bir Çalışma” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

15/12/2017



Aycan Vargün

ÖZET**İŞBİRLİKÇİ OLMAYAN OYUNLARDA VE ÇİFT TARAFLI
EŞLEŞME PROBLEMLERİNDE
YORDAMSAL ADALET ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

VARGÜN, Aycan

Doktora Tezi, Uluslararası Bilgisayar Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Emin Dalkılıç

Aralık 2017, 171 sayfa

Bu tezde oyunlarda yordamsal adalet kavramı oyun teorisi temelinde incelenmiştir. Sıfır toplamli normal form iki kişilik oyunlarda adalet kavramı araştırılmıştır. Ardından, yordamsal adaletli olmayan normal form ve mükemmel bilgi genişletilmiş form oyunların nasıl yordamsal adaletli hale getirilebileceğine ilişkin bir yöntem sunulmuştur.

Yordamsal adalet kavramı ile oyunlarda sonuçsal adaletin tanımına ilişkin çeşitli yaklaşımlar karşılaştırılmış ve bir sentez sunulmuştur. Ardından oyun dengelerinde adalet ve kararlılık arasındaki ilişki güncel literatür temelinde incelenerek, dengelerin kararlı ve adaletli olmasını garantileyen koşullar araştırılmıştır.

Son olarak çift taraflı kararlı eşleşme problemi için yordamsal adaletli ve sonuçsal adaletli eşleşme algoritmaları sunulmuştur. Üç başlık altında incelenen bu algoritmalar çalışma zamanı karmaşıklığı, sonucun kararlılığı, sonuçtaki eşitlikçilik, cinsiyet eşitlikçilik ve rank ortalamaları gibi çeşitli ölçütler kullanılarak analiz edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Yordamsal adalet, denge, kararlılık, çift taraflı kararlı eşleşme problemi.

ABSTRACT**A STUDY ON THE PROCEDURAL FAIRNESS IN NON-COOPERATIVE GAMES AND TWO-SIDED STABLE MATCHING PROBLEMS**

VARGÜN, Aycan

PhD in International Computer Department

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Emin Dalkılıç

December 2017, 171 pages

In this thesis, the procedural fairness concept in games is studied on the basis of game theory. The fairness concept in zero-sum normal form games with two players is investigated. Afterwards, a method regarding how procedurally unfair normal form and perfect information extensive form games can be transformed into procedurally fair games is presented.

The procedural fairness concept and various fairness approaches regarding the definition of end state fairness in games are compared and a synthesis is presented. Afterwards, the conditions which guarantees equilibria to be stable and fair are researched by studying the relation between fairness and stability in equilibria of games based on current literature.

Eventually, procedurally fair algorithms and algorithms with end state fairness are presented for two-sided stable matching problem. These algorithms which are examined under three headings are analyzed by using the measures such as runtime complexity, stability in results, egalitarianism, equitability and rank averages.

Keywords: Procedural fairness, equilibrium, stability, two-sided stable matching problem.

TEŞEKKÜR

Bu doktora tezi süresince bilgi ve görüşleriyle bana yol gösteren danışmanım sayın Prof. Dr. Mehmet Emin Dalkılıç hocama (Uluslararası Bilgisayar Enstitüsü, Ege Üniversitesi, Türkiye) en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez izleme jürim olarak görev yapan sayın Doç. Dr. Cem Evrendilek (Bilgisayar Mühendisliği, İzmir Ekonomi Üniversitesi, İzmir) ve sayın Doç. Dr. Orhan Dağdeviren'e (Uluslararası Bilgisayar Enstitüsü, Ege Üniversitesi, Türkiye) değerli önerileri ve katkıları için teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xx
1. GİRİŞ VE TEZİN AMACI	xxii
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	3
2.1 Oyun Tanımı ve Nash Dengesi.....	3
2.2 Minimax Teoremi	5
2.3 Simetrik Oyun.....	6
2.4 Kararlı Eşleşme Problemi.....	7
2.5 Kararlı Eşleşme Probleminde Adalet.....	9
2.6 Adaletin Oyuncu Davranışlarına Etkisi	11
2.7 Ültimatom Oyunu Üzerine Deneysel Bir Çalışma	13
2.8 Tartışma.....	16
3. OYUNLARDA YORDAMSAL VE SONUÇSAL ADALET.....	17
3.1 Giriş.....	17

Sayfa

3.2 Sıralı Oyunların Yordamsal Adaletli Hale Getirilmesi.....	20
3.3 Sonlu Popülasyon Evrimsel Kararlı Stratejiler (FPES)	23
3.4 Oyun Uygulamaları.....	31
3.4.1 Ültimatom oyunu	31
3.4.2 Diktatörlük oyunu	34
3.4.3 Bazı ultiatom oyununu çeşitleri.....	34
3.4.4 Eşzamanlılaştırılan sıralı oyun örnekleri.....	39
3.4.5 Eşzamanlılaştırılmış oyunlarda ceza fonksiyonları	48
3.4.6 Karma FPES uygulaması	55
3.5 Sonuçlar.....	57
4. KARARLI EŞLEŞME PROBLEMİNDE YORDAMSAL VE SONUÇSAL ADALET.....	59
4.1 Giriş.....	59
4.2 İkili Arama Algoritması Şeklinde Çalışan Sınırlandırılmalı Algoritmalar	60
4.2.1 Algoritma 1	60
4.2.2 Algoritma 2	64
4.3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmalar	64
4.3.1 Algoritma 1	66
4.3.2 Algoritma 2	70

Sayfa

4.3.3 Algoritma 3	71
4.4 Sonuncu İyileştirmeli Algoritma	74
4.4.1 Tekdüze Dağılım için Ortalama Çalışma Zamanı	76
4.5 Algoritma Başarım Sonuçları	82
4.6 Sonuçlar	87
5. DENGİ, ADALET VE KARARLILIK	90
5.1 Giriş	91
5.1.1 Ardışık denge (SE)	92
5.1.2 Titreyen el mükemmel dengesi (THPE)	99
5.1.3 Mükemmel ve uygun denge (PE ve PRE)	104
5.1.4 Alt oyun mükemmel dengesi (SPE)	106
5.1.5 Geriye doğru ve ileriye doğru tümevarım (BI ve FI)	107
5.1.6 Evrimsel olarak kararlı strateji (ESS)	110
5.1.7 Korelasyon dengesi (CE)	111
5.2 Mertens'in Kararlı Denge Tanımı	112
5.3 Pazarlık Oyunları	117
5.4 Tartışma	118
6. GENEL SONUÇLAR VE TARTIŞMA	127

Sayfa

EKLER.....	137
------------	-----



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Ültimatom ve diktatörlük oyunu test sonuçları (Forsythe et al., 1991).	12
Şekil 2.2 Deney çeşitleri tablosu (Croson, 1996).....	14
Şekil 2.3 Deney sonuçları tablosu (Croson, 1996).....	15
Şekil 3.1 Örnek bir genişletilmiş form oyun.....	21
Şekil 3.2 Örnek bir sıralı oyun (I).....	24
Şekil 3.3 FPESS dengesi olmayan örnek oyun.....	26
Şekil 3.4 $N = 4$ için örnek bir ültimatom oyunu (I).....	31
Şekil 3.5 Şekil 3.4'teki oyunun FPESS'leri.....	31
Şekil 3.6 $N=6$ için örnek ültimatom oyunu ağacı.....	32
Şekil 3.7 Şekil 3.6'daki oyunun FPESS'leri.....	32
Şekil 3.8 $N = 4$ için örnek bir ültimatom oyunu (II).	33
Şekil 3.9 Örnek bir diktatörlük oyunu.....	34
Şekil 3.10 Firmaların pazara giriş oyunu (Spaniel, 2011).	39
Şekil 3.11 Savaşa girme oyunu (Spaniel, 2011).....	40
Şekil 3.12 Geyik ve tavşan avlama oyunu (Spaniel, 2011).	41
Şekil 3.13 Cinsiyetlerin savaşı oyunu (Spaniel, 2011).....	42
Şekil 3.14 Eşleşen paralar oyunu (Spaniel, 2011).....	42

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.15 Köprüyü yakma oyunu (Spaniel, 2011).	43
Şekil 3.16 Eli kolu bağlı oyunu (Spaniel, 2011).	44
Şekil 3.17 Taşınan adam ve polis oyunu (Spaniel, 2011).	45
Şekil 3.18 Taşınan adam ve polis oyunu değiştirilmiş hali (Spaniel, 2011).	45
Şekil 3.19 Sivil savaş oyunu (Spaniel, 2011).	46
Şekil 3.20 Kontrat oyunu (Spaniel, 2011).	46
Şekil 3.21 Korsanların oyunu (Spaniel, 2011).	47
Şekil 3.22 Korsanların oyunu basitleştirilmiş normal formu (Spaniel, 2011).	47
Şekil 4.1 Algoritmanın örnek bir çalışma rotası (I).	60
Şekil 4.2 Algoritmanın birinci bölümü	61
Şekil 4.3 Algoritmanın ikinci bölümü	62
Şekil 4.4 Mcvitie ve Wilson'dan (1971) alıntılanan örnek problem ve çözümleri.	63
Şekil 4.5 Algoritmanın örnek bir çalışma rotası (II).	64
Şekil 4.6 3x3'lük örnek bir problem ve çözümü.	66
Şekil 4.7 Algoritma 2'nin kararlı çözüm bulana kadar ortalama çalışma sayısı ...	74
Şekil 4.8 Matlab'de Çizelge 4.2'nin eğri uyarlama sonuçları.	81
Şekil 4.9 Erkeklerin eşleştiği kişileri tercih etme sırası ortalaması.	83
Şekil 4.10 Kadınların eşleştiği kişileri tercih etme sırasının ortalaması.	84

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.11 Erkek ve kadınların eşleştiği kişileri tercih etme sıralarının toplamı ortalaması.	85
Şekil 4.12 Erkeklerin rank toplamı ile kadınların rank toplamı arasındaki ortalama fark.	86
Şekil 4.13 SI ve ESMA algoritmasına dair eğri uyarlama örneği.	87
Şekil 4.14 Deneysel ve teorik sonuç karşılaştırmasına dair veriler.	87
Şekil 5.1 Oyun teorisinde bazı çözüm konseptleri (Wikipedia, 2017a).	91
Şekil 5.2 Örnek bir sıralı oyun (II).	92
Şekil 5.3 Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alıntılanan örnek oyun (I).	93
Şekil 5.4 Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alıntılanan örnek oyun (II).	95
Şekil 5.5 Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alıntılanan örnek oyun (III). ...	97
Şekil 5.6 Osborne ve Rubinstein'de (1994) sayfa 253'den alıntılanan örnek oyun.	101
Şekil 5.7 Leyton-Brown ve Shoham'dan (2008) alıntılanan örnek oyun.	107
Şekil 5.8 İleriye doğru tümevarımı anlatmak için örnek bir oyun (Spaniel, 2011).	109
Şekil 5.9 Kohlberg ve Mertens'ten (1986) alıntılanan örnek oyun (I).	113
Şekil 5.10 Kohlberg ve Mertens'ten (1986) alıntılanan örnek oyun (II).	114
Şekil 5.11 Kohlberg ve Mertens'ten (1986) alıntılanan örnek normal form oyun.	116
Şekil 5.12 Örnek bir ultimatòm oyunu.	119

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 Kaleci ve golcü oyunu normal formu (Leyton-Brown and Shoham, 2008).	5
Çizelge 2.2 Taş kâğıt makas oyunu normal formu (Spaniel, 2011).	7
Çizelge 3.1 Şekil 3.1’deki örnek oyunun eşzamanlılaştırma matrisi.	22
Çizelge 3.2 Şekil 3.2’deki oyunun eşzamanlılaştırma matrisi.	25
Çizelge 3.3 Şekil 3.3’te yer alan oyunun eşzamanlılaştırma matrisi.	26
Çizelge 3.4 Örnek bir normal form oyun ve oyuncu fayda değeri farkları.	27
Çizelge 3.5 Rastgele paylaşım yapılan örnek bir ültimatom oyunu.	36
Çizelge 3.6 Diktatörlük oyununun eş zamanlılaştırılmış bir versiyonu.	37
Çizelge 3.7 Örnek bir armağan değiş-tokuş oyunu.	38
Çizelge 3.8 Çizelge 3.7’deki oyununun eşzamanlılaştırılmış hali.	38
Çizelge 3.9 Çizelge 3.7’deki oyununun cezalandırma içeren eşzamanlılaştırılmış hali.	39
Çizelge 3.10 Şekil 3.1’deki oyunun verilen z_1, z_2, z_3 ’e göre eşzamanlılaştırma matrisi.	49
Çizelge 3.11 f fonksiyonu sonrası örnek matris.	50
Çizelge 3.12 Rabin adalet tanımı uygulan Çizelge 3.10’deki matrisin son hali. ..	52
Çizelge 3.13 Çizelge 3.12’deki matrise (2). f fonksiyonu uygulandığında matrisin son hali.	54

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.14 Örnek bir Normal form oyun (I).	55
Çizelge 3.15 Karma Nash ve FPESS olasılıkları ile oyuncuların fayda değerleri	56
Çizelge 4.1 3 erkek ve 3 kadının olduğu örnek problemde tercih matrisi.	69
Çizelge 4.2 Sonuncu iyileştirme algoritması ortalama tur sayısı.	80
Çizelge 5.1 Wikipedia'dan (2017b) alıntılanan örnek oyun.	100
Çizelge 5.2 Şekil 5.6'daki sıralı oyunun etmen normal formu.	103
Çizelge 5.3 Myerson'dan (1978) alıntılanan örnek oyun.	104
Çizelge 5.4 Örnek tutsak ikilemi.	110
Çizelge 5.5 Tardos'dan (2004) alıntılanan tavuk oyunu.....	111
Çizelge 5.6 Leyton-Brown ve Shoham'dan (2008) trafik ışıkları oyunu.	112
Çizelge 5.7 Şekil 5.9'daki oyunun $x = 0$ iken etmen normal formu.....	116
Çizelge 5.8 Şekil 5.12'deki oyunun normal formu.	119
Çizelge 5.9 Örnek bir normal form oyun (II).	123
Çizelge 5.10 EK 4'teki tekrarlı tutsak ikilemi oyunlarının normal formu.....	125
Çizelge 5.11 Tercih sırasına göre hazırlanmış normal form.	126
Çizelge 5.12 Normal formdaki sayıların 4'ten çıkarılmış hali.	126

KISALTMALAR DİZİNİ

BI	Backward Induction
CE	Correlated Equilibrium
EO	Erkek Optimal Çözüm Bulan Gale-Shapley
ESMA	Equitable Stable Matching Algorithm
ESS	Evolutionary Stable Strategy
FI	Forward Induction
FPESS	Finite Population Evolutionary Stable Strategy
IS	Information Set
KO	Kadın Optimal Çözüm Bulan Gale-Shapley
PE	Perfect Equilibrium
PRE	Proper Equilibrium
RMSE	Root Mean Squared Error
SE	Sequential Equilibrium
SI	Sonucu İyileştirmeli Algoritma
SPE	Subgame Perfect Equilibrium
SSE	Sum of Squares Due to Error
THPE	Trembling Hand Perfect Equilibrium

1. GİRİŞ VE TEZİN AMACI

İnsanlar birbirleriyle iş birliği ya da rekabet içeren etkileşimler yaşarlar. Bu etkileşim davranışlarına da yansır. Taraflar bu etkileşim içinde en iyisini yapabilmek için stratejiler kurarlar. Etkileşim bittiğinde en çok faydayı elde etmek için stratejilerin iyi düzenlenmesi gerekir. Bu düzenlemelerin nasıl olacağını belirlemek için etkileşim içindeki parçaların nasıl davranacağını önceden kestirmek önemlidir. Bu bizi oyun kuramına götürür. Bu kuram stratejilerin nasıl kurulacağından, tarafların davranışları ile ilgili varsayımların mantıksal gerekliliklerini gözlemlemeye ve anlamaya kadar birçok konuyu inceler. Son yüzyılda, John Nash'in işbirlikçi olan ve işbirlikçi olmayan kuramsal modeller arasında ayırıştırma yapması ve rasyonel davranış kavramları yaratması ile oyun kuramında anlamlı ilerlemeler görülmüştür (Watson, 2013).

Oyun, iki ya da daha fazla tarafın, bazı şartlar altında kendi amaçlarına erişmek için çeşitli kararlar verdikleri bir aktivitedir (Osborne M., 2003).

Adalet ise, hukuk, oyun, matematik, sosyal bilimler, insan ilişkileri vb. gibi hayatın birçok alanında karşımıza çıkan ve ilgili olduğu konuya göre farklı anlamları olan bir kavramdır. Oyunlarda adalet kavramı ile ilgili bugüne kadar birçok çalışma yapılmıştır (Rabin, 1993), (Moulin, 1997), (Forsythe et al., 1991). Bu doktora tezinin temel konularından biri oyunlarda adalet kavramıdır. Oyunlarda adalet kavramı, oyun sırasında yordamsal adalet ve oyun sonucuna dair olarak sonuçsal adalet şeklinde iki başlık altında araştırılmıştır.

Tez önerisine uygun olarak bu doktora tezi beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde tezde kullanılacak kavramlara dair literatür özeti bulunmaktadır. Üçüncü bölümde oyunlarda yordamsal ve sonuçsal adalet tanımları yapılmış, bu kavramların gerektirdiği koşullar belirtilmiş, çeşitli adalet tanımları ile oyun dengeleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. FPESS (ing. *Finite Population Evolutionary Stable Strategy*) ve karma FPESS dengesi tanımı yapılmıştır. Karma FPESS'in sonlu oyunculu ve sonlu stratejili oyunlarda varlığı kanıtlanmıştır. Dördüncü bölümde bazı yordamsal ve sonuçsal adaletli kararlı eşleşme algoritmaları önerilmiş, uygulamaları mevcut algoritmalarla karşılaştırılarak analiz edilmiş ve farklı ölçütler kullanılarak performans karşılaştırması yapılmıştır. Beşinci bölümde ise oyunlarda adalet kavramları ile dengelerin kararlılığı arasındaki ilişki irdelenmiştir. Kararlı denge tanımı verilmiş ve gerçek hayatta karşımıza çıkmadığı durumlar örneklendirilerek bir tartışma

başlatılmıştır. Bu tartışmada rasyonalite temelli yaklaşımın kararlılık kavramındaki yeri sorgulanmıştır.

Tez çalışması kapsamında yapılan yayınlara ilişkin özet bilgi EK 1’de verilmiştir.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde tezin ileriki aşamalarında karşımıza çıkacak temel kavramlar, tanımlar ve teoremler sunulacaktır. Oyun teorisindeki ilerlemeleri anlamak amacıyla Von Neuman ve John Nash'in teorilerinden bahsedilecektir. Ardından, kararlı eşleşme problemini daha iyi anlamak için gereken tanım ve teoremler sunulacaktır. Sonrasında, bu verilere adalet kavramına dair bazı çalışmalar ve örnekler eklenecektir.

2.1 Oyun Tanımı ve Nash Dengesi

İçinde her bir kişinin sonlu sayıda saf stratejisinin olduğu n elemanlı kümeye n kişilik oyun denir. Karma strateji (İng. *Mixed Strategy*) oyuncunun saf stratejilerini çeşitli olasılıklarla oynadığı karma bir stratejidir. Bir i oyuncusunun stratejilerini bir doğal sayıya dönüştüren fonksiyona u_i fayda fonksiyonu denir (Nash, 1951).

Oyuncular hamlelerini sırayla ya da eş zamanlı yapabilirler. Örneğin satranç sırayla oynanan bir oyun iken, taş-kâğıt-makas oyunu eş zamanlı oynanan bir oyundur. Eş zamanlı oynanan oyunlar normal form ile tanımlanır.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ oyuncular kümesi

A_i i . oyuncunun oyunda yapabileceği tüm hamleler kümesi olmak üzere

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ bir hamle profili

$u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ i . oyuncunun fayda fonksiyonu ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ bir fayda fonksiyonu profili olsun,

Bu durumda $\langle N, A, u \rangle$ normal formda bir oyundur.

Tanım 2.1: Nash'e (1951) göre n oyunculu bir oyunda i . oyuncunun yapacağı hamle a_i olsun. Diğer oyuncuların i . oyuncunun bu hamlesine karşı yapacağı hamlelere de $a_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ diyelim. Oyunda $a = (a_i, a_{-i})$ hamle profili olur. Oyunda i . oyuncunun yapacağı a_i^* hamlesi, ancak ve ancak her $a_i \in A_i$ için $u_i(a_i^*, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$ ise a_i^* hamlesi i . oyuncunun a_{-i}

hamlelerine verebileceği en iyi yanıttır. Buna en iyi yanıt (İng. *Best Response*, kısaca *BR*) denir (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Tanım 2.2: Nash'e (1951) göre $a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ hamle profili, ancak ve ancak her i için $a_i \in BR(a_{-i})$ ise saf Nash dengesidir (İng. *Pure Nash Equilibrium*) (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Tanım 2.3: s_i ve s_i^* stratejileri i . oyuncunun oynayabileceği iki strateji olsun. S_{-i} de diğer oyuncuların i . oyuncuya karşı oynayabilecekleri tüm strateji profilleri kümesi olsun.

Her $s_{-i} \in S_{-i}$ için $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i})$ ise s_i stratejisi s_i^* stratejisini güçlü olarak ezer (İng. *Strictly Dominating*) (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Her $s_{-i} \in S_{-i}$ için $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^*, s_{-i})$ ise s_i stratejisi s_i^* stratejisini zayıf olarak ezer (İng. *Weakly Dominating*) (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Örnek: Nash'in saf strateji denge tanımına (Bkz. Tanım 2.1 ve Tanım 2.2) dair ilginç bir örnek Nagel'de (1995) bulunmaktadır. Bu örnek eş zamanlı oynanan bir oyun içermektedir. Bu oyuna göre bir grup insan 0 ile 100 arasından bir sayı söyleyecektir, dolayısıyla oyuncuların hamle kümesi 0 ile 100 arasında bir sayı söylemektir (0 ve 100 dahil). Herkes sayı söyledikten sonra, söylenen tüm sayıların ortalaması alınacaktır. Bu ortalamanın $2/3$ 'üne en yakın sayıyı söyleyen kişi oyunu kazanacaktır. Oyuncuların tümü oyun kuralını bilmektedir.

Öncelikle oyunu kazanmak isteyen oyuncuların ortaya çıkacak ortalamaı göz önüne almaları ve 0 ile $100 \times 2/3 = 66.67$ arasında bir sayı söylemeleri gerekir. Çünkü oyundaki herkes 100 dese bile, bunun $2/3$ 'ü 66.67 olduğundan, oyunu kazanmak için en fazla bu sayı söylenebilir. Bu stratejiden yola çıkarsak, oyuncuların 0 ile 66 arasında bir sayı söylemesini bekleriz. Bu durumda sayı ortalaması en fazla 66.67 olacaktır. Bu yüzden kazanmak için 0 ile $66.67 \times 2/3 = 44.45$ arasında bir sayı söylemek gerekir. Bu stratejiyi devam ettirirsek 0 sayısında oyun dengeye varır. Tüm oyuncuların rasyonel olduğu ortamda, bir oyuncu 0 dediğinde onu bu karardan vazgeçirecek rasyonel bir dürtü kalmaz. Çünkü daima ortalamanın $2/3$ 'ü alındığından 0'dan büyük her sayının $2/3$ 'ü kendisinden küçüktür ve söylediğiniz sayının $2/3$ 'ünü söyleyen bir oyuncu sizden daha avantajlı olur. Ancak 0 derseniz kimse daha küçük bir sayı söyleyemez. Bu oyunda Nash dengesi tüm oyuncuların sayı olarak 0 demesidir.

Ancak oyun incelendiğinde sonuçların $50 \times 2/3$ ile $50 \times (2/3)^2$ arasında toplandığı gözlemlenmiştir. Oyuncular genelde başlangıç noktasını 50 olarak düşünüp stratejiyi bir veya iki basamak ilerletmişlerdir.

2.2 Minimax Teoremi

Minimax teoremi Von Neumann tarafından ortaya atılmış, çok önemli bir teoremdir. Bu teoremin yer aldığı Von Neumann’a (1928) göre iki oyunculu sıfır toplamlı sonlu bir oyunda öyle bir V değeri ve her bir oyuncuya ait öyle bir karma strateji vardır ki,

- Birinci oyuncu bu strateji ile ikinci oyuncu ne yaparsa yapsın, en az V kadar fayda kazanır.
- İkinci oyuncu bu strateji ile birinci oyuncu ne yaparsa yapsın en fazla V kadar fayda kaybeder.

Tanım 2.4: Bir i oyuncusunun kendi en kötü durum fayda değerini maksimize ettiği stratejiye **maxmin** stratejisi denir. Bir i oyuncusunun rakip j oyuncusunun en iyi fayda değerini minimize ettiği stratejiye **minmax** strateji denir (Von Neumann, 1928).

Herhangi bir Nash dengesinde, bir oyuncunun maxmin fayda değeri, minmax fayda değerine eşittir. Maxmin strateji profilleri ve minmax strateji profilleri Nash dengesidir, ortaya çıkan fayda değerleri de eşittir ve buna uygun bir örnek Leyton-Brown ve Shoham’da (2008) yer almaktadır:

Çizelge 2.1 Kaleci ve golcü oyunu normal formu (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Gölcü \ Kaleci	L	R
	L	R
L	0.6, 0.4	0.8, 0.2
R	0.9, 0.1	0.7, 0.3

Örnek: (Leyton-Brown and Shoham, 2008) Bir kaleci ile golcü karşılıklı oyun oynarken, solak olup olmamalarına göre oyunda kazanacakları fayda değeri Çizelge 2.1’deki gibi olsun. Gölcünün minimum fayda değerini maksimize etmek

için oynayacağı strateji s_1 , kalecinin oynayacağı strateji s_2 olsun. $s_1(L)$ golcünün solak olması olasılığı olsun. Bu durumda elde edeceğimiz fayda değeri fonksiyonu,

$$\begin{aligned} & \min_{s_2} [s_1(L)s_2(L) \cdot 0.6 + s_1(L)s_2(R) \cdot 0.8 + s_1(R)s_2(L) \cdot 0.9 \\ & \quad + s_1(R)s_2(R) \cdot 0.7] \\ & = \min_{s_2} [s_1(L)s_2(L) \cdot 0.6 + s_1(L)(1 - s_2(L)) \cdot 0.8 + (1 - s_1(L))s_2(L) \\ & \quad \cdot 0.9 + (1 - s_1(L))(1 - s_2(L)) \cdot 0.7] \\ & = \min_{s_2} [(0.2 - s_1(L) \cdot 0.4) \cdot s_2(L) + (0.7 + s_1(L) \cdot 0.1)] \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin s_2 'ye göre türevini aldığımızda elde ettiğimiz $s_1(L) = 1/2$ ve $s_1(R) = 1/2$ değerleri, golcünün minimum fayda değerini maksimize etmesi için stratejilerini oynaması gereken olasılıktır. Aynı denklemin s_1 'e göre türevini aldığımızda ise, kalecinin golcünün maksimum fayda değerini minimize etmek istediğinde oynaması gereken strateji olasılıklarını yani minmax stratejisini buluruz (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

İki oyunculu, sıfır toplamli oyunlarda bir adalet tanımı yapılmıştır. V değerine sıfır toplamli oyunlarda oyun değeri denir ve sıfır toplamli bir oyunda oyun değeri 0 ise o oyuna adaletli denir. V değeri sıfıra eşit değilse bir oyuncu için pozitifdir ve oyun o oyuncuya iltimas geçmektedir (Waner, 2017).

2.3 Simetrik Oyun

Bir oyundaki sonuç kimin oynadığına değil, sadece oynanan stratejilere bağlıysa o oyunlara simetrik oyun denir. Normal formdaki bir oyunda oyuncuların strateji uzayları aynı ise oyun simetriktir (Cheng et al., 2004):

Tanım 2.5: $\forall i, j \in N$ için S_i ve S_j strateji uzayı olmak üzere, $S_i = S_j$ ise ve $u_i(s_i, s_{-i}) = u_j(s_j, s_{-j})$ ise oyun simetriktir (Cheng et al., 2004).

Teorem: Sonlu, iki oyunculu, simetrik, sıfır toplamli oyunlarda her bir oyuncunun dengedeki beklenen fayda değeri sıfırdır (Spänhel, 2011).

Çizelge 2.2 Taş kâğıt makas oyunu normal formu (Spaniel, 2011).

2.oyuncu 1.oyuncu	Taş	Kâğıt	Makas
Taş	0,0	-1,1	1,-1
Kâğıt	1,-1	0,0	-1,1
Makas	-1,1	1,-1	0,0

Ancak, oyundaki sıfır fayda değerleri, Nash dengesine ulaştıran değerler olmayabilir. Örneğin Çizelge 2.2’de yer alan (0,0) içeren hücreler Nash dengesi değildir. Taş-kâğıt-makas oyununda dengeye ulaşmak için karma strateji uygulamak gerekir (Spaniel, 2011).

İki oyunculu normal form oyunlarda her iki taraf da aynı stratejiyi uygularsa, aynı sonucu almaları için, oyunun normal form matrisinin köşegenindeki her bir hücrede yer alan değerlerin birbirine eşit olması gerekir.

Sonlu, iki oyunculu, sıfır toplamı oyunlarda denge noktalarına eyer noktaları (İng. *Saddle Points*) denir. Bir eyer noktası, oyunun normal form matrisinde bulunduğu satırın minimumu ve bulunduğu sütunun maksimumudur. Bir oyunda birden fazla eyer noktası olabilir, ancak hepsi aynı olmak zorundadır (Dresher, 1981).

2.4 Kararlı Eşleşme Problemi

Kararlı eşleşme problemi, tek taraflı ve çift taraflı olmak üzere iki çeşittir. Tek taraflı kararlı eşleşme problemi kararlı oda arkadaşı problemi olarak da anılan, tek bir kümedeki elemanlarla kararlı eşleşme oluşturulmaya çalışılan problemidir. Çift taraflı kararlı eşleşme probleminde ise iki küme vardır ve her iki kümedeki elemanların karşı kümedeki elemanlara dair bir tercih sırası vardır. Problemden bu tercih sırası kullanılarak kararlı çözüm elde edilmeye çalışılır (Gale and Shapley, 1962). Bu tezde kararlı eşleşme problemi olarak anılan problem, kararlı evlilik problemi de denilen çift taraflı kararlı eşleşme problemidir.

Gale ve Shapley 1962 yılında kararlı eşleşme problemini çözen bir algoritma sunmuştur. Bu algoritma oluşturulurken, kolejler ile kolejlere başvuran adaylar

arasında, adayların kolejlere atanması araştırılmıştır. Kolej ve adayların birbirlerini tercih etme sıraları vardır. Bu tercihlere çözüm üretmek amaçlanır. Çözümün kararlılık tanımı şöyle yapılmıştır (Gale and Shapley, 1962):

Tanım 2.6: a kişisi A kolejinde olsun. Bu a kişisi B kolejini A 'ya tercih ediyorsa, b kişisi de B 'de iken A 'yı B 'ye tercih ediyorsa o zaman bu kolej atamaları kararlı değildir. Burada (a, B) ve (b, A) , eşleşmeleri (a, A) ve (b, B) çiftlerinin oluşmasını engelleyen çiftlerdir (İng. *Blocking Pair*) (Gale and Shapley, 1962).

Bu atamalar eşit sayıda eleman içeren iki küme için düşünülebilir. Örneğin kadın ve erkek kümesinde her bir bireyin karşı kümedeki elemanlar için bir tercih etme sırası olduğunda, bu iki kümeden oluşturulacak bir kararlı eşleşme, mutlaka vardır (Gale and Shapley, 1962).

Teorem: Kararlı eşleşme probleminde her zaman en az bir kararlı eşleşme vardır (Gale and Shapley, 1962).

Kanıt: Erkekler sırayla kendi ilk tercihlerine teklif göndersin. Bir kadına birden fazla teklif gelmiş olabilir. Bu durumda kadınlar, teklif gönderen erkekler içinden en öncelikli tercihi kim ise şimdilik onun teklifini kabul eder, diğerlerini reddeder.

İkinci turda, ilk turda reddedilen tüm erkekler, sıradaki tercihlerine teklif yaparlar. Bu turda da birden fazla teklif alan kadın, boşta ise gelen tekliflerden öncelikli olanı kabul eder, diğerlerini reddeder. Boşta değilse ve teklif gönderenler arasında şu anki eşinden daha iyi bir tercihi varsa, eski eşleşmeyi bozar ve daha iyi tercihi ile yola devam eder, yoksa şu anki eşi ile devam eder. Bu teklif gönderme işlemleri, her bir erkek için kendisine teklif gönderilmemiş kadın kalmayana kadar devam eder. Bir erkek bir kadına sadece bir kere teklif gönderebilir. Sonuçta elde edilen eşleşme kümesi kararlıdır. Farz edelim ki bu eşleşme kararlı olmasın. Öyle bir (a, b) (a : erkek, b : kadın olsun) çifti vardır ki bu kümeye ait değildir ve a b 'yi kümedeki eşine, b de a 'yı kümedeki eşine tercih eder. Ancak böyle bir (a, b) çiftinin olması imkânsızdır. Çünkü a bu teklif gönderme işlemleri sırasında b 'ye bir kere teklif göndermiştir, b ise onu reddetmiştir ve daha iyi bir tercihi ile birlikte olmuştur. Sonuçta b şu an, a 'ya göre daha iyi bir tercihi ile birlikte; b 'nin içinde bulunduğu çiftin bozulması için b 'ye daha iyi bir teklif gelmelidir, a b 'nin şu andaki eşinden daha iyi olamaz çünkü geçmişte reddedilmiştir (Gale and Shapley, 1962).

İşte bu prosedür Gale-Shapley kararlı eşleşme algoritmasıdır. Bu algoritma sadece kararlı değil aynı zamanda erkekler için en iyi olan eşleşmedir, yani erkek-optimaldir. Burada teklif edenler erkekler olduğundan erkekler için optimal eşleşme ortaya çıkmaktadır. Algoritma kadınlar teklif edecek şekilde çalıştırıldığında da kadınlar için optimal eşleşme ortaya çıkar, sonuç kadın-optimal olur (McVitie and Wilson, 1971).

Teorem: Bir kararlı eşleşme probleminde, herhangi bir kararlı çözüm, kadınlar için, erkek-optimal çözümdekinden daha kötü olamaz (McVitie and Wilson, 1971).

Kanıt: Farz edelim ki bir erkek-optimal çözümde (m, w) diye bir çift olsun. Öyle bir kararlı eşleşme olsun ki bu eşleşmedeki (k, w) çiftinde w , m 'yi, k 'ya tercih etsin, yani erkek-optimal çözümdeki eşini bu çözümdekine tercih etsin. Bir erkek için en iyi eşleştirme erkek-optimal çözümde ortaya çıktığından m de w 'yi diğer kadınlara tercih eder. Bu durumda, (k, w) çifti oluşamaz çünkü kararlı değildir, bu çift olur, bozulur ve (m, w) çifti oluşur. Yani böyle bir kararlı eşleşme yoktur. Ayrıca erkek-optimal ya da kadın-optimal olmayan diğer tüm çözümler, erkekler ve kadınlar için bu iki çözümün arasında yer alır (McVitie and Wilson, 1971).

Gale-Shapley algoritmasının en kötü durum karmaşıklığı $O(n^2)$ olmakla birlikte girdi boyutu düşünüldüğünde alt sınırı da $\Omega(n^2)$ 'dir. Bununla birlikte girdinin tümünü bilmeyi gerektirmeyen daha hızlı bir algoritma da yoktur. Kararlı eşleşme probleminin işlemsel karmaşıklığının alt sınırı da $\Omega(n^2)$ 'dir. N adet kadın ve n adet erkekte oluşan bir kümeden elde edilen eşleşmenin kararlı olup olmadığını belirlemek için gereken işlem karmaşıklığı alt sınırı da $\Omega(n^2)$ 'dir (Ng, 1989).

2.5 Kararlı Eşleşme Probleminde Adalet

Daha önce bazı adalet tanımları yapılmıştır. Adalet kavramı kararlı eşleşme problemi için de tanımlanabilir. Rawls'a (1971) göre adaletli bir sonuç meydana geldiğinde bu sonucun ortaya çıkmasına neden olan şey sadece ve sadece prosedürün kendisi ise o oyun yordamsal olarak adaletlidir.

Kararlı eşleşme probleminde adalet, çözüm için üretilen algoritmalar üzerinde tanımlanabilir. Buna benzer bir örnek Klaus ve Klijn'de (2006) yer

almaktadır. Kararlı eşleşme bulan prosedürün herhangi bir noktasında, tüm oyuncular hamle yapmak için eşit olasılığa sahipse o eşleştirme mekanizması yordamsal olarak adaletlidir. Bu makalede kararlı eşleşme problemi için iki mekanizma sunulmuştur ve bu mekanizmaların örnek problemlerde bir tarafa iltimas geçtiği gösterilmiştir. Birinci mekanizma piyango ile işe alma (İng. *Employment By Lotto*), ikincisi ise rastgele sıra mekanizmasıdır (İng. *Random Order Mechanism*).

Piyango ile işe alma adlı kararlı eşleşme mekanizmasında bir problemin tüm kararlı çözümlerini önceden bildiğimiz varsayılır. Varsayalım ki örnek bir kararlı eşleşme probleminde tüm kararlı çözümler bir kümeye konulsun. Rastgele bir oyuncu alınır, olabilecek en iyi tercihi ile eşleştiği kararlı eşleşmeler bulunur. En iyi tercihi ile eşleşmediği bütün kararlı eşleşmeler elenir. Sonra kendisi ve eşleştirildiği kişi hariç kalan oyuncular arasından yeni bir oyuncu alınır, kalan kümede bu yeni oyuncunun olabilecek en iyi tercihi ile eşleştiği kararlı eşleşmeler bulunur, en iyi tercihiyle eşleşmediği kararlı eşleşmeler elenir. Bu işlem, sürekli budadığımız tüm kararlı eşleşmeler kümesinde tek eleman kalana kadar devam eder.

İkinci mekanizma ise rastgele sıra mekanizmasıdır. Bu mekanizma için tüm kararlı eşleşmeleri önceden bilmeye gerek yoktur. Öncelikle boş bir oda olsun ve tüm oyuncular da odanın dışında olsun. Oyuncular rastgele bir sırayla odaya teker teker girerler. Odaya oyuncu girmeden önce oda kararlı haldedir, ancak yeni bir oyuncu odaya girince bu kararlılık bozulabilir. Kararlılık bozulduğunda oda yeniden kararlı hale getirilir. Dışarıda oyuncu kalmayınca kadar bu işlem devam eder, sonlu sayıda işlem sonucunda kararlı bir eşleşme elde edilir.

Piyango ile işe alma mekanizmasının bir özelliği tam bilgi (İng. *Complete Information*) özelliğinin gerekmesidir. Doğru çözüme ulaşmak için tüm kararlı eşleşmeler kümesini bilmek gerekir. Bir diğer özellik ise kukla oyuncudan bağımsız olma (İng. *Independence of Dummy Agents*) özelliğidir. Bir kümede tüm kararlı eşleşmelerin görülme olasılığı, içindeki kimseyle eşleşmeyen oyuncular çıkartıldığında değişmiyorsa, o mekanizma kukla oyuncudan bağımsız olma özelliğine sahiptir.

Makaleye göre kararlılık kavramını göz ardı etmeden adaleti tanımlayabilmek için olasılık tabanlı bir kararlı eşleşme mekanizması düşünülebilir. Bir kararlı eşleşme probleminde M erkekler kümesi, W kadınlar

kümesi, P tüm oyuncuların tercih profili ve $S(P)$ problemin tüm kararlı çözümlerini içeren küme olsun. Bu mekanizma, herhangi bir (M, W, P) eşleşme problemine, $S(P)$ kümesi üzerine bir $P(M, W, P)$ olasılık dağılımı atayabilir.

Teorem: Roth'a (1982) göre, $N = M \cup W$ olmak üzere, tüm $i \in N$ için, ve tüm $\mu, \mu^* \in S(P)$ için, $\mu(i) = i$ ise o zaman aynı zamanda $\mu^*(i) = i$ olur. Başka bir deyişle, herhangi bir eşleşmede hiç kimseyle eşleşemeyen bir eleman varsa, o eleman diğer eşleşmelerde de hiç kimseyle eşleşemez (Klaus and Klijn, 2006).

Rastgele sıra mekanizmasında ise kararlı eşleşme elde etmek için tüm kararlı eşleşmeleri bilmeye ihtiyaç yoktur. Bu açıdan piyango ile işe alma mekanizmasından avantajlıdır. Ancak bu mekanizma kukla oyuncudan bağımsız olma özelliğini sağlamaz. Kukla elemanları çıkartarak elde ettiğimiz çözüm ile çıkartmadan elde ettiğimiz çözümler farklı olabilir, dolayısıyla karşımıza çıkma olasılıkları farklı olabilir.

Makaleye göre sonuç olarak bu iki mekanizmada son durumda her iki tarafın da uzlaşabileceği kararlı eşleşmeler ortaya çıkabilir. Ancak, birçok iki taraflı eşleşme problemlerinde herhangi bir tarafa iltimas geçmeyen bir mekanizma yapılamaz (Klaus and Klijn, 2006).

2.6 Adaletin Oyuncu Davranışlarına Etkisi

Pazarlık içeren oyunlar oyun kuramında bir araştırma konusudur. Bu oyunlardan birisi ultimat oyunudur. Oyunda iki oyuncu vardır, bunların x miktarında parayı paylaşmaları istenir. Bölme miktarı birinci oyuncunun isteğine bağlıdır. Birinci oyuncu ikinci oyuncuya x 'ten bir pay sunar. İkinci oyuncu kendisine sunulan payı kabul ederse, her iki oyuncu da kendilerinde kalan payı alır. Kabul etmezse, iki oyuncu da para alamaz. Bir diğer oyun ise diktatörlük oyunudur. Bu oyun ultimat oyunu ile benzerdir. Ancak, tek fark ikinci oyuncunun kendisine sunulan teklifi reddetme seçeneği olmamasıdır, ikinci oyuncu kendisine verilen payı kabul etmek zorundadır.

Bu iki oyunu da içeren bir deney yapılmıştır. Forsythe et al.'da (1991) yer alan deneyde sunulan tekliflerde ve tekliflerin miktarlarında, adaletli paylaşım yapmanın oyuncuları ne kadar teşvik ettiği araştırılmıştır.

Deney için bazı hipotezler geliştirilmiştir. İlk olarak “Birinci oyuncuların 0\$’dan daha fazla miktardaki tekliflerinin tek nedeni oyuncuların adalet ile ilgili kaygıları olsaydı, ultimatör ve diktatörlük oyunlarındaki teklif dağılımları aynı olurdu” hipotezi araştırılmıştır. Alt oyun mükemmel dengesine göre (İng. *Subgame Perfect Equilibrium*) birinci oyuncu ultimatör ve diktatörlük oyununda ikinci oyuncuya 0\$ teklif etmelidir (Osborne M. , 2003).

İkinci hipotez ise ödeme şekli ile ilgili bir hipotezdir. Oyun başlangıçta gerçek para ile oynanmıştır, sonra da para ödenmeden oynanmıştır. Her iki durumda da oyun sonuçlarının dağılımlarının aynı olması beklenmektedir.

Yapılan deneyde *A* ve *B* odaları vardır ve her odada 8 kişi bulunmaktadır. *A*’daki her oyuncu *B*’deki bir oyuncuya teklif sunmaktadır. Deney iki kere tekrarlanmıştır. Elde edilen dağılım sonuçlarını incelemek için çeşitli istatistiksel testler uygulanmıştır.

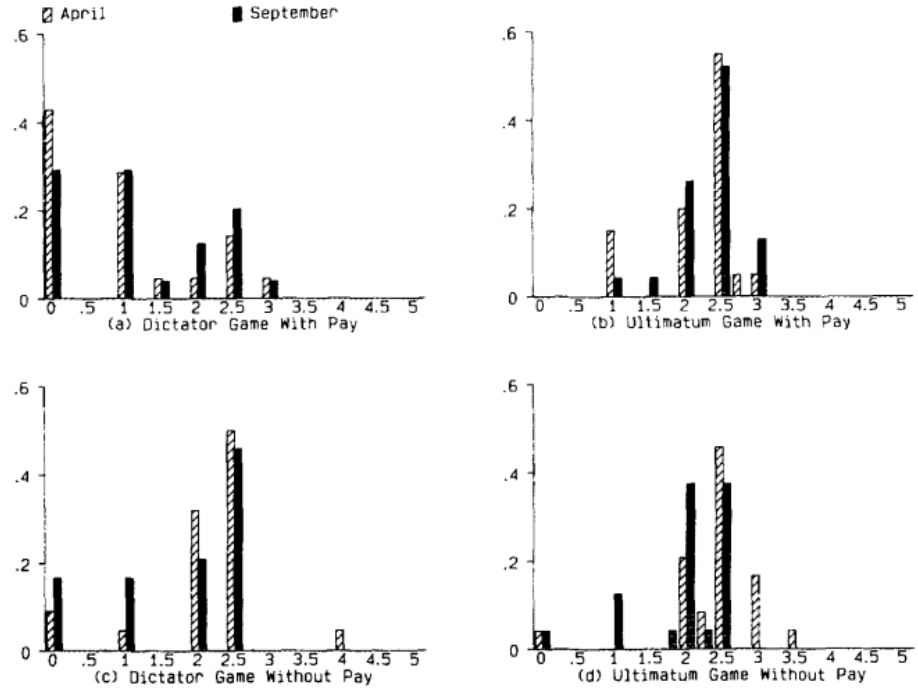


FIG. 1. Histograms of April and September proposals. Each histogram measures the amount of the proposal in dollars on the horizontal axis and the fraction of proposals of this amount on the vertical axis.

Şekil 2.1 Ültimatör ve diktatörlük oyunu test sonuçları (Forsythe et al., 1991).

Test sonuçlarına göre, paralı ve parasız diktatörlük oyunu ile paralı ültimatom oyunu tekrarlanabilir (İng. *Replicable*) çıkmıştır. Paralı ültimatom ve diktatörlük oyununda teklif dağılımları ile ilgili test sonuçlarına göre birinci hipotezin gerçekleşmediği ortaya çıkmıştır. Yani oyuncular farklı teklifler yapmıştır ve paralı ültimatom oyununda, paralı diktatörlük oyununa göre çok daha cömert davranmışlardır. Diktatörlük oyununda oyuncuların %36'sı karşı tarafa 0\$ teklif etmişken, ültimatom oyununda hiç kimse bütün parayı almaya kalkmamıştır (Bkz. Şekil 2.1).

Parasız oyunlarda ise oyuncuları teşvik edecek para faktörü olmadığından, diktatörlük oyunu ile ültimatom oyununun sonuçlarının farklı olmasını beklemek için gerçekçi bir neden yoktur. Bununla birlikte, iki farklı deneyde ortak bir sonuç çıkmadığından parasız ültimatom ve diktatörlük oyunu ile ilgili olarak ilk hipotezin geçerli olup olmadığı gösterilememiştir.

İkinci hipotezde gerçek paranın kullanılmasının oyun sonuçlarına etkisi incelenmiştir. Diktatörlük oyununda oyun sonuçlarının değiştiği görülmüştür. Oyunculara gerçekten ödeme yapıldığında, oyuncular daha bencil davranmış ve karşı tarafa, parasız oynanan diktatörlük oyununa göre daha az para teklif etmiştir. İkinci hipotez diktatörlük oyununda çökmüştür. Ültimatom oyununun paralı ve parasız oynanması ise sonucu değiştirmemiştir. İkinci hipotez ültimatom oyununda gerçekleşmiştir.

Son olarak da 5\$'lık para miktarı 10\$'a çıkarılmış ve aynı deneyler tekrar yapılmıştır. Para miktarı değişse de oyuncuların davranışlarının iki durumda da özdeş oldukları görülmüştür. Ültimatom ve diktatörlük oyunlarında oyuncu davranışları aynı çıkmamıştır. Bazı oyuncular karşı tarafın teklifini beğenmediklerinde teklifi reddetmişlerdir. Bazı oyuncular bu reddedilme riski nedeniyle riskin hiç olmadığı duruma göre farklı davranmışlardır. Sonuç olarak adalet duygusu oyuncuların bazı davranışlarını açıklamaya yetmemektedir.

2.7 Ültimatom Oyunu Üzerine DeneySEL Bir Çalışma

Ültimatom oyununda oyun teorisinde beklenen sonuçların deneylerde karşımıza çıkmamasının arkasında yatan neden bir araştırma konusudur. Oyuncuların davranışlarında adalet ve tehdit algısı araştırılmaktadır. Croson'da (1996) ültimatom oyunu üzerine bir deney bulunmaktadır. Deneyde tekelci (İng. *Monopolist*) ve alıcı (İng. *Buyer*) olmak üzere iki taraf vardır. Klasik ültimatom

oyununda para teklif edilen oyuncu tüm paranın ne kadar olduğunu ve kendisine ne kadar para kaldığını bilmektedir.

Table 1
Treatments

	Responder's information about pie size	
	Informed	Uninformed
Dollars	\$I	\$U
Offer made in percentage	%I	%U

Şekil 2.2 Deney çeşitleri tablosu (Croson, 1996).

Makalede 4 özellik içeren deney yapılmıştır. Şekil 2.2’de bu özellikler yer almaktadır.

- $\$I$ deneyin dolar üzerinden yapıldığını ve teklif edilen oyuncunun tüm paranın ne kadar olduğunu bildiğini göstermektedir (İng. $I=informed$).
- $\$U$ deneyin dolar üzerinden yapıldığını ama teklif edilen oyuncunun tüm paranın ne kadar olduğunu bilmediğini göstermektedir (İng. $U=uninformed$).
- $\%I$ deneyin yüzdeler üzerinden yapıldığını ve teklif edilen oyuncunun tüm paranın ne kadar olduğunu bildiğini göstermektedir (İng. $I=informed$).
- $\%U$ deneyin yüzdeler üzerinden yapıldığını ama teklif edilen oyuncunun tüm paranın ne kadar olduğunu bilmediğini göstermektedir (İng. $U=uninformed$).

Örneğin deneyde teklif edilen oyuncuya tüm paranın $10\$$ olduğu söylenmişse, bu bir $\$I$ deneyidir. Ama örneğin teklif edilen oyuncuya paranın $\%100$ olduğu söylenmişse ve kendisine de $\%x$ ($0 \leq x \leq 100$) verilmişse bu $\%I$ deneyidir.

Makaledeki deneyde 4 adet hipotez ortaya konmuştur:

1. $\%I$, $\%U$, $\$I$, $\$U$ ’da teklif eden ve kendisine teklif edilen oyuncuların davranışları birbiriyle özdeş ve SPE (İng. *Subgame Perfect Equilibrium*) olmalıdır.

2. $\$I$ ve $\%I$ ’daki teklif eden oyuncuların davranışları birbiriyle ve kendisine teklif edilen oyuncuların davranışları da birbiriyle özdeş olmalıdır (Bolton, 1991).

3. Bir diğer hipotez oyuncular için fayda değerlerinin bağıllığı ile ilgilidir. (Ochs ve Alvin'e (1989) göre teklif edilen oyuncuların bir mutlak kabul eşiği (İng. *Absolute Threshold*) vardır. Maddi para olarak önce onu elde etmeyi amaçlarlar. Bütün payın boyutu bu analize girmez. Bu durumda $\$I$, $\$U$, $\%I$ 'daki teklif eden oyuncuların davranışları birbiriyle ve kendisine teklif edilen oyuncuların davranışları da birbiriyle özdeş olmalıdır.

4. Son hipotez ise fayda değerlerinin oranlarının oyunculardaki algısı ile ilgilidir. Ochs ve Alvin'e (1989) göre teklif edilen oyuncuların aklında paylaşılacak tüm paraya dair bir yüzde değeri vardır. Bu değer, teklif edilen oyuncunun yüzde olarak teklifi minimum kabul yüzdesi eşiğidir (İng. *Percentage Threshold*). Bu durumda $\$I$, $\%U$, $\%I$ 'daki teklif eden oyuncuların davranışları birbiriyle ve kendisine teklif edilen oyuncuların davranışları da birbiriyle özdeş olmalıdır.

Table 2
Means, standard deviations and sample sizes of observed offers

	Responder's information about pie size	
	Informed	Uninformed
Offers made in dollars	$\$I$ \$4.50 (1.07) $n=28$	$\$U$ \$3.57 (1.56) $n=26$
Offer made in percentage	$\%I$ \$4.20 (1.67) $n=28$	$\%U$ \$3.92 (1.51) $n=29$

Şekil 2.3 Deney sonuçları tablosu (Croson, 1996).

Oyunların sonucunda $\$I$ 'da toplam para \$10 ve teklif ortalaması \$4,5'dır (Bkz. Şekil 2.3). Ancak, $\$U$ 'da teklif ortalamasının \$3.57 olduğu görülmüştür, bu değer $\$I$ 'daki teklif ortalamasından düşüktür.

Teklifler 1. ve 3. hipotezi çökertmiştir. $\$I$ ve $\$U$ özdeş değildir. Tekliflere verilen cevaplar incelendiğinde $\%I$ 'da öngörülememiş bir durum gerçekleşmiştir. Bu oyunda cevap veren oyuncuların talepleri diğer oyunlara göre yüksek çıkmıştır. En çok ret bu oyunda görülmüştür. $\%I$ ve $\$I$ özdeş olmadığından 2. ve 4. hipotez çökmüştür. 4. hipotez teklife cevap veren oyuncuların teklifleri kabul edeceği mutlak bir yüzde eşiği olduğunu belirtmekle birlikte, $\%I$ ve $\$I$ 'nın bu hipoteze göre özdeş olması bekleniyordu. Ancak $\%I$ oyununda teklifleri kabul edecek oyuncular daha yüksek oranda ret cevabı vermişlerdir. Buna, adaletsizliğin belirginleşmesiyle

birlikte, oyuncuların adaletsizliğe tepki vermesinin neden olduğu düşünülmektedir (Tversky and Slavic, 1988) (Croson, 1996).

2.8 Tartışma

Tez kapsamında en çok tartışılacak konular denge teorileri, oyunlarda adalet kavramı ve kararlı eşleşme problemidir. Bu nedenle öncelikle bu bölümde eşzamanlı oynanan normal oyunlara dair bir tanım ve teoriler sunulmuştur. Bu teoriler Von Neuman tarafından ortaya atılan Minimax Teoremi (Bkz. Tanım 2.4) ile John Nash tarafından ortaya atılan Nash Dengesi (Bkz. Tanım 2.1 ve Tanım 2.2) teoremidir. Ardından tezde araştırılacak olan adalet kavramına dair bazı çalışmalar sunulmuştur. Adalet tanımı kararlı eşleşme problemlerinde de uygulanabilir olduğundan adalet tanımı ve bu problemleri içeren yordamsal adalet yaklaşımı sunulmuştur. Son olarak adalet kavramının oyuncuların strateji seçimindeki etkisine dair iki araştırma ve ilgili deneyler anlatılmıştır. Ancak oyunlar sadece eşzamanlı oynanan normal form oyunlardan ibaret değildir. Oyunlar aynı zamanda oyun geçmişini oyuncuların tam olarak bilmesi ve bilmemesi, eşzamanlı ya da sıralı oynanması, tekrarlı ya da tek sefer oynanması ve benzeri şekillerde sınıflandırılabilir. Tezde sadece normal form oyunlar değil, sıralı, mükemmel bilgi olmayan oyunlar da araştırılmıştır. Örneğin pazarlık oyunları sıralı oynanan oyunlardandır ve 5. bölümde tanımıyla ve tartışılacak yönleriyle ele alınmıştır.

3. OYUNLARDA YORDAMSAL VE SONUÇSAL ADALET

3.1 Giriş

Bu bölümde oyunlarda yordamsal ve sonuçsal adaletin tanımı yapılarak oyunların adaletli olması için hangi koşullara sahip olması gerektiği araştırılmıştır. Bazı eşzamanlı ve sıralı oynanan, ancak adaletli olmayan oyunlar yapılan değişikliklerle adaletli hale getirilmiştir. Ayrıca oyunların yordamsal olarak adaletli hale getirilmesinin sonuca etkisi araştırılmıştır. Örneğin Van den Bos et al.'a (1998) göre, oyuncular bir oyunda söz sahibi otoritenin güvenilirliği ile ilgili bir şey bilmediklerinde, oyun yordamsal olarak adaletli ise sonuca daha pozitif yaklaşmaktadırlar. Burada bir prosedürün yordamsal adaletli olması, prosedürün herhangi bir oyuncuyu kayırmaması, herhangi bir oyuncuya avantaj sağlamaması anlamındadır.

Sıralama olarak başlangıçta tez boyunca kullanılacak bazı tanımlar verilmiştir, ardından eşzamanlılaştırma işlemi ile sıralı oyunların yordamsal adaletli hale getirilmesi anlatılmıştır. Eşzamanlılaştırma işlemi oyuncuların kendilerini karşılarındakinin yerine koyarak düşünmesini temel almaktadır. Bu işlem normal form oyunda görmesi ve uygulaması kolay olduğundan burada sadece sıralı oyunlar üzerinden anlatılmıştır. Ardından oyunlarda cezalandırma davranışı çeşitli adalet tanımları üzerinden incelenmiştir ve bazı cezalandırma içeren yordamsal adaletli yaklaşım örnekleri sunulmuştur.

Bir oyunun yordamsal olarak adaletli olabilmesi için tüm oyuncuların aynı oyun kısıtlarına sahip olması gerekir. Sıralı oynanan oyunlarda ise ilk hamleyi yapan oyuncu çoğu oyunda daha avantajlıdır. Bazı oyunlarda ise dezavantajlıdır. Örneğin satranç oyununda ilk oynayan beyaz oyuncunun deneysel olarak avantajlı olduğu görülmektedir (Suetin, 1968). Tavla, go, diktatörlük ve daha birçok oyunda ilk oynayan oyuncu avantajlıdır. Örneğin, ultimat oyununun SPE'sinde (ing. *Subgame Perfect Equilibrium*) gördüğümüz sonuç, deneysel olarak karşımıza çıkmaz. Bu davranışın temeli araştırma konusudur. Ayrıca oyuncular adaletsizliği cezalandırma davranışı içine girmiş olabilirler. Bu durumda oyunun adaletli bir dengeye ulaşabilmesi için çeşitli kural tanımlamaları yapılabilir. Örneğin ultimat oyunu eş zamanlı hale getirilebilir. Her iki oyuncu da birbirlerine teklif sunarlar. Daha az bencil davranan oyuncunun teklifi kabul edilir. Bu durumda her iki oyuncu da eşit paylaşım yapmaya zorlanmış ve teklif edileni dezavantajlı konuma düşürmemek için oyun bu noktada dengeye ulaşmış olur.

Oyunda yordamsal adalet, oyuncuların aynı strateji kümesine sahip olması ve her bir strateji için oyuncuların o stratejiyi seçme imkânının olması olarak yorumlanabilir. Bu durumda strateji kümeleri her oyuncu için eşit olmayan oyunlar yordamsal olarak adaletli olamaz. Strateji kümelerinin aynı olmasını engelleyen durumlar, bir oyunun yordamsal olarak adaletli olmasını da engeller. Mükemmel bilgi genişletilmiş form bir oyunda (İng. *Perfect Information Extensive Form*) oyuncuların strateji kümeleri eşit olamaz. Çünkü ilk hamleyi sadece bir oyuncu yapabilir. Ayrıca bir oyun beraberlik ile bitemiyorsa oyuncuların strateji kümeleri eşit olamaz. Çünkü aynı stratejiyi oynayan oyuncuların berabere kalması gerekir.

Tanım 3.1: Bir G oyununda $\{1, 2, \dots, N\}$ oyuncular kümesi olsun. $\forall i$ için S_i i. oyuncunun strateji kümesi olsun. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ için $S_i = S_j$ ise, yani tüm oyuncuların strateji kümeleri eşitse oyun yordamsal olarak adaletlidir.

Tanım 3.2: Bir oyun yordamsal olarak adaletli ise sonuçsal olarak da adaletlidir.

Yordamsal adaletin olmadığı durumda seçilen adalet ölçütüne göre sonuçta öznel bir adalet olup olmadığına bakılabilir. Daha önce sonuçsal adaletle dair bazı tanımlar da yapılmıştır.

Tanım 3.3: Moulin'e (1997) göre bir G oyununda $\{1, 2, \dots, N\}$ oyuncular kümesi olsun. $\mathcal{E}$ bir oyunda ortaya çıkabilecek tüm sonuçları içeren küme olsun. R ise bir oyun sonucu $z \in \mathcal{E}$ için oyuncuların sonuçtan duydukları refahın profili olsun, tüm R 'leri içeren küme $\mathcal{R}$ olsun. Sonuçsal adalet, bir z sonucu ile onun üstünde tanımlı $(r_1, \dots, r_N) = R$ refah profili hakkındaki yargıdır.

Bir z sonucunun adil olup olmaması R refah profiline bağlıdır. Seçilen adalet ölçütüne göre bu yargı hesaplanır ve o adalet kriterini taşıyıp taşıyamamasına göre sonuçsal adaletin olup olmadığı belirlenir.

Yine aynı makaleye göre, yordamsal adalet, bir G oyunu ile ilgili yargıdır. Oyunun nasıl oynandığı ve hangi sonuca erişildiği önemli değildir. Yordamsal adalet için oyunun kuralları ve prosedürün kendisi temeldir. Örneğin loto oyununda hiçbir sonuç adaletsiz olarak tanımlanamaz. Bununla birlikte yordamsal olarak adaletli bir oyunda adaletsiz görülen bir sonuç ortaya çıkabilir. Örneğin tek bir oyuncunun tüm maliyeti üstlendiği gönüllü katılım içeren bir kamu malı (İng. *Public Good*) oyunu bunlardan biridir. Adaletsiz bir prosedür adaletli görünen bir

sonuca yol açabilir, örneğin böl ve seç metodu ile bir pastanın oyuncular arasında herkesin memnun olacağı şekilde bölünmesi bunlardan biridir. İyi niyetli bir hakem, bir oyuncuyu seçer ve o kişi pastayı böler. Seçilen kişi stratejik olarak avantajlıdır, ancak pastayı oyuncular arasında haset olmayacak şekilde böldüğünden sonuç adaletli görünür.

Kararlı eşleşme problemi düşünüldüğünde, Gale-Shapley'nin ertelenmiş kabul prosedürü yordamsal olarak adaletli değildir. Çünkü sadece bir kümedeki elemanların diğer kümeye teklif etme hakkı vardır. Kararlı eşleşme probleminde kararlı çözüm için algoritmanın yordamsal adaletli olmasına gerek yoktur.

Satranç oyununda deneysel olarak yapılan gözlemlere göre beyaz taşlarla oynayan oyuncu stratejik olarak avantajlıdır (Streeter, 1946). Birbirine çok yakın güçte iki oyuncu arasından siyah taşlarla oynayan oyuncu oyunu kaybettiğinde sonuca itiraz edebilir ve beyaz taşlarla oynarsa kazanacağını iddia edebilir. Satranç, sıralı oynanan bir oyun olduğundan iki oyuncunun strateji kümeleri eşit değildir. Dolayısıyla yordamsal olarak adaletli değildir.

Genişletilmiş form sıralı oyun tanımı

Oyun teorisinde kullanılan tanımlar Leyton-Brown ve Shoham'dan (2008) alınmıştır.

Genişletilmiş formda (İng. *Extensive Form*) mükemmel bilgi bir oyun $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ şeklinde tanımlanır. Burada,

N : oyuncu sayısı

A : hamle kümesi (tüm oyuncular için ortak bir tanedir)

H : seçilen düğüm (oyun ağacında yaprak olmayan tüm düğümler)

χ : hamle fonksiyonu (her seçilen düğüme bir hamle kümesi atar) $\chi: H \rightarrow 2^A$

ρ : oyuncu fonksiyonu (seçilen düğümde hangi oyuncunun oynayacağını bildirir) $\rho: H \rightarrow N$

Z : yaprak düğümler kümesi

σ : halef (İng. *Successor*) fonksiyonu (bu fonksiyon seçilen bir düğümü ve o düğümde yapılan hamleyi girdi olarak alır, sonucunda yeni bir düğüm $h \in H$ ya da yaprak düğümü $z \in Z$ çıktı olarak verir. Eğer $\sigma(h_1, a_1) = \sigma(h_2, a_2)$ ise $h_1 = h_2$ ve $a_1 = a_2$ demektir) $\sigma: H \times A \rightarrow H \cup Z$

u : fayda (İng. *Utility*) fonksiyonu (oyuncuların her birinin oyun sonunda kazanacağı fayda değerini belirler) $i \in \{1, \dots, N\}$ için $u = (u_1, \dots, u_N)$ ve $u_i: Z \rightarrow \mathbb{R}$

Genişletilmiş formda mükemmel bilgi oyunlarda saf strateji tanımı

Strateji bir oyunda oyuncunun ne yapacağını önceden belirlenmesidir. $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ mükemmel bilgi genişletilmiş form bir oyun olsun. Oyundaki i oyuncusunun oynayabileceği tüm saf stratejiler kümesi, kendisinin hamle yapacağı her bir düğümdeki hamle kümelerinin Kartezyen çarpımıdır.

$$\prod_{h \in H \wedge \rho(h)=i} \chi(h)$$

Normal form eşzamanlı oyun tanımı

Sonlu n oyunculu eş zamanlı bir oyun (N, A, u) şeklinde tanımlanır.

N : oyuncu sayısı

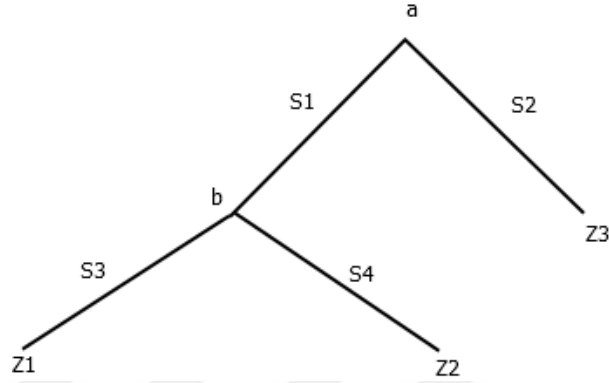
A : i . oyuncunun hamle kümesi A_i olmak üzere $A = A_1 \times \dots \times A_N$ 'dir. $a = (a_1, \dots, a_n)$ bir hamle profilidir.

u : fayda fonksiyonudur ve her bir oyuncunun oyun sonunda elde edeceği fayda değerini belirler. $u = (u_1, \dots, u_N)$ olmak üzere u_i fonksiyonu i . oyuncunun fayda fonksiyonudur.

3.2 Sıralı Oyunların Yordamsal Adaletli Hale Getirilmesi

Sıralı oyunlar yordamsal adaletli değildir. Bunu aşmak için bu tez çalışması kapsamında yeni bir yöntem önerilmiş ve sıralı oyunların yordamsal adaletli hale gelmesi üzerine çalışılmıştır.

Öncelikle genişletilmiş form bir oyunun normal form haline dönüştürülmesine, indüklenmiş (İng. *Induced*) normal form oyun denir. Burada yapılacak olan bundan farklıdır. Sıralı oynanan oyunlarda oyuncuların strateji kümeleri eşit olamaz. Bu yüzden sıralı oynanan oyunlar yordamsal adaletli olamaz. Sıralı oynanan oyunları yordamsal adaletli hale getirmek için tüm oyuncuların aynı strateji kümesine sahip olmasını sağlamak gerekir.



Şekil 3.1 Örnek bir genişletilmiş form oyun.

Örneğin iki kişilik sıralı bir oyun öncesinde, oyuncuların ilk hamleyi yapan oyuncu olup olmayacaklarını bilmediğini düşünelim. Bu durumda oyuncular ilk hamleyi yapacak olan ve ikinci hamleyi yapacak olan pozisyonların her birine göre önceden strateji belirleyebilirler. Bu durumda strateji kümeleri eşit olur. Üzerinde anlatılacak örnek Şekil 3.1’de yer almaktadır.

Burada oyuncular a ve b ’dir. Oyun ağacındaki yaprak düğümler $\{z_1, z_2, z_3\}$ ’tür. a oyuncusunun oynayabileceği saf stratejilerin kümesi $S_a = \{s_1, s_2\}$ ve b oyuncusunun oynayabileceği saf stratejilerin kümesi $S_b = \{s_3, s_4\}$ ’tür.

S kümesi oyuncuların saf strateji kümelerinin Kartezyen çarpımı olsun.

$$S = S_a \times S_b = \{(s_1, s_3)(s_1, s_4)(s_2, s_3)(s_2, s_4)\}$$

S kümesindeki her bir eleman, bir oyuncunun a iken ve b iken oynayacağı stratejiyi gösterebilir. Yani örneğin $(s_1, s_3) \in S$ için, bir oyuncu a iken s_1 , b iken s_3 stratejisini oynayacağını gösterebilir.

İki oyunculu genişletilmiş form bir oyunda bir oyuncu S kümesinden bir eleman seçebilir. Birinci oyuncu (s_1, s_3) , ikinci oyuncu da (s_2, s_4) seçtiğinde iki tane oyun ortaya çıkar:

Birinci oyuncu a iken s_1 ve ikinci oyuncu b iken s_4 oynar. Bu durumda oyun ağacına bakarsak z_2 sonucu ortaya çıkar. Bu birinci oyundur.

İkinci oyuncu a iken s_2 ve birinci oyuncu b iken s_3 oynar. Bu durumda oyun ağacına bakarsak z_3 sonucu ortaya çıkar. Bu ikinci oyundur.

Çizelge 3.1 Şekil 3.1'deki örnek oyunun eşzamanlılaştırma matrisi.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	(z_1, z_1)	(z_2, z_1)	(z_1, z_3)	(z_2, z_3)
(s_1, s_4)	(z_1, z_2)	(z_2, z_2)	(z_1, z_3)	(z_2, z_3)
(s_2, s_3)	(z_3, z_1)	(z_3, z_1)	(z_3, z_3)	(z_3, z_3)
(s_2, s_4)	(z_3, z_2)	(z_3, z_2)	(z_3, z_3)	(z_3, z_3)

Fayda fonksiyonu kullanılarak $u([s_1, s_3][s_2, s_4]) = \{z_2, z_3\}$ şeklinde gösterilebilir. S kümesini normal form bir oyunun hamle kümesi A olarak düşünelim. Oyun matrisi Çizelge 3.1'de yer almaktadır. Bu matriste yapılan eşzamanlılaştırma işlemi aşağıdaki gibi formülize edilebilir.

$G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ iki oyunculu sonlu mükemmel bilgi genişletilmiş form bir oyun olsun. $S_a = \prod_{h \in H \wedge \rho(h)=a} \chi(h)$ ve $S_b = \prod_{h \in H \wedge \rho(h)=b} \chi(h)$ ise a ve b oyuncularının oyundaki saf strateji kümeleri olsun.

S : S kümesi a ve b oyuncularının saf strateji kümelerin Kartezyen çarpımı olsun.

$$S = S_a \times S_b, s \in S: s = (s_a, s_b), s_a \in S_a, s_b \in S_b$$

(bir kişi a oyuncusu olduğunda s_a , b oyuncusu olduğunda s_b stratejisi oynar)

$N = \{a, b\}$ oyuncular kümesi olsun.

$A = S \times S, S = S_a \times S_b$ hamle kümesi olsun ve her bir oyuncu için eşit olsun.

Burada birinci oyuncu için $a_1 \in A: a_1 = (s_a^1, s_b^1)$ olsun ve ikinci oyuncu için $a_2 \in A: a_2 = (s_a^2, s_b^2)$ olsun.

Birinci oyuncu a iken s_a^1, b iken s_b^1 stratejisi oynasın.

İkinci oyuncu a iken s_a^2, b iken s_b^2 stratejisi oynasın.

Bu durumları birleştirirsek iki adet oyun elde ederiz. Birinci oyun $[s_a^1, s_b^2]$ sonucunda ortaya çıkar. İkinci oyun $[s_a^2, s_b^1]$ sonucunda ortaya çıkar. Bu şekilde ortaya çıkabilecek tüm sonuçlar kümesi M olsun.

u^* : fayda fonksiyonu ve Z oyun ağacının tüm yaprak düğümler kümesi olmak üzere $u^*: S \rightarrow M \subseteq Z \times Z, u^*((s_a^1, s_b^2), (s_a^2, s_b^1)) = \{z_x, z_y\}$ olsun.

Tanım 3.4: (G, S, u^*) , G oyununun eşzamanlılaştırılmasıdır.

3.3 Sonlu Popülasyon Evrimsel Kararlı Stratejiler (FPESS)

Sıralı oyunlarda eşzamanlılaştırma matrisinde her iki oyuncunun da oynayacağı strateji kümeleri aynıdır. Schaffer'da (1988) sonlu popülasyonlarda evrimsel kararlı stratejilerle ilgili yeni bir tanım yapmıştır. Bu tanıma göre bir oyunda bir stratejinin kazandıracığı fayda değerleri diğer tüm stratejilerden büyükse ya da onlara eşitse bu stratejilere sonlu popülasyon evrimsel kararlı strateji denir.

Tanım 3.5: S, n oyunculu simetrik bir oyunda bir oyuncunun strateji kümesi olsun. Eğer tüm $s^* \in S$ stratejileri için $u(s, s^*) \geq u(s^*, s)$ ise, s sonlu popülasyon evrimsel kararlı bir stratejidir (İng. *Finite Population Evolutionary Stable Strategy*) (FPESS) (Schaffer, 1988) (Schaffer, 1989).

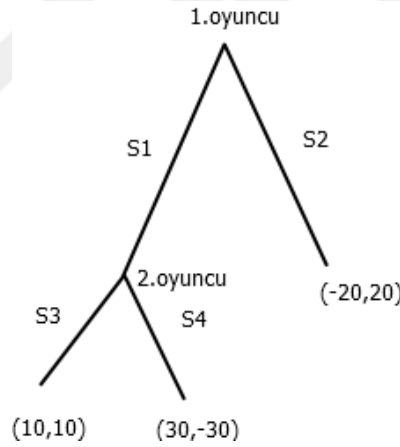
Tanım 3.5, simetrik oyunlarda geçerlidir. Ancak asimetrik oyunlara uygulanacak şekilde genişletilebilir ve sıralı oyunların indüklenmiş normal formuna uygulanabilir.

Tanım 3.6: S_i n oyunculu indüklenmiş normal form bir oyunda i oyuncusunun strateji kümesi olmak üzere, $\forall j$ için $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_j(s_j, s_{-j})$ ise $s_i \in S_i$ bir FPESS'dir.

Tanım 3.7: Bir oyun sonucunda tüm s_i stratejileri FPESS ise $(s_1, \dots, s_n)$ bir FPESS dengesidir.

Tanım 3.6 ve Tanım 3.7 sıralı oyunların eşzamanlılaştırma matrisine de uygulanabilir. S strateji kümesi olmak üzere eşzamanlılaştırma matrisinde bir $s_i \in S$ stratejisi düşünelim. Bu strateji matriste i . satırda olsun. Bu satırda bulunan tüm hücreleri düşünelim, bu hücrelerin her birisinde iki tane sonuç bulunur. Bu hücreleri alıp bir küme oluşturalım ve bu küme H olsun.

Eğer bu kümede yer alan her hücrenin içindeki (u_1, u_2) ve (v_1, v_2) sonuçları için matris köşegenleri hariç $u_1 \geq u_2$ & $v_1 \geq v_2$ ise, $s_i \in S$ stratejisi karşı tarafın stratejisini zayıf olarak ezen bir stratejidir. Çünkü s_i stratejisini oynayan kişi diğer stratejileri oynayandan daima eşit veya daha fazla kazanır.



Şekil 3.2 Örnek bir sıralı oyun (I).

Çizelge 3.2 Şekil 3.2'deki oyunun eşzamanlılaştırma matrisi.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	$[(10,10), (10,10)]$	$[(30, -30), (10,10)]$	$[(10,10), (20, -20)]$	$[(30, -30), (20, -20)]$
(s_1, s_4)	$[(10,10), (-30,30)]$	$[(30, -30), (-30,30)]$	$[(10,10), (20, -20)]$	$[(30, -30), (20, -20)]$
(s_2, s_3)	$[(-20,20), (10,10)]$	$[(-20,20), (10,10)]$	$[(-20,20), (20, -20)]$	$[(-20,20), (20, -20)]$
(s_2, s_4)	$[(-20,20), (-30,30)]$	$[(-20,20), (-30,30)]$	$[(-20,20), (20, -20)]$	$[(-20,20), (20, -20)]$

Bu yaklaşım Şekil 3.2'de yer alan örnek üzerinden açıklanabilir. Bu oyunun eşzamanlılaştırma matrisi Çizelge 3.2'de bulunmaktadır. Bu matris incelendiğinde (s_1, s_3) stratejisinin bu koşulu sağladığı, yani diğer stratejileri zayıf olarak ezdiği görülmektedir. (s_1, s_3) satırında 4 adet hücre bulunmaktadır ve bu hücrelerde $[(10,10), (10,10)]$, $[(30, -30), (10,10)]$, $[(10,10), (20, -20)]$,

$[(30, -30), (20, -20)]$ sonuçları yer almaktadır. Bu sonuçlardan her birinde $u_1 \geq u_2$ & $v_1 \geq v_2$ koşulu sağlanmaktadır.

$$[(10,10), (10,10)] \rightarrow 10 \geq 10 \text{ \& } 10 \geq 10$$

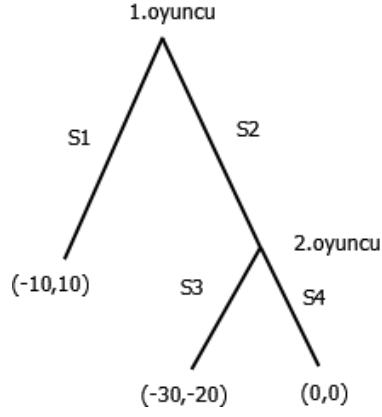
$$[(30, -30), (10,10)] \rightarrow 30 \geq -30 \text{ \& } 10 \geq 10$$

$$[(10,10), (20, -20)] \rightarrow 10 \geq 10 \text{ \& } 20 \geq -20$$

$$[(30, -30), (20, -20)] \rightarrow 30 \geq -30 \text{ \& } 20 \geq -20$$

Birinci sayılar (s_1, s_3) stratejisini oynayan oyuncuya aittir. Bu demektir ki bu strateji, bir oyuncu birinci ya da ikinci oyuncu iken bu stratejiyi oynarsa, diğer stratejileri oynayanlara göre daha avantajlıdır.

Bir FPESS dengesinde kullanılan stratejilerle elde edilen oyun sonucu, SPE olmak zorunda değildir. Bu duruma örnek, ültimat oyunudur. Ültimat oyununda ortaya çıkan FPESS dengesi SPE değildir.



Şekil 3.3 FPESS dengesi olmayan örnek oyun.

Çizelge 3.3 Şekil 3.3'te yer alan oyunun eşzamanlılaştırma matrisi.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	$[(-10, 10), (10, -10)]$	$[(-10, 10), (10, -10)]$	$[(-10, 10), (-20, -30)]$	$[(-10, 10), (-20, -30)]$
(s_1, s_4)	$[(-10, 10), (10, -10)]$	$[(-10, 10), (10, -10)]$	$[(-10, 10), (0, 0)]$	$[(-10, 10), (0, 0)]$
(s_2, s_3)	$[(-30, -20), (10, -10)]$	$[(0, 0), (10, -10)]$	$[(-30, -20), (-20, -30)]$	$[(0, 0), (-20, -30)]$
(s_2, s_4)	$[(-30, -20), (10, -10)]$	$[(0, 0), (10, -10)]$	$[(-30, -20), (0, 0)]$	$[(0, 0), (0, 0)]$

Ayrıca bir SPE, FPESS dengesinin varlığını garanti etmez. Şekil 3.3'te yer alan oyunda SPE $(S2, S4)$ 'tür. Ancak Çizelge 3.3'te yer alan eşzamanlılaştırma matrisi incelendiğinde, diğer tüm stratejileri zayıf olarak ezen bir strateji olmadığı görülmektedir. Bu oyunda bir FPESS dengesi yoktur.

Bu noktadan hareketle FPESS dengesi olmayan oyunlarda karma FPESS dengesi olup olmadığı araştırılmıştır. Sonlu sayıda stratejileri olan sonlu sayıda oyunculu bir oyunda herhangi iki oyuncu arasında bir oyuncunun, karşı oyuncunun oynadığı strateji farketmeksizin, diğer oyuncu ile eşit ya da diğer oyuncudan daha fazla kazanmasını sağlayan karma stratejiye karma FPESS denir. Formal olarak yazarsak,

Tanım 3.8: N oyunculu bir $G = (N, A, u)$ normal form oyununda i oyuncusunun $s_i \in S_i$ karma stratejisi, $\forall s_j \in S_j$ için $u_i(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) \geq u_j(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)$ koşulunu sağlıyorsa, s_i karma stratejisi i . oyuncunun karma FPESS stratejisidir.

Tanım 3.9: $G = (N, A, u)$ normal form bir oyun olsun. a_i ise i . oyuncunun oynadığı bir saf strateji olsun. Eğer aşağıdaki koşulu tüm $a_j \in A_j$ için sağlayan bir $a'_i \in A_i$ varsa, a'_i stratejisi a_i stratejisi tarafından i . oyuncu için FPESS anlamında zayıf olarak ezilir.

$$\text{Koşul: } u_i(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) - u_j(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) \geq u_i(\dots, a'_i, \dots, a_j, \dots) - u_j(\dots, a'_i, \dots, a_j, \dots)$$

Tanım 3.10: Tanım 3.9'un koşulunda yer alan eşitsizlik $>$ ise, a'_i stratejisi a_i stratejisi tarafından i . oyuncu için FPESS anlamında güçlü olarak ezilir.

Çizelge 3.4 Örnek bir normal form oyun ve oyuncu fayda değeri farkları

Orijinal Matris	D	E
A	(2, 1) Fark: 1	(-1, -5) Fark:4
B	(3, 2) Fark:1	(-1, -2) Fark:1
C	(3, 0) Fark:3	(-5, -10) Fark:5
Fark Matrisi	D	E
A	(1,-1)	(4,-4)
B	(1,-1)	(1,-1)
C	(3,-3)	(5,-5)

Çizelge 3.4'te yer alan oyunda B stratejisi A tarafından zayıf olarak, A ve B stratejisi C tarafından güçlü olarak FPESS anlamında birinci oyuncu için ezilmektedir. E stratejisi de D stratejisi tarafından zayıf olarak FPESS anlamında ikinci oyuncu için ezilmektedir. Fark matrisinde de görülmektedir ki oluşturulan bu yeni oyunda A stratejisi B'yi, D stratejisi E'yi zayıf olarak ezmektedir. C stratejisi A ve B'yi güçlü olarak ezmektedir.

Oyuncuların karma bir FPESS'inin olup olmadığı araştırılmıştır ve görülmüştür ki sonlu sayıda stratejisi olan sonlu sayıda oyunculu herhangi bir oyunda herhangi iki oyuncu arasında oyunculardan en az bir tanesi karma FPESS'e sahiptir.

Brouwer Sabit Nokta Teoremi: $f: \Delta_m \rightarrow \Delta_m$ m boyutlu simplex'ten m boyutlu simplex'e tanımlı bir sürekli fonksiyon olsun. Öyle bir $z \in \Delta_m$ noktası vardır ki $f(z) = z$ 'dir.

Kanıt: (Jiang and Leyton-Brown, 2017)'da yer almaktadır.

Lemma: Sonlu sayıda stratejisi olan sonlu oyunculu bir oyunda herhangi iki oyuncu arasında öyle bir denge noktası vardır ki, oyunculardan en az biri denge noktasına ulaştıracak kendi olasılığını sağlayan karma stratejiyi oynadığında aralarındaki fayda değeri farkı **optimal** olur.

Burada “**optimal**” kelimesi, “herhangi bir oyuncu, bu denge noktasına ulaştıran karma stratejiyi oynamazsa, diğer oyuncu ile arasındaki fayda değeri farkı bu oyuncunun aleyhine değişir” anlamındadır. Bir başka deyişle bir oyuncu bu dengeye ait karma stratejisini oynamadığında, karşısındaki oyuncudan fazla kazanıyorsa aradaki fark azalır, az kazanıyorsa aradaki fark açılır.

Kanıt: Bu lemmayı kanıtlamak için (Nash, 1951)'in kanıt yöntemi kullanılmıştır. $i, j \in \{1, \dots, N\}$ olmak üzere $f: S_i \times S_j \rightarrow S_i \times S_j$ fonksiyonu i oyuncusu ile j oyuncusunun karma stratejiler kümelerinin Kartezyen çarpımından yine bu çarpıma giden bir fonksiyon olsun, öyle ki:

$$s'_i(b_t) = \frac{s_i(b_t) + \varphi_{i,b_t}((s_i, s_j))}{1 + \sum_{b_t \in A_i} \varphi_{i,b_t}((s_i, s_j))}$$

$$s'_j(m_t) = \frac{s_j(m_t) + \varphi_{j,m_t}((s_i, s_j))}{1 + \sum_{m_t \in A_j} \varphi_{j,m_t}((s_i, s_j))}$$

$$\varphi_{i,b_t}((s_i, s_j)) = \max\{0, [u_i(\dots, b_t, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, b_t, \dots, s_j, \dots)] - [u_i(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)]\}, b_t \in A_i$$

$$\varphi_{j,m_t}((s_i, s_j)) = \max\{0, [u_j(\dots, s_i, \dots, m_t, \dots) - u_i(\dots, s_i, \dots, m_t, \dots)] - [u_j(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) - u_i(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)]\}, m_t \in A_j$$

f fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur, çünkü pay ile payda daima süreklidir ve payda daima pozitiftir. Ayrıca $S_i \times S_j$ kümesi Brouwer sabit nokta teoremi gereği kapalı (*İng. Closed*) ve kompakt (*İng. Compact*) bir kümedir (Jiang and

Leyton-Brown, 2007). Bu nedenle öyle bir $(s_i, s_j) \in S_i \times S_j$ noktası vardır ki, o noktada $f((s_i, s_j)) = (s_i, s_j)$ olur.

Bu sabit noktaya (s_i, s_j) diyelim. $s'_i(b_t) = s_i(b_t)$ ve $s'_j(m_t) = s_j(m_t)$ olur (Jiang and Leyton-Brown, 2007). i ve j oyuncular (s_i, s_j) stratejilerini oynadıklarında aralarındaki fayda değeri farkı x olsun. Bu durumda öyle bir $b_t \in A_i$ saf stratejisi vardır ki, i oyuncusu için aşağıdaki koşul geçerli olur:

$$\begin{aligned} & [u_i(\dots, b_t, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, b_t, \dots, s_j, \dots)] - \\ & [u_i(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)] \leq 0 \end{aligned}$$

Eğer bütün saf stratejiler, fayda değeri farkını i . oyuncusu için x 'ten daha iyi bir hale getiriyorsa bu saf stratejilerin herhangi bir kombinasyonu da aradaki farkı i . oyuncu lehine daha iyi yapar. Ancak s_i de bu saf stratejilerin bir kombinasyonu olduğundan, $x > x$ olur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle öyle bir $b_t \in A_i$ vardır ki $\varphi_{i,b_t}((s_i, s_j)) = 0$ olur. Bu durumda tüm $b_t \in A_i$ saf stratejileri için $\varphi_{i,b_t}((s_i, s_j)) = 0$ olur. Çünkü denklemden payda 1'dir, pay ise $s'_i(b_t) = s_i(b_t)$ 'dir. Bu argüman j oyuncusu için de aynen geçerlidir. Sonuç olarak (s_i, s_j) oyuncuların fayda değeri farkını optimal yapan bir denge noktasıdır. (qed)

Teorem: Bir N oyunculu $G = (N, A, u)$ normal form oyununda i ve j oyuncular arasındaki beklenen fayda değeri fark fonksiyonu oyunculara göre $fark_i(i, j) = I_i - I_j$ ve $fark_j(i, j) = I_j - I_i$ olsun. $fark_i(i, j)$ 'nin bir i' oyuncusunun ve $fark_j(i, j)$ de bir j' oyuncusunun beklenen fayda değeri fonksiyonu olduğu iki kişilik bir G' oyunundaki karma Nash dengeleri, G oyunundaki i ve j oyuncular arasındaki fayda değeri farkını optimal hale getirir. Aynı zamanda G oyunundaki i ve j oyuncular arasındaki fayda değeri farkını optimal hale getiren stratejiler G' oyunundaki karma Nash dengeleridir.

Kanıt: Farz edelim ki G oyununda oyuncuların fayda değeri farkını optimal hale getiren öyle bir (s_i, s_j) karma strateji profili olsun ki, G' oyununda bu bir karma Nash dengesi olmasın. Bu durumda i' oyuncusunun öyle bir saf b'_t stratejisi vardır ki o strateji için,

$$u_{i'}(\dots, b'_t, \dots, s_j, \dots) - u_{i'}(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) > 0 \text{ olur. Bu durumda}$$

$$u_{i'}(\dots, b'_t, \dots, s_j, \dots) = u_i(\dots, b'_t, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, b'_t, \dots, s_j, \dots) \text{ ve}$$

$u_i'(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) = u_i(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)$ olduğundan b_t' stratejisi (s_i, s_j) 'nin oyuncuların fayda değeri farkını optimal hale getirmesini engeller. Çünkü yukarıdaki lemmada yer alan f fonksiyonunda tanımlı olan φ_{i,b_t} fonksiyonu sıfır olmaz. Bu bir çelişkidir.

Farz edelim ki G' oyununda öyle bir (s_i, s_j) karma Nash dengesi olsun ki, G oyununda oyuncuların fayda değeri farkını optimal hale getirmesin. (s_i, s_j) 'nin oyuncuların fayda değeri farkını optimal hale getirmemesi için i oyuncusunun öyle bir b_t' saf stratejisi vardır ki s_i stratejisi için,

$$[u_i(\dots, b_t', \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, b_t', \dots, s_j, \dots)] -$$

$$[u_i(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) - u_j(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots)] > 0$$

olmalıdır. Bu durumda $u_i'(\dots, b_t', \dots, s_j, \dots) - u_i'(\dots, s_i, \dots, s_j, \dots) > 0$ olur ve (s_i, s_j) G' oyununda karma Nash dengesi olamaz. Bu bir çelişkidir. (qed)

Karma FPESS dengesinin hesaplanması sırasında FPESS anlamında ezilen stratejileri elemek gerekir. Çünkü iki oyuncu arasındaki farkı optimal yapmak için bu ezilen stratejilerin oyuncuya herhangi bir yardımı yoktur.

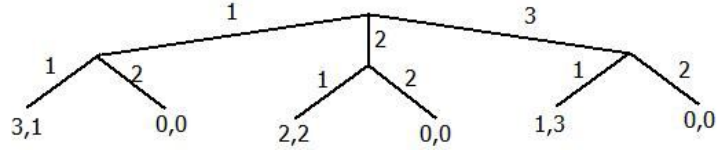
Bir $G = (N, A, u)$ oyununda tüm oyuncuların aynı anda diğer $N - 1$ oyuncuya eşit veya onlardan daha fazla fayda değeri kazanmalarını sağlayan karma FPESS stratejileri varsa, bu stratejiler karma FPESS dengesi oluşturur. Doğal bir sonuç olarak karma bir FPESS dengesinde tüm oyuncuların kazanacakları fayda değerleri eşittir. Formal olarak yazarsak,

Tanım 3.11: Bir $(s_1, \dots, s_N)$ karma strateji profilinde $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ ve $\forall s_i \in S_i$ ve $\forall s_j \in S_j$ için, $u_i((s_1, \dots, s_N)) \geq u_j((s_1, \dots, s_N))$ ise $(s_1, \dots, s_N)$ bir karma FPESS dengesidir.

3.4 Oyun Uygulamaları

Bu bölümde tezin 3. bölümünde tanım ve teoremlerle sunulan kavramların çeşitli oyunlar üzerinde incelenmesi yer almaktadır.

3.4.1 Ültimatom oyunu



Şekil 3.4 $N = 4$ için örnek bir ultiatom oyunu (I).

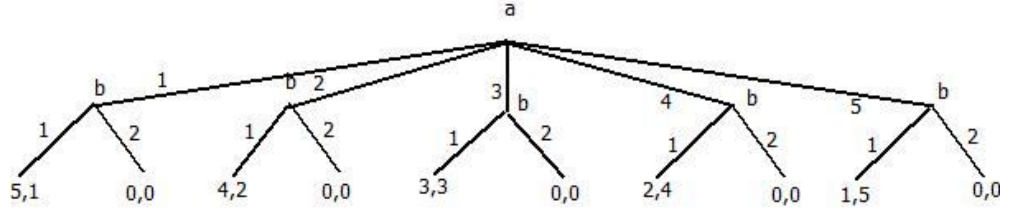
i: 5 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	1	1
i: 6 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	1	2
i: 7 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	1
i: 8 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	2
i: 13 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	1	1
i: 14 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	1	2
i: 15 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	1
i: 16 j: 25	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	2

Şekil 3.5 Şekil 3.4'teki oyunun FPESS'leri.

Ültimatom oyununda birinci oyuncu N birim paradan karşı tarafa en az 1, en fazla $N - 1$ teklif etmek zorunda olsun. $N = 4$ için birinci oyuncu karşı tarafa $\{1,2,3\}$ kümesinden bir değer teklif etsin, karşı taraf da kabul ya da reddetsin. Bu oyunun oyun ağacı Şekil 3.4'te yer almaktadır. Bu oyunun eşzamanlılaştırma matrisindeki FPESS'ler Şekil 3.5'te yer almaktadır. Bunlar $(1,2,1,1)$, $(1,2,1,2)$, $(1,2,2,1)$, $(1,2,2,2)$, $(2,2,1,1)$, $(2,2,1,2)$, $(2,2,2,1)$, $(2,2,2,2)$ 'dir. Burada örneğin $i = 5$ ve $j = 25$ yazan ilk satırdaki $(1,2,1,1)$ değerlerinde sırasıyla,

- 1: birinci oyuncunun oynayacağı Şekil 3.4'te yer alan "1" stratejisini;
- 2: ikinci oyuncunun, birinci oyuncu "1" stratejisini oynadığında oynayacağı en soldaki alt ağaçta yer alan stratejiyi;
- 1: ikinci oyuncunun, birinci oyuncu "2" stratejisini oynadığında oynayacağı ortadaki alt ağaçta yer alan stratejiyi;
- 1: ikinci oyuncunun, birinci oyuncu "3" stratejisini oynadığında oynayacağı en sağdaki alt ağaçta yer alan stratejiyi göstermektedir.

Bu stratejiler incelendiğine birinci oyuncunun oynaması gereken sadece iki strateji olduğu görülmektedir, bunlar 1 ve 2'dir. Yani bir kişi birinci oyuncu iken karşı tarafa 1 ya da 2 teklif etmelidir. İkinci oyuncu ise kendisine 1 teklif edildiğinde onu reddetmelidir. Diğer teklifleri kabul edebilir.



Şekil 3.6 N=6 için örnek ultimatôm oyunu ağacı.

i: 25 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	1	1	1
i: 26 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	1	1	2
i: 27 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	1	2	1
i: 28 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	1	2	2
i: 29 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	2	1	1
i: 30 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	2	1	2
i: 31 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	2	2	1
i: 32 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	1	2	2	2	2	2
i: 57 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	1	1	1
i: 58 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	1	1	2
i: 59 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	1	2	1
i: 60 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	1	2	2
i: 61 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	2	1	1
i: 62 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	2	1	2
i: 63 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	2	2	1
i: 64 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	2	2	2	2	2	2
i: 89 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	1	1	1
i: 90 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	1	1	2
i: 91 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	1	2	1
i: 92 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	1	2	2
i: 93 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	2	1	1
i: 94 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	2	1	2
i: 95 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	2	2	1
i: 96 j: 161	diğer tüm stratejileri ezen strateji:	3	2	2	2	2	2

Şekil 3.7 Şekil 3.6'daki oyunun FPES's'leri.

Bu oyun $N = 6$ için de implemente edilmiştir. Oyun ağacı Şekil 3.6'da yer almaktadır. FPES's'ler ise Şekil 3.7'de yer almaktadır. Burada örneğin $i = 25$ ve $j = 161$ yazan ilk satırdaki (1,2,2,1,1,1)'de,

- 1: birinci oyuncunun oynayacağı stratejiyi;
- 2: ikinci oyuncunun en soldaki alt ağaçta oynayacağı stratejiyi;
- 2: ikinci oyuncunun soldan ikinci alt ağaçta oynayacağı stratejiyi;
- 1: ikinci oyuncunun ortadaki alt ağaçta oynayacağı stratejiyi;
- 1: ikinci oyuncunun soldan dördüncü alt ağaçta oynayacağı stratejiyi;

1: ikinci oyuncunun en sağıdaki alt ağaçta oynayacağı stratejiyi göstermektedir.

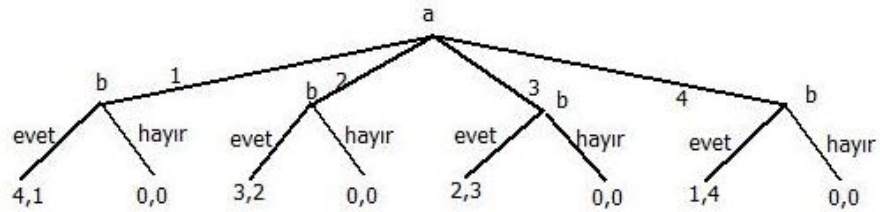
Bu stratejilere göre birinci oyuncu karşı tarafa $\{1,2,3\}$ kümesinden bir değer teklif edebilir. İkinci oyuncu ise kendisine 1 ve 2 teklif edildiğinde teklifi reddetmelidir, diğer tekliflerde istediğini yapabilir.

Ültilatom oyununda birinci oynayan kişi karşı tarafa payın en fazla yarısını teklif etmelidir. İkinci oynayan ise, karşı taraf payın yarısından azını teklif ederse o teklifi reddetmelidir. Bu durum diğer N seçenekleri için de böyledir.

Ültilatom oyununda örneğin $N = 4$ için $(1,2,1,1), (2,2,1,1)$ stratejilerini düşünelim. Bu iki strateji karşılıklı oynanırsa ortaya $(0,0)$ ve $(2,2)$ sonuçları çıkar. Burada $(2,2)$ sonucu oyunun SPE değildir, ancak bir FPESS dengesidir. Bu demektir ki, bir FPESS dengesi, SPE olmak zorunda değildir.

$N = 3$ için ültilatom oyunu ve eşzamanlılaştırma matrisi için EK 2'ye bakınız. Bu oyunda $(1,2,1)$ ve $(1,2,2)$ eşzamanlılaştırma stratejileri oyuncuların rakip oyuncu tarafından ezilmesini önleyen stratejilerdir. Bu stratejilerin anlamı *(karşıya 1 teklif etme, hayır, evet)* ve *(karşıya 1 teklif etme, hayır, hayır)*'dir. Bu stratejiler karşılıklı oynandığında FPESS dengesi ortaya çıkmaktadır.

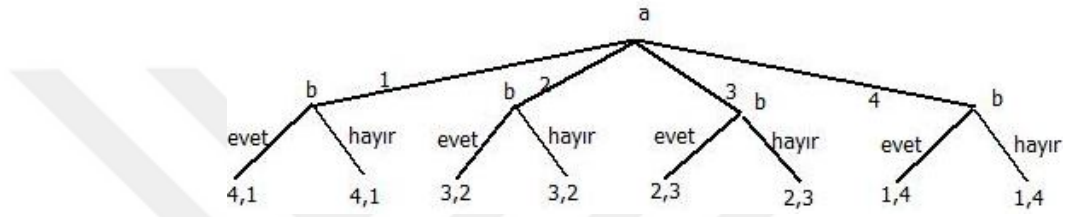
Eşzamanlılaştırma tekniği, sonlu sıralı iki oyunculu mükemmel bilgi oyunlarında oyuncuların en iyi stratejileri bulmasında yararlıdır. Bu stratejiler karşılıklı olarak oynandığında ortaya çıkan sonuçlar FPESS dengesine ulaşmıştır. Örneğin, ültilatom oyununda ortaya çıkan FPESS dengeleri birçok makalede anlatılan deneylerde de karşımıza çıkan sonuçlardır (Forsythe et al., 1991) (Croson, 1996).



Şekil 3.8 $N = 4$ için örnek bir ültilatom oyunu (II).

$N = 4$ için ultiatom oyunu Şekil 3.8’da yer almaktadır. Bu oyunda a oyuncusunun oynayabileceği 4, b oyuncusunun ise $2 * 2 * 2 * 2 = 16$ tane oynayabileceği saf strateji vardır. Bu iki strateji kümesinin Kartezyen çarpımından $4 * 16 = 64$ tane eleman bulunur. Bu, eşzamanlılaştırma tanımındaki (Bkz. Tanım 3.4) S kümesidir. Örneğin $(2, hayır, hayır, evet, evet)$ bu kümenin elemanlarından biridir. Yani, bir oyuncu a iken karşı tarafa 2 teklif eder, b iken $(4,1)$ paylaşımına hayır der, $(3,2)$ paylaşımına hayır der, $(2,3)$ paylaşımına evet der, $(1,4)$ paylaşımına evet der.

3.4.2 Diktatörlük oyunu



Şekil 3.9 Örnek bir diktatörlük oyunu.

Diktatörlük oyunu iki oyunculu, ancak ikinci oyuncunun karar verme hakkının olmadığı bir oyundur. $N = 4$ için diktatörlük oyununun örnek oyun ağacı Şekil 3.9’da yer almaktadır. Diktatörlük oyununda ikinci oyuncunun FPES’i yoktur. Çünkü birinci oyuncu örneğin tüm parayı kendisine ayırdığında, ikinci oyuncunun durumu eşitlemek için yapabileceği bir şey yoktur.

3.4.3 Bazı ultiatom oyununu çeşitleri

Ültimeatom oyunu ve çeşitli varyasyonlarının sonucunu tahmin etmek için oyun teorisi alanında çeşitli araştırmalar yapılmaktadır. SPE ve rasyonel davranış tanımları, yapılan deneylerin sonuçlarına bakıldığında oyunların sonucunu tahmin etmekte yeterli değildir. Oyunlarda oyuncu davranışlarını, tercih ve fayda fonksiyonlarını modelleyen yeni yaklaşımlar ortaya atılmıştır. Bu yaklaşımlara dair bazı örnekler Korth’ta (2009) bulunmaktadır. Bu makaleye göre bir oyuncu oyun sonunda elde edeceği faydayı düşünürken, diğer oyuncuların elde edeceği faydaları da düşünür. Bir fayda fonksiyonu oluşturulurken bu durum da göz önüne alınmalıdır.

Ültimeatom birinci oyuncu tüm payın %20’sinin altında bir miktarı karşı tarafa önermemektedir. Çoğunlukla payın %40 ile %50’sini karşı tarafa önerilmektedir.

Küçük teklifler reddedilirken, teklif büyüdükçe kabul edilme olasılığı artmaktadır (Korth, 2009).

Makalede ültimat oyununun ile birlikte teorik sonuçların deneysel sonuçlarla örtüşmediği bazı oyunlar sorgulanmıştır. Örneğin teklif oranları bir makine tarafından rastgele olarak belirlendiğinde ve bu durum oyunculara bildirildiğinde, teklifi kabul edecek olan taraf, klasik ültimat oyununa göre daha düşük tekliflere de evet demektedir. Makalede bunun oyuncuların hamle yaparken diğer oyuncuların niyetlerini gözetmesinden kaynaklandığı belirtilmektedir. Diğer örnekler ise şöyledir:

1. En iyi atış oyunu (İng. *Best Shot Game*), birinci oyuncunun tekliflerinin, kendisi için ya çok avantajlı ya da çok dezavantajlı olduğu bir oyundur. Birinci oyuncu karşı tarafa kendisi için ya çok avantajlı ya da çok dezavantajlı tekliler sunar. Oyunun sonunda iki oyuncunun elindeki fayda değerleri arasında klasik ültimat oyunundakinden daha büyük fark vardır. Bu oyun çeşitli deneylerle uygulandığında adaletsiz tekliflerin ültimat oyununa göre daha fazla kabul edildiği görülmüştür (Harrison and Hirshleifer, 1983).

2. Diktatörlük oyununda ilk oyuncu elindeki paranın istediği bir miktarını ikinci oyuncuya verir. İkinci oyuncunun oyunu ret etme gibi bir karar hakkı yoktur. Daima kabul eder. Bu oyun tekrar tekrar oynanarak deney yapılmış, birinci oyuncuların %80'i ikinci oyunculara pozitif bir miktar teklif etmiş, ancak birinci oyuncuların hiçbirisi paranın %50'sinden fazlasını ikinci oyuncuya vermemiştir. Klasik ültimat oyununa göre daha adaletsiz sonuçlar ortaya çıkmıştır.

3. Armağan değiş tokuş oyununda (İng. *Gift Exchange Game*) firma işe alacağı çalışana bir w kadar ücret ödemeyi teklif eder, karşılığında ise çalışanın emeği vardır. En faydalı çalışana en düşük ücret ile almak firmanın beklenen stratejisi iken, çalışanın beklenen stratejisi de en az emeği harcayarak en çok ücreti almaktır. Ancak yapılan deneylerde bazı firmaların market ortalamasının üstünde ücret vererek daha faydalı emek harcayan çalışan ile anlaştığı görülmektedir.

4. Kamu malı oyununda (İng. *Public Goods Game*) oyuncular herkesin ortak kullanacağı bir mal için bir ücret öderler. Her oyuncu ödeyeceği miktarı kendi belirler. Ortaya çıkan malı ise eşit haklara sahip olarak kullanırlar. Bu oyunun sonunda insanlar diğer insanların daha çok para koyacağını düşündüklerinde, kendileri de daha çok para koymuşlardır.

Bu sonuçlar klasik oyun teorisinin rasyonel davranış ile belirlediği Nash dengeleri değildir. Rasyonel Nash dengeleri yerine bu sonuçların ortaya nasıl çıktığını açıklamak için iki farklı yaklaşım öne sürülmüştür (Korth, 2009):

İlk yaklaşım eşitlik temelli yaklaşımdır. Bu yaklaşımda oyuncular eşitsizlik karşısında hoşnutsuzluk sergilerler ve ona göre davranırlar. Tercihler sadece faydaların dağılımına bağlıdır. Bir oyuncu eşitsizlik kendi aleyhine olduğunda daha çok, lehine olduğunda daha az hoşnutsuzluk hisseder. Kazandıkları fayda değeri diğer oyuncularinkine yaklaştığında hoşnutsuzluk azalır. Bunu temel alan modellerde oyuncuların hamle yaparken niyet faktörü göz ardı edilmektedir. Bu yüzden ultimatoom oyununda paylaşım oranı bir makine tarafından rastgele olarak belirlendiğinde, oyuncuların neden daha az adaletli sonuçlara razı geldikleri bu yaklaşımla açıklanamamaktadır. Ayrıca, kamu malı oyununda oyuncular arasındaki eşitsizliğe bağlı davranışlar ve bedavacı denilen oyuncuların diğer oyuncular tarafından -onlara bir maliyete neden olsa da- cezalandırılması bu yaklaşımla açıklanamamaktadır (Korth, 2009).

İkincisi yaklaşım ise karşılıklılık (İng. *Reciprocity*) temelli yaklaşımdır. Karşılıklılık davranışı koşulsuz cömertlik ve başkalarını düşünme demek değildir. Karşılıklılık davranışı pozitif veya negatif olabilir. Bu temele dayanan yaklaşımlarda oyuncuların fayda fonksiyonu, karşılıklılık faktörünü de kullanır. Fayda fonksiyonu, oyunun ilk hamlesinden itibaren oyuncuların elde edeceği fayda değerine, kibarlık ve karşılıklılık gibi terimler ekleyerek yeni fayda değerleri bulur. Bir oyuncunun sıradaki hamlesini diğer oyuncuların daha önceki davranışları etkiler. Bir oyuncunun oyunun sonunda elde edeceği fayda değeri normal maddi fayda değeri ile karşılıklılık fayda değeri toplamıdır (Korth, 2009).

Çizelge 3.5 Rastgele paylaşım yapılan örnek bir ultimatoom oyunu.

1.oyuncu \ 2.oyuncu	Kabul et	Kabul etme
	Kabul et	Kabul etme
Kabul et	a,b	0,0
Kabul etme	0,0	0,0

Bu makalede bahsedilen dört oyunun bazıları eş zamanlı, bazıları sıralı oynanan oyunlardır. Sıralı oynanan oyunları eş zamanlı oynanacak şekilde

düşünelim. Eşitlikçi ve fedakâr davranan oyuncunun ödüllendirildiği, böyle davranmayanın ise cezalandırıldığı bir modelleme yapılabilir:

1. İlk olarak paylaşım miktarı bir makine tarafından rastgele belirlenen ultimatôm oyununu düşünelim. Paylaşımlar rastgele belirlendiği için birinci oyuncunun herhangi oyunda bir öncelik hakkı yoktur. Sadece ikinci oyuncunun kabul etme ve etmeme hakkı vardır. Oyunda dışarıdan birisinin iki oyuncuya belli bir miktar parayı bölüp paylaşırması ile bu oyun arasında fark yoktur. Örneğin $a + b$ miktar para olsun. Birinci oyuncuya a , ikinci oyuncuya b miktar para düşsün. a ve b sayıları pozitif olmak üzere, eş zamanlı oynandığı düşünüldüğünde Çizelge 3.5'teki gibi modellenebilir.

Bu oyunda oyuncuların miktarı belirleme hakkı olmadığı için, sadece parayı kabul edip etmeme hakkı olduğu için, oyunun eş zamanlı halinde de bu haklar aynen korunur. Bu durumda, “kabul et” stratejisi her iki oyuncu için de “kabul etme” stratejisini zayıf olarak ezdiği için her iki oyuncu da (a, b) sonucunu kabul etmeye meyilli olacaktır. Bu sonuç Nash dengesidir.

Çizelge 3.6 Diktatörlük oyununun eş zamanlılaştırılmış bir versiyonu.

	0	1	2	3
0	1,5 , 1,5	3,0	3,0	3,0
1	0,3	1,5 , 1,5	2,1	2,1
2	0,3	1,2	1,5 , 1,5	1,2
3	0,3	1,2	2,1	1,5 , 1,5

2. Diktatörlük oyunu eş zamanlı oynanabilir (Bkz Çizelge 3.6). Örneğin 3 dolar, iki oyuncu arasında paylaşılırken istensin, birinci oyuncu ikinci oyuncuya $\{0,1,2,3\}$ değerlerinden birini teklif edebilsin. Bu durumda bu oyun eşzamanlı hale getirilip ikinci oyuncunun reddetme imkânı olmadığı için daha az cömert olan paylaşım geçerli olsun. Bu durumda 0 stratejisi en baskın stratejidir ve oyunun Nash

dengesidir. 0 teklif etme izni olmasaydı 1 teklif etmek baskın strateji ve Nash dengesi olurdu.

Çizelge 3.7 Örnek bir armağan değiş-tokuş oyunu.

	YE	DE
YM	0, 0	-10,+10
DM	+10,-10	0,0

3. Armağan değiş tokuş oyununda ise bir işveren ve bir çalışan vardır. İşverenin en düşük maaşla en çok çalışan kişiyi işe alması beklenen stratejidir. Buna karşı olarak, çalışan da en yüksek maaşla en az çalışmayı beklenen strateji olarak seçmelidir. Bu oyun kabaca modellendiğinde yüksek efor ve düşük efor, çalışanın sergileyebileceği iki strateji olsun. Yüksek maaş ve düşük maaş da işverenin sergileyebileceği iki strateji olsun. Bu oyunun beklenen normal formu Çizelge 3.7'deki gibi olsun.

Çizelge 3.8 Çizelge 3.7'deki oyununun eşzamanlılaştırılmış hali.

	YM, DE	YM, YE	DM, DE	DM, YE
YM, DE	0,0	10,-10	-10,10	0,0
YM, YE	-10,10	0,0	-20,20	-10,10
DM, DE	10,-10	20,-20	0,0	10,-10
DM, YE	0,0	10,-10	-10,10	0,0

Bu oyun eşzamanlılaştırılırsa yani, çalışan ve işveren taraflar birbirlerinin stratejisini oynayabilirse Çizelge 3.8'deki gibi bir örnek eşzamanlılaştırma matrisi elde edilir.

Çizelge 3.9 Çizelge 3.7’deki oyununun cezalandırma içeren eşzamanlılaştırılmış hali.

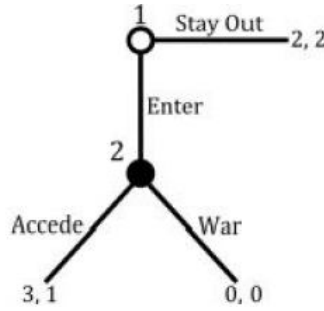
	YM, DE	YM, YE	DM, DE	DM, YE
YM, DE	0,0	-10,10	10,-10	0,0
YM, YE	10,-10	0,0	20,-20	10,-10
DM, DE	-10,10	-20,20	0,0	-10,10
DM, YE	0,0	-10,10	10,-10	0,0

Çalışanın işi kabul etmeme hakkı olduğundan, daha özverili olanın ödüllendirildiği, daha bencil olanın cezalandırıldığı şeklinde modellendiğinde Çizelge 3.9’daki örnek matris elde edilir. Yüksek maaş vermek ve yüksek efor harcamak Nash dengesi olur.

3.4.4 Eşzamanlılaştırılan sıralı oyun örnekleri

Bu alt bölümdeki bütün oyunlar ve alt oyun mükemmel dengesi (İng. *Subgame Perfect Equilibrium*) (SPE) bilgileri, genişletilmiş form resimleri ile birlikte Spaniel’den (2011) alınmıştır.

Firmaların pazara giriş oyunu

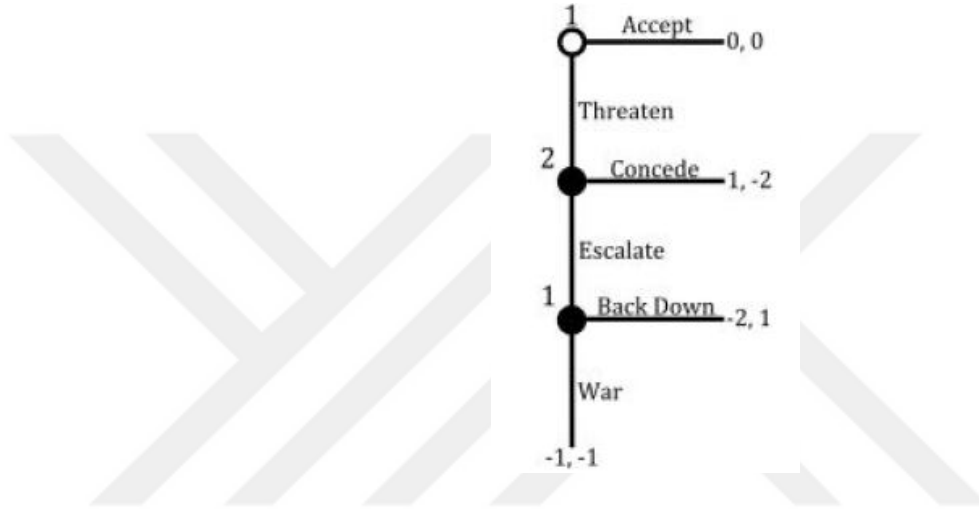


Şekil 3.10 Firmaların pazara giriş oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.10’daki oyunda bir firma pazarda tekel olarak bulunmaktadır. Yeni bir firma pazara girmek ya da girmemek konusunda karar verme aşamasındadır. Yeni firma pazara girerse zaten pazarda olan firma bu durumu kabul edebilir ya da yeni firma ile pazar payı için mücadeleye girişebilir. Birinci oyuncunun strateji “pazara gir” (İng. *Enter*) veya “pazarın dışında kal” (İng. *Stay out*)’dır. İkinci oyuncunun stratejileri ise “razı ol” (İng. *accede*) veya “savaş” (İng. *war*)’tır.

Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi yani SPE, (*enter, accede*)’dır. Birinci firma pazara girer, ikinci firma da bunu kabullenir. Bu oyunda iki adet FPESSE vardır. Birinci strateji (*enter, war*), ikinci strateji (*stay out, war*)’dır. Bu iki strateji karşılıklı oynandığında sonuç olarak (*enter, war*) ve (*stay out, war*) çıkmaktadır. Bu iki sonuçta firmalar birbirlerine galip gelememektedir. Her ikisinin de yenilmemek için oynaması gereken stratejiler bu stratejilerdir. Bu oyunda SPE, FPESSE dengesi değildir.

Savaşa girme oyunu



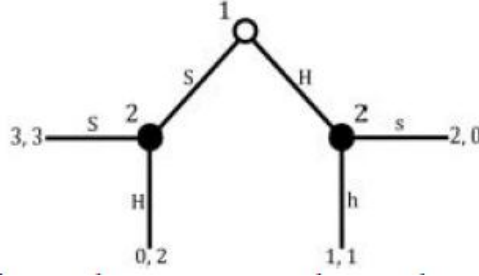
Şekil 3.11 Savaşa girme oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.11’deki oyunda iki ülke savaşa girmek üzeredir. Birinci ülke savaşa girmezse iki ülke için bir şey olmamaktadır. Eğer ikinci ülkeyi tehdit ederse ikinci ülke tehdide boyun eğebilir ya da tehdidi görebilir. Birinci ülkede bu cevaba karşılık olarak geri çekilebilir ya da savaşa girebilir. Birinci oyuncunun yapabileceği ilk hamleler “durumu kabullen” (İng. *Accept*) veya “karşı tarafı tehdit et” (İng. *Threaten*)’tir. İkinci oyuncunun buna karşı verebileceği tepkiler “tehdide razı ol” (İng. *Concede*) veya “olayı tırmandır” (İng. *Escalade*)’dir. Birinci oyuncunun tekrar sıra kendisine gelirse yapabileceği hamleler “geri çekil” (İng. *Back down*) veya “savaş” (İng. *War*)’tır.

Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi (SPE) (*accept, escalate, war*)’dır. Yani birinci ülke savaşa girmez ya da savaşmayı seçer. İkinci ülke her koşulda tehdidi görür, yani tehdide boyun eğmez. Burada üç adet strateji FPESSE vardır. Bunlar (*threaten, escalate, war*), (*accept, escalate, war*), (*accept, escalate, back down*)’dır. Oyuncular bu stratejileri oynarsa birbirlerine güç yetiremezler, yani rakipleri tarafından yenilmezler. Bu üç strateji birbirleriyle oynandığında FPESSE

dengesi olarak (threaten, escalate, war), (accept, escalate, war), (accept, escalate, back down) ortaya çıkmaktadır. Bu sonuçlardan (accept, escalate, war) aynı zamanda SPE'dir.

Geyik ve tavşan avlama oyunu



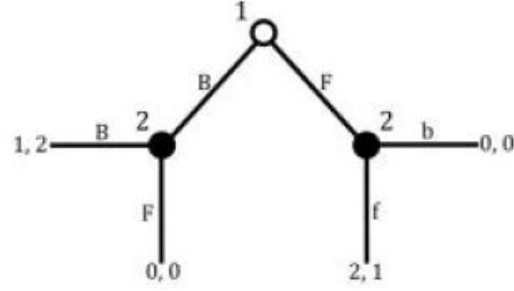
Şekil 3.12 Geyik ve tavşan avlama oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.12'deki oyun aslında eşzamanlı olarak da oynanabilen bir oyundur. Ancak burada sıralı oynanan hali anlatılmıştır. İki adet avcı vardır. Eğer iki avcı da “geyik” (İng. *Stag*) avlamak için iş birliği yaparsa 3 fayda değeri kazanmaktadır. Eğer birisi geyik, diğeri “tavşan” (İng. *Hare*) avlamaya çalışırsa, geyik avlamaya çalışan kişi başarılı olamamaktadır ve hiçbir şey kazanmamaktadır. Tavşan avlamaya çalışan ise 2 fayda değeri kazanmaktadır. Her iki avcı da tavşan avlamaya çalışırsa, avladıkları tavşanı paylaşarak 1'er fayda değeri kazanmaktadır.

Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi (SPE) $(S, (S, h))$ 'tır. Yani birinci oyuncu geyik avlamayı seçecektir. İkinci oyuncu ise birinci oyuncu geyik avlamayı seçtiğinde geyik avlayacak, birinci oyuncu tavşan avlamayı seçtiğinde tavşan avlayacaktır.

Bu oyunda iki adet FPES bulunmuştur. Bunlar $(H, (S, h))$ ve $(H, (H, h))$ 'tır. Bu iki strateji karşılıklı olarak oynandığında ortaya $(H, (H, h))$ ve $(H, (S, h))$ FPES dengeleri ortaya çıkmaktadır. Yani oyunda birinci oyuncu daima tavşan avlamayı, ikinci oyuncu da daima tavşan avlamayı seçerse oyuncular birbirlerine güç yetiremezler ve oyunu kaybetmemiş olurlar. Bu oyunda ortaya çıkan bu iki FPES Dengesinden hiçbiri SPE değildir.

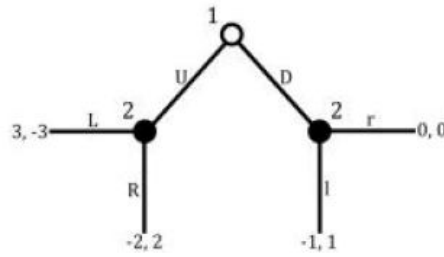
Cinsiyetlerin savaşı oyunu



Şekil 3.13 Cinsiyetlerin savaşı oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.13'teki oyunda bir çift “bale” (İng. *Ballet*) izlemeye ya da “dövüş” (İng. *Fight*) izlemeye gitme konusunda kararsızdır. Eşlerden bir tanesi baleye diğer ise dövüş izlemeye gitmek istemektedir. Her bir eş kendi dediği olursa daha çok mutlu olmaktadır. Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi (SPE) $(F, (B, f))$ 'tir. Yani bir oyuncu dövüşe gitmektedir, ikinci oyuncu ise buna cevap olarak istemese de dövüşe gitmelidir, aksi takdirde ikisi de hiçbir şey kazanamamaktadır. Bu oyun aslında eşzamanlı oynanmaktadır, oyuncuların sıralı oyunda yerleri değiştirilebilir. Bu oyunda FPESS dengesi bulunmamaktadır, yani oyuncuların karşı taraftan daha az kazanmamak için oynayabileceği bir strateji yoktur.

Eşleşen paralar oyunu

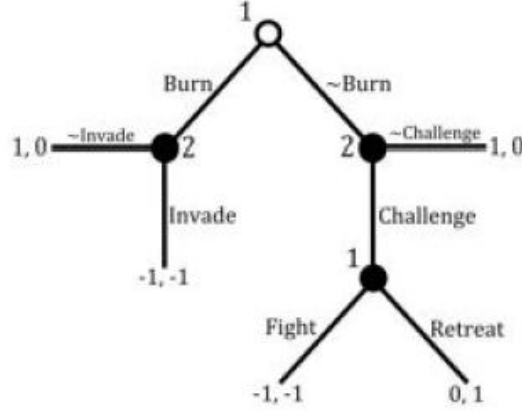


Şekil 3.14 Eşleşen paralar oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.14'teki oyunda her iki oyuncu da birer para seçmektedir. Birinci oyuncu U ya da D , ikinci oyuncu L , R , l ve r paralarından birini seçebilir. Seçtikleri paralara göre oyunda kazanacakları fayda değerleri oyun ağacında yer almaktadır.

Bu oyunda SPE $(D, (R, l))$ 'dir. Yani birinci oyuncu D parasını seçer, ikinci oyuncu da birinci oyuncu U parasını seçerse R , D parasını seçerse l parasını seçer ve oyun sonlanır. Burada da FPESS ve FPESS dengesi yoktur.

Köprüyü yakma oyunu



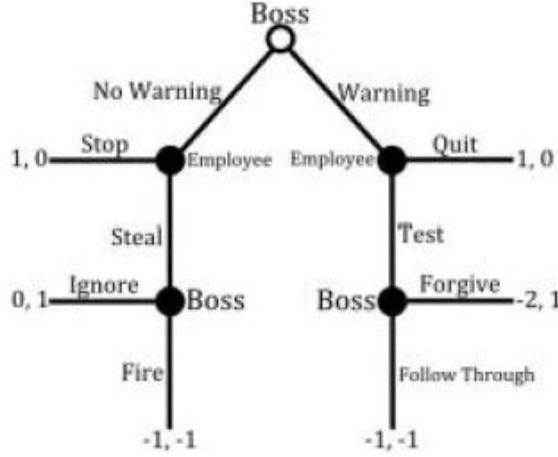
Şekil 3.15 Köprüyü yakma oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.15'teki oyunda iki taraf bir ada için savaşa gitmektedir. Birinci ülke ordusu adaya çıktıktan sonra geldikleri köprüyü yakabilir ya da yakmayabilir. Eğer yakarsa geri kaçma ihtimalleri yoktur, ikinci ülke ada için savaşabilir ya da savaşmaz. Eğer birinci ülke köprüyü yakmazsa ikinci ülke tehdidi görebilir ya da geri çekilebilir. Tehdidi görürse birinci ülke geri kaçabilir ya da savaşa girebilir. Birinci oyuncunun ilk hamleleri “köprüyü yak” (İng. *Burn*) veya “köprüyü yakma” (İng. *~Burn*)’dır. İkinci oyuncu köprü yakılmışsa “istila et” (İng. *Invade*) veya “istila etme” (İng. *~Invade*) hamlelerini yapabilir. Köprü yakılmamışsa “meydan oku” (İng. *Challenge*) veya “meydan okuma” (İng. *~Challenge*) hamlelerini yapabilir. Birinci oyuncu sıra tekrar kendisine gelirse “dövüş” (İng. *Fight*) veya “geri çekil” (İng. *Retreat*) hamlelerini yapabilir.

Bu oyunun alt oyun mükemmel dengesi (SPE) $((burn, retreat), (not\ invade, challenge))$ 'tır. Burada üç adet FPESS bulunmuştur. Bunlar $(burn, invade, challenge, fight)$, $(burn, invade, challenge, retreat)$, $(not\ burn, invade, challenge, fight)$ 'tır. Ortaya çıkan FPESS dengeleri ise $(burn, invade, challenge, fight)$, $(burn, invade, challenge, retreat)$, $(not\ burn, invade, challenge, fight)$ 'tır. Bu FPESS dengelerinden hiçbirisi SPE değildir. FPESS'lerin ilk ikisinin ortak noktası birinci oyuncunun *burn* demesi, ikinci oyuncunun da daima cevap olarak *invade* ve

challenge demesidir. Bu sayede iki oyuncu da birbirine galip gelemmez. Son FPESS de ikinci oyuncu birinciye cevap olarak *invade* ve *challenge* der.

Eli kolu bağılı oyunu



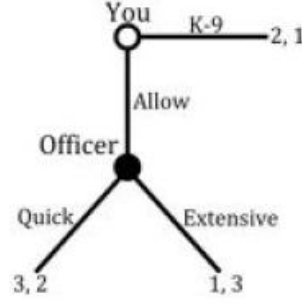
Şekil 3.16 Eli kolu bağılı oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.16'daki oyunda bir patron ve bir çalışan yer almaktadır. Patron çalışanın şirketten bazı materyaller çaldığını öğrenir ve onu uyarıp uyarmamak arasında kararsız kalır. Uyardığında çalışan işten ayrılabilir. Eğer işten ayrılmazsa patron onu görmezden gelebilir ya da gelmez. Uyarmadığında çalışan bu davranışından vazgeçebilir ya da çalmaya devam edebilir. Bu durumda patron onu işten atabilir ya da görmezden gelebilir. Birinci oyuncunun ilk hamleleri “uyar” (İng. *Warn*) ve “uyarma” (İng. *No warning*)’dır. İkinci oyuncunun ilgili alt ağaca göre verebileceği cevaplar “çal” (İng. *Steal*), “dur” (İng. *Stop*), patronu “test et” (İng. *Test*), “işten ayrıl” (İng. *Quit*)’dır. İkinci oyuncu çalmaya devam ederse birinci oyuncu ona cevap olarak “işten at” (İng. *Fire*) veya “görmezden gel” (İng. *Ignore*) hamlelerini yapabilir. İkinci oyuncu uyarı aldıktan sonra patronu birinci oyuncuyu test ederken birinci oyuncu ona cevap olarak onu “affedebilir” (İng. *Forgive*) ya da yapması gerekeni yapıp onu işten atabilir (İng. *Follow through*).

Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi (SPE) ((*warning, ignore, follow through*), (*steal, quit*))’tir. Burada FPESS’ler (*no warning, steal, test, fire, forgive*), (*no warning, steal, test, fire, follow through*), (*warning, steal, test, ignore, follow through*), (*warning, steal, test, fire, follow through*)’dir. Bu stratejiler karşılıklı oynandığında ortaya FPESS dengesi olarak (*no warning, steal, test, fire, forgive*),

(*no warning, steal, test, fire, follow through*), (*warning, steal, test, ignore, follow through*), (*warning, steal, test, fire, follow through*) ortaya çıkmaktadır. Bunlardan hiçbirisi SPE değildir.

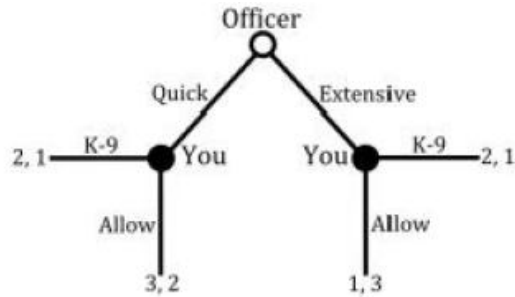
Taşınan adam ve polis oyunu



Şekil 3.17 Taşınan adam ve polis oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.17'deki oyunda bir şehirden diğerine taşınan ve bütün eşyalarını arabasına yükleyen bir adam vardır. Yolda bir polis çevirmesine takılır, polis çevrede ihbar edilen suçlulardan dolayı arabayı aramak istemektedir. Geniş çaplı ya da yüzeysel arama yapabilir, yani “geçmesine izin verebilir” (İng. *Allow*). Ya da bir *K9* köpeği ile arabayı inceletebilir. Taşınan adam eğer köpeği seçerse, köpeğin getirilmesi için yarım saat beklemek zorundadır. En çok yüzeysel arama yapmak istemektedir “hızlı” (İng. *Quick*) arama yapabilir. Polis ise en çok geniş çaplı arama yapmak istemektedir, “geniş çaplı” (İng. *Extensive*) arama yapabilir.

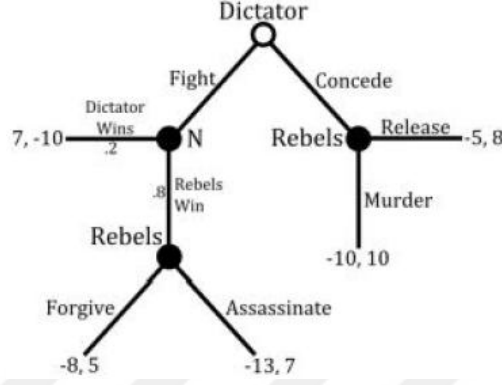
Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi (SPE) (*K9, extensive*)’dir. Bu oyunda FPESS bulunmamaktadır, dolayısıyla FPESS dengesi de bulunmamaktadır.



Şekil 3.18 Taşınan adam ve polis oyunu değiştirilmiş hali (Spaniel, 2011).

Şekil 3.18’de bu oyun taşınan adam ve polis oyununun biraz değiştirilmiş halidir. İlk karar aşaması taşınan adama değil polise verilmiştir. Burada SPE (*quick, allow*)’dur. Bu oyunda da FPESS dengesi bulunmamaktadır.

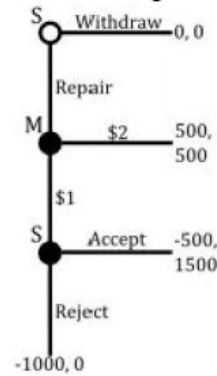
Sivil savaş oyunu



Şekil 3.19 Sivil savaş oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.19’deki oyunda bir diktatör ve diktatöre isyan etmek isteyen isyancılar (İng. *Rebels*) vardır. Diktatör tehdidi görüp duruma razı gelebilir (İng. *Concede*). Bu durumda isyancılar onu serbest bırakabilir (İng. *Release*) ya da öldürebilir (İng. *Murder*). Diktatör tehdidi görmez ve savaşmayı seçerse diktatör kazanabilir (İng. *Win*) ya da kaybedebilir. Kaybederse isyancılar onu öldürebilir (İng. *Assassinate*) ya da affedebilir (İng. *Forgive*). Bu oyunda SPE (*fight, (assassinate, murder)*)’dır. FPESS yoktur, dolayısıyla FPESS dengesi de yoktur.

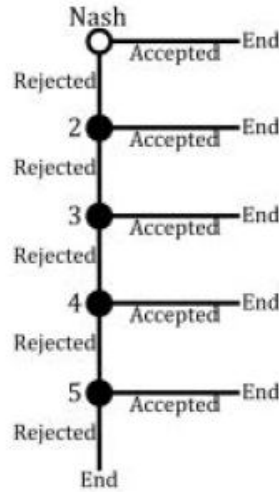
Kontrat oyunu



Şekil 3.20 Kontrat oyunu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.20'deki oyunda ham madde sağlayıcı (İng. *Supplier*) ile üretici (İng. *Manufacturer*) arasında oynanmaktadır. Ham madde sağlayıcısının üreticinin istediği malları sağlayan makinesi bozuktur. Önce onu tamir ettirebilir (İng. *Repair*) ya da işi iptal edebilir (İng. *Withdraw*). Üretici ise ham maddelere birim fiyat olarak 1\$ ya da 2\$ teklif edebilir. Ham madde sağlayıcısı 1\$ teklif edildiğinde reddedebilir (İng. *Reject*) ya da kabul edebilir (İng. *Accept*). Bu oyunda alt oyun mükemmel dengesi (SPE) $((withdraw, accept), \$1)$ 'dir. Bu oyunda dört adet FPESS bulunmuştur. Bunlar $(withdraw, 2$, reject)$, $(withdraw, 2$, accept)$, $(withdraw, 1$, reject)$, $(withdraw, 1$, accept)$ 'dir. Oyunda elde edilen FPESS dengeleri de $(withdraw, 2$, reject)$, $(withdraw, 2$, accept)$, $(withdraw, 1$, reject)$, $(withdraw, 1$, accept)$ 'dir. Bunlardan sonuncusu SPE'dir.

Korsanların oyunu



Şekil 3.21 Korsanların oyunu (Spaniel, 2011).

Pirates!		Offers Received				
		Nash	2	3	4	5
SPE Proposal	Nash	8	0	1	0	1
	2	Dead	9	0	1	0
	3	Dead	Dead	9	0	1
	4	Dead	Dead	Dead	10	0
	5	Dead	Dead	Dead	Dead	10

Şekil 3.22 Korsanların oyunu basitleştirilmiş normal formu (Spaniel, 2011).

Şekil 3.21 ve Şekil 3.22'deki oyunda bir gemide beş adet korsan vardır. Korsanlar 1'den 5'e kadar öncelikli olarak güçlüdür. En güçlü korsan, baş

korsandır. Ganimet olarak 10 lira para vardır. Baş korsan 10 lira parayı öyle bir paylaştırmalıdır ki kendisi dâhil korsanların en az yarısı bu paylaşıma razı gelmelidir. Yoksa baş korsan gemiden atılmaktadır ve sıradaki güçlü korsan, yeni baş korsan seçilmektedir. En son iki tane korsan yani 4 ve 5 numara kalıncaya kadar oyun devam eder. 4 numaralı korsan 5'ten güçlüdür, onun dediği olur ve 10 lira paranın tümünü alır. Bu oyunun oyun ağacı çok büyük olduğundan çizilmemiştir, ancak alt oyun mükemmel dengesi (SPE) şu şekilde bulunmuştur:

Oyun incelenmeye en sonundan başlanır. En sonunda 4 ve 5 kaldığında 4 kendisine 10 lira alır ve 5'e 0 lira verir. Oyunda 3, 4, 5 kaldığında 5 numaralı korsan en az 1 lira almalıdır ki 4 numaralı korsanın paylaşımına tercih etsin, bu yüzden 3 numara ona 1 lira verir, kendisine 9 lira alır. 2,3,4,5 kaldığında 2 numaralı korsan 4 numaraya en az 1 vermelidir ki 3'ün paylaşımına tercih etsin. 2 numara 3 ve 5'e 0 lira verir. 1, 2, 3, 4, 5 kaldığında yani hiç kimse henüz gemiden atılmamışken baş korsan olan 1 numara 3 ve 5'e 1'er lira verir ki 4 numaralı korsanın paylaşımına tercih etsinler. 1 numaralı korsan da kendisine 8 lira alır.

Bu oyun 4 ve 5 numaralı korsan kaldığında diktatörlük oyununa eşittir. İki kişilik diktatörlük oyununda FPES yoktur, dolayısıyla FPES dengesi de yoktur.

3.4.5 Eşzamanlılaştırılmış oyunlarda ceza fonksiyonları

Gerçek hayatta adalet kavramı ile ödül ve ceza birbirinden bağımsız düşünülemez, bu nedenle bu bölümde cezalandırma davranışının adalet ile birlikte oyunlardaki yeri irdelenmiştir. Bazı oyunlarda beklendiği şekilde davranmayan oyunculara karşı cezalandırma davranışı görülmektedir. Örneğin kamu malı oyununda herkesin kamu yararına bir miktar para ortaya koyduğu ancak bazı oyuncuların para koymayıp o kamu malından yararlandığı görülebilmektedir. Ortaya para koymak kadar para koymayan oyuncuları cezalandırmak da irrasyonel bir davranıştır. Çünkü cezalandırma davranışı maliyetlidir ve cezalandırmanın fayda değerine doğrudan pozitif bir etkisi yoktur. Cezalandırma davranışı oyun teorisinde incelenen bir kavram olduğundan bu kavram eşzamanlılaştırma kavramı içinde incelenebilir.

Bir eşzamanlılaştırma matrisinde yer alan iki sonuç içeren hücrelerin kümesine M diyelim. Bir f fonksiyonu $(z_i, z_j) \in M$ 'de yer alan z_i ve z_j 'den bir tanesini seçen fonksiyon olsun, yani $f: M \rightarrow Z, f((z_i, z_j)) = z_i$ veya $f((z_i, z_j)) = z_j$ olsun. f fonksiyonu girdi olarak aldığı iki sonuçtan iki oyuncu

arasındaki fayda değeri farklı minimum olanı seçebilir. Bu fonksiyon aracılığıyla eşzamanlılaştırılmış oyunlarda bir çeşit cezalandırma/utandırma işlevinin yerine getirildiği düşünülebilir. Eğer bir sonuç diğerini güçlü olarak eziyorsa, ezilen sonucu eledikten sonra oyuncular arasındaki fayda değeri farkı minimum olanı seçebilir. Eğer oyunda son hamleyi yapacak oyuncu diğerini tehdit ediyorsa son hamleyi yapan oyuncunun daha çok fayda kazandığı sonucu seçebilir. Örneğin ultimatoom oyununda son hamleyi yapan oyuncu para paylaşımı yapan oyuncuyu tehdit etmektedir. Dolayısıyla, f fonksiyonu çeşitli şekillerde tanımlanabilir.

Çizelge 3.10 Şekil 3.1'deki oyunun verilen z_1, z_2, z_3 'e göre eşzamanlılaştırma matrisi.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	$((1,10), (10,1))$	$((5,5), (10,1))$	$((1,10), (1,10))$	$((5,5), (1,10))$
(s_1, s_4)	$((1,10), (5,5))$	$((5,5), (5,5))$	$((1,10), (1,10))$	$((5,5), (1,10))$
(s_2, s_3)	$((10,1), (10,1))$	$((10,1), (10,1))$	$((10,1), (1,10))$	$((10,1), (1,10))$
(s_2, s_4)	$((10,1), (5,5))$	$((10,1), (5,5))$	$((10,1), (1,10))$	$((10,1), (1,10))$

Örneğin, Şekil 3.1'deki oyunda $z_1 = (1,10)$, $z_2 = (5,5)$, $z_3 = (10,1)$ olsun. M kümesinde örneğin bir hücre $(z_1, z_2) = [(1,10), (5,5)]$ şeklindedir. Solda daima a , sağda daima b oyuncusunun kazanacağı fayda değeri yer alsın. $(z_1, z_1) = [(1,10)(10,1)]$ şeklindedir. Eşzamanlılaştırma matrisi ise Çizelge 3.10'da yer almaktadır.

Eğer f fonksiyonu fayda değeri farkı minimum olan sonucu seçen fonksiyon ise $f((z_1, z_2)) = f([(1,10)(5,5)]) = (5,5)$ olur. Ama örneğin $f((z_1, z_1)) = f([(1,10)(10,1)])$ 'de her iki sonucun fayda değeri farkı eşittir ve $10 - 1 = 9$ 'dur. Bu durum için, aynı sonuçlar girdi olarak alındığında, toplam faydanın eşit olarak bölüşülmesi gibi bir sonuç tanımlanabilir. $1 + 10 = 11$, $\frac{11}{2} = 5.5$ olmak üzere $f([(1,10)(10,1)]) = (5.5, 5.5)$ şeklinde tanımlanabilir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta $f((z_1, z_3)) = f([(1,10)(1,10)]) = (1,10)$ 'tür. Çünkü çizelgelerde solda daima a , sağda daima b oyuncusunun kazanacağı fayda değeri yer almaktadır.

Çizelge 3.11 f fonksiyonu sonrası örnek matris.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	(5,5,5.5)	(5,5)	(1,10)	(5,5)
(s_1, s_4)	(5,5)	(5,5)	(1,10)	(5,5)
(s_2, s_3)	(10,1)	(10,1)	(5.5, 5.5)	(5.5, 5.5)
(s_2, s_4)	(5,5)	(5,5)	(5.5, 5.5)	(5.5, 5.5)

Çizelge 3.10'da yer alan matriste, f fonksiyonu eğer fayda değeri farkı minimum olanı seçme şeklinde tanımlanırsa Çizelge 3.11 oluşur. Koyu renkli hücreler Nash dengesidir.

f fonksiyonu eşzamanlılaştırma matrisinde yer alan ikili sonuçlardan bir tanesini seçmeye yarar. Bu fonksiyonun gerçek hayattaki karşılığı olarak, bir oyuncunun ortaya çıkan oyun sonuçlarından hangisini seçeceği düşünülebilir. Tabii ki her zaman için iki sonuçtan bir tanesini seçmek kolay değildir. Örneğin $z_1 = (5,10)$, $z_2 = (20,20)$ iken bir kişinin hem a hem de b oyuncusu konumunda z_2 sonucunu seçmesi daha çok beklenen durumdur. Ancak örneğin $z_1 = (-1,20)$, $z_2 = (50,2)$ iken bir kişinin a oyuncusu konumunda olduğunda z_2 , b oyuncusu konumunda olduğunda z_1 sonucunu seçmesi daha çok beklenen bir durumdur. Bir oyuncunun her iki pozisyonda da aynı sonucu seçmesi her zaman mümkün değildir. f fonksiyonu ilk durumdaki kadar kolay tanımlanamaz. Bunlar göz önünde bulundurularak üç adet f fonksiyonu sunulmuştur.

$x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $z_1 = (x, y)$ ve $z_2 = (z, t)$ iki oyun sonucu olsun,

(1) f fonksiyonu iki sonuçtan fayda değeri farkı mutlak değeri az olanı seçer.

Eğer $x = t \wedge y = z$ ise $f(z_1, z_2) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$,

Eğer $x = z \wedge y = t$ ise $f(z_1, z_2) = (x, y)$

Bu iki koşul da yoksa ise,

$|x - y| \leq |z - t| \Rightarrow f(z_1, z_2) = z_1$

$$|x - y| > |z - t| \Rightarrow f(z_1, z_2) = z_2$$

(2) f fonksiyonu iki sonuçtan biri diğerini keskin olarak eziyorsa, ezen sonucu seçer. Her iki sonuç da birbirini ezmiyorsa, fayda değeri farkı mutlak değeri az olanı seçer.

$$\text{Eğer } x = t \wedge y = z \text{ ise } f(z_1, z_2) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right),$$

$$\text{Eğer } x = z \wedge y = t \text{ ise } f(z_1, z_2) = (x, y)$$

Bu iki koşul da yok ise,

$$x < z \wedge y < t \Rightarrow f(z_1, z_2) = z_2$$

$$x > z \wedge y > t \Rightarrow f(z_1, z_2) = z_1$$

Bu dört koşul da yok ise (1).

(3) f fonksiyonu Rabin (1993) adalet tanımının uygulandığı (2)'deki kuralla iki sonuçtan birini seçer.

Rabin adalet tanımı

Adalet yaklaşımına mevcut bazı çalışmalar eklenebilir. Farklı bir adalet tanımı Rabin (1993) makalesinde bulunmaktadır. Bu makaleye göre bir oyuncunun kazanacağı fayda değeri, o oyuncunun yapacağı hamleye, karşısındaki oyuncunun yapacağını düşündüğü hamleye ve karşısındaki oyuncunun kendisi hakkındaki tahminine bağlıdır. Rabin, bu üç değişken ile iki oyuncunun karşılıklı olarak birbirlerine gösterdikleri kibarlığı ölçer.

Makalede Rabin adalet tanımı şöyle anlatılmaktadır:

Sonlu iki oyunculu eş zamanlı oynanan bir oyunda i ve j oyuncular olsun,

a_i : i oyuncusunun j 'ye yapacağı hamledir.

a_j : j oyuncusunun i 'ye yapacağı hamledir.

b_i : j 'nin, i 'nin yapacağını düşündüğü hamledir.

b_j : i 'nin, j 'nin yapacağını düşündüğü hamledir.

c_i : i 'ye göre, j oyuncusu i 'nin bu hamleyi yapacağını düşünmektedir.
 c_j : j 'ye göre, i oyuncusu j 'nin bu hamleyi yapacağını düşünmektedir.

Rabin bu değişkenleri kullanarak iki adet fonksiyon tanımlamıştır. Bunlardan birincisi i 'nin j 'ye göre kibarlık fonksiyonudur. π_j^h , j 'nin oyunda kazanabileceği maksimum Pareto etkin fayda değeri, π_j^{min} , j 'nin oyunda kazanabileceği minimum fayda değeri, π_j^e , j 'nin kazanabileceği maksimum ve minimum pareto efficient fayda değerinin ortalaması olmak üzere,

$$f_i(a_i, b_j) \equiv \frac{\pi_j(b_j, a_i) - \pi_j^e(b_j)}{\pi_j^h(b_j) - \pi_j^{min}(b_j)}$$

Eğer $\pi_j^h(b_j) - \pi_j^{min}(b_j) = 0$ ise $f_i(a_i, b_j) = 0$

Diğer fonksiyon ise i oyuncusunun j 'nin kendisine gösterdiğini düşündüğü kibarlık fonksiyonudur.

$$\tilde{f}_j(b_j, c_i) \equiv \frac{\pi_i(c_j, b_j) - \pi_i^e(c_j)}{\pi_i^h(c_j) - \pi_i^{min}(c_j)}$$

Eğer $\pi_i^h(c_j) - \pi_i^{min}(c_j) = 0$ ise $\tilde{f}_j(b_j, c_i) = 0$

Bu iki fonksiyonu kullanarak yeni bir fayda fonksiyonu tanımlamıştır.

$$U_i \equiv \pi_i(a_i, b_j) + \tilde{f}_j(b_j, c_i) \cdot [1 + f_i(a_i, b_j)]$$

Çizelge 3.12 Rabin adalet tanımı uygulan Çizelge 3.10'daki matrisin son hali.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	$((0.3, 10.3), (10.3, 0.3))$	$((4.9, 4.9), (10.3, 0.3))$	$((0.3, 10.3), (0.3, 10.3))$	$((4.9, 4.9), (0.3, 10.3))$
(s_1, s_4)	$((0.3, 10.3), (4.9, 4.9))$	$((4.9, 4.9), (4.9, 4.9))$	$((0.3, 10.3), (0.3, 10.3))$	$((4.9, 4.9), (0.3, 10.3))$
(s_2, s_3)	$((10.3, 0.3), (10.3, 0.3))$	$((10.3, 0.3), (10.3, 0.3))$	$((10.3, 0.3), (0.3, 10.3))$	$((10.3, 0.3), (0.3, 10.3))$
(s_2, s_4)	$((10.3, 0.3), (4.9, 4.9))$	$((10.3, 0.3), (4.9, 4.9))$	$((10.3, 0.3), (0.3, 10.3))$	$((10.3, 0.3), (0.3, 10.3))$

Bir oyunun eşzamanlılaştırılmasında yaratılan matrisin her bir hücresinde iki adet sonuç bulunmaktadır. Bu sonuçların her biri için yukarıda verilen Rabin fayda

fonksiyonu değerlerinin hesaplaması yapılmıştır. Çizelge 3.10'daki örnek matris Çizelge 3.12 haline gelmiştir.

Bu matriste Şekil 3.1'deki oyun ağacında $z_1 = (10.3, 0.3)$, $z_2 = (4.9, 4.9)$, $z_3 = (0.3, 10.3)$ olarak düşündüğümüzde oyunda FPESS dengesi olmadığını görürüz. Çünkü ikinci oyuncunun, birinci oyuncu hangi hamleyi oynarsa oynasın, en az birinci oyuncu kadar fayda değeri kazanmasını sağlayan bir FPESS yoktur. Çünkü, Birinci oyuncu s_2 oynadığında ikinci oyuncunun yapabileceği bir şey yoktur. Bu oyunda iki adet Nash dengesi vardır, bunlar (s_2, s_3) ve (s_2, s_4) 'tür. Ancak sadece (s_2, s_3) SPE'dir. Çünkü ikinci oyuncu sıra kendisine geldiğinde sadece s_3 stratejisini oynar. Birinci oyuncu bunu bildiğinden s_2 stratejisini oynar. Burada ikinci oyuncunun s_3 demesi inandırıcı bir tehdittir.

Burada örneğin (s_2, s_4) ve (s_1, s_4) stratejilerin kesiştiği hücrede $(10.3, 0.3)$ ve $(4.9, 4.9)$ sonuçları yer almaktadır. İlk başta birinci oyuncu s_1 ve s_3 stratejilerini oynayacak pozisyonda iken ve ikinci oyuncu s_2 ve s_4 stratejilerini oynayacak pozisyonda iken karşılıklı olarak birinci oyuncun s_2 , ikinci oyuncunun s_4 oynaması ile $(10, 1)$ sonucu ortaya çıkmıştır. Daha sonra bu sonuca Robin adalet mekanizmasına dair işlemler yapılarak $(10.3, 0.3)$ elde edilmiştir. Ardından, ikinci oyuncu s_1 ve s_3 stratejilerini oynayacak pozisyonda iken ve birinci oyuncu s_2 ve s_4 stratejilerini oynayacak pozisyonda iken karşılıklı olarak ikinci oyuncun s_1 , birinci oyuncunun s_4 oynaması ile $(5, 5)$ sonucu ortaya çıkmıştır. Daha sonra bu sonuca Robin adalet mekanizmasına dair işlemler yapılarak $(4.9, 4.9)$ elde edilmiştir.

Burada birinci oyuncunun yapmak istediği hamle $(10, 1)$ sonucunu veren hamle olarak kabul edilmiştir. İkinci oyuncunun yapmak istediği hamle de $(10, 1)$ sonucunu veren hamle olarak kabul edilmiştir. Bu durumda ikinci oyuncu birinci oyuncuya göre daha cömerttir. Formüllerde kullanılacak sabitler bu örnek problemde her iki oyuncu için de eşit çıkmıştır.

$$\pi_j^e(b_j) = \frac{10 + 1}{2}$$

$$\pi_j^h(b_j) = 10$$

$$\pi_j^{min}(b_j) = 1$$

Birinci oyuncunun ikinci oyuncuya karşı kibarlığı,

$$f_i(a_i, b_j) \equiv \frac{\pi_j(b_j, a_i) - \pi_j^e(b_j)}{\pi_j^h(b_j) - \pi_j^{min}(b_j)} = \frac{1 - 5.5}{9} = -0.5$$

Birinci oyuncunun, ikincinin kendisine karşı gösterdiğini düşündüğü kibarlık,

$$\tilde{f}_j(b_j, c_i) \equiv \frac{\pi_i(c_j, b_j) - \pi_i^e(c_j)}{\pi_i^h(c_j) - \pi_i^{min}(c_j)} = \frac{10 - 5.5}{9} = 0.5$$

$$U_i \equiv \pi_i(a_i, b_j) + \tilde{f}_j(b_j, c_i) \cdot [1 + f_i(a_i, b_j)] = 10 + 0.5 \cdot [1 - 0.5] = 10.25 \\ \cong 10.3$$

olarak hesaplanmıştır. İkinci oyuncunun birinci oyuncuya karşı kibarlığı,

$$f_j(a_j, b_i) \equiv \frac{10 - 5.5}{9} = 0.5$$

İkinci oyuncunun, birinci oyuncunun kendisine gösterdiğine inandığı kibarlık ise

$$\tilde{f}_i(b_i, c_j) \equiv \frac{1 - 5.5}{9} = -0.5$$

$$U_j \equiv 1 + (-0.5) \cdot [1 + 0.5] = 0.25 \cong 0.3$$

olarak hesaplanmıştır. Diğer matris hücrelerindeki fayda değerleri için de aynı işlem uygulanmıştır. Elbette ki oyuncuların $a_i, a_j, b_i, b_j, c_i, c_j$ değişkenlerine dair inançları farklı yönde seçilebilir. Burada sadece bir durum incelenmiştir.

Çizelge 3.13 Çizelge 3.12'deki matrise (2).f fonksiyonu uygulandığında matrisin son hali.

	(s_1, s_3)	(s_1, s_4)	(s_2, s_3)	(s_2, s_4)
(s_1, s_3)	(5.3,5.3)	(4.9,4.9)	(0.3,10.3)	(4.9,4.9)
(s_1, s_4)	(4.9,4.9)	(4.9,4.9)	(0.3,10.3)	(4.9,4.9)
(s_2, s_3)	(10.3,0.3)	(10.3,0.3)	(5.3, 5.3)	(5.3, 5.3)
(s_2, s_4)	(4.9,4.9)	(4.9,4.9)	(5.3, 5.3)	(5.3, 5.3)

Pareto-etkin noktaların bulunmasında kullanılan Pareto tanımı için Lindroth et al.'dan (2010) yararlanılmıştır. Çizelge 3.12'de yer alan matrise (2).f fonksiyonu

uygulandığında Çizelge 3.13 elde edilmiştir. Koyu renkli hücreler Nash dengesidir. Bu örnekte Robin adalet tanımı oyun dengelerinin değişmesine neden olmamıştır, ancak oyun dengelerinin değiştiği oyunlar var olabilir ve bu adalet tanımıyla gerçek deney sonuçlarının karşılaştırılması yapılabilir.

3.4.6 Karma FPESS uygulaması

Bu bölümde, Bölüm 3.3'te Tanım 3.8 ve Tanım 3.10'da yeni bir kavram olarak sunduğumuz karma FPESS örneği verilecektir.

Çizelge 3.14 Örnek bir Normal form oyun (I).

1.oyuncu \ 2.oyuncu	c	d
a	1,5	3,0
b	4,2	2,3

Birinci oyuncu α olasılıkla a stratejisini, ikinci oyuncu β olasılıkla c stratejisini oynasın. İki oyuncunun beklenen fayda değeri farkı fonksiyonu ve α ile β 'ya göre türevleri:

$$fark(\alpha, \beta) = (-4) \alpha \beta + 3\alpha(1 - \beta) + 2(1 - \alpha) \beta + (-1)(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$= -10\alpha\beta + 4\alpha + 3\beta - 1$$

$$\frac{d \{fark(\alpha, \beta)\}}{d\alpha} = -10\beta + 4 \rightarrow \alpha = 3/10$$

$$\frac{d \{fark(\alpha, \beta)\}}{d\beta} = -10\alpha + 3 \rightarrow \beta = 4/10$$

Oyunculardan herhangi biri, fayda değeri farkı dengesine ait olasılığı oynadığında oyuncular arasındaki fark optimal hale gelir. Örneğin birinci oyuncu $\alpha = 3/10$ olasılıkla a stratejisini oynadığında ya da ikinci oyuncu $\beta = 4/10$ olasılıkla c stratejisini oynadığında $fark(\alpha, \beta) = 2/10$ olur. Bu oyunda karma Nash dengesindeki olasılıklar $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right)$ 'tür. Oyuncular bu olasılıklara uygun

karma stratejilerini oynadığında elde edecekleri fayda değerleri Çizelge 3.15'te yer almaktadır.

1. oyuncu a ve b stratejisini sırasıyla $(\frac{3}{10}, \frac{7}{10})$ olasılıklarıyla oynadığında 2. oyuncudan daima 0.2 fazla kazanmaktadır. Bu karma strateji 1. oyuncunun karma FPESS'idir. Oyuncular Nash dengesi olasılıklarını oynadıklarında iki oyuncu arasındaki fark sıfırdır. Bu durumda 1. oyuncunun lehine olan fark kapanmış olur. Her ne kadar karma Nash dengesi olasılığını oynamak rasyonel olan seçenek olsa da arada fark olmasını arzu eden bir oyuncu, kendi fayda değerindeki azalmayı tolere edilebilir görürse, karma FPESS'ini oynayabilir. Bu sadece karma FPESS'i olan oyuncu için değil, aradaki fark aleyhine olan oyuncu için de geçerlidir. Örneğin karma FPESS'i olmayan bir oyuncu yine de karşı oyuncu ile aradaki farkı optimal hale getirmek isterse, fayda değeri farkı dengesine ait olasılık ile oynayabilir. Örneğin Çizelge 3.14'te 2. oyuncu c ve d stratejilerini sırayla $(\frac{4}{10}, \frac{6}{10})$ olasılıkları ile oynarsa karşı taraftan daima 0.2 az kazanır.

Çizelge 3.15 Karma Nash ve FPESS olasılıkları ile oyuncuların fayda değerleri.

Olasılıklar	$(\alpha, \beta) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$ iken oyuncuların kazanacağı fayda değerleri:	$(\alpha, \beta) = (\frac{3}{10}, \frac{4}{10})$ iken oyuncuların kazanacağı fayda değerleri:
1.oyuncu	2.5	262/100
2.oyuncu	2.5	242/100
Fark	0	0.2
Olasılıklar	$(\alpha, \beta) = (\frac{1}{6}, \frac{4}{10})$ iken	$(\alpha, \beta) = (\frac{3}{10}, \frac{1}{4})$ iken
1.oyuncu	2.7	2.5
2.oyuncu	2.5	2.3
Fark	0.2	0.2

Fayda değeri farkı dengesi iki oyuncu arasında var olan bir denge noktası olduğundan, bir oyuncu diğerini tehdit ya da cezalandırma amaçlı olarak kullanabilir. Nash dengesi oynadığı duruma göre kaybı tolere edilebilir durumda ise aradaki farkı optimal hale getirmek için bu dengeyi seçebilir.

Bir oyunda iki oyuncu arasında FPESS anlamında ezilen strateji yok ise bir tanesi mutlaka karma FPESS iken diğer karma FPESS'e sahip olmak zorunda

değildir. Örneğin Çizelge 3.14'te yer oyunda ikinci oyuncunun karma FPES'si yoktur. Çünkü, $fark(\alpha, \beta) = -10\alpha\beta + 4\alpha + 3\beta - 1$ fonksiyonunda 1. oyuncu a ve b stratejisini sırasıyla $(\frac{3}{10}, \frac{7}{10})$ olasılıklarıyla oynadığında 2. oyuncudan oyun sonucunu değiştirebilecek bir olasılığı yoktur.

3.5 Sonuçlar

Üçüncü bölümde tez kapsamında yer alan mükemmel bilgili sıfır toplamli iki kişilik oyunlarla birlikte sıralı oynanan oyunların da yordamsal olarak adaletli olmasını sağlayan gereksinimler anlatılmıştır. Klaus ve Klijn'deki (2006) yordamsal adaleti oyuncuların oyunun herhangi bir anında aynı hamleyi yapabilmesine bağlıdır. Yordamsal adalet bu açıdan yaklaşıldığında herhangi bir tarafa iltimas sağlamayan yordamsal adaletli mekanizmalar yaratmak zorlaşmaktadır. Bu nedenle bu tez çalışmasında oyunlara ve gerçek hayata uygulaması daha kolay olan yordamsal adalet ve sonuçsal adalet tanımı (Bkz. Tanım 3.1 ve Tanım 3.2) yapılmış ve oyun teorisine dair temel kavramlar da kullanılarak analiz edilmiştir.

Tez kapsamında oyunlardaki adalet kavramını incelemek için yordamsal ve sonuçsal adalet tanımı yapılmıştır (Bkz. Tanım 3.1 ve Tanım 3.2). Yordamsal adalet tüm oyuncuların aynı hamle kümesine sahip olması olarak tanımlandığında mükemmel bilgili sıfır toplamli simetrik oyunlar yordamsal adaletli hale gelmektedir. Simetrik olmayan oyunlar, oyuncular aynı hamle kümesine sahip olmadığından yordamsal adaletli olamaz. Bu tip oyunları yordamsal adaletli hale getirmek için bu tez çalışmasında eşzamanlılaştırma dediğimiz, oyuncuların birbirlerinin hamlelerini de oynayabildikleri bir üst oyun tanımlanmıştır. Buna göre oyuncular aynı strateji kümesine sahip olur. Oyun sonuçları arasında seçim yapmak, daha adaletli davranan oyuncuyu ödüllendirmek, bencil -çoğu zaman rasyonel- davrananı cezalandırmak şeklinde f fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu f fonksiyonlarıyla öznel sonuçsal adalet tanımları yapılmıştır. Yordamsal olarak adaletli olmayan oyunların sonuçlarında ancak öznel bir sonuçsal adaletten söz edilebilir.

Eşzamanlılaştırma işlemi ileri götürülerek sıralı oyunlara da uygulanmış ve genişletilmiş form oyun ağaçlarından eşzamanlılaştırma matrisleri elde edilmiştir. Bu matrislerde görülmüştür ki ültimat oyununda deneysel sonuçlarda yer alan oyuncu davranışları rasyonel değildir ve oyuncular aralarındaki fayda değeri farkını önemsemektedir. Bu durum ve Schaffer'ın (1988) FPES kavramı kullanılarak n

oyunculu sıralı oyunların indüklenmiş normal formunda yeni bir denge tanımı yapılmıştır (Bkz. Tanım 3.6 ve Tanım 3.7). Bu dengeye ulaştıran stratejileri oynamak rasyonel olmayabilir. Ancak gerçek hayatta karşımıza çıkan bir durumdur.

Ayrıca, bu bölümde yordamsal olarak adaletli olmanın oyunun sonucunun adaletli olmasındaki etkisi ve sonucun adaletli olmasının yordamsal olarak adaletli olmayı gerektirip gerektirmediği araştırılmıştır. Buna göre bir oyunun yordamsal olarak adaletli olması oyuncuları motive eder, ancak sonuçtaki bir öznel adalet için yordamsal adaletin var olması şart değildir. Örneğin ultimatoom oyununda kendisine paylaşması için para verilen oyuncu stratejik olarak avantajlı olmasına rağmen parayı eşit bölebilir. Bu durumda oyun yordamsal olarak adaletli değildir, ancak paranın eşit paylaşılması öznel bir adalet tanımı olarak kabul edildiğinde oyun sonuçsal olarak adaletlidir.

Sonucun dengede olması için yordamsal adaletli olması da şart değildir. Örneğin Şekil 3.2’de yer alan oyunda $(S1, S3)$ SPE’dir, ancak oyun sıralı oynanan bir oyun olduğundan yordamsal olarak adaletli değildir. Oyun sonucu $(10,10)$ ile bitmiştir, ancak örneğin $(9,5)$ olsaydı yine $(S1, S3)$ SPE olurdu. Çünkü 9, -20 ’den, 5, -30 ’dan büyüktür.

Yordamsal adalet olmadığında sonuçsal adaletin mümkün olup olmadığı çeşitli adalet tanımlarına göre araştırılmıştır ve buna uygun olarak yeni bir sonuçsal adalet tanımı yapılmıştır (Bkz. Tanım 3.2). Yordamsal adalet içeren oyunların sonuçları sonuçsal olarak adaletli kabul edilmiştir. Yordamsal adalet olmadığında örnek f fonksiyonları kullanılarak öznel sonuçsal adalet tanımları yapılmıştır.

Son olarak, yordamsal adaletli eşzamanlı bazı oyunlar üretilmiş ve Nash dengeleri ile birlikte incelenmiştir. Bazı sıralı oynanan oyunlarda FPESS’lerin var olduğu görülmüştür. Ancak bir oyunda FPESS olduğunda bunların aynı anda SPE olması gibi bir zorunluluk yoktur. FPESS anlamında ezilen strateji içermeyen N oyunculu oyunlarda herhangi iki oyuncu arasında en az bir tanesinin karma FPESS’e sahip olduğu bu bölümde gösterilmiştir.

4. KARARLI EŞLEŞME PROBLEMİNDE YORDAMSAL VE SONUÇSAL ADALET

4.1 Giriş

Bu bölümde tez kapsamı gereğince bazı yordamsal olarak adaletli merkezi/dağıtık eşleşme algoritmaları önerilip, uygulama haline getirilerek analiz edilmiştir. Analiz ederken bazı ölçütler kullanılmıştır. Bu ölçütler çalışma süresi karmaşıklığı, katılımcı memnuniyeti, kararlılık derecesi, eşitlik gibi ölçütlerdir.

Kararlı eşleşme problemi tek taraflı ve çift taraflı olarak ikiye ayrılan bir problemdir. Tek taraflı eşleşme problemi kararlı oda arkadaşı problemidir. N adet eleman içeren bir küme vardır. Kümedeki herkesin, diğer üyeleri tercih etme sıraları vardır. Bu sıralara bakılarak, her bir üye için bir oda arkadaşı seçilir. Her zaman kararlı bir çözüm bulunamayabilir. Kararlı çözümü olan problemlerde, kararlı çözümü (varsa) bulabilen bir algoritma Irving'te (1985) sunulmuştur. Çift taraflı kararlı eşleşme probleminde ise N adet eleman içeren iki küme vardır ve kümelerdeki elemanların karşı kümedeki her bir eleman için bir tercih sıralaması vardır. Bu tercihlere bakılarak bir eleman birinci kümeden, diğer eleman ikinci kümeden olmak üzere N adet kararlı çift oluşturulmaya çalışılır. Bu problemi çözen en ünlü algoritma Gale ve Shapley'de (1962) sunulmuştur.

Bu tezin konusu ise çift taraflı kararlı eşleşme problemi ile ilgilidir. Gale ve Shapley'nin (1962) önerdiği algoritma, sadece bir kümedeki elemanlara teklif hakkı vererek teklif hakkı verdiği kümeye iltimas geçmektedir. Teklif etme hakkı olan küme, algoritmanın sonunda avantajlı olan taraftır (Gale and Shapley, 1962) ve bu durum yordamsal olarak adaletli değildir. Bu problemi çözmek için önerilecek bir algoritmanın yordamsal olarak adaletli olması için $2N$ oyuncunun aynı hamle hakkına sahip olması gerekir. Bu süreçte üç başlık altında toplanabilecek bir çalışma yapılmıştır.

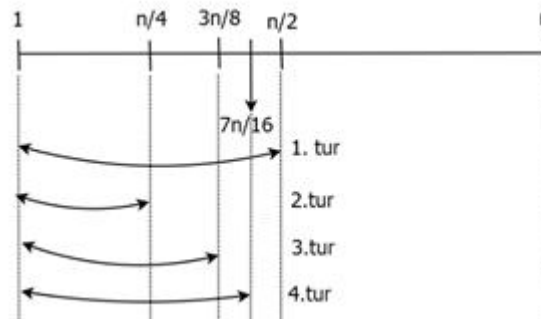
Birinci başlık 4.2 bölümüdür ve bu bölümde yordamsal değil ama sonuçsal olarak kısmen adaletli sonuçlar bulabilen bir algoritma yaklaşımı sunulmuştur. İkinci başlık 4.3 bölümüdür ve bu bölümde yordamsal olarak adaletli bir algoritma yaklaşımı sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar da birçok ölçüte göre sonuçsal olarak adaletlidir. Son başlık ise 4.4 bölümüdür. Bu bölümdeki algoritma da yordamsal olarak adaletli değildir ancak sonuçları irdeleyen ölçütler açısından sonuçsal olarak en adaletli sonuçlar bu algoritma ile elde edilmiştir.

4.2 İkili Arama Algoritması Şeklinde Çalışan Sınırlandırılmalı Algoritmalar

Gale-Shapley algoritmasında erkekler kadınlara teklif yaptıklarında eğer bir kadın boşta ise gelen teklifi kabul etmek zorundadır. Eğer boşta değilse ve bir eşi varsa mevcut eşine kıyasla daha çok tercih ettiği bir erkekten teklif geldiğinde nişanı bozar ve bu yeni teklifi kabul eder. Bu bölümde bu durum için yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşıma göre, Gale-Shapley algoritmasında kadınlar gelen tekliflerin hepsini değerlendirmek zorunda değildir. Teklif eden taraf yine erkekler kümesi, teklifleri değerlendiren taraf kadınlar kümesidir. Teklifleri alan kümedeki elemanlar bekar olsalar da belirlenen bir sınır değerine göre, o sınır değerinden kötü tercihlerinden gelen teklifleri reddederler. Böylece ortaya çıkan kararlı çözümlerde sonuçlar teklif edilen küme lehine olabilir. Bu yaklaşım yordamsal adaletli olmaktan ziyade, sonuçsal olarak Gale-Shapley algoritmasına göre daha adaletli çözümler üretmiştir. Algoritmanın bulduğu ara çözümler ve son çözüm rank toplamaları ve rank farklarının toplamı anlamında Gale Shapley algoritmasının bulduğu çözümlere göre sonuçsal olarak daha adaletlidir.

4.2.1 Algoritma 1

Bu algoritma bir döngü içinde Gale-Shapley algoritmasını kullanan, ikili arama algoritmasına benzer şekilde çalışan ve her iki küme için kısmen eşitlikçi sonuçlar üreten bir algoritmadır. Bir kararlı eşleşme probleminde, bir m erkeği erkekler için en iyi çözümde i . ve kadınlar için en iyi çözümde j . tercihi ile eşleşmiş olsun. Bu durumda m erkeği, diğer tüm çözümlerde de sadece ve sadece i ve j dâhil olmak üzere- i ile j aralığındaki tercihleriyle eşleşebilir. Aynı şey herhangi bir w kadını için de geçerlidir.



Şekil 4.1 Algoritmanın örnek bir çalışma rotası (I).

Örnek bir çalışma Şekil 4.1’de gösterilmiştir. Algoritmanın ilk turunda, n adet kadın ve n adet erkeğin olduğu bir problemde bir w kadını kendisine bir m erkeğinden teklif geldiğinde, m ’i kaçınıcı olarak tercih ettiğine baksın. m ’i tercih etme sırası, n tane erkek içinde 1 ile $n / 2$ arasında ise o teklifi incelemeye alsın, $n / 2$ ’den büyük ise teklifi incelemeyi reddetsin. Gale-Shapley algoritması tüm kadınlar için bu sınırlama ile çalıştıktan sonra kararlı bir çözüm buluyorsa, algoritma tekrar çalışsın, ancak kadınlar sadece 1 ile $n / 4$ arasındaki tercihlerinden gelen teklifleri değerlendirmeye alsın, $n / 4$ ’ten büyük tercihlerinden gelen teklifleri incelemeyi reddetsin. 1 ile $n/4$ aralığında çözüm bulamazsa kadınlar 1 ile $3n/8$ arasındaki tercihlerinden gelen teklifleri değerlendirsin, diğerlerini reddetsin. Algoritma yine bir çözüm bulamazsa bu sefer kadınlar 1 ile $7n/16$ arasındaki tercihlerinden gelen teklifleri değerlendirsin, geri kalanını incelemeyi reddetsin. Yeni bir tura geçilirken bulunan yeni sınır, sağ sınıra eşitse algoritma sonlansın.

Bu yaklaşımda Gale-Shapley algoritmasının çalışma zamanı karmaşıklığı $O(n^2)$ ’dir (Iwama and Miyazaki, 2008). Burada Gale-Shapley algoritması $O(\log n)$ kere çalıştırıldığından toplam çalışma zamanı karmaşıklığı $O(n^2 \log n)$ ’dir.

```

sol = 1
sağ = n //erkekler kümesinin eleman sayısı
orta = ⌈n/2⌉
orta != sağ olduğu müddetçe devam et
{
    çözüm= kararlı_eşleşme(orta)
    eğer çözüm kararlı bir küme ise
    {
        sağ =orta
        orta = ⌈(sol + sağ)/2⌉
    }
    değilse
    {
        sol = orta
        orta = ⌈(sol + sağ)/2⌉
    }
}

```

Şekil 4.2 Algoritmanın birinci bölümü

```

fonksiyon kararı_eşleşme(orta)
{
    başlangıçta her  $m \in M$  ve her  $w \in W$  kimseyle eşleşmemiş durumda
    herhangi bir  $w$  kadınına henüz teklif yapmamış herhangi bir  $m$  erkeği kalmayana kadar devam et
    {
         $w = m$ 'in henüz teklif yapmadığı kadınlar içindeki en öncelikli tercihi
         $rank = m$ 'in  $w$ 'nin tercih listesindeki yeri
        //  $rank$  ne kadar küçükse  $m$  erkeği  $w$  kadını için o kadar önceliklidir
        eğer  $rank \leq orta$  ise
        {
            eğer  $w$  bekar ise
            {
                 $(m,w)$  nişanlansın
            }
            değilse
            {
                //  $(m^*,w)$  şeklinde bir çift mevcuttur
                eğer  $w$  kadını  $m$  erkeğini  $m^*$  erkeğine tercih ederse
                {
                     $(m,w)$  nişanlansın
                     $m^*$  tekrar bekar hale gelsin
                }
                değilse
                {
                     $(m^*,w)$  nişanlı kalsın
                }
            }
        }
    }
}

```

Şekil 4.3 Algoritmanın ikinci bölümü

Algoritma iki parçadan oluşmaktadır. Birinci bölüm ikili arama ağacı şekilde aralık boyunca gezinen kısımdır (Bkz. Şekil 4.2). İkinci bölüm ise Gale Shapley algoritmasını içeren bölümdür. Burada kadınların gelen teklifleri değerlendirmesi sınırlandırılmıştır (Bkz. Şekil 4.3).

Kararlı eşleşme probleminin tüm çözümlerinde ya erkeklerin durumu iyileşir veya aynı kalır ya da tüm kadınların durumu iyileşir veya aynı kalır. Bir çözümden diğerine gidildiğinde erkeklerin ve kadınların durumu aynı anda iyileşemez ya da kötüleşemez.

Teorem: Farz edelim ki $M_i \geq_M M_j$ bağıntısı tüm erkeklerin M_i kararlı eşleşmesini M_j kararlı eşleşmesine tercih etmesi ya da bu kararlı eşleşmelerin bazı erkek oyuncular için birbirinden farksız olması anlamında gelsin. Aynı şekilde $M_j \geq_W M_i$ bağıntısı tüm kadınların M_j kararlı eşleşmesini M_i kararlı eşleşmesine tercih etmesi ya da bu kararlı eşleşmelerin bazı kadın oyuncular için birbirinden

farksız olması anlamında gelsin. Eriehl'e (2017) göre $\geq_M$ ile $\leq_W$ bağıntıları birbirine eştir.

Kanıt: α ve ω aralarında $\alpha \geq_M \omega$ ilişkisi olan iki kararlı eşleşme olsun. Yani tüm erkekler α kararlı eşleşmesini ω kararlı eşleşmesine tercih etsin. Farz edelim ki öyle bir w kadını olsun ki o da α kararlı eşleşmesini ω kararlı eşleşmesine tercih etsin. Bu durumda ω kararlı bir eşleşme olamaz. Çünkü tüm erkekler α kararlı eşleşmesini ω kararlı eşleşmesine tercih ettiklerinden α 'da w kadını ile eşleşen erkek, w 'yi ω kararlı eşleşmesindeki partnerine tercih eder. Aynı zamanda w kadınının da α kararlı eşleşmesini ω kararlı eşleşmesine tercih ettiğini kabul etmiştik. Bu durumda ω kararlı eşleşmesi kararlı olamaz. w kadını ile onun α kararlı eşleşmesindeki partneri kararlılığı bozar (Eriehl, 2017).

Table II

Problem size = 8

Men choose women in the order:

Man 1 chooses	5	7	1	2	6	8	4	3
Man 2 chooses	2	3	7	5	4	1	8	6
Man 3 chooses	8	5	1	4	6	2	3	7
Man 4 chooses	3	2	7	4	1	6	8	5
Man 5 chooses	7	2	5	1	3	6	8	4
Man 6 chooses	1	6	7	5	8	4	2	3
Man 7 chooses	2	5	7	6	3	4	8	1
Man 8 chooses	3	8	4	5	7	2	6	1

Women choose men in the order:

Woman 1 chooses	5	3	7	6	1	2	8	4
Woman 2 chooses	8	6	3	5	7	2	1	4
Woman 3 chooses	1	5	6	2	4	8	7	3
Woman 4 chooses	8	7	3	2	4	1	5	6
Woman 5 chooses	6	4	7	3	8	1	2	5
Woman 6 chooses	2	8	5	4	6	3	7	1
Woman 7 chooses	7	5	2	1	8	6	4	3
Woman 8 chooses	7	4	1	5	2	3	6	8

Table III

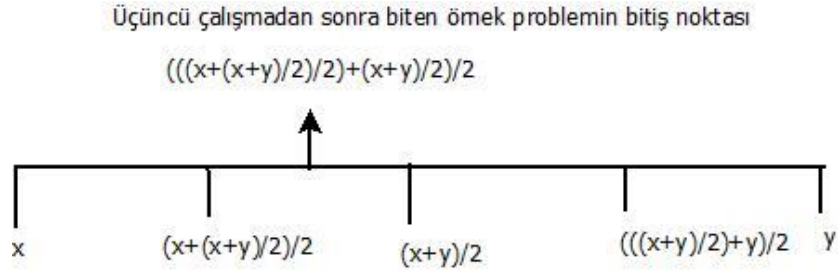
Stable solutions

	Women								
Man	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
1 marries	5	8	3	3	3	3	8	8	8
2 marries	3	3	6	6	6	6	3	3	3
3 marries	8	5	5	1	2	1	1	2	1
4 marries	6	6	8	8	8	8	6	6	6
5 marries	7	7	7	7	1	2	7	1	2
6 marries	1	1	1	5	5	5	5	5	5
7 marries	2	2	2	2	7	7	2	7	7
8 marries	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Number of proposals	16	22	31	35	43	38	26	34	29
Choice count	48	49	51	50	54	51	48	52	49

Şekil 4.4 Mcvities ve Wilson'dan (1971) alıntılanan örnek problem ve çözümleri.

Bu algoritma Mcvities ve Wilson'da (1971) yer alan örnek problem üzerinde erkekler teklif edecek şekilde çalıştırıldığında ilk turda S_2 , ikinci turda S_5 çözümü bulunmuştur (Bkz. Şekil 4.4). Üçüncü turda çözüm bulunmamıştır. Dördüncü turda ise orta ile sağ sınır eşitlenmiş ve algoritma sonlanmıştır. Algoritma aynı problem üstünde kadınlar teklif edecek şekilde uygulandığında ilk turda çözüm bulunamamıştır. İkinci, üçüncü ve dördüncü turda S_8 bulunmuştur. Beşinci turda orta ve sağ sınır eşitlenmiş ve algoritma sonlanmıştır.

4.2.2 Algoritma 2



Şekil 4.5 Algoritmanın örnek bir çalışma rotası (II).

Bir kararlı eşleşme probleminde her bir oyuncunun erkek optimal ve kadın optimal çözümdeki eşlerinin ranklarını alıp incelersek, o oyuncunun sadece bu rank değeri arasındaki tercihleri ile eşleşebileceğini görürüz. Her bir oyuncu için bu rank aralıklarını alalım. Bir kadın oyuncunun eşleşebileceği minimum ranka x , maksimum ranka y diyelim. Daha sonra $(x+y)/2$ sayısını bulalım. Erkek optimal çözümü bulan Gale-Shapley algoritmasını çalıştıralım, ancak hiçbir kadın kendisine gelen bir teklifi gönderen erkeğin rankı $x + (x+y)/2$ sayısından fazla ise o teklifi kabul etmesin ve Gale Shapley algoritmasını çalıştıralım. Kararlı çözüm bulunursa sınırı daraltalım ve her oyuncu için $(x+y)/4$ yapalım. Algoritma tekrar çalışsın ve kararlı bir sonuç bulursa sınırı $(x+y)/8$ yapalım. Algoritma bu şekilde ikili arama algoritması gibi çalışsın. Sonuç bulamazsa sağ taraftaki aralıklara, bulursa sol taraftaki aralıklara ilerlesin (Bkz. Şekil 4.5). Bu durumda ikili arama algoritmasındaki gibi sağ, sol ve orta değerlerin hesaplanması gerekir. Tüm oyuncular için orta değer sağ değere eşit olduğunda ise algoritma sonlansın.

Bu algoritma Mcvite ve Wilson'da (1971) yer alan örnek problem üzerinde erkekler teklif edecek şekilde uygulandığında S_6 , kadınlar teklif edecek şekilde uyarlandığında S_1 çözümü elde edilmiştir.

4.3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmalar

Bu bölümde yordamsal adaleti sağlamak adına çalışmalar yapılmıştır. Gale-Shapley algoritmasında sadece bir küme teklif hakkına sahiptir. Burada ise bütün oyunculara teklif etme hakkı tanınmıştır. Bu durumda erkekler ve kadınlar rasgele belirlenen bir sıra ile karşı cinse teklif yaparlar. Burada $2 * N^2$ adet teklif

yapılmaktadır. Algoritmalar tam olarak N tur çalışmaktadır ve her bir turda $2N$ tane oyuncu birer teklif yapmaktadır. Algoritmalar N . turdan sonra sonlanmaktadır.

Bütün yaklaşımlarda algoritma başlamadan önce $2N^2$ boyutlu bir dizide oyuncuların teklif sıraları önceden belirlenmektedir.

Bazen oyuncular sıradaki tekliflerini, mevcut eşlerinden daha kötü bir tercih olacağı için etmezler. Bu durumda bu tekliflerin, daha sonra kullanmak amacıyla biriktirilmesi gerekir. Bu yaklaşımlarda teklifler bir bağlı listede biriktirilmektedir.

Yordamsal ve sonuçsal adalet kavramlarını kararlı eşleşme problemleri için düşündüğümüzde bir algoritmada yordamsal adalet var ise sonuçsal adalet de vardır. Yordamsal adaletin olmadığı durumda seçilen adalet ölçütüne göre sonuçta öznel bir adalet olup olmadığına bakılabilir.

Daha önce sonuçsal adaletle dair tanımlar da yapılmıştır. Moulin'e (1997) göre bir G oyununda $\{1, 2, \dots, N\}$ oyuncular kümesi olsun.

$\mathcal{E}$ bir oyunda ortaya çıkabilecek tüm sonuçları içeren küme olsun.

$\forall R$ bir $z \in \mathcal{E}$ tanımlı oyuncuların sonuçtan duydukları memnuniyete dair refah profili olmak üzere, tüm R 'leri içeren küme $\mathcal{R}$ olsun.

Sonuçsal adalet, bir z sonucu ile onun üstünde tanımlı $(r_1, \dots, r_N) = R$ refah profili hakkındaki yargıdır. Bize z sonucunun R profilinde adil olup olmadığını bu hüküm söyler. Bir z sonucunun adil olup olmaması R refah profiline bağlıdır. Seçilen adalet ölçütüne göre bu yargı hesaplanır ve o adalet kriterini taşıyıp taşıyamamasına göre sonuçsal adaletin olup olmadığı belirlenir.

Yordamsal adalet olmadığında sonuçsal adalet ayrıca rank toplamlarının, ranklar arasındaki farkların toplamının minimize edilmesi, rank ortalamalarının minimize edilmesi gibi öznel ölçütlere de dayandırılabilir.

4.3.1 Algoritma 1

Tercih Matrisi			
	1.kadın	2.kadın	3.kadın
1.erkek	(2,0)	(0,0)	(1,1)
2.erkek	(2,1)	(1,1)	(0,2)
3.erkek	(0,2)	(2,2)	(1,0)

Teklif Etme Sırası			
5	3	4	2
0	1	2	3
5	4	0	1
3	2	5	1
0	4	1	0
5	4	0	1
3	2	5	1

Sonuç			
erkek: 1	kadın: 2	tercihleri: (0 , 0)	
erkek: 2	kadın: 3	tercihleri: (0 , 2)	
erkek: 3	kadın: 1	tercihleri: (0 , 2)	

Şekil 4.6 3x3'lük örnek bir problem ve çözümü.

Birinci algoritmada bağlı listede henüz ifa edilmediği için biriken her bir teklif, her tur sonunda incelenir. Eğer bir kişinin mevcut eşinden daha iyi birine teklif etme hakkı varsa ya da bekârsa, bağlı listedeki teklifini yapar. Bir örnek üzerinden açıklarsak Şekil 4.6'da 3 kadın ve 3 erkeğin yer aldığı örnek bir kararlı eşleşme probleminin tercih matrisi yer almaktadır. Tercih matrisinde 0. tercih oyuncuların en öncelikli tercihidir. 1. tercih ise 0. tercihten sonra gelmektedir. 2. tercih ise oyuncuların en son tercihleridir. Örneğin 3. kadının 0. tercihi 3. erkektir. 1. tercihi 1. erkektir. 2. tercihi 2. erkektir.

Örnek bir teklif etme sırasında ise 5 3 4 2 0 1 2 3 5 1 0 4 5 4 0 1 3 2 olsun. Burada 0,1,2 sayıları sırayla 1. erkek, 2. erkek, 3. erkektir. 3,4,5 sayıları sırayla 1. kadın, 2. kadın, 3. kadındır. İlk altı sayı yani 5 3 4 2 0 1, oyuncuların 0. tercihlerine teklif yapma sıralarını göstermektedir. Yani oyuncular 0. tercihlerine teklif yapacaklar, yaparken de bu sıraya riayet edeceklerdir. Bu ilk turdur. Daha detaylı açıklarsak:

- 5 numara yani, 3. kadın ilk teklifini 0. tercihi olan 3. erkeğe yapar. 3. erkek şu an bekâr olduğu için bu teklifi hemen kabul eder.
- Ardından 3 numara yani 1. kadın ilk tercihi olan 1. erkeğe teklif yapar. 1. erkek bekâr olduğundan teklifi kabul eder.

➤ Daha sonra sıra 4 yani 2. kadın ilk tercihi olan 1. erkeğe teklif yapar. 1. erkek ise şu an 1. kadınla beraberdir. Ancak. 1. erkeğe göre 2. kadın daha önceliklidir. Bu yüzden 1. kadından ayrılır ve 2. kadın ile eş olur.

➤ Daha sonra sırada 2 numara yani 3. erkek vardır ve an 3. kadın ile beraberdir. 3. erkeğin ilk tercihi 1. kadın şu anki eşinden daha önceliklidir ve ona teklifini yapar. 1. kadın bekâr olduğundan teklifi kabul eder.

➤ Daha sonra sırada 0 numara yani 1. erkek vardır ve ilk tercihi 2. kadındır. Zaten onunla beraber olduğundan teklif yapmasına gerek yoktur. Bu teklif yapılmış sayılır.

➤ Sonra sırada 1 numara yani 2. erkek vardır ve ilk tercihi 3. kadındır. 3. kadın şu an bekâr olduğundan teklifi kabul eder.

Böylece birinci turun sonunda oluşan çiftler (erkek, kadın) şeklinde olmak üzere: (1,2)(3,1)(2,3) çiftleri oluşur. İkinci turda ise tercih etme sırası 2 3 5 1 0 4'tür:

➤ Teklif yapacak kişi 2 numara yani 3. erkektir ve ikinci tercihi 3. kadındır. 3. kadın şu an kendi eşi olduğundan bu teklif yapılmış sayılır.

➤ Sırada 3 numara yani 1. kadın vardır ve 3. erkek ile eştir, ikinci tercihi 2. erkektir. Eşinden daha öncelikli olduğu için teklifini 2. erkeğe yapar. 2. erkek ise 3. kadın ile beraberdir ve 3. kadın onun ilk tercihidir. O yüzden teklifi reddeder.

➤ Sırada 5 numara yani 3. kadın vardır, ikinci tercihi 1. erkektir. Ancak 3. kadın şu an son tercihi olan 3. erkek ile beraberdir. O yüzden teklifini yapar. 1. erkek ise şu an 2. kadın ile beraberdir ve her ikisi de birbirinin ilk tercihidir. Bu yüzden 1. erkek 3. kadından gelen teklifi reddeder.

➤ Sırada 1 numara yani 2. erkek vardır, şu an ilk tercihi olan 3. kadın ile beraberdir. O yüzden bu teklif daha şu anki eşinden daha kötü bir teklif olacağından belki daha sonra kullanılmak üzere bağlı listeye atılır.

➤ Sırada 0 numara yani 1. erkek vardır ve şu an ilk tercihi olan 2. kadın ile beraberdir. Bu yüzden şu an edeceği teklif mevcut eşinden daha kötü olduğundan belki daha sonra kullanılmak üzere bağlı listeye atılır.

➤ Son olarak sırada 4 numara yani 2. kadın vardır ve o da ilk tercihi ile beraber olduğundan bu teklif de bağlı listeye atılır.

Böylece ikinci tur biter, bağlı listede kullanılmamış üç adet teklif hakkı bulunmaktadır. Her turun sonunda bir kişi, eşi olsun ya da olmasın, eğer bağlı listede teklifi varsa o teklif incelenir. Örneğin burada ilk edilmemiş teklif 1 numaraya yani 2. erkeğe aittir ve ikinci tercihine henüz teklif yapmamıştır. Şu anki eşi birinci tercihi olduğundan hala teklif yapmasına gerek yoktur. Bu durum bağlı listedeki diğer iki teklif için de geçerlidir. Bağlı listede tüm teklifler incelendikten sonra eğer edilmeye layık görülmüş teklif varsa, o teklif bağlı listeden silinir. Daha sonra üçüncü tur yani son tur başlar. Bu turdaki teklif sırası 5 4 0 1 3 2'dir:

➤ Sırada 5 numara yani 3. kadın vardır, şu an zaten son tercihiyle beraber olduğundan bu teklif edilmiş sayılır.

➤ Daha sonra sırada 4 numara yani 2. kadın vardır, zaten ilk tercihiyle beraber olduğundan bu teklif bağlı listeye atılır.

➤ Daha sonra sırada 0 numara yani 1. erkek vardır. Bu teklif de bağlı listeye atılır.

➤ Daha sonra sırada 1 numara yani 2. erkek vardır ve ilk tercihiyle beraber olduğundan bu teklif de bağlı listeye atılır.

➤ Daha sonra sırada 3 numara yani 1. kadın vardır ve 3. erkek ile beraberdir. 3. erkek onun son tercihidir o yüzden bu teklif yapılmış sayılır.

➤ Son olarak sırada 2 numara yani 3. erkek vardır ve şu an ilk tercihiyle birlikte olduğundan bu teklif de bağlı listeye atılır.

Böylece üçüncü tur sonlanır. Bağlı liste incelemeye alınır. Bağlı listedeki teklifler tek tek incelenir. Hiçbir teklif bir oyuncu için şu andaki eşinden daha iyi olmadığından, teklif yapılmaz. Böylece algoritma sonlanır. Şekil 4.6'da algoritmanın bu sonucu yer almaktadır. Daha sonra bulunan bu üç çift kararlılık testine sokulur. Kararlı olup olmadığına bakılır. Bu örnekteki sonuç kararlı çıkmıştır. Kararlı eşleşme problemi düşünüldüğünde, Gale-Shapley'nin ertelenmiş kabul prosedürü yordamsal olarak adaletli değildir. Çünkü sadece bir kümedeki elemanların diğer kümeye teklif etme hakkı vardır. Kararlı eşleşme çözümü için algoritmanın yordamsal adaletli olmasına gerek yoktur.

Yordamsal olarak adaletli Gale-Shapley’de her iki küme elemanlarının da teklif yapabildiğini düşünelim. Teklifler her turda tamamen rastgele sıra ile ifa edilsin. $2N$ (N kadın ve N erkek) tane oyuncu ilk önce 1.tercihlerine, sonraki turda 2.tercihlerine ve devam ederek en sonunda N .tercihlerine teklif yapsın. Bir kişi, mevcut eşinden daha kötü bir tercihin teklif yapmak istemez, o yüzden böyle bir hakkı varsa bu hak kenarda beklesin ve henüz yapmadığı teklifler biriktirilsin. Her tur sonunda biriktirilen teklifler incelensin. Eğer teklif edecek kişi bekârsa ya da mevcut eşi bu teklifte muhatabı olan kişiden kötü bir tercih ise o zaman o kişi teklifini yapsın.

Çizelge 4.1 3 erkek ve 3 kadının olduğu örnek problemde tercih matrisi.

	w_3	w_4	w_5
m_0	0,0	2,2	1,1
m_1	0,2	1,1	2,0
m_2	2,1	1,0	0,2

Böyle bir algoritma çalıştırıldığında sonuçlar kararlı olmak zorunda değildir. Çizelge 4.1’de 3 kadın ve 3 erkeğin olduğu bir kararlı eşleşme probleminin tercih matrisi yer almaktadır. Bu problemi çözmek için erkek optimal çözümü bulan Gale-Shapley algoritması çalıştırıldığında (m_0, w_3) , (m_1, w_4) , (m_2, w_5) çiftleri oluşmaktadır ve bu çözüm kararlıdır.

Gale-Shapley algoritması tüm oyuncular teklif yapabilecek hale getirildiğinde oyuncuların teklif sırası rastgele belirlensin ve birinci, ikinci ve üçüncü turda teklif etme sırası sırayla $(2,0,1,3,4,5)$, $(4,5,1,3,0,2)$, $(0,5,1,2,4,3)$ olsun.

0.tur (Herkes 0.tercihine teklif yapıyor)

$m_2 \rightarrow w_5$ (m_2, w_5) çifti oluşur
 $m_0 \rightarrow w_3$ (m_0, w_3) çifti oluşur
 $m_1 \rightarrow w_3$ reddedilir
 $w_3 \rightarrow m_0$ reddedilir
 $w_4 \rightarrow m_2$ reddedilir
 $w_5 \rightarrow m_1$ (w_5, m_1) oluşur, (m_2, w_5) çifti bozulur

1.tur (Herkes 1.tercihine teklif yapıyor)

$w_4 \rightarrow m_1$ (w_4, m_1) çifti oluşur, (w_5, m_1) çifti bozular

$w_5 \rightarrow m_0$ reddedilir

$m_1 \rightarrow w_4$ zaten eşi olduğundan teklif yapmış ve kabul edilmiş sayılır

$w_3 \rightarrow m_2$ bu teklif yapılmaz, saklanır, çünkü w_3 daha öncelikli birisiyle beraber

$m_0 \rightarrow w_5$ bu teklif yapılmaz, saklanır, çünkü w_3 daha öncelikli birisiyle beraber

$m_2 \rightarrow w_4$ (m_2, w_4) oluşur, (w_4, m_1) çifti bozular

2.tur (Herkes 2.tercihine teklif yapıyor)

$m_0 \rightarrow w_4$ bu teklif yapılmaz, saklanır, çünkü w_3 daha öncelikli birisiyle beraber

$w_5 \rightarrow m_2$ (w_5, m_2) çifti oluşur, (m_2, w_4) çifti bozular

$m_1 \rightarrow w_5$ (m_1, w_5) çifti oluşur, (w_5, m_2) çifti bozular

$m_2 \rightarrow w_3$ reddedilir

$w_4 \rightarrow m_0$ reddedilir

$w_3 \rightarrow m_1$ bu teklif yapılmaz, saklanır, çünkü w_3 daha öncelikli birisiyle beraber

Sonuç olarak (m_0, w_3) ve (m_1, w_5) çifti oluşur, m_2 ve w_4 boşta kalır. Sonuç kararsızdır.

1.turda m_1 oyuncusu w_4 'ün zaten eşi olduğundan teklif yapmış olarak kabul edilmişti. Bu teklif saklansaydı da sonuç yine kararsız olurdu. 1.turun sonunda (m_2, w_4) çifti oluştuğundan w_4 oyuncusu m_1 'in teklifini reddederdi.

Sonuç olarak bu bölümdeki rastgele teklif sırası kullanan algoritmalarda sonuçlar kararsız olabilmektedir.

4.3.2 Algoritma 2

Bu algoritma bölüm 4.3.1'deki Algoritma 1'e benzerdir. Buradaki tek fark şudur: Her turun sonunda bağlı listeye bakılır. Bağlı listedeki teklifler eğer bekâr birisine aitse o teklif incelemeye alınır. Bir eşi olanlar bağlı listedeki tekliflerini yapamaz, teklif etme hakları silinmez ama o kişiler atlanır. Bu algoritma Şekil 4.6'daki probleme uyarlandığında aynı sonuç elde edilmektedir.

4.3.3 Algoritma 3

Bu yaklaşım, diğer iki algoritmadan biraz farklıdır. Her bir oyuncu teklif yapacağı sırada nerede kaldıysa oradan devam eder. Örneğin bir oyuncu üçüncü turda üçüncü tercihini yapacakken henüz ikinci tercihini yapmadıysa, yani ikinci tercihi bağlı listede ise önce ikinci tercihini yapar. Bağlı listeden ikinci tercih silinir, üçüncü tercihi bağlı listeye atılır. Şekil 4.6'daki örnek problem üzerinde uygulandığında Algoritma 1 ve Algoritma 2 ile aynı sonuç elde edilmiştir. Böyle bir zorunluluk yoktur, ama burada üç yaklaşım da erkek optimal çözümü bulmuştur. Uygulaması ise şöyledir:

- İlk turda 5 numara yani 3. kadın ilk tercihine teklif yapar. İlk tercihi 3. erkektir ve boş olduğundan teklifi kabul eder.
- 3 numara yani 1. kadın, ilk tercihi olan 1. erkeğe teklif yapar. 1. erkek boş olduğundan teklifi kabul eder.
- 4 numara yani 2. kadın ilk tercihi olan 1. erkeğe teklif yapar. 1. erkek eşinden ayrılır ve 2. kadın ile çift olur.
- 2 numara yani 3. erkek ilk tercihi olan 1. kadına teklif yapar. 1. kadın boştur ve teklifi kabul eder, eşi olan 3. kadından ayrılır.
- 0 numara yani 1. erkek ilk tercihine teklif yapar, ama zaten kendi eşi ilk tercihi olduğu için bu teklif yapılmış kabul edilir.
- 1 numara yani 2. erkek ilk tercihi olan 3. kadına teklif yapar. 3. kadın boştur ve teklifi kabul eder.

Bu noktada ilk tur biter, henüz bağlı liste boştur ve ikinci tur başlar. Bir oyuncu teklif yapmadan önce bağlı listeye bakılır. Henüz yapılmamış teklifi var ise incelenir. Bu aşamada bağlı liste boş olduğundan, herkes ikinci teklifini yapmaya koyulur. İkinci turda ikinci tercihlere teklif etme sırası 2 3 5 1 0 4'tür.

- 2 numara yani 3. erkek şu an 1. kadın ile eştir. 1. kadın zaten ilk tercihi olduğundan, 3. erkek ikinci teklifini yapmaz, ikinci tercih teklifi bağlı listeye atılır.

- 3 numara yani 1. kadın ikinci tercihine teklif yapmak için gelir. 1. kadının şu anki eşi 3. erkektir. Eşinden daha iyi bir teklif yapacağından teklif bağlı listeye gitmez ve yapılır. 1. kadının ikinci tercihi 2. erkektir. 2. erkek şu an 3. kadın ile yani ilk tercihi ile beraberdir, o yüzden 1. kadının teklifini reddeder.
- 5 numara yani 3. kadın ikinci teklifini 1. erkeğe yapar çünkü şu anki eşi olan 2. erkek onun son tercihidir. Yalnız, 1. erkek ilk tercihiyle birlikte olduğundan bu teklif reddedilir.
- 1 numara yani 2. erkek ikinci tercihine teklif yapmak için gelir. Ancak 2. erkek şu an ilk tercihiyle eş olduğundan bu teklif bağlı listeye gider.
- Sırada 0 numara yani 1. erkek vardır. 1. erkek şu an ilk tercihi ile birlikte olduğundan bu teklif bağlı listeye gider.
- Daha sonra 4 numara yani 2. kadın gelir. 2. kadın şu an ilk tercihi ile beraberdir, o yüzden bu teklif de bağlı listeye gider.

Böylece ikinci tur biter. Bağlı listede dört adet bekleyen teklif vardır. Bu teklifler incelenir. Sahiplerinin bir bekar olup olmamasına bakılmaksızın, -eğer şu anki eşlerinden daha iyi bir tercihleri için bir teklifleri varsa veya bekarsa- o teklif yapılır. Buradaki üç teklif, sahiplerinin şu anki eşlerinden daha iyi olmadığından bu aşamada hiçbir yapılmaz. Son turda bağlı listede dört adet yapılmamış teklif vardır. Son tura hiçbir değişiklik olmadan geçilir:

- İlk sırada 5 numara yani 3. kadın vardır. 3. kadının daha önce yapılmamış teklifi olmadığından bu teklifi yapabilir. Şu an 2. erkek ile beraberdir ve zaten son tercihi şu anki eşi olduğundan bu teklif yapılmış sayılır.
- Sırada 4 numara yani 2. kadın vardır. 2. kadın şu an 1. erkek ile beraberdir. Bağlı listede yapılmamış teklifi vardır. Teklif ikinci tercihi ile ilgilidir, ancak şu anki eşi zaten ilk tercihi olduğundan son teklif de bağlı listeye gider.
- 0 numara yani 1. erkek vardır. Aynı şey onun için de geçerlidir, bu teklif de bağlı listeye gider.

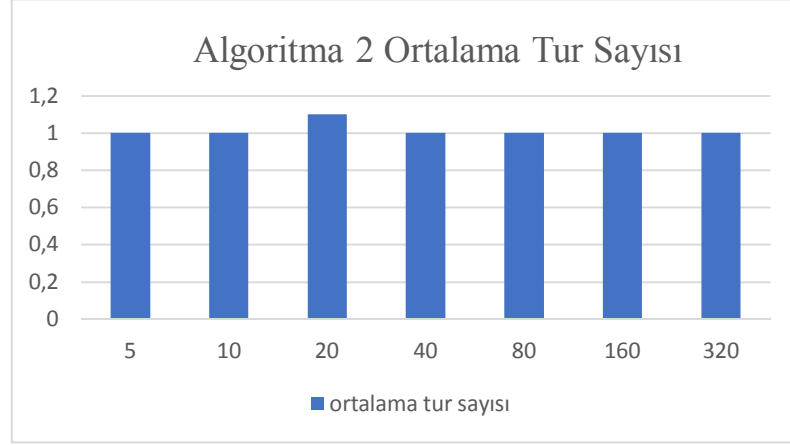
- Sırada 1 numara yani 2. erkek vardır. 2. erkeğin yapılmamış teklifi vardır, bu teklif ikinci tercihi ile ilgilidir. Ancak şu an zaten ilk tercihi ile ilgili olduğundan hiçbir şey yapılmaz ve bu son teklif de bağlı listeye gider.
- 3 numara yani 1. kadın gelir. 1. kadın 3. erkek ile beraberdir. Bağlı listede edilmemiş teklifi yoktur. Ancak şu an zaten son tercihi ile birlikte olduğundan bu teklif, yapılmış sayılır.
- Sırada 2 numara yani 3. erkek vardır, 3. erkek şu an zaten ilk tercihi ile beraber olduğundan, bağlı listede yapılmamış bir teklifi olsa da hiçbir şey değişmez, bu son teklif de bağlı listeye alınır.

Burada örneğin 3. erkek boşta olsaydı ya da şu anki eşi, bağlı listede bekleyen teklifinden daha kötü birisi olsaydı, üçüncü turda olmamıza rağmen, bağlı listede bekleyen ikinci tercihinin teklifini yapacaktı. Üçüncü tur teklifi ise bağlı listeye atılacaktı.

Bu aşamada üçüncü tur da biter ve son olarak bağlı listeyi incelemek kalır. Bağlı listedeki her bir teklif incelenir. Herhangi bir oyuncunun bağlı listede henüz edilmemiş teklifler arasında şu anki eşinden daha iyi bir teklif varsa, teklif yapılır ve yapılan teklif listeden silinir. Yoksa bir sonraki bekleyen teklif incelemeye geçilir. Bütün bekleyen teklifler de incelendikten sonra algoritma sonlanır.

Bu yaklaşımın diğer iki yaklaşımdan farkı şudur:

Bir oyuncu bir turda teklif yapmadan önce bağlı listede bekleyen teklifinin olup olmadığına bakılır. Eğer varsa o teklif incelenir. Oyuncu bekârsa o teklif yapılır, bağlı listeden silinir ve bulunduğu turdaki henüz yapmadığı teklif bağlı listeye atılır. Eğer bekâr değilse, oyuncunun mevcut durumu incelenir. Mevcut eşi, bağlı listede bekleyen tekliften daha iyiye bağlı listedeki teklif yapılmaz, beklemeye devam eder ve ayrıca bulunduğu turdaki henüz yapamadığı teklif de bağlı listeye atılır. Ancak bağlı listede bekleyen teklif şu anki eşinden daha iyi bir tercihi ile ilgiliyse, o zaman teklif yapılır. Karşı taraf teklifi kabul ederse, oyuncu şu anki eşinden ayrılır ve bu yeni kişi ile eş olur. Karşı taraf kabul etmezse hiçbir değişiklik olmaz ama bu reddedilen teklif bağlı listeden silinir.



Şekil 4.7 Algoritma 2'nin kararlı çözüm bulana kadar ortalama çalışma sayısı.

Bu üç yaklaşımın sözde kodları raporun sonunda Ek 3'de yer almaktadır. Bu üç algortmadan sadece Algoritma 2 ilk çalışmada çok yüksek oranda kararlı çözüm bulmuştur. Diğer iki algoritma N yükseldikçe %50'ye varan oranlarda kararsız sonuç verdiği için sadece Algoritma 2 çalıştırılmış ve sonuçları diğer bölümlerdeki algoritmalarla karşılaştırılmıştır. Algoritma 2'nin ilk çalışmada çeşitli N değerleri için kararlı çözüm bulma grafiği Şekil 4.7'de yer almaktadır.

4.4 Sonuncu İyileştirmeli Algoritma

Sonuncu iyileştirme yaklaşımı kararlı eşleşme probleminden elde edilen kararlı eşleşme sonuçlarında en kötü durumdaki kişinin durumuna göre çalışan bir algoritmadır.

Sonuncu iyileştirme yaklaşımında, başlangıçta bir kez Gale-Shapley algoritması çalıştırılır. En kötü durumdaki kadının kaçınıcı tercihi ile eşleştiği bulunur, bu sayıya r_i diyelim. Bu sayıdan 1 çıkarılır ve Gale-Shapley algoritması bu değer ile tekrar çalıştırılır. Kadınlara teklif geldiğinde, teklif bu yeni $r_i - 1$ değerinden daha kötü birisinden gelmişse, teklif incelenmeden reddedilir. Bir başka deyişle, $r_i - 1$ değeri kadınlar için teklif kabul etme rank üst sınırı olur. Gale-Shapley'nin çalışması bittiğinde kararlı bir eşleşme kümesi bulunamıyorsa algoritma sonlanır. Kararlı bir eşleşme kümesi bulunmuşsa, bu kararlı eşleşme kümesinde en kötü durumdaki kadının kaçınıcı tercihi ile eşleştiği bulunur. Bu sayı yeni r_i değeri olur ve bu sayıdan 1 çıkarılır. Yeni teklif sınırı bu olur. Gale-Shapley bu sınır ile tekrar çalıştırılır. Bu işlem kararlı bir eşleşme kümesi bulunamayana kadar devam eder.

Algoritmanın iç aşaması şöyledir:

fonksiyon 1 Gale_Shapley(orta)

```
{
    Başlangıçta her m ve her w kimseyle eşleşmemiş durumda, herhangi bir w kadınına
    henüz teklif yapmamış herhangi bir m erkeği kalmayana kadar devam et
    {
        w = m'in henüz teklif yapmadığı kadınlar içindeki en öncelikli tercihi
        rank = m'in w'nin tercih listesindeki yeri
        //rank ne kadar küçükse m erkeği w kadını için o kadar önceliklidir
        eğer rank ≤ orta ise
        {
            eğer w bekar ise (m,w) nişanlansın
            değilse
            {
                //(m*,w) şeklinde bir çift mevcuttur.
                eğer w kadını m erkeğini m* erkeğine tercih ederse
                {
                    (m,w) nişanlansın
                    m* tekrar bekar hale gelsin
                }
                değilse (m*,w) nişanlı kalsın
            }
        }
    }
}
```

Algoritmanın dış aşaması şöyledir:

fonksiyon 2

```
{
    orta = N-1
    çözüm = Gale_Shapley (orta)
    çözüm kararlı olduğu sürece devam et
    {
        orta = çözümde en kötü durumdaki kadın eşinin rank değeri
        orta = orta-1
        çözüm = Gale_Shapley (orta)
    }
}
```

4.4.1 Tekdüze Dağılım için Ortalama Çalışma Zamanı

Sonuncu İyileştirmeli yaklaşım Gale-Shapley algoritmasına uyarlandığında, en iyi durumda 1 tur çalışır, 2.turda ise kararlı çözüm bulamaz ve sonlanır. Bu durumda $\Omega(n^2)$ karmaşıklıkta olur.

Tekdüze dağılımla oluşturulmuş bir tercih matrisine sahip kararlı eşleşme probleminde beklenen ortalama kararlı çözüm sayısı (İng. *Expected Stable Solution*) n sonsuza giderken $e^{-1}n \ln n$ ile asimptotiktir (Pittel, 1989).

Bu durumda bir oyuncunun bir problemde eşleşebileceği farklı kişi sayısı yaklaşık olarak $(e^{-1}n \ln n)^{1/n}$ ile tüm çözümlerinde farklı eş sayısı en çok olan kişinin eş sayısı bilinmeyen bir sayı olan “ $\max|eş\ sayısı|$ ” arasında değişir. Buna bir örnek Şekil 4.4 üzerinden verilebilir. 8 kadın ve 8 erkeğin olduğu bu problemin 9 kararlı çözümü vardır. Problemin tüm kararlı çözümlerine baktığımızda örneğin 1 numaralı erkeğin 5, 8 ve 3 numaralı kadınlarla eşleştiğini görürüz. 8 numaralı erkek tüm eşleşmelerde sadece 4 numaralı kadınla eşleşmektedir, örneğin 3 numaralı erkek 8, 5, 1 ve 2 numaralı kadınlarla eşleşmektedir. Bu şekilde erkeklerin tüm çözümlerde toplam farklı kararlı eş sayılarına baktığımızda:

1 numaralı erkek: 3
 2 numaralı erkek: 2
 3 numaralı erkek: 4
 4 numaralı erkek: 2
 5 numaralı erkek: 3
 6 numaralı erkek: 2
 7 numaralı erkek: 2
 8 numaralı erkek: 1

olduğunu görürüz. Erkeklerin bu kadar farklı kişilerle eşleşmesine rağmen toplam 9 kararlı eş çözümü olması, bazı kararlı eşleşmelerde hep aynı eş ile eşleşmelerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin 8 numaralı erkek tüm kararlı eşleşmelerde 4 numaralı kadınla, 7 numaralı erkek toplam 5 kararlı eşleşmede 2 numaralı kadınla eşleşmiştir. İşte bu kesişimler problemin toplam kararlı çözüm sayısını 9’a düşürmektedir. Eğer hiç kesişim olmasaydı, problemin toplam kararlı çözümü sayısı erkeklerin farklı kararlı eş sayılarının çarpımı kadar olurdu, yani $3*2*4*2*3*2*2*1 = 576$ olurdu ve kararlı çözüm sayısı 576 olan bu kesişim içermeyen problemde bir erkeğin ortalama farklı kararlı eş sayısı $\sqrt[8]{576} \cong 2,213$ olurdu. Ancak kesişimlerin olduğunu bir örnekte kararlı eş sayıları şöyle: $(\sqrt[4]{576}, \sqrt[4]{576}, \sqrt[2]{576}, 1, 1, 1, 1, 1)$ dağıtıldığında bu ortalama yaklaşık olarak

$\frac{(\sqrt[4]{576} + \sqrt[4]{576} + \sqrt[2]{576} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)}{8} \cong 4,84$ olabilir. Burada ortalama, bu kararlı eş sayılarının dağılımına bağlıdır. Bu dağılımı desenler halinde modellemeye çalışarak ortalama farklı kararlı eş sayısı için bir üst sınır bulunabilir.

Teorem: Sonuncu İyileştirmeli algoritmanın ortalama tur sayısı, bir oyuncunun bir problemdeki ortalama farklı kararlı eş sayısından fazla değildir.

Kanıt: Farz edelim ki Sonuncu İyileştirmeli algoritmanın ortalama tur sayısı tercih matrisi tekdüze dağılımla hazırlanmış örnek bir problemde bir oyuncunun ortalama kararlı eş sayısından fazla olsun. Oyun matrisi tekdüze dağılımla hazırlandığından algoritmanın tüm turlarda en kötü durumdaki kişi olarak hep aynı kişiyi bulması ile hep farklı kişileri bulması arasında fark yoktur. Bir oyuncunun beklenen ortalama eş sayısı da diğer tüm oyuncularınki ile eşit olduğundan, algoritma en kötü durumda bu oyuncunun tüm eşlerini bulur. Tur sayısı da en fazla ortalama farklı kararlı eş sayısı kadar olur.

Sonuncu İyileştirmeli yaklaşımın ortalama durumdaki tur sayısı, $(e^{-1}n \ln n)^{1/n}$ ile tüm çözümlerinde farklı eş sayısı en çok olan kişinin eş sayısı olan $\max|\text{eş sayısı}|$ arasında bir değerdedir. Şekil 4.4'teki örnekte $\max|\text{eş sayısı}| = 4$ 'tür. Çünkü 3 numaraları erkeğin 4 farklı kararlı eşi vardır, kararlı eş sayısı en fazla olan kişi 3 numaralı erkektir.

$O(n * \log n)$ tane çözüme erişmede oyuncuların olası farklı eş sayısı dağılımına örnek olarak,

$$1 * 1 * \dots 1 * n * \log n = n * \log n$$

Bu dağılımda, $N - 1$ tane kadın tüm çözümlerde tek kişi ile, 1 kadın $n * \log n$ kişi ile eşleşir. Gerçi bu gerçekleşmesi imkânsız bir durumdur, çünkü bir kadın tüm kararlı çözümlerde en fazla N erkek ile eşleşebilir. Hesaplamada ortalamanın üst sınırını bulmak amaçlandığından bu imkânsız durum da hesaplamaya katılmıştır. Örneğin burada ortalama kararlı eş sayısı $\frac{1+1+\dots+1+n \log n}{n} = \frac{(n-1+n \log n)}{n}$ olur.

$$1 * 1 * \dots 1 * (n * \log n)^{1/2} * (n * \log n)^{1/2} = n * \log n$$

Bu dağılımda, $N - 2$ tane kadın tüm çözümlerde tek kişi ile, 2 kadın $(n * \log n)^{1/2}$ kişi ile eşleşir.

...

$$(n * \log n)^{1/n} * (n * \log n)^{1/n} * \dots * (n * \log n)^{1/n} * (n * \log n)^{1/n} = n * \log n$$

Bu dağılımda, 0 tane kadın tüm çözümlerde tek kişi ile, n tane kadın $(n * \log n)^{1/n}$ kişi ile eşleşir.

Bu olası dağılımlarda bir oyuncunun ortalama eş sayısını hesaplamaya çalışırsak, burada bahsettiğimiz dağılımlardaki ortalamaların ortalaması:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(n-1) + n * \log n}{n} + \frac{(n-2) + 2 * (n * \log n)^{\frac{1}{2}}}{n} + \frac{(n-3) + 3 * (n * \log n)^{\frac{1}{3}}}{n} + \dots + \frac{n * (n * \log n)^{\frac{1}{n}}}{n} \right\} \\ & \qquad \qquad \qquad n \\ & = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(n-i) + i * (n * \log n)^{\frac{1}{i}}}{n} \\ & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(n-i) + i * (n * \log n)^{\frac{1}{i}}}{n} = \frac{1}{n} * (n) * (n-1) * \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i * (n * \log n)^{\frac{1}{i}} \\ & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n n * (n * \log n)^{\frac{1}{i}} \\ & \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n n * (n * \log n)^{\frac{1}{i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n * \log n)^{\frac{1}{i}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n * \log n)^{\frac{1}{2}} \\ & \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{n} (n * \log n)^{\frac{1}{2}} * n \in O((n * \log n)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Bu yaklaşım Gale-Shapley algoritmasına eklendiğinde algoritma çalışma zamanı karmaşıklığı $O((n^{5/2}(\log n)^{\frac{1}{2}}))$ olur. Daha sıkı bir sınır da bulunabilir.

Sonuncu İyileştirmeli yaklaşımın, NP-Hard bir problem olan en cinsiyet eşitlikçi (İng. *Equitable Stable Matching*) kararlı çözüm bulma problemi için bulunduğu sonucun optimal çözüme olan uzaklığı bulmak adına bazı hesaplamalar yapılmıştır.

Erkek optimal çözümde bir erkeğin eşleştiği kişiyi tercih etme sırası beklenen değer ortalaması $O(\log n)$, bir kadının eşleştiği kişiyi tercih etme sırası $O(\frac{n}{\log n})$ 'dir

(Pittel, 1989). Erkek optimal çözümde erkeklerin ve kadınların rank farkları toplamı yaklaşık olarak (n tane oyuncu için $\left(\left| \log n - \frac{n}{\log n} \right| * n\right) = \frac{n^2}{\log n}$ olduğundan) $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ 'dir. Bu farkın minimum olduğu kararlı çözüme M_{opt} diyelim. M_{opt} 'da beklenen fark değeri $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ 'dan küçüktür. Bu fark değeri $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ 'a eşit olsa bile SI algoritmasının erkek optimalden kadın optimale doğru giderken atlayacağı fark değeri karmaşıklığı $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ olur. SI algoritması ortalama tur sayısını $O((n * \log n)^{\frac{1}{2}})$ olarak bulduğumuzdan ve $\frac{\frac{n^2}{\log n}}{(n * \log n)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}$ olduğundan SI'nin bulunduğu bir çözümden diğerine değişen fark toplamı miktarı $O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ karmaşıklıkta olur.

SI algoritmasının M_{opt} çözümüne en yakın olarak bulunduğu çözüme M_x diyelim. Algoritma çalışırken M_x 'ten önce bulunan çözüme M_{y1} ve sonra bulunan çözüme M_{y2} diyelim. Bir kararlı çözümden diğerine giderken SI algoritmasında oyuncuların eşleştiği kişi rankı toplamı n oyuncu için $O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ iyileşir ya da kötüleşir.

Teorem: M_{opt} sonucu Erkek optimal çözümden Kadın optimal çözüme giderken, SI algoritmasının onu bulma sırası anlamında M_{y1} ve M_{y2} arasındadır.

Kanıt: Diyelim ki M_{opt} , M_{y1} ve M_{y2} arasında değil. Bu durumda öyle bir M_z vardır ki M_{y1} 'den önce ya da M_{y2} 'den sonra gelir. M_{opt} da M_z ile M_{y1} veya M_{y2} arasındadır.

Farz edelim ki M_{opt} çözümü SI algoritmasının bulma sırasına göre M_{y2} 'den sonra gelsin. SI algoritması, M_{y1} ve M_{y2} arasında M_x sonucunu ranklar arası minimum fark toplamına sahip çözüm olarak bulduğundan, bu sonuçtan kadın optimale giderken oyuncular arasında fark artar. Ancak algoritma tekdüze dağılımla hazırlanan problemlerde çalıştığından, M_{opt} değeri M_{y2} 'den sonra bulunduğu Kadın optimal sonuca daha yakın bir yerde olur. Bu durumda $|d(M_{y2})| \leq |d(M_{opt})|$ olur. Bu durum M_{opt} sonucunun optimal olması ile çelişir. Sonuç olarak M_{opt} , M_{y2} 'den sonra gelemez.

Aynı şekilde, farz edelim ki SI algoritmasının bulma sırası anlamında M_{opt} , M_{y1} 'den önce gelsin. SI algoritması, M_{y1} ve M_{y2} arasında M_x sonucunu minimum farklı olarak bulduğundan bu sonuçtan erkek optimale giderken de oyuncular arasında fark artar. Ancak algoritma tekdüze dağılımla hazırlanan problemlerde

çalıştığından, M_{opt} değeri M_{y1} 'den önce bulunduğu Erkek optimal sonuca daha yakın bir yerde olur. Bu durumda $|d(M_{y1})| \leq |d(M_{opt})|$ olur. Bu durum M_{opt} sonucunun optimal olması ile çelişir. Sonuç olarak M_{opt} , M_{y1} 'den önce gelemez. Buna göre M_{y1} 'den M_{y2} 'ye rank farkı toplamı ortalama olarak $O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ değişir. M_x , SI algoritmasının M_{opt} çözümüne en yakın olarak bulduğu çözüm olduğundan M_x ile M_{opt} arasında rank farkı toplamı beklenen değeri en fazla $O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ olur. Ancak unutulmamalıdır ki algoritmanın tur sayısı karmaşıklığı daha sıkı olarak bulunduğunda bu yaklaşma değeri kötüleşecektir, çünkü $O\left(\frac{|n^2|}{\log n}\right)$ 'a göre tur sayısı azalırsa optimale olan uzaklık değeri artar.

Çizelge 4.2 Sonucu iyileştirme algoritması ortalama tur sayısı.

n	Ortalama tur sayısı	$\log n$	$n \log n$	$(n \log n)^{1/2}$	$n^{1/2}$
5	1,50	2,32	11,60	3,41	2,24
10	1,70	3,32	33,20	5,76	3,16
20	3,50	4,32	86,40	9,30	4,47
30	4,25	4,91	147,30	12,14	5,48
40	5,00	5,32	212,80	14,59	6,32
60	7,09	5,91	354,60	18,83	7,75
80	7,30	6,32	505,60	22,49	8,94
120	9,20	6,91	829,20	28,80	10,95
160	10,00	7,32	1171,20	34,22	12,65
240	13,00	7,91	1898,40	43,57	15,49
320	12,63	8,32	2662,40	51,60	17,89
400	17,00	8,64	3456,00	58,79	20,00
480	15,11	8,91	4276,80	65,40	21,91

General model: $f(x_{yeni_plot}) = a * x_{yeni_plot}^b + c$ Coefficients (with 95% confidence bounds): a = 2.531 (-1.241, 6.303) b = 0.3312 (0.1347, 0.5276) c = -3.299 (-9.611, 3.014)	General model: $f(x_{yeni_plot}) = a * x_{yeni_plot}^b + c$ Coefficients (with 95% confidence bounds): a = 0.9977 (0.9937, 1.002) b = 0.5003 (0.4997, 0.5009) c = 0.005326 (-0.005799, 0.01645)
Goodness of fit: SSE: 7.859 R-square: 0.9746 Adjusted R-square: 0.9695 RMSE: 0.8865	Goodness of fit: SSE: 9.752e-05 R-square: 1 Adjusted R-square: 1 RMSE: 0.003123
a) ortalama tur sayısı $a * n^b + c$ eğrisine uyarlandığında	b) $n^{1/2}$, $a * n^b + c$ eğrisine uyarlandığında

Şekil 4.8 Matlab'de Çizelge 4.2'nin eğri uyarlama sonuçları.

Şekil 4.8 ve Çizelge 4.2'deki veriler kullanılarak eğri uyarlama yapılmıştır. Şekil 4.8'de yer alan değerlere ilişkin olarak, SSE (İng. Sum of Squares Due to Error) değeri herhangi bir reel sayı olabilir, ancak ne kadar 0'a yakınsa uyarlanan eğri verilere o kadar uygundur. R-square değeri 0 ile 1 arasında bir değerde olabilir ancak 1'e ne kadar yakınsa uyarlanan eğri verilere o kadar uygundur. Adjusted R-square değeri 1'e küçük eşit olan herhangi bir reel sayı olabilir ancak uyarlanan eğri verilere yine 1'e yaklaşım oranında uygundur. RMSE (İng. Root Mean Squared Error) değeri ise 0'a eşit ya da 0'dan büyük olabilir ancak iyi bir eğri uyarlama için değeri 0'a yakın olmalıdır. (Universidad de Cantabria, 2017).

Şekil 4.8(a)'da Çizelge 4.2'de yer alan Ortalama tur sayısı kolonundaki değerler, $a * n^b + c$ eğrisi şeklinde Matlab'de çizdirilmiştir. Bu eğride SSE ve RMSE değeri, R-square ve Adjusted R-square değerlerine kıyasla daha kötü çıkmıştır. Ancak yine de uyarlanan eğri, bu kötü çıkan SSE ve RMSE değerlerinin alabileceği tüm değerleri düşündüğümüzde çok kötü bir sonuç vermemiştir. Eğride b katsayısı 0.3312 çıkmıştır. Bu durumu Çizelge 4.2'deki verilerle değerlendirdiğimizde ortalama tur sayısının $O(\sqrt{n})$ 'den az olduğu açıktır.

Şekil 4.8(b)'de Çizelge 4.2'de yer alan $(n)^{1/2}$ kolonundaki değerler $a * n^b + c$ eğrisi şeklinde çizdirilmiştir. Eğride a yaklaşık 1, b yaklaşık $\frac{1}{2}$, c yaklaşık 0 çıkmıştır. SSE yaklaşık 1, R-square 1, Adjusted R-square 1, RMSE yaklaşık 0 çıkmıştır. Bu değerler uyarlanan eğrinin veriler için ideal olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak sonuncu iyileştirmeli algoritmanın ortalama tur sayısı $O(\sqrt{n})$ 'den azdır.

4.5 Algoritma Başarım Sonuçları

Algoritmaların değerlendirilmesinde çeşitli ölçütler kullanılabilir.

Bunlardan en önemlileri:

- Rank toplamları: Eğer bir çözümdeki çiftlerde eşlerin birbirlerini tercih etme sıralarının toplamı tüm çözümler içinde en küçük ise o çözüme eşitlikçi çözüm denir.

Tanım 4.1: M bir problemdeki tüm çözümler kümesi, mr bir m erkeğinin w kadının tercih etme sırası ve wr bir w kadının m erkeğini tercih etme sırası olmak üzere, bir $M_i \in M$ için $sm(M_i) = \sum mr(m, w)$ ve $sw(M_i) = \sum wr(m, w)$ olsun. Bir kararlı eşleşme M_i için ve $\forall M_j \in M$ için, $\min |sm(M_i) + sw(M_i)|$ ise M_i çözümü bu problemin eşitlikçi (İng. Egalitarian) çözümüdür (Vien et al., 2007).

Bu kriter aslında oyuncuların eşleştiği kişileri tercih etme sıralarının aritmetik ortalamasını bulmak ile doğrudan bağlantılıdır.

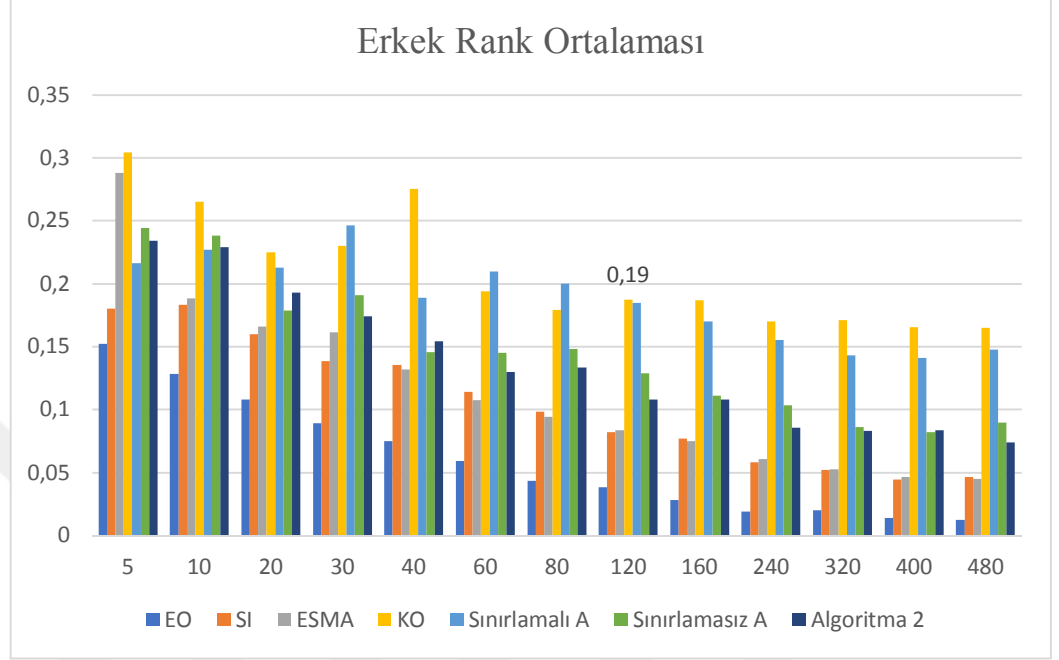
- Rank farkları: Eğer bir çözümdeki çiftlerde eşlerin birbirlerini tercih etme sıralarının farklarının toplamı tüm çözümler içinde en küçük ise o çözüme eşitlikçi çözüm denir.

Tanım 4.2: Bir kararlı eşleşme M_i için ve $\forall M_i \in M$ için, $\min |sm(M_i) - sw(M_i)|$ ise M_i bu problemin eşitlikçi çözümüdür (Vien et al., 2007).

- En kötü durumdaki kişi: Bu kriterde her bir algoritmanın bulduğu eşleşme sonucunda yer alan en şanssız kişi bulunur. Bir kararlı eşleşmedeki bir (w_i, m_i) çifti için, $r_i = f(w_i, m_i)$ fonksiyonu, w_i kadının, m_i erkeğini tercih etme sırasını veren fonksiyon olsun. En kötü durumdaki kadın, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ için $\max[r_i]$ değerini veren i . çiftteki kadındır. Aynı durum erkekler kümesindeki elemanlar için bu argüman kullanılarak bulunur. Bu kriter bölüm 4.4'teki Sonuncu İyileştirmeli algoritmada kullanılmıştır.

Grafiklerde sırayla erkek optimal çözüm bulan Gale-Shapley (EO), bölüm 4.4'teki Sonuncu İyileştirme (SI), ESMA, kadın optimal çözüm bulan Gale-Shapley (KO), bölüm 4.2.2'deki Sınırlamalı A. (Algoritma 2), bölüm 4.2.1'deki Sınırlamasız A. (Algoritma 1) ve bölüm 4.3.2'deki yordamsal adaletli Algoritma

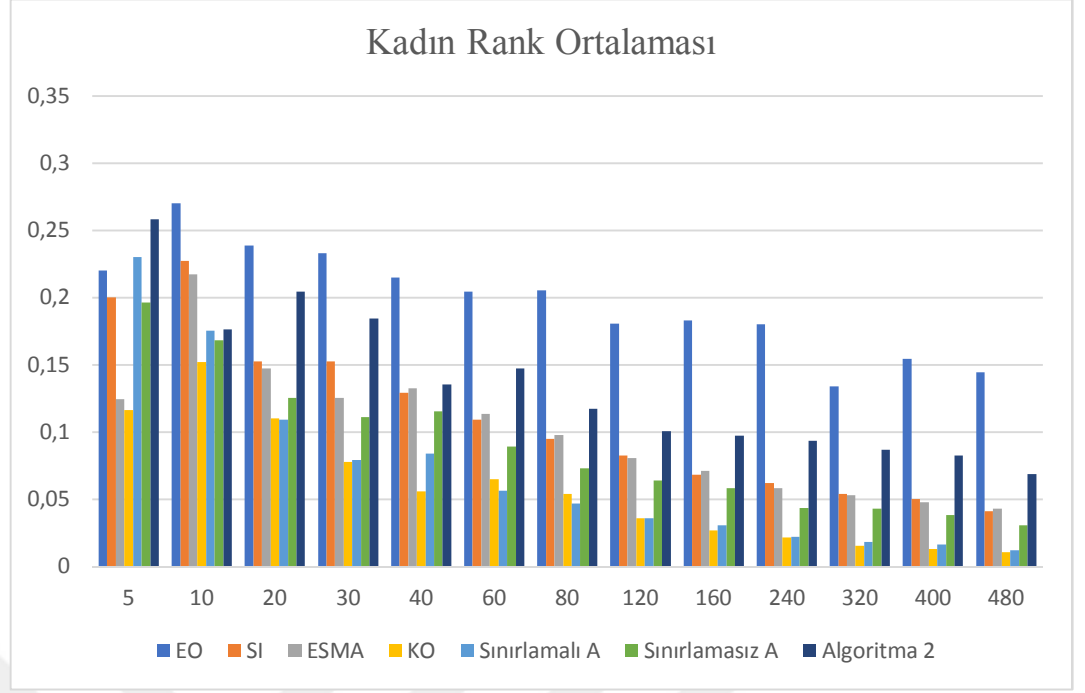
2'nin çalışma sonuçları yer almaktadır. ESMA algoritması Giannakopoulos'da (2015) sunulmuş, eşitlikçi sonuçlar veren bir algoritmadır. SI algoritmasının bulduğu bir çok kararlı sonuç arasında rank farkı minimum olan kararlı eşleşme, bu grafiklerde kullanılmıştır.



Şekil 4.9 Erkeklerin eşleştiği kişileri tercih etme sırası ortalaması.

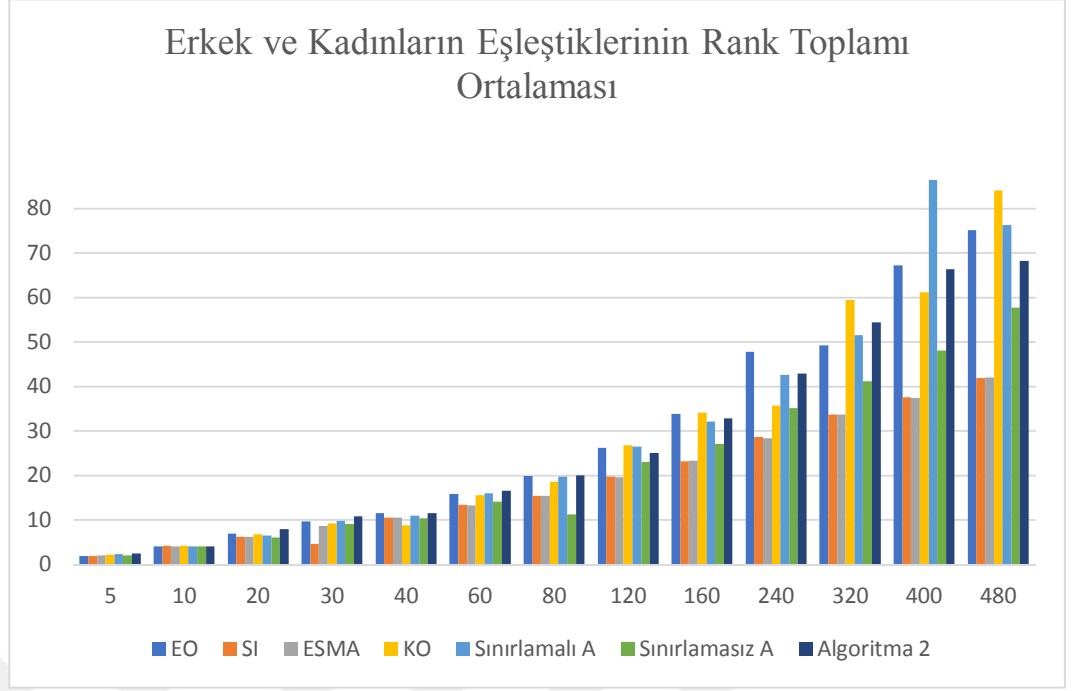
Şekil 4.9'da algoritmaların bulduğu kararlı sonuçlarda erkeklerin ortalama olarak kaçınıcı tercihleri ile eşleştiği yer almaktadır. Algoritma sonuçları okunaklılık açısından n değerine bölünmüştür. Örneğin $n = 120$ için kadın optimal çözüm bulan Gale-Shapley algoritması 22,45 sonucunu vermiştir. Bu sayı $n = 120$ 'e bölünmüştür, elde edilen 0,19 sayısı grafiğe konulmuştur. Bu işlem bu bölümdeki rank toplamaları ve farkları grafiği hariç tüm grafiklere uygulanmıştır.

Bu grafikte erkekler için en iyi sonucu EO vermiştir. En kötü sonucu KO algoritması vermiştir. ESMA ve SI algoritmalarının sonuçları bu iki sonucun arasındadır ve birbirine çok yakındır ve görece iyidir. Sınırlamalı A algoritması KO ile benzer sonuç vermiştir. Sınırlamasız A ile Algoritma 2 ise ortalarda değerler bulmuştur ve birbirine yakın sonuçlar vermiştir.



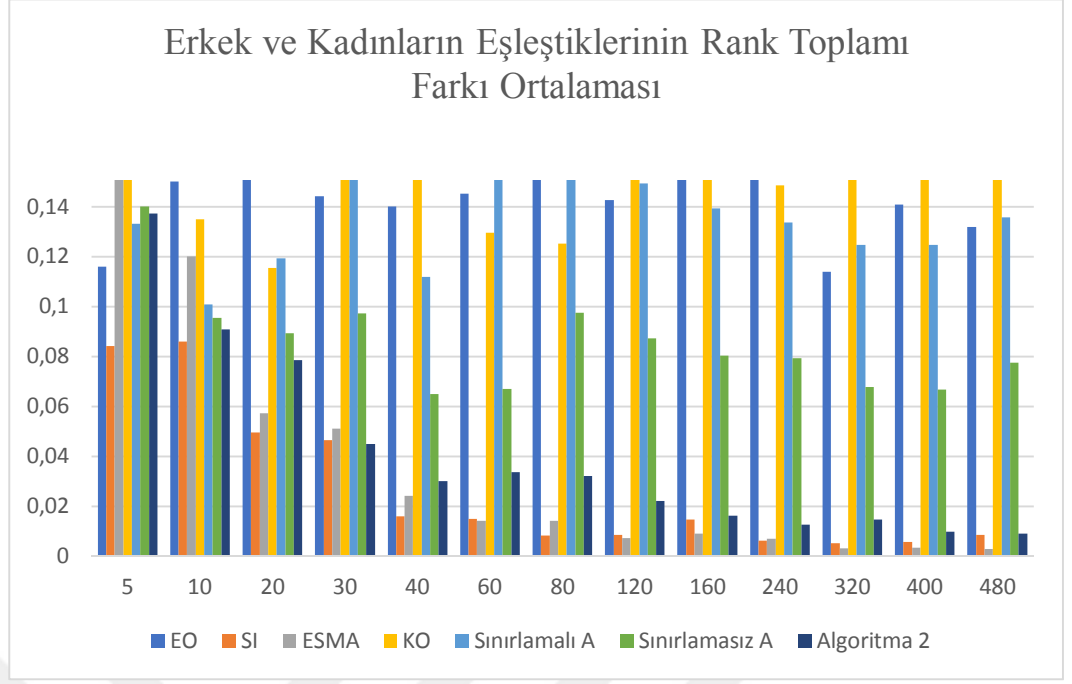
Şekil 4.10 Kadınların eşleştiği kişileri tercih etme sırasının ortalaması.

Şekil 4.10’da algoritmaların bulduğu kararlı sonuçlarda kadınların ortalama olarak kaçınıcı tercihleri ile eşleştiği yer almaktadır. Kadınlar için en iyi sonucu KO vermiştir. En kötü sonucu EO algoritması vermiştir. ESMA ve SI algoritmalarının sonuçları bu iki sonucun arasındadır ve birbirine çok yakındır ve erkek rank ortalamasına da çok yakındır. Burada Sınırlamalı A algoritması KO’ya benzer çalıştığından iyi sonuç vermiştir ve ESMA ile SI algoritmalarına yakındır.



Şekil 4.11 Erkek ve kadınların eşleştiği kişileri tercih etme sıralarının toplamı ortalaması.

Şekil 4.11’de yer alan grafikte gerçek sonuçlar okunaklılık açısından n^2 ’ye bölünmüştür. Algoritmaların bulduğu kararlı sonuçlarda erkeklerin ve kadınların eşleştiği kişilerin rank toplamı ortalamaları yer almaktadır. EO ve KO beklendiği üzere en kötü sonucu vermiştir. ESMA ve SI algoritmalarının sonuçları bu iki sonucun arasındadır ve birbirine çok yakındır. Sınırlamasız A kısmen iyi sonuç vermiştir ancak SI ve ESMA algoritmalarına yaklaşamamıştır.



Şekil 4.12 Erkeklerin rank toplamı ile kadınların rank toplamı arasındaki ortalama fark.

Şekil 4.12’de algoritmaların bulunduğu kararlı sonuçlarda erkeklerin ve kadınların eşleştiği kişilerin rank farklarının toplamının ortalamaları gerçek sonuçları n^2 ’ye bölünmüştür. EO ve KO algoritmaları beklendiği üzere en kötü sonucu vermiştir. ESMA ve SI algoritmalarının sonuçları bu iki sonucun arasındadır ve birbirine çok yakındır. ESMA algoritması $n=320$ ’den 480’e doğru giderken biraz daha iyi performans göstermiştir. Algoritma 2’de SI ve ESMA algoritmalarına yaklaşan sonuçlar vermiştir.

4.6 Sonuçlar

General model: $f(x) = a \cdot \log_2(x)^b + e$ Coefficients (with 95% confidence bounds): a = 1.636 (-6.048, 9.32) b = 0.3216 (-0.6708, 1.314) e = -2.129 (-10.57, 6.314) Goodness of fit: SSE: 0.1206 R-square: 0.9252 Adjusted R-square: 0.9102 RMSE: 0.1098 (a)	General model: $f(x) = a \cdot x^{(3/2)} \cdot \log_2(x)^{(-3/2)} + d$ Coefficients (with 95% confidence bounds): a = 3.947 (2.93, 4.963) d = -90.74 (-259.9, 78.38) Goodness of fit: SSE: 4.795e+05 R-square: 0.8691 Adjusted R-square: 0.8572 RMSE: 208.8 (b)	General model: $f(x) = a \cdot x^{(3/2)} \cdot \log_2(x)^{(-3/2)} + d$ Coefficients (with 95% confidence bounds): a = 1.637 (1.419, 1.856) d = 14.14 (-22.22, 50.5) Goodness of fit: SSE: 2.216e+04 R-square: 0.9611 Adjusted R-square: 0.9576 RMSE: 44.89 (c)
--	---	--

Şekil 4.13 SI ve ESMA algoritmasına dair eğri uyarlama örneği.

n	MO	SI	ESMA	(MO-SI)/ (n ² /logn)	SI/ [(n/logn) ^{3/2}]	ESMA/ [(n/logn) ^{3/2}]
5	2,90	2,10	5,50	0,07	0,66	1,74
10	15,00	8,60	12,00	0,21	1,65	2,30
20	65,00	19,80	22,90	0,49	1,99	2,30
30	129,60	41,80	46,00	0,48	2,76	3,04
40	223,80	25,60	38,80	0,66	1,24	1,88
60	522,60	53,40	50,90	0,77	1,65	1,57
80	1035,80	52,00	91,20	0,97	1,16	2,03
120	2052,31	121,44	105,38	0,93	1,68	1,46
160	3966,14	376,50	227,44	1,03	3,69	2,23
240	9289,00	358,20	395,80	1,23	2,14	2,37
320	11670,00	531,20	324,20	0,91	2,23	1,36
400	22508,44	891,67	544,56	1,17	2,83	1,73
480	30388,63	1950,40	647,37	1,10	4,93	1,64

Şekil 4.14 Deneysel ve teorik sonuç karşılaştırmasına dair veriler.

Şekil 4.14'te, Şekil 4.12'den elde edilen MO ve SI algoritma rank farkı ortalaması sonuçları birbirinden çıkartılmıştır. Daha sonra, elde edilen bu fark, $\frac{n^2}{\log n}$ 'e bölünerek iyileşme miktarı ile teorik sonuçlar kıyaslanmıştır. Bu bölme işlemi sonucunun sabit olması beklenmektedir. Çünkü teorik olarak fark en fazla $O(n^2 / \log n)$ olabilir. Bölme işleminin sonuçlarına baktığımızda ise neredeyse sabit denebilecek çok az bir artış görülmektedir (Bkz. Şekil 4.13(a)). " $(\log n)^{0.3216}$ " eğrinin n 'e bağlı değişenidir. Bu eğriye ait SSE değeri 0,12'dir. SSE, R-square, Adjusted R-square ve RMSE değeri iyi denebilecek değerlere yakındır. Buradaki $O(\log n)^{0.3216}$ şeklindeki artışın Java Random kütüphanesinden kaynaklı olabileceği düşünülmekle birlikte bu aşamada bu sonuç kenara konularak algoritmalar için kıyaslamalar yapılmıştır.

Şekil 4.13(b)'de SI algoritmasının Şekil 4.14'teki rank farkları ortalaması sonuçları alınarak $a * \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}} + d$ eğrisine eğri uyarlama yapılmıştır. Elde edilen RMSE=208.8 değeri eğri uyarlamanın doğru olmadığını göstermektedir. Zaten, Şekil 4.14'te $SI / \left(\frac{n}{\log n}\right)^{3/2}$ kolonunda SI algoritması sonuçlarının $O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ 'dan daha fazla arttığı gözlemlenmektedir. SI algoritmasındaki sonuç, deneysel tur sayısı sonuçlarının hesaplanan $O\left((n \log n)^{\frac{1}{2}}\right)$ değerinden daha az olmasından kaynaklanmaktadır. Çünkü, deneysel tur sayısı sonuçları $O((n)^{1/2})$ 'dan daha azdır (Bkz. Şekil 4.8).

Şekil 4.13(c)'de ESMA algoritmasının Şekil 4.14'teki rank farkları ortalaması sonuçları $a * \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}} + d$ 'ye uyarlandığında RMSE=44.89 çıkmıştır. Buna göre veriler eğriye uygun olmamakla birlikte SI algoritmasına göre kısmen daha yakındır ve bu demektir ki ESMA algoritmasının cinsiyet-eşitlikçi (*Ing. Equitable*) çözüme yaklaşma oranı, $O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ 'e SI algoritmasına göre kısmen daha yakındır.

İkili arama algoritması şeklinde çalışan sınırlandırılmalı algoritmanın iki versiyonu incelendiğinde “Sınırlamasız” dediğimiz, her kadın oyuncunun teklifleri inceleme üst sınırının eşit olduğu algoritma ortalama olarak $O(\log n)$ tur çalışmıştır ve örnek problemlerde erkek optimal çözümden kadın optimale doğru birçok sonuç bulmuştur. Bu sonuçlar içerisinde algoritmanın bulduğu tüm kararlı çözümler alınarak grafikler oluşturulmuştur. Rank ortalamaları toplam ve fark ortalamaları olarak SI ve ESMA algoritmalarının gerisinde kalmıştır. Pittel'de (1989) yer alan erkek optimal çözümdeki erkek ve kadın rank ortalamalarını kullanarak bir algoritmanın erkek optimal çözümden kadın optimale giderken tekdüze dağılımda $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ kadar rank iyileştirmesi yapması gerektiğini söylemiştik. Bu durumda ortalama $O(\log n)$ tur çalışan bu algoritma eşitlikçi optimal çözüme en fazla $O\left(\frac{n^2}{\log n^2}\right)$ kadar yaklaşabilir.

Bu algoritmanın sınırlamalı dediğimiz, her kadın oyuncunun teklif kabul üst sınırının kişiye özel olduğu versiyonu da çok benzer sonuçlar vermiştir. Çalışma zamanı ve elde edilen sonuçlar bağlamında sınırlamasız algoritmadan bir farkı yoktur.

Ardından Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritma başlığı ile yordamsal olarak adaletli bir algoritmanın üç farklı versiyonu incelenmiştir. Algoritma 1 ve Algoritma 3, N sayısı arttıkça kararlı sonuç elde etme anlamında gereken performansı göstermediğinden sadece Algoritma 2'nin sonuçları incelenmiştir. Her birinin kendi tercih sıralarına göre teklif etme hakkı ve gelen teklifleri değerlendirme hakkı vardır. Bu yüzden elde edilen sonuçlar da sonuçsal olarak adaletlidir. Bu üç algoritma da deterministik değildir. Rastgele teklif sırası değiştirildiğinde farklı kararlı sonuçlar elde edilebilir. Sonuçlar, rank ortalaması grafiklerinde her iki cins için de SI ve ESMA kadar olmasa da adaletli sonuçlar elde edilmiştir. Ancak rank toplamlarının minimize edildiği eşitlikçi (*Ing. Egalitarian*) çözümü bulma bağlamında erkek ve kadın optimal çözüme yakın sonuçlar elde edilmiştir. Rank farklarını incelediğimiz eşitlikçi çözümde kısmen daha iyi sonuçlar elde edilmiştir neredeyse SI ve ESMA'ya yaklaşmıştır.

Sonuncu İyileştirmeli algoritma sadece bir kümedeki elemanların karşı kümedeki oyunculara teklif etme hakkı olduğundan yordamsal olarak adaletli değildir, çünkü oyuncuların strateji kümeleri eşit değildir. Bununla birlikte bu algoritma deterministtir ve daima kararlı sonuçlar elde edilir. Algoritma erkek optimal çözümünden kadın optimale doğru giderken ara sonuçlar vermektedir. Bu ara sonuçlardan en eşitlikçi olanı, yani erkek ve kadınların eşleri arasındaki rank farkları toplamının minimize olduğu sonuca baktığımızda bu bölümde ESMA ile birlikte en iyi sonuçları vermektedir. Aynı zamanda rankların toplamının minimize edildiği eşitlikçi çözüm bağlamında da ESMA ve Algoritma 2 ile birlikte en iyi sonucu vermiştir.

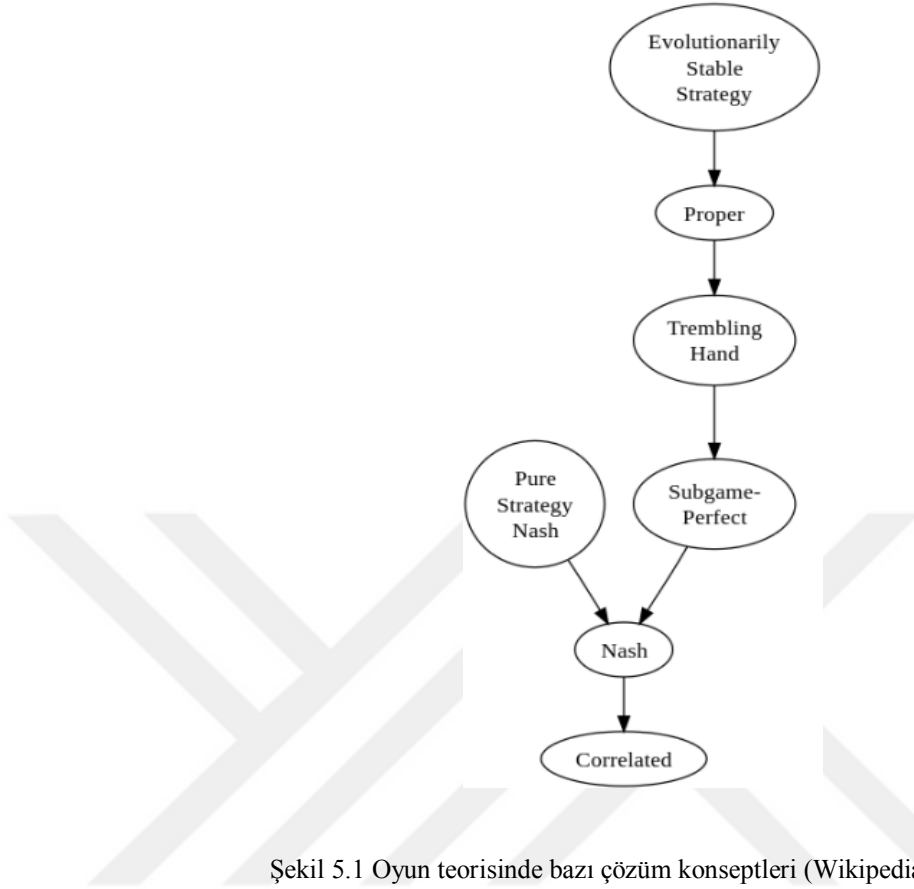
5. DENGİ, ADALET VE KARARLILIK

Bir dengenin kararlılık durumu ve bu durumu garantileyen koşulların belirlenmesi uzun zamandır araştırılmaktadır. Oyun dengelerinin bazıları diğerlerine göre gerçek hayatta daha çok karşımıza çıkmaktadır. Bazıları ise diğerlerine oranla daha kararlı olabilmektedir. Kararlılık özelliği bir dengenin diğer dengelere oranla daha zor bozulması olarak düşünülebilir.

Bu bölümde öncelikle rasyonel oyuncuların yer aldığı oyunlarda dengelerdeki kararlılık kavramının dayandığı temel konular, tanımları ile birlikte anlatılmıştır. İlk olarak kararlılık ile ilgili araştırma konuları da olan ardışık denge (İng. *Sequential Equilibrium*) (SE), titreyen el mükemmel dengesi (İng. *Trembling Hand Perfect Equilibrium*) (THPE), mükemmel denge (İng. *Perfect Equilibrium*) (PE), uygun denge (İng. *Proper Equilibrium*) (PRE), SPE, korelasyon dengesi (İng. *Correlated Equilibrium*) (CE) kavramları ile evrimsel kararlı strateji (İng. *Evolutionary Stable Strategy*) (ESS) şeklindeki çözüm konseptleri anlatılmıştır. Daha sonra bu dengelerin bazılarının taşıdıkları örneğin geriye doğru tümevarım (İng. *Backward Induction*) ile uyumlu olma, çeşitli yanlış stratejilere ve hamlelere karşı dirençli olma...vb gibi özelliklerin de incelendiği Kohlberg ve Mertens (1986) makalesi kullanılarak normal form ve sıralı oyunlarda kararlı denge özellikleri anlatılmıştır. Anılan makalede rasyonel oyuncuların yer aldığı kararlı bir dengenin taşınması gereken özellikler yer almaktadır. Bunlar varoluş (İng. *Existence*), bağlantınlılık (İng. *Connectedness*), geriye doğru tümevarıma uygunluk, değişmezlik (İng. *Invariance*), kabul edilebilirlik (İng. *Admissibility*), yinelenmiş baskınlık (İng. *Iterated Dominance*) başlıklarıyla ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Daha sonra pazarlık oyunlarının tanımı yapılmıştır. Dengelerin kararlı olma özellikleri sıralı ve normal form oyunlar için geçerli olduğundan pazarlık oyunlarında da geçerlidir.

Tüm bunlara karşın, oyun teorisinde örneğin tekrarlı tutsak ikilemi ve ultiatom oyunu gibi teorisin öngördüğü sonuçları bize gerçek hayatta vermeyen oyunlar vardır. Oyuncular bazen rasyonel oynamamaktadır. Kimi araştırmacılara göre rasyonalite tanımı insan düşüncesini daha iyi modelleyecek şekilde iyileştirilmelidir. Bu bölümde rasyonel oyuncuların olduğu oyun dengelerinde kararlılık için gereken koşulları incelemek, kararlılık ile rasyonalite arasındaki ilişkiyi irdelemek ve bu konuda bir tartışma açmak amaçlanmıştır.

5.1 Giriş



Şekil 5.1 Oyun teorisinde bazı çözüm konseptleri (Wikipedia, 2017a).

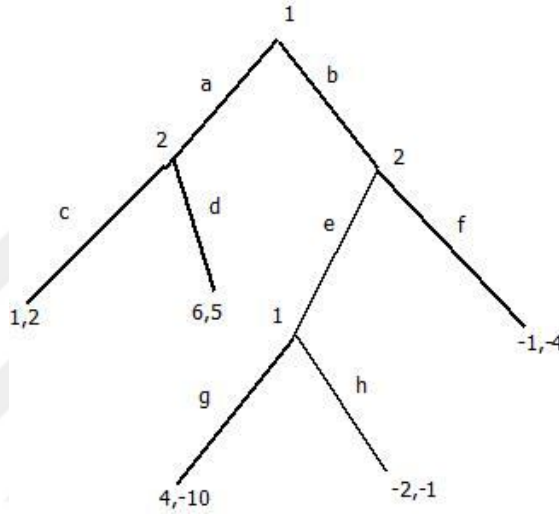
Nash dengesi ile birlikte karar aşamalarını modellemede bir dönüm noktası yaşayan oyun teorisi, daha ileriki zamanda bu dengelerin bazılarının daha akılcı görünmesi, bazılarının gerçek hayata daha uyarlanabilir olması gibi nedenlerle çeşitli analizlerle araştırılmıştır. Bazı dengelerin kararlı olma ya da olmama durumları incelenmiştir. Ortak özellikleri olan dengeler bulunmaya ve bu özellikler belirlenmeye çalışılmıştır. Bu anlamda çeşitli çözüm kavramları ortaya atılmıştır. Şekil 5.1’de mükemmel bilgi (İng. *Perfect Information*) oyunlarda geçerli olan bu çözüm konseptlerinden bazıları daha özel olandan daha genel olana doğru resmedilmiştir.

Dengelerin kararlı olma özelliği, adaletli olma durumu gibi önemli bir özelliktir. Dengelerin kararlılığı bugüne kadar birçok açıdan incelenmiştir. Kohlberg ve Mertens’te (1986) SE, PE, PRE gibi kavramlar incelenerek kararlı bir denge için gereken koşullar ortaya konmuştur. Bu alt bölümde, kararlı denge için gereken koşullar anlatılmadan önce bu koşullarla ilgili olan kavramların tanımları verilecektir. Bir oyunda ortaya çıkan dengelerden hangisinin daha kararlı olduğu,

oyuncuların deneysel uygulamalarında hangi dengelerin ortaya çıktığı hala önemli bir araştırma konusudur.

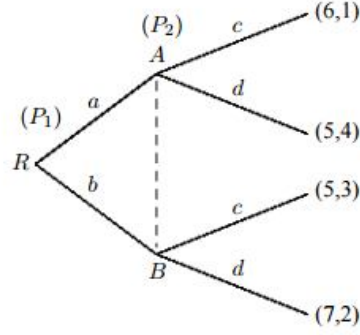
5.1.1 Ardışık denge (SE)

Ardışık denge sıralı oynanan oyunlar üzerinde tanımlanmış bir dengedir. Bu bölümde Kreps ve Wilson'ın (1982) ortaya attığı ardışık denge kavramı, Northwestern Üniversitesi'ndeki (2017) örnekler ve tanımlar kullanılarak anlatılmıştır.



Şekil 5.2 Örnek bir sıralı oyun (II).

Örneğin Şekil 5.2'de (b, h) stratejisi, birinci oyuncunun saf bir stratejisidir. $1/3$ olasılıkla (b, g) , $2/3$ olasılıkla (b, h) oynaması ise karma bir stratejidir. Birinci oyuncunun $1/4$ olasılıkla b , $2/5$ olasılıkla g oynaması ise davranışsal (İng. *Behavioral*) bir stratejidir. Davranışsal strateji, bir oyuncunun kendisine ait düğüme vardığında o düğümdeki seçeneklere bir olasılık dağılımı atamasıdır.



Şekil 5.3 Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alıntılanan örnek oyun (I).

Şekil 5.3'te yer alan iki oyunculu oyuna baktığımızda birinci oyuncu a ve b hamleleri yapabilmektedir. İkinci oyuncu ise c ya da d hamlelerini yapabilir, ancak ikinci oyuncu birinci oyuncunun a ya da b stratejilerinden hangisini kullandığını bilmemektedir. Bu oyunda a, b, c, d stratejileri oyuncuların saf stratejileridir. Örneğin birinci oyuncu a ile b stratejilerine $(2/3, 1/3)$ gibi bir olasılık dağılımı atar ve buna göre stratejisini seçerse bu durumda bu strateji birinci oyuncunun karma stratejisidir.

Tanım 5.1: Sıralı oynanan bir oyunda, bir oyuncunun, oyundaki bir düğüme vardığında, o ana kadar yapmış olabileceği tüm hamleleri içeren kümeye bilgi kümesi (İng. *Information Set*) (IS) denir (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Mükemmel bilgi (İng. *Perfect Information*) bir oyunda oyuncu oyun geçmişinden haberdardır. Bu nedenle herhangi bir düğümde o ana kadar yaptığı tüm hamleleri bilir. Tüm bilgi kümeleri tek elemanlıdır. Ancak mükemmel bilgi olmayan (İng. *Imperfect Information*) bir oyunda, oyuncu oyun geçmişini tam olarak bilemediğinden bilgi kümeleri tek elemanlı olmayabilir. Örneğin amiral battı oyununda oyuncular hamle yaptığında tam olarak hangi bölgeyi vurduklarını bilmezler. Bir oyuncu tam olarak oyun ağacında nerede olduğunu bilmediğinden bilgi kümeleri tek elemanlı değildir, oyunda bulunabileceği tüm olası düğümler bilgi kümesindedir (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Tanım 5.2: Bir P_i oyuncusunun n oyunculu bir oyunda, kendisine ait tüm düğümlerde ve bilgi kümelerinde kullanacağı tüm olasılıkları σ_i ile gösterelim, bu durumda $\{\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n\}$ oyundaki bir davranışsal (İng. *Behavioral*) strateji profilidir (Northwestern Üniversitesi, 2017).

Şekil 5.3'teki oyunda $\{A, B\}$, ikinci oyuncunun bilgi kümesidir. A düğümünde d , B düğümünde c stratejisi ikinci oyuncu için daha çok fayda değeri demektir. İkinci oyuncu hangi kümede yer aldığını bilmediğinden c ve d stratejileri arasında bir seçim yapamaz. Ancak, beklenen fayda değerini maksimize etmek için karma bir strateji belirleyebilir ya da kendisine ait düğümdeki bilgi kümesine bir olasılık dağılımı atayabilir. Böylece bir davranışsal strateji kullanabilir.

Örneğin birinci oyuncu a stratejisini p , b stratejisini $(1 - p)$ olasılıkla seçsin. İkinci oyuncu c stratejisini q , d stratejisini $(1 - q)$ olasılıkla seçsin. Bu durumda (p, q) oyunda bir davranışsal strateji profilidir. Bu olasılıklarla R düğümünde birinci ve ikinci oyuncunun beklenen fayda değerleri şöyledir (Northwestern Üniversitesi, 2017):

$$\begin{aligned} E_1(p, q) &= pq(6) + p(1 - q)(5) + (1 - p)q(5) + (1 - p)(1 - q)(7) \\ &= pq(6 - 5 - 5 + 7) + p(5 - 7) + q(5 - 7) + 7 \\ &= 3pq - 2p - 2q + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(p, q) &= pq(1) + p(1 - q)(4) + (1 - p)q(3) + (1 - p)(1 - q)(2) \\ &= pq(1 - 4 - 3 + 2) + p(4 - 2) + q(3 - 2) + 2 \\ &= -4pq - 2p + q + 2 \end{aligned}$$

Birinci oyuncu p olasılığını istediği şekilde değiştirebilir. Birinci oyuncu E_1 'i maksimize etmek için q olasılığına göre hareket etmelidir. Beklediği fayda değerinin ne zaman maksimize olduğunu bulmak için E_1 'in p 'ye göre türevini bulur ve bulduğu denklemi 0'a eşitler.

$3q - 2 = 0$, $q = 2/3$ olasılığı birinci oyuncunun p olasılığını belirlemesinde bir eyer noktasıdır (İng. *Saddle Point*). Birinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek istiyorsa p değerleri şöyle olmalıdır:

$$p = \begin{cases} 0 & \text{eğer } q < 2/3 \\ \text{herhangi bir değer} & \text{eğer } q = 2/3 \\ 1 & \text{eğer } q > 2/3 \end{cases}$$

Bu işlemleri ikinci oyuncu için yapıldığında, ikinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek istiyorsa q değerleri şöyle olmalıdır:

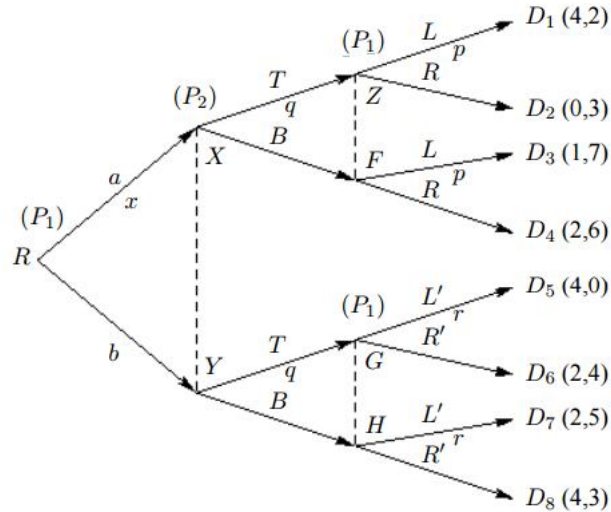
$$q = \begin{cases} 1 & \text{eğer } p < 1/4 \\ \text{herhangi bir değer} & \text{eğer } p = 1/4 \\ 0 & \text{eğer } p > 1/4 \end{cases}$$

Bu iki olasılık koşulunu aynı anda sağlayan değer bir Nash dengesidir. Burada ise olup olmadığını anlamak için p olasılığı incelenebilir. q ile ilgili olasılık koşuluna baktığımızda p olasılığının incelenmesi gereken 3 durumu vardır.

$p > 1/4$ iken q olasılığı 0 olmalıdır. Yani $q < 2/3$ olmalıdır. Ancak p ile ilgili olasılık koşuluna baktığımızda p 'nin 0 olması gerektiğini görürüz. Bu durum bir çelişkidir. Yani p olasılığı $1/4$ 'ten büyük olamaz.

İkinci durum ise $p = 1/4$ 'tür. $p = 1/4$ iken q herhangi bir değer olabilir. Yani $2/3$ de olabilir. p ile ilgili düğüme baktığımızda $q = 2/3$ iken, p de herhangi bir şey olabilir. Bu durumda $(p, q) = (1/4, 2/3)$ bir dengedir.

Üçüncü durum ise $p < 1/4$ durumudur. $p < 1/4$ iken $q=1$ olmalıdır. Yani $q > 2/3$ olmalıdır. Ancak p ile ilgili olasılık koşuluna göre q değeri $2/3$ 'ten büyük iken $p = 1$ olmalıdır. Bu da bir çelişkidir. Yani $p < 1/4$ olamaz (Northwestern Üniversitesi, 2017).



Şekil 5.4 Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alıntılanan örnek oyun (II).

Sıralı oynanan bir oyunda oyuncuların bekledikleri fayda değerinin hesaplanmasına dair bir diğer örnek Şekil 5.4'te yer almaktadır. Oyun ile ilgili tüm denge hesaplamaları Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alınmıştır. Bu oyunda

iki oyuncu vardır. Birinci oyuncunun bilgi kümeleri üç tanedir. Bunlar $I_1 = \{R\}$, $I_2 = \{Z, F\}$, $I_3 = \{G, H\}$ 'dir. İkinci oyuncunun ise sadece bir tane bilgi kümesi vardır, $I_1 = \{X, Y\}$. Örneğin R düğümünden F düğümüne varma olasılığı $x(1 - q)$ 'dur. Birinci oyuncu $I_2 = \{Z, F\}$ kümesinde olduğunu biliyorsa o zaman Z 'de olma olasılığı q 'dur. Oyuncuların her bir düğümde beklediği fayda değeri ayrı ayrı hesaplanır. Örneğin X düğümünde beklenen fayda değerini hesaplamak istiyorsak öncelikle Z ve F düğümlerindeki beklenen fayda değerleri bulunmalıdır.

$$E(Z, \sigma) = p(4, 2) + (1 - p)(0, 3) = (4p, 3 - p)$$

$$E(F, \sigma) = p(1, 7) + (1 - p)(2, 6) = (2 - p, 6 + p)$$

$$E(G, \sigma) = r(4, 0) + (1 - r)(2, 4) = (2 + 2r, 4 - 4r)$$

$$E(H, \sigma) = r(2, 5) + (1 - r)(4, 3) = (4 - 2r, 3 + 2r)$$

$$\begin{aligned} E(X, \sigma) &= q(4p, 3 - p) + (1 - q)(2 - p, 6 + p) \\ &= (2 - 2q - p + 5pq, 6 - 3q + p - 2pq) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y, \sigma) &= q(2 + 2r, 4 - 4r) + (1 - q)(4 - 2r, 3 + 2r) \\ &= (4 - 2r - 2q + 4qr, 3 + q + 2r - 6qr) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(R, \sigma) &= x(2 - 2q - p + 3pq, 6 - 3q + p - 2pq) + (1 - x)(4 \\ &\quad - 2r - 2q + 4qr, 3 + q + 2r - 6qr) \end{aligned}$$

I_2 'de birinci oyuncunun beklenen fayda değeri şöyledir:

$$\begin{aligned} E_1(I_2, \sigma, \mu^\sigma) &= q E_1(Z, \sigma) + (1 - q) E_1(F, \sigma) = E_1(X, \sigma) \\ &= 2 - 2q - p + 5pq \end{aligned}$$

Tanım 5.3: Bir oyuncunun tüm bilgi kümelerine bir olasılık dağılımı atayan fonksiyona o oyuncunun inançlar sistemi denir. P_i oyuncunun inançlar sistemine μ_i diyelim. P_i 'ye ait tüm düğümlere atanan olasılık sıfıra eşit ya da büyük olmalıdır. P_i 'ye ait bir bilgi kümesine atanan olasılık dağılımındaki tüm olasılıkların toplamı 1'e eşit olmalıdır. Bir oyuncu bir bilgi kümesinde kazanacağı fayda değerini maksimize etmek istiyorsa beklediği fayda değerini hesaplamalıdır (Northwestern Üniversitesi, 2017) (Kreps and Wilson, 1982).

Bir P_j oyuncusunun I 'da beklediği fayda değeri:

$$E_j(I, \sigma, \mu) = \sum_{N \in I} \mu_j(N) \sum_{i=1}^k \sigma(N, X_i) u_j(x_i)$$

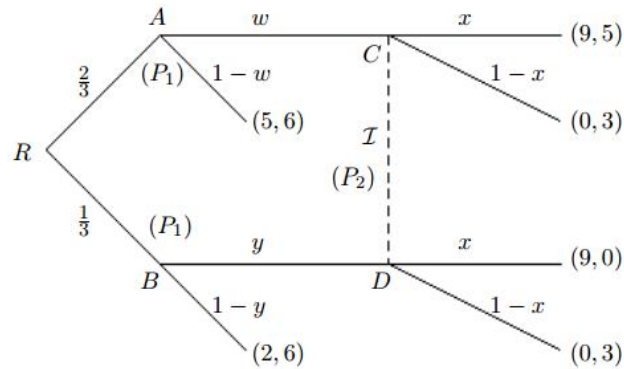
SE bir SPE'nin iyileştirilmiş versiyonudur (İng. *Refinement*). Kreps ve Wilson'da (1982) SE tanımını yapmıştır. Bir oyuncu bir düğüme vardığında hangi bilgi kümesinde olduğunu %100 olarak biliyorsa, o inanç sistemi oyuncunun strateji profili ile tutarlıdır.

Tanım 5.4: SE, n oyunculu mükemmel bilgi olmayan bir sıralı oyunda, oyuncuların davranışsal strateji profili $\sigma^* = \{\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*\}$ iken, ve bu strateji profili ile tutarlı tüm inanç sistemleri $\mu^* = \{\mu_1^*, \dots, \mu_n^*\}$ iken (σ^*, μ^*) ikilisidir. Bu ikili aynı zamanda değerlendirme (İng. *Assessment*) olarak da adlandırılmıştır. Herhangi bir P_j oyuncusunun beklediği fayda değeri:

$$E_j(I, \sigma^*, \mu^*) = \max_{\sigma_j} E_j(I, \sigma_1^*, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_n^*, \mu^*)$$

Burada P_j oyuncusu, (kendisinininki dahil) inanç sistemleri ve (kendisinininki dahil değil) diğer oyuncuların davranışsal stratejileri sabitken, kendi davranışsal stratejisini değiştirerek beklenen maksimum fayda değerini kazanabilir.

Teorem: Her sıralı mükemmel bilgi olmayan oyunda bir SE vardır (Kreps and Wilson, 1982).



Şekil 5.5 Northwestern Üniversitesi'nden (2017) alıntılanan örnek oyun (III).

Myerson'a ait bir kitaptan alıntılanan örnek oyun üzerinde SE hesaplaması Northwestern Üniversitesi'nde (2017) yer almaktadır (Bkz. Şekil 5.5). Bu oyun iki

kişilik mükemmel bilgi olmayan sıralı bir oyundur. Oyun başlangıçta tamamen şansa bağlı olarak $1/3$ olasılıkla B , $2/3$ olasılıkla A düğümünden ilerleyecektir. Oyun eğer A 'dan devam ederse P_1 oyuncusu w olasılıkla C diyecektir, B 'den devam ederse y olasılıkla D diyecektir.

Eğer w ve y sıfırdan farklı ise P_2 'nin C 'de olduğuna dair inancı:

$$\mu(C) = \frac{\frac{2}{3}w}{\frac{2}{3}w + \frac{1}{3}y}$$

$$P_2 \text{ oyuncusunun } D \text{ 'de olduğuna dair inancı: } \mu(D) = 1 - \mu(C) = \frac{y}{2w+y}$$

Eğer w ve y sıfıra eşitse, bu durumda ikinci oyuncunun inanç sistemi herhangi bir şey olabilir, bu durum sonucu etkilemez. İkisinden bir tanesinin sıfırdan farklı olduğu durumda ikinci oyuncunun kendi bilgi kümesi $I = \{C, D\}$ 'de beklediği fayda değeri şöyledir:

$$E_2(I) = \left(\frac{\frac{2}{3}w}{\frac{2}{3}w + \frac{1}{3}y} \right) [5x + (1-x)3] + \left(\frac{y}{2w+y} \right) [0x + (1-x)3]$$

Bu denklem sadeleştirilip x 'e göre türevi alındığında:

$$\frac{\partial E_2(I)}{\partial x} = \frac{4w - 3y}{2w + y}$$

Bu türevin sıfıra eşit olduğu noktalar incelendiğinde, denklemi maksimize etmek için gereken koşulları gösteren x 'in w ve y 'ye bağlı olan bir olasılık koşulu elde edilmektedir.

$$x = \begin{cases} \text{herhangi bir şey eğer } (w, y) = (0, 0) \\ 0 \text{ eğer } w < 3/4 y \\ \text{herhangi bir şey eğer } w = 3/4 y \\ 1 \text{ eğer } w > 3/4 y \end{cases}$$

P_1 oyuncusunun A düğümünde beklenen fayda değeri:

$$E_1(A) = (1 - w)5 + w [x(9) + (1 - x)(0)] = 5(1 - w) + 9wx$$

Bu denklemin w 'ye göre türevi alındığında denklemi maksimize etmek için gereken koşulları gösteren olasılık koşulu:

$$w = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 5/9 \\ \text{herhangi bir şey} & \text{eğer } x = 5/9 \\ 1 & \text{eğer } x > 5/9 \end{cases}$$

P_1 oyuncusunun B düğümünde beklenen fayda değeri:

$$E_1(B) = 2(1 - y) + 9yx$$

Bu denklemin y 'ye göre türevi alındığında denklemi maksimize etmek için gereken koşulları gösteren olasılık koşulu:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 2/9 \\ \text{herhangi bir şey} & \text{eğer } x = 2/9 \\ 1 & \text{eğer } x > 2/9 \end{cases}$$

Sonuçta bu üç olasılık koşulunu aynı anda sağlayan (w, y, x) üçlüleri şunlardır:

$$\left\{ w = 0, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{2}{9} \right\}, \left\{ w = \frac{3}{4}, y = 1, x = \frac{5}{9} \right\}, \left\{ w = 1, y = 1, x = 1 \right\}$$

Bu üçlülerin her biri bir SE'dir.

Sıralı oynanan oyunlarda tanımlanan bu denge kavramı yordamsal adalet özelliği taşımamaktadır. Çünkü sıralı oyunlarda oyuncular aynı strateji kümesine sahip değildir.

5.1.2 Titreyen el mükemmel dengesi (THPE)

THPE kavramı Selten (1975) tarafından sunulmuştur. Selten'in önerdiği bu denge kavramında, oyuncu dengeye ulaşmaya aykırı hamleler yaptığı anda oyunun o dengeye ulaşması ya da ulaşamaması ile ilgilidir. Böyle oyunlarda oyuncular bazen oynamaya niyetli oldukları stratejilerden saparlar ve belli bir olasılıkla başka stratejileri oynarlar.

Tanım 5.5: Sıralı bir oyunda bir oyuncu o ana kadar hangi bilgi kümelerine ulaştığını tam olarak biliyorsa o oyuna mükemmel hatırlama (İng. *Perfect Recall*) denir (Kuhn, 1953).

Tanım 5.6: Tamamen karma strateji (İng. *Totally Mixed Strategy*), içinde tüm saf stratejilerin oynanma olasılığının sıfırdan büyük olduğu strateji demektir (Selten, 1975).

Tanım 5.7: Bir oyunda oyuncuların strateji kümeleri sadece “tamamen karma stratejiler” içeriyorsa o oyunlara tedirgin oyun (İng. *Perturbed Game*) denir (Selten, 1975).

Tanım 5.8: Tedirgin oyunlardan oluşan bir oyun dizisi düşünelim. Bu dizi bir oyuna yakınsıyor olsun. Bu tedirgin oyunlar dizisi, içinde bir Nash dengesi dizisi içersin. Bu dizi, asıl oyundaki bir S strateji kümesine yakınsıyorsa, S kümesi titreyen el mükemmel (İng. *Trembling Hand Perfect*) (THP) demektir (Selten, 1975).

Çizelge 5.1 Wikipedia’dan (2017b) alıntılanan örnek oyun.

	Left	Right
Up	1,1	2,0
Down	0,2	2,2

Çizelge 5.1’de yer alan oyunda, birinci oyuncu $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ olasılıkla U ve D oynasın. Bu durumda ikinci oyuncunun L oynadığında beklediği fayda değeri $1 * (1 - \varepsilon) + 2 * \varepsilon = 1 + \varepsilon$ olur, R oynadığında ise $0 * (1 - \varepsilon) + 2 * \varepsilon = 2\varepsilon$ olur. Bu oyuna yakınsayan perturbed oyunları düşündüğümüzde UL ve DR iki Nash dengesidir. Bu dengelerden biri, perturbed oyunlarda herhangi bir S strateji kümesine yakınsıyorsa o zaman o stratejiler THP’dir. Küçük ε değerleri için ikinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek adına R değil, L stratejisini oynamalıdır.

İkinci oyuncu $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ olasılıkla L ve R oynasın. Bu durumda birinci oyuncunun U oynadığında beklediği fayda değeri $1 * (1 - \varepsilon) + 2 * \varepsilon = 1 + \varepsilon$ olur, D oynadığında ise $0 * (1 - \varepsilon) + 2 * \varepsilon = 2\varepsilon$ olur. Küçük ε

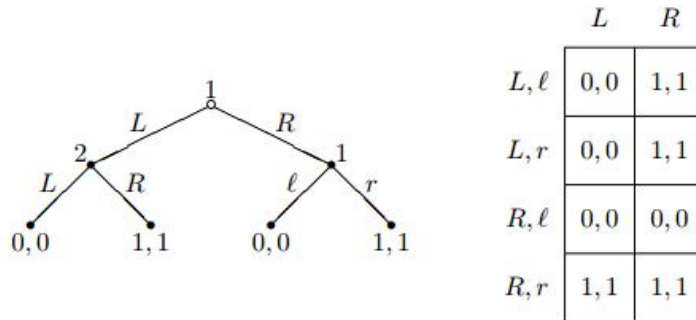
değerleri için birinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek adına D değil, U stratejisini oynamalıdır.

Burada UL strateji kümesi THP'dir. Ancak aynı şey DR için geçerli değildir. Varsayalım ki DR 'ye yakınsayan bir tedirgin oyun dizisi var ve bu dizide DR strateji kümesine yakınsayan bir Nash dengesi dizisi var.

Birinci oyuncu $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ olasılıkla U ve D oynasın. Bu durumda ikinci oyuncunun L oynadığında beklediği fayda değeri $1 * \varepsilon + 2 * (1 - \varepsilon) = 2 - \varepsilon$ olur, R oynadığında ise $0 * \varepsilon + 2 * (1 - \varepsilon) = 2 - 2\varepsilon$ olur. Küçük ε değerleri için ve hatta tüm ε değerleri için ikinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek adına L stratejisini oynamalıdır. Yani, dizideki denge L 'ye (İng. *Deviating*) doğru sapmaktadır.

İkinci oyuncu $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ olasılıkla L ve R oynasın. Bu durumda birinci oyuncunun U oynadığında beklediği fayda değeri $1 * \varepsilon + 2 * (1 - \varepsilon) = 2 - \varepsilon$ olur, D oynadığında ise $0 * \varepsilon + 2 * (1 - \varepsilon) = 2 - 2\varepsilon$ olur. Küçük ε değerleri için ve hatta tüm ε değerleri için birinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek adına U stratejisini oynamalıdır. Yani, dizideki denge U 'ya doğru sapmaktadır.

Bu kavram sıralı oyunlara, oyunların normal formu ve genişletilmiş formu kullanılarak uyarlanmıştır ve görülmüştür ki sıralı bir oyunun normal formunda THP olan bir denge, oyun ağacında bu özelliğini içermeyebilir. Oyun ağacında THP olan stratejiler normal formda THP olmayabilir.



Şekil 5.6 Osborne ve Rubinstein'de (1994) sayfa 253'den alıntılanan örnek oyun.

Osborne ve Rubinstein'a (1994) göre Şekil 5.6'daki sıralı oyunda $((L, r), R)$ genişletilmiş formda bir THP bir strateji iken, normal formda THP değildir, çünkü (L, r) stratejisi (R, r) tarafından zayıf olarak ezilmektedir.

Tanım 5.9: Normal form bir oyunun THPE'ye karşılık gelen davranışsal strateji profili genişletilmiş form bir oyunda bir THPE'dir (Osborne and Rubinstein, 1994).

$((L, r), R)$ normal formda THP değildir. Çünkü P_1 oyuncusu $(L, l), (L, r), (R, l), (R, r)$ stratejilerini sırayla $\alpha, (1 - \alpha - \beta - \gamma), \beta, \gamma$ olasılıklarıyla oynadığında ve P_2 oyuncusu $(L), (R)$ stratejilerini sırayla $\varepsilon, (1 - \varepsilon)$ olasılıklarıyla oynadığında, birinci oyuncunun beklediği fayda değerleri:

$$(L, l): (1 - \varepsilon)$$

$$(L, r): (1 - \varepsilon)$$

$$(R, l): 0$$

$$(R, r): 1$$

olur ve ε değeri sıfıra giderken, ikinci oyuncu kendi beklediği fayda değerini maksimize etmek için (L, r) stratejisi yerine (R, r) stratejisini, $1 - \varepsilon < 1$ olduğundan dolayı, seçmelidir.

İkinci oyuncunun beklediği fayda değerleri ise:

$$L: \gamma$$

$$R: \alpha + (1 - \alpha - \beta - \gamma) + 0 + \gamma = 1 - \beta$$

İkinci oyuncu ise kendi beklenen değerini maksimize etmek için R 'yi oynamalıdır. Bu durumda $((L, r), R)$ sonucunun THP bir denge olmasını (L, r) stratejisi bozmaktadır.

Tanım 5.10: Etmen form (İng. *Agent Form*), genişletilmiş form bir oyundaki tüm bilgi kümelerin ayrı birer oyuncuya ait olduğunu varsayarak normal forma dönüştürülmesidir. Bir oyuncu birden fazla bilgi kümesine sahip olduğunda, ona ait fayda değeri sadece tekrarlanarak yazılır (Estanol, 2006).

Çizelge 5.2 Şekil 5.6'daki sıralı oyunun etmen normal formu.

	r	l
LL	0,0,0	0,0,0
LL	0,0,0	0,0,0
LR	1,1,1	1,1,1
LR	1,1,1	1,1,1
RL	1,1,1	0,0,0
RL	1,1,1	0,0,0
RR	1,1,1	0,0,0
RR	1,1,1	0,0,0

Genişletilmiş form bir oyun, etmen normal forma çevrildiğinde, bir denge THP ise genişletilmiş formda da o denge THP'dir. Şekil 5.6'da yer alan oyunun genişletilmiş formunda $((L, r), R)$ THP bir dengedir. Bu oyunun etmen normal formu Çizelge 5.2'de bulunmaktadır. Hücrelerdeki fayda değerleri sırayla birinci, ikinci ve üçüncü oyuncuya aittir (Estanol, 2006).

Çizelge 5.2'de $((L, r), R)$ sonucu koyu renk ile gösterilmiştir. Bu sonuç THP'dir. Birinci oyuncu (etmen formda üçüncü oyuncu) r ve l stratejilerini $(1 - \varepsilon), \varepsilon$ olasılığıyla oynasın. Birinci ve ikinci oyuncu (etmen formda birinci ve ikinci oyuncu) $LL, LL, LR, LR, RL, RL, RR, RR$ stratejilerini sırayla $a_1, a_2, (1 - \sum a_i), a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ olasılığı ile oynasın. Bu durumda birinci ve ikinci oyuncu kendi fayda değerlerini maksimize etmek için LR oynamalıdır. Birinci oyuncu (etmen formda üçüncü oyuncu) ise kendi fayda değerini maksimize etmek için r oynamalıdır. $((L, r), R)$ dengesi her iki taraf için de kararludur, THP'dir.

Normal form oyunlarda tanımlanan bu denge kavramının adalet özelliği taşıması gibi bir durumu yoktur. Bu denge, simetrik oyunlar için değil tüm normal form oyunlar için tanımlanmıştır. Oyunlar simetrik olmak zorunda olmadığından bu dengelerin adalet özelliği taşıması ya da taşınamaması oyuna göre değişir.

5.1.3 Mükemmel ve uygun denge (PE ve PRE)

Mükemmel ve uygun denge tanımına ε -mükemmel ve ε -uygun denge (İng. ε -Perfect ve ε -Proper Equilibrium) kavramları ile ulaşılmaktadır. Tanımlar ve örnekler Myerson'dan (1978) alınmıştır.

Tanım 5.11: ε -perfect equilibrium, içinde tüm saf stratejilerin olasılığının sıfırdan büyük olduğu, ancak yalnızca karşı oyuncunun stratejisine en iyi cevap olan saf stratejinin oynanma olasılığının ε 'dan fazla olduğu karma stratejilerden oluşan dengedir (Myerson, 1978).

Tanım 5.12: Myerson'a (1978) göre mükemmel denge, ε -mükemmel dengelerin ε sıfıra yaklaşırken yakınsadığı limittir. Bir ΔS_i kümesi, i. oyuncunun tüm karma stratejiler kümesi olmak üzere $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n$ karma strateji profili, ancak ve ancak şu koşulu daima sağlarsa mükemmel bir dengedir:

Öyle $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{(\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi olmalıdır ki bu iki dizi,

1. $\forall \varepsilon_k, \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$
2. $\forall k, (\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k)$ bir ε -mükemmel denge olmalıdır.
3. $\forall i, \forall s_i \in S_i, \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_i^k(s_i) = \sigma_i(s_i)$ olmalıdır.

Yani tüm epsilon değerleri sıfıra yakınsamalıdır. Mükemmel dengeye yakınsayan dizideki her bir üye bir ε -mükemmel denge olmalıdır. Saf bir stratejinin ε -mükemmel dengelerdeki oynanma olasılığı, mükemmel dengede oynanma olasılığına yakınsamalıdır.

Çizelge 5.3 Myerson'dan (1978) alıntılanan örnek oyun.

	β_1	β_2	β_3
α_1	1,1	0,0	-9,-9
α_2	0,0	0,0	-7,-7
α_3	-9,-9	-7,-7	-7,-7

Buna bir örnek olarak Çizelge 5.3'te yer alan oyundaki (α_2, β_2) gösterilebilir. Örneğin birinci oyuncu α_1 ve α_3 stratejisini ε olasılıkla oynasın, α_2 'yi de $1 - 2\varepsilon$ olasılıkla oynasın. Aynı şekilde ikinci oyuncu da β_1 ve β_3 stratejisini ε olasılıkla oynasın, β_2 'yi de $1 - 2\varepsilon$ olasılıkla oynasın. Bu durumda birinci oyuncunun α_1 , α_2 ve α_3 stratejilerini oynarken kazanabileceği beklenen fayda değerleri sırasıyla -8ε , -7ε , $-7 - 2\varepsilon$ olur. Bu durumda ε sıfıra giderken α_2 best response olur. Bu durum oyun simetrik olduğundan ikinci oyuncu için de geçerlidir. Yani öyle bir yakınsak oyun dizisi ve içinde mixed strateji Nash dengesi vardır ki ε sıfıra giderken (α_2, β_2) dengesine yakınsar (Myerson, 1978).

Bu durum aslında (α_1, β_1) için de geçerlidir. Örneğin birinci oyuncu α_2 ve α_3 stratejisini ε olasılıkla oynarsa, α_1 'i de $1 - 2\varepsilon$ olasılıkla oynarsa oyun dengesi (α_1, β_1) 'a yakınsar. Birinci oyuncunun α_1 , α_2 ve α_3 stratejilerini oynarken kazanabileceği beklenen fayda değerleri sırasıyla $1 - 11\varepsilon$, -7ε , $-9 + 4\varepsilon$ olur. Bu durumda ε sıfıra giderken α_1 best response olur. Ancak (α_1, β_1) ve (α_2, β_2) dengelerini birbirinden ayıran bir özellik vardır. (α_1, β_1) dengesi aynı zamanda bir uygun dengedir (Myerson, 1978).

Tanım 5.13: Uygun denge, ε -uygun dengelerin, ε sıfıra yakınsarken yakınsadığı dengedir (Myerson, 1978).

Tanım 5.14: (Myerson, 1978)'a göre ε -uygun denge, her i oyuncusunun tüm saf stratejileri $s_i, s'_i \in S_i$ için $V_i(s_i | \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n) < V_i(s'_i | \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$ ise o saf stratejilerin i oyuncusu tarafından oynanma olasılıkları arasında $\sigma_i(s_i) \leq \varepsilon * \sigma_i(s'_i)$ koşulu olduğu dengedir. Karşı oyuncunun oynadığı karma stratejiye daha iyi cevap olan tüm stratejilerin, en iyi cevap olup olmadığına bakılmaksızın, i oyuncusu tarafından oynanma olasılıklarının daha fazla olduğu bir denge durumudur. Yani bir strateji diğer bir stratejiden daha kötü ise oynanma olasılığı da daha azdır ve daha iyi olanın oynanma olasılığının ε katıdır.

$(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n) \in \Delta(S_1) \times \dots \times \Delta(S_i) \times \dots \times \Delta(S_n)$ ancak ve ancak $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ ve $\{(\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k)\}_{k=1}^\infty$ şeklinde diziler varsa ve aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa bir uygun dengedir:

- a) Her $\varepsilon_k > 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$,
- b) Her $(\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k)$ bir ε_k -uygun denge,

$$c) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_i^k(s_i) = \sigma_i(s_i) \quad \forall i \wedge \forall s_i \in S_i.$$

Çizelge 5.3'te yer alan oyunda, (α_1, β_1) dengesi bir uygun denge örneğidir. Birinci oyuncunun α_3 ve α_2 stratejilerinden beklediği fayda değeri $V_1(\alpha_3) < V_1(\alpha_2)$ olduğundan $\sigma_1(\alpha_3) < \varepsilon * \sigma_1(\alpha_2)$ olur. Dolayısıyla $V_2(\beta_3) < V_2(\beta_1)$ ve $\sigma_2(\beta_3) < \varepsilon * \sigma_2(\beta_1)$ olur. Dolayısıyla $V_1(\alpha_2) < V_1(\alpha_1)$ ve $\sigma_1(\alpha_2) < \varepsilon * \sigma_1(\alpha_1)$ olur. Bunları birleştirirsek, $\sigma_1(\alpha_2) < \varepsilon * \sigma_1(\alpha_1) < \varepsilon$ ve $\sigma_1(\alpha_3) < \varepsilon * \sigma_1(\alpha_2) < \varepsilon^2$ olur.

Aynı durum ikinci oyuncu içinde geçerlidir, $\sigma_2(\beta_2) < \varepsilon$ ve $\sigma_2(\beta_3) \leq \varepsilon^2$. Dolayısıyla $\sigma_1(\alpha_1) \geq 1 - \varepsilon - \varepsilon^2$ ve $\sigma_2(\beta_1) \geq 1 - \varepsilon - \varepsilon^2$ olur. ε sıfıra giderken ε -uygun denge (α_1, β_1) 'a yakınsar (Myerson, 1978).

Ancak (α_2, β_2) bir uygun denge değildir. Örneğin birinci oyuncu α_1 stratejisini ε olasılıkla, α_3 stratejisini ε^2 olasılıkla ve α_2 'yi de $1 - \varepsilon - \varepsilon^2$ olasılıkla oynasın. Aynı şekilde ikinci oyuncu da oyuncu β_1 stratejisini ε olasılıkla, β_3 stratejisini ε^2 olasılıkla ve β_2 'yi de $1 - \varepsilon - \varepsilon^2$ olasılıkla oynasın. Birinci oyuncunun α_1, α_2 ve α_3 stratejilerini oynarken kazanabileceği beklenen fayda değerleri sırasıyla $-9\varepsilon^2 + \varepsilon$, $-7\varepsilon^2$, $-7 - 2\varepsilon$ olur. Bu durumda ε sıfıra giderken α_1 en iyi yanıp olur. Zira, $-7\varepsilon^2$ değerinin $-9\varepsilon^2 + \varepsilon$ değerinden büyük olabilmesi için ε değeri $\frac{1}{2}$ 'den büyük olmalıdır. Ancak, biz ε 'nın sıfıra yakınsadığını varsaymıştık. Bu durum oyun simetrik olduğundan ikinci oyuncu için de geçerlidir. Yani dizi (α_2, β_2) 'a yakınsamaz, (α_1, β_1) 'e sapar (Myerson, 1978).

Mükemmel ve uygun dengeler adaletli olma özelliği taşımayabilir. Bu dengeler, simetrik oyunlar için değil, tüm normal form oyunlar için tanımlanmıştır. Oyunlar simetrik olmak zorunda olmadığından bu dengelerin adalet özelliği taşımaması ya da taşıması oyuna göre değişir.

5.1.4 Alt oyun mükemmel dengesi (SPE)

Alt oyun mükemmel dengesi sıralı oyunlarda tanımlanmış bir Nash dengesi çeşididir. Genişletilmiş form bir oyunda bir Nash dengesini oluşturan parçalar, tüm alt oyunlarda da Nash dengesi ise, o Nash dengesi SPE'dir (Selten, 1975).

Selten'in ortaya attığı SPE kavramı, Nash dengelerinden daha güçlü bir konsepttir, her SPE aynı zamanda bir Nash dengesidir, ancak tersi doğru değildir. Bütün genişletilmiş form oyunlarda bir SPE vardır.

Ültimeatom oyununda bütün tekliflerinin sıfırdan büyük olduğunu düşünelim. Birinci oyuncu karşı oyuncuya 0'dan yüksek herhangi bir miktar para teklif ettiğinde, ikinci oyuncunun bunu kabul edeceği varsayılır. Çünkü oyuncular rasyoneldir ve ikinci oyuncu rasyonel olduğu için 0'dan daha büyük bir miktarı daima kabul eder. Birinci oyuncu da bunu bildiği için ikinci oyuncuya mümkün olan en küçük miktarı teklif eder. Birinci oyuncunun mümkün olan en küçük teklifi yapması, ikincinin de bunu kabul etmesi bir SPE'dir.

Ancak geriye doğru tümevarım kavramının beklenmeyen idam paradoksu (İng. *Unexpected Hanging Paradox*) şeklinde bugüne kadar açıklanamamış bir çelişkiye yol açtığı görülmüştür. Bu paradoks şöyledir (Wolfram, 2017):

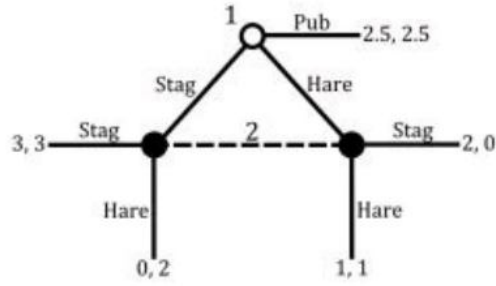
Bir mahkûm mahkemede idam hükmü alır. Hâkim ona mahkemeden sonraki ilk pazartesi ile cuma günleri arasında bir gün asılacağını söyler. Ayrıca der ki “asılacağın gün sana sürpriz olsun diye şu an söylenmeyecek, ne zaman asılacağın, asılacağın günün bir gün öncesinde tam öğlen saat 12’de sana söylenecek”. Mahkûm bu cümleleri kullanarak hiçbir zaman asılmayacağı sonucunu çıkarır, sevinir, ancak ne yazık ki Çarşamba günü asılır.

Mahkûm hiç asılmayacağı sonucunu şöyle çıkarmıştır: eğer cuma günü asılacaksa, cuma günü asılacağı perşembe öğlesi saat 12’de ona söylenmelidir. Ancak perşembe 12’de geriye asılmak için sadece cuma günü kaldığından, bu durum bir “sürpriz” olamaz. Bu durumda hâkim cuma gününü kastetmemiştir, cuma günü asılmak bir sürpriz olmayacağı için cuma günü asılamaz. Bu durumda perşembe günü asılıp asılamayacağını düşünür. Perşembe günü asılacaksa çarşamba öğleyin bu ona söylenmelidir. Ancak, çarşamba günü ona gelip asılacağı söylenirse, bu durumda perşembe günü de bir sürpriz olmaz. Çünkü cuma günü asılmak sürpriz olmayacağından cuma asılamamağı için geriye sadece perşembe kalmıştır. Bu durumda perşembe de sürpriz olmaktan çıkar. Perşembe de asılamaz. Aynı mantığı ilerletir ve pazartesiye gelir. Pazartesi asılması için pazar öğlen bu ona söylenmelidir. Ama salı, çarşamba, perşembe ve cuma günü asılmak, sürpriz olmaktan çıktığı için tek gün olarak pazartesi kalmıştır, bu durumda pazartesi de asılamaz. Mahkûm bu mantıkla hiç asılmayacağını düşünür, ancak çarşamba günü asılır.

Bu paradoksu anlamak için sürpriz kelimesinin anlamının çok açık olmaması durumu çeşitli olasılıklarla incelenmektedir. Ancak, bu paradoksta hâkimin sürpriz kelimesini ilk kullandığı andan idam kararının açıklandığı öğlen vaktine kadar,

olayın sürpriz olacağı varsayımı yapılmıştır. Bu paradoks, geleceğe dair rasyonel çıkarsama yapmanın beklenmeyen sonuçları elemeye yetmeyebileceğini göstermek içindir.

İleriye doğru tümevarımda ise, oyun geçmişinin rasyonel olacağını varsayılır. Bir oyuncu karşıdaki oyuncunun geçmişine bakarak onun gelecekte rasyonel oynayıp oynamayacağına dair bir inanç geliştirir. Bu inanç, stratejisine etki eder. Bu özellik SE tarafından sağlanmaktadır. Oyuncuların, bilgi kümelerine atadıkları olasılıklar inançları ile tutarlı olmalıdır. Buna dair bir örnek Spaniel'den (2011) alıntılanmıştır:



Şekil 5.8 İleriye doğru tümevarımı anlatmak için örnek bir oyun (Spaniel, 2011).

Şekil 5.8'de yer alan oyunda birinci oyuncunun Pub hamlesinin oyuna eklenmediğini varsayalım. Bu durumda $(Stag, Stag)$ ve $(Hare, Hare)$ iki Nash dengesidir. Birinci oyuncu, ikinci oyuncunun sol alt ağaçta Stag, sağ alt ağaçta da Stag demesini ister. İkinci oyuncu ise sol alt ağaçta Stag, sağ alt ağaçta Hare der. Birinci oyuncu da bunu bildiğinden ilk hamlesi Stag olur. Ancak, birinci oyuncunun Hare, ikinci oyuncunun Hare demesi de bir Nash dengesidir, çünkü bu iki seçenek birbirlerine karşı en iyi cevaptır.

Bu oyuna birinci oyuncunun Pub hamlesi eklensin, bu hamle sonucunda oyunların kazanacağı fayda değerleri $(2.5, 2.5)$ olsun. Bu durumda, ikinci oyuncu birinci oyuncunun yaptığı hamleye bakarak, yani geçmişten yola çıkarak bir inanç oluşturup hamlesini belirleyebilir. Birinci oyuncu ilk hamlesinde Pub seçeneğini seçmezse, ikinci oyuncu birinci oyuncunun %100 olarak Stag dediğine emin olur, çünkü Hare derse kazanacağı fayda değeri 2'dir ve yapmadığı Pub hamlesinde kazanacağından küçüktür, bu yüzden Hare demez. Bu durumda oyunda $(Hare, Hare)$ bir denge olmaktan çıkar.

5.1.6 Evrimsel olarak kararlı strateji (ESS)

Oyun teorisi ekonomi, biyoloji gibi birçok bilim alanında uygulama ve araştırmaya konu olmuştur. Evrimsel biyoloji de bunlardan biridir. Bir popülasyonda normal üyelerin kullandığı baskın strateji, az sayıda mutant üyenin kullandığı mutant strateji ve bunların birbirlerini ezip ezmeleri oyun teorisi kullanılarak incelenmektedir. Buna dair önemli çalışmalardan biri evrimsel olarak kararlı strateji kavramıdır. Smith ve Price'da (1973) evrimsel olarak kararlı strateji tanımı yapılmıştır. Burada oyunların simetrik olduğu ve tüm oyuncuların aynı strateji kümesine sahip olduğu varsayımı vardır.

Tanım 5.15: $E(S, T)$ bir oyuncunun S stratejisini T stratejisine karşı kullandığında kazanacağı fayda değeri olsun. Ancak ve ancak tüm T 'ler için $S \neq T$ iken $E(S, S) > E(T, S)$ ise S bir ESS'dir ya da $E(S, S) = E(T, S)$ ve $E(S, T) > E(T, T)$ ise S bir ESS'dir (Smith and Price, 1973).

Çizelge 5.4 Örnek tutsak ikilemi.

	C	D
C	-4,-4	-9,-2
D	-2,-9	-7,-7

Çizelge 5.4'te yer alan örnek tutsak ikilemi oyununda her iki ESS tanımına göre D stratejisi ESS'dir. Ancak, her oyunda bir ESS olmak zorunda da değildir.

Evrimsel olarak kararlı strateji kavramı kullanılarak dengelere dair kararlılık ile ilgili farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Schaffer'da (1988) evrimsel kararlılık ile ilgili bir tanım ortaya koymuştur. Bir popülasyonda N adet üye olsun. Bunlardan Y tanesi mutant $N - Y$ tanesi normal üye olup kendi ESS'lerini kullansın. Mutant bir stratejinin tüm popülasyonu işgal etmesi için, mutant stratejinin, normal üyelerin stratejisinden daha çok fayda değeri kazandırması gerekir.

Tanım 5.16: Bir popülasyonda Y ve daha az sayıda mutant varken mutant strateji, normal üye stratejisinden daha az kazandırıyor, $\pi^M < \pi^{ESS}$, ama mutant sayısı $Y + 1$ ve daha fazla olduğunda, $\pi^M \geq \pi^{ESS}$ oluyorsa bu durumda normal oyuncuların oynadığı strateji $Y - stable$ bir stratejidir. Eğer $Y = N - 1$ ise ESS

global olarak kararlıdır. Yani mutant sayısı $N - 1$ iken bile ESS, mutant stratejiden üstünse, o strateji global olarak kararlıdır (Schaffer, 1988).

Ültime oyununu simetrik hale getirilerek evrimsel oyun teorisi anlamında incelenmektedir. Oyuncular karşlarındaki oyuncunun fayda değeri ve stratejisini değerlendirirken hata yaptıklarında doğal seçilimin, adaletli olandan yana olduğunu gösteren çalışmalar bulunmaktadır (Rand et al., 2013). Bu çalışmaya göre bir popülasyonda mutant strateji fazla olduğunda ve bütün stratejiler yaklaşık olarak eşit miktarda ortamda bulunurken, optimal strateji rakip oyuncunun stratejisi rastgele seçildiğinde beklediğimiz fayda değerini maksimize eden stratejidir.

5.1.7 Korelasyon dengesi (CE)

Korelasyon dengesi tanımı 1974 yılında Robert Aumann tarafından oyuncuların kendi stratejilerini, kendi gözlemleri neticesinde belirlediklerini ifade etmek için yapılmıştır. Bir oyunda oyunculara tamamen rastgele olarak stratejiler atanır. Oyuncuların hiçbirisi kendisine atanan stratejiden vazgeçmek istemediğinde oluşan duruma korelasyon dengesi (İng. *Correlated Equilibrium*) denir (Aumann, 1974).

Çizelge 5.5 Tardos'dan (2004) alıntılanan tavuk oyunu.

	Dare	Chicken out
Dare	0,0	7,2
Chicken out	2,7	6,6

Çizelge 5.5'te yer alan tavuk oyununda (*Dare, Chicken out*) ve (*Chicken out, Dare*) saf Nash dengeleridir. Aynı zamanda oyuncuların $1/3$ olasılıkla Dare, $2/3$ olasılıkla Chicken out stratejilerini karşılıklı oynamaları karma Nash dengesidir. Bu durumda oyuncuların beklediği fayda değeri $14/3$ olur. Oyunculara (C, C) sonucuyla $1/2$, (D, C) ve (C, D) sonuçlarına $1/4$ olasılıkla karşılaşacakları şekilde stratejiler önerilsin. Bir oyuncuya oynaması için C stratejisi önerildiğinde diğer oyuncunun $1/3$ olasılığıyla D , $2/3$ olasılığıyla C oynayacağını bilsin. Bu durumda da beklediği fayda değeri $14/3$ olur. Ancak correlated dengede beklediği fayda değeri, karma strateji Nash dengesinde de fazladır, 5.25 'tir ($7 * 1/4 + 2 * 1/4 + 6 * 1/2 = 5.25$) (Tardos, 2004).

Çizelge 5.6 Leyton-Brown ve Shoham'dan (2008) alıntılanan trafik ışıkları oyunu.

	go	wait
go	-10,-10	1,0
wait	0,1	-1,-1

Çizelge 5.6'da yer alan oyunda (0,1) ve (1,0) sonucu Nash dengeleridir. Bu oyunda da karma strateji dengesi bulunmaktadır. Ancak yine de (go, go) ve $(wait, wait)$ sonuçlarının gerçekleşme olasılığı vardır. Burada dışarıdan bir hakem birinci ve ikinci oyuncuya sırayla go , $wait$ ya da $wait$, go şeklinde oynayacakları stratejilerini atama yaparsa ve oyuncular bu atama işlemini onaylarsa bu durum korelasyon dengesidir. Böylece (go, go) ve $(wait, wait)$ sonuçlarının gerçekleşme olasılığı ortadan kalkmış olur (Leyton-Brown and Shoham, 2008).

Tanım 5.17: Aumann'a (1974) göre $D = (D_1, \dots, D_n)$ bir alan (İng. *Domain*), $v = (v_1, \dots, v_n)$ bu alanlara bağlı rastgele değişkenlerden oluşan bir vektör olsun. π , v vektörü üzerinde tanımlanmış birleşik (İng. *Joint*) bir dağılım olsun. $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i: D_i \rightarrow A_i$ şeklinde her i için alanlardan hamle atayan bir atama vektörü olsun. $G = (N, A, u)$ oyununda her i ve her $\sigma'_i: D_i \rightarrow A_i$ ataması için,

$$\sum_{d \in D} \pi(d) u_i(\sigma_1(d_1), \dots, \sigma_n(d_n)) \geq \sum_{d \in D} \pi(d) u_i(\sigma'_1(d_1), \dots, \sigma'_n(d_n))$$

ise (v, π, σ) bir korelasyon dengesidir.

Korelasyon dengeleri yordamsal ya da sonuçsal adaletli olma özelliği taşımayabilir. Bu dengeler, simetrik oyunlar için değil, tüm normal form ve sıralı oyunlar için tanımlanmıştır. Oyuncular aynı hamle kümelerine sahip olmayabilir. Bu dengelerin adalet özelliği taşınması ya da taşınamaması oyuna göre değişir.

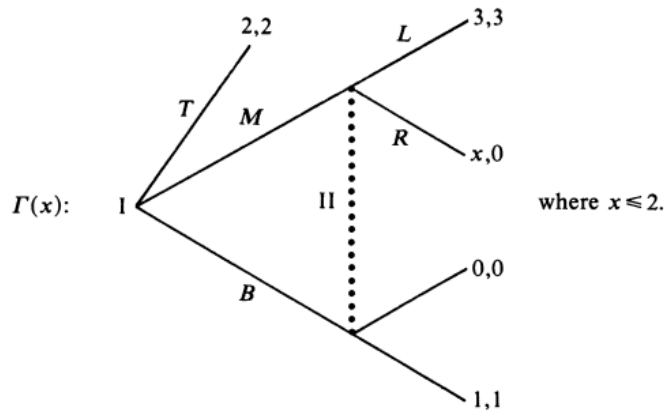
5.2 Mertens'in Kararlı Denge Tanımı

Jean-François Mertens, bu tezde de bahsetmiş olduğumuz çeşitli denge tanımlarından yola çıkarak kararlı bir denge tanımı yapmıştır. Kohlberg ve Mertens'te (1986) bir Nash dengesinin kararlı olması için sağlaması gereken koşullar ortaya konmuştur. Ardından, tanımlarını güçlendiren yeni bir konsept

ortaya koyarak Mertens kararlı dengesi kavramını tanımlamıştır (Mertens J. F., 1989) (Mertens J. F., 1991). Bu konsept hem ileriye hem de geriye tümevarım özelliğini aynı anda sağlayan bir çözüm önerisidir. Ayrıca Kohlberg ve Mertens'te (1986) kararlılık için gerekli özellikleri taşıyan bir çözüm konseptinin, tek bir dengeyi değil, kapalı ve bağlı bir dengeler kümesini seçmesi gerektiğini göstermiştir (Norde et al., 1996).

Bir dengenin kararlı olması için sağlaması gereken koşullar vardır. Kararlı dengeler kümesi, bir Nash dengesinin kapalı komşuluğundan tedirgin oyunlar uzayına giden bir fonksiyon ile tanımlanır. Bu fonksiyon aşağıda anlatılacak tüm kararlılık koşullarını sağlamalıdır (Kohlberg and Mertens, 1986).

1. Bunlardan ilki öncelikle oyunun bir dengeye sahip olmasıdır ve tüm oyunlarda bir denge vardır.
2. İkincisi oyun dengelerinin bağlı olmasıdır (İng. *Connected*). Yani, dengeler oyunda kullanılan karma stratejilerin bağlı bir altkümesi olmalıdır.
3. Üçüncü koşul geriye doğru tümevarıma uygunluktur. Bu koşul mükemmel bilgi oyunlarda dört özellik içerir. Tek oyunculu bir oyunda oyuncu mutlaka kendi fayda değerini maksimize etme amacıyla olmalıdır. Denge, tüm alt oyunlarda da denge olmalıdır. Alt oyunlardaki bir denge, tüm oyun dengesinde yer almalıdır. Oyunda bir alt oyun silinip yerine o alt oyundaki sonuçlar eklendiğinde yine denge olmalıdır. Ancak mükemmel bilgi olmayan bir oyunda bu tanım çok net değildir.



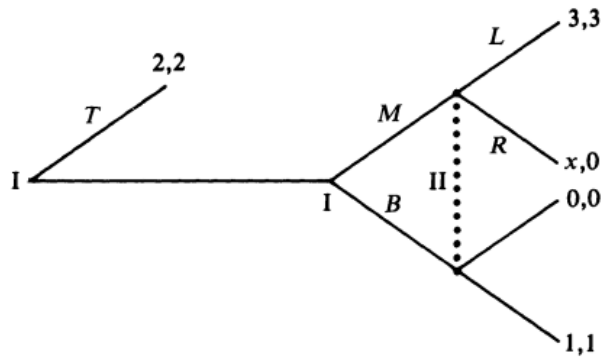
Şekil 5.9 Kohlberg ve Mertens'ten (1986) alıntılanan örnek oyun (I).

Örneğin Şekil 5.9'daki oyunda, (T, R) 'nin geriye doğru tümevarım özelliği içeren bir denge olabilmesi, ikinci oyuncun sağ ve sol hamle seçeneklerine vereceği olasılık değerlerine bağlıdır.

İkinci oyuncu, eğer sıra kendisine gelirse, birinci oyuncunun B ve M 'yi α , $(1 - \alpha)$ olasılıkla oynayacağını varsaysın ve sol hamlesini β , sağ hamlesini $(1 - \beta)$ olasılıkla oynasın. I noktasında ikinci oyuncunun beklenen fayda değeri $E(P_2) = \alpha\beta + (1 - \alpha)(3)(1 - \beta)$ olur. Bu denklemin α 'ya göre türevini aldığımızda $\beta = 3/4$ olur. Yani birinci oyuncu ne yaparsa yapsın, fayda değerini maksimize etmek istiyorsa $\beta \leq 3/4$ olmalıdır. Eğer $\beta > 3/4$ olursa daha çok fayda değeri kazanması için birinci oyuncunun T oynamasını tercih eder. (T, R) 'nin geriye doğru tümevarımı sağlaması için $\beta > 3/4$ olmalıdır.

Bu koşul için, SE kavramı uygundur, çünkü mükemmel bilgi oyunlardaki geriye doğru tümevarımın ilk iki özelliğini sağlamaktadır. Geriye doğru tümevarımın üçüncü özelliği, ileriye doğru tümevarım kavramı ile çeliştiği için bunu sağlamasına gerek yoktur. Geriye doğru tümevarımın dördüncü özelliği ise kabul edilebilirlik özelliği ile bağdaşmamaktadır.

Örneğin Şekil 5.9'daki oyunda birinci oyuncu (T, M, B) stratejilerini sırayla $((1 - 10\varepsilon), \varepsilon, 9\varepsilon)$, ikinci oyuncu L ve R stratejilerini sırayla $(\varepsilon, (1 - \varepsilon))$ olasılıklarıyla oynadığında, oyun (T, R) 'ye yakınsar. Ancak bu oyun yine de kararlı değildir. Çünkü birinci oyuncunun B stratejisini seçme olanağı yoktur. B stratejisi, T stratejisi tarafından güçlü olarak ezilmektedir. İkinci oyuncunun (sıra kendisine gelirse), birinci oyuncunun M oynadığını anlaması gerekir, bu durumda L demelidir. Sonuç olarak geriye doğru tümevarım ile uyumlu olma, kararlılık için gereklidir, ancak yeterli değildir.



Şekil 5.10 Kohlberg ve Mertens'ten (1986) alıntılanan örnek oyun (II).

4. Dördüncü koşul değişmezliktir özelliğidir. Şekil 5.10'da, Şekil 5.9'da yer alan oyun biraz değiştirilmiştir. Bu oyunda (T, R) artık bir SE değildir, çünkü sıra ikinci oyuncuya geldiğinde, birinci oyuncunun T oynamadığını bilir ve M stratejisi B stratejisini güçlü olarak ezdiği için birinci oyuncu M stratejisini oynadığını bilir. Ardından L stratejisini oynar. (M, L) bir SE olur.

SE, oyunun ağaç formuna göre değişmektedir. Ancak Thompson (1952) ve Dalkey'e (1953) göre aynı normal forma sahip sıralı oyunlar bazı dönüşümlerle (İng. *Inessential Transformation*) birbirlerine dönüşebilmektedir. Aynı normal forma sahip birden fazla genişletilmiş form oyunda kararlı olarak belirlenen tüm dengelerin, oyunun genişletilmiş formda temsil edilmesine göre değişiklik göstermemesi gerekir. Genişletilmiş form bir oyunda kararlı olan bir denge, aynı normal forma sahip tüm oyunlarda bir SE olmalıdır.

Teorem: Normal formda uygun bir denge, o normal forma sahip tüm sıralı oyunlarda bir SE'dir (Kohlberg and Mertens, 1986). Kanıtı Kohlberg ve Mertens'te (1986) bulunmaktadır.

Bir oyunun indirgenmiş normal formu (İng. *Reduced Normal Form*) gereksiz yere tekrar eden saf stratejiler elendikten sonraki normal formudur. Kararlı bir dengeyi belirlemek için indirgenmiş normal formuna bakmak yeterlidir. Çünkü bir oyuncu karar verme aşamasında stratejisini belirlerken bakacağı fayda vektörü ve gerekli tüm bilgiler indirgenmiş normal formda bulunmaktadır (Kohlberg and Mertens, 1986).

Kararlı bir strateji, bir oyunun indirgenmiş normal formunda ardışık bir denge olmalıdır, yani üçüncü özelliği hariç geriye doğru tümevarım özelliğini sağlamalıdır. Aynı zamanda ileriye doğru tümevarım özelliğini de sağlamalıdır (Kohlberg and Mertens, 1986).

5. Beşinci koşul, dengeye ulaştıran stratejilerin kabul edilebilirlik özelliğinin olmasıdır. Kararlı dengeye götüren strateji diğer stratejiler tarafından güçlü ya da zayıf olarak ezilememelidir. Karar teorisi (İng. *Decision Theory*) temel varsayımlarına göre bir oyuncu, bir dengede kullandığı strateji başka bir strateji

tarafından zayıf olarak bile ezilse, bu strateji yerine ezen stratejiyi seçer ve onu oynar. Bu durum kararlı dengeler için de geçerlidir ve geçerli olmalıdır.

		<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>		3, 2	2, 2
Ω : <i>M</i>		1, 1	0, 0
<i>B</i>		0, 0	1, 1

Şekil 5.11 Kohlberg ve Mertens'ten (1986) alıntılanan örnek normal form oyun.

6. Altıncı koşul ise yinelenmiş baskınlık ile ilgilidir. Şekil 5.11'de yer alan oyunda *T* stratejisi *M* ve *B* stratejisini güçlü olarak ezmektedir. *M* stratejisi oyundan çıkarılırsa *R* stratejisi *L* stratejisini zayıf olarak ezer. Elemeyi devam ettirdiğimizde (2,2) dengesi kalır. *B* stratejisi oyundan çıkarılırsa *L* stratejisi *R* stratejisini zayıf olarak ezer. Elemeyi devam ettirdiğimizde (3,2) dengesi kalır. Bu dengelerden bir tanesini silmek, kararlı strateji olmak ile ilgili bu maddelerden birincisi yani var oluş özelliği ile çelişir.

Çizelge 5.7 Şekil 5.9'daki oyunun $x = 0$ iken etmen normal formu.

	L	R
T	2,2	2,2
M	3,3	0,0

Bir *G* oyunundaki stratejik olarak kararlı dengeler kümesi, *G* oyunundaki ezilen stratejiler elenerek elde edilen tüm oyunlardaki stratejik olarak kararlı dengeleri içermelidir. Şekil 5.9'daki (*T*, *R*) dengesi, SPE ve PRE olmasına rağmen yinelenmiş baskınlık özelliğini sağlamamaktadır, çünkü *B* stratejisi *T* stratejisi tarafından baskın olarak ezilmesine rağmen silindiğinde, (*T*, *R*) artık bir SE değildir. Çünkü oyunun etmen normal formuna baktığımızda (*T*, *R*) artık THPE ya da PRE olamaz (Bkz. Çizelge 5.7). *T* ve *M* stratejileri $(1 - \gamma)$, γ ; *L* ve *R* stratejileri $(1 - \varepsilon)$, ε ile oynandığında oyuncular kendi fayda değerlerini maksimize etmek için (*T*, *L*) sonucuna sapar.

5.3 Pazarlık Oyunları

Bu bölümde pazarlık oyunlarının tanımı verilecektir. Pazarlık oyunları sıralı oynanan iki kişilik oyunlardır. Ortada üzerinde pazarlık yapılan paylaşılabılır bir fayda değeri vardır. Birinci oyuncu bir teklif yaptığında, ikinci oyuncu teklifi kabul ya da reddedebilir. Teklif reddedilirse, birinci oyuncu ikinciye onun kabul edebileceğini düşündüğü yeni bir teklif yapabilir. Bu döngü sonlu ya da sonsuz olabilir. Sonlu durumlarda teklif daima reddedildiğinde iki oyuncunun da kazanacağı bir fayda değeri yoktur. Bu oyunların buradaki tanımları Osborne ve Rubinstein'dan (1994) alıntılanmıştır:

$N = \{1,2\}$ oyuncular kümesi, X olası uzlaşmalar kümesi, T negatif olmayan tam sayılar kümesi olsun. H tarihçe kümesi olsun ve üyeleri $x^t \in X$ şeklinde argümanlar kullanan dizilerden oluşsun. A kabul, R red anlamında olsun. Bu tarihçeler dört tipte olabilir.

- I. $\emptyset$ veya $(x^0, R, x^1, R, \dots, x^t, R)$
- II. $(x^0, R, x^1, R, \dots, x^t)$
- III. $(x^0, R, x^1, R, \dots, x^t, A)$
- IV. $(x^0, R, x^1, R, \dots)$

Bu dört geçmiş içinde üçüncü ve dördüncü olanı oyunun sonudur. Üçüncüsü sonludur, dördüncüsü sonsuzdur. Üçüncü tipteki tarihçeler kümesini (x, t) , dördüncü tiptekileri D ile gösterelim. $(X \times T) \cup \{D\}$ kümesinin elemanları arasında her bir i oyuncusu için $\succsim_i$ tercih bağıntısı olsun. Bu bağıntı şu özelliklere sahiptir:

- Herhangi bir çözüm çözümsüzlükten daha iyidir. $(x, t) \succsim_i D, \forall (x, t) \in X \times T$

- Zaman değerlidir. $(x, t) \succsim_i (x, t + 1), \forall t \in T, \forall x \in X$. Başlangıçta ise kesin olarak üçüncü kümedekiler tercih edilir. $(x, 0) \succ_i D$.

- Tercihler sabittir. $\{(x, t) \succsim_i (y, t + 1) \text{ ancak ve ancak } (x, 0) \succsim_i (y, 1)\}$ ve $\{(x, t) \succsim_i (y, t) \text{ ancak ve ancak } (x, 0) \succsim_i (y, 0)\}$.

•Tercihler süreklidir (İng. *Continuous*). $x_n \in X$ ve $y_n \in Y$ dizileri olsun. $\forall n, \{x_n\}$ dizisi x 'e ($x \in X$), $\{y_n\}$ dizisi y 'ye yakınsıyorsa ($y \in X$) ve $(x_n, t) \succsim_i (y_n, s)$ ise, $(x, t) \succsim_i (y, s)$ olur.

Tanım 5.18: $(N, H, P, \succsim_i)$, $(X, \succsim_i)$ tekliflerini ve teklif bağıntısını içeren bir pazarlık oyunudur.

5.4 Tartışma

Bu bölümde oyun dengelerinde kararlılık ile yordamsal adalet arasındaki ilişkiyi araştırmak amaçlanmıştır. Dengelerin kararlı olması için taşıması gereken özellikler Kohlberg ve Mertens'te (1986) ortaya konulmuştur. Bu tez kapsamında yordamsal adalet oyundaki tüm oyuncuların aynı strateji kümesine sahip olması olarak tanımlanmıştır. Bu çıkış noktası itibarıyla bazı sonuçlar elde edilmiştir:

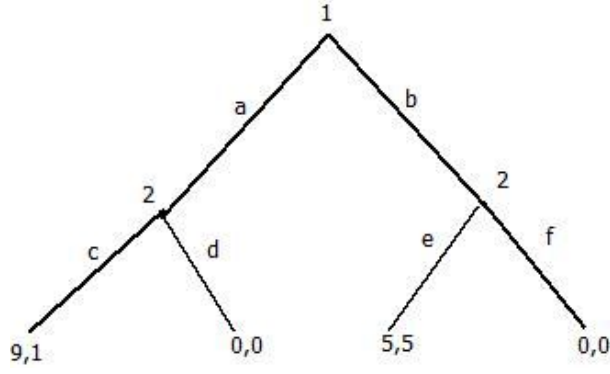
(1) ESS'lerin oynandığı oyunlar simetrik oyunlardır bu yüzden bu oyunlar hem yordamsal hem de sonuçsal olarak adaletlidir. Simetrik oyunlarda oyuncuların hamle kümeleri eşittir ve bu oyunlar yordamsal olarak ve dolayısıyla sonuçsal olarak adaletlidir. Diğer çözüm konseptlerinin adalet özelliğini taşıması tamamen oyunun kendisine bağlıdır.

(2) Kararlı bir denge yordamsal adaletli olmak zorunda değildir. Sıralı oynanan oyunlar yordamsal adaletli olmamasında rağmen, kararlı bir denge ile sonuçlanabilir.

(3) Adaletli bir denge kararlı olmak zoruna değildir. Örneğin simetrik bir oyunda zayıf olarak diğer stratejiler tarafından ezilen iki strateji bir Nash dengesi oluşturabilir. Bu denge yordamsal ve sonuçsal olarak adaletli olmasına rağmen kararlı değildir.

(4) Pazarlık oyunları da sıralı oynanan oyunlardır. Sıralı oynanan oyunlardaki adalet ve kararlılık ile ilgili tanımlar onlar için de geçerlidir. Pazarlık oyunları yordamsal olarak adaletli değildirler, ancak bazıları kararlı dengelere sahip olabilir.

Pazarlık oyunları sıralı oynanan oyunlardandır. Bu nedenle bu oyunlarda ortaya çıkan dengeler de kararlı olmak için varoluş, bağlantılılık, değişmezlik, kabul edilebilirlik, geriye doğru tümevarıma uygunluk, yinelenmiş baskınlık özelliklerini sağlamalıdır.



Şekil 5.12 Örnek bir ultiatom oyunu.

Çizelge 5.8 Şekil 5.12'deki oyunun normal formu.

	ce	cf	de	df
a	9,1	9,1	0,0	0,0
b	5,5	0,0	5,5	0,0

Bu anlamda Şekil 5.12'de bulunan basit bir ultiatom oyunu incelenmiştir. Oyunun normal formu Çizelge 5.8'de bulunmaktadır.

Çizelge 5.8'de yer alan koyu renkle yazılmış (a, ce) , (a, cf) , (b, de) hücreleri Nash dengeleridir. Bunlardan sadece (a, ce) dengesi SPE, THPE, PE ve PRE'dir. Bu denge, varoluş özelliğini sağlamaktadır. Aynı zamanda bağlı (İng. *Connected*) bir dengedir, çünkü dengeyi oluşturan stratejiler oyunda kullanılan karma stratejilerin bağlı bir altkümesidir. Birinci oyuncu b stratejisini 0, a stratejisini 1 olasılıkla; ikinci oyuncu ce stratejisini 1, diğer stratejileri 0 olasılıkla oynar. Her iki strateji de kabul edilebilirdir. Denge SPE olduğu için geriye doğru tümevarım ile uyumludur. Yinelenmiş baskınlık özelliği ile uyumludur, zayıf olarak ezilen stratejiler elendiğinde a ve ce stratejileri oyunda kalmaktadır. Son olarak değişmezlik özelliği ile de uyumludur. Çünkü etmen normal formda oyun (a, ce) 'ye yakınsamaktadır. İleriye doğru tümevarım ile uyumsuz değildir. Birinci oyuncu hamlesini yaptığında ikinci oyuncu kendisine yapılan teklife bakar. Bu teklif 1 ya da 5 olabilir. Tekliflerin alternatifi ise iki oyuncunun da 0 almasıdır. İkinci oyuncu kendisine 1 teklif edilmişse, birinci oyuncunun 5 yerine 9 istediği çıkarsamasını yapabilir. 5 teklif edilirse birinci oyuncunun 9 yerinde 5 istediği çıkarsamasını yapabilir. Ancak oyuncuları rasyonel kabul ettiğimizden, birinci

oyuncu ikinci oyuncuya 1 teklif edecektir. Bu durumda ikinci oyuncu da 1'i kabul edecektir.

Ültimeatom oyununda ortaya çıkan bazı dengeler kararlı olma özellikleri taşımaktadır. Ancak oyun deney olarak uygulandığında oyuncuların her iki pozisyonda da daha adil sonuçların ortaya çıkmasına neden olan stratejileri oynadıkları görülmektedir. Deneylerde ortaya çıkan sonuçlar çoğunlukla SPE olmayan, kararlı olma özelliklerinin birçoğunu taşımayanlardır. Bu durumun nedeni oyuncuların gerçek hayatta rasyonel oynamamasıdır. Rasyonel olmayan bir oyuncu örneğin iki oyunculu normal form bir oyunda (9,10) ile (10,101) oyun sonuçlarından birisini tercih ettiğinde, karşısındaki oyuncunun 101 kazanmaması ve aralarındaki farkın açılmaması için 10 yerine 9 fayda değerini tercih edebilir.

Bu sorunu çözmek rasyonel olma varsayımını insan davranışını daha iyi modelleyecek şekilde yeniden tasarlamakla mümkün olabilir. Ancak bütün oyun ve karar alma teorisi rasyonel oyuncu varsayımına dayanmaktadır.

Rasyonalite tanımı

Pazarlık oyunlarının kararlı ve adaletli olmasını sağlayan koşulların her birinin karşılandığı durumlarda bile teoremin öngördüğü sonuç gerçek hayatta ortaya çıkmayabilir. Bunun nedeni oyuncuların rasyonel oynamamasıdır. Bazı araştırmacılara göre oyuncuların rasyonel oynamamasının nedeninin, rasyonellik tanımının kendisidir. Htun'a (2017) göre oyun teorisinde oyuncularda kendi fayda değerlerini maksimize etme amacı vardır ve bu şekilde strateji belirleyen oyunculara rasyonel denir. Ancak yapılan deneylerde oyuncuların rasyonel karar alma teorisine (İng. *Rational Decision Theory*) uygun davranmadığı durumlar olduğu ortaya çıkmaktadır. Örneğin tutsak ikilemi oyunu tekrarlı olarak oynandığında geriye doğru tümevarım ile bulunan çözüm, oyuncuların her turda birbirlerini ele vermeleridir. Yani hiçbir turda iş birliği yapmazlar. Hâlbuki yapılan deneylerde rastlantı olamayacak şekilde ileriki turlara kadar oyuncuların iş birliği yaptıkları gözlemlenmiştir.

Geriye doğru tümevarımda yer alan bu paradoksa çözüm olarak üç önerme ortaya atılmıştır. Bunlardan birincisi Pettit ve Sugden'in (1989) önerdiği tüm oyuncuların her turda birbirlerinin rasyonel olmasını bilmeleri ile ilgilidir. Buna göre bir oyuncu, rakibinin rasyonel olup olmamasına göre kendi rasyonelliğini belirlemelidir. Eğer tutsak ikilemi oynayan oyunculardan birinin pozitif bir

olasılıkla rasyonel oynamama durumu varsa bu göz ardı edilemez. Yani rasyonel davranış karşımızdaki oyuncunun rasyonel olup olmayacağına dair inancımızdan bağımsız olamaz. Karşımızdaki oyuncunun rasyonel oynamayacağını biliyorsak, buna rağmen rasyonel oynamak rasyonel bir davranış değildir. Turların herhangi birinde bir oyuncunun rasyonel oynamayacağına dair inanç ortaya çıkarsa bu durum, oyunda oyuncuların birbirlerinin rasyonel oynayacağına dair inancı kırar. İleriki turlarda diğer oyuncular da rasyonel oynamayarak, yani iş birliği yaparak fayda değerini arttırabilir. Bu yaklaşıma göre stratejileri yargılamak ya da oluşturmak tartışma konusudur, ayrıca oyuncuların herkesin rasyonel olduğuna dair inançları tam olsa bile işlem yapma kabiliyetleri eşit olmadığından yine de geriye doğru tümevarımda tahmin edilen sonucun ortaya çıkmama olasılığı vardır.

İkincisi oyuncuların rasyonel olduklarını kabul etmekle birlikte oyunda bir miktar tamamlanmamış bilgi olduğunu öngörmektedir. Yine de küçük bir olasılıkla oyuncular irrasyonel oynayabilir. Bu irrasyonelliğin temelinde özgecilik (İng. *Altruism*) ya da çok aşırı yardımsever olarak itibar kazanımı gibi fayda değerine yansımayan ama oyuncunun hissettiği ve elde ettiği bir fayda değeri olabilir. Ya da oyuncular kendilerini özgeci olarak tanıtırak rakiplerinin irrasyonel oynaması için onları cesaretlendirebilir. Bunun sonucunda da oyunda iş birliği sonucu elde edilebilir. Bu yaklaşımda normalde sadece Nash dengesine giden yolda görünmesi gereken rasyonellik, bu yolun dışına çıkmıştır ve ayrı bir strateji haline gelmiştir.

Son yaklaşım ise oyuncuların rasyonel olduğunu ve oyunda tamamlanmamış bilgi olmadığını kabul etmekle birlikte oyuncuların oynayabileceği strateji kümesinin kısıtlanması ile ilgilidir. Oyuncuların strateji kümeleri sınırlandırıldığında öyle bir karma Nash dengesi vardır ki oyuncular iş birliği yaparlar. Bu yaklaşımda strateji kümelerinin sınırlı olması gerçek insan davranışını yansıtmayabilir.

Oyun teorisinde oyuncuların stratejileri oyun sonucunda kazanacağı fayda değerleri ile belirlenir. Bir oyuncu kendi fayda değerini maksimize ediyor ve bu yönde bir strateji kullanıyorsa o oyuncuya rasyonel denir. Bir oyuncunun rasyonelliği dört temel kurala dayanır. Bu kavramlar örnekleriyle beraber Spaniel'den (2011) alınmıştır.

1. Bütünlük (İng. *Completeness*): bir oyuncu X ve Y fayda değerleri arasında ya X 'i Y 'ye, ya Y 'yi X 'e tercih eder, ya da oyuncu için X ile Y birbirinden farksızdır

(İng. *Indifferent*). Aynı anda bu üç koşuldan sadece bir tanesi gerçek olabilir. Aynı anda iki ya da üç koşul gerçek olamaz.

2. Geçişlilik (İng. *Transitivity*): X, Y, Z bir oyuncunun üç fayda değeri olsun. Oyuncu X 'i Y 'ye, Y 'yi Z 'ye tercih ediyorsa, X 'i Z 'ye de tercih eder.

Bu iki kural oyuncunun rasyonel olması için uyması gereken iki koşuldur. Son iki koşulun ise rasyonellik anlamında bir gerekliliği yoktur.

3. Lotolardan Bağımsızlık (İng. *Independence over Lotteries*): Loto kavramı bir oyuncunun kendi fayda değerleri kümesi üzerindeki olasılık dağılımıdır. Örneğin bir oyuncunun üç adet fayda değeri olsun ve bunlardan birini seçmek durumunda kalsın. Bunlar $\{S_1 = 1M \$, S_2 = 0 \$, S_3 = \text{yanarak ölmek}\}$ olsun. Rasyonel olmak mantıklı olmakla eş anlamlı olmamakla beraber, burada kolay anlaşılır olması açısından rasyonel olan aynı zamanda mantıklı olan olarak kabul edelim ve oyuncu $1M \$$ 'ı $0 \$$ 'a, $0 \$$ 'ı *yanarak ölmeye* tercih etsin.

Eğer bu fayda değerleri içinden bir tanesi diğerine $\forall p \in [0,1]$ için tercih ediliyorsa o fayda değeri diğerini zayıf olarak ezer, bunun tersi de doğrudur. Yani, oyuncu ancak ve ancak $pX + (1 - p)Z$ 'yi $pY + (1 - p)Z$ 'ye tercih ediyorsa, X Y 'yi zayıf olarak ezer. Tercihlerin lotolardan bağımsız olması budur. Ancak bir oyuncu tercihleri arasında lotolardan bağımsız değilse bu onu irrasyonel yapmaz.

Örnek üzerinden anlatmak gerekirse ancak ve ancak oyuncu $p(1M\$) + (1 - p)(\text{yanarak ölmek})$ 'yi $p(0\$) + (1 - p)(\text{yanarak ölmek})$ 'e tüm $p \in [0,1]$ için tercih ediyorsa, $1M\$$ sonucunu *yanarak ölmek* sonucunu zayıf olarak ezer.

4. Süreklilik (İng. *Continuity*): Bir oyuncu X fayda değerini Y 'ye, Y 'yi Z 'ye tercih ediyor olsun. Öyle bir $p \in (0,1)$ vardır ki o p değeri için $pX + (1 - p)Z$ ve Y kesinlikle birbirinden farksızdır. Oyuncu böyle bir p değerini söyleyebildiği müddetçe tercihleri süreklidir.

Aynı örnek üzerinden devam edersek, loto1: $p(1M\$) + (1 - p)(\text{yanarak ölmek})$ olsun. Eğer oyuncu kendisi açısından bu lotonun $0\$$ kazanmaktan farksız olduğu bir p değeri söyleyebiliyorsa, oyuncunun tercihleri süreklidir.

Çizelge 5.9 Örnek bir normal form oyun (II).

	C	D
A	6,4	5,5
B	1,9	9,1

Bu dört tercih koşulunu incelemek amacıyla bir örnek verirse Çizelge 5.9'daki oyunda dört adet oyun sonucu bulunmaktadır: AC, AD, BC, BD. Birinci oyuncu için örneğin BD sonucunun lotolardan bağımsız olup olmadığını anlamak için, BD sonucu ile AC, BC ve AD sonuçlarını karşılaştırmalıyız. Oyuncunun rasyonel olduğunu varsayarsak,

BD ve AC lotosu ile AC ve AD lotosu: BD AD'yi ezer
 BD ve AC lotosu ile AC ve BC lotosu: BD BC'yi ezer
 BD ve AD lotosu ile AD ve AC lotosu: BD AC'yi ezer
 BD ve AD lotosu ile AD ve BC lotosu: BD BC'yi ezer
 BD ve BC lotosu ile BC ve AC lotosu: BD AC'yi ezer
 BD ve BC lotosu ile BC ve AD lotosu: BD AD'yi ezer

Teorem: Oyun sonuçlarının gerçekleşme olasılıkları 0 ve 1'e yaklaşırken lotodan bağımsızlık ve süreklilik özellikleri aynı anda görülemez.

Kanıt: Bir oyuncunun bir oyunda X, Y, Z şeklinde üç fayda değeri olsun. X fayda değeri Y ve Z 'yi, zayıf olarak ezsinsin. Her $p \in [0,1]$ için $X \succcurlyeq pX + (1-p)Z$ olsun. Lotolar üzerinden düşünersek,

$XZ \rightarrow YZ$ 'ye tercih ediliyor

$XY \rightarrow ZY$ 'ye tercih ediliyor

Oyuncunun sürekli (ing. *Continuous*) tercih yapacağını var sayalım, oyuncu için tercih sırası $X > Y > Z$ olur. Bu durumda öyle bir $p \in (0,1)$ olmalıdır ki o p için $pX + (1-p)Z$ ve Y birbirinden farksız olmalıdır. Başlangıçta loto olarak oyuncunun XZ 'yi YZ 'ye tercih ettiğini kabul etmiştik. Örneğin $pX + (1-p)Z$ lotosu $pY + (1-p)Z$ 'ye tercih ediliyor. $p = 1$ iken X sonucu Y 'ye tercih ediliyor. $p \in (0,1)$ olmak üzere $pX + (1-p)Z$ ile Y 'nin birbirinden farksız olduğu bir p değeri olduğunu varsayalım.

$$p \rightarrow 1 \text{ giderken } \lim_{p \rightarrow 1} pX + (1-p)Z = X \text{ olur.}$$

Ancak aynı p değeri için $pX + (1 - p)Z$ lotosu, $pY + (1 - p)Z$ 'ye tercih edilir. Y 'yi $pX + (1 - p)Z$ ile farksız kabul ettiğimizden, Y tek başına $pY + (1 - p)Z$ 'ye tercih edilir.

$\lim_{p \rightarrow 1} pY + (1 - p)Z = Y$ 'dir. Ancak Y , $\lim_{p \rightarrow 1} pY + (1 - p)Z = Y$ 'ye tercih edilemez. Sonuç olarak $p \rightarrow 1$ 'e yaklaşıırken böyle bir p değeri yoktur.

$p \rightarrow 0$ 'a giderken var olduğunu düşündüğümüz p değeri için $pX + (1 - p)Z$ ve Y birbirinden farksız (İng. *Indifferent*) diyelim. Aynı p değeri için oyuncu $pX + (1 - p)Z$ 'yi $pY + (1 - p)Z$ 'ye tercih eder. Yani Y , $pY + (1 - p)Z$ 'ye tercih edilir.

$\lim_{p \rightarrow 0} pX + (1 - p)Z = Z$ 'dir. Y , Z 'ye tercih edilir olarak kabul etmiştik. Aynı zamanda $pX + (1 - p)Z$ ile Y 'yi, birbirinden farksız kabul etmiştik. $p \rightarrow 0$ 'a giderken Y , $pX + (1 - p)Z$ birbirinden farksız olamaz. Bu durumda $p \rightarrow 0$ 'a giderken böyle bir p de yoktur.

Bu durumda bu tercih koşullarından lotolardan bağımsızlık ile süreklilik, p olasılığı 0 ve 1'in komşuluklarındayken aynı anda sağlanamaz.

Bir oyuncunun rasyonel olması için uyması gereken ilk iki kural, oyuncuların birbirlerinin fayda değerlerini hiçbir şekilde önemsemediği durumlarda geçerlidir. Bazı oyunlarda kendi fayda değeri ile birlikte, karşı oyuncunun kazandığı fayda değerini de dikkate almak, oyuncunun kendi fayda değerini maksimize etmesi için gözetilmesi gereken bir durum olabilir.

Tekrarlı tutsak ikilemi deney sonuçları oyuncuların bazı durumlarda rasyonel oynamadığını göstermektedir. Gintis'e (2000) ve Aumann'a (2000) göre oyuncular n turluk bir tutsak ikilemi oyununda son turda birbirlerini ele verirler, çünkü karşılık verecek başka bir tur yoktur. Yapılan deneylerde ise oyuncuların ileriki turlara kadar iş birliği yaptığı gözlemlenmiştir. Evrimsel oyun teorisi bunu iki şeyle açıklamaya çalışmaktadır. Birincisi, ortamda mutant oyuncu sayısı gereğinden fazlaysa bu durumda iş birliği desteklenir. Mutant strateji, oynayan oyuncuya mutant olmayan stratejilerden daha az fayda değeri kazandıran stratejidir. İkincisi ise insanların biyolojide uyum sağlayamayanlara yaşıatılan katı cezalandırılmalara maruz kalmamasıdır. Bir başka deyişle, tekrarlı tutsak ikilemi oynayan insanlar evrimsel bir süreçte dahil değildir. Rasyonelliğin herkes tarafından bilinmesi varsayımı (İng. *Common Knowledge of Rationality*) daha analitik bir insanlığın herkes tarafından bilinmesi (İng. *Common Knowledge of Humanity*) yaklaşımı ile

değiştirilmelidir. Buradaki “insanlık” tanımı, insan davranış ve düşüncesinin daha doğru modellenmesi anlamındadır.

Çizelge 5.10 EK 4’teki tekrarlı tutsak ikilemi oyunlarının normal formu.

	CC	CD	DC	DD
CC	4,4	2,6	2,6	0,8
CD	6,2	3,3	4,4	1,5
DC	6,2	4,4	3,3	1,5
DD	8,0	5,1	5,1	2,2

Ek 4’te iki turluk tutsak ikileminin üç farklı versiyonu bulunmaktadır. En üstteki oyunda oyuncular her tur sonunda oyun sonucunu görmektedir, ancak tur içerisinde iki oyuncu da birbirlerinin hamlesini görememektedir. Ortadaki oyunda oyuncular tur içinde birbirlerinin hamlelerini görememektedir, birinci turun sonunda da tur sonucunu görememektedir. Yalnızca iki tur da bittiğinde sonuçları görmektedirler. En alttaki oyunda ise her iki oyuncu da turların herhangi bir anında birbirlerinin yaptığı hamleleri görebilmektedir. Bu üç oyunun da normal formu aynıdır ve Çizelge 5.10’da yer almaktadır. Ancak, tartışma şudur ki, özellikle ortadaki oyunda ikinci oyuncunun ikinci tur sonunda yapacağı hamlesini seçme olasılığı ile en alttaki oyunda ikinci turun sonunda yapacağı hamlesini seçme olasılığı farklıdır. Bu olasılıkları öngörmek için sadece normal formun yeterli olmadığı düşünülmektedir.

Basit bir çözüm

Normal form oyunlarda oyuncular oyun sonuçlarına öznel sıralamalar vererek oyunu değiştirebilir. Değiştirilmiş oyunda ortaya çıkan yeni dengeler, oyuncuların oyun sonuçları hakkında uzlaşmasına yardımcı olabilir. Bu yaklaşım korelasyon dengesi yaklaşımına benzemektedir. Bir örnek üzerinden açıklarsak, Şekil 5.12’de yer alan ultimatoom oyunundaki oyun sonuçları (9,1), (0,0), (5,5)’tir.

Birinci oyuncunun bu oyun sonuçlarını tercih sıralaması şöyle olsun:
 $(9,1) \succ_1 (5,5) \succ_1 (0,0)$

İkinci oyuncunun bu oyun sonuçlarını tercih sıralaması şöyle olsun:
 $(5,5) \succ_2 (0,0) \succ_2 (9,1)$

Bu tercih sıralamalarını kullanarak bir normal form meydana getirelim. Daha sonra satır ve sütunlardaki sayıları 4'ten çıkaralım.

Çizelge 5.11 Tercih sırasına göre hazırlanmış normal form.

	ce	cf	de	df
a	1,3	1,3	3,2	3,2
b	2,1	3,2	2,1	3,2

Çizelge 5.12 Normal formdaki sayıların 4'ten çıkarılmış hali.

	ce	cf	de	df
a	3,1	3,1	1,2	1,2
b	2,3	1,2	2,3	1,2

Çizelge 5.12'ye göre $(a, (df))$ (yani 0,0 sonucu) ve $(b, (de))$ (yani 5,5 sonucu) yeni Nash dengeleridir. Bu yeni dengeler oyuncuların uzlaşma noktaları olarak düşünülebilir.

6. GENEL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde tezin katkıları, çalışma süresince elde edilen sonuçlar bağlamında sunulacaktır. Sonuçların ortaya attığı tartışmalara değinilecektir.

Tez kapsamında elde edilen katkılar şunlardır:

1. Alternatif bir yordamsal adalet tanımı yapılarak oyunlarda kullanılmış ve bu tanım ışığında ortaya çıkan sonuçlar analiz edilmiştir.

Yordamsal adalet Klaus ve Klijn (2006)'de oyun süresince oyuncuların hamle yapma olasılıklarının eşit olmasına bağlıdır. Buradaki tanım kararlı eşleşme probleminde kararlı sonuç elde eden algoritmaların yordamsal adaletli olup olmadığını incelemede kullanılmıştır. Ancak anılan makalede de belirtildiği üzere bu tanımın gereğini yerine getiren yordamsal adaletli bir mekanizma sunmak çok zordur. Bu nedenle bu tez kapsamında oyunlara uyarlaması ve oyunlar üzerinde incelemesi çok daha kolay olan, oyuncuların strateji kümelerinin eşit olmasını temel alan bir yordamsal adalet tanımı sunulmuştur. Bu tanımdan yola çıkarak yordamsal adalet içermeyen oyunlar belirlenmiştir. Bu oyunlara örnek sıralı oyunlardır.

2. Mükemmel bilgi genişletilmiş form oyunlar eşzamanlılaştırılarak yordamsal adaletli hale getirilmiştir.

Bu tez kapsamında sunulan yordamsal adalet tanımı başta normal form oyunlar olmak üzere bazı sıralı oyunlara da uygulanabilir niteliktedir. Sıralı oynanan oyunlarda oyuncu stratejileri eşit olamaz. Bazı oyunlarda ilk bazı oyunlarda ikinci hamleyi yapan oyuncu daha avantajlı olduğundan bu yordamsal adaletsizlik oyun sonuçlarındaki adaletsizliği tartışmaya açmaktadır. Bahis edilen oyunlardaki bu durum eşzamanlılaştırma işlemi ile çözülmüş ve tüm oyuncular eşit strateji kümesine sahip hale getirilmiştir. Ardından, pazarlık oyunları da sıralı oynanan oyunlara dahil olduğundan bu oyunlar da eşzamanlılaştırma yöntemi ile yordamsal adaletli hale getirilmiştir. Özellikle ultimatoom ve diktatörlük oyunları yordamsal ve sonuçsal adalet bağlamında incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda ultimatoom oyununda daha çarpıcı bir şekilde olmak üzere aşağıdaki maddede detaylandırılan sonlu popülasyon evrimsel kararlı strateji dengesi ortaya çıkmıştır.

3. Sonlu popölasyon evrimsel kararlı strateji dengesi tanımı yapılmış ve oyunlarda, özellikle ultiatom ve diktatör oyununda ortaya çıkan irrasyonel oyuncu davranışı bu kavram üzerinden açıklanmaya çalışılmıştır.

Ültimatom oyununda ortaya çıkan alt oyun mükemmel dengesi, bu oyun gerçek hayatta gerçek para ya da sanal para ile oynandığında ortaya çıkmamaktadır. Oyuncular oyun teorisi standart rasyonalite tanımına uymayan (irrasyonel) davranışlar sergilemektedir. Birinci oyuncu rasyonel olarak beklenenden çok daha fazla parayı karşı tarafa önermekte, ikinci oyuncu ise rasyonel olarak kabul etmesi beklenen miktarda parayı hiç para almama pahasına reddetmekte ve daha çok pay istemektedir. Bu irrasyonel davranışın bir nedeni olan “rakip oyuncudan daha az kazanmama” yaklaşımı incelenerek daha önce simetrik oyunlarda Schaffer (1988) ve Schaffer (1989)’de ortaya atılan sonlu popölasyon evrimsel kararlı strateji kavramı kullanılmış ve sıralı oyunlarda sonlu popölasyon kararlı strateji dengesi (FPESS) kavramı ortaya atılmıştır. Bu denge sadece ultiatom oyununda değil, başta diktatörlük oyunu olmak üzere birçok oyunda incelenmiştir. Örneğin Pirus Zaferi’nin bir FPESS olduğu ortaya konmuştur. Örneğin satranç oyununda son hamle olarak Zugzwang’a düşen bir oyuncunun oynadığı strateji FPESS olamaz. Çünkü yapacağı son hamle oyunu kaybetmesine neden olur. Halbuki bir stratejinin FPESS olması için karşı oyuncudan daha az kazanmamayı garantilemesi gerekmektedir.

Ayrıca FPESS kavramı mükemmel bilgi genişletilmiş form oyunların indüklenmiş normal form haline uygulanmıştır. Bazı oyunlarda FPESS bulunmaktadır, bazılarında ise bulunmamaktadır. FPESS olmadığı durumlarda karma FPESS bulunması ve bu karma FPESS’ler ile iki oyuncu arasında fayda değeri farkının optimal olması durumu araştırılmıştır ve N oyunculu herhangi bir oyunda herhangi iki oyuncu arasında en az bir tanesinin karma FPESS’e sahip olduğu Bölüm 3.3’te gösterilmiştir. Ardından aynı anda tüm oyuncuların FPESS sahibi olduğu ve bunları oynadığı durum olan karma FPESS dengesinin tanımı yapılmıştır.

4. Oyun dengelerinde kararlılık kavramı literatürde kabul gören tanımlar ışığında incelenmiştir ve oyun teorisinde oyunculara dair bir ön kabul olan rasyonel davranış kavramı tartışılmıştır.

Oyunlarda irrasyonel oynayan oyuncular nedeniyle kararlı olması beklenen dengelerin bazıları gerçek hayatta karşımıza çıkmamaktadır. Ültimatom ve diktatör

oyunlarındaki oyuncu davranışları buna örnektir. Bir başka örnek ise Nagel (1995)'de anlatılan deneydeki oyuncu davranışlarıdır. Bu makalede bir grup insan 0 ile 100 arasında bir sayı söylemektedir. Herkes bir sayı söyledikten sonra bu sayıların ortalaması bulunmakta ve ortalamanın $2/3$ 'üne en yakın sayıyı söylemiş olan kişi oyunu kazanmaktadır. Bu oyunda Nash dengesi herkesin sayı olarak 0'ı söylemesidir. Çünkü bir oyuncu 0 söylediğinde, daha büyük bir sayıyı söyleyen kişi ortalamanın $2/3$ 'ünden uzaklaşmaktadır. Ancak deney sonuçlarında ortalama yaklaşık olarak 33 çıkmış ve bu sayının yaklaşık $2/3$ 'ü olan 23 sayısını oyunda söyleyen kişi oyunu kazanmıştır. Oyunda sayı ortalamasının 33 çıkmasının nedeni oyuncuların diğer oyunculara dair sanrısıdır. Oyuncular diğer oyuncuların ortalama 50 olacak şekilde rasgele sayılar söyleyeceğini düşünmektedir. Bu duruma 50 sayısının yaklaşık $2/3$ 'ü olan 33 sayısını söyleyerek kazanmayı amaçlamaktadırlar. Bu durumu öngören bir kişi de ortalamanın 33 olacağını düşünerek 33'ün yaklaşık $2/3$ 'ü olan 23 sayısını söylemiş ve oyunu kazanmıştır. Bir başka deyişle Nash dengesi bu rasyonel iterasyonun son noktasıdır. Ancak burada oyuncular en fazla 1 adım ötesini, kazanan kişi ise 2 adım ötesini düşünmüştür. Bu durum oyuncularda rasyonel düşünme yeteneğinin sınırlılığından ya da irrasyonel davranıştan kaynaklanmaktadır.

Burada verilen örnekler neticesinde oyuncuların kendilerinden beklenen rasyonel davranışı bazı durumlarda sergilemediği ortadadır. Kohlberg and Mertens (1986)'te ifade edilen dengelerde kararlılık koşullarının ortaya çıkmadığı durumlarda rasyonalite tanımının oyuncu davranışlarını modellemesindeki başarısı ya da başarısızlığı bir tartışma konusudur. Rasyonalite tanımında bir oyuncu sadece kendi fayda değerine bakarak strateji seçimi yapmakta, rakibinin fayda değerini göz ardı etmektedir. Ancak gerçek hayatta bazı durumlarda rakip oyuncunun fayda değerini değerlendirmek kaçınılmazdır. Fayda değerleri arasındaki fark, oyuncuların kazandığı fayda değeri kadar önemli olabilir. Bu bağlamda basit bir çözüm sunulmuştur. Oyuncular oyun sonuçlarına dair öznel birer sıralama yapmıştır. Bu sırayı yaparken rasyonel olmak zorunda değildirler. Bu sıralamalar bir oyun olarak modellenmiş ve tüm oyuncuların mutabık olacağı bir sonuç Nash dengesi olarak ortaya çıkmıştır. Tabi ki daima saf Nash dengesi çıkması beklenemez. Ancak yine aynı yaklaşım kullanılarak karma strateji Nash dengesi ve buna muhatap olan oyun sonuçları ortaya çıkabilir. Tüm oyuncuların mutabık olduğu bir oyun sonucu aslında korelasyon dengesine örnek olarak düşünülebilir. Çünkü hiçbir oyuncunun kendisine atanan stratejiden vazgeçmek istemediği bir oyun sonucu korelasyon dengesidir (Aumann, 1974).

5. Çift taraflı kararlı eşleşme problemini çözen bazı yordamsal ve dolayısı ile sonuçsal adaletli algoritmalar ortaya konulmuştur. Bu algoritmaların başarımlarını incelemesi yapılmış ve zaman karmaşıklıkları analiz edilmiştir.

Bu tez kapsamında kararlı eşleşme problemini çözen algoritmalar üç başlık altında toplanmıştır. Birinci başlıkta (Bkz. Bölüm 4.2) yordamsal adaletli olmayan ancak öznel ölçütleri temel alan sonuçsal adaletli kararlı eşleşmeler bulabilen ve ikili arama algoritmasına benzer şekilde çalışan iki farklı algoritma sunulmuştur. Bu iki algoritmadan Algoritma 1, Algoritma 2'ye göre öznel sonuçsal adalet anlamında daha başarılı olmuştur ve Bölüm 4.5'te yer alan grafiklerde görüldüğü üzere daha eşitlikçi sonuçlar vermiştir. Algoritmaların tekdüze dağılımda beklenen çalışma süresi karmaşıklığı $O(n^2 \log n)$ olarak bulunmuştur.

Bir diğer başlık (Bkz. Bölüm 4.3) rastgele teklif sırası kullanan yordamsal adaletli algoritmalarıdır. Bu bölümde aynı yaklaşımın üç farklı versiyonu sunulmuş ve bu üç algoritmadan sadece Algoritma 2 istenilen düzeyde kararlı sonuçlar vermiştir. Bu bölümdeki tüm algoritmalar yordamsal olarak adaletlidir. Çünkü bütün oyuncuların teklif etme hakkı vardır ve strateji kümeleri eşittir. Tercih matrisinde tercih edilme durumlarına göre eşit konumda olmamaları yordamsal adaleti etkilemez. Çünkü her oyuncunun kendilerine gelen teklifi reddetme hakkı da vardır.

Son başlıkta ise, en kötü durumdaki oyuncunun durumunu iyileştirerek çalışan sonuncu iyileştirmeli algoritma bulunmaktadır (Bkz. Bölüm 4.4). Bu algoritma yordamsal olarak adaletli değildir, ancak öznel ölçütlere göre neredeyse ESMA (Giannakopoulos et al., 2015) kadar eşitlikçi kararlı eşleşmeler vermiştir. Bu durum Bölüm 4.5'te yer alan grafiklerde görülmektedir. Algoritmanın tekdüze dağılımda beklenen çalışma süresi üst sınırı teorik olarak şimdilik $O((n^{5/2}(\log n)^{\frac{1}{2}}))$ bulunmuştur. Ancak deneysel sonuçlar bu sürenin $O(n^{5/2})$ 'den daha az olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

- Aumann, R. J.**, 1974, Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal Of Mathematical Economics*, 1:67-96pp.
- Aumann, R. J.**, 2000, Irrationality in game theory, *Collected Papers Of Robert J Aumann*, MIT Press, Cambridge, 1:621-634pp.
- Bolton, G.**, 1991, A comparative model of bargaining: theory and evidence, *American Economic Review*, 81(5):1096-1136pp.
- Cheng, S. F., Reeves, D. M., Vorobeychik, Y. and Wellman, M.**, 2004, Notes on equilibria in symmetric games, *Proceedings of the 6th International Workshop On Game Theoretic And Decision Theoretic Agents*, 71-78pp.
- Tardos, E.**, 2004, "Correlated Equilibria", <http://www.cs.cornell.edu/courses/cs684/2004sp/feb20.pdf> (Erişim tarihi: 10 Eylöl 2017)
- Croson, R.**, 1996, Information in ultimatum games: an experimental study, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 30(2):197-212pp.
- Dalkey, N.**, 1953, Equivalence of information patterns and essentially determinate games, *Contributions to the Theory of Games*, 2:217-245pp.
- Dresher, M.**, 1981, The mathematics of games of strategy: theory and applications, Dover Publications, New York, 208p.
- Eriehl, E.**, 2013, "A solution to the stable marriage problem", <http://www.math.jhu.edu/~erihl/pechakucha.pdf> (Erişim tarihi: 10 Eylöl 2017)
- Estanol, A. B.**, 2006, "Trembling-Hand Perfection for Extensive Games" <http://albertbanalestanol.com/wp-content/uploads/gtcm-Lecture-2b.pdf> (Erişim tarihi: 10 Eylöl 2017)
- Forsythe, R., Horowitz, J. L., Savin, N. E., and Sefton, M.**, 1991, Fairness in simple bargaining experiments, *Games and Economic Behavior*, 6:347-369pp.

- Gale, D. and Shapley, L. S.**, 1962, College admissions and the stability of marriage, *The American Mathematical Monthly*, 69:9-15pp.
- Giannakopoulos, I., Karras, P., Tsoumakos, K., Doka, K. and Koziris, N.**, 2015, An equitable solution to the stable marriage problem, *Proceedings of IEEE 27th International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, Italy, 989-996pp.
- Gintis, H.**, 2000, Classical versus evolutionary game theory, *Journal Of Consciousness Studies*, 7:300-304pp.
- Harrison, G. W., and Hirshleifer, J.**, 1983, An experimental evaluation of weakest link/best shot models of public goods, *Journal of Political Economy*, 201-225pp.
- Htun, Y.**, 2017, "Irrationality In Game Theory", <https://www.cs.ubc.ca/~kevinlb/teaching/cs532a%20-%202005-6/Projects/YaminHtun.pdf> (Erişim tarihi: 10 Eylöl 2017)
- Irving, R. W.**, 1985, An efficient algorithm for the "stable roommates" problem, *Journal of Algorithms*, 6(4): 577–595pp.
- Iwama, K., and Miyazaki, S.**, 2008, A survey of the stable marriage problem and its variants, *ICKS International Conference on IEEE*, 131-136pp.
- Xin, A and Leyton-brown, J.K.**, 2007, "A Tutorial on the Proof of the Existence of Nash Equilibria", University of British Columbia Technical Report, <http://www.cs.ubc.ca/~jiang/papers/NashReport.pdf> (Erişim tarihi: 10 Eylöl 2017)
- Klaus, B. and Klijn, F.**, 2006, Procedurally fair and stable matching, *Economic Theory*, 431-447pp.
- Kohlberg, E. and Mertens, J. F.**, 1986, On the strategic stability of equilibria, *Econometrica*, 54(5): 1003–1037pp.
- Korth, C.**, 2009, Fairness in bargaining and markets, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 627:175p.

- Kreps, D. and Wilson, R.**, 1982, Sequential equilibria. *Econometrica*, 50:863–894pp.
- Kuhn, H. W.**, 1953, Extensive games and the problem of information in:h. w. kuhn and a. w. tucker (eds.): contribution to the theory of games, *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, 28:193–216pp.
- Leyton-Brown , K. and Shoham, Y.**, 2008, Essentials of game theory: a concise multidisciplinary introduction, Morgan and Claypool, USA, 104p.
- Lindroth, P., Patriksson, M. and Strömberg, A.**, 2010, Approximating the pareto optimal set using a reduced set of objective functions, *European Journal of Operational Research*, 207(3): 1519–1534pp.
- Mcvitie, D. and Wilson, I.**, 1971, The stable marriage problem, *Magazine Communications of the ACM*, 14:486-490pp.
- Mertens, J. F.**, 1989, Stable equilibria - a reformulation part 1. *Mathematics of Operations Research*, 14:575-625pp.
- Mertens, J. F.**, 1991, Stable equilibria - a reformulation, *Mathematics of Operations Research*, 16: 694-753pp.
- Moulin, H.**, 1997, Procedural cum end state justice: an implementation viewpoint, Discussion paper, Department of Economics, Duke University, 27p.
- Myerson, R.**, 1978, Refinements of the nash equilibrium concept, *International Journal Of Game Theory*, 7:73–80pp.
- Nagel, R.**, 1995, Unraveling in guessing games: an experimental study, *The American Economic Review*, 85:1313-1326pp.
- Nash, J.**, 1951, Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 54:286-295pp.
- Ng, C.**, 1989, Lower bounds for the stable marriage problem and its variants, *Proceeding SFCS '89 Proceedings of the 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, USA, 129-133pp.

- Norde, H., Potters, J., Reijnierse, H., and Vermeulen, D.,** 1996, Equilibrium selection and consistency, *Games and Economic Behavior*, 12: 219-225pp.
- Northwestern Üniversitesi,** 2017, "Sequential Rationality " <http://www.math.northwestern.edu/~clark/364/handouts/seq-rat.pdf> (Erişim tarihi: 10 Eylül 2017)
- Ochs, J., and Alvin, R.,** 1989, An experimental study of sequential bargaining, *American Economic Review*, 79(3):355-384pp.
- Osborne, M.,** 2003, An introduction to game theory, Oxford University Press, USA, 560p.
- Osborne, M. J., and Rubinstein, A.,** 1994, A course in game theory, MIT Press, USA, 368p.
- Pettit, P. and Sugden, R.,** 1989, The backward induction paradox, *The Journal Of Philosophy*, 86:169-82pp.
- Pittel, B.,** 1989, The average number of stable matchings, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2(4):530–549pp.
- Rabin, M.,** 1993, Incorporating fairness into game theory and economics, *The American Economic Review*, 83:1281-1302pp.
- Rand, D. G., Tarnita, C. E., Ohtsuki, H. and Nowak, M. A.,** 2013, Evolution of fairness in the one-shot anonymous ultimatum game, *Proceedings Of The National Academy Of Sciences*, USA, 110:2581-2586pp.
- Rawls, J.,** 1971, A Theory of Justice, Harvard University Press, Cambridge-Massachusetts, 560p.
- Roth, A.,** 1982, The economics of matching: stability and incentives, *Mathematics of Operations Research*, 617-628pp.
- Schaffer, M. E.,** 1989, Are profit-maximizers the best survivors?, *Journal of Economic*, 12:29-45pp.

- Schaffer, M. E.**, 1988, Evolutionary stable strategies for a finite population and a variable, *Journal of Theoretical Biology*, 132:469-478pp.
- Selten, R.**, 1975, A reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal Of Game Theory*, 4(1): 25–55pp.
- Smith , M. J. and Price, G. R.**, 1973, The logic of animal conflict, *Nature*, 246(5427): 15–18pp.
- Spaniel, W.**, 2011, Game theory 101: the complete textbook, CreateSpace Independent Publishing Platform, USA, 276p.
- Streeter, W.**, 1946, Is the first move an advantage? ,*Chess Review*, 16-16pp.
- Suetin, A.**, 1968, Modern Chess Opening Theory, Pergamon Press , France, 336p.
- Thompson, F.**, 1952, Equivalence of games in extensive form, The Rand Corporation, USA, 15p.
- Tversky , A. S. and Slavic, P.**, 1988, Contingent weighting in judgment and choice, *Psychological Review*, 95:371-384pp.
- Universidad de Cantabria**, 2017, “Curve Fitting Toolbox”, https://www.ctr.unican.es/asignaturas/instrumentacion_5_IT/curvefit.pdf (Erişim tarihi: 10 Eylül 2017)
- Van den Bos, K., Wilke, H. A. and Lind, E. A.**, 1998, When do we need procedural fairness?: the role of trust in authority, *Journal of Personality and Social Psychology*, 75:1449-1458pp.
- Vargün, A. and Dalkılıç, M. E.**, 2016, Kararlı Eşleşme Probleminde Teklifleri Sınırlayarak Sonuçları İyileştirme Üzerine Yeni Bir Uygulama, *İnternet Teknolojileri Derneği Akademik Bilişim Konferansı 2016*, Aydın, 8s.
- Vargün, A. and Dalkılıç, M. E.**, 2017, On the finite population evolutionary stable strategy equilibrium for perfect information extensive form games, *Game Theory for Networks*, 212(1):51-59pp.

Vien, N. A., Viet, N. H., Kim, H., Lee, S. and Chung, T., 2007, Ant colony based algorithm for stable marriage problem, *Advances and Innovations in Systems*, 457-461pp.

Von Neumann, J., 1928, Zur theorie der gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen*, 100:295-320pp.

Waner, S., 2017, "Finite Mathematics Topic Summary: Game Theory", <http://www.zweigmedia.com/RealWorld/Summary3b.html> (Erişim tarihi: 10 Eylül 2017)

Watson, J., 2013, An introduction to game theory-third edition, W. W. Norton and Company, USA, 512p.

Wikipedia, 2017a, "Solution Concept", https://en.wikipedia.org/wiki/Solution_concept, (Erişim tarihi: 10 Eylül 2017)

Wikipedia, 2017b, "Trembling Hand Perfect Equilibrium", https://en.wikipedia.org/wiki/Trembling_hand_perfect_equilibrium (Erişim tarihi: 10 Eylül 2017)

Wolfram, 2017, "Unexpected Hanging Paradox", <http://mathworld.wolfram.com/UnexpectedHangingParadox.html> (Erişim tarihi: 10 Eylül 2017)

EKLER

Ek 1 Yapılan Yayınlar

Ek 2 $N=3$ İçin Ültimatom Oyunu Eşzamanlılaştırma Matrisi

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları

Ek 4 Üç Farklı Tekrarlı Tutsak İkileminin Oyun Ağaçları



1. “Kararlı Eşleşme Probleminde Teklifleri Sınırlayarak Sonuçları İyileştirme Üzerine Yeni Bir Uygulama” (Vargün ve Dalkılıç, 2016): Kararlı eşleşme problemi için oyunculara teklif inceleme aşamasında kriter koymasına izin veren bir algoritma sunmaktadır. Algoritma, teklif alan kümedeki elemanlara teklifleri değerlendirmek için kriter koyma hakkı vermektedir. Her turda Gale-Shapley algoritmasını her tur çalıştırmakta ve kararlı çözüm bulamayana kadar çalışmaya devam etmektedir. Sonuçta ortaya çıkan kararlı çözümler algoritmanın uygulama şeklinde göre erkek optimal çözümden kadın optimal çözüme doğru gitmektedir. Algoritma ara turlarda öznel ölçütlere göre sonuçsal adaletli kararlı eşleşmeler bulmaktadır.

Vargün, A. and Dalkılıç, M. E., 2016, Kararlı Eşleşme Probleminde Teklifleri Sınırlayarak Sonuçları İyileştirme Üzerine Yeni Bir Uygulama, İnternet Teknolojileri Derneği Akademik Bilişim Konferansı 2016, Aydın, 8s.

2. “On the finite population evolutionary stable strategy equilibrium for perfect information extensive form games” (Vargün and Dalkılıç, 2017): Bazı oyunlarda irrasyonel oyuncu davranışlarını açıklamaya yardımcı, oyuncuların rakip oyuncu ile arasındaki farkı optimal hale getiren bir denge noktası sunmaktadır. Bu denge noktasının sıralı oynanan oyunlarda da olabileceği gösterilmiştir. Temel örnek olarak Ültimatör ve Diktatörlük oyunu incelenmiş ve ultiatom oyununda böyle bir denge noktasının olduğu, diktatörlük oyununda ise olmadığı kanıtlanmıştır. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering (LNICST, volume 212) kitabında bir bölüm olarak yayınlanmıştır.

Vargün, A. and Dalkılıç, M. E., 2017, On the finite population evolutionary stable strategy equilibrium for perfect information extensive form games, Game Theory for Networks, 212(1):51-59pp.

N=3 için ultimatom oyunu ve eşzamanlılaştırma matrisi

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları

/ array[2xNxN] dizisi her 2N hücrede bir tamamen 0 ile 2N – 1 arasında rastgele sayılarla doldurulmuş bir dizidir. Oyuncuların rastgele sıra ile her turda teklif yapmasını sağlamaktadır. Örneğin N = 3 iken array = {{5, 3, 4, 2, 0, 1}, {2, 3, 5, 1, 0, 4}, {5, 4, 0, 1, 3, 2 }} olabilir. İlk alt dizi {5, 3, 4, 2, 0, 1}, ilk turdaki tercih sırasıdır. {2, 3, 5, 1, 0, 4} ikinci turdaki ve {5, 4, 0, 1, 3, 2} ise üçüncü turdaki tercih sırasıdır.*/*

Yaklaşım 1

```
0.      Input: array[2xNxN]
1.      for i = 1 to n
2.      {
3.      for j = 1 to 2n //her bir teklif turu
4.      {
5.      x = array[i *y] // yeni teklif edecek kişi
6.      x boştaysa
7.      {
8.      y = x'in i.sıradaki tercihi
9.      eğer y boştaysa
10.     xy eş olur
11.     değilse
12.     y_es= y'nin eşi
13.     py_es=y'nin eşini tercih etme sırası
14.     pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
15.     eğer py_es > pyx
16.     xy eş olur
17.     y'nin eşi boş kalır
18.     }
19.     x boşta değilse ve x'in i.tercihi şu anki eşi değilse
20.     {
21.     x_es = x'in eşi
22.     px_es=x'in eşini tercih etme sırası
23.     eğer i> px_es
24.     {
25.     bu kişiyi ve teklifini bağlı listeye ekle
26.     }
27.     değilse
28.     {
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
29.      y=x'in i.tercihi
30.      eğer y boştaysa
31.          xy eş olur
32.          x'in eşi boşta kalır
33.      değilse
34.          y_es=y'nin eşi
35.          py_es=y'nin eşini tercih etme sırası
36.          pyx=y'nin x'i tercih etme sırası
37.          eğer py_es > pyx
38.              xy eş olur
39.              y'nin eşi boş kalır
40.              x'in eşi boş kalır
41.      }
42.  } //ilk for döngüsünün sonu
43.  while( linklist.next != null )
44.  {
45.      flag=0 //eğer teklif yapılırsa teklif bağlı listeden silinecek
46.      x=linklist.next
47.      x_i= x'in etmediği teklifin sırası
48.      eğer x boşsa
49.          flag = 1 //teklif yapılıyor
50.          y=x'in x_i. sıradaki tercihi
51.          eğer y boşsa
52.              xy eş olur
53.          değilse
54.              y_es= y'nin eşi
55.              py_es= y'nin eşini tercih etme sırası
56.              pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
57.              eğer py_es> pyx
58.                  xy eş olur
59.                  y'nin eşi boşta kalır
60.          değilse
61.              x_es= x'in eşi
62.              px_es= x'in eşini tercih etme sırası
63.              eğer px_es > x_i
64.                  flag = 1 //teklif yapılıyor
65.                  y= x'in x_i. sıradaki tercihi
66.                  eğer y boşsa
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
67.                                     xy eş olur
68.                                     x'in eşi boşta kalır
69.                                   değilse
70.                                     py_x= y'nin x'i tercih etme sırası
71.                                     py_es = y'nin eşini tercih etme sırası
72.                                     eğer py_es > py_x
73.                                     xy eş olur
74.                                     y'nin eşi boşta kalır
75.                                     x'in eşi boşta kalır
76.       if flag = 1
77.       {
78.       bu teklifi listeden sil
79.       }
80.       flag = 0
81.       linklist = linklist.next
82.   } //while döngüsünün sonu
83.   } //ikinci for döngüsünün sonu
```

Yaklaşım 2

```
0.   Input: array[2xNxN]
1.   for i = 1 to n
2.   {
3.   for j = 1 to 2n //her bir teklif turu
4.   {
5.       x = array[i *y] // yeni teklif edecek kişi
6.       x boştaysa
7.       {
8.           y = x'in i.sıradaki tercihi
9.           eğer y boştaysa
10.              xy eş olur
11.              değilse
12.                  y_es= y'nin eşi
13.                  py_es=y'nin eşini tercih etme sırası
14.                  pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
15.                  eğer py_es > pyx
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
16.             xy eş olur
17.             y'nin eşi boş kalır
18.         }
19.     x boşta değilse ve x'in i.tercihi şu anki eşi değilse
20.     {
21.         x_es = x'in eşi
22.         px_es=x'in eşini tercih etme sırası
23.         eğer i > px_es
24.         {
25.             bu kişiyi ve teklifini bağlı listeye ekle
26.         }
27.     değilse
28.     {
29.         y=x'in i.tercihi
30.         eğer y boştaysa
31.             xy eş olur
32.             x'in eşi boşta kalır
33.         değilse
34.             y_es=y'nin eşi
35.             py_es=y'nin eşini tercih etme sırası
36.             pyx=y'nin x'i tercih etme sırası
37.             eğer py_es > pyx
38.                 xy eş olur
39.                 y'nin eşi boş kalır
40.                 x'in eşi boş kalır
41.         }
42.     }
43. } //ilk for döngüsünün sonu
44. while( linklist.next != null )
45. {
46.     flag=0 //eğer teklif yapılırsa teklif bağlı listeden silinecek
47.     x=linklist.next
48.     x_i= x'in etmediği teklifin sırası
49.     eğer x boşsa
50.         flag = 1 //teklif yapılıyor
51.         y=x'in x_i. sıradaki tercihi
52.         eğer y boşsa
53.             xy eş olur
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
54.         değilse
55.             y_es= y'nin eşi
56.             py_es= y'nin eşini tercih etme sırası
57.             pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
58.             eğer py_es> pyx
59.                 xy eş olur
60.                 y'nin eşi boşta kalır
61.         if flag = 1
62.         {
63.             bu teklifi listeden sil
64.         }
65.         flag = 0
66.         linklist = linklist.next
67.     } //while döngüsünün sonu
68. } //ikinci for döngüsünün sonu
```

Yaklaşım 3

```
0.     Input: array[2xNxN]
1.     for i = 1 to n
2.     {
3.         for j = 1 to 2n //her bir teklif turu
4.         {
5.             x = array[i *y] // yeni teklif edecek kişi
6.             boolean cevap=x_in_linklistte_bekleyen_teklifi_var_mı(i, x)
7.             eğer cevap = false
8.             {
9.                 //hiçbir şey yapma
10.            }
11.        değilse
12.        {
13.            x boştaysa
14.            {
15.                y = x'in i.sıradaki tercihi
16.                eğer y boştaysa
17.                xy eş olur
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
18.         değilse
19.             y_es= y'nin eşi
20.             py_es=y'nin eşini tercih etme sırası
21.             pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
22.             eğer py_es > pyx
23.                 xy eş olur
24.                 y'nin eşi boş kalır
25.         }
26.         x boşta değilse ve x'in i.tercihi şu anki eşi değilse
27.         {
28.             x_es = x'in eşi
29.             px_es=x'in eşini tercih etme sırası
30.             eğer i> px_es
31.                 i'yi teklifini bağlı listeye ekle
32.             değilse
33.             {
34.                 y=x'in i.tercihi
35.                 eğer y boştaysa
36.                     xy eş olur
37.                     x'in eşi boşta kalır
38.                 değilse
39.                     y_es=y'nin eşi
40.                     py_es=y'nin eşini tercih etme sırası
41.                     pyx=y'nin x'i tercih etme sırası
42.                     eğer py_es > pyx
43.                         xy eş olur
44.                         y'nin eşi boş kalır
45.                         x'in eşi boş kalır
46.                 }
47.             }
48.     } //ilk for döngüsünün sonu
49.     while( linklist.next != null )
50.     {
51.         flag=0 //eğer teklif yapılırsa teklif bağlı listeden silinecek
52.         x=linklist.next
53.         x_i= x'in etmediği teklifin sırası
54.         eğer x boşsa
55.             flag = 1 //teklif yapılıyor
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
56.         y=x'in x_i. sıradaki tercihi
57.         eğer y boşsa
58.             xy eş olur
59.         değilse
60.             y_es= y'nin eşi
61.             py_es= y'nin eşini tercih etme sırası
62.             pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
63.             eğer py_es> pyx
64.                 xy eş olur
65.                 y'nin eşi boşta kalır
66.     x boş değilse
67.         x_es= x'in eşi
68.         px_es= x'in eşini tercih etme sırası
69.         eğer px_es > x_i
70.             flag = 1 //teklif yapılıyor
71.             y= x'in x_i. sıradaki tercihi
72.             eğer y boşsa
73.                 xy eş olur
74.                 x'in eşi boşta kalır
75.             değilse
76.                 py_x= y'nin x'i tercih etme sırası
77.                 py_es = y'nin eşini tercih etme sırası
78.                 eğer py_es > py_x
79.                     xy eş olur
80.                     y'nin eşi boşta kalır
81.                     x'in eşi boşta kalır
82.     if flag = 1
83.     {
84.         bu teklifi listeden sil
85.     }
86.     flag = 0
87.     linklist = linklist.next
88. } //while döngüsünün sonu
89. } //ikinci for döngüsünün sonu
90. Fonksiyon x_in_linklistte_bekleyen_teklifi_var_mı(i,x_aranan)
91. {
92.     boolean cevap = true
93.     while( linklist.next != null )
```


Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

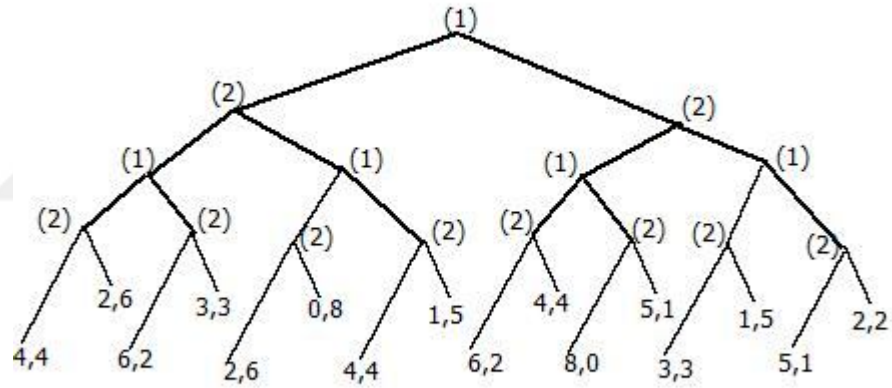
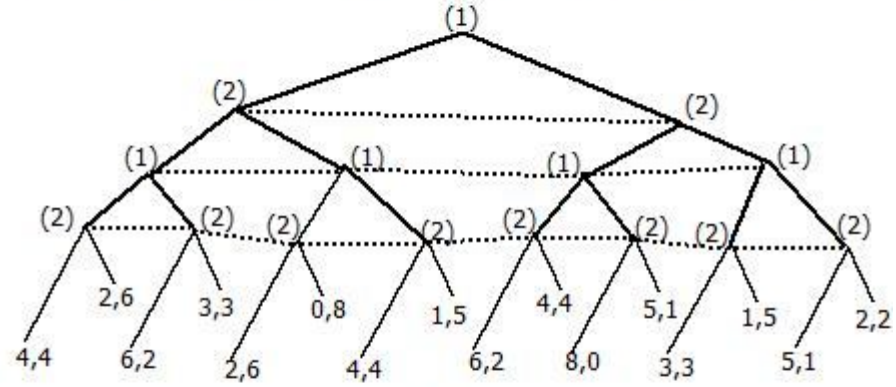
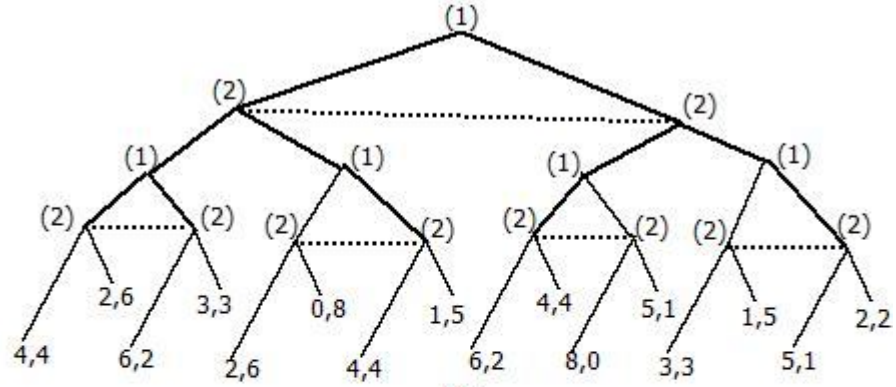
```
94.      {
95.          flag=0 //eğer teklif yapılırsa teklif bağlı listeden silinecek
96.          x=linklist.next
97.          x_i= x'in etmediği teklifin sırası
98.          eğer i> x_i ve x = x_aranan
99.          {
100.              eğer x boşsa
101.              flag = 1 //teklif yapılıyor
102.              y=x'in x_i. sıradaki tercihi
103.              eğer y boşsa
104.                  xy eş olur
105.              değilse
106.                  y_es= y'nin eşi
107.                  py_es= y'nin eşini tercih etme sırası
108.                  pyx= y'nin x'i tercih etme sırası
109.                  eğer py_es> pyx
110.                      xy eş olur
111.                      y'nin eşi boşta kalır
112.                  x boş değilse
113.                  x_es= x'in eşi
114.                  px_es= x'in eşini tercih etme sırası
115.                  eğer px_es > x_i
116.                      flag = 1 //teklif yapılıyor
117.                      y= x'in x_i. sıradaki tercihi
118.                      eğer y boşsa
119.                          xy eş olur
120.                          x'in eşi boşta kalır
121.                      değilse
122.                          py_x= y'nin x'i tercih etme sırası
123.                          py_es = y'nin eşini tercih etme sırası
124.                          eğer py_es > py_x
125.                              xy eş olur
126.                              y'nin eşi boşta kalır
127.                              x'in eşi boşta kalır
128.                  }
129.          if flag = 1
130.          {
131.              bu teklifi listeden sil
```

Ek 3 Rasgele Teklif Sırası Kullanan Yordamsal Adaletli Algoritmaların Sözde Kodları (devam)

```
132.                i ve x_aranan ile ilgili son teklifi bağlı listeye ekle
133.                cevap = false
134.
135.                }
136.                flag = 0
137                linklist = linklist.next
138.        } //while döngüsünün sonu
139.
140.    }
```



Ek 4 Üç Farklı Tekrarlı Tutsak İkileminin Oyun Ağaçları



sol dallar: C stratejisi
sağ dallar: D stratejisi