



**MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
MATEMATİKSEL İSPATTA ÖNCEDEN
BELİRLENEN ANAHTAR FİKİRLERİ
YAZABİLME SÜREÇLERİ**

Aysun YEŞİLYURT ÇETİN

**Doktora Tezi
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ
2017
(Her Hakkı Saklıdır)**

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
MATEMATİKSEL İSPATTA ÖNCEDEN BELİRLENEN
ANAHTAR FİKİRLERİ YAZABİLME SÜREÇLERİ

(The Processes of Pre-Service Mathematics Teachers' Ability to Write Pre-Determined Key Ideas In Mathematical Proof)

DOKTORA TEZİ

Aysun YEŞİLYURT ÇETİN

Danışman: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

ERZURUM
Kasım, 2017

KABUL VE ONAY

Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ danışmanlığında, Aysun YEŞİLYURT ÇETİN tarafından hazırlanan “Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri” başlıklı çalışma 06/11/2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından. Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yasin SOYLU

İmza:

Danışman : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Çiğdem KILIÇ

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Muzaffer OKUR

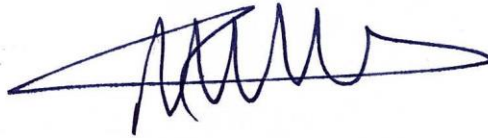
İmza:

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN

İmza:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

28 Kasım 2017^{06/11/2017}



Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR

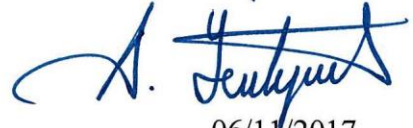
Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Doktora Tezi olarak sunduğum “MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL İSPATTA ÖNCEDEN BELİRLENEN ANAHTAR FİKİRLERİ YAZABİLME SÜREÇLERİ” başlıklı çalışmanın tarafımdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını ve yararlandığım eserleri kaynakçada gösterdiğimi beyan ederim.

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☒ Tezim 1 (bir) yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.



06/11/2017

Aysun YEŞİLYURT ÇETİN

ÖNSÖZ

Uzun bir süreç sonunda ortaya çıkan ve her aşamasını büyük bir istekle yürüttüğüm bu çalışmanın, başından sonuna kadar bütün yönleriyle ortaya çıkmasında değerli fikirleri ve engin tecrübesi ile bana yol gösteren; hoşgörüsüyle beni her zaman motive eden; öğrencisi olmaktan onur duyduğum kıymetli hocam Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu araştırmanın her aşamasında bana zaman ayırıp destek olan, tecrübelerinden istifade ettiğim sayın hocalarım Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN, Prof. Dr. Yasin SOYLU ve Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Jürideki hocalarım Doç. Dr. Çiğdem KILIÇ ve Doç. Dr. Muzaffer OKUR'a değerli katkıları için teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda olan, benden dualarını eksik etmeyen, gösterdikleri sınırsız sevgi ile araştırma sürecimde karşılaştığım duygusal zorlukları aşmamı sağlayan annem Ülkü YEŞİLYURT, babam Coşkun YEŞİLYURT ve kardeşim İ. Ethem YEŞİLYURT'a; hayatlarımızı birleştirdiğimiz günden bu yana aldığım her kararın arkasında olan ve beni her zaman her koşulda destekleyen kıymetli eşim Muhammet ÇETİN'e, araştırma sürecimdeki en büyük neşe kaynağım, kızım Ahsen ÇETİN'e ve geniş ailemin bütün fertlerine çok teşekkür ederim.

Gönüllü olarak bu araştırmaya katılan ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine teşekkürlerimi sunarım. Desteklerini her zaman hissettiğim, her şart ve durumda yanımda olan arkadaşlarım Arş. Gör. Zeynep ÇİFTCİ, Arş. Gör. Tuba ÖZ, Arş. Gör. M. Tuğba ERDEM ALADAĞ'a, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan Yrd. Doç. Dr. Gürsel GÜLER'e çok teşekkür ederim. Değerli vakitlerini ayırarak katkılarıyla beni onurlandıran Prof. Dr. Hans Niels JAHNKE ve Prof. Dr. Steven KRANTZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Erzurum – 2017

Aysun YEŞİLYURT ÇETİN

ÖZET

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL İSPATTA ÖNCEDEN BELİRLENEN ANAHTAR FİKİRLERİ YAZABİLME SÜREÇLERİ

Aysun YEŞİLYURT ÇETİN

2017, 279 sayfa

Bu araştırmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının cebir alanında matematiksel ispat yaparken önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerini incelemektir. Nitel araştırma yöntemlerinden bütüncül çoklu durum çalışmasının kullanıldığı bu araştırma 2014-2015 eğitim öğretim yılı bahar döneminde, sesli düşünme yöntemine uygun belirli ölçütlere bağlı kalınarak ve gönüllülük esasıyla belirlenen 5 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmada nitel veri toplama araçlarından görüşme, doküman inceleme ve uzman görüşünden faydalanılmıştır. Doküman inceleme ve uzman görüşleri ile elde edilen veriler birbirleriyle ilişkilendirilerek eksik bırakılan temel bileşenlerin anahtar fikirler yardımıyla tamamlanmasına yönelik bir ispat tamamlama formu hazırlanmıştır. Görüşmelerde sesli düşünme yöntemi ile desteklenmiş yarı yapılandırılmış mülakat tekniği kullanılmış ve hazırlanan ispat tamamlama formu uygulanmıştır.

Uygulama öncesinde öğretmen adaylarının sesli düşünme yöntemini etkili bir şekilde kullanabilmelerini sağlamak amacıyla iki oturumdan oluşan bir eğitim düzenlenmiştir. Yapılan mülakatlar transkript edilerek elde edilen veriler sesli düşünme protokolleri şeklinde derlenmiştir. Araştırmada elde edilen veriler betimsel analiz yapılarak araştırmacı tarafından yorumlanmıştır.

Bu araştırmadan elde edilen bulgulara göre; anahtar fikirler öğretmen adaylarının sezgisel olarak ispatı anlamalarını, ispata yönelik olumlu bir tutum geliştirmelerini, ispata başlamalarını, cebirsel işlemleri yapmalarını ve ispatı tamamlamalarını kolaylaştırmaktadır. Ancak öğretmen adaylarının bir teoremin ispatı ile ilgili sahip oldukları kavramsal bilgi düzeyi anahtar fikirlerden faydalanma düzeyi ile orantılıdır. Bununla birlikte anahtar fikirler, kavramsal bilgi düzeyi yetersiz öğretmen adaylarının da daha derinlerdeki yanlış öğrenmelerini ya da bilgi eksikliklerini ortaya çıkarma olanağı sunmaktadır. Dolayısıyla anahtar fikirlerle desteklenmiş ispatlar ancak bütüncül bir yaklaşımla ele alındıklarında ve kavramsal bilgi ve matematiksel notasyon bilgisi eksikliğinin yaşanmadığı durumlarda eksiksiz bir biçimde tamamlanabilmektedirler.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel İspat, Matematiksel İspat Süreci, Sesli Düşünme Yöntemi, Matematik Eğitimi, Cebir Öğretimi, Matematik Öğretmeni Adayı

ABSTRACT

PHD THESIS

THE PROCESSES OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' ABILITY TO WRITE PRE-DETERMINED KEY IDEAS IN MATHEMATICAL PROOF

Aysun YEŞİLYURT ÇETİN

2017, 279 pages

The aim of this study is to examine the processes of pre-service mathematics teachers' ability to write pre-determined key ideas while performing mathematical proof in the field of algebra. This study, in which the holistic multiple case studies design which is one of the qualitative research methods was used, was carried out with 5 pre-service teachers determined on a voluntary basis and by complying with the certain criteria appropriate to the method of think-aloud during the spring semester of the 2014-2015 academic year. In the study, interview, document review and expert opinion among the qualitative data collection tools were used. The data obtained by document review and expert opinions were associated with each other, and a proof completion form was prepared for the completion of the missing basic components with the help of key ideas. During the interviews, the semi-structured interview technique supported by the think-aloud method was used, and the prepared proof completion form was applied.

A training consisting of two sessions was organized to ensure that pre-service teachers could effectively use the think-aloud method before the application. The data obtained by transcribing the interviews were compiled in the form of think-aloud protocols. The data obtained in the study were interpreted by the researcher by performing the descriptive analysis.

According to the results obtained from this study, key ideas make it easier for pre-service teachers to intuitively comprehend the proof, to develop a positive attitude towards the proof, to begin to prove, to perform algebraic operations and to complete the proof. However, the level of conceptual knowledge that pre-service teachers have about a proof of a theorem is proportional to the level of utilization from the key ideas. On the other hand, key ideas enable to find out deeper mislearning or lack of knowledge of pre-service teachers with the insufficient conceptual knowledge. Therefore, the proofs supported with key ideas can be completed precisely only when they are dealt with in a holistic approach and in cases where there is no lack of conceptual knowledge and mathematical notation knowledge.

Keywords: Mathematical Proof, Mathematical Proof Process, The Think-Aloud Method, Mathematics Education, Algebra Teaching, Pre-Service Mathematics Teacher

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI	ii
ÖNSÖZ	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
TABLolar DİZİNİ	xiii

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	3
1.2. Problem Cümlesi.....	4
1.3. Alt Problemler.....	4
1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi	4
1.5. Varsayımlar	6
1.6. Sınırlılıklar	7
1.7. Tanımlar	7

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	8
2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi	8
2.1.1. Matematiksel İspatın Tarihçesi.....	9
2.1.2. Matematiksel İspatın Anlamları ve Önemi.....	10
2.1.3. Matematiksel İspat Yöntemleri.....	12
2.1.4. Matematiksel İspatın Fonksiyonları ve Sınıflandırılması.....	15
2.1.5. Matematiksel İspat ve Anahtar Fikir İlişkisi	18
2.1.6. Sesli Düşünme Yöntemi	20
2.1.7. Sesli Düşünme Yöntemi ve Matematiksel İspat İlişkisi	23
2.2. İlgili Araştırmalar.....	24
2.2.1. Matematiksel İspatın Matematik Eğitimindeki Yeri	24
2.2.2. Matematiksel İspata Yönelik Görüş, Tutum, Algı ve İnanç Çalışmaları	27

2.2.3. Matematiksel İspat Süreci ve Matematiksel İspatta Yaşanan Güçlükler.....	31
---	----

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM.....	36
3.1. Araştırmanın Deseni.....	37
3.2. Çalışma Grubu	38
3.3. Araştırmacının Rolü	40
3.4. Veri Toplama Araçları	41
3.4.1. Sesli Düşünme Yöntemi ile Desteklenmiş Yarı Yapılandırılmış Mülakat..	41
3.4.2. Doküman İnceleme ve Uzman Görüşü.....	42
3.5. Veri Toplama Süreci	43
3.5.1. Anahtar Fikirlerle Desteklenmiş İspat Tamamlama Formunun Hazırlanma Süreci.....	43
3.5.2. Pilot Uygulama	45
3.5.3. Esas Uygulama	47
3.6. Araştırmanın İnandırıcılığı, Aktarılabilirliği, Tutarlılığı ve Teyit Edilebilirliği.....	48
3.6.1. Araştırmanın inandırıcılığı.....	48
3.6.2. Araştırmanın Aktarılabilirliği	50
3.6.3. Araştırmanın Tutarlılığı ve Teyit Edilebilirliği	51
3.6.4. Etik Konular.....	52
3.7. Verilerin Analizi.....	52
3.7.1. Matematiksel İspat Sürecini Oluşturan Temel Bileşenlerin Belirlenmesine Yönelik Verilerin Analizi	53
3.7.2. Sesli Düşünme Yöntemi İle Desteklenmiş Yarı Yapılandırılmış Mülakatların Analizi	54

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM.....	56
4.1. Matematiksel İspat Sürecini Oluşturan Temel Bileşenlerin Belirlenmesine Yönelik Bulgular.....	56
4.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumlarına Yönelik Bulgular.....	60

4.2.1. Gül'ün Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu.....	60
4.2.1.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular.....	60
4.2.1.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular.....	63
4.2.1.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular.....	69
4.2.1.4. Teorem.4'ün ispatına yönelik bulgular.....	72
4.2.1.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular.....	74
4.2.1.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular.....	76
4.2.1.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular.....	79
4.2.2. Ezgi'nin Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu	80
4.2.2.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular.....	81
4.2.2.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular.....	84
4.2.2.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular.....	89
4.2.2.4. Teorem.4'ün ispatına yönelik bulgular.....	92
4.2.2.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular.....	98
4.2.2.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular.....	101
4.2.2.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular.....	104
4.2.3. Ceyda'nın Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu.....	107
4.2.3.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular.....	107
4.2.3.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular.....	114
4.2.3.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular.....	123
4.2.3.4. Teorem.4'ün ispatına yönelik bulgular.....	126
4.2.3.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular.....	130
4.2.3.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular.....	133
4.2.3.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular.....	138
4.2.4. Umut'un Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu.....	141
4.2.4.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular.....	141
4.2.4.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular.....	144
4.2.4.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular.....	151
4.2.4.4. Teorem.4'ün ispatına yönelik bulgular.....	154
4.2.4.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular.....	157
4.2.4.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular.....	160
4.2.4.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular.....	163

4.2.5. Hasan'ın Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu.....	166
4.2.5.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular.....	166
4.2.5.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular.....	170
4.2.5.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular.....	176
4.2.5.4. Teorem.4'ün ispatına yönelik bulgular.....	178
4.2.5.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular.....	182
4.2.5.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular.....	184
4.2.5.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular.....	188
4.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Temel Bileşenleri	
Tamamlama Durumuna İlişkin Bulgular ve Yorumlar	190
4.3.1. Hipotezi Belirleme ve Hükmü Belirleme Temel Bileşenlerinin	
Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar	190
4.3.2. Hipotezi Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu	
ve Yorumlar	193
4.3.3. Tanım Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve	
Yorumlar	195
4.3.4. Özellik Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve	
Yorumlar	197
4.3.5. Kavramsal Bilgileri Seçip Kullanma Bileşeninin Tamamlanma	
Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar	201
4.3.6. Önceki Bilgileri Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin	
Bulgu ve Yorumlar	208
4.3.7. İşlem Yapma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve	
Yorumlar	212
4.3.8. İspatı Tamamlama Temel Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin	
Bulgu ve Yorumlar	215

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER.....	219
5.1. Matematiksel İspat Sürecini Oluşturan Temel Bileşenlerin Belirlenmesine	
Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler	219

5.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Anahtar Fikirleri	
Kullanabilme Durumlarına İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler	221
5.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Temel Bileşenleri Tamamlama	
Durumuna İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler	225
KAYNAKÇA	231
EKLER.....	240
EK 1. GÖNÜLLÜLÜK SÖZLEŞMELERİ.....	240
EK 2. TEMEL BİLEŞENLERİNE AYRILARAK UZMAN	
İNCELEMESİNE SUNULAN İSPAT ÖRNEKLERİ	245
EK 3. TEMEL BİLEŞENLERİ EKSİK BIRAKILMIŞ İSPAT	
TAMAMLAMA FORMU	252
EK 4. EKSİK BIRAKILAN TEMEL BİLEŞENLERİ TAMAMLANMIŞ	
İSPAT FORMU	257
ÖZGEÇMİŞ.....	262

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Matematiksel ispat yöntemleri.....	13
Şekil 2.2. Balacheff'in ispat sınıflandırması	18
Şekil 3.1. Sessiz düşünme ile düşüncelerin sözlü anlatımının iki farklı modu arasındaki ilişki.....	22
Şekil 3.2. Öğretmen adaylarının ispat yapmada zorlanma nedenleri.....	35
Şekil 4.1. Taslak temel bileşen formu	57
Şekil 4.2. İspata yönelik temel bileşen formu	58
Şekil 4.3. Teorem.1'in ispatına yönelik Gül'ün çözümü.....	61
Şekil 4.4. Teorem.2'nin ispatına yönelik Gül'ün çözümü	66
Şekil 4.5. Teorem.3'ün ispatına yönelik Gül'ün çözümü	70
Şekil 4.6. Teorem.4'ün ispatına yönelik Gül'ün çözümü	73
Şekil 4.7. Teorem.5'in ispatına yönelik Gül'ün çözümü	75
Şekil 4.8. Teorem.6'nın ispatına yönelik Gül'ün çözümü	77
Şekil 4.9. Teorem.7'nin ispatına yönelik Gül'ün çözümü	79
Şekil 4.10. Teorem.1'in ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü	82
Şekil 4.11. Teorem.2'nin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü.....	86
Şekil 4.12. Teorem.3'ün ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü.....	90
Şekil 4.13. Teorem.4'ün ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü.....	95
Şekil 4.14. Teorem.5'in ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü.....	99
Şekil 4.15. Teorem.6'nın ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü.....	102
Şekil 4.16. Teorem.7'nin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü.....	105
Şekil 4.17. Teorem.1'in ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü	111
Şekil 4.18. Teorem.2'nin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü.....	119
Şekil 4.19. Teorem.3'ün ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü	124
Şekil 4.20. Teorem.4'ün ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü	128
Şekil 4.21. Teorem.5'in ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü.....	131
Şekil 4.22. Teorem.6'nın ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü.....	135
Şekil 4.23. Teorem.7'nin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü.....	139
Şekil 4.24. Teorem.1'in ispatına yönelik Umut'un çözümü.....	142
Şekil 4.25. Teorem.2'nin ispatına yönelik Umut'un çözümü	147
Şekil 4.26. Teorem.3'ün ispatına yönelik Umut'un çözümü	152

Şekil 4.27. Teorem.4'ün ispatına yönelik Umut'un çözümü	155
Şekil 4.28. Teorem.5'in ispatına yönelik Umut'un çözümü	158
Şekil 4.29. Teorem.6'nın ispatına yönelik Umut'un çözümü	161
Şekil 4.30. Teorem.7'nin ispatına yönelik Umut'un çözümü	164
Şekil 4.31. Teorem.1'in ispatına yönelik Hasan'ın çözümü.....	168
Şekil 4.32. Teorem.2'nin ispatına yönelik Hasan'ın çözümü	173
Şekil 4.33. Teorem.3'ün ispatına yönelik Hasan'ın çözümü	177
Şekil 4.34. Teorem.4'ün ispatına yönelik Hasan'ın çözümü	180
Şekil 4.35. Teorem.5'in ispatına yönelik Hasan'ın çözümü	183
Şekil 4.36. Teorem.6'nın ispatına yönelik Hasan'ın çözümü	186
Şekil 4.37. Teorem.7'nin ispatına yönelik Hasan'ın çözümü	189

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 3.1.	Katılımcıların Belirgin Bireysel Özellikleri	39
Tablo 3.2.	Sesli Düşünme Yöntemiyle Desteklenmiş Yarı Yapılandırılmış Mülakatların Süre ve Tarih/Saat Bilgisi	42
Tablo 3.3.	Teoremler ve Eksik Bırakılan Temel Bileşenler	45
Tablo 3.4.	Araştırmanın İnanırlılığı, Aktarılabirliği, Tutarlılığı ve Teyit Edilebilirliği	51
Tablo 3.5.	Örnek Protokol Analizi	54
Tablo 4.1.	Gül'ün 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	62
Tablo 4.2.	Gül'ün 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	67
Tablo 4.3.	Gül'ün 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	71
Tablo 4.4.	Gül'ün 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	73
Tablo 4.5.	Gül'ün 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	76
Tablo 4.6.	Gül'ün 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	78
Tablo 4.7.	Gül'ün 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	80
Tablo 4.8.	Ezgi'nin 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	83
Tablo 4.9.	Ezgi'nin 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	87
Tablo 4.10.	Ezgi'nin 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	91
Tablo 4.11.	Ezgi'nin 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	96
Tablo 4.12.	Ezgi'nin 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması	100

Tablo 4.13. Ezgi'nin 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	103
Tablo 4.14. Ezgi'nin 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	106
Tablo 4.15. Ceyda'nın 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	112
Tablo 4.16. Ceyda'nın 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	120
Tablo 4.17. Ceyda'nın 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	125
Tablo 4.18. Ceyda'nın 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	129
Tablo 4.19. Ceyda'nın 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	132
Tablo 4.20. Ceyda'nın 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	136
Tablo 4.21. Ceyda'nın 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	140
Tablo 4.22. Umut'un 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	143
Tablo 4.23. Umut'un 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	148
Tablo 4.24. Umut'un 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	153
Tablo 4.25. Umut'un 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	156
Tablo 4.26. Umut'un 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	159
Tablo 4.27. Umut'un 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	162
Tablo 4.28. Umut'un 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	165

Tablo 4.29. Hasan'ın 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	169
Tablo 4.30. Hasan'ın 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	174
Tablo 4.31. Hasan'ın 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	177
Tablo 4.32. Hasan'ın 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	181
Tablo 4.33. Hasan'ın 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	184
Tablo 4.34. Hasan'ın 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	186
Tablo 4.35. Hasan'ın 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması.....	189
Tablo 4.36. Teorem.1'de İşlem Yapabilme Bileşeninin Tanım ve Özellik Kullanma Durumuna Göre İncelenmesi	213
Tablo 4.37. Teorem.5'te İşlem Yapabilme Bileşeninin Tanım ve Özellik Kullanma Durumuna Göre İncelenmesi	214

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Matematik; sayılar, cebir ve geometrinin dayandığı kuralları anlamak, bu sistemlerde yeni ve rutin olmayan yollar bulmak ve karşılaşılabilecek ilginç durumları açıklamak şeklinde ifade edilebilir (Goldberg, 2002). Matematik, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Matematiği daha ilginç hale getirmek üzere yeni sistemler oluşturulabilir ve bu sistemlerde çalışabilmek için kurallar bile değiştirilebilir. Anlayan ve keşifler yapan ve yalnız bir fonksiyonun diferensiyelini alabilenlerin göremeyebileceği yeni bir düşünce dünyası vardır ve bu dünyaya girebilmek için soyutlama ve matematiksel ispat fikirlerini kullanmak gereklidir (Goldberg, 2002). Matematiğin; bir özelliği ya da nesneler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma çabası ve ortaya konan ilişkiyi ispatlama süreci olmak üzere iki aşamalı yöntemi vardır. Bir ilişkiyi bulma ya da sezinleme daha çok yaratıcı imge, sezgi ve deneyim gerektiren psikolojik bir olay iken; ispatlama, kural ve ölçütleri belli, ‘mantıksal akıl yürütme’ diyebileceğimiz bir akıl yürütmedir. Dolayısıyla matematik; sayı, nokta, küme fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak ispatlama sürecidir (Yıldırım, 2015).

Matematikçiler kuşkucu insanlardır ve matematik sorularına yanıtlar bulmak için örneklendirme, deneme-yanılma ve tahmin gibi birçok yöntem kullanırlar; ancak ispatlanmadığı sürece bir cevabın doğru olduğuna inanmazlar (Velleman, 1994/2008). Bir kimyacı, simyacıların çocukça çabalarına gülüp geçerken bir matematikçi Antik Yunan Geometrisini ve Hint Aritmetiğini en az günümüzdeki araştırmalar kadar yararlı ve takdire şayan bulur (Cajori, 1893). Bir matematikçi, herhangi bir problem durumuyla karşı karşıya kaldığında özel durumları inceledikten sonra genellemelere varır, varsayımlar yaparak bu varsayımları ispatlama yoluna gider (Arslan ve Yıldız, 2010); matematiğin diğer bilimlerden daha “gerçek” bir bilim olduğu ve matematikte ispatlanmış şeylerin hiçbir zaman boşa gitmediği gerçeği ile gurur duyar (Cajori, 1893).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) raporuna göre; matematiksel muhakeme ve ispat bir olayı geniş bir yelpazede ifade etme ve geliştirmede güçlü beceri sağlar. Model, yapı ve düzenlilikler gerçek dünyada ve matematiksel durumlarda matematiksel muhakeme ve analitik düşünceye sahip bireyler için üzerinde düşünmeye değerdirler ve bu düzenin rastgele mi yoksa bir nedenden mi oluştuğunu matematiksel varsayımlar yaparak araştırırlar. Bu şekilde matematiksel argümanları ve ispatları geliştirir ve değerlendirirler. Dolayısıyla hangi sınıf seviyesinde olursa olsun bütün öğrenciler; olayları keşfederek, sonuçları doğrulayarak ve bütün alanlarda matematiksel varsayımları kullanarak matematiğin anlam kazandığını görmelidirler.

İlkokuldan üniversitenin ilk yıllarına kadar bir denklemin çözümü, bir fonksiyonun minimum değerini bulmayı veya ne kadar buğday yetiştirmemiz gerektiğini öğretiriz. Bunlar tabi ki matematik ile yapabilecek şeylerdir fakat matematik bunlardan ibaret değildir (Goldberg, 2002). Bu bağlamda; matematiksel bilginin doğal ve tarihsel oluşumu dikkate alınarak tasarlanmış bir müfredat; öğrencilerin ispat ile ilgili olumlu tutumu geliştirmelerine imkân sağlamaktadır (Almeida, 2003).

Matematik öğretiminin en önemli hedeflerinden birisi neden, niçin sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmenin, diğer bir deyişle muhakemenin gelişimini sağlamaktır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Ortaöğretim programında matematik öğrenme aktif bir süreç olarak ele alınmış ve öğrencilere araştırma yapma, matematiksel ilişkileri keşfetme ve ispatlama, modelleme ve problem çözme, çözüm ve yaklaşımları sınıf ortamında paylaşma ve tartışma olanaklarının sunulması gerektiği belirtilmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013).

İleride matematik öğretmeni olacak matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik algı ve deneyimleri sonraki süreçte öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinde de etkili olacaktır. Matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimleri göz önüne alındığında, üst düzeyde ispat yapma becerilerinin olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla öğretmen adayları lisans öğrenim hayatları süresince verilen alan dersleri sayesinde matematiksel ispat yapma konusunda donanımlı olarak yetiştirilmek istenmektedir. Özellikle birinci sınıfta yer alan Soyut Matematik I, II ve Analiz I, II derslerinde öğretmen adayları ispat yapabilme, ispatı anlayabilme ve ispat yöntemleri

hakkında belirli bir bilgi düzeyine getirilmeye çalışılmaktadır (Güler, 2013; Moralı vd., 2006).

1.1. Problem Durumu

Araştırmacılar; matematik öğretmeni adaylarının matematiksel bir ispatla ilk kez karşı karşıya geldiklerinde; ispata nasıl ve nereden başlayacaklarını bilememe, ispatın mantığını anlayamama ve ne tür bir yöntem ve kavramsal bilgi kullanacaklarına karar verememe ve ispatı sonlandıramama gibi sorunlarla karşılaştıklarını belirtmişlerdir (Güler, 2013; Moore, 1990; Moore, 1994; Polat ve Akgün, 2016; Weber, 2001). İspat sürecinde üniversite düzeyindeki öğrencilerin yaşadığı sorunları; anlama, takdir etme ve ispatı oluşturmada zorluklar, akıl yürütme adımlarını takip edememe, yarı formal düzeyde olup formelleştirme yapamama, en basit ispatların bile öğrenci için zorluk oluşturma şeklinde sıralamak mümkün olacaktır. Öğrencilere bir ispat formal olarak verildikten sonra ispata yönelik verilen bir probleme öğrencilerin büyük bir kısmı az önce ispatladıklarına tamamen aykırı sonuçlar bulabilmektedirler (Moralı vd., 2006).

İspat kavramı, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişiminde ve matematiksel bilgilerinin oluşumunda önemli bir role sahiptir (Dede ve Karakuş, 2014). Ancak öğrenciler bir ispat oluşturmada ne yapacaklarını bilmedikleri için çıkmaza girerler ve çoğunlukla başarısız olurlar. Bu başarısızlığın nedenlerini anlayabilmek için öğrencilerin ispatları oluşturma süreçlerini incelemek gerekir (Weber, 2001). Hiyerarşik bir yapıya sahip olması ve bazen ispat içerisinde ispatlar bulunması özelliğinden dolayı öğrenciler ispattan pek hoşlanmazlar. Öğrencilerin bu hiyerarşik yapıyı kullanmaksızın ispat yapma girişimleri başarısız olacaktır. Öğrencilere ispatların yazıldıkları şekliyle tasarlanmış olmadıklarını anlatmak gerekir. Öğrenciler deneme niteliğindeki bir ispatın parçalarını sırasız bir şekilde yazma konusunda cesaretlendirilmelidirler (Selden A. ve Selden J., 2007). Anahtar fikir ispatın önemli bir parçasıdır, iddianın doğruluğunu sezgisel olarak ifade eder ve ispata yön verir (Raman, 2002). Karmaşık bir ispat anahtar fikirler yardımıyla parçalara ayrılarak hiyerarşik bir düzen içinde tamamlanabilir.

Bu bağlamda görevi; öğrencilerine matematiksel düşünme becerisi ve muhakeme yetisi kazandırmak olan matematik öğretmeni adaylarının matematiksel

ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerinin incelenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla bu araştırma sonucunda öğretmen adaylarının bir ispatı tamamlama yolunda karşılaştıkları güçlüklerin kaynağı daha net ortaya çıkacak ve ispat yapma ile ilgili güçlüklerinin giderilmesi yönünde fayda sağlanabilecektir.

1.2. Problem Cümlesi

Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri nasıldır?

Çalışma sürecinde araştırma probleminin çözümü için aşağıda belirlenen alt problemlere de yanıt aranmıştır.

1.3. Alt Problemler

1. Matematiksel ispat sürecini oluşturan temel bileşenler nelerdir?
2. Matematik öğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken anahtar fikirleri kullanabilme durumları nedir?
3. Matematik öğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken temel bileşenleri tamamlama durumları nasıldır?

1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmanın amacı; cebir alanında matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yaparken önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerini incelemektir. Bu araştırma ile öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma süreçlerinin temel bileşenler yardımıyla aşamalandırılması ayrıca temel bileşenler ve anahtar fikirler yardımıyla ispat yaparken karşılaştıkları problemlerin ve matematiksel ispat hakkında belirli bir düzeye getirilmelerine yardımcı olacak bilgilerin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

Matematik eğitimindeki önemli ancak en çok sorun yaratan öğrenme alanlarından biri cebirdir (Akkuş İspir ve Palabıyık, 2011). Birçok yetişkin cebirin ortaokul veya lise öğrencilerine daha uygun bir matematik alanı olduğunu düşünse de, küçük çocuklar bile sayılar ve işlemlerle çalışarak, örüntüleri ve sayı kümeleri

arasındaki bağıntıları inceleyerek cebirsel akıl yürütmeyi kullanmaya teşvik edilebilirler (NCTM, 2000).

İlköğretim programında 7. sınıf cebir öğrenme alanında Pisagor teoreminin ispatı verilerek hacim bağlantılarının gösterilmesinde matematiksel ispattan faydalanılmış; 8. Sınıf ölçme öğrenme alanında ise Pisagor bağıntısının farklı ispatları ile ilgili araştırmalara yer verilmiştir (MEB, 2009). Ortaöğretim programında ise 9. Sınıf mantık öğrenme alanı, ispat yöntemleri alt öğrenme alanında; öğrencilerin tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklayarak bir teoremin hipotezini ve hükmünü ifade edebilecek, matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimini etkin olarak kullanabilecek ayrıca ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapabilecek düzeye gelebilmeleri amaçlanmıştır. Öğrencilerden; 10. Sınıfta trigonometrik dönüşüm ve ters dönüşüm formüllerini ispatlayabilmeleri beklenmektedir. 11. Sınıfta ise logaritmik fonksiyonların bazı özelliklerinin ispatları ders içerisinde yapılandırılır (MEB, 2011). Ayrıca mantık öğrenme alanının programa konulma amacı da öğrencilerin matematiksel ispat yöntemleri, niceleyiciler, koşullu, birleşik, açık önermeler ve bağlaçlar konularında bilgi sahibi olmasını sağlamaktır. Böylece programın öğrenciye kazandırmayı hedeflediği matematiksel düşünebilme ve matematiksel ispat yapabilme yeteneğinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır (Güzel, Karataş ve Çetinkaya; 2010).

Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklaması, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtmesi ve ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapması beklenen (MEB, 2013) öğrencileri yetiştirecek matematik öğretmenlerinin de derslerini etkili bir şekilde yapılandırabilmeleri için, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtebilmeleri ve ispat yöntemlerini kullanarak matematiksel ispatlar yapabilmeleri beklenmektedir.

İspat ve ispat yapma, matematikçiler ve matematik öğretmenleri tarafından önemli bir matematiksel etkinlik olarak görülür. Bu nedenle her üniversite matematik öğrencisi matematiksel ispatları anlamalı ve yapabilmelidir (Baştürk, 2010). Yapılan çalışmalar; ileride matematik öğretmeni olacak öğretmen adaylarının; ispat yapmanın, matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri ve üzerine düşünmediklerini göstermektedir. Öğretmen adaylarının aldıkları eğitim boyunca

yüzlerce teorem ve bunların ispatlarını öğrendikleri göz önüne alınırsa, öğrenilen bilgilerin belki de ezbere dayalı edinildiği düşünülebilir (Moralı vd., 2006). Bunun için de matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapma yönüyle donanımlı yetiştirilmeleri gerekmektedir (Güler ve Dikici, 2012).

Matematiksel ispat ile ilgili araştırmalar; matematiksel ispat yapma sürecini inceleyen (Güler, 2013; İpek, 2010; Polat ve Akgün, 2016; Şahin, 2016), öğretmen ve öğretmen adaylarının görüşlerini ortaya koyan (Doruk ve Güler, 2014; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler ve Dikici, 2011; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Kayagil, 2012; Moralı vd., 2006; Turğut, Yenilmez ve Uygan, 2013; Özdemir ve Kaplan, 2013; Varghese, 2007; Varghese, 2009) ve öğrencilerin ispat yapmada yaşadıkları güçlükleri belirlemeye çalışan (Moore, 1990; Polat ve Akgün, 2016; Selden A. ve Selden J., 2007; Weber, 2001) araştırmalardır. Alanyazında soyut cebiri öğrenme üzerine yapılan çalışmalar; öğretim yöntemleri, öğrenme, anlama ve kavram gelişimi üzerine olmakla birlikte (Hazzan, 1999), cebir alanındaki teoremleri ispatlama süreçlerinde yaşanan güçlükleri inceleyen sınırlı sayıda çalışma (Güler, 2013; Weber, 2001) bulunmaktadır. Ancak cebir alanında ispat yapma sürecini aşama aşama ele alarak derinlemesine inceleyen bir çalışmaya rastlanamamıştır.

Bu araştırmanın; matematik öğretmeni adaylarının cebir konularındaki ispat yapma süreçlerini temel bileşenler ve dolayısıyla anahtar fikirler yardımıyla aşama aşama ve derinlik odaklı incelemesi nedeniyle alanyazındaki boşluğu dolduracağı ve sonraki çalışmalara katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

1.5. Varsayımlar

1. Öğretmen adaylarının araştırma sürecinde objektif ve samimi oldukları varsayılmıştır.
2. Araştırma boyunca araştırmacı ve öğretmen adayları arasındaki iletişimin önyargısız ve olumlu seyrettiği varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

1. Araştırma bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde öğrenim gören 5 Ortaöğretim Matematik öğretmeni adayı ile cebir alanında yapılmıştır.
2. Bu araştırmanın uygulama süresi 2014-2015 eğitim öğretim yılı ile sınırlıdır.
3. Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelendiği bu araştırma, uygulamalarda sunulan teoremlerin ispatları (doğrudan ispat yöntemi ile yapılan ispatlar) ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Önerme: Doğru ve yanlıştan biri ile nitelendirilebilen bir iddiadır.

Aksiyom: İspatlanmasına gerek duyulmadan doğruluğu apaçık kabul edilen önermelerdir.

Teorem: Aksiyom olmayan ve ispatı yapılabilen matematiksel ifadelerdir.

Hipotez: İspatı bir nedene bağlamak üzere oluşturulan varsayımdır.

Hüküm: Hipotezden yola çıkarak varılan yargıdır.

İspat: Bir ifadenin doğru veya yanlış olduğunu ikna edici bir dille ortaya koyan argümandır.

Matematiksel İspat: Bir matematiksel ifadenin doğruluğunu, önermeler yardımıyla ve birtakım mantıksal adımları takip ederek göstermektir.

Anahtar Fikir: Bu çalışmada anahtar fikir; ‘ispatın hiyerarşik yapısını oluşturan ve tamamlanmasına ilişkin bir his veren parçası’ olarak kullanılmıştır.

Sesli Düşünme: Bu çalışmada sesli düşünme, öğrencilerin ispat yapma esnasındaki zihinsel süreçlerini sözlü olarak ifade etme eylemi olarak ele alınmıştır.

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde; araştırmanın kuramsal çerçevesine ve matematiksel ispat üzerine yapılmış araştırmalara yer verilmiştir.

2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Bu araştırmanın kuramsal çerçevesi yorumlamacı paradigma temelli oluşturulmuştur. Temelleri Alman filozofu Immanuel Kant'ın çalışmalarına dayanan yorumlamacı paradigma; insan düşüncelerini, davranışlarını ve ilişkilerini belirli bir bağlamda ya da daha geniş bir kültür içinde anlamayı amaçlamaktadır. Yorumlamacıya yakın olan ontolojik inanç, gerçeğin sosyal ortamda olduğu, karmaşık olduğu ve sürekli değiştiği bir dünya görüşünü savunur. Dolayısıyla insanların bazı nesneleri, olayları, davranışları, algıları vb. nasıl yorumladıkları ve anlamlandırdıklarını bilmek önemlidir. Yapılandırılmış gerçeklerin yalnızca bireylerin aklında değil, bireysel algıların dil ve daha geniş bir toplumun düşünceleri ile karşılıklı alışveriş içinde olduğu sosyal yapıların içinde de var olduğu kabul edilir. Bu nedenle aynı sosyal grubun birden fazla üyesinin bazı olgular hakkındaki algılarına ulaşarak, o grup içindeki düşüncenin ve davranışın kültürel örüntüsü hakkında fikir sahibi olunabilir (Glesne, 2011/2012). Araştırmaya katılan 5 matematik öğretmeni adayının ispat yapabilme süreçleri incelenerek genel olarak matematik öğretmeni adaylarının ispat yapabilme süreçleri hakkında fikir sahibi olunabileceği düşünülmüştür. Tüm bunlar göz önüne alındığında bu araştırmada; soyut cebir ve sayılar teorisi ile lineer cebir derslerini almış, belli bir cebir altyapısına sahip matematik öğretmeni adaylarının ispat yapabilme süreçleri ve verilen bir teoremin ispatını anahtar fikirlerden yola çıkarak nasıl anlamlandırdıkları ve yorumladıkları belirlenmeye çalışılmıştır.

2.1.1. Matematiksel İspatın Tarihçesi

İspat, uzun bir tarihsel ve eğitimsel gelişimin ürünüdür. Tıpkı insanlığın böylesine yüksek bir seviyeye ulaşması uzun zaman aldığı gibi matematik dünyasına giren her bireyin bir büyüme süreci geçirmesi gerekir. Böyle bir süreç temellerle başlamalıdır ve ispatların üzerine bina edildiği temel soru "neden?" sorusudur ki bu doğal olarak yalnız matematiğe özgü değildir; bütün fikirlerin başlangıç noktasını oluşturur (Hanna ve Jahnke, 1976). Tarihte kaydedilen ilk matematiksel ispat Babilliler'e aittir. Babillilerin (Çinlilerle birlikte) Pisagor'dan daha önce Pisagor teoreminin farkında oldukları görülmektedir. Babililere ait Pisagor teoreminin doğru olduğunu gösteren belirli diyagramlar ve tabletlere ulaşılmıştır. Ancak Pisagor'un matematiğin yapısına, kesinliğin önemine ve formal ispatın doğasına ilişkin sahip olduğu anlayışa erişemedikleri belirtilmektedir (Krantz, 2011). Antik Yunan öncesi matematik; pratik yaşam ihtiyaçlarına dönük, deneme yanılma yöntemine bağlı, empirik bilgi düzeyinde bir uğraştı. Mantıksal ispata ancak Antik Yunan döneminde erişilebilmiştir (Yıldırım, 2015). Erken çağlardaki uygulamalı ve deneysel matematiksel bilginin Antik Yunan'daki sistematik tümdengelimli matematiğe dönüşmesiyle ispat, modern matematikte merkezi bir konum elde etmiştir (Lee, 2002).

Bir tür gözlem olan ölçmeye başvurarak değil de mantıksal çıkarım yöntemiyle ortaya konan ispat yöntemini ilk deneyen düşünür Thales'tir. Thales'ten sonra gelen Pythagoras ve Eudoxus ise ispat yöntemine sistematik bir kimlik kazandırmışlardır. Pythagoras kendi adıyla ünlü teoremi ortaya koyarak, ispat yöntemine kazandırdığı güç ve saygınlık yanında büyük açıklık getirmiştir. Matematiğin ilk büyük bunalımı diyebileceğimiz $\sqrt{2}$ sayısının bulunuşunu mistik öğretilerine ters düştüğü için gizli tutmaya çalışan Pythagorasçıların bu durumuna Eudoxus $\sqrt{2}$ nin bir rasyonel sayı olamayacağına ilişkin yaptığı ispatla son vermiştir (Yıldırım, 2015).

17. ve 18. Yüzyıllarda analiz ve cebirde teoremlerin bir kural olarak ifade edilmemesi gereği ve "istisnai durumlar"ının olabileceği kabul edilmiştir. Bununla birlikte geometri küçük farklılıklarla Antik Yunanlılardan kalmış ve kesin ispat kavramı "bütün doğrulamalar doğruluğu kabul edilen az sayıdaki aksiyomlara indirgenebilir" şeklinde ifade edilmiştir. Bu durum, Öklidci temsil tarzının analiz ve cebirde de geçerli olduğu 19. yüzyıla kadar önemli ölçüde değişmemiştir (Hanna ve Jahnke, 1993). 18.

Yüzyıl ile 19. yüzyılın başlarında, Avrupa matematiği buluşsal ispata dayalı bir geleneği izlemiştir ve ancak 19. yüzyılda Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange ve Weierstrass gibi eleştirel düşünmenin önde gelen matematikçileri tarafından bugünkü anlamda tündengelimsel ispatın temelleri atılmıştır (Kline, 1980 den akt. Almeida, 2003). Antik Yunan'dan günümüze kadar gelen ispata yönelik tartışma biçimi; felsefe, politika ve ahlak konularında olduğu gibi matematikte de kendini gösterir üstelik matematiksel ispat diğer alanlarda asla erişilemeyen mantıksal kesinliğe sahiptir (Yıldırım, 2015). Matematik felsefesinin; matematiksel mantık ve matematiğin temellerine yönelmesi ve İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra ortaya çıkan kuralcı tutum; günümüzde uygulamalı matematik çalışmalarının ilgi odağı olmasının yolunu açmıştır. Bu durum; araştırmacıların karşılıklı etkileşim ortamında ispatlar ve aksini ispatlamalar ile örnekler ve karşı örnekler arasında ispatların mantıksal yönlerini daha net görmelerine yol açmıştır (Hanna ve Jahnke, 1993).

2.1.2. Matematiksel İspatın Anlamları ve Önemi

Hersch'e (1993) göre ispatlamak kelimesi test etmek, denemek, olayların gerçek durumunu belirlemek anlamlarına gelen ve inceleme (probe), test etme (probation), ihtimal (probable), doğruluk (probitiy) ile aynı köke sahip Latince "probare" kelimesinden türemiştir. Matematikte ispat; biri yaygın kullanımda diğeri matematiksel mantık ve matematik felsefesinde özelleşmiş olmak üzere iki anlama sahiptir. İspat kavramı yaygın kullanımda; uzmanları ikna eden bir argümanken matematiksel mantıkta; analiz kurallarına göre uygun olarak ifade edilmiş olan düzgün cümlelerin bir sıralamasıdır. Bir ifade matematiksel olarak doğrulandığında, yeryüzünde başka bir bilim adamının bu ifadenin yanlış olduğunu ispatlama şansı yoktur (Derek, 2011). Bir matematikçi bir varsayımın doğruluğundan ziyade bunun nedenlerini bilmek ister (Hersh, 1993) ve herhangi bir şekilde algıladığı bir ilişkiyi ilginç bulursa, onu açıklamayı değil, mantıksal kesinliğe kavuşturmayı amaçlar. Diğer bir deyişle, ispatın amacı teoremdir, ispatın öncüllerini oluşturan aksiyom ya da postulatların doğrulanması değildir (Yıldırım, 2015). Aksiyomlar, ispatlanmasına gerek duyulmadan doğruluğu açık kabul edilen önermeler; postulatlar ise aksiyomlardan farklı olarak doğruluğu kesin olmayan ancak doğru olarak kabul edilen önermelerdir.

İspatlar yapbozlara çok benzerdir. Yapbozların nasıl halledilmesi gerektiği üzerine bir kural yoktur. Ancak tüm parçalar birbirine geçmeli ve sonuçta ortaya çıkan şekil doğru olmalıdır. Aynısı ispatlar için de geçerlidir. Yapbozların nasıl halledilmesi gerektiği üzerine hiçbir kural olmamakla beraber, bazı yöntemler çözüme ulaşmak için daha elverişlidir. Örneğin; bir yapbozu rastgele parçaları boşluklara yerleştirerek değil belirli bir yol izleyerek çözebilirsiniz. Bazen parçaları yanlış yerlere yerleştirmeye çalışır, uymadıklarının farkına varır ve hiçbir ilerleme kaydetmediğinizi düşünürsünüz. Sonra birden iki parçanın nasıl birleştiğini görürsünüz. Yapbozun parçaları doğru yerlerini buldukça şekil ortaya çıkmaya başlar. Birleştirdiğiniz mavi parçanın bir göl veya bir gökyüzü parçası olduğunun farkına varırsınız ve ancak yapboz tamamlandığında tam şekli görebilirsiniz. Benzer şeyler, bir ispatın oluşturulması süreci için de söylenebilir. Bir yapbozu tamamladığımızda hemen bozmaz ve hayranlıkla seyrederez. Aynı şeyi parçaların nasıl birleştiğini anladıktan ve her şeyin tamamlanmasından sonra bir ispat için de yapmalıyız (Velleman, 1994/2008).

Matematiksel ispat, matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunun mantıksal bir açıklamasıdır (Altıparmak ve Öziş, 2005) ve en iyi ispat; yalnızca doğruluğu değil aynı zamanda neden doğru olduğu da gösterilerek teoremin ispatlanma gerekçelerini anlamamıza yardım edendir (Hanna, 2000).

Matematiksel ispat; matematiksel bir ifadeyi destekleyen bir veya birkaç örnekten çok daha fazlasıdır (Derek, 2011). Bir matematiksel ispat, bir ifadenin doğruluğunun, önceden bilinen bir veya daha fazla önermeyle ilişkilendirilip mantıksal bir takım çıkarımlar yardımıyla gösterilmesidir (Dede ve Karakuş, 2014) ve önceki söylenenlerle irtibatlı olmak ve çelişkili olmamak üzere bir sonucu doğrulamak, bir sonucu keşfetmek ve sonuçları tümdengelsel sisteme uyumlu kılmak için kullanılır (Almeida, 2003).

Matematiksel ispat matematiğin merkezinde yer alır ve bir doğrulama yöntemi olarak kullandığı sistematiğin dolaylı bu disiplin diğer çalışma alanları arasında özgün bir yere sahiptir ayrıca pek çok öğrenci için zorlukların merkezinde olması sebebiyle matematik eğitiminde ayrıcalıklı bir konu olarak görülür (Arsac, 2007). İspat matematikte merkezi bir kavramdır. Bu; iki sebepten önemlidir: Birincisi, ispat kesin hipotezlere dayanır ve belirli sonuçlar birbirini takip eder. İkincisi, bu şekilde elde

edilen mantıksal sonuçlar matematiksel teorilerin kurulmasında kullanılabilirler (Tall, 1995).

Goldberg'e (2002) göre matematikte ispatın önemi şu şekilde özetlenebilir:

*Bir varsayımın doğru olduğundan emin olmanın tek yolu, geçerli bir matematiksel ispatının gösterilmesidir.

*İspatlar, kavramayı yani derinlemesine anlamayı sağlar. Geçerli bir ispat yapabilmek problemin doğru anlaşıldığını gösterir. Ancak daha da önemlisi bir varsayımın ispatlanması bazen problemdeki teoremin daha derinlemesine anlaşılmasını gerektirir. İspat yapmaya çalışan bir matematikçi, sonuç başarısızlıkla bitse dahi çok fazla bilgi ve anlayış kazanabilir.

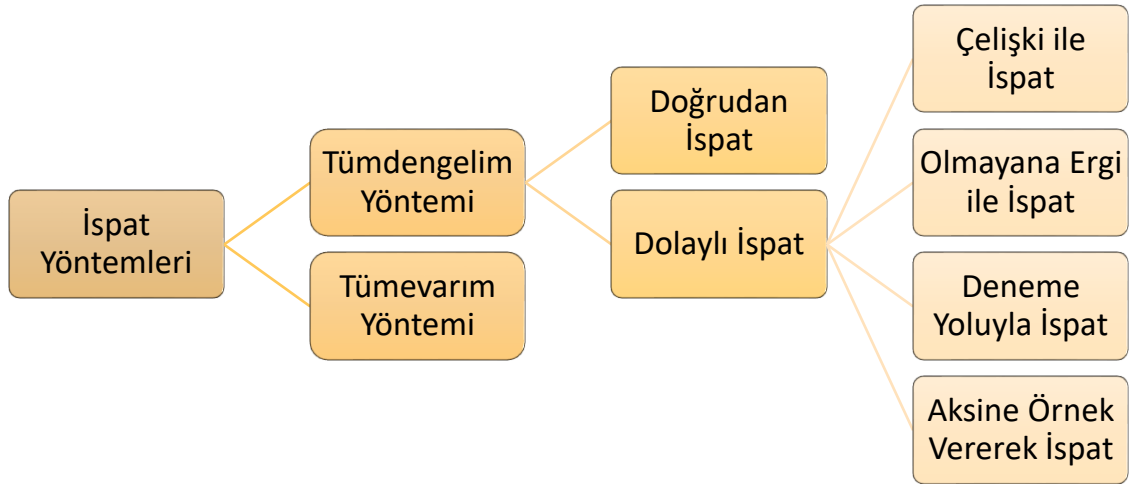
2.1.3. Matematiksel İspat Yöntemleri

Teoremlerin ispatı için genel olarak iki ispat yöntemi kullanılmaktadır. Bunlar tümevarım metodu ve tümdengelim metodudur. Tümdengelim metodu kullanılarak teoremler ya doğrudan ya da dolaylı olarak ispatlanır (Akkaş, Hacısalıhoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1988).

Matematiksel ispat yöntemleri;

- ✓ Doğruluk tablosu ile ispat yöntemi
- ✓ Doğrudan ispat yöntemi
- ✓ Dolaylı ispat yöntemi
- ✓ Olmayana ergi yöntemi
- ✓ Tümevarım yöntemi

olmak üzere temelde beş tane olmasına rağmen başka yöntemler de birer ispat yöntemi olarak kullanılabilmektedir (Akkaş vd., 1988; Irmak, 2008; Çevik, 2010). Bu bilgiler ışığında ispat yöntemlerini aşağıdaki gibi sınıflandırmak mümkündür:



Şekil 2.1. Matematiksel ispat yöntemleri

Tümevarım Yöntemi ile İspat: $N \subseteq \mathbb{N}_m$ (ya da $N \subseteq \mathbb{Z}_m$) kümesi üzerinde tanımlanmış bir $p(n)$ açık önermesi için;

- i. $n = m$ için $p(m) \equiv 1$
- ii. $n = k$ için $p(k) \equiv 1$

iken $p(k + 1) \equiv 1$ oluyorsa her $n \in \mathbb{N}_m$ için $p(n) \equiv 1$ dir (Irmak, 2008).

Örneğin; “Her $n \geq 1$ için $p(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ ” önermesini ispatlayalım.

i. $n = 1$ için $1 = \frac{1.(1+1)}{2}$ dir.

ii. $n = k$ için $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ olduğunu göstermeliyiz. $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1)$ ifadesinde;

$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k.(k+1)}{2}$ eşitliği yerine yazılırsa;

$$\frac{k.(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$\frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{olduğundan} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

olur. Dolayısıyla; $p(n) \equiv 1$ dir. Yani; $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir.

Doğrudan İspat: $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade edilen bir teoremin ispatında p önermesinin doğruluğundan hareketle ve doğruluğu önceden bilinen veya daha önce doğruluğu gösterilen önermeler yardımıyla sonucun doğruluğunu göstermek doğrudan ispat yöntemidir (Akkaş vd., 1988; Çevik, 2010).

Örneğin; m ve n çift tamsayılar olsun. O zaman $m + n$ bir çift tamsayıdır. Önermesini ispatlayalım.

m ve n keyfi olarak seçilmiş çift tamsayılar olsun. $m = 2a$ ve $n = 2b$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. O halde $m + n = 2a + 2b = 2(a + b)$ elde edilir. Burada $a + b$ bir tamsayı olduğundan $2(a + b)$ bir çift tamsayıdır.

Yani $p(m)$: m bir çift sayı ve $p(n)$: n bir çift tamsayı olsun. O halde

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $[p(m) \wedge p(n)] \Rightarrow p(m + n)$ olur.

Doğruluk Tablosu ile İspat: İleri sürülen bir bileşik önermeye ait hipotez ile hüküm arasındaki gerektirmenin bir totoloji yahut çelişki olduğunu göstermek için bildiğimiz doğruluk tablosunun kullanılmasıdır (Irmak, 2008).

Çelişki ile İspat: Teoremin kendisi yerine hipotezini ve hükmünün değilini doğru varsayıp bunun bir çelişki olduğunun gösterildiği ispat yöntemidir. Yani bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ yu ispatlamak için $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q')'$ denkliğinden yararlanılır ve $(p \wedge q') \equiv 0$ olduğu gösterilir (Irmak, 2008).

Örneğin, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x + 3 = 5$ ise $x + 1 \neq 3$ önermesini ispatlayalım.

$x \in R$ olsun. p : $2x + 3 = 5$ ve q : $x + 1 \neq 3$ önermelerinden; $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q')'$ iken $(p \wedge q') \equiv 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$p \wedge q' \equiv [(2x + 3 = 5) \wedge (x + 1 = 3)]$ önermesinin bir çelişki olduğunu göstermeliyiz.

$$(p \vee q') \equiv [(2x + 3 = 5) \wedge (x + 1 = 3)] \Rightarrow (x = 1 \wedge x = 2)$$

olup bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $(p \vee q') \equiv 0$ yani $(p \vee q')' \equiv 1$. O halde

$p \Rightarrow q \equiv 1$ dir.

Olmayana Ergi ile İspat: $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için;

$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ denkleğinden faydalanılan ispat yöntemidir (İrmak, 2008). İspatlanacak ifadenin tersinin doğru olduğı kabul edilerek ispata başlanan ve sonunda bu kabulün yanlış olduğuna karar verilerek sonlandırılan (Çevik, 2010) bu ispat yöntemine karşıt ters (karşıt pozitif) yöntemi adı da verilir (Asar, Arıkan ve Arıkan, 2009).

Örneğın; m ve n birer tamsayı olmak üzere; mn çarpımı tek sayı ise m nin tek sayı olduğunu gösterelim.

m sayısının çift sayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi bir k tamsayısı için $m = 2k$ olup, $mn = 2kn$ olur. Dolayısıyla; mn nin bir çift sayı olduğu durumu elde edilir. Bu ise önermedeki ' mn çarpımı tek sayı' ifadesi ile çelişir. Bu nedenle m tek sayıdır.

Deneme Yoluyla İspat: Bu yöntem sonlu sayıda kümeler üzerinde tanımlanmış önermeler için kullanılabilecek bir yöntemdir. İlgili kümenin bütün elemanları o önerme için tek tek denenir (İrmak, 2008).

Aksine Örnek Vererek İspat: $(p \Rightarrow q)' \equiv (p \wedge q')$ denkleğinden faydalanılarak $(p \wedge q') \equiv 1$ olacak şekilde yani; verilen bir bileşik önermenin hipotezini doğru kabul ederek hükmüyle çelişkili bir sonuca varmamıza yarayacak en az bir örnek bulma yöntemidir (Akkaş vd., 1988; İrmak, 2008).

2.1.4. Matematiksel İspatın Fonksiyonları ve Sınıflandırılması

Fizik, Kimya, Biyoloji gibi uygulamalı bilim dallarında kıyaslama, kontrollü tekrarlanabilir deneydir. Matematik ise oldukça farklıdır. Matematikte bir sonuç elde etmeye çalışmadan önce tanımlar, aksiyomlar oluşturulur ve belirli bir hazırlık çalışması yapılır. Daha sonra ifadelerin kesin ve zarif formülleri verilir ve ispatlanır. Matematikte ispatı yapılmamış bir iddia hiçbir şey ifade etmez, geçerli sayılmaz ve hiçbir yerde kullanılmaz. İspat, bir iddianın son testidir yani bir iddia ispatlandığında tartışma sona ermiş olur (Krantz, 2011).

İspatların bazı işlevleri yani fonksiyonları vardır. Sırası önemli olmaksızın ispatın fonksiyonları şunlardır (Bell, 1976; de Villiers, 1999; Hanna ve Jahnke, 1976):

➤ Doğrulama (Verification)

- Açıklama (Explanation)
- Sistematisasyon (Systematisation)
- Keşif (Discovery)
- İlişkilendirme (Communication)
- İnşa Etme (Construction)
- Araştırma (Exploration)
- Birleştirme (Incorporation)
- Entelektüel sorgulama (intellectual challenge)

Doğrulama: Uygulamalı bilimlerde bir iddiayı kontrol etmek ve doğrulamak için laboratuvar deneyleri veya birtakım testlerden faydalanırlar (Krantz, 2011). Oysa matematikçiler bilinmeyen ve yeni bir iddianın geçerliliğini araştırırken yalnızca ispatları araştırmakla kalmaz aynı zamanda yarı deneysel testler yoluyla karşı örnekler oluşturmaya çalışırlar çünkü bu tür testler gizli çelişkileri, hataları veya açıklanmamış varsayımları ortaya çıkarırlar. Dolayısıyla ispatın doğrulama için bir ön koşul olması gerekmeksizin doğrulama bir ispatı bulmak için çoğunlukla bir ön koşuldur (de Villiers, 1999).

Açıklama: Yarı deneysel doğrulamalar yoluyla bir iddianın geçerliliği konusunda yüksek bir güven seviyesi yakalansa da bu iddianın neden doğru olduğu açıklanmadığı sürece ispat tatmin edici bir ispat olmaz. Aslında birçok matematikçi için bir ispatın açıklama boyutu, doğrulama boyutundan daha önemlidir (de Villiers, 1999). Matematiksel içeriklerin çoğunda bir ispatın amacı, bir önermenin yalnızca doğruluğunu değil aynı zamanda niçin doğru olduğunu da açıklamaktır (Dede ve Karakuş, 2014; Hanna, 2000). İyi bir ispatın açıklama fonksiyonu ile önermenin neden doğru olduğuna dair bir fikir vermesi beklenir ve açıklama ispatı daha estetik bir savunma yapar (Bell, 1976).

Sistematisasyon: Matematikçiler, çeşitli sonuçları, aksiyomları, ana kavram ve teoremleri tımdengelsel bir sistem içerisinde düzenleyerek sistematisatordiklerinde; tanım ve aksiyomların gereksiz fazlalıklarından kurtulabilir ve bunların küçük bir kümesi ile gerekli kavramların ve fikirlerin hepsini yakalama imkânına sahip olabilirler (Dede ve Karakuş, 2014; de Villiers, 1999).

Keşif: Aksiyomatik hale getirme ve tanımlama gibi formal tümdengelimsel süreçler bağlamında bile ispat yeni sonuçlara yol açabilir (de Villiers, 1999). Örneğin; Euclid'in beşinci postulatında (paralellik postulatı), düzlem yerine eğrisel yüzeyler üzerindeki şekillerin geometrisini tanımlayan teoremler aracılığıyla Euclid dışı geometriler ortaya çıkmıştır (Dede ve Karakuş, 2014).

İlişkilendirme: Bir sosyal etkileşim biçimi olarak ispat, yalnızca ilgili kavramların anlamlarını değil aynı zamanda kabul edilebilir bir argüman için ölçütlerin matematik toplumunda müzakere edilmesini, bu şekilde hataların belirlenmesini, düzeltilmesini sağlar (de Villiers, 1999). Bir ispat yapıldıktan sonra matematik toplumundan geri bildirim alınarak ispat doğrulanmalıdır (Lee, 2002).

İnşa Etme: İspatlar deneysel teoriler ortaya koyar (Hanna ve Jahnke, 1996) yani ispatlarla doğruluğu veya yanlışlığı ortaya çıkarılmaya çalışılacak teoriler oluşturulur.

Araştırma: İspatlarla bir tanımın anlamı veya varsayımın sonuçları araştırılır (Hanna ve Jahnke, 1996)

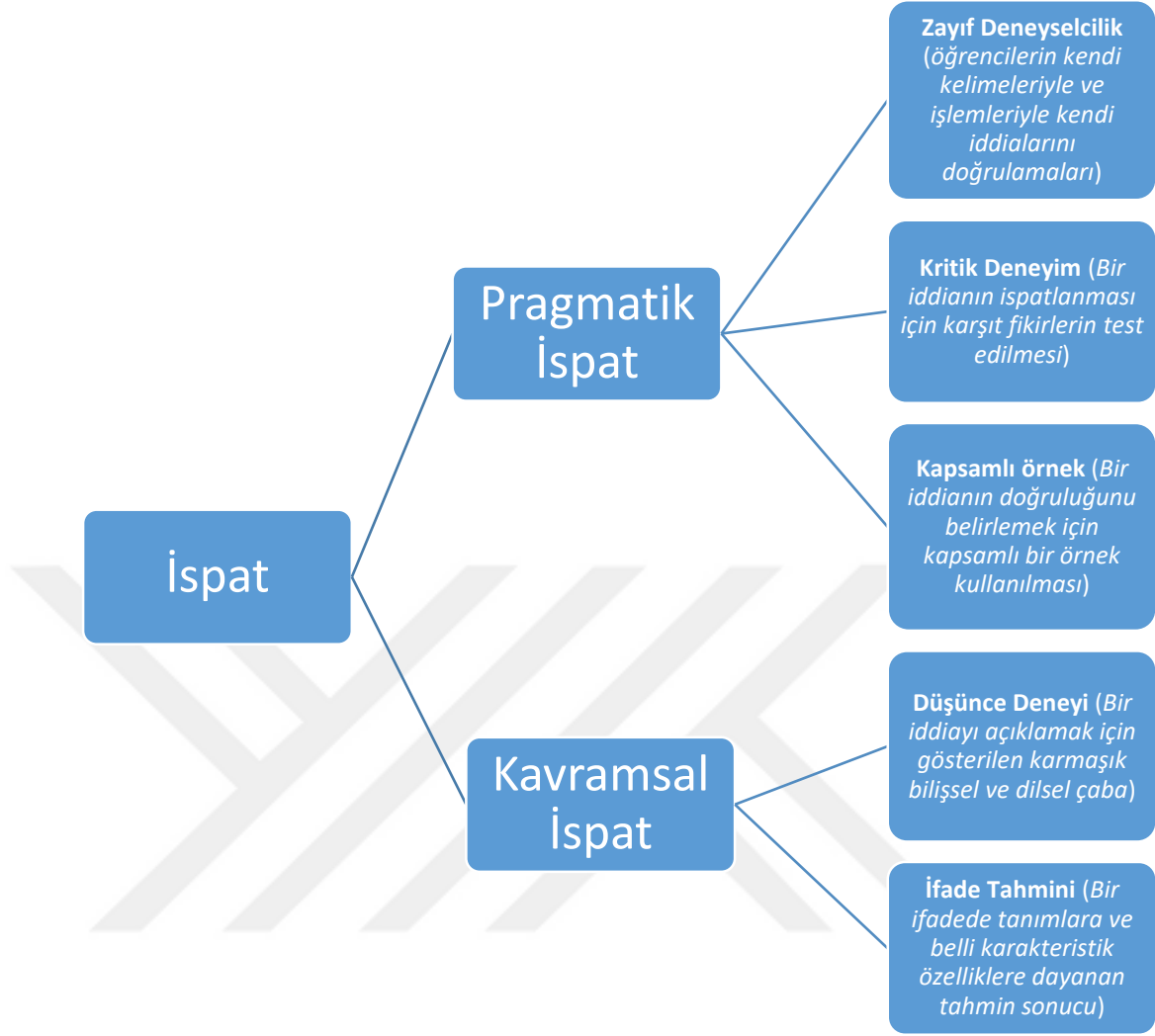
Birleştirme: İspatlar bilinen bir gerçeğin yeni bir çerçeveye dâhil edilmesini ve böylece yeni bir perspektifle incelenmesini sağlar (Hanna ve Jahnke, 1996).

Entelektüel Sorgulama: Matematikçiler için ispat; diğer insanların bulmacalardan ya da yaratıcı hobilerden aldığı kadar keyif veren entelektüel bir uğraştır (de Villiers, 1999). Dolayısıyla matematikçilere, bir ispatı tamamlarken ispatın içerisinde yaşadıkları zihinsel sorgulamalar oldukça eğlenceli ve sevimli gelebilir (Dede ve Karakuş, 2014).

Öğrencilerin ispat yapma şemaları ispat yapmadaki yaklaşımlarının bütüncül analizlerine dayalı olarak araştırmacılar tarafından sınıflandırılmıştır (Uğurel, 2010). Balacheff (1988) ispatlamada iki düzey tanımlamıştır:

- Pragmatik ispat (Pragmatic proof)
- Kavramsal ispat (Conceptual proof)

Pragmatik ispatlarda gerçek örnek ve gösterim bulunmakla birlikte; kavramsal ispatlar örnek içermez ve sorudaki özelliklerin formüllerine ve aralarındaki bağıntılara dayanırlar.



Şekil 2.2. Balacheff'in ispat sınıflandırması (Balacheff, 1988)

2.1.5. Matematiksel İspat ve Anahtar Fikir İlişkisi

Doğru bir ispat ve sezgisel bir iddia arasında net bir ayrım yapmak zorunludur ve matematiksel sonuçların geçerliliği sonuçta ispat üzerine kuruludur (Hanna, 2000). Sezgisel iddia, deneysel verilere dayanan ya da bir resim ile temsil edilen ve akılcı olabilecek ancak doğrudan formal bir ispat oluşturmeyen informal bir ispattır. Sezgisel ispatta bir şeylerin doğru olması gerektiği konusunda bir his oluşur (Raman, 2003). Örneğin; Deniz iki doğal sayıyı toplayarak sonucun yine bir doğal sayı olduğunu keşfetti ve bu işlemi tekrarlamak suretiyle “İki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayıdır.” varsayımının doğruluğu hakkında bir fikir sahibi oldu ve bu durumda formal bir ispat oluşturmada informal bir şekilde sezgisel bir ispat yapmış oldu. Üniversite

öğrencilerinin ve öğretim elemanlarının bir iddianın ispatlanmasına yönelik denemelerini incelerken tamamen üç farklı yaklaşım türü olduğunu tespit eden Raman'a (2002) göre; bu yaklaşımlar:

- İddianın doğru olması gerektiği konusunda bir fikir veren ancak ispata götürmeyen *sezgisel fikir*
- İddianın doğru olduğunu ancak tam bir anlamaya yol açmadığını gösteren *işlemsel fikir*
- İddianın neden doğru olduğunu gösteren ve hem ikna hem de anlamayı sağlayan *anahtar fikirdir*.

Bir ispatı oluşturmak; çoğunlukla içerik bilgisi, ispatı yapabilmeye yönelik inanç ve problem çözme yeteneğinden oluşan karmaşık bir beceri birikiminin kullanılmasını gerektirir (Selden A. ve Selden J., 2007). Matematik; anlayışı ortaya çıkaran özel değişkenler ve matematiksel topluluk tarafından kesin olarak kabul edilmiş genel değişkenlerden oluşur. İspat; matematiğin hem özel hem de genel değişkenlerini içinde barındırır. Anahtar fikirler; bu genel ve özel değişkenleri birbirine bağlar ve anlama ve ikna olmaya ilişkin bize bir his verir. Anahtar fikir; belirli bir iddianın neden doğru olduğunu gösteren, ispatın anlaşılmasına ilişkin bir his oluşturan fikirdir (Raman, 2003) ve bazı ispatlarda birden fazla anahtar fikir vardır (Raman, Sandefur, Birky, Campbell ve Somers, 2009).

Öğrenciler, verilen ifadenin mantığını anlamaya çalışarak ve ön bilgilerinden yararlanarak ispattaki yaklaşımlarına karar verdikleri için (Güler, 2013) ispata başlamadan önce öğrencilerden ispatın yapısı hakkında düşünceleri istenir ve bu düşünme sonrasında ispata başlamasına yardımcı olacak ifadeler veya tanımlar açıklanırsa ispat yapmada yaşadıkları zorlukların önüne geçilebilir. Örneğin; “ f ve g A ’da iki fonksiyon olmak üzere; $f \circ g$ bire-bir ise g de bire-birdir.” teoremini ispatlamaya çalışan öğrencilere önce g nin bire-bir olmasının anlamının açıklanması faydalı olacaktır. Bu şekilde “ x ve y g nin tanım bölgesinde iki eleman olmak üzere, $g(x) = g(y)$ olsun.” yazılarak ispata başlanabilir, bu başlangıç ulaşılmak istenen sonucun “ $x = y$ ” olduğunu açıklar. Buradan “ $g(x) = g(y)$ ise $x = y$ ” olduğu görülür. Bundan sonra öğrenciler $f \circ g$ ’nin bire-bir olması hipotezinden nasıl faydalanacakları üzerine odaklanabilirler (Selden A. ve Selden J., 2007).

Yukarıdaki örnekte teoremin ispatlanmasına yardımcı olması beklenen, g nin bire-birlik tanımı aynı zamanda teoremin neden doğru olduğuna dair de bir his verir ve ipucu görevi görür yani anahtar fikirdir. Dolayısıyla anahtar fikirlerin ispatın tamamlanma sürecinde yardımcı bir etken olması beklenir.

Matematikçiler için ispat yapma sürecinin çoğu zihinde gerçekleşir (Raman vd., 2009). Bireylerin ispat tamamlama sürecine anahtar fikirlerin etkisini ve süreçte yaşadıkları zorlukların neler olduğunu tespit edebilmek ayrıca ispat yapma sürecini detaylı bir biçimde ortaya koyabilmek için sürece dâhil olan bireylerin düşüncelerini incelemenin faydalı olabileceği düşünülmektedir. Bu durumda ise bireylerin düşüncelerini sözelleştirmelerine ihtiyaç duyulmaktadır.

2.1.6. Sesli Düşünme Yöntemi

Sesli düşünme; düşünmenin süreç ve aşamalarını sözlere dökme işlemidir. Yöntemin ana amacı bir etkinlik sırasında ortaya çıkan zihinsel işlem, süreç ve düşünceleri ortaya çıkarmaktır. Bu yöntem öğrencinin zihnindeki işlem ve süreçleri iyileştirmek, öğrenme güçlüklerini gidermek, sorgulama, sorun çözme, karar verme, eleştirel düşünme gibi zihinsel becerileri geliştirmek ve çeşitli öğrenme tekniklerini öğretmek amacıyla kullanılmaktadır (Güneş, 2012). Gerard Scallan'a (2004) göre yöntemin amacına, ilkelerine ve sözelleştirme süresine özellikle dikkat edilmelidir. Eğer sözelleştirme işlemi problem çözme etkinliğinin başından sonuna kadar uygulanırsa, öğrencinin zihin yükünü artırmaktadır. Bunun yerine etkinliğin belirli aşamalarında veya sonunda uygulanması daha yararlı olmakta, öğrenmeye büyük katkı sağlamaktadır (Akt. Güneş, 2012). İspatların anahtar fikirlerle desteklenmiş olması, uygulamalarda öğretmen adaylarının yalnızca eksik bırakılmış temel bileşenleri tamamlamalarını da beraberinde getirmiş bu sayede sesli düşünme etkinliğin belirli aşamalarında uygulanmıştır.

Sesli düşünme yönteminin yararlarını şöyle sıralamak mümkündür (Margot, 2009, Akt. Güneş, 2012):

- ✓ Öğrencinin dikkat becerilerini geliştirir ve düşündüklerine yoğunlaştırır.
- ✓ Öğrencinin anlama ve zihinsel becerilerini geliştirir, kendine güvenini artırır.
- ✓ Öğrencinin zihninde canlandırma sürecini iyileştirir.

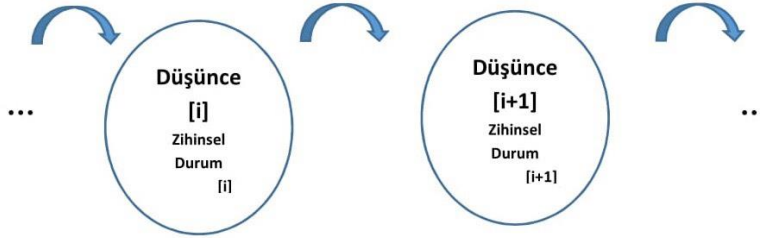
- ✓ Öğrencinin zihinsel işlemlerini açıklamayı ve güçlendirmeyi sağlar.
- ✓ Öğretmenin öğrenmeyi izlemesine, kontrol altına almasına, yönlendirmesine, kolaylaştırmasına ve geri bildirim almasına imkân verir.
- ✓ Öğrencinin özdeğerlendirme yapmasına, kendini düzeltmesine olanak sunar.
- ✓ Öğretmenin öğrencinin düşünce biçimini anlamasına yardım eder.

Sesli düşünme;

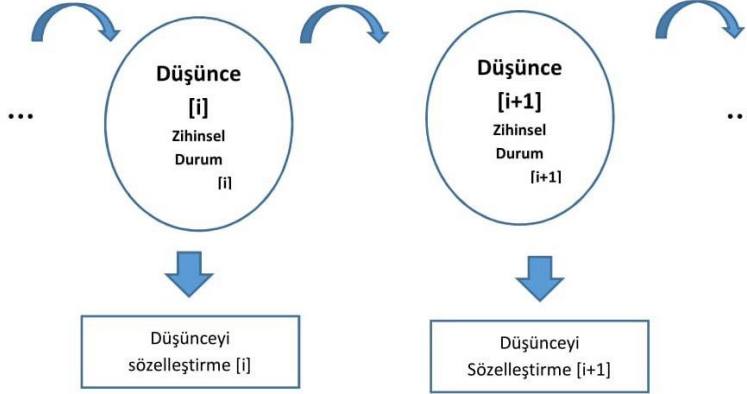
- Birey tarafından yorum yapılmasını önler ayrıca bir sözlü çeviri süreci vardır.
- Herkes tarafından erişilebilen sözlü protokolleri veri olarak ele alır ve böylece nesnel bir yöntem oluşturur (van Someren vd., 1994).

Ericsson ve Simon'a (1998) göre düşünme, Şekil.3.1'de gösterildiği gibi bir dizi düşüncenin periyodik olarak birbirini izlemesi şeklindedir.

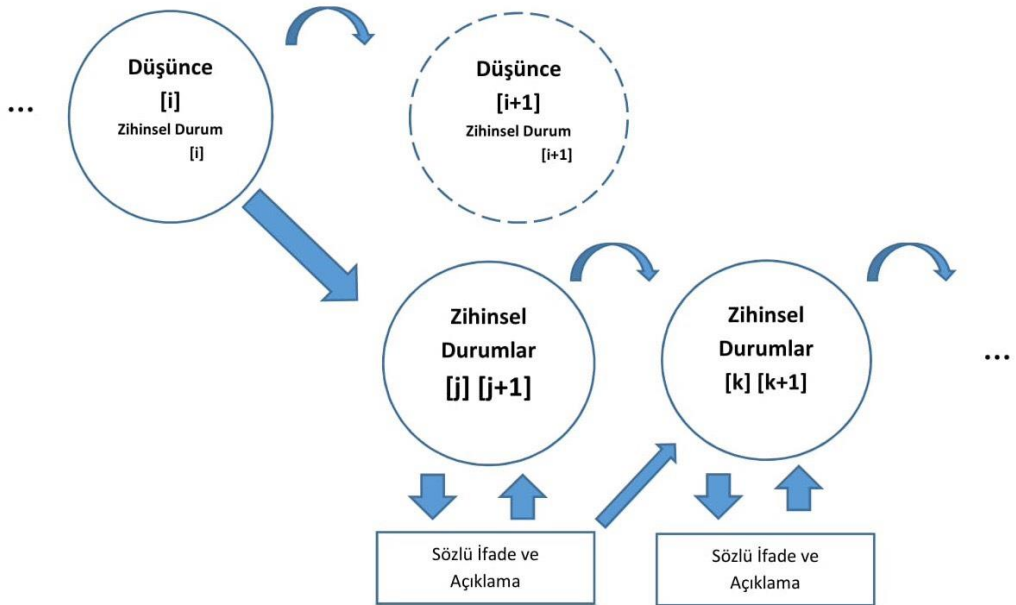
Sessiz Düşünme



Sesli Düşünme



Düşünceyi Tanımlama ve Açıklama



Şekil 3.1. Sessiz düşünme ile düşüncelerin sözlü anlatımının iki farklı modu arasındaki ilişki (Ericsson ve Simon, 1998)

Yukarıdaki şekilde üst panel, sessiz düşünmede düşüncelerin kendiliğinden oluşan sırasını; orta panel, bu düşüncelerin dizilimini değiştirmeden sesli düşünme sırasında nasıl sözelleştirme yapılabileceğini göstermektedir. Alt panel, katılımcıların

düşünceyi tanımlama ve açıklama çabalarının düşünce dizilimini nasıl değiştirebileceğini ve ek düşüncelerin engellenmesini nasıl sağlayabileceğini ve aynı zamanda katılımcıların düşüncelerini anlamalarına izin vermek amacıyla tutarlı açıklamalar üretmesine yol açtığını göstermektedir (Ericsson ve Simon, 1998). Sesli düşünme yöntemi; düşünme sürecini olumsuz etkilemeyen bir yöntemdir, birey konuşurken istemsiz olarak kendiliğinden problemi çözmüş olur. Sesli düşünmede birey düşüncelerini yorumlamaz ve yapılandırılmış yöntemlerde olduğu gibi düşüncelerini belirli bir forma getirmez, o an aklına geldiği şekliyle konuşur (van Someren vd., 1994).

2.1.7. Sesli Düşünme Yöntemi ve Matematiksel İspat İlişkisi

Sesli düşünme yönteminde zengin veri elde etme potansiyeli fazla olduğu için sesli düşünme protokollerinin kullanımı eğitim araştırmalarında yaygın hale gelmiştir (Johnstone, Bottsford Miller ve Thompson, 2006). Çağdaş eğitim yaklaşımları öğrencinin davranışlarıyla değil zihniyle ilgilenmektedir (Güneş, 2012). Sesli düşünme yöntemi ile öğrencilerin davranışları ve zihinsel şemaları hakkında nesnel bir gözlem yapma olanağı bulunmaktadır (Kayacan, 2005). Matematiksel ispat yapma birçok zihinsel aşamayı içinde barındıran karmaşık bir süreçtir (Çetin ve Dikici, 2016). Matematiksel ispat yaparken öğrencilerin nerelerde ve ne tür sebeplerle hata yaptıklarını tespit edebilmek için ispat yapma süreçlerini ve zihinsel aşamalarını incelemek gerekmektedir. Çetin ve Dikici'ye (2016) göre bireyin ispat aşamalarını oluştururken ne düşündüğü, neyi neden yaptığı, hangi bilgileri kullandığı net bir şekilde belirlenmelidir. Dolayısıyla bireylerin zihinsel süreçlerini detaylı olarak inceleyebilme imkânı sunan sesli düşünme yöntemine ihtiyaç duyulmaktadır. Matematiksel ispat yapma ve problem çözmede sesli düşünme yöntemi uygulanırken; bireyden uyguladığı yöntem ve tekniklerle süreç içerisindeki düşüncelerini sesli olarak ifade edebilmesi yani sözelleştirmesi istenmektedir. Gerard Scallan'a (2004) göre sesli düşünme bir sözelleştirme işlemi olup problem çözme süreçlerini kolaylaştırmaktadır. Problem çözme sırasında bireylerin düşündüklerini yüksek sesle söylemeleri, hem çözüm sürecine hem de doğru sonuca ulaşmalarına katkı sağlamakta, öğrencilerin etkinlik sırasında izledikleri yol ve yöntemlerin açıklığa kavuşmasına yardım etmektedir (Akt. Güneş, 2012). Dolayısıyla öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki hatalar da sesli düşünme yöntemi ile tespit edilebilmektedir. Weber'e (2001) göre, ispat yapma bir

problem çözme etkinliğidir. Problem çözmede, problemi çözecek bireye bir başlangıç ifadesi sunulur ve bu başlangıç ifadesini istenen hedef ifadeye dönüştürecek bir dizi eylem gerçekleştirmesi istenir. Bir ifadenin ispatı oluşturulurken de, ispatı yapana bir dizi varsayım verilir ve ispatlanacak ifadeyle sonuçlanan bir dizi çıkarımı türetmesi istenir. Ayrıca Güler'e (2013) göre problem çözme ve ispat yapma arasındaki ilişki gözönüne alındığında; problem çözme ve ispat yapma süreçlerinin birbirini tamamlayıcı ve iç içe geçmiş beceriler olduğu ve cebir konularındaki problem çözme süreçlerinde yaşanan güçlüklerin ispat yapma yaklaşımlarını da etkilediği görülmektedir.

Bütün bunlar gözönüne alındığında; sesli düşünmenin problem çözme sürecini kolaylaştırdığı gibi ispat yapma sürecini de kolaylaştırdığı ayrıca ispat yapma aşamasında izlenen yol ve yöntemlerin, yaşanan zorlukların ve yapılan hataların açıklığa kavuşturulmasına yardım ettiği söylenebilir.

2.2. İlgili Araştırmalar

2.2.1. Matematiksel İspatın Matematik Eğitimindeki Yeri

İspat, matematiğin gerçekle olan ilişkisi göz önüne alınmadan öğretilemez ve öğrenilemez (Hanna ve Jahnke, 1993). Geçmişte öğrenciler ispatla yalnızca bir doğrulama yöntemi olarak karşılaşmışken sonraları matematik eğitiminde ispatın açıklama ve ilişkilendirme fonksiyonları öne çıkmıştır. Matematiksel ispat oldukça karmaşıktır ve matematik müfredatındaki pek çok konudan çok daha zorlayıcı görünmektedir. Bunun nedeni, matematiksel ispatlarda gerekli olan akıl yürütme biçiminin günlük hayatta gerekli olandan çok farklı olmasıdır. Günlük hayattaki akıl yürütme, matematiksel ispatın zorluğunu ya da matematiksel ispat için gerekli olan varsayımlar, teoremler ve kurallar arasında net ayrımlar yapmak gibi büyük bir dikkati gerektirmez (Yackel ve Hanna, 2003).

İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimini doktora tez çalışmasında inceleyen Arslan'a (2007) göre; öğrencilerin muhakeme etme ve ispat yapabilme seviyeleri oldukça düşük olmasına karşın verilen ifadenin doğruluğunu göstermek için kullandıkları ispat türü, sınıf seviyesi 6. sınıftan 8. sınıfa ilerledikçe görsel ve örnekle doğrulama biçiminde yaptıkları ispattan cebirsel ispata

yönelme şeklinde seyretmiştir. 8. Sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreçlerini araştıran Zaimoğlu'na (2012) göre ise; öğrenciler doğruya; dolaylı yollardan (olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi) ulaşmada beklenen düzeyde bir başarı sergileyemezken; geçerli bir ifadeyi doğrulayabilmekte ancak geçersiz bir ifadeyi çürütme yollarını (ters örnek bulma, çelişki bulma yöntemi) bilememektedirler. Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisini yüksek lisans tez çalışmasında araştıran Coşkun'a (2009) göre; öğrencilerin Van Hiele geometri anlama seviyelerinin düşük olması nedeniyle ispat yazma başarıları da zayıf olmakla birlikte Van Hiele seviyeleri ile ispat yazma becerisi arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki vardır. Yine ortaöğretim öğrencilerinin ispat ve ispatlamaya yönelik bilgilerini zihinlerinde ne şekilde yapılandıklarını doktora tez çalışmasında belirlemeye çalışan Uğurel'e (2010) göre; öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde ve bilgiyi yapılandırmalarında öğretmenleriyle aralarındaki sınıf içi söylemleri oldukça etkilidir. Ayrıca öğrenciler, ispatlarla uğraşmayı yararlı ve gerekli bulmalarına rağmen ispatın ne olduğuna ve ispata yönelik temel kavramların anlamlandırılmasına, ispat yapma yöntemlerine, ispatın neyi içerdiğine ve nasıl uygulandığına ilişkin bilgi eksikliklerine sahiptirler.

Boğaziçi Üniversitesi birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği bölümlerinden öğrencilerin matematiksel ispat konusundaki tutum ve inançlarını, ispat yaparken kullandıkları yöntem ve akıl yürütme şekillerini ortaya çıkarmaya çalışan İmamoğlu'na (2010) göre; Türkiye'de prestijli bir devlet üniversitesine girebilecekleri merkezi ulusal sınavı başarıyla geçerek bulundukları bölüme gelen birinci sınıf öğrencileri sıradan lise mezunlarını doğru olarak temsil etmeyecekleri halde, ispat oluşturmada gösterdikleri kötü performans, genel olarak liselerde ispata ilişkin mevcut durum hakkında bir fikir vermektedir. Buna paralel olarak, Bahtiyari'ye (2010) göre; öğrencilerin birçoğu ispatın anlamından, gerekliliğinden, öneminden emin olmamakla birlikte ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyimlere sahip değildir.

Öğrencilerin ispat becerilerinin düşük olmasının nedenlerinden biri olarak öğretmenlerin derslerinde ispatlara yeterince veya hiç yer vermemesi gösterilebilir. Öğretmenler, ders saatinin yetersizliği ve öğrencilerin motivasyonunun düşüklüğü nedeniyle her ne kadar öğretim programında yer alsada ispatlara zaman ayırmadıklarını dile getirmektedirler. İspatların sınıf içi öğretimde kullanılan argümanların, mantıksal

adımların ve ön bilgilerin öğretmenler tarafından ayrıntılı bir biçimde sunulması ve bunlara yönelik gerekli açıklamaların yapılması öğrencilerin ispatları anlamlandırmalarına olumlu katkı yapacaktır (Kılıç, 2013). Ayrıca öğrencileri ispatlarla daha fazla karşı karşıya getirmek ve ispat yaparken hem bireysel hem grup çalışmalarına olanak sağlamak; öğrencilerin ispatlara ve ispatlamaya yönelik bilgilerinde var olan eksikliklerin giderilmesine ve ispat yapma becerilerinin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır (Uğurel, 2010).

Pek çok öğretmen öğrencilerinin ispat yapabilmeyi öğrenmelerinin neden gerekli olduğunu anlamamaktadır (Mansi, 2003). Oysaki matematik eğitimcilerinin temel görevlerinden biri, öğretmede ispatın rolünü anlamaktır. Bunun sonucu olarak ispatın sınıf içinde kullanımını artırılabilir. İspat, matematiğin önemli bir parçasıdır bu nedenle matematik eğitimcilerinin, matematikte ispatın işlevini anlatırken hem önemi hem de sınırlamalarını belirtmeleri gerekmektedir (Hanna, 2000). Matematiksel ispat süreçleri öğrencilerin, matematiği bir bütün olarak ve derinlemesine anlamalarını, mevcut bilgilerini gerekli yerlerde uygun olarak kullanabilmelerini, etkili muhakemeler geliştirebilmelerini, matematiksel tartışmalarda yer alabilmelerini ve tüm bu durumlar için gerekli olan matematiksel becerilerinin gelişimini sağlamaktadır. Bu açıdan bakıldığında ispatın matematikte olduğu kadar matematik eğitiminde de tartışmasız bir öneme sahip olduğu görülmektedir (Aktaş, M. ve Aktaş D., 2013). İspat ve muhakeme insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir. Fakat bu yeteneğin gelişimi belirlenecek uygun öğretim programlarına bağlıdır. Öyle ki bu öğretim programı uygun şekilde belirlenmezse insanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yetenekleri zamanla yok olur, ezberleme yolunu seçen, neden-sonuç zincirini takip edemeyen bireyler yetiştirilir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Bu nedenle ilköğretim ve orta öğretim matematik programlarında ispat yapmaya olan ilgi giderek artmaktadır. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma merkezli matematik etkinliklerini geliştirmelerini sağlayabilecek ve keşfetme güdülerini artıracak bir eğitim verilmelidir (Güler vd., 2012). Matematik eğitiminde ispatın kilit rolü, matematiksel anlayışı geliştirmesidir bu nedenle matematik eğitimcilerinin en önemli hedefi, ispatı bu amaçla kullanmanın daha etkili yollarını bulmaktır (Hanna, 2000). Öğrencilere ispat yapma merkezli matematik etkinlikleri yaptırılıp keşfetme güdülerini ortaya çıkarılarak daha etkili bir matematik öğretimi yapılabilir (Güler vd., 2012).

MEB (2013) öğretim programı ile öğrencinin informal bir durumla karşılaştırılması ve bu informal durumdan formal bir matematiksel yapıya ulaşması ve matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme becerisine sahip olması amaçlanmaktadır. Bu amaçla programın benimsediği genel öğrenme döngüsü;

Problem → Keşfetme → Hipotez Kurma → Doğrulama → Genelleme → İlişkilendirme → Çıkarım şeklindedir.

Ayrıca söz konusu programda ortaöğretim öğrencilerinin; matematikteki ilişkileri açıklama, farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunma ve bunu mantıksal gerekçelerle savunma; modelleri, önermeleri, özellikleri ve ilişkileri kullanarak yaptığı matematiksel çıkarımı açıklayabilme; matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengeliyi etkin olarak kullanabilme; matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme davranışlarını geliştirmek hedeflenmiştir.

Görüldüğü gibi; öğrencilerin keşfetme güdülerini ortaya çıkarabilmek, matematiksel anlayışlarını geliştirebilmek ve matematik öğretimini daha etkili yapabilmek için sınıf içi öğretimde matematiksel ispata yeterince yer verilmeli ve buna uygun öğretim programları benimsenmelidir.

2.2.2. Matematiksel İspata Yönelik Görüş, Tutum, Algı ve İnanç Çalışmaları

Öğretmenler, öğretim uygulamalarını kendi tutumlarına göre geliştirirler. Bazı durumlarda, öğretmenin davranışını şekillendirmede düşünce, inanç ve tercihlerin tezahürleri belirleyici olabilirken diğer bazı durumlarda ise öğretmenlerin deneyimlerinden bilinçsizce ortaya çıkan inançlar veya sezgiler belirleyicidir. Üstelik; öğretmenlerin davranışlarını şekillendirirken konu ile ilgili görüşlerinin oynayabileceği rolü görmezden gelmek, matematik öğretiminin kalitesini olumsuz yönde etkileyebilir (Thompson, 1984). Bu nedenle öğretmenlerin sahip oldukları görüşler ilgili konunun öğretiminin planlanmasında etkili olmaktadır (Turğut vd., 2013). Öğrencilerin ispat yapmada yaşadığı zorlukların muhtemel kaynaklarından biri de öğretmenlerinin ispata yönelik görüşleridir (Soto, 2010). Ancak derin bir ispat anlayışına sahip matematik öğretmenleri; öğrencilerinin matematiksel kavramları ve matematiksel ispatı başarıyla

kullanmasını sağlayabilir. Birçok ülkede matematik öğretmenleri, matematik alanında lisans veya yüksek lisans derecesine sahiptir bu nedenle, ispat konusunda sağlam bir anlayışa sahip olmaları ve ispatları oluşturmak için gereken becerilere hâkim olmaları beklenmektedir (Ko, 2010). Ayrıca bireyin ispata yönelik görüşleri, ispat yapma becerisini de etkilemektedir (Moore, 1990). Öğretmen adaylarının ispat yapma seviyeleri ve ispata yönelik bakış açıları ders işleme biçimlerini etkileyecek ve öğretmenlerinin açıklamaları ve düşüncelerinden etkilenen öğrencilerine de yansıtacaktır (Şengül ve Güner, 2014). Bu bağlamda öğretmen adaylarının hem kendilerinin hem de sonraki süreçte öğrencilerinin ispat yapmaya yönelik başarısına ve dolayısıyla matematik öğretiminin kalitesine etkisi nedeniyle ispat yapmaya ilişkin görüş, tutum, algı ve inançlarının önemli olduğu düşünülmektedir.

Eğer öğretmen adayları matematiksel ispat hakkında yeterince fikir sahibi olamazlarsa, ispata yönelik matematiksel etkinliklerin sınıf içinde uygulanma sıklığı azalacaktır (Öçal ve Güler, 2010). Öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin algıları; ispatın doğrulama, onaylama ve açıklama fonksiyonları ile sınırlıdır (Bayazit, 2009) oysaki bir ifadenin neden doğru olduğunu anlama ve açıklama ispatın fonksiyonlarından sadece birkaçıdır (de Villiers, 1999).

Matematik bölümü öğrencilerine göre belirsizlikleri gideren ve açıklığa kavuşturan ispat yapma; sabır, uğraş, özen ve dikkat gerektiren karmaşık adımlar içeren, doğru adımlar atıldığı takdirde parçadan bütüne ilerleyerek sonuca ulaşılabilen ve başarılıldığında mutluluk veren zor ve karmaşık bir süreçtir (Aktaş, M. ve Aktaş, D., 2013). Öğretmen adaylarının çoğunluğu matematiksel ispatın matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olduğu bilincindedirler. Dolayısıyla kendilerini bu alanda geliştirerek, ispat yapma merkezli matematik etkinliklerini oluşturabilecek duruma gelebilmeleri gerekmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının yetiştirecekleri öğrencilere de yansıtacaktır. Bu yüzden öğretmen adaylarının derslerde yaptıkları ispatların, ders geçme kaygısıyla değil ileride kullanacakları, öğretecekleri ve matematiğin doğasını anlamaları gerektiği için öğretildiğinin üzerinde durulmalıdır (Güler ve Dikici, 2012).

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmayla ilgili görüşlerini ve kullandıkları matematiksel ispat şemalarını inceleyen İskenderoğlu (2010), öğretmen

adaylarının matematiksel ispat yaparken zihinsel süreçlerini sık sık kullandıklarını, zihinsel süreç faktörü ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık olduğunu ve matematik öğretmeni adaylarının ispat yaparken sık sık özdeğerlendirme yaptıklarını belirtmiştir. Ayrıca, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatın; kalıcı, anlamlı ve etkili öğrenme sağladığına inandıklarını, ders anlatırken ve sınava hazırlanırken matematiksel ispat yapmaya ve matematiksel ispat yaparken de tanım, teorem, aksiyom ve ispat yöntemlerine ihtiyaç duyduklarını ifade etmiştir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının en çok kullandıkları ispat yöntemleri tümevarım ve doğrudan ispat yöntemleridir (Demiray, 2013). Miral (2013); ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşlerini aldığı yüksek lisans tez çalışmasında; öğrencilerin ispat yöntemlerinin isimlerini bildiklerini ancak tanım ve içeriklerini ifade etmekte zorlandıklarını belirtmiştir. Öğrencilere göre, matematiksel ispat yöntemlerini bilmek ve kullanmak onları ezber yapmaktan kurtarmakta ve ispat yaparken yöntemi belirleyebilmek ispat yapmayı kolaylaştırmaktadır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmanın matematik öğretimine katkısı ile ilgili görüşlerini ve ispat düzeylerini belirlemek amacıyla yaptığı araştırmasında Köğce (2013); öğretmen adaylarının büyük bir kısmının tümdengelimsel muhakeme içeren ve ispatlama yapılırken fonksiyonel dilin kullanıldığı ispatı tercih ettiklerini ayrıca, öğretmen adaylarının önemli bir kısmının ispat yapmanın matematik öğretimine katkı sağlayacağına inandıklarını tespit etmiştir. Ayrıca birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispata ilişkin kavramsallaştırma ve becerilerini inceleyen İmamoğlu'na (2010) göre; birinci sınıflar ispat yaparken daha çok tümevarımsal akıl yürütme kullanmaya eğilimliken; son sınıflar çoğunlukla genelleme yapma gereği duyup tümdengelimsel yöntemler kullanmaktadırlar. Yine de son sınıflar ispat yapma ve değerlendirmede hala bazı zorluklar yaşamaktadırlar.

Fen bilgisi öğretmenliği ve ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşlerini araştıran Gökkurt ve Soylu'ya (2012) göre; öğrenciler ispat yapmanın, matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmemekte ve öğrencilerin çok az bir kısmı ispat yapmanın matematik için vazgeçilmez olduğunu düşünmektedirler. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini inceleyen Doruk ve Güler'e (2014) göre; üçüncü sınıftaki öğretmen adaylarının birinci ve ikinci sınıflardakilere göre

matematiksel ispata yönelik daha olumsuz görüşe sahip oldukları; ayrıca ikinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının üçüncü ve dördüncü sınıflarda öğrenim gören adaylara göre matematiksel ispatın gerekliliğinin ve faydalarının daha fazla farkında oldukları söylenebilir. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini inceleyen Güler ve Dikici'ye (2012) göre de; öğretmen adayları ispatın anlamının ve amacının farkında olmalarına rağmen ispatın önemsiz olduğu düşüncesinde birleşmektedirler ve bunu da ispatın zor olmasına, ezber yapmalarına ve ispatın daha önceden bilinen şeylerin tekrarı niteliğinde olmasına bağlamaktadırlar. Ayrıca ispat yaparken başarılarını etkileyen en önemli faktörün ispatın yapıldığı ders veya konuyla ilgili olduğunu; başarılı ve başarısız oldukları ispatlar arasındaki farkların ise ispatla ilgili kavramların iyi öğrenilip öğrenilmediğiyle ilişkili olduğunu belirtmişlerdir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının matematiksel ispatın matematiksel bilgileri doğrulama özelliği üzerinde odaklandıklarını ifade etmişlerdir. Keza Özdemir ve Kaplan (2014) da farklı öğretmen adaylarının ispatın tanımını açıklama ve doğrulama olarak ifade ettiklerini ve farklı öğrenme stiline sahip öğretmen adaylarının ispat için sahip oldukları görüşlerin de farklılaştığını tespit etmişlerdir. Varghese'e (2009) göre, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğu, ispatı bir doğrulama aracı, çok azı ise bir açıklama aracı olarak görmektedirler. Öğretmen adayları çoğunlukla, ispatın yalnızca ileri matematik eğitimi almayı planlayan öğrencilere öğretilmesi gerektiğine ve öğretmen tarafından yapılan biçimsel/formal ve gereksiz bir uygulama olduğuna inanmaktadırlar. Yine Varghese'e (2007) göre, öğretmen adayları ortaöğretim matematik eğitiminde ispatın doğası ve önemini anlamada oldukça yetersizdirler ve dolayısıyla ortaöğretim düzeyindeki matematiksel ispatlarla ilgili daha fazla pratik yapmaya, ispatın farklı fonksiyonlarını ve süreçlerini görmeye ve ispatlamanın kendine has mantığını daha derinlemesine anlamaya ihtiyaç duymaktadırlar.

Baştürk'e (2010) göre; ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin hemen hemen hepsi matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesinde ispatların önemli bir role sahip olduğundan haberdar olmalarına rağmen ispat yapmaktan hoşnut değiller ve birtakım zorluklar yaşamaktadırlar. Dolayısıyla öğrenciler tutarlı ve sistemli bir şekilde ispat yapma aktiviteleri ile meşgul edilmelidirler. Matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışlarını bir beyin fırtınası aktivitesi ile ortaya çıkarmayı amaçlayan Öçal ve

Güler (2010); matematik öğretmeni adaylarının zihinlerinde ispat hakkındaki bilgilerinin ezbere dayalı olduğunu dolayısıyla ispatın matematik öğretimi ve matematik için önemini anlamadıklarını, ispatla ilgili tamamlanmamış bilgilerinin olduğunu ifade etmişler ve ispata ilişkin matematiksel kavramları içselleştirebilecekleri etkinliklerle desteklenmiş eğitim almaları gerektiğini belirtmişlerdir.

İspat yapmaya ilişkin görüş, tutum, algı ve inançlar; öğrencilerin ispat yapmaya yönelik başarısına ve dolayısıyla matematik öğretiminin kalitesine etki etmesine rağmen öğretmen adaylarının çoğunun ispatın doğası ve önemini anlamada oldukça yetersiz oldukları ve ispata ilişkin bilgilerinin ezbere dayalı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla sonraki süreçte etkili matematik öğretimi yapabilmeleri ve ispatın doğasını kavrayabilmeleri için öğretmen adayları farklı etkinliklerle desteklenmiş ispat yapma aktiviteleri ile meşgul edilmelidirler. Bu şekilde ispat yapmaktan keyif almaları ve ispatın matematiğin öğretimindeki öneminin farkında olmaları sağlanmalıdır.

2.2.3. Matematiksel İspat Süreci ve Matematiksel İspatta Yaşanan Güçlükler

İspat, matematiğin temelini oluşturmaktadır. Öğrencilerin matematiğin soyut ve kavramsal yapısını anlamaları için ispat kavramını, ispatın ne olduğunu, neden ispat yapıldığını ve ispatlama sürecini bilmeleri çok önemlidir (Sarı, 2011). Ancak öğrenciler; matematiksel ispat yapmayı ve ispatı yorumlamayı öğrenmelerine ilişkin

- Matematiksel kavramların, ispat işlemlerinden daha soyut bir doğasının olmasından
- İspat teknikleri hakkındaki bilgi eksikliğinden
- Matematiksel dil ve notasyonu anlama eksikliğinden
- Problemdeki bütün bilgileri eş zamanlı olarak koordine edip kullanmada yetersizlikten
- Problem çözme becerisindeki eksiklikten
- Matematik ve ispatın doğasına yönelik inançlardan
- Diğer katılımcılar tarafından üretilen faktörlerden

kaynaklanan bir takım zorluklar yaşamaktadırlar (Moore, 1990).

Bireyler bir ispatı nasıl yapacaklarını bilmiyorlarsa, örnekler denemek ya da bir grafiğe bakmak gibi informal yaklaşımlar denemektedirler (Raman, 2002). Lisans düzeyinde matematik öğrencilerinden bir ispatı oluşturmaları beklenirken; öğrencilere ispatı nasıl oluşturacaklarını öğrenmelerine yardımcı olmak için zaman harcanmamakta ve dolayısıyla öğrencilerin karşılaştıkları zorluklar pek çok öğrencinin matematiği bırakmalarına sebep olmaktadır (Selden A. ve Selden J., 2007). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematik ispat yapma sürecini gözlemleyen ve ispat kavramı ile ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşlerini araştıran Polat ve Akgün'e (2016) göre; öğretmen adayları uzun ispatları, kabule dayalı ispatları ve daha önce hiç karşılaşmadıkları ispatları yapamamaktadırlar ve ispatı ezberlemeye çalıştıkları için uzun ispatlarda zorluk yaşamaktadırlar. Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının tamamı ispata nasıl başlayacağını bilemediğini ve benzer ispatlar olmadan, ilk defa karşılaştıkları bir ispatı yapamayacaklarını belirtmişlerdir. İspat kurmada doktora ve üniversite öğrencilerinin yaşadığı yöntem bilgisi eksikliğinden kaynaklanan zorlukları araştıran Weber'e (2001) göre; ispata yönelik başarısızlığın birincil nedeni yöntem bilgisi eksikliğidir. Hem daha fazla konuyu kapsayan hem de diğer matematiksel alanlarla ilgili olan diğer araştırmalar, bu nedenlerin nasıl genellenebileceğini belirtmektedirler. Yöntem bilgisi eksikliği öğrencilerin yaşadığı zorlukta belirli bir etken olması sebebiyle öğrencilerin etkili bir yöntem bilgisi elde etmeleri sağlanmalıdır.

Öğrencinin bir teoremi yüzeysel olarak anlaması ve doğruluğuna inanması o teoremi farklı durumlarda uygulayabileceğine dair garanti vermez. Örneğin; öğrenciler soyut cebirde herhangi altı elemanlı bir grubun üç elemanının bir alt grup oluşturacağını gösterebiliyorken, Lagrange teoremini yanlış bir şekilde kullanmaktadırlar (Hazzan ve Leron, 1994).

Yüksek lisans tezinde ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat başarı düzeylerini ve yanlış anlamlandırma nedenlerini araştıran Demiray (2013); öğretmen adaylarının aksine örnek vererek ve çelişki ile ispat yöntemlerindeki başarı düzeylerinin yüksek olduğunu ancak karşıt tersi ile ispat sorularına karşıt ters ifadelerin eşdeğerliliğini fark etmede ve anlamada güçlük yaşadıkları için yanlış cevap verdiklerini tespit etmiştir. Aksine örnek vererek ispat yönteminde karşılaşılan yanlış anlamlandırmanın sebeplerinden birinin öğrencilerin verdikleri örneklerin belirli bir ifadenin doğruluğunu ispatlamak için yeterli olduğunu düşünmeleri olarak ifade

etmiştir. Buradan öğretmen adaylarının deneysel bir argümanla geçerli bir ispat arasındaki farkı göremedikleri anlaşılmıştır. Bu hususa yapmış olduğu yüksek lisans tezinde değinen Ceylan'a (2012) göre; öğretmen adaylarının ispat sürecinde örneklerden yararlanmaları onların yeterli mantıksal çıkarımlara sahip olmadıkları anlamına gelebilmektedir. Ayrıca ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerini tespit etmeye çalışan Güler ve arkadaşlarına (2012) göre; öğretmen adayları matematiksel tümevarım adımları arasındaki ilişkiyi tam olarak kavrayamamışlar ve bu ispat yöntemini takip edilmesi gereken bir prosedür olarak algılamışlardır. Araştırmanın sonuçları, öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımı bildiğini fakat tümevarım hipotezini kullanarak tümevarım basamağını oluşturamadıklarını göstermektedir. Öğretmen adayları bu durumun işlem yapabilme becerileriyle doğru orantılı olduğunu ifade etmişlerdir. Jones (2000) ise yaptığı çalışmada; matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsallaştırmalarını incelemiş, ispat yapmaya ilişkin becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmış, ileri sınıflarda olanları da dâhil olmak üzere, etkili matematik öğretimi için gerekli matematiksel bilgiye sahip olmadıklarını ve bu şekilde mezun olduklarını tespit etmiştir. Bu araştırma ileri sınıflardaki öğretmen adaylarının teknik açıdan ispatı daha akıcı bir şekilde yapabildiklerini ancak, bunun onların kavramsal açıdan matematiksel bilgiyle ilişkilendirmelerinde bir fayda sağlamadığını ortaya koymuştur.

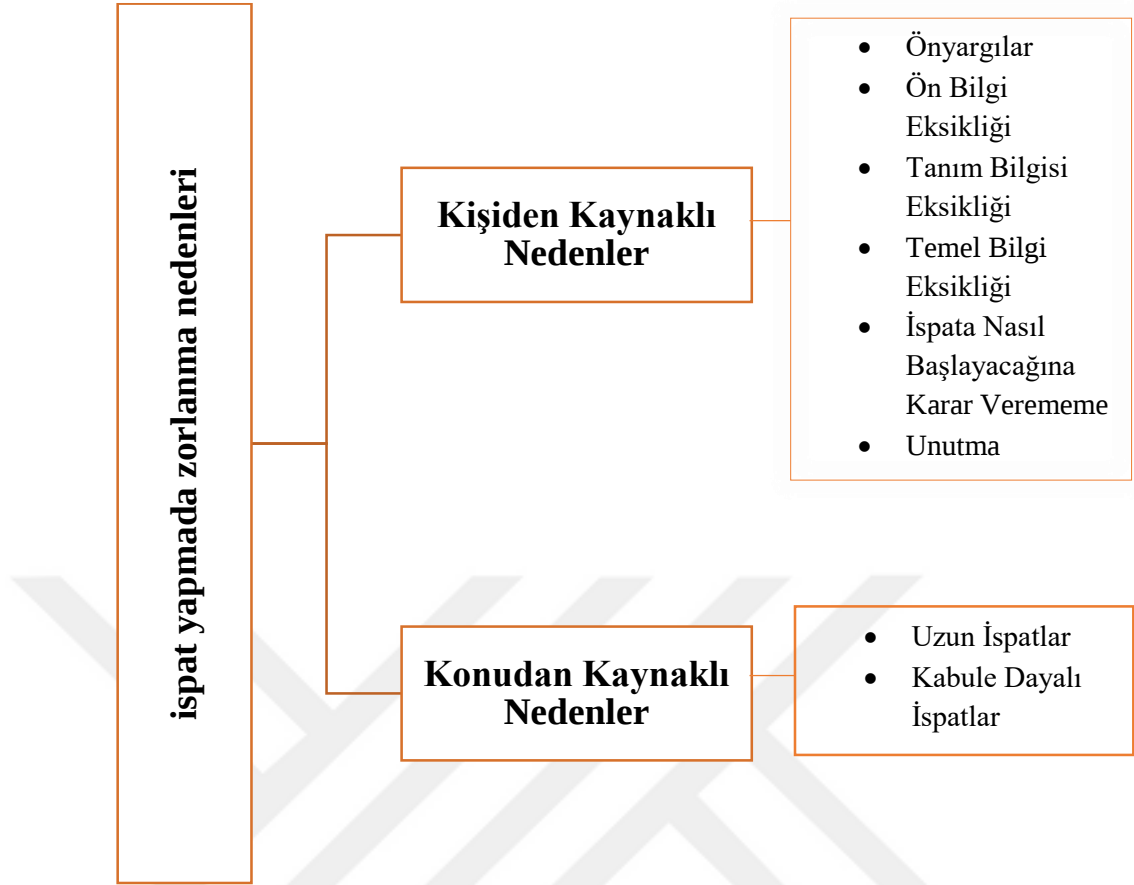
Karaoğlu (2010) yüksek lisans tez çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını incelemiş ve öğretmen adayının ispatı tamamlayabilmesi için yeterli düzeyde kavramsal bilgiye sahip olması ve bunu teoremin ispatında nasıl kullanacağını bilmesi gerektiğini belirtmiştir. İspat yaparken öğretmen adayının kaygı durumunun da etkili olduğunu, kaygı taşımayan öğretmen adaylarının ispatı başarıyla sonuçlandığını dolayısıyla özgüveninde artış olduğunu ve teorem ispatlarına karşı olumlu tutum geliştirebildiğini tespit etmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçlerini sesli düşünme protokolü ile inceleyen Şahin'e (2016) göre, öğretmen adayları tanım kullanılarak yapılabilecek temel seviyedeki ispatlar için bile zorlanmaktadırlar. Matematiksel ispat üzerine çalışma yapan araştırmacılardan biri olan Bayazit (2009), matematik öğretmeni adaylarının ispat yaparken matematiksel tanımları kullanmaları üzerine yaptığı

çalışmada matematik öğretmeni adaylarının; matematiksel ispatı, matematiksel tanımları ve bunların matematikteki rollerini anlamalarını, bu tanımları ispat yaparken kullanmalarını ve ispatın geçerliliğini değerlendirmelerine etkisini incelemiş, kümeler kuramı, lineer cebir ve geometri alanlarında katılımcıların anlayışlarındaki muhtemel farklılıkları ve bu farklılığın ispat üretmeye etkisini belirlemiştir. Matematik öğretmeni adayının konuyla ilgili ispat tecrübesi, zihninde yeterli kavram imajları ve farklı yollar izleyebilme becerisi varsa; bir matematik problemiyle karşılaştığında kavram imajlarına yönelmesinde ve ispat yapmaya başlama kabiliyeti olmasında önemli olmaktadır. Karaoğlu'na (2010) göre; öğretmen adayı, ispatını yapmak istediği teoreme ilgili kavramsal bilgiye sahip olmadığı zaman ispata başlayamamakta, teoreme ilgili zihninde yer alan bütün kavramları araştırarak ve hangisinin işine yarayacağını bulmaya çalışarak, ulaştığı bu kavramlar sayesinde ispata başlamakta fakat elindeki bilgi yeterli değilse ispatın sonunu getirememektedir.

Moore (1990) alanyazından da yararlanarak; Matematik bölümü lisans öğrencilerinin ispatı anlama ve ispat yapmada yaşadıkları zorlukları yedi başlık altında ele almıştır. Buna göre öğrenciler;

- tanımları bilmemekte veya ifade edememektedirler.
- kavramlar hakkında yetersiz sezgisel anlamaya sahiptirler.
- kavram imajları ispat yapmaya uygun değildir.
- kendi örneklerini oluşturmak ve kullanmakta başarısız veya isteksizdirler.
- ispatın bütün yapısını oluşturmak için tanımları nasıl kullanacaklarını bilmemektedirler.
- matematiksel dil ve notasyonu anlamakta ve kullanmakta başarısızdırlar.
- ispata nasıl başlayacaklarını bilmemektedirler.

Öğretmen adaylarının ispat yapma sürecini gözlemleyen Polat ve Akgün (2016); öğretmen adaylarının ispat yaparken hangi tanımları kullanacağına karar veremediklerini, ispata başlamadan önce herhangi bir plan yapmadıklarını ve ispata nasıl başlayacaklarına karar veremediklerini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispat yapmada yaşadıkları zorlukların sebeplerini ise; kişiden kaynaklı ve konudan kaynaklı olmak üzere iki başlık altında incelemişler ve aşağıdaki gibi şematize etmişlerdir:



Şekil 3.2. Öğretmen adaylarının ispat yapmada zorlanma nedenleri (Polat ve Akgün, 2016)

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerinin incelendiği bu araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır.

Nitel araştırma yöntemi Maxwell'e (2005) göre;

- ❖ Olayların, yaşanmış tecrübelerin, durumların ve bazı davranışların katılımcılar açısından ne anlama geldiği anlaşılmak isteniyorsa,
- ❖ Katılımcıların içinde bulundukları şartlar ve bu şartların davranışları üzerindeki etkileri anlaşılmak isteniyorsa,
- ❖ Beklendik/beklenmedik olgular ve bunların etkileri anlaşıldıktan sonra teoriler geliştirilmek isteniyorsa,
- ❖ Olayların ve faaliyetlerin ortaya çıktıkları süreçler ve bu süreçlerin etkileri gözlenmek isteniyorsa,
- ❖ Bu süreçlerle ilgili açıklamalar ortaya konmak isteniyorsa

kullanılmalıdır (Akt. Güler, Halıcıoğlu ve Taşgın, 2013).

Bu araştırmada da;

- ❖ Cebir alanında matematik öğretmeni adaylarının matematiksel bir ispat yaparken önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerini incelemek
- ❖ Bu süreçlerle ilgili açıklamaları ortaya koyarak:
 - Öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma süreçlerini temel bileşenler yardımıyla aşamalandırmak
 - Öğretmen adaylarının matematiksel ispat yaparken karşılaştıkları problemleri ortaya çıkarmak
 - Öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkında belirli bir düzeye getirilmelerine yardımcı olacak bilgileri tespit edebilmek

amaçlandığı için nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu çalışmada durum çalışması deseninden faydalanılmıştır. Durum çalışması; sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesidir ve araştırılmak istenen olgu, özünde sınırlı olmalıdır (Merriam, 2009/2013). Durum çalışması; araştırmacının gerçek yaşam, güncel sınırlı bir durum ya da belli bir zaman içerisindeki sınırlandırılmış durumlar hakkında çoklu bilgi kaynakları (gözlemler, mülakatlar, dokümanlar, raporlar vs.) aracılığıyla detaylı ve derinlemesine bilgi topladığı, bir durum betimlemesi ya da durum temaları ortaya koyduğu (Creswell, 2013/2015) ayrıca ‘nasıl’ ve ‘niçin’ sorularını temel alan, araştırmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayın derinliğine incelenmesi (Yıldırım ve Şimşek, 2008) ve ilgili kişilerin durumu ve olayların anlamı hakkında derinlemesine bilgi sahibi olunması imkânı sunan nitel bir araştırma yöntemidir (Merriam, 1998).

Bu araştırma; araştırmaya katılan beş öğretmen adayı, cebir konuları, 2014-2015 eğitim öğretim yılı ve uygulamalarda sunulan teoremlerin ispatları ile sınırlandırıldığı ve öğretmen adaylarının ispat yaparken önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerini derinlik odaklı incelemeyi amaçladığı için bir durum çalışmasıdır.

Durum çalışması veriden çok daha fazla değişkenin olduğu teknik olarak ayırt edici çok fazla durumla başa çıkan, tümevarımsal (üçgensel) bir şekilde birleştirilmesi gereken verilerle çok yönlü ifade kaynaklarına dayanan ve veri toplama ve analizine kılavuzluk etmek için teorik önerilerin önceden geliştirilmesinden yararlanan bir yöntemdir (Yin, 2009).

Durum çalışmaları; belli bir olay, program ya da olguya odaklanıyor olma (belirlilik), sonuçta elde edilen ürünü ve araştırılan olguyu zengin bir şekilde betimleme (betimleme) ve okuyucunun çalışmadaki olguyu daha iyi anlamasını, bilgilerini teyit etmesini (sezgisellik) sağlama olmak üzere üç özelliği vardır (Merriam, 2009/2013). Dolayısıyla bu çalışmada; matematik öğretmeni adaylarının önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerine odaklanılmış, bu süreçle birlikte araştırma sonucunda elde edilen bulgular zengin bir şekilde betimlenmiş ayrıca okuyucunun süreci ve anahtar fikirler yardımıyla matematiksel ispat adımlarını daha iyi anlaması ve tecrübe edebilmesi sağlanmaya çalışılmıştır.

Araştırmada birden fazla öğretmen adayı ile çalışıldığı için çoklu durum; öğretmen adaylarının yalnızca cebir konularına yönelik ispat yapma süreçleri bütüncül olarak incelendiğinden bütüncül çoklu durum çalışması kullanılmıştır. Çoklu durum çalışmalarında çeşitli durumlardan veri toplanır ve analiz edilir (Merriam, 1998). Bütüncül çoklu durum çalışmalarında birden fazla bütüncül olarak algılanabilecek durum söz konusudur ve her bir durum kendi içinde bütüncül olarak ele alınır ve daha sonra birbirleriyle karşılaştırılır (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

3.2. Çalışma Grubu

Sesli düşünme yönteminin uygulanabilirliğini artırmak için katılımcılar; sözlü ifade becerileri ve araştırmaya konu olan öğrenme alanında bilgi düzeyi gelişmiş bireylerden seçilmelidir (van Someren, Barnard ve Sandberg,, 1994). Sesli düşünme basit ve kolay uygulanabilir bir yöntem olmasına rağmen bazı durumlarda etkili bir yöntem olmaktan çıkabilir. Düşünceleri izleme, sözlere dökme, sözlü ifade etme bazı bireyler için güç olmaktadır. Kimi öğrenciler düşüncelerini ifade etmekte zorlanmakta, öğretmenlerden ya da diğer bireylerden çekindiği yahut küçük düşünme endişesi taşıdığı için konuşmaktan kaçınmaktadırlar. Kimileri ise bu yöntem karşısında bocalayarak zihinsel süreç ve aşamalarını tanımlamakta güçlük çekmektedirler (Güneş, 2012). Katılımcılar seçilirken bu olası etkilerin en aza indirilmesine dikkat edilmelidir (van Someren vd., 1994). Bu araştırmada gönüllülük esasına göre uygulama öncesi eğitime katılan 15 öğretmen adayından, kendini tanıyan, zihinsel süreçlerini net olarak ifade edebilen, dışa dönük ve araştırmacı ile sorunsuz iletişim kurabilen bireyler uygulama için seçilmiştir. Araştırmacı, üç yıl boyunca öğretmen adaylarının eğitim sürecine ve bu süreçteki tutum ve davranışlarına tanık olması sebebiyle yapmış olduğu informal gözlemler yardımıyla uygulamaya yönelik özellikleri taşıyıp taşımadıklarına karar verebilmiştir.

Sesli düşünme yönteminde katılımcıların belirlenmesinde dikkate alınması gereken bir diğer husus da katılımcıların uygulamalarda kullanılacak cebir konuları ile ilgili bilgi sahibi olmaları gerekliliğidir. Bu sebeple araştırmaya katılacak öğretmen adayları Lineer Cebir I-II ve Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini almış olanlar arasından belirlenmiştir.

Araştırmacının zaman ve iş gücü kaybını önlemek amacıyla uygun örnekleme yöntemiyle kolay ulaşılabilecek bireylerden belirli ölçütlere bağlı kalarak araştırmaya dâhil olacak öğretmen adayları seçilmiştir. Dolayısıyla araştırmada kullanılan örnekleme yöntemi; kolay ulaşılabilir bireylerden katılımcılar belirlendiği için uygun örnekleme ve örneklem oluşturulurken belli ölçütlere bağlı kalındığı, rastgele bir seçim yapılmadığı için seçkisiz olmayan örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemidir. Uygun örneklemede araştırmacı kolaylıkla ulaşabildiği bireylerden katılımcılarını seçer (Cohen, Manion ve Morrison, 2005). Amaçlı örnekleme, çalışmanın amacına bağlı olup bilgi açısından zengin durumların seçilerek derinlemesine araştırma yapılmasına olanak tanır. Belli ölçütleri karşılayan veya belli özellikleri taşıyan bir veya daha fazla özel durumda çalışılmak istenildiğinde tercih edilir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2010). Bu sebeple bu araştırmaya katılacak öğretmen adayları, uygulama öncesi eğitime katılan, kendini net ifade edebilen, araştırmacı ile sorunsuz iletişim kurabilen, Lineer Cebir I-II ve Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini almış dolayısıyla zengin veri sağlayabilecek öğretmen adayları arasından gönüllülük esasıyla belirlenmiştir. Önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan bireylerle çalışıldığı için araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu bağlamda bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi matematik eğitimi bölümü öğrencilerinden üçüncü Sınıf öğrenimini tamamlamış ikisi erkek üçü kız olmak üzere beş öğretmen adayı ile çalışılmıştır. Katılımcıların özellikleri Tablo 3.1 de verimştir.

Tablo 3.1.

Katılımcıların Belirgin Bireysel Özellikleri

<i>Katılımcının Adı</i>	<i>Bireysel Özellikleri</i>
Gül	Sakin ve oldukça başarılı. Sessiz bir yapısı var ancak etkinlikler sonunda sesli düşünme tekniğine uyum sağladı.
Ezgi	Heyecanlı, başarı odaklı, başarısızlığa tahammülü yok, oldukça konuşkan bir yapısı var.
Ceyda	Sakin ve kararsız bir yapıda olmasının yanında düşündüklerini rahatlıkla paylaşabilen orta düzeyde başarılı bir birey.

Tablo 3.1. (Devamı)

Umut	Oldukça başarılı olmasına karşın; dağınık, heyecanlı ve düşündüklerini rahatlıkla paylaşabilen bir birey.
Hüseyin	Sakin ve orta düzeyde başarılı bir birey, düşündüklerini sesli olarak ifade etmede yer yer sorun yaşamış bu yüzden mülakatçının uyarılarına ihtiyaç duymuştur.

3.3. Araştırmacının Rolü

Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçlerini incelemek için yapılan bu araştırmada öğretmen adaylarının zihinsel süreçlerini ve düşüncelerini rahat bir şekilde ifade edebilmeleri için uygulama öncesinde öğretmen adayları ile informal görüşmeler yapılmıştır. Araştırmacı hem pilot hem de esas uygulamaya dâhil olan katılımcıların tamamını bireysel olarak tanımaktadır ve sağlıklı bir iletişim kurmaya gayret göstermiştir. Bu sebeple katılımcılar sesli düşünme sırasında oluşabilecek kendini ifade edememe veya küçük düşme endişesiyle konuşamama durumlarını yaşamamışlardır. Araştırmacı, katılımcıların cebir derslerini yürüten öğretim elemanlarının görüşleri doğrultusunda ispatı tamamlanması istenen teoremleri şekillendirmiştir. Bu şekilde katılımcıların ezbere dayalı değil de anahtar fikirlere odaklı bir düşünme sürecine girmeleri sağlanmaya çalışılmıştır.

Uygulamalar esnasında öğrencilerden sesli düşünerek ispatları yapmaları istenmiş, sesli düşünmeye ara verdikleri anda araştırmacı tarafından yeniden sesli düşünmeye teşvik edilmişlerdir. Ancak sesli düşünmede sorun yaşamayan katılımcıların düşünme süreçlerine araştırmacı herhangi bir müdahalede bulunmamıştır. Çünkü sesli düşünme yöntemi uygulanırken "Konuşmaya devam et" gibi nötr ipuçları, kişileri tekrar yüksek sesle düşünmeye teşvik eder, ancak düşüncelerin iç süreçlerine dış fikirler ekleyerek veriler önyargılı tutulmaz (Johnstone vd., 2006). Sesli düşünme protokolleri tamamlanmak zorunda değildir çünkü birey düşüncelerinin yalnızca bir kısmını sözelleştirebilir bu nedenle verilerin tam anlamıyla yorumlanması protokolleri analiz edecek araştırmacının görevidir (van Someren vd., 1994). Bu çalışmada araştırmacı video kayıtlarını seyrederek ve sesli düşünme protokollerini inceleyerek verileri tam anlamıyla yorumlamaya çalışmıştır.

Bu araştırmada anahtar fikirlerin belirlenmesi aşamasındaki uzman görüşlerinin alınması, esas uygulama öncesi etkinlikler yapılması, uygulamaların video kayıt altına alınarak yürütülmesi ve verilerin analiz edilerek yorumlanması süreçlerinin tamamı araştırmacının kendisi tarafından gerçekleştirilmiştir.

3.4. Veri Toplama Araçları

3.4.1. Sesli Düşünme Yöntemi ile Desteklenmiş Yarı Yapılandırılmış Mülakat

Bu araştırmanın ikinci ve üçüncü alt problemleri olarak belirlenen, ‘‘Matematik  ğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken anahtar fikirleri kullanabilme durumları nedir?’’ ve ‘‘Matematik  ğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken temel bileşenleri tamamlama durumları nasıldır?’’ sorularına cevap bulabilmek için; nitel veri toplama araçlarından görüşme kullanılmış ve bu bağlamda sesli düşünme yöntemi ile desteklenmiş yarı yapılandırılmış mülakat tekniğinden faydalanılmıştır.

Yarı yapılandırılmış mülakatlar, hem sabit seçenekli cevaplamayı hem de ilgili alanda derinlemesine gidebilmeyi birleştirir ve g r ş lene kendini ifade etme imkânı verme, gerektiğinde derinlemesine bilgi sağlama gibi avantajlara sahiptir (Büyüköztürk vd., 2010). Yarı yapılandırılmış mülakatlarda araştırmacı soruları önceden hazırlar ancak görüşme sırasında katılımcılara kısmi esneklik sağlayarak oluşturulan soruların yeniden düzenlenmesine ve tartışılmasına izin verir dolayısıyla katılımcıların da araştırma üzerinde kontrolleri söz konusudur (Ekiz, 2009). Ayrıca araştırmacı katılımcıların araştırma konusu hakkındaki görüşlerini derinlemesine öğrenme fırsatı bulur (Güler vd., 2013). Bu çalışmada araştırmacı anahtar fikirler yardımıyla ispatları temel bileşenlere ayırmıştır. Katılımcılardan diğer temel bileşenlerdeki anahtar fikirleri kullanarak eksik bırakılan temel bileşenleri tamamlamaları beklenmiştir. Dolayısıyla katılımcılara önceden hazırlanmış ispat tamamlama formu verilmiş yarı yapılandırılmış mülakatlarla ispatları tamamlama süreçleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ancak i  içe geçmiş pek çok süreçten oluşan ispata yönelik düşünme sürecinde, katılımcıların düşüncelerini derinlik odaklı ortaya çıkarabilmek ve dolayısıyla hangi temel bileşende sorun yaşadıklarını ve verilen anahtar fikirleri kullanabilme yeterliklerini ortaya

çıkarmak için sesli düşünme yöntemi ile bu yarı yapılandırılmış mülakatlar desteklenmeye çalışılmıştır. Katılımcılar sesli düşünmeden uzaklaştığında araştırmacı çeşitli ifadelerle ('Ne düşünüyorsun?', Düşündüklerini sesli olarak anlat., Ne geçiyor zihninden?, Ne demeye çalışmış, ne anladın?) mülakatların sesli düşünme yöntemiyle ilerlemesini sağlamaya çalışmıştır. Katılımcılar zihinsel süreçlerini tanımlamakta güçlük çektiklerinde araştırmacı ispata yönelik kurduğu çeşitli cümlelerle (Ne için onu göstermeliyiz?, Orada hangi özellikleri kullandık? Bu ispatta genel olarak ne yapmış? Bir üst basamakla bir alt basamağı nasıl birleştirebiliriz?) sürece yön vermiştir. Sesli düşünmede sorun yaşanmadığı durumlarda ise sürece müdahale etmemiş ve öğretmen adayının kendini ifade etmesine fırsat vermiştir. Ayrıca araştırmacı 'Ne yardımcı oldu sana burada?', Bu ispatta genel olarak ne yapmış?, Neden böyle yazdın?' gibi sorularla öğretmen adaylarının düşüncelerini sözlü olarak ifade etmelerine imkân sağlamaya çalışmıştır.

Mülakatların yapıldığı tarihler ve video kayıtlarının süreleri Tablo 3.2 de verilmiştir.

Tablo 3.2.

Sesli Düşünme Yöntemiyle Desteklenmiş Yarı Yapılandırılmış Mülakatların Süre ve Tarih/Saat Bilgisi

<i>Katılımcının Adı</i>	<i>Mülakat Süresi</i>	<i>Mülakatın Yapıldığı Tarih ve Saat</i>
Gül	30 dakika 1 saniye	22.05.2015 / 15:24
Ezgi	22 dakika 37 saniye	26.05.2015 / 11:13
Ceyda	42 dakika 21 saniye	28.05.2015 / 14:50
Umut	26 dakika 38 saniye	20.05.2015 / 15:30
Hasan	26 dakika 37 saniye	22.05.2015 / 16:52

3.4.2. Doküman İnceleme ve Uzman Görüşü

Bu araştırmanın birinci alt problemi olan “Matematiksel ispat sürecini oluşturan temel bileşenler nelerdir?” sorusuna cevap bulabilmek için doküman inceleme ve uzman görüşüne başvurulmuştur. Dokümanlar, nitel araştırmalarda etkili bir şekilde

kullanılması gereken önemli bilgi kaynaklarıdır. Doküman inceleme, araştırılması hedeflenen olgu veya durumlar hakkında yazılı materyallerin incelenmesini kapsar (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırmanın inanılrlığını artırmak için uygulanan yöntemlerden bir diğeri de uzman görüşünün alınmasıdır.

Bu araştırmada anahtar fikirler belirlenirken, temel bileşenler oluşturulurken, uygulama soruları hazırlanırken; Cebir alanında akademik çalışmalar yapan ve Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi ile Lineer Cebir derslerini yürüten dört uzmandan, pilot ve esas uygulamalardan sonra veriler analiz edilerek yorumlanırken de iki uzmandan inceleme yapmaları ve görüş belirtmeleri talep edilmiş ve uzmanların görüşleri doğrultusunda sürece yön verilmiştir. Araştırmada Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi ile Lineer Cebir derslerinin içerikleri, ders kitapları, dersi veren öğretim elemanlarının ders notları, öğrenci ders notları, araştırmacının araştırma süresince tuttuğu günlüğü ve ilgili alanyazın incelenerek uzman görüşleri sonucunda elde edilen verilerle ilişkilendirilmiş bu şekilde yöntem çeşitlemesi yapılarak araştırmanın inanılrlığı da artırılmaya çalışılmıştır.

3.5. Veri Toplama Süreci

3.5.1. Anahtar Fikirlerle Desteklenmiş İspat Tamamlama Formunun Hazırlanma Süreci

İspat yapma süreci birden fazla düşünme süreç ve aşamasını içinde barındıran ve matematiksel bilgilerin içiçe kullanıldığı karmaşık ve hiyerarşik bir süreçtir bu nedenle bireyler ispat yaparken ne yapacaklarını bilmedikleri bir çıkmaza girmektedirler (Selden A. ve Selden J., 2007; Weber, 2001). Dolayısıyla bu karmaşık süreç incelenirken ispatlar basamaklara ayrılmış bu şekilde aşama aşama ispat tamamlama sürecinin ortaya çıkarılabilmesi amaçlanmış ve bireylerin bir teoremin ispatını yapmaları değil de basamakları eksiltilecek verilmiş ispatları tamamlamaları beklenmiştir. İspatı oluşturan bu basamaklara ispatın temel bileşenleri, bu temel bileşenleri oluşturan ipuçlarına ise anahtar fikirler denmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken anahtar fikirleri dolayısıyla temel bileşenleri kullanabilme yeterliklerini ve hangi temel bileşende problem yaşadıklarını ortaya çıkarabilmek için Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi dersinin içeriği, ders kitapları, dersi veren öğretim

elemanlarının ders notları, öğrenci ders notları incelenmiş ve bir taslak temel bileşen formu oluşturularak cebir alanında uzman üç akademisyenin görüşüne sunulmuştur. Yapılan doküman incelemesi ve uzman görüşleri ile şekillenen temel bileşen formunun son hali bulgular başlığı altında detaylı olarak anlatılmıştır. Uzmanların görüşleri doğrultusunda ispata yönelik temel bileşen formuna son şekli verilmiş ve buna göre ilgili derslerin içeriklerine uygun yedi teoremin ispatları temel bileşenlerine ayrılarak yeniden uzman incelemesine sunulmuştur (EK 2). Uzmanlardan hazırlanacak ispat tamamlama formunda hangi teoremlerin kullanılması ve hangi temel bileşenlerin eksik bırakılması gerektiği konusunda fikir alınmıştır. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi dersi içeriğine yönelik seçilen yedi teoremden uzmanların, öğretmen adaylarının bilişsel seviyelerine daha uygun olduğunu düşünerek üzerinde hem fikir oldukları üç teorem uygulamada kullanılmak üzere seçilmiştir. Uzmanlardan biri ders anlatma sürecindeki deneyimleri nedeniyle homomorfizma ispatına yönelik bir teoreme mutlaka yer verilmesi ve homomorfizmanın özelliğinin kullanılmasına yönelik temel bileşenin eksik bırakılması gerektiğini ifade etmiştir. Diğer iki uzman Lineer Cebir dersinin içeriği esas alınarak iki teoremin daha ilave edilmesinin cebir alanına ilişkin sonuçlar elde etmeye katkı sağlayacağı yönünde ortak görüş bildirmişlerdir. Bu uzmanlardan biri ayrıca öğretmen adaylarının bilişsel seviyelerine uygun olarak seçilmiş bir teorem olmadığını düşündüğü; “ G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu takdirde, H nin G içindeki sol yan kümeleri G nin bir parçalanışını oluştururlar.” teoremi yerine bu teoremle eşdeğer olan ve iki kümenin eşitliği ilkesine dayanan “ $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a = x(mod H)\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.” teoreminin ispatına da uygulamada yer verilmesi gerektiğini belirtmiştir. İlgili teoremin ispatı yapılarak temel bileşenlerine ayrılmış ve bu ispatta hangi temel bileşenlerin eksik bırakılması gerektiğine de yine bu uzmanla birlikte karar verilmiştir (EK 2).

Lineer Cebir ders içeriği ve ders notları da farklı bir uzmanla değerlendirilip öğretmen adaylarının problem yaşadığı iki teoremin ve eksik bırakılacak temel bileşenin seçimine bu uzmanla karar verilmiş sonrasında bu iki teorem ve eksik bırakılması planlanan temel bileşenler diğer uzmanların da onayına sunulmuştur. Bu şekilde yedi teoremden oluşan bir ispat tamamlama formu hazırlanmıştır (EK 3, EK 4).

Tablo 3.3’te ispat tamamlama formu için seçilen teoremler ve bu teoremlerin ispatlarında hangi temel bileşenin eksik bırakıldığına ilişkin bilgilere yer verilmiştir.

Tablo 3.3.

Teoremler ve Eksik Bırakılan Temel Bileşenler

Teoremin İfadesi	Eksik Bırakılan Temel Bileşen / Bileşenlerin Adı
Teorem.1 $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.	İşlem Yapma, Tanım Kullanma, Özellik Kullanma ve Kavramsal Bilgileri Seçip Kullanma
Teorem.2 $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G: a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.	Kavramsal Bilgileri Seçip Kullanma, İşlem Yapma, Özellik Kullanma ve Önceki Bilgileri Kullanma
Teorem.3 Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.	Hipotezi ve Hükmü Belirleme
Teorem.4 Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.	Tanım Kullanma ve İspatı Tamamlama
Teorem.5 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.	Özellik Kullanma ve İşlem Yapma
Teorem.6 S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.	Kavramsal Bilgileri Seçip Kullanma, Önceki Bilgileri Kullanma ve İspatı Tamamlama
Teorem.7 U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.	Hipotezi Kullanma ve Kavramsal Bilgileri Kullanma

3.5.2. Pilot Uygulama

Araştırmanın bu bölümünde pilot uygulama yapılmasının amacı ve uygulama süreci ile pilot uygulama sonrasında yapılan değişiklikler ve pilot uygulamanın araştırmacıya sağladığı faydalardan bahsedilmiştir.

Araştırmacı tarafından doküman incelemesi ve uzman görüşleri yardımıyla oluşturulan anahtar fikirlerle desteklenmiş ispat tamamlama formunun araştırmanın amacına hizmet edip etmediğini test edebilmek ve araştırmacının sesli düşünme yönteminde deneyim kazanmasını sağlayabilmek amacıyla pilot uygulama yapılmıştır. Pilot uygulama; 2013-2014 eğitim öğretim yılı bahar yarıyılı sonunda yapılmış, uygulamaya Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II ve Lineer Cebir I-II derslerini almış 10 öğretmen adayı gönüllü olarak katılmıştır. Katılımcılara imzalatılan gönüllülük sözleşmesinde görüşmelerin video kayıt altına alınacağı ve bilgilerinin gizli tutulacağı konusunda teminat verilmiştir. Herbir öğretmen adayı ile yapılan uygulama ortalama 30 dk sürmüş ve video kayıt cihazıyla kaydedilmiştir.

Pilot uygulama sonunda elde edilen bilgiler ışığında uygulama süreci yeniden düzenlenmiştir. Pilot uygulama sonrasında yapılan değişiklikler şu şekildedir:

- I. Pilot uygulama öncesinde katılımcılara düşüncelerini sesli olarak ifade etmeleri hatırlatılmıştır. Buna rağmen bazı katılımcıların yöntem karşısında bocalayarak yalnızca verilen ispatlara odaklandıkları, düşüncelerini sesli ifade etmeden ispatı tamamlama gayretine girdikleri görülmüştür. Dolayısıyla esas uygulama öncesinde katılımcılara sesli düşünmenin gerçekte ne olduğuna ilişkin uygulamalı bir etkinlik düzenlenmesine karar verilmiştir.
- II. Katılımcılardan birkaçının düşüncelerini açık ve net bir şekilde ifade etmekte zorlandıkları ve araştırmacıdan utandıkları için konuşmaktan çekindikleri gözlenmiş, bu nedenle esas uygulamada katılımcılar belirlenirken bu olası etkilerin en aza indirilmesine dikkat edilmiş; kendini ifade edebilen, araştırmacıyla sorunsuz iletişim kurabilen dışa dönük bireyler seçilmiştir.
- III. Pilot uygulamada kullanılan ispat tamamlama formunda “ G bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” şeklinde ifade edilen 1. teorem ile “ G bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” olarak ifade edilen 2. teorem herhangi bir sorunla karşılaşılmamış olmasına rağmen araştırmaya dâhil olan cebir uzmanlarından birinin önerisi üzerine ifadelerin daha net olmasını sağlamak amacıyla grup işlemi belirtilerek “ $(G, \cdot)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” ve “ $(G, \cdot)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” şeklinde düzenlenmiştir.

- IV. Pilot uygulama esnasında video kayıt cihazı dolduğu için uygulamalarda aksaklıklar yaşanmış bu nedenle esas uygulama öncesinde video kayıt cihazının kapasitesi artırılmıştır.

Pilot uygulamanın araştırmacıya sağladığı faydalar şu şekildedir:

- I. Araştırmacı pilot uygulama yardımıyla sesli düşünme yöntemiyle desteklenmiş mülakatları yönlendirme ve yönetme konusunda tecrübe kazanmıştır.
- II. Araştırmacının katılımcıları sesli düşünmenin amacına hizmet edecek şekilde belirlemesini sağlamıştır.
- III. Pilot uygulama ile esas uygulamada kullanılacak olan ispat tamamlama formunun araştırmanın amacına hizmet edip etmediği,
- IV. İspat tamamlama formunda belirlenen ve katılımcıların ispatı tamamlamalarına yardım etmesi beklenen anahtar fikirlerin araştırmanın amacına uygun seçilip seçilmediği,
- V. İspat tamamlama formunda kullanılan teoremlerin katılımcıların bilişsel seviyelerine uygun olup olmadığı test edilebilmiştir.
- VI. Esas uygulama sürecinin yapılandırılması hakkında araştırmacıya fikir vermiştir.

3.5.3. Esas Uygulama

Gerard Scallan'a (2004) göre sesli düşünme yöntemi iyi uygulanmalıdır (Akt. Güneş, 2012). Bu nedenle pilot uygulama sürecinde katılımcıların sesli düşünme yöntemini bilmedikleri için yer yer sessiz kalmaları nedeniyle bir takım verilere ulaşmada sorun yaşanmış dolayısıyla esas uygulama öncesinde gönüllülere sesli düşünme yönteminin aslında ne olduğuna ilişkin ilki 40 dk ikincisi 15 dk olan iki etkinlik düzenlenmiştir. 15 gönüllü matematik öğretmeni adayının katıldığı etkinliklerin ilkinde sesli düşünmenin gerçekte ne olduğu, yararları, ilkeleri, ölçütleri, problem çözme becerilerini geliştirmeye etkisi anlatılmış, örnek bir teorem ispatı sesli düşünme yöntemi ile yapılmıştır. İkinci uygulamaya kadar katılımcıların kendilerinin sesli

düşünme yöntemini kullanarak bireysel olarak ispatlayacakları bir teorem ödev olarak verilmiştir.

İki hafta sonra ikinci etkinlikte verilen ödev sesli düşünme yöntemi ile katılımcılarla birlikte uygulamalı olarak ispatlanmıştır. Sesli düşünme yöntemi ile ilgili katılımcıların informal olarak fikirleri alınmıştır. Bu informal görüşmeyle etkinlikler sonunda öğretmen adaylarının sesli düşünme yöntemini algılayıp algılamadıkları ve yöntemi ikinci etkinliğe kadar içselleştirip içselleştiremedikleri tespit edilmeye çalışılmıştır.

Pilot uygulama sürecinde bazı katılımcıların düşüncelerini ifade etmekte zorlandıkları ve araştırmacıdan ya da ispat tamamlama süreçlerinin biri tarafından izleniyor olmasından utandıkları için konuşmaktan çekindikleri gözlenmiştir. Dolayısıyla esas uygulamada katılımcıların belirlenmesi aşamasında uygulama öncesi etkinliklere katılan 15 gönüllü matematik öğretmeni adayından bu olası etkilerin en aza indirilmesine dikkat edilerek seçilen; kendini açık ve net bir biçimde ifade edebilen, araştırmacıyla sorunsuz iletişim kurabilen dışa dönük 5 öğretmen adayı ile uygulamalar yürütülmüştür.

Öğretmen adaylarının anahtar fikirlerle desteklenmiş ispat tamamlama formunu sesli düşünme ile tamamlama süreçleri video kayıt cihazı ile kaydedilmiştir.

3.6. Araştırmanın İnandırıcılığı, Aktarılabilirliği, Tutarlılığı ve Teyit Edilebilirliği

3.6.1. Araştırmanın inandırıcılığı

Araştırmanın inandırıcılığı; araştırılan durumun açıklamalarının gerçek durumu ne kadar yansıttığı ile ilgilidir (McMillan ve Schumacher, 2010; Merriam, 2009/2013). Bu araştırmanın inandırıcılığını artırmak için aşağıdaki ölçütlere dikkat edilmiştir:

- ✓ Araştırmacı elde ettiği sonuçları birbirleriyle sürekli karşılaştırarak, yorumlayarak ve kavramsallaştırarak, araştırmaya katılanların bile açıkça farkında olmadıkları bazı örüntüleri ortaya çıkarmalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Katılımcıların bir ispatı tamamlarken hangi temel noktada ne tür bir düşünme sürecinden geçtiklerini ortaya çıkarmak amacıyla temel bileşenler

kullanılarak ispatlar basamaklandırılmış ve sesli düşünme yöntemi ile zihinsel süreçleri derinlik odaklı ortaya konmuştur.

- ✓ Çeşitleme; farklı veri kaynakları, farklı veri toplama ve analiz yöntemleri kullanılarak araştırma sonuçlarının inanılabilirliğini artırmaya yönelik çabaların bütünüdür dolayısıyla nitel araştırmalarda inandırıcılığın ve tutarlılığın sağlanmasında kullanılan önemli stratejilerden biridir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Doküman incelemesi ve uzman görüşleri sonucunda elde edilen veriler birbirleriyle ilişkilendirilmiş ve bu şekilde araştırmanın inandırıcılığı artırılmıştır.
- ✓ Araştırma süresince ham verilerle ortaya çıkmaya başlayan bulguların birbiriyle örtüşme ve uyumu ve kesin olmayan yorumlarla ilgili olarak meslektaşlarla görüşme ve tartışmalar yapılması önemlidir (Merriam, 2009/2013). Uygulama öncesi anahtar fikirlerin belirlenmesi aşamasında, pilot ve esas uygulamalar sonrasında, verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması sürecinde uzman incelemelerine başvurulmuştur. Anahtar fikirler belirlenirken, pilot ve esas uygulamalar şekillendirilirken dört uzmanla ayrı ayrı görüş ve değerlendirme toplantıları yapılmış, verilerin analiz ve yorumlanmasında ise iki uzmandan destek alınmıştır.
- ✓ Ses kayıtları, fotoğraflar ve video kayıtları doğru ve nispeten eksiksiz kayıtlar sağlarlar. Verilerin kullanılabilir olması için, veri kaydını etkileyen durumsal özellikler (ekipmanın arızalanması, video çekim açısı ve teknik ekipman kullanımının durum üzerine etkileri gibi) kaydedilmelidir (McMillan ve Schumacher, 2010). Bu araştırmada uygulamalar video kayıt altına alınmış bu şekilde katılımcıların ispat yapma süreçleri eksiksiz bir şekilde kaydedilmiştir.
- ✓ Belli bir süre boyunca veri toplamak araştırmanın geçerliğini artıran unsurlardan biridir (Merriam, 1998). Bunu sağlayabilmek için araştırmacı veri kaynakları ile uzun süreli bir etkileşim içinde olmalıdır. Görüşme süresi ilerledikçe geçen zaman içinde bir güven ortamı oluşur ve katılımcı verdiği yanıtlarda daha samimi olabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırmacı, araştırma öncesinde üç yıl süreyle eğitim süreçlerine dâhil olduğu

katılımcılarla etkili bir iletişim sağlayabilmiş, uygulama öncesi yapılan iki etkinlikte bu iletişimi pekiştirmiş ayrıca uygulama süresini uzun tutmuştur.

3.6.2. Araştırmanın Aktarılabilirliği

Araştırmanın aktarılabilirliği; okuyucuların kendi durumları ile araştırılan durumun ne derecede örtüştüğünü görebilmelerini ve böylelikle araştırma bulgularının farklı durumlara uygulanabilirliğini sağlamak amacıyla araştırma probleminin çerçevesini oluşturmayı, verilerin elde ediliş şekillerini, katılımcılarla ilişki kurabilmeyi, özel yorumlamalar geliştirmeyi ve araştırmacının nitel yaklaşımı seçme gerekçelerini içeren kapsamlı bir kavramdır (McMillan ve Schumacher, 2010; Merriam, 2009/2013).

- ✓ Nitel araştırmalarda genele ait bilgileri ortaya koymak yerine hem genele hem de özele ait bilgilere ulaşma yönelimi olduğundan veri kaynaklarının farklılığı yansıtacak biçimde seçilmesi önemlidir dolayısıyla aktarılabilirliği artırmak için amaçlı örnekleme yöntemleri kullanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmış ve uygulama öncesi eğitime katılan, kendini net ifade edebilen, araştırmacı ile sorunsuz iletişim kurabilen, Lineer Cebir I-II ve Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi I-II derslerini almış olduğu için zengin ve çeşitli verilere ulaşılmasını sağlayabilecek şekilde katılımcılar belirlenerek araştırmanın aktarılabilirliği artırılmıştır.
- ✓ Araştırma sonuçlarının dayandığı verilerin yeterli düzeyde betimlenmesi ve çalışmayı belirli bir bağlama oturtmak için gereken detaylı bir tanımlama yapılmalıdır (Merriam, 2009/2013; Yıldırım ve Şimşek, 2008). Ayrıca araştırmanın her bir aşaması ve izlenen yol detaylı olarak tanımlanmalıdır (Büyüköztürk vd., 2010). Bu araştırmada verilerin toplanması ve analiz edilmesi süreçleri ile uygulama ortamı ve katılımcılar detaylı bir anlatımla okuyucuya aktarılmış ve ayrıca bulgular doğrudan aktarma yoluyla bir bütünlük içerisinde sunulmuştur.

3.6.3. Araştırmanın Tutarlılığı ve Teyit Edilebilirliği

- ✓ Nitel araştırmalarda olay ve olgularda bir değişkenlik söz konusudur ancak önemli olan bu değişkenliği araştırmaya tutarlı bir biçimde yansıtabilmektir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmanın tutarlılığını sağlayabilmek için yarı yapılandırılmış mülakatlarda katılımcılara farklı davranılmamış, süreç kayıt altına alınmış ayrıca veriler; araştırmacı tarafından yorum yapılmasını önlediği ve herkes tarafından erişilebilen sözlü protokolleri veri olarak ele aldığı böylece nesnel bir yöntem oluşturduğu için (van Someren vd., 1994) sesli düşünme yöntemi esas alınarak cümle cümle kodlanmıştır.
- ✓ Nitel araştırmalarda sonuçların gerçeği yansıtması ve araştırmacının öznel yargıları ile varsayımlarından uzak olması beklenir. Bu nedenle dışarıdan bir uzman sonuçların ve yorumların ham verilerine geri gidildiğinde teyit edilip edilmediğine ilişkin bir değerlendirme yapar (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada verilerin analizi ve yorumlanmasında iki uzmandan teyit incelemesi yapmaları istenmiştir.

Araştırmanın inandırıcılığını, aktarılabilirliğini, tutarlılığını ve teyit edilebilirliğini sağlamak amacıyla alınan önlemler Tablo 3.4'te özetlenmiştir.

Tablo 3.4.

Araştırmanın İnanırıcılığı, Aktarılabilirliği, Tutarlılığı ve Teyit Edilebilirliği

İnanırıcılık	
<i>Derinlik Odaklı Veri Toplama</i>	Araştırmada sesli düşünme yöntemi ile elde edilen sonuçlar birbirleriyle sürekli karşılaştırılarak yorumlanmış ve kavramsallaştırılmıştır.
<i>Çeşitleme</i>	Veri toplama araçlarında doküman inceleme ve yarı yapılandırılmış mülakat yöntemleri kullanılarak çeşitleme yapılmış bu şekilde araştırmanın inanılabilirliği artırılmıştır.
<i>Uzman İncelemesi</i>	Araştırma sırasında hem uygulama öncesi anahtar fikirlerin belirlenmesi aşamasında hem de pilot ve esas uygulamalar sonrasında uzman görüşüne başvurulmuştur.

Tablo 3.4. (Devamı)

<i>Verilerin Dijital Ortamda Kaydedilmesi</i>	Uygulamalar video kayıt altına alınmış bu şekilde katılımcıların ispat yapma süreçleri eksiksiz bir şekilde kaydedilmiştir.
<i>Uzun Süreli Etkileşim</i>	Uygulama öncesinde katılımcılarla yapılan etkinlikler süresince etkileşim yaşanmıştır.
Aktarılabilirlik	
<i>Örnekleme Seçimi</i>	Araştırmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak araştırmanın aktarılabilirliği artırılmıştır.
<i>Ayrıntılı Betimleme</i>	Çalışmada katılımcıların belirlenmesi ve veri toplama süreci betimlenerek araştırma sorularına verilen cevaplar doğrudan aktarma yoluyla bir bütünlük içerisinde okuyucuya sunulmuştur.
Tutarlılık	Görüşmede sorular katılımcılara benzer yaklaşımlarla yöneltilmiş, verilen cevaplar yazılı ve sözlü olarak kayıt altına alınarak nesnellik sağlanmıştır.
Teyit Edilebilirlik	Araştırmada ulaşılan sonuçlar ve veriler sürekli karşılaştırılmış ve iki farklı uzman teyit incelemesi yapmıştır.

3.6.4. Etik Konular

Bu çalışmada katılımcıların tamamı araştırmanın amacına yönelik bilgilendirilmişlerdir. Araştırmada kullanılan isimler araştırmacı tarafından katılımcılara verilmiş takma isimlerdir. Ayrıca uygulama sırasında rahat olmalarını sağlamak amacıyla; katılımcılara görüşmelerin video kayıt altına alınacağı ancak kişisel bilgilerinin korunacağı ve çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcıların herhangi bir olumsuzluk yaşamayacağı teminatını veren ve araştırma hakkında katılımcıları bilgilendiren bir gönüllülük sözleşmesi okutularak imzalatılmıştır (EK 1).

3.7. Verilerin Analizi

Durum çalışması deseninde elde edilen veriler analiz edilirken alt problemler önemli bir işleve sahiptir. Veriler, araştırmanın başında oluşturulmuş olan alt

problemler temel alınarak düzenlenip, yorumlanabilir. Ayrıca verilerin analiz edilmesi ve yorumlanmasında, araştırmacı çalıştığı problemle ilgili alanyazını etkili bir şekilde kullanmalıdır. İlgili alanyazından alıntılar yapmak, yorumların başka araştırma sonuçlarıyla ne derece uyduğu veya çeliştiği konusunda tartışmalar açmak, veri analizini ve yorumlamayı zenginleştirir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Bu araştırmada elde edilen verileri okuyucuya derinlik odaklı ve bütüncül bir sunumla aktarabilmek amacıyla betimsel analizden faydalanılmıştır. Betimsel analizde amaç; elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir şekilde ortaya koymaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada; doküman analizi ve uzman incelemesi sonucunda elde edilen veriler betimsel analiz yapılarak derlenip araştırmacı tarafından da yorumlanarak bir bütünlük içerisinde okuyucuya aktarılmıştır. Mülakatlar transkript edilerek elde edilen veriler ise sesli düşünme protokolleri şeklinde derlenmiş, betimsel analiz yapılarak analiz edilmiş, sık sık doğrudan alıntılara yer verilerek araştırmacının yorumlarıyla desteklenmiştir.

Durum çalışmalarında araştırmacı, kendi içgüdülerine ve yeteneklerine güvenmek zorundadır (Merriam, 2009/2013). Bu araştırmada da sesli düşünme protokolleri analiz edilirken araştırmacı, kendi deneyimleri ve içgüdüleri ile oluşturduğu kod ve kategoriler yardımıyla kuramsal açıklamalar geliştirmiştir.

3.7.1. Matematiksel İspat Sürecini Oluşturan Temel Bileşenlerin Belirlenmesine Yönelik Verilerin Analizi

Matematiksel ispat sürecini oluşturan temel bileşenlerin belirlenmesine yönelik veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiş ve bütüncül bir yaklaşımla okuyucuya sunulmuştur. Araştırmanın bu bölümünde elde edilen verilerin betimsel analizinde doküman analizi sonucunda oluşturulan taslak temel bileşen formuna yönelik uzman görüşleri esas alınmıştır. Cebir alanında uzman üç akademisyenin taslak temel bileşen formuna ilişkin görüşleri detaylı bir anlatımla okuyucuya aktarılmaya çalışılmıştır.

3.7.2. Sesli Düşünme Yöntemi İle Desteklenmiş Yarı Yapılandırılmış Mülakatların Analizi

Düşünme sürecinde zihnimizde peş peşe mantıklı işlemler yapılmaktadır. Örneğin sorun çözme, karar verme, eleştirel düşünme, akıl yürütme, yaratıcı düşünme gibi... Bunlar sesli düşünme sırasında kelime, cümle, konuşma, inanç, öneri, yargı, zihinsel görüntü, betimleme, yöntem ve teknikler biçiminde ortaya çıkmaktadır (Güneş, 2012). Dolayısıyla bir sesli düşünme protokolünü analiz etmek doğrudan ses kaydını analiz etmekten çok daha zordur. Sesli düşünme protokolleri analiz edilirken, transkriptler parçalara ayrılarak standart bir forma getirilir (van Someren vd., 1994).

Bu araştırmada sesli düşünme yöntemi ile desteklenmiş yarı yapılandırılmış mülakatlara betimsel analiz uygulanmıştır. Analizler yapılmadan önce mülakatlar süresince yapılan video kayıtları bilgisayar ortamına aktarılmış; ses ve video kayıt dökümleri ile ispat tamamlama işlemleri transkript edilmiştir. Video kayıtları farklı zamanlarda dörder kez seyredilmiş ve transkriptler üçer kez okunarak sesli düşünme protokollerine uygun bir biçimde aşamalandırma yapılmış ve bu aşamalar tablolar halinde sunulmuştur. Video kayıtları ve ispat tamamlama işlemleri birlikte ele alınarak öğretmen adaylarının zihinsel süreçlerini tanımlayan yorumlar ortaya çıkarılmıştır.

van Someren vd.'nin (1994) "Irene'in Suzanne'dan altı tane az şekeri vardır. Diana'nın Suzanne'dan beş tane fazla şekeri vardır. Irene'in şekerleri Diana'nın şekerlerinden kaç tane daha azdır?" problemine yönelik örnek protokol analizi Tablo 3.5'te verilmiştir.

Tablo 3.5.

Örnek Protokol Analizi

Cümle	Yorum / Açıklama
1: Suzanne Irene'den 6 fazla olduğu için	Cümleyi dönüştürüyor ve şema haline getiriyor.
2: ve Diana, Suzanne'dan 5 fazla 3: Bu yüzden Suzanne önce gelir	'X büyük Y büyük Z' dönüşümünü ima ediyor.
4: Çünkü Suzanne'ın 5, ee, 6 tane var 6: bu yüzden hepsi birlikte 11 eder 7: ama burada daha azı soruluyor 8: Irene'in Suzanne'dan kaç tane daha az vardır?	'Daha fazla' anahtar kelimesini ipucu olarak kullanıyor ve toplama işlemini kastediyor.

Tablo 3.5. (Devamı)

9: o zaman çıkaralım	
10: Diana, Suzanne, Irene	
Mülakatçı müdahale ediyor.	
11: [problemi tekrar okuyor]	‘Daha az’ anahtar kelimesiyle
12: anlamadım...	‘çıkarma işlemi’ ima ederek
13: Irene Suzanne’dan 6 tane fazlaya sahiptir.	Şemaya geri dönüyor.
14: Diana Suzanne’dan 5 tane daha fazlaya sahip	
15: Bü yüzden bir şeyler eklenmeli	
16: dolayısıyla bir şey çıkarılmalı	Şemayla önerilen işlem; Suzanne’ın
17: Suzanne’da kaç tane olduğunu bilsem	kaç taneye sahip olduğunu bilmeyi
18: Bence Suzanne’ın 11 tane var	
19: Diana Suzanne’dan 5 fazla	Kontrol edilemeyen tahmin
20: [bekliyor] sanırım, 10	metoduyla işlem
21: Irene’in Diana’dan kaç tane daha azdır	
22: Sanırım, 10	

Sesli düşünme yönteminde konuşmalar sözlü protokol, yazılanlar yazılı protokol olarak adlandırılır (van Someren vd., 1994). Bu araştırmada sözlü ve yazılı protokoller okuyucuya eş zamanlı aktarılmış ve bu şekilde öğretmen adaylarının ispat tamamlama sürecindeki düşüncelerinin bütüncül bir yaklaşımla analiz edilmesi amaçlanmıştır.

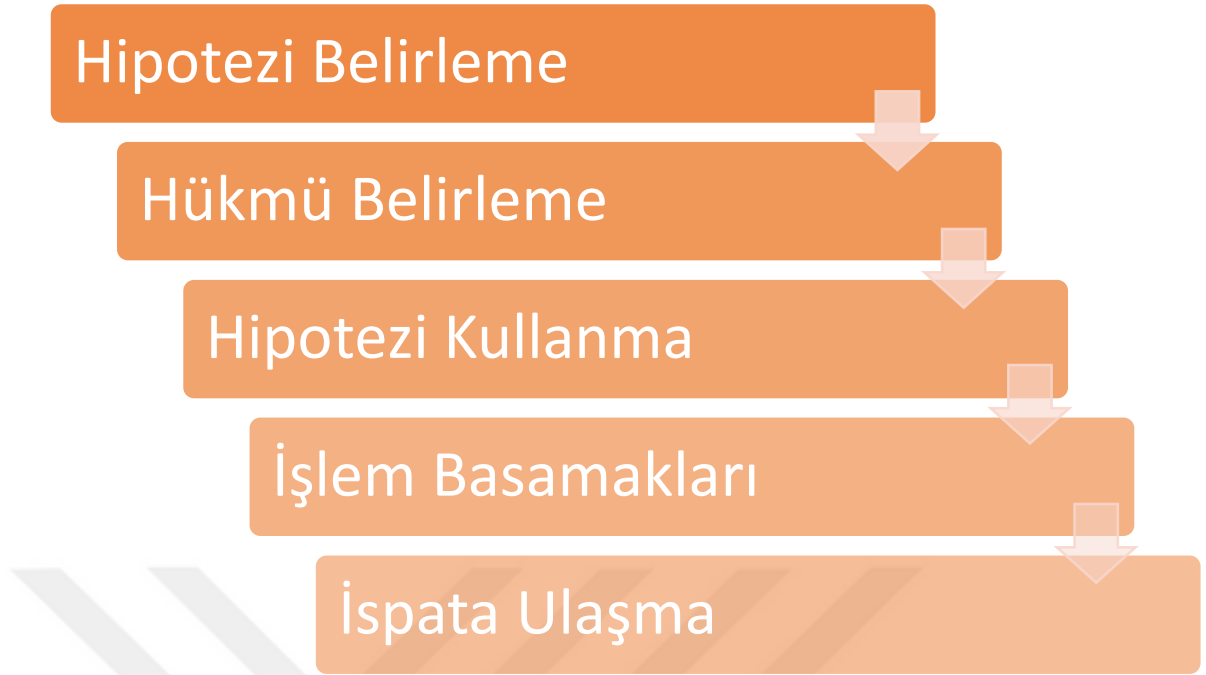
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, araştırma verilerinin analizleri sonucunda elde edilen bulgu ve yorumlara “*Matematiksel ispat sürecini oluşturan temel bileşenler nelerdir?*”, “*Matematik öğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken anahtar fikirleri kullanabilme durumları nedir?*” ve “*Matematik öğretmeni adaylarının cebir konularında matematiksel ispat yaparken temel bileşenleri tamamlama durumları nasıldır?*” alt problemlerinin sırasına göre yer verilmiştir.

4.1. Matematiksel İspat Sürecini Oluşturan Temel Bileşenlerin Belirlenmesine Yönelik Bulgular

Bu bölümde pilot ve esas uygulamaya temel teşkil etmesi, uygulamalarda verilecek anahtar nokta ve fikirlerin neler olduğunun tespit edilebilmesi ve öğretmen adaylarının ispat oluşturma süreçlerinin daha detaylı bir biçimde araştırılabilmesi için matematiksel ispat sürecini oluşturan temel bileşenlerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla matematiksel ispat sürecinde yaşanan zorlukları ortaya koyan alanyazınla birlikte Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi ile Lineer Cebir derslerinin içeriğinde yer alan teoremler ve ispatlar ile ilgili derslere yönelik ders kitapları incelendikten sonra ispat yapma süreci taslak temel bileşen formu olarak aşağıdaki gibi şematize edilmiştir:



Şekil 4.1. Taslak temel bileşen formu

Taslak temel bileşen formu cebir alanında uzman üç akademisyenin değerlendirme yapmak üzere incelemelerine sunulmuştur. Uzmanlara matematiksel ispat sürecinde öğrencilerin yaşadıkları zorluklara yönelik alanyazın bilgisi kısaca aktarıldıktan sonra taslak form hakkındaki görüşleri alınmıştır. Uzmanlardan biri buradaki işlem basamakları bölümünün; tanım kullanma, özellik kullanma, önceki bilgileri ve teoremleri kullanma ile işlem yapma basamakları şeklinde hiyerarşik olmayan bir düzende detaylandırılarak genişletilmesi yönünde; diğeri ilk uzmanın görüşlerine paralel yönde görüş bildirerek, hipotezi kullanma basamağının da bu hiyerarşik olmayan düzen içerisine dâhil edilmesi gerektiği yönünde; üçüncü uzman ise hükmü belirleme basamağından sonra yöntem belirleme basamağının da ilave edilmesi yönünde görüş bildirmişlerdir. Uzman görüşleri dikkate alınarak temel bileşen formu aşağıdaki gibi yeniden şekillendirilmiştir.



Şekil 4.2. İspata yönelik temel bileşen formu

Hazırlanan bu form yardımıyla pilot ve esas uygulamada kullanılacak olan anahtar fikirler ve öğrencilerin ispat yaparken sorun yaşadıkları sürecin basamakları belirlenmiştir. Bu basamaklar hiyerarşik değildir ve her ispatta olma zorunluluğu yoktur. Yani ‘Asal sayılar sonsuzdur.’ gibi yalnızca hüküm belirten bir teoremin ispatında hipotezin belirlenmesi zorunlu değildir. Ya da bazı ispatlarda herhangi bir tanımdan faydalanılmazken bazılarında da herhangi bir kavramsal bilgiye ya da özellik kullanımına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Hipotezi belirleme basamağında; öğretmen adayından ispata temel teşkil edecek, başka bir deyişle ispatın çatısını oluşturacak bir varsayım kurması beklenmektedir. Örneğin; $p \Rightarrow q$ önermesi için p ifadesi hipotezdir ve bu önermenin ispatına başlayabilmek için p önermesini belirleyebilmek ve matematiksel dil ve notasyona uygun olarak yazabilmek önemlidir.

Hükmü belirleme basamağında; hipotezden yola çıkılarak varılacak olan yargının belirlenmesi ve bu şekilde ispatın temelini oluşturulması beklenmektedir. Örneğin; $p \Rightarrow q$ önermesi için q ifadesi hükümdür ve bu önermenin ispatını

şekillendirebilmek için q önermesini matematiksel dil ve notasyona uygun olarak yazabilmek önemlidir.

Taslak temel bileşen formunda işlem basamakları olarak ele alınan ancak uzman görüşleri sonrasında son şekli verilen temel bileşen formunda; hipotezi kullanma, tanım kullanma, özellik kullanma, kavramsal bilgileri seçip kullanma, önceki bilgileri kullanma ve işlem yapma şeklinde detaylandırılan bileşenler; ispatın içeriğine göre ve hiyerarşik olmayan bir düzende kullanılmaktadırlar. Dolayısıyla bazı ispatlarda bu temel bileşenlerin tamamı, bazılarında ise bir veya birkaçı kullanılmaktadır. Hipotezi kullanma bileşeninde hipotezden yola çıkılarak ispata yardımcı olacak ifadelerin yazılıp yazılmadığı araştırılırken; önceki bilgileri kullanma bileşeninde öğretmen adayının halihazırda bilmesi gereken yardımcı bir teoremi ya da ispatın akışı sırasında ulaştığı bir bilgiyi kullanıp kullanmadığı araştırılmaktadır. Özellik kullanma bileşeninde ispatı oluşturmaya yardımcı bir özelliği kullanabilme durumunu ortaya çıkarmak amaçlanırken; tanım kullanma bileşeninde hipotezde/hükümde yer alan ya da ispatın herhangi bir yerinde geçen ve ispata yardımcı olması beklenen bir ifadenin tanımının kullanılabilirliği incelenmiştir. Kavramsal bilgilerin seçilerek kullanılması bileşeninde ise kavramların ve bu kavramlara yönelik bilgilerin doğru bir biçimde seçilip kullanılması araştırılmıştır. Örneğin, alt grup tanımının ya da asal sayı tanımının kullanılması, tanım kullanma olarak; birim eleman ve ters eleman kavramlarının özelliklerine uygun olarak seçilip kullanılması kavramsal bilgilerin seçilip kullanılması olarak ve işlem yaparken grup özelliklerinden faydalanmak ise özellik kullanma olarak ele alınmıştır. İşlem yapma bileşeni çeşitli cebirsel işlemlerle ispatı belli bir düzeye taşıyabilme durumunu ortaya koymayı amaçlamaktadır. Cebirsel işlem yapabilmek için bazen bir tanımdan bazen bir özellikten bazen de bir kavramsal bilgiden faydalanma ihtiyacı duyulabilir. Bu noktada bunlardan birinde var olan bir eksiklik, işlemi doğru bir biçimde ilerletme olanağını da ortadan kaldırmış olur.

İspatı tamamlama basamağında ise bireyden bütün verilenleri ya da elde ettiği bilgileri kullanarak matematiksel dil ve notasyona uygun bir biçimde ispatı sonlandırması beklenmektedir.

Formda belirlenen temel bileşenler esas alınarak oluşturulan ispat tamamlama formu ve tamamlanmış ispat formu (EK 3, EK 4) kullanılarak öğrencilerin ispat tamamlama süreci belirli bir düzen çerçevesinde analiz edilmiştir.

4.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumlarına Yönelik Bulgular

4.2.1. Gül'ün Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu

Gül genel olarak sakin bir kişiliğe sahip olduğu için ispat sürecine de bu sakinliği yansıtmıştır. Anahtar fikirleri etkin bir biçimde kullanmış ve eksik bırakılan adımlardan önce ve sonra verilen anahtar fikirler üzerine detaylı olarak düşünmüş, bu anahtar fikirler arasında bir ilişki kurmaya ve dolayısıyla eksik bırakılan adımları ispatın genel bütünlüğüne katkı sağlayacak şekilde tamamlamaya çalışmıştır.

4.2.1.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.1 $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

Gül: eee G, N den bir elemanlar almış ve x, y, z de zaten G nin evet, n ler N nindir zaten. Bunlar da x, y, n dir. Şunlar $((xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$ şuraya $(= [(xN)(yN)](zN))$ ulaşıyor [Teoremi ve verilen anahtar fikirleri okudu]. Birleşme özelliğini sağlatmaya çalışıyor yani. Acaba bunu $[(yN)(zN)]$ eğer bu $[(yz)N]$ şekilde yazabiliyorsak, bunu da şu şekilde yazabiliriz $[(xN)[(yN)(zN)]]$ yi $'(xyz)N'$ şeklinde yazıyor]. Sonra x, y, z G nin, G de grup olduğundan birleşme özelliği zaten sağlar. Bu şekilde $((xy)zN)$ ayırabiliriz. Hah evet şu şekilde $((xy)(z)N)$ yazayım: şu şekilde ayırırsak eğer, şu şekilde birleşme özelliği sağladığından şu şekilde yazabiliriz: $[(xy)N](zN)$ uuuu tekrar bunu $[(xy)N]$ açarsak, buna $((xN)(yN)(zN))$ ulaşmış oluruz buradan. Birim elemanı e , G nin. Her xN eleman gN için de gN den eleman almış, xN yi. xN , eN dir ve böylece evet birim eleman olduğunu göstermiş zaten.

Şimdi ters elemanı olduğunu gösterecek. yine gN den xN elemanları alıyor, Her (xN) elemanı.... xN nin tersi içerde, var mı diyor, xN ile x tersini işleme sokuyor, bunu, şuradan $((xN)[(yN)(zN)] = xN[(yN)(zN)])$, yola çıkarak ben, hani şunu $((xN)[(yN)(zN)])$ şuna $(xN[(yN)(zN)])$, yazdığından $x x^{-1}N$ şeklinde yazabilirim.

Ondan sonra x G nin elemanı, G de bir grup o zaman x üzeri -1 de G nin elemanı olur ki x in ters elemanı olur ve bu da etkisiz elemana eşittir. Bu da eN olur. eeeee eN de zaten N oluyor ama ters elemanı var mı diyor. uuuu etkisiz eleman ama eN oluyor, eN acaba e mi ki, bunun tersi bu olsun. Yani aslında biz bunun $((xN)(x^{-1}N))$ e ye eşit olmasını göstermemiz lazım ama eN buldum.

Teorem.1: $(G,.)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. ($x, y, z \in G$ için)

Bu takdirde,

$$\begin{aligned} (xN)((yN)(zN)) &= xN[(yz)N] \\ (xy)zN &= (xy)(z)N \\ [(xy)N](zN) &= (xN)(yN) \cdot z(N) \\ &= [(xN)(yN)](zN) \end{aligned}$$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ var mıdır?

$$\begin{aligned} (xN)(x^{-1}N) &= (xx^{-1})N \\ &= eN, \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Şekil 4.3. Teorem.1'in ispatına yönelik Gül'ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 1. Teoremin ispatına yönelik Gül'ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.1.

Gül'ün 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>eee G, N den bir elemanlar almış ve x, y, z de zaten G nin evet, n ler N nindir zaten. Bunlar da x, y, n dir. Şunlar $((xN)[(yN)(zN)) = xN[(yz)N]$ şuraya $(= [(xN)(yN)](zN))$ ulaşıyor [Teoremi ve verilen anahtar fikirleri okudu].</i>	$'(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]'$ den $'= [(xN)(yN)](zN)'$ ye ulaşmaya çalışıyor diyerek verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurmaya çalışıyor.
<i>birleşme özelliğini sağlatmaya çalışıyor yani. acaba bunu $([(yN)(zN)])$ eğer bu $([(yz)N])$ şekilde yazabiliyorsak</i>	$'[(yN)(zN)]'$ ifadesinin $'[(yz)N]'$ şeklinde yazıldığı anahtar fikri yorumluyor.
<i>bunu $((xN)[(yN)(zN)])$ da şu şekilde $((xyz)N)$ yazabiliriz</i>	Anahtar fikirden yardım alarak $'(xN)[(yN)(zN)]'$ yi $'(xyz)N'$ şeklinde yazıyor.
<i>Sonra x, y, z G nin, G de grup olduğundan birleşme özelliği zaten sağlar. Bu şekilde $((xy)zN)$ ayırabiliriz. Hah evet şu şekilde $((xy)(z)N)$ yazayım: Bu şekilde ayırabiliriz. Hah evet şu şekilde yazayım:</i>	Grupta birleşme özelliğinden faydalıyor ve $'(xy)(z)N'$ şeklinde yazarak son adımda verilen anahtar fikre ulaşmaya çalışıyor.
<i>Birim elemanı e, G nin. Her xN eleman gN için de gN den eleman almış, xN yi. xN, eN dir ve böylece evet birim eleman olduğunu göstermiş zaten.</i>	Anahtar fikir olarak verilen birim elemana yönelik kavramsal bilgileri okuyor.
<i>Şimdi ters elemanı olduğunu gösterecek. yine gN den xN elemanları alıyor, Her elemanı.... xN nin tersi içerde var mı diyor, xN ile x tersini işleme sokuyor, bunu, şuradan $((xN)[(yN)(zN)] = xN[(yN)(zN)])$ yola çıkarak ben:</i>	Diyerek birleşme özelliğinin varlığının araştırıldığı bileşende geçen $'(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yN)(zN)]'$ anahtar fikri gösteriyor.
<i>Hani şunu $((xN)[(yN)(zN)])$ şuna $(xN[(yN)(zN)])$ yazdığından $x x^{-1}N$ şeklinde yazabilirim.</i>	Anahtar fikir yardımıyla $'(xN)(x^{-1}N)'$ yi $'(xx^{-1})N'$ şeklinde yazıyor.
<i>Ondan sonra x G nin elemanı, G de bir grup o zaman x üzeri -1 de G nin elemanı olur ki x in ters elemanı olur ve bu da etkisiz elemana eşittir.</i>	G bir grup olduğundan ters elemanının da var olduğu bilgisini kullanıyor.
<i>Bu da eN olur. eeeee eN de zaten N oluyor ama ters elemanı var mı diyor. uuuu etkisiz eleman ama eN oluyor, eN acaba e mi ki, bunun tersi bu olsun. Yani aslında biz bunun: $(xN)(x^{-1}N)$ e ye eşit olmasını göstermemiz lazım ama eN buldum.</i>	G/N 'de çalıştığını ve elemanlarını bu kümeden seçtiği bilgisini unutuyor. Ayrıca bir üst adımda anahtar fikir olarak verilen birim elemana yönelik kavramsal bilgileri gözden geçiriyor.

Tablo 4.1’de de görüldüğü gibi; Gül birleşme özelliğinin varlığını araştırırken işlem yapmaya başlayabilmek ve yaptığı işlemlere devam edebilmek için bileşenin başlangıcında ve bitiminde verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurarak ispatı tamamlamaya çalışmış, normal alt grup tanımını kullanmadığı halde anahtar fikirlerden yola çıkarak belirli bir çözüm geliştirmiştir. Ters elemanın varlığını araştırırken ise birleşme özelliğinde verilen anahtar fikirden yola çıkarak ispatı belirli bir düzeye getirmiş ancak kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek anahtar fikri gözden kaçırdığı için tek taraflı olarak işlemlerini ilerletmiş dolayısıyla ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamıştır.

4.2.1.2. Teorem.2’nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.2 $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

Gül: [Soruyu ve Hipotezi kurma basamağını okuyarak] Buna $(a \equiv x \pmod{H})$ uyan G lerdeki x elemanlarının kümesini gösterelim. evet. H alt grup G için [Hipotezi oluşturma basamağını tekrar okuyor] göstermeliyiz. Ha şu $(a \equiv x \pmod{H})$ kümeyi sanırım şununla $(\bar{a})$ gösteriyor, zaten a nın denklik sınıfı oluyordu. g alt grup, bunun buna: $Ha = \bar{a}$ eşit olduğunu göstermek için zaten önce bi bunun alt, a nın Ha nın alt kümesi ve Ha nın da a nın alt kümesi olduğunu göstermeliyiz. a dan bir x elemanı aldığımızda o zaman bunu sağlar $(a \equiv x \pmod{H})$, bu kümeden $(a \equiv x \pmod{H})$. ise, isee ax eleman H yazılır. H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir h eleman H vardır ki, vardır. Alt grup olduğundan kapalılık özelliğini sağlar ve h eleman H vardır [hipotezi ve hükmü belirleme basamağını üç kez okuyor]. Buradan; grupta birleşme özelliğinden, grupta etkisiz eleman sanırım bi de ters eleman özelliğinden. Şurada: $[ax^{-1} = h$ yazıyor ve ispatı yapmaya başlıyor] her iki tarafı a nın tersiyle işleme sokuyor, sağdan tabi, bu da a nın $[a^{-1}/ax^{-1} = h$ yazdı eşitliğin diğer tarafına $'a^{-1}'$ yazmayıp sadece söylüyor.]

Mülakatçı: Diğer tarafı da yaz istersen daha açıklayıcı olsun, ne taraftan dediyse o taraftan.

Gül: [siliyor] şu şekilde mi? $[a^{-1}/ax^{-1} = h/a^{-1}$ yazıyor]

Mülakatçı: Nereden işleme sokuyorsun a^{-1} i?

Gül: Sağdan [diyerek ' $a^{-1}/ax^{-1} = h/a^{-1}$ sağdan' yazıyor.]

Mülakatçı: Şimdi sola yazdın da o yüzden

Gül: Hı pardon soldan işleme sokuyorum ['sağdan' ı silerek 'soldan' yazıyor.]

Mülakatçı: Bi tarafta soldan oldu bi tarafta sağdan oldu.

Gül: Evet [siliyor] bunu ama şöyle mi yazayım, öyle de yazamam, hah şöyle [$a^{-1}/ax^{-1} = h a^{-1}/$ yazıyor] mi? [$a^{-1}/$ 'i siliyor] [gülerek] şöyle oklar çizsem olmaz mı?

Mülakatçı: Sen bilirsın, tamam.

Gül: u Soldan diye belirteyim her iki tarafı [$a^{-1}/ax^{-1} = h$ eşitliğinin başına 'soldan' yazıyor.] eee [bir sonraki adıma ' $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ ' yazıyor] h şeklinde şurası ($a^{-1}a$) e olur, bu ($a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$) da buna ($ex^{-1} = a^{-1}h$) ulaşmamızı sağlar. Bu grupta [düşünerek] ters eleman özelliğinden olabilir [diyerek bırakılan ilk boşluğa ters eleman yazıyor]. Sonra eee çarpı x^{-1} de bu zaten her iki tarafın tersini almış, grupta etkisiz eleman bu da [bırakılan ikinci boşluğa 'etkisiz eleman' yazıyor], immm buradan x , a nın tersi a olur h eleman H ydı ve H , G nin alt grubu olduğundan imm şimdiii evet x i eşitliğini ($x = h^{-1}a$) gösterdik [i şikkına ait hipotezi ve hükmü belirleme basamağını tekrar okuyor] , şunu $ax^{-1} = h$ göstermedik mi? h nın tersi H , yok, x nerenin elemanıydı x , G nin elemanı h da zaten H nın a da Ha nın elemanı mı oluyor, yok o da G nin elemanı bu da H nin. Ha tersine bakarsak y eleman Ha alınır, H vardır öyle ki $y = xa$ buradan şey [$a^{-1}/$ sağdan' yazarak] bu da sağdan işleme sokuyor, [$ya^{-1} = xaa^{-1}$ yazıyor] şurası (aa^{-1}) e zaten etkisiz eleman [bırakılan boşluğa 'etkisiz eleman' yazıyor], yok ters eleman mı? [yazdığı 'etkisiz eleman' ı siliyor] şimdi y eleman H

Mülakatçı: Oralari neden yazmadın?

Gül: Burayı, tam emin olamadım.

Mülakatçı: Hangi özelliği kullandın?

Gül: Ters eleman [diyerek ii. ispatta bırakılan ilk boşluğa 'ters eleman' yazıyor] Burada da etkisiz elemanı [diyerek ikinci boşluğa yazıyor] eleman H diyor [anahtar fikir olarak verilen ' $ya^{-1} \in H$ ' yı göstererek], ee x buna eşit, x elemanı G nindir. G nin

elemanıydı x , hem de H diyor, y himm x in. Şimdi G nin elemanı H nin elemanı [$ya^{-1} = x \in G$ ve $ya^{-1} \in H$] ifadelerine bakarak] şey diyor. [$y \equiv a(\text{mod } H)$] denliğini okuyarak] Evet bu ($ya^{-1} \in H$) böyleyse bu da $y \equiv a(\text{mod } H)$ böyle olur veya a , y nin tersi [$a \equiv y(\text{mod } H)$] ifadesini böyle okuyor] evet olabilir. ise bu y , a nın. Bu ($a \equiv y(\text{mod } H)$) zaten denklik sınıfları demek H ye göre ile a nın bulunur ki. uuuu. y neyin elemanıydı. y Ha nın elemanıydı. Şuradan [ikinci bölüm ispatın en başında verilen ' $y \in Ha$ ' yı gösteriyor]. Eeee o zaman bu da ($\bar{a}$) hem y nin elemanı hem Ha nın elemanı. Birinden biri o zaman alt kümedir. Hem bunun ($\bar{a}$) elemanı hem bunun (Ha) elemanı olduğundan. Ama önce biz y Ha dan bir y elemanı alıyoruz. Sonra da a nın denklik sınıfında elemanı diyoruz. İşte alt kümesi ama bunun (Ha) bunun ($\bar{a}$) alt kümesi olduğun nasıl gösteririz. ...demektir... Şimdi o zaman bunun (Ha) bunun da ($\bar{a}$) ne elemanı olduğunu göstermiş zaten. Ama bi yerde bi yerden gelmiş. [$h \in H$ ve $H \leq G$] ifadesini okuyor] alt grup olduğundan [$x = h_0a \in Ha$] ifadesini okuyor] Ha olur. Şimdiii. O zaman şunu da [boş bırakılan önceki bilgileri kullanma bileşenini kastederek] şu şekilde mi yazıyoruz acaba [diyerek ' $a \equiv x(\text{mod } H)$ ' yazıyor]. Ha denklik $x(\text{mod } H)$ ya göre. Sonraaa. Ya da [siliyor]. Şurayı dolduramayacağım galiba h eleman H ise olduğundan. [diyerek boş bırakılan bileşeni tekrar gözden geçiriyor] Himm. H o zaman. Bi de ne H nin elemanıydı. Bir şey daha H nin elemanı. Var mı acaba. Şu [bırakılan boşluğu göstererek] herhalde alt grup özelliğini mi sağlatacak. Hani a, b H nin elemanı ise a, b nin tersi de H nin elemanıdır şeyini sağlatacak sanki. .. zaten H .

Mülakatçı: Sonrasına bak. Denirseden sonraya bak ne yazmış?

Gül: $x = h_0a$. Yani bunu diyor ama. Bununla ($x = h_0a$) bunun ($x = h^{-1}a$) bağlantısını nasıl kurabilirim. Eeee. Acaba ($h^{-1} = h_0$) denirse mi? h eleman H nin alt grup, o zaman h nin tersi var ona da 0 denirse. Buradan ($x = h^{-1}a$) bunu ($x = h_0a$) yazabiliriz. Buradan da o gelir gibi.

Mülakatçı: Ne yardımcı oldu sana burada?

Gül: Anahtar fikir olarak bu ($x = h_0a$) oldu. Ben hani bunu ($x = h_0a$) bunun ($x = h^{-1}a$) bağlantısını kurmaya çalıştım önceden de. Ama hani ne diyebileceğimi karıştırdım. Ama zaten buradan ($x = h^{-1}a$) hani onu ($h^{-1} = h_0$) dersek geliyor.

Baştan onu şu anda yazmam pek şey yapmadı ya aklıma gelmedi. Hani başka özellikler mi var diye biraz daha derin düşüncelere hani. O kadar basit düşünemedim.

Teorem.2: $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim. Yani $\bar{a}$, a nin denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu dolayısıyla $\bar{a} \subset Ha$ ve $Ha \subset \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir altgrup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned} \text{Soldan } a^{-1} / a x^{-1} &= h && \text{(Grupa birleşme özelliğinden)} \\ a^{-1} a x^{-1} &= a^{-1} h && \text{(Grupa ters eleman özelliğinden)} \\ e x^{-1} &= a^{-1} h && \text{(Grupa birleşme özelliğinden)} \\ x^{-1} &= a^{-1} h && \text{olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alınır} \end{aligned}$$

$$(x^{-1})^{-1} = (a^{-1} h)^{-1}$$

$$x = h^{-1} a \text{ olur.}$$

($h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan $h^{-1} = h_0$ denirse)

$$x = h_0 a \in Ha \text{ olur ki buradan } \bar{a} \subset Ha \text{ bulunur.....(1)}$$

ii) Tersine olarak $y \in Ha$ alınır; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dir. Buradan;

$$y = x a \dots / a^{-1} \text{ soldan} \quad \text{(Grupa birleşme özelliğinden)}$$

$$y a^{-1} = x a a^{-1} \quad \text{(Grupa birleşme özelliğinden)}$$

$$y a^{-1} = x e \quad \text{(Grupa birleşme özelliğinden)}$$

$$y a^{-1} = x \in G \quad \text{olur. Buradan } x = y a^{-1} \in H \text{ bulunur.}$$

$$y a^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \vee a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a} \text{ bulunur ki;}$$

$$Ha \subset \bar{a} \text{ demektir.....(2)}$$

(1) Ve (2) den $Ha = \bar{a}$ denir.

Şekil 4.4. Teorem.2'nin ispatına yönelik Gül'ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 2. Teoremin ispatına yönelik Gül'ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.2'de yer verilmiştir.

Tablo 4.2.

Gül'ün 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Ha şu ($a \equiv x \pmod{H}$) kümeyi sanırım şununla ($\bar{a}$) gösteriyor, zaten a nın denklik sınıfı oluyordu. G alt grup, bunun buna: $Ha = \bar{a}$ eşit olduğunu göstermek için zaten önce bi bunun alt, a nın Ha nın alt kümesi ve Ha nın da a nın alt kümesi olduğunu göstermeliyiz</i>	İspata başlamadan önce anahtar fikir olarak verilen, iki kümenin eşitliği ile ilgili olan hipotezi ve hükmü belirleme basamaklarını yorumluyor.
<i>Buradan; grupta birleşme özelliğinden, grupta etkisiz eleman sanırım bi de ters eleman özelliğinden.</i>	Herhangi bir işlem yapmadan boş bırakılan yerleri doldurarak okuyor. Bu duruma ezberin ya da grup özelliklerini hep aynı sırayla göstermekten kaynaklanan alışkanlığın sebep olduğu düşünülmektedir.
<i>bunu ama şöyle mi yazayım, öyle de yazamam, hah şöyle [$a^{-1}/ax^{-1} = h a^{-1}/$ yazıyor] mi? [a^{-1}/i siliyor] [gülerek] şöyle oklar çizsem olmaz mı?</i>	Eşitliğin her iki tarafına da aynı yönden a^{-1} yazılması gerektiğini biliyor ancak bunu o adımda nasıl yazacağını bilemiyor olmasına rağmen sonraki adımda $a^{-1}h$ yazabiliyor.
<i>Sonra eee çarpı $x - 1$ de bu zaten her iki tarafın tersini almış, grupta etkisiz eleman bu da [bırakılan boşluğa 'etkisiz eleman' yazıyor]</i>	Sonraki adımlarda verilen ' $x^{-1} = a^{-1}h$ ' ve ' $(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$ ', anahtar fikirlerini inceleyerek bir üst adımda boş bırakılan bölümü etkisiz eleman yazarak doldurdu.
<i>ımmm buradan x a nın tersi a olur h eleman H ydı ve H G nin alt grubu olduğundan imm şimdiii evet x i eşitliğini ($x = h^{-1}a$) gösterdik</i>	i şikkına ait hipotezi ve hükmü belirleme basamağını tekrar okuyarak geline noktaı anlamaya çalışıyor.
<i>şunu $ax^{-1} = h$ göstermedik mi? h nın tersi H, yok, x x nerenin elemanıydı x, G nin elemanı h da zaten H nın a da Ha nın elemanı mı oluyor, yok o da G nin elemanı bu da H nın.</i>	Bir adım öncesindeki ve bir adım sonrasındaki anahtar fikirleri okuyor ancak boş bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan.....d enirse' kısmını dolduramıyor.
<i>tersine bakarsak y eleman Ha alınırsa, H vardır öyle ki $y = xa$ buradan şey [$a^{-1}/$ sağdan' yazarak] bu da sağdan işleme sokuyor, [$ya^{-1} = xaa^{-1}$, yazıyor]</i>	Eşitliğin her iki tarafına da aynı yönden a^{-1} yazılması gerektiğini biliyor ancak bunu o adımda nasıl yazacağını bilemiyor olmasına rağmen sonraki adımda ya^{-1} yazabiliyor.

Tablo 4.2. (Devamı)

<i>şurası (aa^{-1}) e zaten etkisiz eleman [bırakılan boşluğa 'etkisiz eleman' yazıyor]. Yok ters eleman mı? [yazdığı 'etkisiz eleman' ı siliyor]</i>	Özelliği kullanıyor ama hangi özellik olduğunu bilemediğinden yazmaktan vazgeçiyor.
<i>Burayü, tam emin olamadım... Ters eleman [diyerek yazıyor]</i>	Mülakatçı yeniden yaptığı işlemlere bakmasını sağladığında ters eleman özelliğini kullandığından emin olarak boşluğu dolduruyor.
<i>eleman H diyor [anahtar fikir olarak verilen '$ya^{-1} \in H$' yı göstererek], ee x buna eşit, x elemanı G nindir. G nin elemanıydı x, hem de H diyor, y hımm x in. Şimdi G nin elemanı H nin elemanı ...['$x = h_0a \in Ha$' ifadesini okuyor] Ha olur. Şimdiii. O zaman şunu da [boş bırakılan önceki bilgileri kullanma bileşenini kastederek] şu şekilde mi yazıyoruz acaba [diyerek '$a \equiv x \pmod{H}$' yazıyor]. Ha denklik $x \pmod{H}$ ya göre. Sonraaa. Ya da [siliyor].</i>	İspata bütüncül olarak bakarak ve verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurmaya çalışarak daha önce tamamlamadığı ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' kısmını doldurmaya çalışıyor.
<i>Şurayı dolduramayacağım galiba h eleman H ise olduğundan. [diyerek boş bırakılan bileşeni tekrar gözden geçiriyor] (...)</i> <i>$x = h_0a$. Yani bunu diyor ama. Bununla ($x = h_0a$) bunun ($x = h^{-1}a$) bağlantısını nasıl kurabilirim. Eeee. Acaba ($h^{-1} = h_0$) denirse mi? h eleman H nın alt grup, o zaman h nin tersi var ona da 0 denirse. Buradan ($x = h^{-1}a$) bunu ($x = h_0a$) yazabiliriz.</i>	($x = h_0a$) anahtar fikri ile ($x = h^{-1}a$) anahtar fikri arasında bağlantı kurarak boş bırakılan temel bileşeni tamamlıyor. Ancak ' $h^{-1}, h_0 \in H$ ' yı tanımlamayı ihmal ediyor.

Tablo 4.2'de de görüldüğü gibi; kavramsal bilgileri ve önceki bilgileri kullanarak tamamlanması beklenen 2. teoremin ispatında Gül, aktif bir şekilde anahtar fikirleri kullanmasına ve işlemlerini ne yönde ilerleteceğini bilmesine rağmen birleşme özelliğini kullanamaması ve matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle ilk adımları tamamlayamamıştır. Eksik bırakılan adımlardan önce ve sonra verilen anahtar fikirleri bir bütün olarak düşünmüş ve bu şekilde nasıl bir yol izleyeceğine karar vermeye çalışmıştır. i. ispatta duraksamadan etkisiz ve ters eleman kavramlarını ilgili boşluklara yazabilmişken ikinci bölümde aynı adımları tamamlarken duraksamış, yaptığı işlemleri tekrar gözden geçirdikten ve emin olduktan sonra ilgili adımları tamamlayabilmiştir. Bu duruma grup özelliklerini hep aynı sırayla göstermenin oluşturduğu alışkanlıkların ya da ezberin sebep olduğu düşünülmektedir. Tamamlamakta en çok zorlandığı ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan

denirse' ifadesini, ifadeden önce ve sonra verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurarak ancak $h^{-1}, h_0 \in H$ yı tanımlamayı ihmal ederek eksik de olsa tamamlayabilmiştir. Dolayısıyla grupta ters elemanın varlığına yönelik ifadeyi yazamamıştır.

4.2.1.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.3 Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

Gül: *[Teoremi ve ispatını okuyor] Göstereceğiz, bunun için H dan a, b elemanı alırsak kesişimin tanımından diyor. himmm. Alt grubun tanımından da himmm. kesişim tanımından himm. [Anahtar fikirleri tekrar okudu sesli bir şekilde] şimdi H dan bir a, b eleman alırsak kesişim tanımından her i eleman I için a, b de H_i nin elemanıdır. uı. H alt gruptur G [Anahtar fikirleri tekrar okudu]*

Mülakatçı: *Bu soruda ne istiyor senden? Nereye yazmanı istiyor?*

Gül: *Şu kısma [hipotez ve hükmü belirleme basamağını gösteriyor] ama hani o kısmı şuradan [Anahtar fikirlerin olduğu basamakları gösteriyor] bulmaya çalışıyorum. Yalnız hani iki tane alt grup olması gerekiyor ama burada alt grupların hangisi olduğunu bulmaya çalışıyorum.*

Mülakatçı: *Neden iki olduğunu düşünüyorsun?*

Gül: *Haa doğru [Teoremdeki 'sonlu veya sonsuz alt gruplarının' ifadesini göstererek] pardon iki tane değil. Birçok olabilir doğru. Alt grupların kesişimi. Burada [$a, b \in H_i$ '] yi göstererek] hangi alt gruplardan bahsediyor onu bulmaya çalışıyorum. Sanırım H_i lerden bahsediyor sanırım. H_i ler alt grupları oluyor bunun [teoremde geçen alt gruplarının ifadesini gösteriyor] ve himm. H de bunun (H_i) kesişimi oluyor sanırım. eee.*

Mülakatçı: *O zaman yazalım ne ne düşünüyorsan, düşündüklerini ifade ederek.*

Gül: *eee. şöyle küme şeklinde gösterirsek. H_i lerden oluşur ki H_i ler alt gruptur G nin. ve i de hani $1, 2$ şeklinde gider. [$\{H_i: H_i \leq G, i = 1, 2, \dots\}$] yazıyor] eeee. ve H_i lerin kesişimi H yi verir 1 den sonsuza kadar mı artık [$\bigcap_{i=1} H_i = H$] yazıyor] aaaa. ve bu olsun. H nin G nin alt grup olduğunu göstermemiz gerekiyor.*

Mülakatçı: Evet nelerden faydalandın bunu yazarken?

Gül: Şuradan [$a, b \in H_i$ 'yi ve $a \cdot b^{-1} \in H_i$ 'yi göstererek] eee hani. Önce bi hangileri alt gruplar olduğunu bulmaya çalıştım H_i ler alt grup dedim. Hani bi çok tane var $H_1 H_2 H_3 H_4$ e kadar hep gidiyor öyle sonra kesişimleri de H olsun dedim. H kümesi. e kesişimi diyor G nin bir alt grubudur, bunu göstermemizi istiyor zaten. Hani hipotez bu kısım (Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi) diğer istenen bu (G nin bir alt grubudur). Dolayısıyla H kesişim olduğu için H nin de G nin bir alt grup olduğunu göstermemiz gerekiyor. Sonra H den elemanlar almış. Kesişimin tanımından diyor. a, b de H_i lerin elemanıdır. Alt grubun tanımından da hımmm. Tanımından tekrar. [Bütün ispatı tekrar gözden geçiriyor sonrasında;] Bi de zaten burada da [hükümü belirleme basamağındaki " $H \leq G$ olduğunu göstereceğiz" kısmını göstererek] onu istediğini söylüyor [ispatı kontrol ediyor].

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) altgruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

$\{H_i : H_i \leq G, i = 1, 2, \dots\}$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = H$ olsun.
 $H \leq G$ olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b \in H_i$

→ Alt grubun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Şekil 4.5. Teorem.3'ün ispatına yönelik Gül'ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 3. Teoremin ispatına yönelik Gül'ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.3'te yer verilmiştir.

Tablo 4.3.

Gül'ün 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Alt grubun tanımından da $\text{hımm. kesişim tanımından hımm. Şimdi } H \text{ dan bir } a, b \text{ eleman alırsak kesişim tanımından her } i \text{ eleman } I \text{ için } a, b \text{ de } H_i \text{ nin elemanıdır. iii. } H \text{ alt gruptur } G$	Hipotezi ve Hükümü belirleyebilmek için sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri okuyarak anlamaya çalışıyor.
ama hani o kısmı şuradan [Anahtar fikirlerin verildiği basamakları gösteriyor.] bulmaya çalışıyorum.	Sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerden faydalanarak Hipotezi ve Hükümü belirlemeye çalıştığını ifade ediyor.
Yalnız hani iki tane alt grup olması gerekiyor ama burada alt grupların hangisi olduğunu bulmaya çalışıyorum. [Mülakatçının sorusu üzerine] haa doğru [Teoremdaki 'sonlu veya sonsuz alt gruplarının' ifadesini göstererek] pardon iki tane değil. Birçok olabilir doğru. Alt grupların kesişimi.	İki tane alt grup olması gerektiği yanlışına kapılıyor ancak teoremda verilen ifadeyi tekrar gözden geçirerek bu yanlışından kurtuluyor.
Burada [$a, b \in H_i$ '] yi göstererek] hangi alt gruplardan bahsediyor onu bulmaya çalışıyorum. Sanırım H_i lerden bahsediyor sanırım. H_i ler alt grupları oluyor bunun [teoremda geçen alt gruplarının ifadesini gösteriyor]	($a, b \in H_i$) anahtar fikrinden faydalanarak alt grupların neler olduğunu bulmaya çalışıyor.
ve $\text{hımm. } H \text{ de bunun } (H_i) \text{ kesişimi oluyor sanırım. eee. (...) şöyle küme şeklinde gösterirsek. } H_i \text{ lerden oluşur ki } H_i \text{ ler alt gruptur } G \text{ nin. ve } i \text{ de hani } 1 \text{ 2 şeklinde gider. } [\{H_i: H_i \leq G, i = 1, 2, \dots\}] \text{ yazıyor] eeee. ve } H_i \text{ lerin kesişimi } H \text{ yi verir } I \text{ den sonsuza kadar mı artık } [\cap_{i=1} H_i = H \text{ yazıyor}]$	($a, b \in H_i$) anahtar fikri ve teoremin ifadesini birlikte düşünerek hipotezi ve hükümü belirleyebiliyor ancak matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle ' $\cap_{i \in I} H_i = H$ ' yazamıyor.
(...)1 den sonsuza kadar mı artık (...)	Teoremda geçen 'sonlu veya sonsuz alt gruplar' ifadesini bu şekilde sözlü olarak ifade ediyor.
Hani hipotez bu kısım Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi diğer istenen bu G nin bir alt grubudur.	Hipotezi ve hükümü belirleyebiliyor.

Tablo 4.3'te de görüldüğü gibi; Gül, hipotezi ve hükümü belirleyerek tamamlanması istenen 3. Teoremin ispatında sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerden ve teoremin ifadesinden yola çıkmıştır. İspatı oluşturma süreci içerisinde

düştüğü ‘iki alt grup olması gerektiği’ yanlışlığından teorem ifadesini yeniden gözden geçirerek kurtulmuştur. Sonuçta anahtar fikirleri etkili bir biçimde kullanan ve dolayısıyla teoremden geçen ‘sonlu ve sonsuz alt gruplarının’ ifadesini ispatı tamamlama sürecinde sözlü olarak doğru ifade eden Gül, hipotezi ve hükmü belirleyebilmiş ancak $\bigcap_{i \in I} H_i = H$ ifadesini hatalı bir biçimde $\bigcap_{i=1} H_i = H$ şeklinde yazmıştır.

4.2.1.4. Teorem.4’ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.4 Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

Gül: eee [teoremi ve kurulan hipotezi okuyor] göstereceğiz. G den bir a elemanı alıyor ve a birim elemandan farklı olsun diyor. a eleman tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Yani a elemanı tarafından gerilsin H . uu. lagrange teoremi gereğince H nin mertebesi G nin mertebesini bölmelidir. Evet. Neden? haa H , G nin bir alt grubu [$H < G$ yazıyor]. G devirli H da devirli lagrange teoreminden de zaten ee H nin mertebesi G nin mertebesini böler olmalıdır. Ancak diyor G nin mertebesi k , asal sayı olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. Yani dolayısıyla H nin mertebesi ya 1 olmalı veya H nin mertebesi k olmalı. [$o(H) = 1$ veya $o(H) = k$ yazıyor] eeeee. H yı zaten bir devir grubu olarak kabul ettik. G nin bir alt devir grubu olarak kabul ettik. [Anahtar fikirleri tekrar okuyor] şimdi H nin mertebesi 1 olursa H e elemanından sadece bariz olur [$H = \{e\}$ yazıyor] ama biz burada [yukarıdaki anahtar fikirlerde geçen ‘ $a \neq e$ ’yi göstererek] e den farklı bir a elemanı alalım dedik G yi. Dolayısıyla bunu ($H = \{e\}$) sağlamaz. H nin mertebesi eğer k olursa bu da G nin kendisini verir. aaaa bu sefer alt grubu değil de direk H G ye eşittir [$o(H) = k \Rightarrow H = G$ yazıyor].

Mülakatçı: Yani?

Gül: O zaman H yı bir alt devir grubu olarak almıştık. Dolayısıyla G de, H yı G nin bir alt grubu olarak aldı. Mertebesi k olduğundan direkt H ile G eşittir. Dolayısıyla G de H dan dolayı [diyerek]; H alt devir grubu olarak aldığımız için H da G eşit olduğundan G bir devir grubudur. G grubu bir devir grubudur [yazıyor].

Teorem.4: $o(G) = k$ ve k asal ise G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ olmalıdır.

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka bölünü yoktur.

O halde; $o(H) = 1$ veya $o(H) = k$

~~$H = \{e\}$~~

$o(H) = k \Rightarrow H = G$

H alt devir grubu olarak aldığımız için
 $H = G$ olduğundan G grubu bir devir grubudur.

Şekil 4.6. Teorem.4'ün ispatına yönelik Gül'ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 4. Teoremin ispatına yönelik Gül'ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.4'te yer verilmiştir.

Tablo 4.4.

Gül'ün 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
G den bir a elemanı alıyor ve a birim elemandan farklı olsun diyor. a eleman tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Yani a elemanı tarafından gerilsin H . iii . lagrange teoremi gereğince H nin mertebesi G nin mertebesini bölmelidir. Evet. Neden? haa H , G nin bir alt grubu: [$H < G$ yazıyor]. G devirli H da devirli lagrange teoreminden de zaten ee H nin mertebesi G nin mertebesini böler olmalıdır. Ancak diyor G nin mertebesi k , asal sayı olduğundan 1 ve kendisinden başka bölünü yoktur. Yani dolayısıyla H nin mertebesi ya 1 olmalı veya H nin mertebesi k olmalı. [$o(H) = 1$ veya $o(G) = k$ yazıyor.]	Verilen anahtar fikirleri yorumlayarak ve asal sayı tanımını kullanarak ' $o(H) = 1$ veya $o(H) = k$ ' çıkarımında bulunuyor.

Tablo 4.4. (Devamı)

şimdi H nin mertebesi 1 olursa H e elemanından sadece bariz olur [$H = \{e\}$] yazıyor] ama biz burada [yukarıdaki anahtar fikirlerde geçen ' $a \neq e$ ' yi göstererek] e den farklı bir a elemanı alalım dedik G yi. Dolayısıyla bunu ($H = \{e\}$) sağlamaz.

Yapmış olduğu çıkarımla yukarıda verilen ' $a \neq e$ ' anahtar fikrini birlikte düşünerek ispatı iletliyor.

H nin mertebesi eğer k olursa bu da G nin kendisini verir. aaaa bu sefer alt grubu değil de direk H , G ye eşittir [$o(H) = k \Rightarrow H = G$] yazıyor]. O zaman H yi bir alt devir grubu olarak almıştık. Dolayısıyla G de, H yi G nin bir alt grubu olarak aldı. Mertebesi k olduğundan direkt H ile G eşittir. Dolayısıyla G de H dan dolayı [diyerek]; H alt devir grubu olarak aldığımız için H da G eşit olduğundan G bir devir grubudur. G grubu bir devir grubudur [yazıyor].

Anahtar fikirlerden yola çıkarak iletlediği ispatı yine anahtar fikirlerle ilişkilendirerek ispatı tamamlama cümlesini yazıyor.

Tablo 4.4'te de görüldüğü gibi; Gül, verilen anahtar fikirleri ve asal sayı tanımını kullanarak tamamlanması beklenen Teorem.4'ün ispatında hem verilen anahtar fikirleri hem de asal sayı tanımını kullanarak bir takım çıkarımlarda bulunmuş, bu çıkarımları yine anahtar fikirlerle destekleyerek G grubunun bir devir grubu olduğunu göstermiş ve dolayısıyla ispatı tamamlamıştır.

4.2.1.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.5 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Gül: G bir grup ve G de a elemanı olsun. Her x eleman G için. hımmm. [Teoremi okudu ve ispatı incelemeye başladı] Önce homomorfizm olduğu gösteriyor. x, y G nin elmanı G birleşme özelliği sağlıyor. Dolayısıyla bunu ($\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$) şu şekilde $((ax)(ya^{-1}))$ de yazabiliriz aslında. Şurada [$(ax)(ya^{-1})$] ifadesinde parantezlerin arasını gösteriyor] bir e etkisiz elemanı vardır [$(ax)e(ya^{-1})$] yazıyor]. Bu e etkisiz elemanı şu şekilde $((ax)aa^{-1}(ya^{-1}))$ yazabiliriz. e çünkü G nin etkisiz elemanı a larda G nin etkisiz elemanı olduğundan ve G de bir grup olduğundan a nin zaten tersi var. Birleşme özelliğini [axa] yazıyor] uygularsak, pardon [axa] yı siliyor] değişme özelliğini uygularsak, yani hımmm aslında e yi şu şekilde de yazabiliriz baştan

[‘(ax)aa⁻¹(ya⁻¹)’ deki ‘aa⁻¹’ i silerek ‘a⁻¹a’ yazıyor yani ‘(ax)a⁻¹a(ya⁻¹)’ yazmış oluyor]. Şunu da sağlar eee. Birleşme özelliğinden tekrar bunları ((axa⁻¹)(aya⁻¹)) yazarsak, bu sefer bu $\varphi_a(x)\varphi_a(y)$ ye eşit olmuş oluyor. Dolayısıyla homomorfizmayı sağlıyor.

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\begin{aligned}\varphi_a(xy) &= a(xy)a^{-1} = (ax)(ya^{-1}) = (ax)a^{-1}a(ya^{-1}) \\ &= (ax)a^{-1}a(ya^{-1}) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)\end{aligned}$$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır.

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$\exists x \in G$ bulunabileceğinden, φ_a örten de olur. Şu halde φ_a G nin bir otomorfizmasıdır.

Şekil 4.7. Teorem.5’in ispatına yönelik Gül’ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 5. Teoremin ispatına yönelik Gül’ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.5’te yer verilmiştir.

Tablo 4.5.

Gül'ün 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Önce homomorfizm olduğu gösteriyor. $x, y \in G$ nin elemanı G birleşme özelliği sağlıyor. Dolayısıyla bunu $(\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1})$ şu şekilde $((ax)(ya^{-1}))$ de yazabiliriz aslında.</i>	Grupta birleşme özelliğinden ve ' $x, y \in G$ ' anahtar fikrinden yola çıkarak verilen ifadeyi açabiliyor.
<i>Şurada ['$(ax)(ya^{-1})$'] ifadesinde parantezlerin arasını gösteriyor] bir e etkisiz elemanı vardır ['$(ax)e(ya^{-1})$'] yazıyor]. Bu e etkisiz elemanı şu şekilde $((ax)aa^{-1}(ya^{-1}))$ yazabiliriz. . e çünkü G nin etkisiz elemanı a larda G nin etkisiz elemanı olduğundan ve G de bir grup olduğundan a nın zaten tersi var.</i>	Grupta etkisiz eleman özelliğini kullanıyor.
<i>Birleşme özelliğini ['axa'] yazıyor] uygularsak, pardon ['axa'] yı siliyor] değişme özelliğini uygularsak,</i>	<i>'$(axa^{-1})(aya^{-1})$' yi elde edebilmek için hangi özelliği kullanması gerektiğine karar vermeye çalışıyor.</i>
<i>yani hımmmm aslında e yi şu şekilde de yazabiliriz baştan ['$(ax)aa^{-1}(ya^{-1})$'] deki 'aa^{-1}' i silerek '$a^{-1}a$' yazıyor yani '$(ax)a^{-1}a(ya^{-1})$' yazmış oluyor].</i>	Etkisiz eleman özelliğini ' $(axa^{-1})(aya^{-1})$ ' ye ulaşma amacına hizmet edecek şekilde uygulayabiliyor.
<i>Birleşme özelliğinden tekrar bunları $((axa^{-1})(aya^{-1}))$ yazarsak, bu sefer bu $\varphi_a(x)\varphi_a(y)$ ye eşit olmuş oluyor. Dolayısıyla homomorfizmayı sağlıyor.</i>	Grup özelliklerinden birleşme özelliğini kullanarak ispatı tamamlıyor.

Tablo 4.5'te de görüldüğü gibi; Gül, tamamlanması beklenen Teorem.5'in ispatında verilen $x, y \in G$ ve $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$ anahtar fikirlerinden yola çıkarak ve etkisiz eleman özelliğini ve birleşme özelliğini etkin bir şekilde kullanarak, ispatı tamamlamıştır. Ayrıca grupta birleşme ve etkisiz eleman özelliklerini kullanarak işlemlerini iletmiş ve φ_a nın bir homomorfizma olduğunu göstermiştir.

4.2.1.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular

Teorem.6 S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

Gül: S kümesi bir V vektörü uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi veeee [Teoremi okuyarak ispata başlama basamağını okumaya geçiyor] c_i almış R den, $x_i y_i$ S den almış. S kümesi lineer bağımsız olduğundan... hımm... Galiba şunu demek istiyor $c_i x_i = 0$ sıfır.

Mülakatçı: Çarpım durumunda mılar?

Gül: [$c_i x_i = 0$ ı silerek] Biraz daha şöyle açarsak. Hani... i leri yerine yazarsak. $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ ayy çarpı bu şekilde gider $c_n x_n$ e kadar şu şekilde [$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n = 0$ yazıyor] sıfır. Sisteminin çözümünde c_i katsayıları 0 olmalıdır [ifadenin altındaki anahtar fikri okuyarak kendi yazdığı eşitliği kontrol ediyor]. S nin bir alt kümesi olduğunu, kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan. [bir sonraki boşluğu doldurabilmek için anahtar fikri okuyor] evet... [x_i 'yi göstererek] S deydi. [boşluğun hem altındaki hem de üstündeki anahtar fikri tekrar okuyor] Buna göre $x_i v_i$ olsun. x_i S dendi, v_i de V den. [Anahtar fikri okuyor, teoremden geçen S , V nin bir alt kümesi ifadesi ile bağlantı kurmaya çalışıyor] Bir alt kümesi, S , V nin bir alt kümesi, lineer bağımsız... S nin elemanları. Hımm, niye olsun ki elemanları? Bu v_i S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır [Anahtar fikirleri tekrar okuyor]. Burada pek bir şey gelmiyor aklıma.

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n = 0$$

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. S'

kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.

Buna göre;

$S \subset V$

.....

eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

Şekil 4.8. Teorem.6'nın ispatına yönelik Gül'ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 6. Teoremin ispatına yönelik Gül'ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.6'da yer verilmiştir.

Tablo 4.6.

Gül'ün 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>S kümesi bir V vektörü uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi veeee [Teoremi okuyarak ispata başlama basamağını okumaya geçiyor] c_i almış R den, $x_i y_i$ S den almış. S kümesi lineer bağımsız olduğundan... himm... Galiba şunu demek istiyor $c_i x_i = 0$ sıfır.</i>	$c_i \in R$ ve $x_i \in S$ ile S kümesinin lineer bağımsız olarak verildiği anahtar fikirler yardımıyla ' $c_i x_i = 0$ ' eşitliğini yazıyor.
<i>[Mülakatçının sorusu üzerine] [$c_i x_i = 0$' yi silerek] Biraz daha şöyle açarsak. Hani... i leri yerine yazarsak.... [$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n = 0$' yazıyor]</i>	Toplam sembolü ile ifade etmek aklına gelmiyor ancak eşitliği doğru yazıyor.
<i>Buna göre $x_i v_i$ olsun. x_i S dendi, v_i de V den. Bir alt kümesi, S, V nin bir alt kümesi, lineer bağımsız... S nin elemanları. Himm, niye olsun ki elemanları? Bu v_i S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır [Anahtar fikirleri tekrar okuyor].</i>	Anahtar fikir olarak verilen ' S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.' ifadesinde v_i leri V nin elemanları olarak düşündüğü için boşluktan sonra verilen ' v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan' anahtar fikri ile bir irtibat kuramıyor.
<i>Burada pek bir şey gelmiyor aklıma.</i>	İspatı tamamlayamıyor.

Tablo 4.6'da da görüldüğü gibi; Gül, tamamlanması beklenen Teorem.6'nın ispatında, anahtar fikir olarak verilen ' $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ ile S kümesinin lineer bağımsız olduğundan' ifadesini etkin bir biçimde kullanarak ilk boşluğu doldurabilmesine rağmen; ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesini matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle yanlış yorumlamış dolayısıyla sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerle bir bağlantı kuramamış ve ispatı tamamlayamamıştır.

4.2.1.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

Gül: [Teoremi ve hükmü belirleme basamağını sessizce okuyor.]

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun Gül? Düşündüklerini sesli olarak anlat?

Gül: hı hı. Şimdiii U kesişim W den bir u, v elemanları almış. c de bir sabit. F cisim diyor ama bir sabit olarak alıyoruz. eee $c.u + v$ nin de U kesişim W nin elemanı olduğunu gösterirsek eğer W nin bir alt uzay olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi U kesişim verdikten bir u, v elemanı alıyor. u, v de U nundur ve u, v de W nin dir de aynı zamanda.

Mülakatçı: Neden?

Gül: Çünkü hani kesişimlerinin elemanı ise ayrı ayrı iki kümenin de elemanı olur. eee ondan sonra.. U, W kümeleri ve bir alt uzayı [Teoremi tekrar okuyor]. U, W alt uzay ise bu $[u, v]$ yi göstererek] elemanlardan c de bir c_1 mesela F eleman F cisiminden alırsak, U alt uzay olduğundan $c_1.u + v$ elemanıdır U nun. [$c_1 \in F, c_1.u + v \in U$ ' yazıyor] bi c_2 yi de yine F den seçersek W de bir alt uzay olduğundan $c_2.u + v$ de şeyin. Neydi bu işaret işte W nin elemanı olur. [$c_2 \in F, c_2.u + v \in W$ ' yazıyor] $c.u + v$ eleman U nun ve yani şunu diyor. Ashnda direkt [siliyor] F den bir c elemanı da alabiliriz. Sonuçta değişken olduğu için sabit olması yeterli. c_1, c_2 diye ayırmamıza gerek yok. [$c_1 \in F, c_2 \in F$ ' leri silerek her ikisinin yerine de ' $c \in F$ ' yazıyor] ıı. Bu $(c.u + v)$ hem U nun elemanı hem W nin elemanı olduğundan kesişimlerinin de elemanı olur.

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.

$c.u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$$

$$c \in F \dots c.u + v \in U$$

$$\dots c.u + v \in W$$

$$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W \text{ ise}$$

$$c.u + v \in U \cap W \text{ dir.}$$

Şekil 4.9. Teorem.7'nin ispatına yönelik Gül'ün çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 7. Teoremin ispatına yönelik Gül'ün çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.7'de yer verilmiştir.

Tablo 4.7.

Gül'ün 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Şimdi U kesişim W den bir u, v elemanları almış. c de bir sabit. F cisim diyor ama bir sabit olarak alıyoruz. eee $c.u + v$ nin de U kesişim W nin elemanı olduğunu gösterirsek eğer W nin bir alt uzay olduğunu göstermiş oluruz.</i>	Hipotezi ve hükmü belirleme basamağında verilen anahtar fikirleri yorumluyor.
<i>Çünkü hani kesişimlerinin elemanı ise ayrı ayrı iki kümenin de elemanı olur.</i>	$'u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W'$ anahtar fikrini yorumluyor.
<i>$[c_1 \in F, c_1.u + v \in U]$ yazıyor] bi c_2 yi de yine F den seçersek W de bir alt uzay olduğundan $c_2.u + v$ de şeyin. Neydi bu işaret işte W nin elemanı olur. $[c_2 \in F, c_2.u + v \in W]$ yazıyor] $c.u + v$ eleman U nun ve yani şunu diyor. Aslında direkt [siliyor] F den bir c elemanı da alabiliriz. Sonuçta değişken olduğu için sabit olması yeterli. c_1 c_2 diye ayırmamıza gerek yok. $[c_1 \in F, c_2 \in F]$ leri silerek her ikisinin yerine de $c \in F$ yazıyor] u.</i>	Eksik bırakılan bölümleri tamamlarken, alt uzay kavramına yönelik bilgileri sözlü olarak ifade etmiş ve $c_1 \in F, c_2 \in F$ sabitlerinden yararlanmış; sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak her iki sabitin yerine de $c \in F$ yi kullanmıştır.

Tablo 4.7'de de görüldüğü gibi; Gül, tamamlanması beklenen Teorem.7'nin ispatında, anahtar fikir olarak verilen hipotezi yorumlayarak ispata başlamış, alt uzay kavramına ait bilgileri yalnızca sözlü olarak ifade ederek eksik bırakılan bölümleri tamamlamış, sonraki basamaklarda verilen anahtar fikirlere göre tamamladığı bölümleri revize etmiştir. Görüldüğü gibi Gül; Teorem.7'nin ispatının her aşamasında anahtar fikirleri aktif bir şekilde kullanmıştır.

4.2.2. Ezgi'nin Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu

Ezgi hızlı konuşan ve heyecanlı bir yapıya sahip olduğu için uygulama süresi diğer adaylara göre en kısa olan adaydır. Genel olarak anahtar fikirleri etkin bir biçimde

kullanabilmiştir. Hızlı bir düşünme ve konuşma tarzı olan Ezgi'nin düşüncelerini açığa çıkarabilmek için araştırmacı sorular sormak durumunda kalmıştır.

4.2.2.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.1 $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

Ezgi: G bir grup N normal alt grup G ise demiş G/N bir gruptur. İlk adımda x, y bölüm grubunu almış. Hani grup olduğunu göstermesi için birleşme özelliğini göstermesi lazım. Ondan başlamış. x, y, z G nin elemanları ise ve bunu bölüm grubundan almış ise, $(xN)[(yN)(zN)]$ şeklinde olacak. Bunun $((xN)[(yN)(zN)])$ sonucunda şuna $([(xN)(yN)](zN))$ ulaşmamız gerekiyor. Ben bu aradaki adımları tamamlamam gerekiyor. $xN[(yz)N]$. Şunu $(xN[(yz)N])$ şöyle yazalım hocam. $(= xN[(yN)(zN)])$ Ben biraz alt taraftan kopya çekeceğim hocam. Şundan $([(xN)(yN)](zN))$. Sonra bunda xNy [$'xNy'$ yazıyor] e zaten aynı olmuş oluyor [$'xNy'$ yi siliyor]. İşte hocam bunu $(xN[(yN)(zN)])$ da açınca bundan sonra direk buna $([(xN)(yN)](zN))$ gelmiyor muyuz?

Mülakatçı: Nasıl geleceğiz?

Ezgi: xN, yN . Şöyle yapsam x, y şu ikisini [$'xN[(yN)'$ yi göstererek] $(xy)N$ desem şu (zN) i şöyle bıraksam [$'= (xy)N(zN)'$ yazıyor] direkt buna hiç dokunmadan buna da $((xN)y(N))$ bu zaten şeydi zN , şöyle $([(xN)y(N)](zN))$. Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir. Tamam. G birim eleman, her xN eleman G/N için $(xN)(eN) xN$; birim eleman olduğunu direk göstermiş, ben de bunu [ters eleman özelliğine yönelik verilen anahtar fikri okudu] şöyle yapayım [ters elemanın varlığının ispatına başlıyor]. $(x.x^{-1})N$ diyeyim. x in kendi ile tersinin birleşimine eN . E zaten ters eleman olması için yani kendisi ile tersini işleme soktuğumdan birim eleman olması lazım. O zaman ben buradan x^{-1} eleman, $x^{-1}N$ elemandır G böler N derim [$'x^{-1}N \in G/N'$ yazıyor]. Yani şey, ters eleman var e birimi var, birleşme var, birim var, ters eleman var, o zaman G/N bir gruptur.

Teorem.1: $(G, \cdot)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. ($x, y, z \in G$ için)

Bu takdirde,

$$\begin{aligned} (xN)[(yN)(zN)] &= xN[(yz)N] \\ &= xN[(yN)(zN)] \\ &= (xy)N(zN) \\ &= [(xy)N](zN) \\ &= [(xN)(yN)](zN) \end{aligned}$$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ var mıdır?

$$\begin{aligned} (xN)(x^{-1}N) &= (xx^{-1})N \\ &= eN \end{aligned}$$

$$x^{-1}N \in G/N \quad \text{ters eleman var}$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Şekil 4.10. Teorem.1'in ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 1. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.8.

Ezgi'nin 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>G bir grup N normal alt grup G ise demiş G/N bir gruptur. İlk adımda x,y bölüm grubunu almış. Hani grup olduğunu göstermesi için birleşme özelliğini göstermesi lazım. Ondan başlamış. x,y,z G nin elemanları ise ve bunu bölüm grubundan almış ise, $(xN)[(yN)(zN)]$ şeklinde olacak.</i>	Teoremin ifadesini ve verilen anahtar fikri okuyarak yorumluyor.
<i>Bunun $((xN)[(yN)(zN)])$ sonucunda şuna $([(xN)(yN)](zN))$ ulaşmamız gerekiyor.</i>	Eksik bırakılan bileşenin başlangıcında ve sonunda verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurmaya çalışıyor.
<i>Şunu $(xN[(yz)N])$ şöyle yazalım hocam. (= $xN[(yN)(zN)])$ Ben biraz alt taraftan kopya çekeceğim hocam. Şundan $([(xN)(yN)](zN))$.</i>	' $[(xN)(yN)](zN)$ ' anahtar fikrinden yardım alarak ' $xN[(yz)N]$ ' i ' $xN[(yN)(zN)]$ ' şeklinde yazıyor.
<i>İşte hocam bunu $(xN[(yN)(zN)])$ da açınca bundan sonra direk buna $([(xN)(yN)](zN))$ gelmiyor muyuz?</i>	Sezgisel olarak ispatı kavrayabiliyor ancak işlem yapamıyor.
<i>Şöyle yapsam x,y şu ikisini [$xN[(yN)]$ yi göstererek] $(xy)N$ desem şu (zN) i şöyle bıraksam [$= (xy)N(zN)$ yazıyor] direkt buna hiç dokunmadan buna da $(xN)y(N)$ bu zaten şeydi zN, şöyle $([(xN)y(N)](zN))$.</i>	' $(x(yz))N = ((xy)z)N$ ' adımlarını ifade etmeden kısmen de olsa ispatı tamamlayabilmiştir.
<i>x in kendi ile tersinin birleşimine eN. E zaten ters eleman olması için yani kendisi ile tersini işleme soktuğumdan birim eleman olması lazım. O zaman ben buradan x^{-1} eleman, $x^{-1}N$ elemandır G böler N derim [$x^{-1}N \in G/N$ yazıyor].</i>	Ters eleman özelliğini biliyor, birim eleman ve ters eleman özelliğinde verilen anahtar fikirler yardımıyla ' $(xN)(x^{-1}N)$ ' yi ' $(xx^{-1})N$ ' şeklinde yazıyor.

Tablo 4.8'de de görüldüğü gibi; Ezgi birleşme özelliğinin varlığını araştırırken işlem yapmaya başlamadan önce teoremin ifadesini ve verilen anahtar fikirleri okuyarak yorumlamış, eksik bırakılan bileşeni tamamlamak için bileşenin başlangıcında ve bitiminde verilen anahtar fikirlerden yola çıkmıştır. Sezgisel olarak ispatı anlayabilmiş olmasına rağmen işlem yapmakta zorlanmış ancak anahtar fikirler yardımıyla birkaç işlem basamağı atlayarak da olsa ispatı sonuçlandırmıştır. Burada normal alt grup tanımını kullanmamış, başlangıçta verilen anahtar fikir yardımıyla bir çözüm geliştirmiştir. Ters elemanın varlığını araştırırken ise birim eleman ve ters eleman özelliğinde verilen anahtar fikirler ve her ne kadar sözlü olarak ifade etmese de birleşme özelliğinde verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak ispatı belirli bir düzeye getirmiştir. Kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek anahtar fikri gözden kaçırdığı

için tek taraflı olarak işlemlerini yürütmüş dolayısıyla ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamıştır.

4.2.2.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.2 $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

Ezgi: Bir grup H normal H grup olsun alt grup olsun, her a elaman G için, $Ha =$ *tamam ben okuyayım [teoremin ifadesini ve ispatı okumaya başladı].* a denktir x uyan x eleman G lerin kümesini a üstü ($\bar{a}$) ile gösterelim. Yani a üstü ($\bar{a}$) a nın denklik sınıfı olsun. Yani a üstü ($\bar{a}$) a nın denklik sınıfı olsun [ifadeyi tekrarlayarak düşünüyor]. Yani burada şey söylemiş, şurayı tekrar [teoremi göstererek] açıklıyor H alt grup G için Ha olduğunu dolayısıyla kümelerin eşitliği olduğu için birbirlerinin alt kümeleri olduğunu göstermeliyiz. [Hipotezi belirleme basamağını okudu] Bunu söylüyor. Değil mi, evet onu söylemiş birbirlerinin alt kümesi olduğunu. Diyor ki x eleman a üstü ($\bar{a}$), yani a denktir $x \pmod{H}$ ise ax^{-1} elemandır H yazılır. Bunu niye yazmış? H bir alt grup olduğundan H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir h eleman H vardır ki ax^{-1} elemandır h dir. ax^{-1} anlamadım ben. [Hipotezi kullanma basamağını tekrar okuyor] x eleman a üstü olsun [$x \in \bar{a}$ ifadesini böyle okuyor].

Mülakatçı: Nereden elemanını seçiyor? Neyi göstermeye çalışıyor? Elemanını nereden seçiyor? Ona bir bak bakalım.

Ezgi: [Tekrar anahtar fikre dönüyor] x elemanını a üstünden ($\bar{a}$) almış. a denktir x e. Şunu ($ax^{-1} \in H$) şuradan a^{-1} elemandır H . H alt grup olduğu için hani x, y eleman H için xy^{-1} de elemandır H olmalı [bunu ayrı bir yere not etti] Bunu ($ax^{-1} = h$) buradan getirmiş. H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir h eleman H vardır ki ax^{-1} , h ye eşittir. Yani şu (ax^{-1}) elemanı bulmaya çalışıyor. Zaten sonlu bir alt grup olduğu için, muhtemelen kapalılık özelliğini sadece alt grup olması için sağlanması yeterlidir. Bu buna $ax^{-1} = h$ diyor. Buradan demiş, grupta birleşme özelliğinden, ben burada ne yapabilirim? Her tarafı a nın tersi ile bir işleme soksam, ama önce onu yapmadan önce bir şey yapmam lazım.

Mülakatçı: Ne yapman lazım?

Ezgi: Grupta birleşme özelliğini kullanmam gerekiyormuş. Birleşme özelliği... H bir

alt grup olduğundan kapalılık özelliğini göre. Şuradan [üçüncü basamağı ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' göstererek] geri geri gitsem ben.

Mülakatçı: Tabi nasıl istersen.

Ezgi: ax^{-1} burada muhtemelen şurası şöyle. $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ [diyerek yazıyor] buradan zaten bu ($a^{-1}ax^{-1}$) buradan buna (ex^{-1}) gelir. [Yazdığı eşitliği ve alttaki eşitlikteki karşılığını gösteriyor.] Burada grupta ne özelliğinden kullanırım ben bunu. Şey ters elemanın varlığından. Hani bunun nasıl.

Mülakatçı: Yaz oraya.

Ezgi: Ters eleman mı diyeyim, ters eleman özelliğinden mi diyeyim? Hani her eleman tersi birimle işleme soktuğumda e oluyor. Sonra burada $x^{-1}a^{-1}h$, [$ex^{-1} = a^{-1}h$ ' yi göstererek] olmuş. E bunu zaten direk şeyden, birim eleman ile kendisini işleme soktuğumda şey olduğundan, grupta birim özelliğinden bunu söylerim. [Grup özelliklerini yazıyor] Hocam, şurayı [boş bıraktığı ilk basamağı göstererek] bulacağım inşallah. Eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa $x = h^{-1}a$ olur [ifadeyi okudu] Bizim amacımız ne zaten, x in H nın denklik sınıfından bir eleman olarak almış [ispata başındaki ' $x \in \bar{a}$ ' yi göstererek]. h eleman H ve H alt grup G olduğundan demiş. h^{-1} 'e h_0 dersem [$h^{-1} = h_0$ ' yazıyor] buna kısaca, x in $h_0.a$ eleman Ha olur ki buradan, a nın denklik sınıfının Ha olduğu bulunur. Bir tanesini buldum [$\bar{a} \subset Ha$ ' yi göstererek]. Bir de diğerini bulmam gerekiyor. Tersine demiş y eleman Ha alınırsa. Ben burada neyi aldım [i. ispata tekrar göz gezdiriyor] şu. Tamam. Tersine y eleman Ha alınırsa, x eleman H vardır, öyle ki $y = x.a$ dır. $y; x.a$ dır. [ii. ispata başlama basamağını okudu] Buradan...

Mülakatçı: Neden öyle yazdı $y; x.a$ dır?

Ezgi: Bu şey değil mi hocam, yan kümenin elemanı olduğundan dolayı hani bunu (y) bu şekilde (xa) yazdı.

Mülakatçı: Evet.

Ezgi: ya^{-1} her taraftan ben şurada ters eleman özelliğinden gideceğim, yine geri geri gidiyorum. $ya^{-1} = xaa^{-1}$ sağdan işleme tabi tutmuş. Sonrasında bunu ($ya^{-1} = xe$) bulmuş. Buna gelene kadar grupta birleşme özelliğinden diyor. Bir tane daha soru işareti koyalım. [İlk kısımda boş bıraktığı ilk basamağı burada da boş bıraktı.]

$ya^{-1} = xe$ ters birim bu zaten [boş bırakılan yere 'birim' yazıyor]. $ya^{-1} = x$ olur. Yani buradan $x = ya^{-1}$ eleman H olur. Amacımız o zaten bizim.. ya^{-1} eleman H demiş. Yani y denktir a ya, $(\text{mod } H)$ ya göre ve a denktir y ye $(\text{mod } H)$ ya göre; ve y eleman a üstü $(\bar{a})$ bulunur ki, H alt gruptur a üstü $(\bar{a})$ demektir. Hocam şunlara bir fikrim yok [boş bıraktığı ilk adımları gösterdi].

Mülakatçı: Tamam. Bu soruda sana ne yardımcı oldu?

Ezgi: Ne yardımcı oldu tamamen şu [i. ispatta verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' anahtar fikrini gösterdi]. Şundan geriye doğru gitme. Ve şuradaki şeyler hocam, şu açıklamalar [i. ispata başlamadan önce verilen bilgileri yani hipotezi kullanma basamağını gösterdi].

Teorem.2: $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x(\text{mod } H)\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x(\text{mod } H)$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim. Yani $\bar{a}$, a nın denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu dolayısıyla $\bar{a} \subset H_a$ ve $H_a \subset \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz.

(i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x(\text{mod } H) \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir altgrup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Buradan;

$$xy^{-1} = h$$

..... (Grupta birleşme özelliğinden)

$a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ (Grupta ters eleman özelliğinden)

$ax^{-1} = a^{-1}h$ (Grupta ... özelliğinden)

$x^{-1} = a^{-1}h$ olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alınır

$$(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$$

$$x = h^{-1}a \text{ olur.}$$

($h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan denirse)

$$x = h_0a \in H_a \text{ olur ki buradan } \bar{a} \subset H_a \text{ bulunur.(1)}$$

ii) Tersine olarak $y \in H_a$ alınır; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dir. Buradan;

..... (Grupta birleşme özelliğinden)

$ya^{-1} = xa^{-1}a = x$ (Grupta ters eleman özelliğinden)

$ya^{-1} = xe$ (Grupta ... özelliğinden)

$ya^{-1} = x$ olur. Buradan $x = ya^{-1} \in H$ bulunur.

$ya^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a(\text{mod } H) \forall a \equiv y(\text{mod } H) \Rightarrow y \in \bar{a}$ bulunur ki;

$H_a \subset \bar{a}$ demektir.(2)

(1) Ve (2) den $H_a = \bar{a}$ denir.

Şekil 4.11. Teorem.2'nin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 2. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.9'da yer verilmiştir.

Tablo 4.9.

Ezgi'nin 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Bir grup H normal H grup olsun alt grup olsun, her a eleman G için, $Ha = aH$ ben okuyayım [teoremin ifadesini ve ispatı okumaya başladı]. a denktir x uyan x eleman G lerin kümesini a üstü ($\bar{a}$) ile gösterelim. Yani a üstü ($\bar{a}$) a nın denklik sınıfı olsun. Yani a üstü ($\bar{a}$) a nın denklik sınıfı olsun [ifadeyi tekrarlayarak düşünüyor]. Yani burada şey söylemiş, şurayı tekrar [teoremi göstererek] açıklıyor H alt grup G için Ha olduğunu dolayısıyla kümelerin eşitliği olduğu için birbirlerinin alt kümeleri olduğunu göstermeliyiz. [Hipotezi belirleme basamağını okudu] Bunu söylüyor. Değil mi, evet onu söylemiş birbirlerinin alt kümesi olduğunu. Diyor ki x eleman a üstü ($\bar{a}$), yani a denktir $x(mod H)$ ise ax^{-1} elemandır H yazılır. Bunu niye yazmış? H bir alt grup olduğundan H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir h eleman H vardır ki ax^{-1} elemandır h dir. ax^{-1} anlamadım ben. [Hipotezi kullanma basamağını tekrar okuyor] x eleman a üstü olsun [$x \in \bar{a}$ ifadesini böyle okuyor].	İspata başlamadan önce anahtar fikir olarak verilen hipotezi ve hükmü belirleme basamağı ile hipotezi kullanma basamağını anlamaya çalışıyor.
x elemanını a üstüden ($\bar{a}$) almış. a denktir x e. Şunu ($ax^{-1} \in H$) şuradan a^{-1} elemandır H . H alt grup olduğu için hani xy eleman H için xy^{-1} de elemandır H olmalı. Bunu ($ax^{-1} = h$) buradan getirmiş.	Önceki bilgilerinden alt grup tanımını kullanarak hipotezi kullanma basamağını anlamaya çalışıyor.
Yani şu (ax^{-1}) elemanı bulmaya çalışıyor. Zaten sonlu bir alt grup olduğu için, muhtemelen kapalılık özelliğini sadece alt grup olması için sağlanması yeterlidir. Bu buna (ax^{-1}) h diyor.	H yi sonlu bir alt grup olarak düşünüyor ya da o an için öyle ifade ediyor.
Buradan demiş, grupta birleşme özelliğinden, ben burada ne yapabilirim? Her tarafı a nın tersi ile bir işleme soksam, ama önce onu yapmadan önce bir şey yapmam lazım.	Aslında yapması gereken işlemi biliyor ve ifade ediyor ancak bunu nasıl yazacağını bilemiyor.
Grupta birleşme özelliğini kullanmam gerekiyormuş. Birleşme özelliği... H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğini göre.	'Grupta birleşme özelliğinden' anahtar fikrinden yardım alıyor.
Şuradan ($ex^{-1} = a^{-1}h$) geri geri gitsem ben.	Üçüncü adımda verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' anahtar fikrinden yola çıkmayı düşünüyor.

Tablo 4.9. (Devamı)

ax^{-1} burada muhtemelen şurası şöyle. $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ [diyerek yazıyor] buradan zaten bu $(a^{-1}ax^{-1})$ buradan buna (ex^{-1}) gelir. [Yazdığı eşitliği ve alttaki eşitlikteki karşılığını gösteriyor.]	Anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımdaki eşitlikten yola çıkarak ikinci adımda eksik bırakılan eşitliği tamamlıyor.
Burada grupta ne özelliğinden kullanırım ben bunu. Şey ters elemanın varlığından... Hani her eleman tersi birimle işleme soktuğumda e oluyor.	Tamamladığı eşitlikte kullanılan kavramsal bilgiyi ve özelliğini biliyor.
Sonra burada $x^{-1}a^{-1}h$, [$ex^{-1} = a^{-1}h$ ’ yi göstererek] olmuş. E bunu zaten direk şeyden, birim eleman ile kendisini işleme soktuğumda şey olduğundan, grupta birim özelliğinden bunu söylerim.	Tamamlanmış olarak verilen eşitlikte kullanılan kavramsal bilgiyi ve özelliğini biliyor.
Bizim amacımız ne zaten, x in H nin denklik sınıfından bir eleman olarak almış [ispata başındaki ' $x \in \bar{a}$ ' yi göstererek]. h eleman H ve H alt grup G olduğundan demiş. $h^{-1}e$ h_0 dersem [$h^{-1} = h_0$ yazıyor] buna kısaca, x in h_0 . a eleman Ha olur ki buradan, a nın denklik sınıfının Ha olduğu bulunur.	İspata bütüncül olarak bakarak neler yapıldığını anlamaya çalışıyor ve verilen $(x = h_0a)$ anahtar fikri ile $(x = h^{-1}a)$ anahtar fikri arasında bağlantı kurarak boş bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' kısmını tamamlıyor. Ancak $h^{-1}, h_0 \in H$ 'ı tanımlamayı ihmal ediyor.
Bir tanesini buldum [$\bar{a} \subset Ha$ ’ yi göstererek]. Bir de diğerini bulmam gerekiyor. Tersine demiş y eleman Ha alınırsa. Ben burada neyi aldım [i. ispata tekrar göz gezdiriyor] Şu. Tamam. Tersine y eleman Ha alınırsa, x eleman H vardır, öyle ki $y = x.a$ dır. y $x.a$ dır. [ii. ispata başlama basamağını okudu]	İspata bütüncül olarak bakarak neler yapıldığını ve sonraki adımlarda neler yapılacağını anlamaya çalışıyor
Bu şey değil mi hocam, yan kümenin elemanı olduğundan dolayı hani bunu (y) bu şekilde (xa) yazdı.	Yan kümenin elemanlarının nasıl bir formda olması gerektiğini biliyor.
ya^{-1} her taraftan ben şurada ters eleman özelliğinden gideceğim, yine geri geri gidiyorum. $ya^{-1} = xaa^{-1}$ sağdan işleme tabi tutmuş. Sonrasında bunu $(ya^{-1} = xe)$ bulmuş.	Anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımdaki eşitlikten yola çıkarak ikinci adımda eksik bırakılan eşitliği tamamlıyor.
Buna gelene kadar grupta birleşme özelliğinden diyor. Bir tane daha soru işareti koyalım. [ilk kısımda boş bıraktığı ilk basamağı burada da boş bıraktı.]	i. ve ii. basamakların her ikisinde de birleşme özelliğine yönelik işlemleri oluşturamıyor.
$ya^{-1} = xe$ ters birim bu zaten [boş bırakılan yere 'birim' yazıyor]. $ya^{-1} = x$ olur. Yani buradan $x = ya^{-1}$ eleman H olur. Amacımız o zaten bizim..	Tamamlanmış olarak verilen eşitlikte kullanılan kavramsal bilgiyi ve özelliğini biliyor.
Ne yardımcı oldu tamamen şu [i. ispatta verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' anahtar fikrini gösterdi]. Şundan geriye doğru gitme. Ve şuradaki şeyler hocam, şu açıklamalar [i. ispata başlamadan önce verilen bilgileri yani hipotezi kullanma basamağını gösterdi].	Genel olarak bu ispata tamamlamasında anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımlardaki eşitlikler ve hipotezi kullanma bileşeni etkili olmuştur.

Tablo 4.9’da da görüldüğü gibi; kavramsal bilgileri ve önceki bilgileri kullanarak tamamlanması beklenen 2. teoremin ispatında Ezgi, aktif bir şekilde anahtar fikirleri kullanmaktadır. Öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirleri birlikte

düşünerek eksik bırakılan bölümleri tamamlamaya çalışmıştır. Her iki bölümde de yapması gereken işlemi bilmesine ve ifade etmesine rağmen nasıl yazacağını bilememiş dolayısıyla birleşme özelliğine yönelik eşitlikleri oluşturamamış ancak anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımlardaki eşitliklerden yola çıkarak ikinci adımlarda eksik bırakılan eşitlikleri tamamlayabilmiştir. İspata bütüncül olarak bakarak neler yapıldığını anlamaya çalışmış ve yalnızca verilen $(x = h_0a)$ ile $(x = h^{-1}a)$ anahtar fikirleri arasında bağlantı kurarak boş bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' ifadesini $h^{-1}, h_0 \in H$ yı tanımlamayı ihmal ederek tamamlamıştır. Dolayısıyla grupta ters elemanın varlığına yönelik ifadeyi yazamamıştır. Ezgi'nin bu ispatı tamamlayabilmesinde etkili olan anahtar fikirler genel olarak, üçüncü adımlarda verilen eşitlikler ve hipotezi kullanma bileşeninde verilen bilgilerdir.

4.2.2.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.3 Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

Ezgi: Bir G grubunun bir takım alt gruplarının kesişimi yine bir alt gruptur, demiş. Bir indis kümesi olsun. Biz neyi göstermemiz lazım o zaman, şunu şöyle yazsam hocam. n, i eleman I lardan oluşsun. H_i nin bir alt grup, ne olduğunu göstereceğim; G olduğunu göstereceğim. Bu H_i ler de işte H_1, H_2 bunlar da birer grup. Bunu başta yazsam daha iyiydi ama. [$\cap_{i \in I} H_i < G$, $H_i: H_1, H_2$ birer grup' yazdı. Burada ' $H_i: H_1, H_2 \cap_{i \in I} H_i < G$ ' olması gerektiğini sözlü olarak ifade etti bir okla gösterdi.] Bunlar $(H_i: H_1, H_2)$ birer grup ve bu gruplarının kesişimi indislerden oluşan kesişimi. Değiştirelim mi yerlerini?

Mülakatçı: Farketmez, onu anlarım.

Ezgi: Şu şöyle işte hani ondan önce [bir ok çizerek ' $H_i: H_1, H_2$ ' nin ' $\cap_{i \in I} H_i < G$ ' den önce olduğunu ifade etmeye çalışıyor.] Bunun için demiş a, b eleman H alalım. Kesişim tanımından demiş. Her i eleman I için a, b elemandır H_i . Kesişimin tanımından. H dan eleman almış, tamam. Gruptan bir eleman almış. Kesişimin tanımından. Çarpımları da alt grubun tanımından, tamam.

Mülakatçı: Neyi göstermiş?

Ezgi: Kesişimi.

Mülakatçı: En sonda neyi göstermiş?

Ezgi: Kesişimin de bir alt grup olduğunu hani. Şurada göstermiş. [sonda geçen 'kesişimin tanımından, $ab^{-1} \in H$ olur' ifadesini göstererek] H alt grup G demiş.

Mülakatçı: Biz yukarda ne yazdık, neyi göstereceğiz yazdık? Hipotezi nasıl kurduk?

Ezgi: Alt gruplarının kesişimi, ben de şey demedim mi alt gruplar Kesişimleri G nin alt grubu olsun.

Mülakatçı: Evet.

Ezgi: Aslında aynı şey değil mi bunu da H_i larda H olarak.

Mülakatçı: Öyle mi yapmış yani. Yani H ne, H yı kullanmadık ya o yüzden soruyorum. Nasıl anlamalıyız yani?

Ezgi: H_i lar, yani şeyi yazsak hocam. Bir hani buradaki H_i lar yani tüm kesişimlerin kümesi ve bir tane H almış. Bunlardan temsilci bir tane H alsam. O şekilde göstermiş olabilir mi?

Mülakatçı: Bu soruda nerelerden yola çıktın?

Ezgi: Burada tamamen hani şuna [sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri göstererek] bakmaktan ziyade, ben bu sefer hani şunu $(\bigcap_{i \in I} H_i < G)$ bildiğimden, kesişimlerin alt grup, kendi gösterimini kendim yapabileceğimden...

Mülakatçı: Tamam.

Ezgi: Aslında hani

Mülakatçı: H_i hı.

Ezgi: Bunu bulabildim hocam.

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) altgruplarının kesişimi yine G nin bir altgrubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$ $H_i = H_1, H_2$ birer grup (H)

olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b \in H_i$

→ Altgrubun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Şekil 4.12. Teorem.3'ün ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 3. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.10'da yer verilmiştir.

Tablo 4.10.

Ezgi'nin 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Bir G grubunun bir takım alt gruplarının kesişimi yine bir alt gruptur, demiş. Bir indis kümesi olsun. Biz neyi göstermemiz lazım o zaman, şunu şöyle yazsam hocam. n, i eleman I lardan oluşsun. H_i nin bir alt grup, ne olduğunu göstereceğim; G olduğunu göstereceğim. Bu H_i ler de işte H_1, H_2 bunlar da birer grup. Bunu başta yazsam daha iyiydi ama. [$\cap_{i \in I} H_i < G$, $H_i: H_1, H_2$ birer grup' yazdı. Burada '$H_i: H_1, H_2 \cap_{i \in I} H_i < G$' olması gerektiğini sözlü olarak ifade etti bir okla gösterdi.] Bunlar $(H_i: H_1, H_2)$ birer grup ve bu gruplarının kesişimi indislerden oluşan kesişimi...</i>	Hipotezi ve Hükümü belirleyebilmek için teorem ifadesinden yola çıkarak ' $\cap_{i \in I} H_i < G$, $H_i: H_1, H_2$ ' yazıyor.
<i>Bunun için demiş a.b eleman H alalım. Kesişim tanımından demiş. Her i eleman I için a.b elemandır H_i. Kesişimin tanımından. H dan eleman almış, tamam. Gruptan bir eleman almış. Kesişimin tanımından. Çarpımları da alt grubun tanımından, tamam.</i>	Sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri okuyor.
<i>H_i lar, yani şeyi yazsak hocam. Bir hani buradaki H_i lar yani tüm kesişimlerin kümesi ve bir tane H almış. Bunlardan temsilci bir tane H alsam. O şekilde göstermiş olabilir mi?</i>	Aslında hipotezi belirliyor ancak matematiksel notasyon olarak nasıl ifade edeceğini bilemediği için son adımla hipotezi ve hükümü belirleme basamaklarını birleştiremiyor.
<i>Burada tamamen hani şuna [verilen anahtar fikirleri göstererek] bakmaktan ziyade, ben bu sefer hani şunu ($\cap_{i \in I} H_i < G$) bildiğimden, kesişimlerin alt grup, kendi gösterimini kendim yapabileceğimden, bunu bulabildim hocam.</i>	Anahtar fikirlerden yardım almadı verilen ifadeyi matematiksel dil ve notasyonlara uygun olarak tam anlamıyla yazamıyor.

Tablo 4.10'da da görüldüğü gibi; Ezgi, hipotezi ve hükümü belirleyerek tamamlanması istenen 3. Teoremin ispatında teoremin ifadesinden yola çıkmıştır. İspatı oluşturma süreci içerisinde sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri okumasına ve hipotezi kısmen de olsa belirleyebilmesine rağmen son adımla hipotezi ve hükümü

belirleme basamakları arasındaki ilişkiyi kuramadığı için hipotezi ve hükmü matematiksel dil ve notasyona uygun bir biçimde tam anlamıyla ifade edememiştir.

4.2.2.4. Teorem.4'ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.4 Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

Ezgi: Order G , k demiş, k asal ise G grubu bir devir grubudur. Order G , k ve k asal olsun demiş. Ee G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz, demiş. Tamam. [Teoremi ve hipotezi kurma basamağını okudu] a eleman G ve e olmasın, e olursa zaten direkt oluyor. a eleman tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Lagrange teoremi gereğince order H order G [' $o(H) \mid o(G)$ ' yi okuyor], hani alt grubu böler. Aslında ben de bunu söyledim. Diyor ki $o(H)$ böler $o(G)$ olmalıdır, demiş. Ancak $o(G) = k$, hocam bu yapmış mı bunu?

Mülakatçı: Devam et bakalım.

Ezgi: Lagrange teoremi gereğince $o(H)$ aldığı a . Yani H alt grup G ise demiş hani. Bir köşeye $H \leq G$ yazdı.

Mülakatçı: Hı hı.

Ezgi: Bu grubun mertebesi [yazdığı ' $H \leq G$ ' deki ' G ' yi göstererek] alt grubun [H ' yi göstererek] mertebesini böler, lagrange teoremi, onu biliyorum. Ancak demiş order k [$o(G) = k$ ifadesini okudu] asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur, demiş. Ancak order G , şu ($o(G)$) asal. O zaman hocam order G asalsa bunun 1 ve kendisinden başka böleni yoksa ya order H , order G ye eşit, kümenin kendisine eşit derim, ya da $o(H)$ nın bir tek elemanı var. $o(H)$ nın bir tek elemanı varsa onu da derim, e olarak alırım. E zaten e birim eleman, hani grubun tamamını ürettiğinden, o zaman H ya da ben şey derim. [$o(H) = o(G)$ ' ve ardından ' $o(H) = e$ ' yazdı] Bizden ama ne istiyor? k asal ise G grubu a nın [teoremi yeniden okuyor]. Tamam işte order H e , hani e olursa birim eleman da grubun tamamını ürettiğinden o zaman devirli grup olur. Diyemez miyim?

Mülakatçı: Devirli grubun tanımı neydi? Devir grubu neydi?

Ezgi: Devirli grup, mesela $G = \langle a \rangle$ tarafından üretilen bir elemanı tarafından

Mülakatçı: *Bir elemanı tarafından üretilecek. Değil mi?*

Ezgi: *Evet. a^n mesela n eleman Z [$G = \langle a \rangle = \{a^n : n \in Z\}$] yazdı.] Yani bu kümeye, çarpımsal grupsa mesela, katları şeklinde yazdığım zaman, a nın gruptaki tüm elemanları bana vermesi gerekiyor.*

Mülakatçı: *Ama sen iki eleman tarafından ürettin.*

Ezgi: *Hani nasıl iki eleman?*

Mülakatçı: *İki tane mertebe buldun. Hem e , yani hem 1 , hem k .*

Ezgi: *Hem 1 hem k . $o(G)$ ye k demiş. k asal olduğundan [hipotezi kurma basamağını tekrar okuyor]. G alt... Bir dakika hocam, bir daha bakayım [tekrar okuyor] a eleman G , a eşit değildir e olsun. Tamam. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Şunun ($o(G)$) mertebesi k ise.*

Mülakatçı: *Tamam. Order yani order H değil mi, şimdi H kümesi aslında a tarafından geriliyor.*

Ezgi: *Evet order H yı a tarafından gerilen bir küme olarak almış.*

Mülakatçı: *Yani. a ne olabilir?*

Ezgi: *a burada ya birim eleman tarafındandır dedim. Ya da order H . Gerçi bölüyorsa, kümenin kendisi de olabilir aslında.*

Mülakatçı: *Evet.*

Ezgi: *Order H , k da olabilir.*

Mülakatçı: *Tamam iki şık var.*

Ezgi: *Evet, ancak demiş $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. O halde. Hocam aslında ben bunu e olarak değil de kümenin kendisine eşit olarak alsam. Çünkü ben order G nin.*

Mülakatçı: *Zaten e olarak niye alamayız?*

Ezgi: *Çünkü order H nin. e eşit değildir e demiş. Hıh şu an onu gördüm [Yukarıda verilen ' $a \neq e$ ' anahtar fikrini görüyor]. O zaman hocam ben buradan order H nin e alamıyorum. 1 ve kendisinden başka böleni yok. O zaman order H nin mertebesini k*

almış olarak alacağım $o(H) = k$ yazdı. Birbirine mertebeleri eşit zaten. E k da asal sayı ve order G de k ise o zaman devirli grup olmuş olmuyor mu?

Mülakatçı: *H devirli olmuş oluyor değil mi?*

Ezgi: *Evet. E H da G ye eşit olmuş oluyor.*

Mülakatçı: *Mertebeleri eşit.*

Ezgi: *Mertebeleri eşit. Order H , order G ye eşit. E a da H tarafından geriliyor. Çok kolay bu ya.*

Mülakatçı: *Buradan nasıl sonuçlandırırız?*

Ezgi: *Şimdi order H nın k olduğunu söyledik. Ve devirli bir grup olduğunu söyledik. k tarafından geril... Mertebesi k ve devirli ise o zaman G nin mertebesi de k , o zaman G de devirli olacak.*

Mülakatçı: *Evet. Yaz bakalım.*

Ezgi: *Ne yazayım hocam. Nasıl yazayım?*

Mülakatçı: *Düşündüğünü yaz.*

Ezgi: *Düşün...[Gülüyor] Şey nasıl yazsam ki? Order H ya k dedim. Order H Şöyle yazayım [diyip önceden yazdıklarını tekrar siliyor]. Order H diyeyim e . Ya da order H , k olmalı. [$o(H) = e$ ya da $o(H) = k$ olmalıdır' yazdı]. Hani 1 den başka ve kendisinden... Ama e 'ye eşit olmadığından dedik. Order H yı k olarak almalıyız. [$o(H) = k$ olarak almalıyız' yazdı] Şimdi burada şöyle desek. Order H , k yani order H order G ye eşit oldu. $o(H) = o(G)$, H devirli bir grup. Bu da $(o(G))$ devirli bir grup. Bu (H) k tarafından üretiliyor, bu (G) da k tarafından üretiliyor. Mertebeleri de birbirine eşit. O zaman ben buradan dolayısıyla diyim hocam. Ne diyecektim? G grupta H devirli olup k tarafından üretiliyor. O zaman G de devirli olur.*

Mülakatçı: *Bu soruda neler yardımcı oldu sana?*

Ezgi: *Şu; lagrange teoremi. [$\text{'Lagrange teoremi gereğince; } o(H) \mid o(G)$ ' anahtar fikrini gösteriyor.] Çünkü hani aldığı alt grubun mertebesi grubun mertebesidir. k yı da asal aldığı için burada zaten kendisi de söylemiş. Asalsa 1 ve kendisinden başka böleni*

yoksa ya e ye ya da şey olması gerekiyor dedik. e ye eşit değilse o zaman k dir. Tamamen lagrange teoremi.

Teorem.4: $o(G) = k$ ve k asal ise G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

$\propto$ Lagrange teoremi gereğince; $\frac{o(G)}{o(H)} = k$ olmalıdır. $(H) \leq (G)$

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur.

O halde;

$o(H) = 1$ ya da $o(H) = k$ olmalıdır.

$o(H) = k$ olarak olmalıdır.

$o(H) = o(G) \Rightarrow H$ devirli olup k teatında üretiliyor.
 G 'de devirli olur.

Şekil 4.13. Teorem.4'ün ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 4. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.11'de yer verilmiştir.

Tablo 4.11.

Ezgi'nin 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Bu grubun mertebesi [yazdığı '$H \leq G$' deki 'G' yi göstererek] alt grubun ['H' yi göstererek] mertebesini böler, lagrange teoremi, onu biliyorum. Ancak demiş order k [$o(G) = k$ ifadesini okudu] asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur, demiş. Ancak order G, şu ($o(G)$) asal. O zaman hocam order G asalsa bunun 1 ve kendisinden başka böleni yoksa ya order H, order G ye eşit, kümenin kendisine eşit derim, ya da $o(H)$ nın bir tek elemanı var. $o(H)$ nın bir tek elemanı varsa onu da derim, e olarak alırım. E zaten e birim eleman, hani grubun tamamını ürettiğinden, o zaman H ya da ben şey derim. [$o(H) = o(G)$] ve ardından '$o(H) = e$' yazdı] Bizden ama ne istiyor? k asal ise G grubu a nın [teoremi yeniden okuyor]. Tamam işte order H e, hani e olursa birim eleman da grubun tamamını ürettiğinden o zaman devirli grup olur.</i>	Verilen anahtar fikirleri yorumlayarak ve asal sayı tanımını kullanarak ' $o(H) = o(G)$ ' veya ' $o(H) = e$ ' çıkarımında bulunuyor. Ancak ' $o(H) = e$ ' ifadesinden de anlaşılacağı üzere bir kavram karmaşası yaşıyor.
<i>Tamam işte order H, e, hani e olursa birim eleman da grubun tamamını ürettiğinden o zaman devirli grup olur.</i>	Yaşadığı kavram karmaşasına rağmen birim elemandan oluşan grubun devirli olacağını ifade ediyor.
<i>Devirli grup, mesela $G = \langle a \rangle$ tarafından üretilen bir elemanı tarafından (...) Evet. a^n mesela n eleman Z [$G = \langle a \rangle = \{a^n : n \in Z\}$] yazdı.] Yani bu kümeye, çarpımsal grupsa mesela, katları şeklinde yazdığım zaman, a nın gruptaki tüm elemanları bana vermesi gerekiyor.</i>	Devirli grup tanımını biliyor.
<i>(...)Hem 1 hem k. $o(G)$ ye k demiş. k asal olduğundan [hipotezi kurma basamağını tekrar okuyor]. G alt... Bir dakika hocam, bir daha bakayım [tekrar okuyor] a eleman G, a eşit değildir e olsun. Tamam. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Şunun ($o(G)$) mertebesi k ise.(...) Evet order H yı a tarafından gerilen bir küme olarak almış.(...) a burada ya birim eleman tarafındandır dedim. Ya da order H. Gerçi bölüyorsa, kümenin kendisi de olabilir aslında. Order H, k da olabilir.(...) Evet, ancak demiş $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. O halde. Hocam aslında ben bunu e olarak değil de kümenin kendisine eşit olarak alsam. Çünkü ben order G nin.</i>	Devirli grup tanımını bilmesine ve anahtar fikirleri iki defa okumasına rağmen mülakatçının sorularıyla yanılgısının farkına kısmen varabiliyor.

Tablo 4.11. (Devamı)

[Mülakatçının sorusu üzerine] Çünkü order H nin e eşit değildir e demiş. Hıh şu an onu gördüm [Yukarıda verilen '$a \neq e$' anahtar fikrini görüyor]. O zaman hocam ben buradan order H nin e alamıyorum. 1 ve kendisinden başka bölünen yok. O zaman order H nin mertebesini k almış olarak alacağım $o(H) = k$ yazdı. Birbirine mertebeleri eşit zaten. E k da asal sayı ve order G de k ise o zaman devirli grup olmuş olmuyor mu?(...) E, H da G ye eşit olmuş oluyor.	'$a \neq e$' anahtar fikri yardımıyla, yanlışlığını düzelterek ispatı sözlü olarak tamamlayabiliyor.
Mertebeleri eşit. Order H, order G ye eşit. E a da H tarafından geriliyor. Çok kolay bu ya. Şimdi order H nin k olduğunu söyledik. Ve devirli bir grup olduğunu söyledik. k tarafından geril... Mertebesi k ve devirli ise o zaman G nin mertebesi de k, o zaman G de devirli olacak.(...) Şey nasıl yazsam ki?	Sezgisel olarak ispatı anlayabiliyor ancak yazılı olarak nasıl tamamlayacağını bilemiyor.
Order H ya k dedim. Order H Şöyle yazayım [diyip önceden yazdıklarını tekrar siliyor]. Order H diyeyim e. Ya da order H, k olmalı. [$'o(H) = e$ ya da $o(H) = k$ olmalıdır' yazdı]. Hani 1 den başka ve kendisinden... Ama e'ye eşit olmadığından dedik. Order H yı k olarak almalıyız. [$'o(H) = k$ olarak almalıyız' yazdı] Şimdi burada şöyle desek. Order H, k yani order H order G ye eşit oldu. $o(H) = o(G)$, H devirli bir grup. Bu da ($o(G)$) devirli bir grup. Bu (H) k tarafından üretiliyor, bu (G) da k tarafından üretiliyor. Mertebeleri de birbirine eşit. O zaman ben buradan dolayısıyla diyim hocam. Ne diyecektim? G grupta H devirli olup k tarafından üretiliyor. O zaman G de devirli olur.	Anahtar fikir olarak verilen önceki bilgileri kullanarak ispatı kısmen de olsa tamamlayabiliyor.
Şu; lagrange teoremi. [$'Lagrange$ teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$' anahtar fikrini gösteriyor.] Çünkü hani aldığı alt grubun mertebesi grubun mertebesidir. k yı da asal aldığı için burada zaten kendisi de söylemiş. Asalsa 1 ve kendisinden başka bölünen yoksa ya e ye ya da şey olması gerekiyor dedik. e ye eşit değilse o zaman k dır. Tamamen lagrange teoremi.	İspatı tamamlama sürecinde asal sayı tanımından, $a \neq e$ den ve Lagrange teoreminin ifadesinden faydalandığını belirtiyor.

Tablo 4.11'de de görüldüğü gibi; Ezgi, verilen anahtar fikirleri ve asal sayı tanımını kullanarak tamamlanması beklenen Teorem.4'ün ispatında hem verilen anahtar fikirleri hem asal sayı tanımını hem de Lagrange teoreminin ifadesini kullanarak bir takım çıkarımlarda bulunmuştur. Bu çıkarımlarda kavram karmaşasına bağlı bir takım yanlışlar sergilediği görülmüş ve çeşitli sorular yöneltilerek bu durumun sebebi ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Sonuçta bu yanlışların bilgi eksikliğinden değil Ezgi'nin heyecanlı yapısından kaynaklandığı düşünülmüştür. Ezgi; bu ispatı tamamlama

sürecinde sezgisel olarak ispatı anlayabilmiş ancak yazılı olarak ifade ederken zorluk yaşamış; anahtar fikir olarak verilen asal sayı tanımından, $a \neq e$ den ve Lagrange teoreminin ifadesinden faydalanmıştır.

4.2.2.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.5 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Ezgi: G bir grup, a eleman G olsun, her x elemanı G için. Bir homomorfizma. Otomorfizma, bunun özel bir durumu olarak iç otomorfizma dediğini söylemiş hocam. [Teoremin ifadesini okuyor.] Buradan şey demiş. ['olduğundan φ_a bir homomorfizmadır.' ifadesini göstererek] Homomorfizma olduğunu öncelikle göstermem gerekiyor. Başlamış zaten xy elemanını almış. Bu xy yi bu şekilde $(axya^{-1})$ çıkarıyor demiş. Ben diyorum ki hocam. Buraya bir e koyayım. [$a(x)$ yazdı] parantezi kaldırabilir miyim? $axeya^{-1}$ olsun, dedim. Burada a yerine de hani şuna [Teorem ifadesinde geçen ' $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ' i göstererek] benzetebilmek için ayırabilmek için diyorum ki, $a.x$ e yerine $a^{-1}a, ya^{-1}$ diyeyim [$axa^{-1}aya^{-1}$ yazdı]. Bu (aa^{-1}) hani birimi eşit ya. Ve şu (axa^{-1}) demek zaten $\varphi_a(x)$ demekti bu (aya^{-1}) $\varphi_a(y)$ demekti. x ve y ile alakalı. Olduğundan φ_a bir homomorfizmadır. Bu tamam. Diyor ki $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ iken axa^{-1} olduğundan $x = y$ bire-bir olduğunu söylemiş. Her y eleman G için $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ yani y olacak şekilde, bir x elemanı bulduğunda örten oldu. Örten de olur. Şu halde φ_a G eleman bir otomorfizmadır. [Verilen diğer temel bileşenleri okuyor]

Burada başka bir şey yapmamış hocam. Bunda da yardımcı, zaten burayı kendi açıklamış hocam. Şuradaki xy elemanı yazıldığı hani xy yazıldığında buradaki x elemanı x diye çıkarıyor. xy de xy olarak çıkarıyor. Ben de burada şunu düşündüm hani. Bundan olarak da, bunları ayrı ayrı yazmam gerekiyor bir şekilde, axa^{-1} ve aya^{-1} 'i elde etmem gerekiyor diye düşündüm. Burada $(axya^{-1})$ $a.x$ in yanına bakıyorum ne eksik a^{-1} , y nin yanına da a eksik diyorum. Hani oradan. Bu a^{-1} ile a yan yana ikisi de bu birim elemandır, diyorum. Ekleyip çıkarman bir şey değiştirmiyor. Onu kullandım diyorum.

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\begin{aligned}\varphi_a(xy) &= a(xy)a^{-1} = \underbrace{axa^{-1}}_{\varphi_a(x)} \underbrace{aya^{-1}}_{\varphi_a(y)} \\ &= \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)\end{aligned}$$

$$axa^{-1} \quad aya^{-1}$$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır. ✓

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$\exists x \in G$ bulunabileceğinden, φ_a örten de olur. Şu halde φ_a G nin bir otomorfizmasıdır.

Şekil 4.14. Teorem.5'in ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 5. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.12'de yer verilmiştir.

Tablo 4.12.

Ezgi'nin 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
...Homomorfizma olduğunu öncelikle göstermem gerekiyor...	'olduğundan φ_a bir homomorfizmadır.' Anahtar fikirden yola çıkarak ne yapması gerektiğine karar veriyor.
Başlamış zaten xy elemanını almış. Bu xy yi bu şekilde $(axya^{-1})$ çıkarıyor demiş. Ben diyorum ki hocam. Buraya bir e koyayım. [$a(x)$ yazdı] parantezi kaldırabilir miyim? $a.x.e.y.a^{-1}$ olsun dedim. Burada a yerine de hani şuna [Teorem ifadesinde geçen ' $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ' i göstererek] benzetebilmek için ayırmak için diyorum ki, $a.x$ e yerine $a^{-1}a, ya^{-1}$ diyeyim [$axa^{-1}aya^{-1}$ yazdı]. Bu (aa^{-1}) hani birimi eşit ya. Ve şu (axa^{-1}) demek zaten $\varphi_a(x)$ demekti bu (aya^{-1}) $\varphi_a(y)$ demekti. x ve y ile alakalı. Olduğundan φ_a bir homomorfizmadır.	Teorem ifadesinde verilenlerden ve ispata başlama aşamasında anahtar fikir olarak verilen $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$ eşitliğinden yola çıkarak işlemleri yapabilmıştır.
Bunda da yardımcı, zaten burayı kendi açıklamış hocam. Şuradaki xy elemanı yazıldığı hani xy yazıldığında buradaki x elemanı x diye çıkarıyor. xy de xy olarak çıkarıyor.	Teoremde verilen bilgiyle anahtar fikirde verilen ifadeyi kıyaslıyor.
Ben de burada şunu düşündüm hani. Bundan olarak da, bunları ayrı ayrı yazmam gerekiyor bir şekilde, axa^{-1} ve aya^{-1} 'i elde etmem gerekiyor diye düşündüm.	Homomorfizma şartlarını biliyor ve işlemlerine uygulayabiliyor.
Burada $(axya^{-1})$ $a.x$ in yanına bakıyorum ne eksik a^{-1} , y nin yanına da a eksik diyorum. Hani oradan. Bu a^{-1} ile a yan yana ikisi de bu birim elemandır, diyorum. Ekleyip çıkarman bir şey değiştirmiyor. Onu kullandım diyorum.	Birim eleman özelliğini amacına uygun bir biçimde kullanarak ispatı yapabiliyor ancak birleşme özelliğini kullanmıyor.

Tablo 4.12'de de görüldüğü gibi; Ezgi, tamamlanması beklenen Teorem.5'in ispatında verilen 'olduğundan φ_a bir homomorfizmadır.' ile $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$ anahtar fikirlerinden ve teorem ifadesinde verilen $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ 'den yola çıkarak ispatı oluşturacak işlemleri yapmaya başlamıştır. Burada etkisiz eleman özelliğini amacına uygun bir şekilde kullanarak işlemlerine uygulayabilmiş ancak birleşme özelliğini kullanmamış olması sebebiyle eksik bir şekilde de olsa ispatı tamamlayabilmiştir.

4.2.2.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular

Teorem.6 S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

Ezgi: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve olacak şekilde bu da alt kümesi ise S üstü (S') de lineer bağımsız [Teoremi okudu]. c_i eleman R almış. Vektör uzayı olduğunu. x_i eleman S olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan demiş [ispatın başlangıcında verilen anahtar fikri okudu], bir biri cinsinden üretemi... Bir biri lineer bağımsız olduğundan, sisteminin çözümünde tüm [eksik bırakılan bölümden sonra verilen anahtar fikri okudu], mesela şu... $x_1c_1 + x_2c_2 + \dots$ şöyle desem, $x_nc_n = 0$. [$x_1c_1 + x_2c_2 + \dots x_nc_n = 0$ yazdı] Burada hani hocam diyor ki, lineer bağımsız olduğu sistemi c_i katsayıları sıfır olmalıdır. Çünkü niye, lineer bağımsız...

Mülakatçı: Neden o sistemi yazdın? Ne yardımcı oldu onu yazmanda?

Ezgi: Hocam onu yazmam da, tamamen hani katsayıları sıfır ya hani, bir biri hani, bunun sıfır olması, hani neye bağlı. Hani hatırlamıyordum. Hatırlayamadım lineer bağımsız olduğunu. Şu katsayıların sıfır olduğu zaman, hani lineer bağımsız olduğunu hıh...

Mülakatçı: Onu görünce yazdın.

Ezgi: S' kümesi, diyor ki. Tamam bunu yazdım. S' kümesi diyor ki, S nin bir alt kümesi olduğundan, bazı x_i ler S' de de olacaktır, diyor. Şu ne demek? $x_i \rightarrow v_i$

Mülakatçı: x_i leri v_i lere taşıyor.

Ezgi: Yani x_i yerine aslında v_i leri mi alıyor gibi olmuş. Buna göre o zaman x_i leri v_i ye taşımışsa hocam, v_1c_1 yazmıştır [v_1c_1 diye yazıyor ancak sonra ' v_1c_1 ' diye düzeltiyor] $v_1c_1 +$ şöyle desem v_nc_n desem 0. Hani onları ona götürdü sonuçta. Eşitliğini, bu v_i vektörleri S nin elemanları. Şunlar (v_1) eleman S olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsız. Çünkü bunun (v_1) da sıfır olması için ancak şey olması lazım. Hani sıfır olması lazım aynı bu şekilde... $v_1, 2, 3, \dots$ bunlar [v_i leri gösteriyor] da $= 0$ olmalı o yüzden lineer bağımsız olmalı.

Mülakatçı: Yaz dolayısıyla.

Ezgi: Dolayısıyla diyeyim, dolayısıyla ancak bunun $[v_1c_1 + v_2c_2 + \dots + v_nc_n = 0]$ denklemini göstererek] hani lineer bağımsız olabilmesi için şu katsayıların dedik, hani sıfır olması lazım. v_i ler sıfır. i ler de $1, 2, \dots$ den n 'e kadar dolayısıyla sıfır olup lineer bağımsızdır. [*'Dolayısıyla $v_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) olup lineer bağımsızdır' yazdı.*]

Mülakatçı: Hangisi de lineer bağımsızdır? Neyi gösterdik?

Ezgi: Şeyi S' nün de, şunun aldığımız S' de, yani aslında lineer bağımsız bir kümenin alt kümesinden lineer bağımsız olduğunu, hani biz burada göstermiş olduk.

Mülakatçı: Yaz istersen.

Ezgi: [yazdığı 'lineer bağımsızdır' ifadesini siliyor] olup S' . S' de lineer bağımsızdır. [*' S' de lineer bağımsızdır' yazıyor.*]

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.

Buna göre;

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$$

eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

olup S' de lineer bağımsızdır.

Şekil 4.15. Teorem.6'nın ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 6. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.13'te yer verilmiştir.

Tablo 4.13.

Ezgi'nin 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>c_i eleman R almış. Vektör uzayı olduğunu. x_i eleman S olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan demiş [ispatın başlangıcında verilen anahtar fikri okudu], bir biri cinsinden üretemi... Bir biri lineer bağımsız olduğundan, sisteminin çözümünde tüm [eksik bırakılan bölümden sonra verilen anahtar fikri okudu], mesela şu... $x_1c_1 + x_2c_2 + \dots$ şöyle desem, $x_nc_n = 0$. [$x_1c_1 + x_2c_2 + \dots x_nc_n = 0$ yazdı] Burada hani hocam diyor ki, lineer bağımsız olduğu sistemi c_i katsayıları sıfır olmalıdır. Çünkü niye, lineer bağımsız...</i>	<i>'$c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun S kümesi lineer bağımsız olduğundan' ile 'tüm c_i katsayıları sıfır olmalıdır.' anahtar fikirleri yardımıyla $x_1c_1 + x_2c_2 + \dots x_nc_n = 0$ denklemini yazıyor.</i>
<i>Hocam onu yazmam da, tamamen hani katsayıları sıfır ya hani, bir biri hani, bunun sıfır olması, hani neye bağlı. Hani hatırlamıyordum. Hatırlayamadım lineer bağımsız olduğunu. Şu katsayıların sıfır olduğu zaman, hani lineer bağımsız olduğunu...</i>	<i>'$c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun S kümesi lineer bağımsız olduğundan' anahtar fikrinde de verilen lineer bağımsızlığı hatırlamasına 'tüm c_i katsayıları sıfır olmalıdır.' anahtar fikrinin yardımcı olduğunu ifade ediyor.</i>
<i>Şu ne demek? $x_i \rightarrow v_i$</i>	<i>Matematiksel notasyon bilgisi eksikliği yaşıyor.</i>
<i>[Mülakatçının hatırlatması üzerine] Yani x_i yerine aslında v_i leri mi alıyor gibi olmuş. Buna göre o zaman x_i leri v_i ye taşımışsa hocam, v_1c_1 yazmıştır [v_1c_1 diye yazıyor ancak sonra 'v_1c_1' diye düzeltiyor] $v_1c_1 +$ şöyle desem v_nc_n desem 0. Hani onları ona götürdü sonuçta. Eşitliğini, bu v_i vektörleri S nin elemanları. Şunlar (v_1) eleman S olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsız. Çünkü bunun (v_1) da sıfır olması için ancak şey olması lazım. Hani sıfır olması lazım aynı bu şekilde. $v_1, 2, 3 \dots$ bunlar da $= 0$ olmalı o yüzden lineer bağımsız olmalı.</i>	<i>'$x_i \rightarrow v_i$' ifadesini mülakatçının hatırlatması üzerine doğru bir biçimde yorumlayarak '$v_1c_1 + v_2c_2 + \dots + v_nc_n = 0$' denklemini yazıyor ve yazdığı bu denklemi 'bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.' anahtar fikriyle birlikte yorumluyor.</i>
<i>Dolayısıyla diyeyim, dolayısıyla ancak bunun [$v_1c_1 + v_2c_2 + \dots + v_nc_n = 0$ denklemini göstererek] hani lineer bağımsız olabilmesi için şu katsayıların dedik, hani sıfır olması lazım. v_iler sıfır. i ler de 1,2, ... den n'e kadar dolayısıyla sıfır olup lineer bağımsızdır. [$v_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) olup lineer bağımsızdır' yazdı.]</i>	<i>Matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle 'v_i' leri katsayı olarak ele alıyor. Lineer bağımsızlık tanımından yola çıkarak ispatı sözlü olarak tamamlıyor ancak yazılı olarak eksik ifade ediyor.</i>
<i>[Mülakatçının sorusu üzerine] Şeyi S' nün de, şunun aldığımız S' de, yani aslında lineer bağımsız bir kümenin alt kümesinden lineer bağımsız olduğunu, hani biz burada göstermiş olduk. (...) olup S', S' de lineer bağımsızdır.</i>	<i>Matematiksel dille ifade edilmiş teoremi ve ispatı anlamış ve sözel olarak ispatı tamamlamış olmasına rağmen ancak hatırlatma yapılırken ispatı tamamlama bileşenini eksik de olsa yazılı olarak ifade edebiliyor.</i>

Tablo 4.13'te de görüldüğü gibi; Ezgi, tamamlanması beklenen Teorem.6'nın ispatında, anahtar fikir olarak verilen ' $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun S kümesi lineer bağımsız olduğundan' ile 'tüm c_i katsayıları sıfır olmalıdır.' İfadelerini kullanarak ispata başlamış; burada önceleri lineer bağımsızlığı hatırlayamamışken 'tüm c_i katsayıları sıfır olmalıdır.' anahtar fikri yardımıyla ilk denklemi oluşturabilmiştir. ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesinde yaşadığı matematiksel notasyon bilgisi eksikliğini mülakatçının hatırlatmasıyla doğru bir biçimde yorumlayarak ikinci denklemi de oluşturabilmiş ve yazdığı bu denklemi 'bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.' anahtar fikriyle ve lineer bağımsızlık tanımıyla birlikte yorumlayarak ispatı sözel olarak tamamlamıştır. Matematiksel dille ifade edilmiş teoremi ve ispatı anlamış ve sözel olarak ispatı tamamlamış olmasına rağmen ancak hatırlatma yapılırca ispat tamamlama bileşenini eksik bir şekilde yazılı olarak ifade edebilmiştir. Ezgi'nin yazılı olarak eksik tamamlamasının sebebinin her iki sistemde de aynı katsayıyı kullanması ve dolayısıyla katsayının sıfır olduğunu yeniden ifade etme gereği duymaması olduğu ayrıca daha önce vektör olarak ele aldığı ' v_i ' leri sonraki adımlarda katsayı olarak ifade etmesi dolayısıyla bu durumun dikkatsizlik kaynaklı olduğu düşünülmektedir.

4.2.2.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

Ezgi: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere U kesişim W kümesi de V nin bir alt uzayı olsun [teoremi okudu]. U kesişim şey, u ile v yi kesişimin elemanı almış. c eleman F denilsin. $c.u + v$ burada hocam şeyi birleştirmiş. İki kuralı çarpımla evet hatırladım. Olduğunu göstermeliyiz. u, v U kesişim W nin elemanı ise. U hani kesişimin elemanı ise bu hem bunlar U nun elemanıdır, hem W nin elemanıdır. Hem de... Yanlış bir şey söylemedim. Hem U nun elemanıdır, hem W nin elemanıdır, demiş. Bundan ne geçiyor. $c, u...$ [eksik bırakılan adımların öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirleri gözden geçiriyor.] Burada tamamen şeyin özelliklerini kullanacağız, kesişimin. u, v elemandır U , hem u, v elemandır W demişiz. Çünkü kesişim bunlar.

Mülakatçı: U ve W da alt uzay.

Ezgi: U ve W da alt uzaysa, o zaman ayrıca hani, ne demiştik? U ve W da alt uzaysa şey, şunu $['c.u + v'$ yi gösteriyor] kullanacağım, aynısını kullanacağım U ayrıca bir alt uzay, W de çünkü ayrıca bir alt uzay. Alt uzayın tanımında, hani şu var $['c.u + v \in U \cap W'$ yi gösteriyor], şu eşittir olduğunu göstermektense, eşittir olacak. Yani $cu + v$ yani.

Mülakatçı: Düşündüğünü yaz.

Ezgi: $cu + v$ elemandır U olur. Çünkü bu niye alt uzay olduğunu göstermek için bunun $(c.u + v \in U \cap W)$ olması gerekiyorsa, U da kendi başına bir hani burada [teoremi gösteriyor] bir alt uzay olduğunu söylemiş. O yüzden ben derim ki cu elemanıdır ve aynı şekilde $cu + v$ de elemandır ve $['c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W'$ yazıyor]. $cu + v$ elemandır W olur.

Mülakatçı: Ayrı ayrı yaz istersen çünkü iki tane boşluk vermiş sana.

Ezgi: $['c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W'$ yi siliyor ve ayrı ayrı yazıyor] Çünkü bunlar birer birer ayrıca alt uzay, çünkü. [Her bir ifadenin yanına 'alt uzay' yazıyor] E zaten hem bu (U), hem bunun (W) elemanı ise kesişimler tekrar hani, geri dönebilirim dedim. Hani buradan hocam o yüzden bunları birleştirmiş. Bununla onun kesişimini.

Mülakatçı: Ne yardımcı oldu sana burada?

Ezgi: Bana ne yardımcı oldu? Şunu $(c.u + v \in U \cap W)$ hani alt uzayı hatırlayamıyordum. Hatırlayamıyorum şu an. Onu hani şunu $(c.u + v \in U \cap W)$ görünce, direk zaten hani yazabildim.

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.

$\Rightarrow c.u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$

$\dots c.u + v \in U \dots$ alt uzay

$\dots c.u + v \in W \dots$ alt uzay

$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$ ise

$c.u + v \in U \cap W$ dir.

Şekil 4.16. Teorem.7'nin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 7. Teoremin ispatına yönelik Ezgi'nin çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.14'te yer verilmiştir.

Tablo 4.14.

Ezgi'nin 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>u kesişim şey, u ile v yi kesişimin elemanı almış. c eleman F denilsin. $c.u + v$ burada hocam şeyi birleştirmiş. İki kuralı çarpımla evet hatırladım.</i>	Verilen $c.u + v \in U \cap W$ anahtar fikri alt uzay olma şartını hatırlamasına yardımcı oluyor.
<i>Olduğunu göstermeliyiz. $u, v \in U$ kesişim W nin elemanı ise. U hani kesişimin elemanı ise bu hem bunlar U nun elemanıdır, hem W nin elemanıdır. Hem de... Yanlış bir şey söylemedim. Hem U nun elemanıdır, hem W nin elemanıdır, demiş. Bundan ne geçiyor. $c, u \dots$ [eksik bırakılan adımların öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirleri gözden geçiriyor.] Burada tamamen şeyin özelliklerini kullanacağız, kesişimin. u, v elemandır U, hem u, v elemandır W demişiz. Çünkü kesişim bunlar.</i>	$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ anahtar fikrini yorumluyor, bu şekilde eksik bırakılan adımları nasıl dolduracağı yönünde fikir geliştiriyor.
<i>U ve W da alt uzaysa, o zaman ayrıca hani, ne demiştik? U ve W da alt uzaysa şey, şunu [$c.u + v$]'yi gösteriyor] kullanacağım, aynısını kullanacağım U ayrıca bir alt uzay, W de çünkü ayrıca bir alt uzay. Altı uzayın tanımında, hani şu var [$c.u + v \in U \cap W$]'yi gösteriyor], şu eşittir olduğunu göstermektense, eşittir olacak. Yani $cu + v$ yani.</i>	Verilen $c.u + v \in U \cap W$ anahtar fikri yardımıyla ispatı nasıl yapacağına karar veriyor.
<i>$cu + v$ elemandır U olur. Çünkü bu niye alt uzay olduğunu göstermek için bunun ($c.u + v \in U \cap W$) olması gerekiyorsa, U da kendi başına bir hani burada [teoremi gösteriyor] bir alt uzay olduğu söylemiş. O yüzden ben derim ki cu elemanıdır ve aynı şekilde $cu + v$ de elemandır ve [$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$] yazıyor]. $cu + v$ elemandır W olur. [mülakatçının uyarısı üzerine] [$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$]'yi siliyor ve ayrı ayrı yazıyor] Çünkü bunlar birer birer ayrıca alt uzay, çünkü. [Her bir ifadenin yanına 'alt uzay' yazıyor] E zaten hem bu (U), hem bunun (W) elemanı ise kesişimler tekrar hani, geri dönebilirim dedim. Hani buradan hocam o yüzden bunları birleştirmiş. Bununla onun kesişimini.</i>	Anahtar fikirden yola çıkarak ispatı belirli bir düzeye getiriyor, sözlü olarak doğru ifade etmesine rağmen matematiksel dil ve notasyona tam anlamıyla uygun bir biçimde yazamıyor.
<i>Bana ne yardımcı oldu? Şunu ($c.u + v \in U \cap W$) hani alt uzayı hatırlayamıyordum. Hatırlayamıyorum şu an. Onu hani şunu ($c.u + v \in U \cap W$) görünce, direkt zaten, Hani yazabildim.</i>	Doğrudan $c.u + v \in U \cap W$ anahtar fikrinden yardım alarak yaptığını ifade ediyor.

Tablo 4.14'te de görüldüğü gibi; Ezgi, tamamlanması beklenen 7. Teoremin ispatında anahtar fikir olarak verilen $c.u + v \in U \cap W$ ifadesi yardımıyla önceden hatırlamadığı alt uzay olma şartını hatırlamış ve ispatı belirli bir düzeyde tamamlayabilmiştir. Ezgi ayrıca ispatı sözlü olarak doğru ifade etmesine rağmen matematiksel dil ve notasyona tam anlamıyla uygun bir biçimde yazamamıştır.

4.2.3. Ceyda'nın Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu

Sakin bir yapıya sahip olan Ceyda'nın uygulamanın ilk dakikalarında heyecanlandığını gören araştırmacı, sık sık sorular sorarak Ceyda'nın kendi düşüncelerine odaklanmasını sağlamıştır. Ceyda, önceleri tamamlayamadığı ispatları heyecan durumu ortadan kalktığında, anahtar fikirler yardımıyla tamamlayabilmiştir. Genel olarak anahtar fikirleri etkili bir şekilde kullanabilen Ceyda, kararsız yapısı sebebiyle şüphe duyduğu cevaplarını da yine anahtar fikirler yardımıyla test etme imkânı bulmuştur.

4.2.3.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.1 $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

Ceyda: *Hımm bir gruptur [teoremi okudu]. xN, yN, zN eleman bölüm grubu. hımm. şu bölüm grubu mu onu mu yanlış hatırlıyorum acaba. Hocam burada alt grup...*

Mülakatçı: *Normal alt grup ise G/N bir gruptur.*

Ceyda: *Evet N normal alt grup G ise G/N bir gruptur demiş. Burada N alt grup olduğu için sağ yan kümeler sol yan kümelere eşit olacak, onu vermiş x, y, z eleman G için. Bu takdirde $xN yN$ işlem zN şu [teoremde geçen $(G, .)$ ' yi gösteriyor] grubun işlemine göre eşittir. xN işlem yzN hımm. Şey yapmış bi nevi hocam sanki dağıtma özelliği varmış gibi söylemiş. [$(yz)N$ 'den yola çıkarak bir önceki adımda yer alan $(yN)(zN)$ ' i gösteriyor]*

Mülakatçı: *Sanki dağıtmamış. Dağıtmış mı yani nasıl yapmış?*

Ceyda: *Dağıtma özelliği varmış da yani dağıtma olmuş şu hale gelmiş [$(yz)N = (yN)(zN)$ ' yi gösteriyor]. Var olduğunu gösterir, eşittiiir şimdi arayı [ilk anahtar fikir ile son anahtar fikir arasındaki boşluğu kastediyor] tamamlamaya çalışırsak hımmm. Bi*

kere hocam çarpma işlemi, işlem. İşlemda dağılma özelliği olacak yani yanlış eğer şey yapmıyorsam. xN şöyle N yN şöyle söyleyim [siliyor] yeniden yazayım eşittir yN evet. [$xN[(yN)(zN)]$] yazdı eşitliği ilerletmedi bir önceki adımı tekrar yazmış oldu] Buradan mı olacak ki bu? [Son anahtar fikre yani [$(xN)(yN)(zN)$] ye bakarak düşünüyor]

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Ceyda: Hocam şimdi aslında yol göstermiş bize. Hani buna ($[(xN)(yN)](zN)$) ulaşmamız gerek, nasıl ulaşıyoruz? Bu da birleşme özelliğini gösterir zaten öyle diyor. Birleşme özelliğinin var olduğunu göstermeye çalışmış. Çalışıyoruz ama... Buradan devam edersek dağılma özelliği varsa şu da içeri dağılamaz mı hocam? Evet dağılabilir yani. Yani çarpmanın dağılma özelliği. [Yazdığı ' $xN[(yN)(zN)]$ ' de ' xN ' yi parantez içine dağıtmayı kastediyor]

Mülakatçı: Çarpmanın ne üzerine dağılma özelliği?

Ceyda: Çarpmanın G nin...

Mülakatçı: Çarpma üzerine mi? Yani nasıl bi dağılma?

Ceyda: Hocam G nin işlemi çarpma değil mi burada G ...

Mülakatçı: Yani hı...

Ceyda: Grup işlemi çarpma olarak ama iki işlem tanımlanması gerekiyor e çarpmanın hocam şu sağ ve sol yan kümeler kavramındaki işleme göre [güliyor] neyse ben devam edeyim. Herhalde olmadı söylediğim açıklama. yN şöyle dağıtmaya çalışırsak $xN zN$ [$(xNyN)(xNzN)$] yazdı. burada da yine şuradan bunu yapabildiğimize göre [yaptığı işlemi kastediyor] hani şöyle.. hummm.

Mülakatçı: N mi yazdın.

Ceyda: [siliyor]

Mülakatçı: Ne oldu?

Ceyda: N yazdım ama yanlış bi şey yazdım.

Mülakatçı: Neden?

Ceyda: *Bi kere eksik ya da şunlardan birini yazmam lazımdı $[x, y, z]$ den birini kastediyor]. Hımmm devamını getiremedim ben bunun.*

Mülakatçı: *Devam et istersen. Belki sonra bakmak istersin.*

Ceyda: *Devam edelim hocam. G nin birim elemanı e ise, her xN eleman G/N için birim elemanın varlığını göstermiş. Şimdi hocam şeyi gösterecek $(xN)^{-1} =$ buradan G nin... Şu an şu (G/N) kavramı bilmediğim için çok yabancı gibi geliyor bana.*

Mülakatçı: *Bölüm grubu mu?*

Ceyda: *Yani bölüm grubunu işte yani biliyorum ama.*

Mülakatçı: *Ama bölüm grubunun elemanlarını sana vermiş ve onun grup olduğunu göstermeni istemiş.*

Ceyda: *Grup olması için zaten burada söylüyor [önceki bileşenleri göstererek] hocam hani birleşme özelliği, birim eleman olması gerekiyor, bi de elemanın tersinin olması gerekiyor diyor. Şurada [birim elemanın varlığının gösterildiği bileşen] herhalde bizden istediği bi şey yok. Burada da [son temel bileşeni kastediyor] elemanın tersinin, tersi ile işleme girdiği zaman şuna [(eN)] yazıyor] eşit olduğunu göstereceğiz. Bunu nasıl gösteririz? Birleşme özelliği var demiştik [yukarıdaki bileşeni kastediyor] hocam şunu $((xN)(x^{-1}N))$ o yüzden şöyle $((xNx^{-1}N))$ yazabiliriz. $=e$ üzeri N [$(xNx^{-1}N) = (eN)$] yazıyor] şöyle hocam şuradaki [ilk kısımda yaptığı $xN[(yN)(zN)] = (xNyN)(xNzN)$] eşitliğini göstererek] işlem den. Ben burada çok toparlayamadım ama. Hani bunu burada çok toparlayamadım ama şunu $((xNx^{-1}N))$ şu $((xx^{-1})N)$ şekilde yazabiliriz şöyle. Buradan da e gelecek burası $((xx^{-1}))$ ve e üzeri N diyeceğiz [$(xx^{-1})N = eN$] yazdı]. e üzeri yani. Bir elemanın tersi ile aynı elemanın tersini alıp işleme koyduğumuzda e üzeri N ye eşit olduğunu gösterdik burada. Bu da her elemanın her xN eleman G/N dediğimiz için her elemanın tersinin olduğunu gösteriyor. O yüzden de gruptur diyeceğiz burada da şurayı çok toparlayamadım bi daha bi bakayım mı hocam. [İlk bileşene tekrar bakmak istiyor.]*

Mülakatçı: *Bak istersen.*

Ceyda: *[okuyor, siliyor] Hocam bölüm grubunun üç tane elemanını vermiş ve bize birleşme özelliğinin var olduğunu göstermek için şu aradaki adımları istiyor ama şu an*

toparlayamıyorum gerçekten. $(xN)(yN)$ $(xN zN)$ üzeri değil, ya ben öyle diyorum ama xN, yN öyle ağızımdan çıkıyor. Gelişigüzel olarak... z üzeri N .

Mülakatçı: Evet ne yapacak?

Ceyda: Hocam buradan şuna ulaşş nasıl ulaşırız? Şu an tıkağım kaldım yani.

[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.]

Ceyda: Bir daha bakayım hocam. Şunu göstermiştim zaten [Ters elemanın varlığının araştırıldığı basamağı göstererek]. Şunu [Birleşme özelliğinin varlığının araştırıldığı basamağı göstererek] gös...[Gülüyor]... Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir [Düşünüyor]. Şimdi hocam toparlamaya çalışıyorum. G , ya bölüm kümesinden üç tane eleman almış. Ve bölüm kümesinin de bir alt grup olduğunu grup olduğunu göstermek için, önce birleşme özelliği gösteriyor, sonra birim eleman özelliğinin varlığını kendisi gösteriyor, en sonunda ters elemanın varlığını gösteriyor. Burada adımları biz yazdık. Yani doğru yazabildim mi bilmiyorum ama. Birleşme özelliğinin varlığını da. Şimdi ifadeler şöyle $[xN, yN, zN]$ yi göstererek olduğu için karıştırıyorum aslında gibi. Normal hani bir böyle $[x, y, z]$ yi göstererek bir eleman olmuş olsa.

Teorem.1: $(G, \cdot)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. $(x, y, z \in G)$ için

Bu takdirde,

$$(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$$

$$= (xN)(yN)(zN)$$

$\equiv$

$$= [(xN)(yN)](zN)$$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ var mıdır?

$$(xN)(x^{-1}N) = (eN)$$

$$(xN x^{-1}N) = (eN)$$

$$(xx^{-1})N = eN$$

e

olduğu görülür.

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Şekil 4.17. Teorem.1'in ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 1. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.15.

Ceyda'nın 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Evet N normal alt grup G ise G/N bir gruptur demiş. Burada N alt grup olduğu için sağ yan kümeler sol yan kümelere eşit olacak onu vermiş.</i>	Böyle bir bilgi olmamasına rağmen yan kümeleri görünce bu ifadeyi kullanıyor
<i>Bu takdirde xN yN işlem zN şu [teoremde geçen $(G,.)$ yi gösteriyor] grubun işlemine göre eşittir. xN işlem yzN hımm. Şey yapmış bi nevi hocam sanki dağıtma özelliği varmış gibi söylemiş. Dağılma özelliği varmış da yani dağılma olmuş da şu hale gelmiş [$(yz)N = (yN)(zN)$] i gösteriyor]</i>	Verilen anahtar fikri okuyarak $(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$ eşitliğinde $(yz)N = (yN)(zN)$ eşitliğini dağılma özelliği gibi yorumluyor.
<i>Var olduğunu gösterir. eşittiiir şimdi arayı [ilk anahtar fikir ile son anahtar fikir arasındaki boşluğu kastediyor] tamamlamaya çalışırsak hımmm. bi kere hocam çarpma işlemi işlem. İşlemde dağılma özelliği olacak yani yanlış eğer şey yapmıyorsam. xN şöyle N yN söyle sileyim [siliyor] yeniden yazayım eşittir yN evet. [$xN[(yN)(zN)]$] yazdı eşitliği ilerletmedi bir önceki adımı tekrar yazmış oldu.] Buradan mı olacak ki bu? [Son anahtar fikre yani [$(xN)(yN)(zN)$] ye bakarak düşünüyor]</i>	$(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$ şeklinde verilen ilk anahtar fikirle $= [(xN)(yN)](zN)$ ikinci anahtar fikir arasında bir ilişki kurarak eksik bırakılan bölümü tamamlamaya çalışıyor ancak başarılı olamıyor.
<i>Hocam şimdi aslında yol göstermiş bize. Hani buna [$(xN)(yN)(zN)$] ulaşmamız gerek, nasıl ulaşıyoruz? Bu da birleşme özelliğini gösterir zaten öyle diyor. Birleşme özelliğinin var olduğunu göstermeye çalışmış. Çalışıyoruz ama... Buradan devam edersek dağılma özelliği varsa şu da içeri dağılamaz mı hocam? Evet dağılabilir yani. Yani çarpmanın dağılma özelliği. [Yazdığı $xN[(yN)(zN)]$ de xN yi parantez içine dağıtmayı kastediyor.]</i>	Bölüm grubunun elemanlarının özelliğini ve normal alt grup tanımını bilmiyor, çarpmanın dağılma özelliğinden yola çıkarak işlemleri yapmaya çalışıyor.
<i>[Mülakatçının sorusu üzerine] Grup işlemi çarpma olarak ama iki işlem tanımlanması gerekiyor e çarpmanın hocam şu sağ ve sol yan kümeler kavramındaki işleme göre [güliyor] neyse ben devam edeyim. Herhalde olmadı söylediğim açıklama. yN şöyle dağıtmaya çalışırsak xN zN [$(xNyN)(xNzN)$] yazdı. burada da yine şuradan bunu yapabildiğimize göre [yaptığı işlemi kastediyor] hani şöyle.. hımmm.</i>	Dağılma özelliğinde iki işlem olması gerektiğini biliyor ancak yen kümelerde çarpmayı bilmiyor.
<i>N yazdım ama yanlış bi şey yazdım.. [Mülakatçının sorusu üzerine] Bi kere eksik ya da şunlardan birini yazmam lazımdı [x, y, z den birini kastediyor.] Hımmm devamını getiremedim ben bunun.</i>	Verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak G/N nin elemanlarının xN formunda olması gerektiğini biliyor ancak burada yan kümelerde çarpmayı bilmiyor.

Tablo 4.15. (Devamı)

<i>G nin birim elemanı e ise, her xN eleman G/N için birim elemanın varlığını göstermiş. Şimdi hocam şeyi gösterecek $(xN)^{-1} =$ buradan G nin... Şu an şu (G/N) kavramı bilmediğim için çok yabancı gibi geliyor bana.</i>	Üçüncü adımda verilen anahtar fikirleri okuyor ancak bölüm grubunu bilmediğini ifade ediyor.
<i>Grup olması için zaten burada söylüyor [önceki bileşenleri göstererek] hocam hani birleşme özelliği, birim eleman olması gerekiyor, bi de elemanın tersinin olması gerekiyor diyor. Şurada [birim elemanın varlığının gösterildiği bileşen] herhalde bizden istediği bi şey yok. Burada da [son temel bileşeni kastediyor] elemanın tersinin, tersi ile işleme girdiği zaman şuna [(eN)] yazıyor] eşit olduğunu göstereceğiz.</i>	Grup özelliklerini ve ters elemanın varlığını nasıl araştıracağını biliyor ve genel olarak ispatı gözden geçiriyor.
<i>Şöyle hocam şuradaki [ilk kısımda yaptığı '$xN[(yN)(zN)] = (xNyN)(xNzN)$' eşitliğini göstererek] işlem den. Ben burada çok toparlamadım ama. Hani bunu burada çok toparlamadım ama şunu $((xNx^{-1}N))$ şu $((xx^{-1})N)$ şekilde yazabiliriz şöyle. Buradan da e gelecek burası $((xx^{-1}))$ ve e üzeri N diyeceğiz [$(xx^{-1})N = eN$] yazdı. e üzeri yani. Bir elemanın tersi ile aynı elemanın tersini alıp işleme koyduğumuzda e üzeri N ye eşit olduğunu gösterdik burada. Bu da her elemanın her xN eleman G/N dediğimiz için her elemanın tersinin olduğunu gösteriyor. O yüzden de gruptur diyeceğiz burada</i>	İlk kısımda yaptığı işlemlerden yola çıkıyor ancak burada doğru bir biçimde yorumlayarak ters elemanın varlığını tek taraflı da olsa gösterebiliyor. Yani $(xx^{-1})N = eN$ olduğunu gösteriyor ancak $(x^{-1}x)N$ hakkında herhangi bir şey söylemiyor.
<i>[İlk kısma tekrar bakmak istiyor, önceki yazdıklarını silerek] Hocam bölüm grubunun üç tane elemanını vermiş ve bize birleşme özelliğinin var olduğunu göstermek için şu aradaki adımları istiyor ama şu an toparlayamıyorum gerçekten. $(xN)(yN)$ $(xNzN)$ üzeri değil, ya ben öyle diyorum ama xN, yN öyle ağızdan çıkıyor. Gelişigüzel olarak.... z üzeri N.</i>	Matematiksel dilde problem yaşıyor aslında doğru söylenişini biliyor ancak dikkat etmiyor.
<i>[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.] Şimdi hocam toparlamaya çalışıyorum. G, ya bölüm kümesinden üç tane eleman almış. Ve bölüm kümesinin de bir alt grup olduğunu grup olduğunu göstermek için, önce birleşme özelliği gösteriyor, sonra birim eleman özelliğinin varlığını kendisi gösteriyor, en sonunda ters elemanın varlığını gösteriyor. Burada adımları biz yazdık.</i>	İspata bütüncül olarak bakıyor.
<i>Şimdi ifadeler şöyle [xN, yN, zN i göstererek] olduğu için karıştırıyorum aslında gibi. Normal hani bir böyle [x, y, z yi göstererek] bir eleman olmuş olsa.</i>	Bölüm grubu elemanlarının işlemleri yapmasını zorlaştırdığını düşünüyor.

Tablo 4.15'te de görüldüğü gibi; Ceyda birleşme özelliğinin varlığını araştırırken işlem yapmaya başlamadan önce teoremin ifadesini ve verilen anahtar

fikirleri okumuş ve eksik bırakılan bileşeni tamamlamak için bileşenin başlangıcında ve bitiminde verilen anahtar fikirlerden yardım almıştır. Ancak bölüm grubunun elemanlarının kavramsal özelliklerini ve normal alt grup tanımını kullanamadığı ayrıca yan kümelerde çarpma işlemini bilmediği için anahtar fikirler arasındaki ilişkiyi dağılma özelliği ile ilişkilendirmeye çalışmış dolayısıyla birleşme özelliğinin varlığını gösterememiştir. Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya döndüğünde bu durumu teyit etmiş ve bölüm grubunun elemanlarının işlemleri yapmasını zorlaştırdığını ifade etmiştir. Ters elemanın varlığını araştırırken ise birleşme özelliğinde verilen anahtar fikirden yola çıkmış, ilk kısımda yanlış ifade ettiği işlemleri burada doğru bir biçimde yorumlayarak ispatı belirli bir düzeye getirmiş ancak kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek anahtar fikri gözden kaçırdığı için tek taraflı olarak işlemlerini ilerletmiş dolayısıyla ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamıştır.

4.2.3.2. Teorem.2'nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.2 $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

Ceyda: G çarpım bir grup, H alt grup G olsun. Her a eleman G için Ha yani a yani G nin sağ yan kümesi a eleman G nin burada yanlış bişey de ifade etmiş olabilirim. x eleman G için $a \equiv x \pmod{H}$ yani Ha , a nın kalan sınıflarıdır diyor [Teoremi okuyor]. Burada a denktir $x \pmod{H}$ kongrüansına uyan x eleman G lerin kümesini a nın kalan sınıfları ile göstereyim. Yani bu a nın denklik sınıfı olsun. Denklik sınıfıymış kalan sınıf. Aynı şey değil mi hocam? Aynı şey. H alt küme G için olduğunu dolayısıyla a nın denklik sınıflarının Ha nın... [hipotezi ve hükmü belirleme basamaklarını okuyor] Burada şey yapıyor, yol gösterme olarak şey vermiş hocam bize, yani şunların birbirine ikisi de küme olduğu için eşit olduğunu göstermek için ikisini de birbirlerinin alt kümesi olduğunu göstermemiz gerekiyor demiş. x eleman a nın denklik sınıflarının kümesinden bir x eleman, a elemanı almış ve a denktir $x \pmod{H}$ olur demiş. ise ax^{-1} . [Düşünüyor] Burada $ax = Hk$ yazıyorduk. Yok olmadı [siliyor] toplama için geçerli olan bi şey.

Mülakatçı: Devamını da bir oku bakalım. Devamına bak.

Ceyda: Olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir...

Mülakatçı: Biraz sesli...

Ceyda: h eleman H vardır ki eşittir h dir buradan. Burada hocam şey diyor. Grup, alt grup olma şartlarından iki elamanın yani x, y elemansa $x.y$ nin tersinin grubu, alt kümenin elemanı olması gerekiyor alt grup olması için. Burada H alt grup olduğu için bu elemanı, bu eleman (ax^{-1}) yani şu H nin alt şey, elemanıdır diyor. Kapalılık özelliğine göre de şu elemana (ax^{-1}) eşit olan şu işleme, işleme girdiğinde hani işlem kapalı olduğu için küme işlemde bu işlem olduğu zaman kümenin elemanlarından bir tanesini verecek ve bu da H nin elemanı olacak diyor. Buradan şu ifadeden $(ax^{-1} = h)$ devam edeceğiz. Buradan anladığım kadarıyla yani. Grupta birleşme özelliğinden [$'ax^{-1}'$ yazıyor] hımmm ama nasıl devam edeceğiz?

Mülakatçı: Devamına bak belki yol gösterici olur.

Ceyda: [Sonraki anahtar fikirleri okuyor] Eşittir h [bırakılan boşluğa; $'ax^{-1}'$ in yanına $'= h'$ yazıyor. Burada üçüncü adımda geçen $'ex^{-1} = a^{-1}h'$ anahtar fikrinden yardım alıyor] şurayı [eşitlikte $'a'$ nın sol tarafını göstererek] a nın tersi x , x ile işleme koysak, a nın tersi ile işleme koysak bilmem olur mu? [Önce $'a'$ ya bakıyor yanına $'a^{-1}'$ yazmayı planlıyor ancak sonra $'x^{-1}'$ i görünce $'x'$ yazmayı planlıyor sonuç olarak $'a^{-1}'$ de karar kılıyor] a nın tersi ile işleme sokulursa burasıuu $ah = x^{-1}$ olur. x i de a nın kalan sınıflarından seçmiş ve x de a nın kalan sınıflarında ve alt grup olduğu için x in tersi mevcuttur ve yine bu kümededir. Burada $'ah'$ da sağ yan, sağ yan kümesinden seçilen, yok ya sol yan kümesinden, olmadı. [siliyor] İki yanının tersi alınırsa sonraki [Anahtar fikirleri okuyor] şu, grupta birim özelliği olacak birim eleman [$'ex^{-1} = a^{-1}h'$ eşitliğine bakarak yanındaki boşluğu dolduruyor] ex^{-1} işleme konmuş, $a^{-1}h$. Buradan x^{-1} hımm. [gülüyor] Şu ikinci kısma bakayım ama tersine y eleman Ha alınırsa x eleman H vardır. Öyle ki $y = xa$ dır. Hani sağ kümeden bir y elemanı alınırsa diyor, öyle bir x elemanı vardır ki bu kümenin işlemine göre y yi verecek buraya grupta birleşme özelliğinden. Şunun ($y = xa$) üzerinden gideceğiz yine ama. Şuradan ($ya^{-1} = xe$) aslında tersten de ilerleyebiliriz gibi [burada boşluktan sonra verilen $'ya^{-1} = xe'$ anahtar fikrini gösteriyor]. xa şurada ($y = xa$) bunun tersi ile işleme koyarsak a nın tersi ile [$'y = xa'$ nın yanına $'a^{-1}'$ yazıyor ve $'y = xaa^{-1}'$ yi elde ediyor sonra alttaki boşluğa geçerek], ya , ya^{-1} eşittir [$'ya^{-1} ='$ yazıyor] şurada [$'y = xaa^{-1}'$ deki $'aa^{-1}'$ i göstererek] birleşme özelliği geçerli...

Mülakatçı: Onu aşağı yaz, nerede birleşme özelliği?

Ceyda: [Yazdığı ' $ya^{-1} =$ ' i ve ' $y = xa$ ' nın yanına yazdığı ' a^{-1} ' i silerek] şöyle $y = xa$. Her iki tarafı [boşluklardan önce verilen ' $y = xa$ ' yı göstererek] a nın tersi ile işleme koyarsak dedik. ee a , $ya^{-1} = xaa^{-1}$ şurada birleşme özelliği geçerli olduğundan şu parantezi nereye koyduğumuzun bi önemi yok [$ya^{-1} = x(aa^{-1})$ ' yazdı]. O yüzden de ya^{-1} şöyle ($ya^{-1} = x(aa^{-1}) \Rightarrow ya^{-1}$)

Mülakatçı: Onu aşağıya yaz.

Ceyda: [$\Rightarrow ya^{-1}$ ' yi siliyor] $ya^{-1} = x$ olacak. Burada da ters eleman özelliği mi? Yok birleşme özelliğinden bunu yazdık. Neyse şu [Grupta..... özelliğinden] boşluk.

Mülakatçı: Yani ilk buradan demiş ya, nereden yola çıktığını birinciye yazsan da daha net ifade etsen basamakları tam yakalayacaksın.

Ceyda: Nasıl yani hocam?

Mülakatçı: Yani $y = xa$ değil mi?

Ceyda: Evet.

Mülakatçı: Hım, sonra sen ne yaptın? a^{-1} leri mi ekledin?

Ceyda: Evet a^{-1} leri işleme koydum.

Mülakatçı: Şu an parantezi de yani hem a^{-1} 'i aynı yerde yaptın hem parantezi aynı yerde koydun o yüzden karıştı.

Ceyda: Ama sonuçta hocam parantezi nereye koyduğumuzun çok bi önemi...

Mülakatçı: Yok önemi yok da yani o yüzden karıştırdın şu an hangisi nerede diyosun ya.

Ceyda: Hımm.

Mülakatçı: Yani ilk başta $y = xa$ idi. sen a^{-1} leri koydun. Değil mi?

Ceyda: Evet.

Mülakatçı: Sonra birleşme özelliğinden parantezi koydun.

Ceyda: Evet.

Mülakatçı: Hıh yani. Birleşme özelliğinden değil mi, sonra parantezi koymuş olacaksın.

Ceyda: Şunu yazdım.

Mülakatçı: Yani birleşme özelliğinden sonra parantezi koydun.

Ceyda: Haa.

Mülakatçı: Anladın mı?

Ceyda: Anladım hocam. Evet, bu ifadeler [boş bırakılan ifadeler] şu şunlardan [boş bırakılan eşitlikleri kastediyor] sonra yazılan şey.

Mülakatçı: Evet tabi tabi hı hı...

Ceyda: Anladım hocam o zaman buraya birim eleman özelliği yazacağım. Çünkü birim eleman özelliğinden şuraya [$ya^{-1} = x$ de 'xe' yazıyor] e yazab...

Mülakatçı: Bak yine aynı şeyi yapıyorsun. Önce basamak basamak yaz. Sonra şey yap. Yani söylediklerinle yaptıkların farklı farklı basamaklar.

Ceyda: Öyle mi oluyor hocam?

Mülakatçı: Şimdi önce $ya^{-1} = x$ di.

Ceyda: Evet.

Mülakatçı: Sonra ne yaptın? Şey önce $y = xa$ idi...

Ceyda: Evet.

Mülakatçı: Değil mi? Sonra sen a^{-1} koydun. Bu birinci basamak...

Ceyda: Birinci basamak...

Mülakatçı: Sonra birleşme özelliğinden parantezi yerini değiştirdin. Bu ikinci basamak...

Ceyda: Hımm.

Mülakatçı: Olmuş oldu. Yani hepsini tek basamakta yaptın. O yüzden karıştı.

Ceyda: Anladım hocam. Bunu o zaman $ya^{-1} = x$ yani şunu. Bi daha altta göstermem gerek yok herhalde. Birim eleman özelliğinden şunu yazdık o zaman. Yine mi olmadı? Bi türlü toparlayamıyorum [gülüyor] hocam.

[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.]

Ceyda: Zaten bu buna bakacağım herhalde. [Önceki yaptığı işlemleri siliyor] Şöyle hocam her iki tarafı da a^{-1} ile işleme koymuştum en son. [$ya^{-1} = xaa^{-1}$ yazdı] Burada birleşme özelliğinden diyor. Birleşme özelliğinde şunların önce hangi ikili, hangi ikisini işleme aldığımız fark etmeyecek. O yüzden şöyle aa^{-1} yazsam [bir sonraki

basamağa ' $ya^{-1} = x(aa^{-1})$ ' yazdı]. Bu da diğer adımı göstermiş zaten. Şu da birim eleman olmuş. Buraya da ters eleman yazacağız. Sonra devam etmiş hocam.

Mülakatçı: Bu ispatta genel olarak ne yapmış? Adımlarda falan ne yapmış yani i de ii de neyi göstermeye çalışmış?

Ceyda: Hocam i de denklik sınıfı kümesinin H_a nın alt kümesi olduğunu göstermiş. ii de de tam tersi H_a nın denklik sınıfının alt kümesi olduğunu göstermiş.

Bir dakika hocam şuraya ben [i. şıkkına tekrar dönüyor] bir daha bakayım. Kapalılık özelliğine göre böyle bir h var. Şurayı ($ax^{-1} = h$) x le bu tarafını işleme koysak [hipotezi kullanma basamağını okuyor]. $ax^{-1}x = hx$ şuradan birleşme özelliğinden şuraya ($x^{-1}x$) e yazabiliriz $= hx$ [$ae = hx$ yazıyor]. hx zaten şunun [teoremden verilen H_a] elemanı oluyor. Çünkü x i G den seçtiğimiz için hx şunun (H_a) elemanı oluyor. hx in burada a ya eşit olması da. Şuraya [önceden ikinci basamağa yazdığı 'birim eleman'ı silerek birinci basamağa 'birim eleman' yazıyor] yine şu tarafa birim eleman yazacağız. Çünkü buradan bir nevi, ama olmadı. Niye olmadı diyeceksiniz hocam. Çünkü ben burada x i x^{-1} ile işleme soktum. Ama alt tarafta mesela şu adım [üçüncü adımda verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' eşitliğini gösteriyor] bize yol gösteriyor ki hani yanlış bir şey yaptık [i. şıkkına yazdığı ifadeleri siliyor].

Mülakatçı: Ne yapmamız lazım?

Ceyda: Ne yapmamız lazım hocam bir kere şuradaki [i. ispatın üçüncü basamağında verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' eşitliğini göstererek] x^{-1} yok olmayacakmış onu görüyoruz buradan. O yüzden a^{-1} ile işleme koyacağız [ilk basamağa; ' $a^{-1}ax = a^{-1}h$ ' yazıyor]. Buradan da birleşme özelliğinden şuraya [ikinci basamağa; ' $a^{-1}ax = a^{-1}h$ ' yazıyor] şu parantezi şuraya ($(a^{-1}a)x = a^{-1}h$) koyup buna ($(a^{-1}a)$) da zaten diğer adımda e demiş. Buna şu birim eleman [ilk eşitlikte birim eleman özelliğini kullandığını yazdı]. Daha sonra eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa diyor. O zaman ters eleman özelliğinden [eksik bırakılan ikinci adımda 'ters eleman' özelliğini kullandığını yazdı], olduğundan burada h' yani h nın tersi $= h_0$ olmuş demişse.

Mülakatçı: Neden böyle yazdın?

Ceyda: Çünkü hocam şurada [$x = h_0a$]'yı göstererek] şu ($x = h^{-1}a$) ifadenin aynısı, ama sadece h in tersine h_0 demiş. O yüzden yazdım bunu. Buradan da denirse a nın denklik sınıfı kümesi H_a nın alt kümesi olur demiştik. Buradan da yine tam tersi

bulunuyor. İkisini eşit olduğunu gösterirsek zaten şurada [hipotezi belirleme basamağını gösteriyor] bize yol göstermiş. Hani ikisinin eşit olduğunu göstermemiz gere... Yani nasıl desem ki? İkisinin eşit olduğunu göstermemiz için birbirlerinin alt kümesi olduğunu göstermemiz gerekiyordu. Onu da gösterdik yani.

Teorem.2: $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G; a \equiv x \pmod{H}\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim. Yani $\bar{a}$, a nın denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu dolayısıyla $\bar{a} \subset H\bar{a}$ ve $H\bar{a} \subset \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir altgrup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Buradan;

$$ax^{-1} = h \Rightarrow a = hx \quad (\text{Grupa birleşme özelliğinden})$$

$$a = hx \Rightarrow a^{-1} = x^{-1}h^{-1} \quad (\text{Grupa ters element özelliğinden})$$

$$ax^{-1} = h \Rightarrow a = hx \quad (\text{Grupa birleşme özelliğinden})$$

$$x^{-1} = a^{-1}h \quad \text{olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa}$$

$$(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$$

$$x = h^{-1}a \text{ olur.}$$

$$(h \in H \text{ ve } H \leq G \text{ olduğundan } h^{-1} \in H \text{ denirse})$$

$$x = h^{-1}a \in H\bar{a} \text{ olur ki buradan } \bar{a} \subset H\bar{a} \text{ bulunur.} \quad (1)$$

ii) Tersine olarak $y \in H\bar{a}$ alınırsa; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dir. Buradan;

$$y = xa \Rightarrow y^{-1} = a^{-1}x^{-1} \quad (\text{Grupa birleşme özelliğinden})$$

$$y^{-1} = a^{-1}x^{-1} \Rightarrow y = xa \quad (\text{Grupa birleşme özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = x \quad (\text{Grupa ters element özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = x \quad \text{olur. Buradan } x = ya^{-1} \in H \text{ bulunur.}$$

$$ya^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \vee a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a} \text{ bulunur ki;}$$

$$H\bar{a} \subset \bar{a} \text{ demektir.} \quad (2)$$

(1) Ve (2) den $H\bar{a} = \bar{a}$ denir.

Şekil 4.18. Teorem.2'nin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 2. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.16'da yer verilmiştir.

Tablo 4.16.

Ceyda'nın 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>G çarpım bir grup, H alt grup G olsun. Her a eleman G için $H a$ yani a yani G nin sağ yan kümesi a eleman G nin burada yanlış bişey de ifade etmiş olabilirim. x eleman G için $a \equiv x \pmod{H}$ yani $H a$, a nın kalan sınıflarıdır diyor [Teoremi okuyor]. Burada a denktir $x \pmod{H}$ kongrüansına uyan x eleman G lerin kümesini a nın kalan sınıfları ile gösterelim. Yani bu a nın denklik sınıfı olsun. Denklik sınıfıymış kalan sınıf. Aynı şey değil mi hocam? Aynı şey.</i>	İspata başlamadan önce anahtar fikir olarak verilen hipotezi ve hükmü belirleme basamağı ile hipotezi kullanma basamağını dikkatlice okuyarak anlamaya çalışıyor. Burada bir anlık denklik sınıfı ile kalan sınıfı tereddütü yaşıyor.
<i>H alt küme G için olduğunu dolayısıyla a nın denklik sınıflarının $H a$ nın... [hipotezi ve hükmü belirleme basamaklarını okuyor] Burada şey yapıyor, yol gösterme olarak şey vermiş hocam bize, yani şunların birbirine ikisi de küme olduğu için eşit olduğunu göstermek için ikisini de birbirlerinin alt kümesi olduğunu göstermemiz gerekiyor demiş.</i>	Anahtar fikri doğru anlıyor ve yorumluyor.
<i>x eleman a nın denklik sınıflarının kümesinden bir x eleman, a elemanı almış ve a denktir $x \pmod{H}$ olur demiş. ise ax^{-1}. [Düşünüyor] Burada $ax = Hk$ yazıyorduk. Yok olmadı [siliyor] toplama için geçerli olan bi şey. (...). Kapalılık özelliğine göre de şu elemene (ax^{-1}) eşit olan şu işleme, işleme girdiğinde hani işlem kapalı olduğu için küme işlemde bu işlem olduğu zaman kümenin elemanlarından bir tanesini verecek ve bu da H nın elemanı olacak diyor.</i>	Hipotezi kullanma basamağını okuyor ve yorumlamaya çalışıyor.
<i>Buradan şu ifadedden $(ax^{-1} = h)$ devam edeceğiz. Buradan anladığım kadarıyla yani.</i>	Anahtar fikri doğru yorumluyor.
<i>Eşittir h [bırakılan boşluğa; 'ax^{-1}' in yanına '$= h$' yazıyor. Burada üçüncü adımda geçen '$ex^{-1} = a^{-1}h$' anahtar fikrinden yardım alıyor] şurayı [eşitlikte a nın sol tarafını göstererek] a nın tersi x, x ile işleme koysak, a nın tersi ile işleme koysak bilmem olur mu? [Önce 'a' ya bakıyor yanına 'a^{-1}' yazmayı planlıyor ancak sonra 'x^{-1}' i görünce 'x' yazmayı planlıyor sonuç olarak 'a^{-1}'de karar kılıyor] a nın tersi ile işleme sokulursa burasıuu $ah = x^{-1}$ olur. x i de a nın kalan sınıflarından seçmiş ve x de a nın kalan sınıflarında ve alt grup olduğu için x in tersi mevcuttur ve yine bu kümededir. Burada ah da sağ yan, sağ yan kümesinden seçilen, yok ya sol yan kümesinden, olmadı. [siliyor] İki yanının tersi alınırsa sonraki [Anahtar fikirleri okuyor.]</i>	Burada üçüncü adımda geçen $ex^{-1} = a^{-1}h$ anahtar fikrinden yardım alıyor ancak $ah = x^{-1}$ hatalı eşitliğini yazıyor dolayısıyla aslında $a^{-1}h$ yazması gerekirken ah yazdığı için bu ah ın sol yan kümenin elemanı olduğunu düşünerek yaptığı işlemde vazgeçiyor.
<i>şu, grupta birim özelliği olacak birim eleman [$ex^{-1} = a^{-1}h$ eşitliğine bakarak yanındaki boşluğu dolduruyor]</i>	Kavramsal bilgiyi seçip kullanabiliyor.

Tablo 4.16. (Devamı)

<i>Şunun ($y = xa$) üzerinden gideceğiz yine ama.</i>	Anahtar fikri doğru anlıyor ve yorumluyor
<i>(...) Burada da ters eleman özelliği mi? Yok birleşme özelliğinden bunu yazdık... [Mülakatçının uyarılarına rağmen] (...) Bi türlü toparlayamıyorum [gülüyor] hocam</i>	Aslında doğru yapıyor ancak basamak basamak yazmada problem yaşıyor. Önce ters eleman özelliğini kullanarak $aa^{-1} = e$ olduğunu buluyor ancak bunu yazmadan birim eleman özelliğine geçiyor.
<i>[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.] Zaten bu buna bakacağım herhalde. [Önceki yaptığı işlemleri siliyor] Şöyle hocam her iki tarafı da a^{-1} ile işleme koymuştum en son. [$ya^{-1} = xaa^{-1}$, yazdı] Burada birleşme özelliğinden diyor. Birleşme özelliğinde şunların önce hangi ikili, hangi ikisini işleme aldığımız fark etmeyecek. O yüzden şöyle aa^{-1} yazsam [bir sonraki basamağa '$ya^{-1} = x(aa^{-1})$' yazdı]. Bu da diğer adımı göstermiş zaten. Şu da birim eleman olmuş. Buraya da ters eleman yazacağız.(...) Şuraya [önceden ikinci basamağa yazdığı 'birim eleman'ı silerek birinci basamağa 'birim eleman' yazıyor] yine şu tarafa birim eleman yazacağız. (...) (...) Buradan da birleşme özelliğinden şuraya [ikinci basamağa '$a^{-1}ax = a^{-1}h$' yazıyor] şu parantezi şuraya ($(a^{-1}a)x = a^{-1}h$) koyup buna $((a^{-1}a))$ da zaten diğer adımda e demiş. Buna şu birim eleman [ilk eşitlikte birim eleman özelliğini kullandığını yazdı]. (...) Hocam i de denklik sınıfı kümesinin H_a nın alt kümesi olduğunu göstermiş. ii de de tam tersi H_a nın denklik sınıfının alt kümesi olduğunu göstermiş</i>	İşlemleri basamak basamak ve doğru yapıyor ancak bu defa da hangi işlemin hangi özelliğe ait olduğunu karıştırıyor.
<i>Kapalılık özelliğine göre böyle bir h var. Şurayı $(ax^{-1} = h) x$ le bu tarafını işleme koysak</i>	Genel olarak ispatı anlamış.
<i>(...) Çünkü buradan bir nevi, ama olmadı. Niye olmadı diyeceksiniz hocam. Çünkü ben burada x i x^{-1} ile işleme soktum. Ama alt tarafta mesela şu adım [üçüncü adımda verilen '$ex^{-1} = a^{-1}h$' eşitliğini gösteriyor] bize yol gösteriyor ki hani yanlış bir şey yaptık [i. Şıkkına yazdığı ifadeleri siliyor].</i>	Hipotezi kullanma basamağını okuyor ve $ax^{-1} = h$ eşitliğinin her iki yanını x ile işleme tabi tutmayı düşünüyor
<i>Ne yapmamız lazım hocam bir kere şuradaki [i. ispatın üçüncü basamağında verilen '$ex^{-1} = a^{-1}h$' eşitliğini göstererek] x^{-1} yok olmayacakmış onu görüyoruz buradan. O yüzden a^{-1} ile işleme koyacağız [ilk basamağa; '$a^{-1}ax = a^{-1}h$' yazıyor]. Buradan da birleşme özelliğinden şuraya [ikinci basamağa '$a^{-1}ax = a^{-1}h$' yazıyor]</i>	Üçüncü adımda verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' anahtar fikri yardımıyla yanlısının farkına varıyor.
	' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' anahtar fikrinden yola çıkarak ispatı nasıl oluşturacağı hakkında düşünüyor

Tablo 4.16. (Devamı)

<i>Daha sonra eşitliğin her iki yanının tersi alınır diye. O zaman ters eleman özelliğinden [eksik bırakılan ikinci adımda 'ters eleman' özelliğini kullandığını yazdı]</i>	Dördüncü adımda verilen 'eşitliğin her iki yanının da tersi alınır' ifadesinden yola çıkarak bir üst adımda ters eleman özelliğini kullandığını yazdı. Eşitliğin her iki yanının tersinin alınması ile ters eleman özelliğini bağdaştırdı.
<i>Olduğundan burada h' yani h nin tersi $= h_0$ olmuş demişse. (...) Çünkü hocam şurada [$x = h_0 a$] yı göstererek] şu ($x = h^{-1} a$) ifadenin aynısı, ama sadece h in tersine h_0 demiş. O yüzden yazdım bunu.</i>	Önceki ve sonraki bilgileri birarada düşünerek ve kullanarak $h^{-1} = h_0$ yazıyor ve bu şekilde ispatın i. Şikkını tamamlıyor. Ancak $h^{-1}, h_0 \in H'$ tanımlamayı ihmal ediyor.
<i>Buradan da denirse a nın denklik sınıfı kümesi H_a nın alt kümesi olur demiştik. Buradan da yine tam tersi bulunuyor. İkisini eşit olduğunu gösterirsek zaten şurada [hipotezi belirleme basamağını gösteriyor] bize yol göstermiş. Hani ikisinin eşit olduğunu göstermemiz gere... Yani nasıl desem ki? İkisinin eşit olduğunu göstermemiz için birbirlerinin alt kümesi olduğunu göstermemiz gerekiyordu. Onu da gösterdik yani.</i>	Genel olarak bu ispatı tamamlamasında anahtar fikir olarak verilen eşitlikler ve hipotezi belirleme ve kullanma bileşenleri etkili olmuştur.

Tablo 4.16'da da görüldüğü gibi; kavramsal bilgileri ve önceki bilgileri kullanarak tamamlanması beklenen 2. teoremin ispatında Ceyda, anahtar fikirleri etkili bir biçimde kullanmakta ve anahtar fikirler yardımıyla ispat sürecinde yaptığı hatalardan ispatı arındırabilmektedir. Anahtar fikirleri okuyarak yorumlayan ve bu şekilde ispatı tamamlamaya çalışan Ceyda, genel olarak ispatı anlamış, önceki ve sonraki bilgileri bir bütün olarak ele alabilmiştir. Basamak basamak ilerleyemediği için ispatı tamamlamakta zorluk yaşamış; bütün teoremler bittikten sonra yeniden bu teoreme döndüğünde adım adım ilerleyerek ispatı tamamlayabilmiş olmasına rağmen bu kez de hangi adımda hangi özelliği kullandığını ifade edememiştir. Yalnızca verilen ($x = h_0 a$) ile ($x = h^{-1} a$) anahtar fikirleri arasında bağlantı kurarak boş bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' ifadesini $h^{-1}, h_0 \in H'$ tanımlamayı ihmal ederek tamamlamıştır. Dolayısıyla grupta ters elemanın varlığına yönelik ifadeyi yazamamıştır. Üstelik eşitliğin her iki yanının da tersinin alınması ifadesi ile ters eleman özelliği arasında bir kavram karmaşası yaşamıştır. Bu durumun Ceyda'nın orta düzeyde başarılı olmasından ve kararsız yapısından kaynaklandığı düşünülmüştür.

4.2.3.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.3 Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

Ceyda: Bir G grubunun bir takım sonlu veya sonsuz alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur [Teoremi okudu] demiş. $I = \{1,2,3 \dots\}$ bir indis kümesi olsun, olduğunu göstereceğiz. Şunu göstereceğiz hocam. u_i . I ların kesişiminin şöyle alt grup G olduğunu göstereceğiz [$\cap I \leq G$ yazıyor]. Buraya başka bir açıklama yazmamız gerekiyor mu ama? Bunun da kesişim...

Mülakatçı: Aşağıya bak neyi göstermiş, ne yapmış?

Ceyda: Aşağıda hocam kesişimin yani şu küme.. kesişim sonlu veya sonsuz alt gruplarının kesişimi.. Bunun için a, b eleman H alalım. b a . H kümesi seçmiş a ve b elemanları almış. Kesişimin tanımından her i eleman I için $a.b$ H_i ye eşit olacak şey elemanı olacak, eşit olmayacak. Alt grubun tanımından da her i eleman I için $a.b^{-1} \in H_i$ olacak. Kesişimin tanımından yine a çarpı b^{-1} daha doğrusu a işlem b^{-1} eleman H olur demiş. hımm. [Eksik bırakılan kısımdan sonra verilen anahtar fikirleri okudu.]

Mülakatçı: Neyi göstermiş, neleri kullanmış?

Ceyda: Hocam burada kesişim tanımı u_i , tanımından bu a işlem b lerin bütün H_i lerde olacağını söylemiş.

Mülakatçı: H_i ler ne o zaman?

Ceyda: H_i lerin elemanı olacağını söylemiş. H_i ler burada bahsettiği sonlu veya sonsuz alt grupları. Bir de her i eleman I için demiş. Hani grup olma şartları, alt grup olma şartları bu H_i lerin. a işlem b^{-1} 'i ihtiva ettiği zaman H_i ler alt grup olacaktı. Burada onu söylemiş. Kesişimin tanımından yine kesişimin tanımından da şu a işlem b^{-1} , H_i lerin elemanı ise bütün yani H nin da elemanı oluyor.

Mülakatçı: H ne oluyor?

Ceyda: H da bunların kesişim kümesi oluyor hocam burada dediğini göre.

Mülakatçı: O zaman yaz.

Ceyda: [Önceki yazdıklarını siliyor] Şöyle olacak o zaman hocam. I indisleri imiş zaten, bunu ben ilk yanlış anlamışım. Şöyle H_i kesişim, yok öyle değil. Kesişim H_i . Bütün H_i lerin kesişimi H olmak üzere bu H nin G nin bir alt grubu olduğunu göstereceğiz [$\bigcap_i H_i = H$ olmak üzere $H \leq G$ yazdı].

Mülakatçı: Ne yardımcı olsun sana burada?

Ceyda: Bi kere hocam kesişimin tanımından gitmesi hani bayağı yardımcı oldu. Hani. Alt grup tanımı belki burada a işlem b^{-1} in H ların elemanı olması gerektiği hatırlanabilir ama şu a işlem b lerin hani H_i lerin elemanı ise. Bu kesişim kümesinin de elemanı olması sonunda hatırlanamayabilir.

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) altgruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

..... $\bigcap_i H_i = H$ olmak üzere $H \leq G$
 olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b \in H_i$.

→ Alt grubun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$.

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Şekil 4.19. Teorem.3'ün ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 3. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.17'de yer verilmiştir.

Tablo 4.17.

Ceyda'nın 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
[Teoremin ifadesini okuduktan sonra] Şunu göstereceğiz hocam. u . I ların kesişiminin şöyle alt grup G olduğunu göstereceğiz [$\cap I \leq G$ yazıyor]	Hipotezi ve Hükümü belirleyebilmek için teorem ifadesinden yola çıkarak ($\cap I \leq G$ yazıyor).
(...)Bunun için a, b eleman H alalım. b a . H kümesi seçmiş a ve b elemanları almış. Kesişimin tanımından her i eleman I için $a.b$ H_i ye eşit olacak şey elemanı olacak, eşit olmayacak.(...) Hocam burada kesişim tanımı u , tanımından bu a işlem b lerin bütün H_i lerde olacağını söylemiş.	Eksik bırakılan hipotezi ve hükümü belirleme bileşeninden sonra verilen anahtar fikirleri doğru bir biçimde anlayıp ifade edebiliyor.
H_i ler burada bahsettiği sonlu veya sonsuz alt grupları. Bir de her i eleman I için demiş. Hani grup olma şartları, alt grup olma şartları bu H_i 'lerin. a işlem b^{-1} 'i ihtiva ettiği zaman H_i ler alt grup olacaktı. Burada onu söylemiş.	Alt grup olma şartını biliyor ve hatırlıyor.
Kesişimin tanımından yine kesişimin tanımından da şu a işlem b^{-1} H_i lerin elemanı ise bütün yani H nin da elemanı oluyor. H da bunların kesişim kümesi oluyor hocam burada dediğini göre [önceki yazdıklarını siliyor].	Anahtar fikirler doğrultusunda yaptığı çıkarımlar sonucunda yazdığı yanlış ifadeyi siliyor.
Şöyle olacak o zaman hocam. I indisleri imiş zaten, bunu ben ilk yanlış anlamışım. Şöyle H_i kesişim, yok öyle değil. Kesişim H_i . Bütün H_i lerin kesişimi H olmak üzere bu H nin G nin bir alt grubu olduğunu göstereceğiz [$\cap_i H_i = H$ olmak üzere $H \leq G$ yazdı.].	Yanlış anlamalarını verilen anahtar fikirler yardımıyla düzeltiyor ve ispatı belli bir düzeye taşıyor ancak matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle $\cap_{i \in I} H_i = H$ yazamıyor.
Bi kere hocam kesişimin tanımından gitmesi hani bayağı yardımcı oldu. Hani. Alt grup tanımı belki burada a işlem b^{-1} in H ların elemanı olması gerektiği hatırlanabilir ama şu a işlem b lerin hani H_i lerin elemanı ise. Bu kesişim kümesinin de elemanı olması sonunda hatırlanamayabilir.	'alt grubun tanımından $ab^{-1} \in H_i$ ' ve 'kesişimin tanımından $ab^{-1} \in H$ ' anahtar fikirleri arasında bağlantı kurarak hipotezi oluşturuyor. Burada 'alt grubun tanımından $ab^{-1} \in H_i$ ' verilmesi yalnızca 'kesişimin tanımından $ab^{-1} \in H$ ' ifadesi verilse de hipotezin ve hükmün belirlenebileceğini ifade ediyor.

Tablo 4.17’de de görüldüğü gibi; Ceyda, hipotezi ve hükmü belirleyerek tamamlanması istenen 3. Teoremin ispatında yalnızca teoremin ifadesinden yola çıktığında hem gösterim olarak hem anlam olarak hatalı bir hipotez kursa da anahtar fikirleri anlayarak yorumlama yoluna gittiğinde yanlışlarını düzelterek ispatı belirli bir düzeye taşıyabilmiştir. Verilen anahtar fikirlerden ‘alt grubun tanımından $ab^{-1} \in H_i$ ’ ve ‘kesişimin tanımından $ab^{-1} \in H$ ’ anahtar fikirleri arasında bağlantı kurarak hipotezi ve hükmü eksik de olsa oluşturabilmiştir. Bu eksiklik; ifadesinde H_i lerin ne olduğuna yönelik bir açıklama yapmamış olması ve matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle $\bigcap_i H_i = H$ yazıp $\bigcap_{i \in I} H_i = H$ yazamamış olmasıdır. Burada ‘alt grubun tanımından $ab^{-1} \in H_i$ ’ ifadesi verilmeyle yalnızca ‘kesişimin tanımından $ab^{-1} \in H$ ’ ifadesi verilse de hipotezin ve hükmün belirlenebileceğini ifade etmiştir. Bu durumdan yola çıkarak, H_i leri alt grup olarak ele aldığı ancak yazılı olarak ifade etmediği sonucuna varılmaktadır.

4.2.3.4. Teorem.4’ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.4 Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

Ceyda: Mertebesi k olsun, k asal ise G grubu bir devir grubudur. Derecesi k ve k asal olan bir devir grubu olduğunu göstereceğiz [teoremi ve hipotezi belirleme basamağını okudu]. a eleman G ve a farklı e olsun, a eleman tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Yani burada şey demiş. e den farklı seçmiş çünkü zaten e ile elemanlar üretildiği için hani e den farklı bir eleman için göstermemiz gerekiyor. Lagrange teoremi gereğince; alt grubun mertebesi yok $o(H)$ evet alt devir grubunun mertebesi grubun mertebesini bölecek. Bunu [‘lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ ’ anahtar fikrini gösteriyor.] mesela burada vermesi yani iyi çünkü yani hatırlayamazdım. Yani bu olmasaydı. Yani Lagrange teoremini belki biliyorum ama burada kullanmam gerektiğini hatırlayamazdım herhalde. G nin mertebesi k , asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. Burada bunu nasıl kullanabiliriz? Burada $(o(G)) \mid k$ dersek, o zaman H nin mertebesi ya k olacak ya da 1 olacak.

Mülakatçı: Yaz aşağıya.

Ceyda: Yazayım. $o(H) = k$ veya $o(H) = 1$ olmalı. Hani şurada $(o(H) \mid o(G))$ verdiği ifadeye göre. Bir devir grubu olduğunu göstermiş. Toparlayamadım şu an.

Mülakatçı: k ise ne olur, 1 ise ne olur?

Ceyda: *Mertebesi 1 ise zaten u birim eleman olacak ve şu devir grubu olduğunu zaten kanıtlar. $o(H) = 1$ ise, $H = e$ den oluşan bir grup gibi yazabiliriz. Bu da devir, devir, alt devir grubudur. $o(H) = k$ ise, o zaman hocam k , a^k lar, e ye eşit olacak. Yani şöyle a eleman H için. k . Yani nasıl desem. Grubun ama bu alt grubun mertebesi... Buradan da, toparlayamadım, olmadı. Tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. a tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim demiş. O zaman a nın, grubun mertebesi k olduğundan alt grubun alt devir grubunun mertebesi k olduğundan o zaman a^k lar e ye eşit olacak. Bunu düşünebilirim.*

Mülakatçı: *Bunu nasıl yorumlarsınız?*

Ceyda: *Bunu a^{k-1} ile işleme koysak...*

Mülakatçı: *Ne düşünüyorsun? Ne geçiyor zihninden?*

Ceyda: *Şu an bunu [yazdığı ' $a^k = e$ ' yi göstererek] nasıl yorumlayacağımı bilemiyorum aslında ama.*

Mülakatçı: *Devir grubu ne demek?*

Ceyda: *Devir grubu hocam, bir a elemanı tarafından grubun bütün elemanlarının üretilmesi gerekiyor.*

Mülakatçı: *Onu nasıl yazarsın yani bir eleman tarafından üretilmesini nasıl yazarsın?*

Ceyda: *a^k lar grubun elemanlarına eşit olacak. k yı değiştir yani bu k buradaki (a^k) k değil tabi. Burada da a^k yine e yi üretmiş. O zaman e de grup olduğu için, alt devir grubu, alt yani alt grup olduğu için e illaki H nın elemanı demek ki a^k H nın elemanlarını üretebiliyor. Diye bir yorum yapıp, o zaman k nın, k asal, k olduğunda da merte.. hı olmadı. Bi dakika. $o(H) = k$ olduğunda da H bir alt devir grubudur diyebiliriz.*

Mülakatçı: *Neden?*

Ceyda: *Çünkü e yi üretmiş hocam. k , a^k e yi üretmiş. e de H nın elemanı. Buradan $a^k = e$.*

Teorem.4: $o(G) = k$ ve k asal ise G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $\overset{k,1}{o(H)} \mid \overset{k}{o(G)}$ olmalıdır.

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur.

O halde; $o(H) = k$ veya $o(H) = 1$ olmalı.

$o(H) = 1$ ise $H = e$ alt devir grubudur.

$o(H) = k$
 $a \in H$ $a^k = e$ $e \in H$

Şekil 4.20. Teorem.4'ün ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 4. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.18'de yer verilmiştir.

Tablo 4.18.

Ceyda'nın 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Mertebesi k olsun, k asal ise G grubu bir devir grubudur. Derecesi k ve k asal olan bir devir grubu olduğunu göstereceğiz [teoremi ve hipotezi belirleme basamağını okudu]. a eleman G ve a farklı e olsun, a eleman tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Yani burada şey demiş. e den farklı seçmiş çünkü zaten e ile elemanlar üretildiği için hani e den farklı bir eleman için göstermemiz gerekiyor	Anahtar fikir olarak verilen bilgileri yorumluyor.
Bunu ['lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ ' anahtar fikrini gösteriyor] mesela burada vermesi yani iyi çünkü yani hatırlayamazdım. Yani bu olmasaydı. Yani Lagrange teoremini belki biliyorum ama burada kullanmam gerektiğini hatırlayamazdım herhalde.	Lagrange teoremini aslında bildiğini ancak bu ispatta kullanılması gerektiğini anahtar fikir yardımıyla hatırladığını ifade ediyor.
G nin mertebesi k , asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. Burada bunu nasıl kullanabiliriz? Burada $(o(G))$ k dersek, o zaman H nin mertebesi ya k olacak ya da 1 olacak.	Asal sayı tanımını kullanarak verilen anahtar fikirleri yorumluyor.
Mertebesi 1 ise zaten u birim eleman olacak ve şu devir grubu olduğunu zaten kanıtlar. $o(H) = 1$ ise. $H = e$ den oluşan bir grup gibi yazabiliriz.	Birim elemandan oluşan grubun devirli olacağını biliyor ancak matematiksel notasyona uygun olarak ' $H = \{e\}$ ' şeklinde yazamıyor
Bunu a^{k-1} ile işleme koysak... [mülakatçının sorusu üzerine] Şu an bunu [yazdığı ' $a^k = e$ ' yi göstererek] nasıl yorumlayacağımı bilemiyorum aslında ama.	Yazdığı ' $a^k = e$ ' eşitliğini ispatla nasıl ilişkilendireceğini bilemiyor.
[Mülakatçının sorusu üzerine] Devir grubu hocam, bir a elemanı tarafından grubun bütün elemanlarının üretilmesi gerekiyor	Devir grubunun tanımını biliyor.
a^k lar grubun elemanlarına eşit olacak (...) Burada da a^k yine e yi üretmiş. O zaman e de grup olduğu için, alt devir grubu, alt yani alt grup olduğu için e illaki H nin elemanı demek ki a^k H nin elemanlarını üretebiliyor. Diye bir yorum yapıp, o zaman k nin, k asal, k olduğunda da merte.. hu olmadı. Bi dakika. $o(H) = k$ olduğunda da H bir alt devir grubudur diyebiliriz. Çünkü e yi üretmiş hocam. k , a^k e yi üretmiş. e de H nin elemanı. Buradan $a^k = e$	Sezgisel olarak ispatı anlayabiliyor ancak yazılı olarak nasıl tamamlayacağını bilemiyor.

Tablo 4.18'de de görüldüğü gibi; Ceyda, verilen anahtar fikirleri ve asal sayı tanımını kullanarak tamamlanması beklenen Teorem.4'ün ispatında hem verilen anahtar

fikirleri hem asal sayı tanımını hem de Lagrange teoreminin ifadesini kullanarak bir takım çıkarımlarda bulunmuştur. Burada Lagrange teoremini aslında bildiğini ancak bu ispatta kullanılması gerektiği düşüncesinin anahtar fikir yardımıyla oluştuğunu ifade etmiştir. Ceyda, birim elemandan oluşan grubun devirli olacağını ve devirli grup tanımını bilmesine ayrıca sezgisel olarak ispatı anlayabilmesine rağmen yazılı olarak ispatı tamamlayamamıştır.

4.2.3.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.5 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Ceyda: G bir grup a eleman G olsun. Her x eleman G için. $\varphi_a(x)$ ile tanımlı otomorfizmasıdır, otomorfizması denir [teoremi okudu]. Her x, y eleman G için evet, olduğundan φ_a bir homomorfizmadır. Homomorfizma olduğunu göstermemiz için burada şöyle bir sonuca ulaşmamız lazım. Tersten düşünersek. $\varphi_a(y)$ sonucuna ulaşmamız lazım [en son kısma ' $\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$ ' yazıyor]. Burada şunu $(a(xy)a^{-1})$ devam ettirelim. Bi kere grup olduğu için birleşme özelliği geçerli olacak. Yani $axya^{-1}$; buradan aslında şunu [teorem ifadesinde verilen ' $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ 'i göstererek] axa^{-1}, aya^{-1} böyle iki ifade elde etmemiz lazım. Şu iki basamaktan [eksik bırakılan adımları gösteriyor]... Çünkü şunu $(\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y))$ yazabilmemiz için. Ama bunu nasıl elde ederiz? Şuraya [$'axya^{-1}'$ de x ile y arasına e yazarak ' $axeya^{-1}$ ' yi elde ediyor] e yazsak x, y yani sonuç değişmeyecek. axe şunu söyleyim de [x ile y arasına yazdığı e yi silerek bu aynı eşitliği bir sonraki basamağa yazıyor] $axeya^{-1}$, e yerine de a çarpı, $a^{-1}a$ yazabiliriz. $axa^{-1}aya^{-1}$, sonuçta $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ oluyordu. Şuradan $(axa^{-1}aya^{-1})$ yazınca da direkt şu ifade (axa^{-1}) bunu $(\varphi_a(x))$ veriyor. Bu (aya^{-1}) , ifade de bunu $(\varphi_a(y))$.

Mülakatçı: Evet, ne yardımcı oldu sana?

Ceyda: Burada ne yardımcı oldu? Bi kere homomorfizmadır demesi sonunda, ve benim şu homomorfizma şartını hani. $\varphi(x)$, $\varphi_a(x), \varphi_a(y)$ olduğunu bilmem, şu aradaki basamakları, hani o yazdırdı bana. Öyle diyim. $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ ise burada bire-bir olduğunu göstermiş. Örtten olduğunu göstermiş. Bi kere şu otomorfizmayı her zaman hatırlanılmayabilir hani bire-bir. Burada yardımcı olmuş yani bire-bir ve örtten

olmasının söylenmesi. Hani şurada mesela örten ve bire-birliği vermeseydi de sadece şu otomorfizmanın şöyle örten ve bire-bir olduğunu söyle... Şunları da yazabilirdik yani biz.

Mülakatçı: Yani şey mi demek istiyorsun? Şartlar hatırlanmayabilir ama ne olduğu...

Ceyda: Yani anahtar fikir mesela burada hocam şu örten ve bire-bir olduğu verilmiş olsaydı sadece Şu aradaki bu ispatları da kendimiz yapabilirdik.

Mülakatçı: Hımm. Anladım.

Ceyda: Ama burada öğrencinin hatırlayamayacağı otomorfizma olmasının şartları

Mülakatçı: Otomorfizma olmasının şartları hatırlanmayabilirdi diyorsun.

Ceyda: Hatırlanamayabilir.

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\begin{aligned} \varphi_a(xy) &= a(xy)a^{-1} = axya^{-1} \\ &= ax(aya^{-1}) = axa^{-1}aya^{-1} \\ &= \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y) \end{aligned}$$

$aa^{-1} = e = a^{-1}a$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$\exists x \in G$ bulunabileceğinden, φ_a örten de olur. Şu halde φ_a G nin bir otomorfizmasıdır.

Şekil 4.21. Teorem.5'in ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 5. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.19'da yer verilmiştir.

Tablo 4.19.

Ceyda'nın 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Homomorfizma olduğunu göstermemiz için burada şöyle bir sonuca ulaşmamız lazım. Tersten düşünersek. $\varphi_a(y)$ sonucuna ulaşmamız lazım [en son kısma '$\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$' yazıyor].</i>	'olduğundan φ_a bir homomorfizmadır.' Anahtar fikirden yola çıkarak ve homomorfizma olmanın şartını kullanarak son basamağı yazıyor ve ispata böyle başlıyor.
<i>Burada şunu $(a(xy)a^{-1})$ devam ettirelim. Bi kere grup olduğu için birleşme özelliği geçerli olacak.</i>	Birleşme özelliğinin varlığını ifade ediyor.
<i>Yani $axya^{-1}$; buradan aslında şunu [teorem ifadesinde verilen '$\varphi_a(x) = axa^{-1}$'i göstererek] axa^{-1}, aya^{-1} böyle iki ifade elde etmemiz lazım. Şu iki basamaktan [eksik bırakılan adımları gösteriyor] Çünkü şunu $(\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y))$ yazabilmemiz için. Ama bunu nasıl elde ederiz? (...) Şuradan $(axa^{-1}aya^{-1})$ yazınca da direk şu ifade (axa^{-1}) bunu $(\varphi_a(x))$ veriyor. Bu (aya^{-1}), ifade de bunu $(\varphi_a(y))$</i>	Teorem ifadesinde verilenlerden, ispata başlama aşamasında anahtar fikir olarak verilen eşitlikten ve birim eleman özelliğinden yola çıkarak işlemleri yapıyor. Birleşme özelliğini ilk adımlarda kullanmasına rağmen burada ifade etmediği görülüyor.
<i>Şuraya [$'axya^{-1}'$ de x ile y arasına e yazarak '$axeya^{-1}$' yi elde ediyor] e yazsak x,y yani sonuç değişmeyecek. axe şunu sileyim de [x ile y arasına yazdığı e yi silerek bu aynı eşitliği bir sonraki basamağa yazıyor] $axeya^{-1}$, e yerine de a çarpı, $a^{-1}a$ yazabiliriz. $axa^{-1}aya^{-1}$, sonuçta $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ oluyordu.</i>	Birim eleman özelliğini amacına uygun bir biçimde kullanarak ispatı yapıyor.
<i>Burada ne yardımcı oldu? Bi kere homomorfizmadır demesi sonunda, ve benim şu homomorfizma şartını hani. $\varphi(x), \varphi_a(x), \varphi_a(y)$ olduğunu bilmem, şu aradaki basamakları, hani o yazdırdı bana.</i>	Homomorfizma şartını biliyor ve işlemleri uygulayabiliyor.
<i>Örten olduğunu göstermiş. Bi kere şu otomorfizmayı her zaman hatırlanılmayabilir hani bire-bir. Burada yardımcı olmuş yani bire-bir ve örten olmasının söylenmesi. Hani şurada mesela örten ve bire-birliği vermeseydi de sadece şu otomorfizmanın şöyle örten ve bire-bir olduğunu söyle.. Şunları da yazabilirdik yani biz. (...) Ama burada öğrencinin hatırlayamayacağı otomorfizma olmasının şartları (...) Yani anahtar fikir mesela burada hocam şu örten ve bire-bir olduğu verilmiş olsaydı sadece şu aradaki bu ispatları da kendimiz yapabilirdik.</i>	Otomorfizmanın şartlarının neler olduğunun hatırlanamayabileceğini ancak otomorfizmanın bire-bir ve örten olma şartlarının verilerek bunların ispatına yönelik işlemlerin de eksik bırakılabileceğini ifade ediyor.

Tablo 4.19’da da görüldüğü gibi; Ceyda, tamamlanması beklenen Teorem.5’in ispatında; verilen ‘olduğundan φ_a bir homomorfizmadır.’ ile $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$ anahtar fikirlerinden ve teorem ifadesinde verilen $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ eşitliğinden ve homomorfizma özelliklerini kullanarak yazdığı son adımdan yola çıkarak ispata başlamış sonrasında etkisiz eleman özelliği ve her ne kadar yalnız sözlü olarak ifade etmiş olsa da birleşme özelliği gibi grup olma şartlarını etkin bir biçimde kullanarak ispatı tamamlayacak işlemleri sıralamıştır. Ceyda ayrıca bu ispatta otomorfizmanın şartlarının neler olduğunun hatırlanamayabileceğini ancak otomorfizmanın bire-bir ve örten olma şartlarının verilerek bunların ispatına yönelik işlemlerin de eksik bırakılabileceğini ifade etmiştir.

4.2.3.6. Teorem.6’nın ispatına yönelik bulgular

Teorem.6 S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

Ceyda: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi. S' de S nin alt kümesi olacak şekilde V vektör uzayının Bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır [teoremi okudu]. c_i elemanı R den bir c_i elemanı S den de x_i elemanı seçmiş. S kümesi lineer bağımsız olduğundan sisteminin çözümünde. Bir kere şuradan devam ettiğimizde şurada bir eşitsiz denklem sistemi yazacağız ona ulaşıyoruz. Şöyle bir şey mi olacak acaba? $c_i \cdot x_i = 0$ mı olacak? [$c_i \cdot x_i = 0$ yazıyor sonra siliyor] Yok olmadı bir dakika. Şöyle hocam iki tane c birden sıfırdan i ye kadar yine x de [$\sum_{c=0,x}^i$ yazıyor ve siliyor] yok olmadı bir dakika hocam.

Mülakatçı: Açık yaz, düşündüğün şeyi.

Ceyda: Düşündüğüm şeyi evet. $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$

Mülakatçı: i ler nereden nereye gitmiş?

Ceyda: 1 den n kadar o zaman buraya [$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$ denkleminde c_i yi c_n olarak düzeltiyor] n yazacağız. Buraya [$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$ denkleminde x_i yi x_n olarak düzeltiyor] da n yazacağız. S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. Yani biz burada $(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n = 0)$ S den eleman seçtik. Alt kümesi (S') olduğu için yani bütün o, bütün bütün x_i ler

olmasa da bazıları S' de olacaktır diyor. Burada $x_i \rightarrow v_i$ olsun. Buna göre, eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. Aynı şeyi şunun ($x_i \rightarrow v_i$) için...

Mülakatçı: Hıu nasıl yani nasıl düşüneceğiz, nasıl yazacağız?

Ceyda: Şöyle $x_1.v_1 + x_2.v_2 + \dots$ burada yine n e gittiğini n e gittiği ile ilgili bir şey söylememiş aslında ama $x_n.v_n$ desek

Mülakatçı: i demiş ya zaten i ler zaten n e gidiyor.

Ceyda: Evet şuradan [anahtar fikir olarak verilen ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) ifadesinden] evet pardon [$x_1.v_1 + x_2.v_2 + \dots + x_n.v_n$ yazıyor] v vektörleri S nin elemanı olduğundan. Yani S' den seçtik ve S' den seçtiğimiz elemanlar S nin de elemanı olacak alt kümesi olduğu için v_i vektörleri de lineer bağımsızdır. Biz bunu ($c_1.x_1 + c_2.x_2 + \dots + c_i.x_i = 0$) lineer bağımsız bulduysak yani şuradaki ($c_1.x_1 + c_2.x_2 + \dots + c_n.x_n = 0$) c_i leri lineer bağımsız bulduysak. Yok x_i leri... v_i vektörleri S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri de lineer bağımsızdır.

Mülakatçı: Yani neyi göstermiş oldu?

Ceyda: Şu ($x_1.v_1 + x_2.v_2 + \dots + x_n.v_n = 0$) denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü olmadığını lineer bağımsız olması için. Hani sadece sıfır için sağlama.

Mülakatçı: İspatı tamamla o zaman.

Ceyda: O zaman v_i ler sıfıra mı eşit olacak. [$v_i = 0$ yazıp, siliyor] Tamamlayamadım. S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

Mülakatçı: v_i lerin lineer bağımsız olması demek ne demek?

Ceyda: Şunun ($x_1.v_1 + x_2.v_2 + \dots + x_n.v_n = 0$) sıfırdan farklı çözümünün olmaması demek... Şunu katsayı olarak, katsayı olarak [$x_1.v_1 + x_2.v_2 + \dots + x_n.v_n = 0$ denkleminde x_i leri katsayı olarak gösteriyor]

Mülakatçı: Yani sen şu anda neyi göstermeye çalıştın bu ispatta?

Ceyda: Lineer bağımsızlığı gösteriyoruz.

Mülakatçı: Neyin lineer bağımsızlığını?

Ceyda: Hocam bir alt kümenin... S kümesi V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ise bu alt kümenin bir alt kümesi de yine V vektör uzayının lineer bağımsız oluyor. Neyi gösterdik? S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. O zaman S' alt küme S de lineer bağımsızdır. Bunu gösterdik hocam. [ispatın sonunda bırakılan eksik kısma ' $S' \subset S$ lineer bağımsızdır.' yazdı.]

Mülakatçı: Kontrol etmek istediğin bir şey var mı? Yeniden bakmak istediğin... Ne yardımcı oldu sana bu soru üzerine konuşmak istersek eğer?

Ceyda: Burada hocam şunları falan nereden seçeceğimizi söylemesi [ispata başlarken verilen ' $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ ' anahtar fikirlerini göstererek] aldığımız elemanları, bu yardımcı oldu. Yine indislerin nereye gidecek, mesela indisleri vermesi [$c_i = 0, i = 1, \dots, n$ ' anahtar fikrini göstererek] yardımcı oldu.

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$$

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.

Buna göre;

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. $S' \subset S$ lineer bağımsızdır.

Şekil 4.22. Teorem.6'nın ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 6. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.20'de yer verilmiştir.

Tablo 4.20.

Ceyda'nın 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
c_i elemanı R den bir c_i elemanı S den de x_i elemanı seçmiş. S kümesi lineer bağımsız olduğundan sisteminin çözümünde. Bir kere şuradan devam ettiğimizde şurada bir eşitsiz denklem sistemi yazacağız.	Anahtar fikirlerden yola çıkarak ispatı nasıl tamamlaması gerektiği hakkında yorum yapıyor.
Şöyle bir şey mi olacak acaba? $c_i \cdot x_i = 0$ mı olacak? [$c_i \cdot x_i = 0$] yazıyor sonra siliyor] Yok olmadı bir dakika. Şöyle hocam iki tane c birden sıfırdan i ye kadar yine x de [$\sum_{c=0,x}^i$] yazıyor ve siliyor] yok olmadı bir dakika hocam.(...)[$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$] yazıyor]	Matematiksel notasyon bilgisi eksikliği yaşıyor.
[Mülakatçının sorusu üzerine] 1 den n kadar o zaman buraya [$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$] denkleminde c_i yi c_n olarak düzeltiyor] n yazacağız. Buraya [$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$] denkleminde x_i yi x_n olarak düzeltiyor] da n yazacağız.	Mülakatçının sorusu üzerine ' $i = 1, \dots, n$ ' anahtar fikrinden yola çıkarak yanlış indislendirerek yazdığı denklemi düzenliyor.
Yani biz burada ($c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$) S den eleman seçtik. Alt kümesi (S') olduğu için yani bütün o bütün bütün x_i ler olmasa da bazıları S' de olacaktır diyor. Burada $x_i \rightarrow v_i$ olsun. Buna göre, eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. Aynı şeyi şunun ($x_i \rightarrow v_i$) için	Anahtar fikirleri okuyor ve ' $x_i \rightarrow v_i$ ' için de ' $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n = 0$ ' denklemini oluşturmayı düşünüyor.
Şöyle $x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots$ burada yine n e gittiğini n e gittiği ile ilgili bir şey söylememiş aslında ama $x_n \cdot v_n$ desek. Evet şuradan evet pardon [$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n$] yazıyor] v vektörleri S nin elemanı olduğundan. Yani S' den seçtik.	Anahtar fikir olarak verilen ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) ifadesinden yardım alıyor. Ancak ' $x_i \rightarrow v_i$ ' yi yanlış yorumluyor.
S' den seçtiğimiz elemanlar S nin de elemanı olacak alt kümesi olduğu için v_i vektörleri de lineer bağımsızdır(...) Yok x_i leri... v_i vektörleri S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri de lineer bağımsızdır(...) S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.	Anahtar fikirleri okuyor ve yorumluyor.
[Mülakatçının sorusu üzerine] Şunun ($x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n = 0$) sıfırdan farklı çözümünün olmaması demek...	Lineer bağımsızlık tanımını ifade edebiliyor

Tablo 4.20. (Devamı)

<i>Şunu katsayı olarak, katsayı olarak [$x_1.v_1 + x_2.v_2 + \dots + x_n.v_n = 0$] denkleminde x_i leri katsayı olarak gösteriyor]</i>	Matematiksel notasyon bilgisi eksikliği var ancak lineer bağımsızlık tanımını biliyor ve bu tanımdan yola çıkarak ispatı sözlü olarak tamamlayabiliyor.
<i>Hocam bir alt kümenin... S kümesi V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ise bu alt kümenin bir alt kümesi de yine V vektör uzayının lineer bağımsız oluyor</i>	Teoremin ifadesini açıklayarak ispatı sözlü olarak tamamlamaya çalışıyor.
<i>O zaman S' alt küme S de lineer bağımsızdır. Bunu gösterdik hocam.</i>	İspat tamamlama bileşenini eksik bir biçimde yazılı olarak ifade edebiliyor.
<i>Burada hocam şunları falan nereden seçeceğimizi söylemesi [ispata başlarken verilen '$c_i \in R$ ve $x_i \in S$' anahtar fikirlerini göstererek] aldığımız elemanları, bu yardımcı oldu. Yine indislerin nereye gidecek, mesela indisleri vermesi [$c_i = 0, i = 1, \dots, n$] anahtar fikrini göstererek yardımcı oldu.</i>	' $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ ' ile ' $c_i = 0, i = 1, \dots, n$ ' anahtar fikirlerinden yardım aldığını ifade ediyor.

Tablo 4.20'de de görüldüğü gibi; Ceyda, tamamlanması beklenen Teorem.6'nın ispatında, anahtar fikir olarak verilen ' $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan' ile ' $c_i = 0, i = 1, \dots, n$ ' ifadelerinden yardım almış; ilk denklemi oluşturabilmiş ancak denklemi oluştururken dikkatsizlik sonucu yanlış indis kullandığı $c_i.x_i$ ifadesini, mülakatçının sorusu üzerine ' $c_i = 0, i = 1, \dots, n$ ' anahtar fikrine tekrar bakarak düzenlemiştir. Matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesini yanlış yorumlamış dolayısıyla ikinci denklemi yanlış bir gösterimle yazmıştır. Ancak eksik bırakılan ikinci adıma yazdığı denklemde x_i lerin katsayı olduğunu ifade etmiş ve bu sebeple denklemi oluşturma mantığının doğru olmasına karşın matematiksel notasyon bilgisi eksikliğin devam ettiği görülmüştür. Teoremin ifadesinden yola çıkarak sözlü olarak ispatı tamamlamaya çalışan Ceyda, katsayıya yönelik bir açıklama yapılması beklenen ikinci denklemde herhangi bir açıklama yapmaksızın ispat tamamlama bileşenini yazılı olarak eksik bir biçimde ifade edebilmiştir.

4.2.3.7. Teorem.7'nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

Ceyda: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere, U kesişim W kümesi de V nin bir alt uzayıdır [teoremi okudu]. U kesişim W den iki eleman almış. c eleman F denilsin, göstermeliyiz [hükmü belirleme basamağını okudu]. Burada $c.u + v$ nin kesiş.. U kesişim W nin elemanı olduğunu göstermeliyiz.

Mülakatçı: Ne için onu göstermeliyiz?

Ceyda: Alt uzay olduğunu göstermek için. Orada ($c.u + v \in U \cap W$) bize alt biz bir nevi alt uzay olmasının şartını söylüyor, ipucu. Buradan. Şunu devam ettirirsek hocam şunu ($u, v \in U \cap W$). Ayrı ayrı şu iki eleman (u, v) hani bu adımda ($u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$) onu vermiş bize. Her ikisinin de elemanı olacak. O zaman bu (U) alt uzaysa iki çünkü iki alt uzaysa [teorem ifadesini okuyor]... Alt uzaylığın şartını vermiş. $c.u + v$ eleman U olacak [$c.u + v \in U$ yazıyor].

Mülakatçı: Neden?

Ceyda: Çünkü hocam alt uzay olması...

Mülakatçı: Yanına yaz ne alt uzay olduğu için?

Ceyda: U alt uzay olduğu için. Şöyle şunu da yazayım [$c.u + v \in U \wedge$ yazıyor]

Mülakatçı: Bence onu aşağıya yaz, ayrı ayrı yaz.

Ceyda: [$\wedge$ yi siliyor] $c.u+v$ eleman U . U alt uzay olduğundan. [eksik bırakılan ilk basamağa; $c.u + v \in U$; U alt uzay olduğundan' yazıyor] Yine c demesin. ku diyelim, herhangi ku . [ikinci basamağa ' ku ' yazıyor]

Mülakatçı: c vermiş ama sana. k yı tanımlaman lazım o zaman. Alt basamağa bak belki yardımcı olur.

Ceyda: [ikinci basamağa yazdığı ' ku ' yu siliyor].Evet alt basamakta c vermiş buna da c diyeceğiz o zaman. $c.u + v$ eleman W alt uzayı... Alt uzayı olduğu için şu ($c.u + v \in U \cap W$) şarttan yine bunu ($c.u + v \in W$) da yazabiliriz. W alt uzay olduğundan [$c.u + v \in W$; W alt uzay olduğundan' yazdı] Devamında da zaten ve ' $\wedge$ ' koymuş ve

birleştirmiş hocam. Bana burada yardımcı olan özellikle de şu ($c.u + v \in U \cap W$) oldu yani bunu hatırlayamazdım. Hani şu aradaki işlemleri yapabilsem bile. Şunları, kesişimi, olduğunu falan kesişim olduğunda ne yapmamız gerektiğini bilsem bile şunu hatırlayamazdım..

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.

$c.u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$
 $\dots c.u + v \in U \dots U \dots \text{alt} \dots \text{uzay} \dots \text{olduğundan}$
 $\dots c.u + v \in W \dots W \dots \text{alt} \dots \text{uzay} \dots \text{olduğundan}$
 $c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$ ise
 $c.u + v \in U \cap W$ dir.

Şekil 4.23. Teorem.7'nin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 7. Teoremin ispatına yönelik Ceyda'nın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.21'de yer verilmiştir.

Tablo 4.21.

Ceyda'nın 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Alt uzay olduğunu göstermek için. Orada ($c.u + v \in U \cap W$) bize alt bir nevi alt uzay olmasının şartını söylüyor, ipucu.</i>	Verilen ' $c.u + v \in U \cap W$ ' anahtar fikri alt uzay olma şartını hatırlamasına yardımcı oluyor.
<i>Şunu devam ettirirsek hocam şunu ($u, v \in U \cap W$). Ayrı ayrı şu iki eleman (u, v) hani bu adımda ($u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$) onu vermiş bize.</i>	' $u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ ' anahtar fikrini yorumluyor, bu şekilde eksik bırakılan adımları nasıl dolduracağı yönünde fikir geliştiriyor.
<i>(...)Çünkü hocam alt uzay olması</i>	' $c.u + v \in U \cap W$ ' anahtar fikrinden yola çıkarak alt uzay olma şartını kullanıyor.
<i>U alt uzay olduğu için. Şöyle şunu da yazayım [mülakatçının ifadesi üzerine] $c.u+v$ eleman U. U alt uzay olduğundan. [eksik bırakılan ilk basamağa; '$c.u + v \in U$; U alt uzay olduğundan' yazıyor]</i>	' $c.u + v \in U \wedge$ ' yazıyor mülakatçı tarafından basamak basamak yazmaya yönlendirilince ' $\wedge$ 'yi kullanmayıp ifadeleri alt alta yazarak düzenliyor.
<i>Yine c demesin. ku diyelim, herhangi ku.[ikinci basamağa 'ku' yazıyor] (...) [ikinci basamağa yazdığı 'ku' yu siliyor].Evet alt basamakta c vermiş buna da c diyeceğiz o zaman. $c.u + v$ eleman W alt uzayı... Alt uzayı olduğu için şu ($c.u + v \in U \cap W$) şarttan yine bunu ($c.u + v \in W$) da yazabiliriz. W alt uzay olduğundan [$c.u + v \in W$; W alt uzay olduğundan' yazdı] Devamında da zaten ve '$\wedge$' koymuş ve birleştirmiş hocam.</i>	Mülakatçının yönlendirmesiyle eksik bırakılan kısımlardan sonra verilen anahtar fikirlere bakıyor ve yazdığı ifadeyi düzenliyor.
<i>Bana burada yardımcı olan özellikle de şu ($c.u + v \in U \cap W$) oldu yani bunu hatırlayamazdım. Hani şu aradaki işlemleri yapabilirsem bile. Şunları, kesişimi, olduğunu falan kesişim olduğunda ne yapmamız gerektiğini bilsem bile şunu hatırlayamazdım.</i>	Doğrudan ' $c.u + v \in U \cap W$ ' anahtar fikrinden yardım alarak yaptığını ifade ediyor.

Tablo 4.21'de de görüldüğü gibi; Ceyda, tamamlanması beklenen 7. Teoremin ispatında anahtar fikir olarak verilen $c.u + v \in U \cap W$ ifadesi yardımıyla önceden hatırlamadığı alt uzay olma şartını hatırlamış, ' $u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ ' anahtar fikrini yorumlayarak, eksik bırakılan adımları nasıl dolduracağı yönünde fikir geliştirmiş ve bu şekilde ispatı tamamlayabilmiştir. Ceyda ayrıca ispatı tamamlama

sürecinde, eksik bırakılan bölümlerden sonra verilen anahtar fikirlerden de yardım alma ve ispatı basamak basamak yazmada mülakatçının uyarılarına ihtiyaç duymuştur.

4.2.4. Umut'un Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu

Umut genel olarak; dağınık bir yapıya sahip olduğu için çözümlerini düzenli bir şekilde yazmakta zorluk yaşamıştır. Detaylara odaklı yapısını ispatları tamamlama sürecinde verilen bütün anahtar fikirleri detaylı olarak açıklayarak göstermiş, verilenleri açıklayarak anlamaya çalışmıştır. Ancak bu detaylara odaklı yapısı sebebiyle yaptığı açıklamalar çoğu ispatta onu ispatın ana temasından uzaklaştırmış ve ispatı tamamlamasına engel olmuştur.

4.2.4.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.1 $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

Umut: [Teoremin ifadesine göz gezdirdikten sonra] xN, yN, zN bölüm grubunun elemanları yani yan kümeleri olmak üzere; x, y, z elemanı G için demiş, bu takdirde, $(xN)[(yN)(zN)]$ Şimdi bölüm gurubu özelliklerinden $(xN)[(yN)(zN)]$ şeklinde yazdığımız zaman şu iki elemanı $[(yN)(zN)]$ birleştirip N olan, aynı birim eleman olduğu için, N de işlem yapmıyorduk yani... (g_1N) ile (g_2N) i işleme tabi tuttuğumuz da bu, $(g_1g_2)N$ i bize veriyordu. Onu göstermiş xN . Buradan aynı şartları aldığımızda, yine $x(yz)N$ olur, buradan da birleşme özelliğinden (xy) parantezi kaydırırsak $(xy)NzN$ olur. Buradan da $(xy)NzN = [(xN)(yN)].zN$ in işlemi olur. Yani burada yani burada bize birleşme özelliğinin olduğunu gösteriyor, grup olduğunu göstermemiz için, ilk önce birleşme özelliğini göstermemiz gerekiyor. Buradan da $[(xN)(yN)](zN)$ birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir. G nin birim elemanı e olsun. Her x elemanı xN bölüm grubunun elemanı için, yan küme olduğu için bölüm grubunun da elemanı olacaktır. $(g_1N)(g_2N)$ nin çıktısı $(g_1g_2)N$ olduğu için $(xN)(eN)$ için de aynı şekilde $(xe)N$ olacaktır. (xe) de e birim eleman olduğu için $= xN$ olarak çıkacaktır. Bunu sağdan bir de soldan göstermemiz gerekir. Yine $(eNxN)$ i almış, bunun da çıktısı $(ex)N$ olacaktır (ex) birim eleman olduğu xN olarak çıkacaktır. Sağdan ve soldan eşit olduğu için, burada da N nin, G/N nin birim elemanı olduğunu söylemiş. En son üçüncü adımda, ters elemanın varlığını göstermeliyiz. Yine her xN eleman G/N grubu

için, $(xN)^{-1}$, $(ab)^{-1}$ in biz $b^{-1}a^{-1}$ olduğunu biliyoruz. Buradan $(xN)^{-1}$ in de $x^{-1}N$ elemanı G/N var mıdır, ona bakacağız şimdi. Şimdi $(xN)(x^{-1}N)$ yine çıktı aynı olacaktır. $(xx^{-1})N$ olacaktır. Buradan da (xx^{-1}) de e olacağından N yi verdi yani. Bu demek ki (xN) in tersinin $((xN)^{-1})$ soldan tersinin $x^{-1}N$ olduğunu söylüyor bize. Aynı şekilde bir de sağdan aynı işlemi yaparsak; $(x^{-1}NxN)$ olacaktır. Bu da aynı şekilde çıktısı $(x^{-1}x)N$ olacaktır. $(x^{-1}x)$ de e olduğundan burada da N olacaktır, yani birimi verdiği için sağdan ve soldan her ikisini de sağladığı için burada xN in tersinin $((xN)^{-1} = x^{-1}N)$ olduğunu gösteririz. Dolayısıyla ters elemanı da gösterdiğimizde G/N bir grup olduğunu söyleriz.

Teorem.1: $(G, \cdot)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. $(x, y, z \in G \text{ için})$

Bu takdirde,

$$(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$$

$$= (xyz)N$$

$$= (xy)N zN = [(xN)(yN)] \cdot zN$$

$$= [(xN)(yN)](zN)$$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall (xN \in G/N \text{ için})$

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ var mıdır?

$$(xN)(x^{-1}N) = (xx^{-1})N = (x^{-1}N)(xN)$$

$$= N^e$$

$$(x^{-1}N)(xN) = N^e$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Şekil 4.24. Teorem.1'in ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 1. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.22.

Umut'un 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Şimdi bölüm gurubu özelliklerinden $(xN)[(yN)(zN)]$ şeklinde yazdığımız zaman şu iki elemanı $[(yN)(zN)]$ birleştirip N olan, aynı birim eleman olduğu için, N de işlem yapmıyorduk</i>	Burada N yi birim eleman gibi düşünüyor.
<i>(g_1N) ile (g_2N) i işleme tabi tuttuğumuz da bu, $(g_1g_2)N$ i bize veriyordu.</i>	Anahtar fikir olarak verilen $(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$ eşitliğini yorumluyor, normal alt grup tanımını kullanmıyor ama $[(yN)(zN)]$ ifadesinin $[(yz)N]$ şeklinde yazıldığı anahtar fikri açıklayarak işlemlerini yapıyor.
<i>Buradan da $(xy)NzN = [(xN)(yN)].zN$ in işlemi olur. Yani burada yani burada bize birleşme özelliğinin olduğunu gösteriyor, grup olduğunu göstermemiz için, ilk önce birleşme özelliğini göstermemiz gerekiyor</i>	Birleşme özelliğini işlemlerine uygulayabiliyor ancak normal alt grup ve bölüm grubu ilişkisini bilmiyor. Dolayısıyla anahtar fikirden yola çıkarak işlemleri yapmış oluyor.
<i>Her x elemanı xN bölüm grubunun elemanı için, yan küme olduğu için bölüm grubunun da elemanı olacaktır.</i>	Bölüm grubu tanımı biliyor.
<i>$(g_1N)(g_2N)$ nin çıktısı $(g_1g_2)N$ olduğu için $(xN)(eN)$ için de aynı şekilde $(xe)N$ olacaktır. (xe) de e birim eleman olduğu için $= xN$ olarak çıkacaktır. Bunu sağdan bir de soldan göstermemiz gerekir. Yine $(eNxN)$ i almış, bunda çıktısı $(ex)N$ olacaktır (ex) birim eleman olduğu xN olarak çıkacaktır. Sağdan ve soldan eşit olduğu için, burada da N nin, G/N nin birim elemanı olduğunu söylemiş...</i>	Anahtar fikir olarak verilen birim elemanın varlığının gösterildiği basamağı doğru bir biçimde analiz ediyor.
<i>Buradan $(xN)^{-1}$ in de $x^{-1}N$ elemanı G/N var mıdır, ona bakacağız şimdi</i>	Anahtar fikri okuyor ve yorumluyor
<i>En son üçüncü adımda, ters elemanın varlığını göstermeliyiz. (...) Bu demek ki (xN) in tersinin $((xN)^{-1})$ soldan tersinin $x^{-1}N$ olduğunu söylüyor bize. Aynı şekilde bir de sağdan aynı işlemi yaparsak, $(x^{-1}NxN)$ olacaktır. Bu da aynı şekilde çıktısı $(x^{-1}x)N$ olacaktır. $(x^{-1}x)$ de e olduğundan burada da N olacaktır, yani birimi verdiği için sağdan ve soldan her ikisini de sağladığı için burada (xN) in tersinin $(x^{-1}N)((xN)^{-1} = x^{-1}N)$ olduğunu gösteririz</i>	Anahtar fikir olarak verilen birim elemanın varlığının gösterildiği basamağı doğru bir biçimde analiz ettiği için ters elemanın varlığını eksiksiz bir şekilde ispat edebiliyor.

Tablo 4.22’de de görüldüğü gibi; Umut, birleşme özelliğinin varlığını araştırırken işlem yapmaya başlayabilmek ve yaptığı işlemlere devam edebilmek için bileşenin başlangıcında verilen anahtar fikri açıklamış ve işlemlerini de buradan yola çıkarak yapmıştır. Grup olma şartlarını işlemlerine uygulayabilmiş ancak bölüm grubunun tanımını bildiği halde normal alt grup ve bölüm grubu ilişkisini bilmediği için anahtar fikirden yola çıkarak işlemleri yaptığı düşünülmüştür. Umut, normal alt grup tanımını kullanmamış dolayısıyla anahtar fikirlerden yola çıkarak belirli bir çözüm geliştirmiştir. Ters elemanın varlığını araştırırken ise; anahtar fikir olarak verilen birim elemanın varlığının gösterildiği basamağı doğru bir biçimde analiz etmiş, kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek bu anahtar fikri iyi analiz ettiği için ispatı beklenen düzeyde tamamlayabilmiştir.

4.2.4.2. Teorem.2’nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.2 $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

Umut: Şimdi G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. Her a eleman G için Ha yan kümesi $\{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ ya göre, yani Ha , a çizgilerden $(\bar{a})$ oluşur. a çizgiye $(\bar{a})$ eşittir [teoremi okudu]. Eğer ki $a \equiv x \pmod{H}$ ya göre kongrüansına uyan x eleman G lerin kümesini a üstü $(\bar{a})$ ile gösterelim. Yani a üstü $(\bar{a})$ a nin denklik sınıfı olsun. H , G nin alt grubu olduğu için Ha a çizgiye $(\bar{a})$ eşit olduğundan dolayı a üstü $(\bar{a})$ Ha nin bir alt grup olur. Yani Ha lar, a çizgilerden $(\bar{a})$ oluştuğu için herhangi biri için her için, her biri için bunu denediyim zaman Ha a üstünün $(\bar{a})$ bir alt kümesi olur. Ve benzer olarak x eleman Ha alsak bu seferde. Yani hocam burada x eleman a için. Bunu her x elemanı için yaptığım zaman [$\forall x \in \bar{a}$ yazıyor], Ha nin bir alt grubu olur. Şurada da x elemanı Ha aldığım zaman bu da a çizgilerden $(\bar{a})$ meydana geldiği için her x eleman Ha lar olduğu zaman [$\forall x \in Ha$ yazıyor], a bunun, a çizgi $(\bar{a})$ bunun, Ha nin alt kümesi olur. Birden ve ikiden Ha nin, a çizgiye $(\bar{a})$ eşit olduğunu söyleyebiliriz. Her ikisi de Ha nin bir alt grubu olduğu için.

Şimdi ne yapmış hocam? [Aşağıda verilen ispatın kalan kısmını farkediyor] Burada bitirmemiş mi hocam? Burada söyleyemez miyiz? a , Ha ya ve H , a üstüne $(\bar{a})$ olduğunu.

Mülakatçı: Önce göstermen lazım... Olduğunu göstermeliyiz diyor.

Umut: Olduğunu göstermeliyiz diyor. Tamam pardon. Şimdi $x \in \bar{a}$ ise, yani $a \equiv x(\text{mod } H)$ ya göre. O zaman şunu [$ax^{-1} \in H$ 'i göstererek] yazabiliriz. Çünkü $x \in \bar{a}$ idi. [Başka bir yere $x \in \bar{a}$ yazıyor] a da x e denk olduğuna göre x aynı zamanda H nin da elemanı [$x \in \bar{a}$ 'nın altına ' $x \in H$ ' yazıyor] olduğunu söyleyebiliriz. Buradan x^{-1} in de H nin elemanı [$x^{-1} \in H$ ' yazıyor] olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde a nın da H nin elemanı [$a \in H$ ' yazıyor] olduğu söylersek, ax^{-1} de H nin elemanı yazılır. Ya da yan küme olarak düşünebiliriz. Yani , x^{-1} H nin elemanı ise aH olarak düşünüp, bunu da yan küme olduğu için H nin bir elemanı olduğunu söyleyebiliriz. H bir alt grup olduğundan, kapalılık özelliğine göre öyle bir h eleman H vardır ki , $ax^{-1} = h$ dır. Şimdi buradan verdiği özelliklerden, ax^{-1} her tarafı x ile sağdan işleme tabi tutarsam, Şimdi her tarafı sağdan x ile işleme tabi tutarsam, [Eksik bırakılan ilk kısma ' $ax^{-1}x = hx$ ' yazıyor] olur. Şu birleşme özelliğini kullandığımdan, grupta birleşme özelliğinden bana anahtar kelimeyi vermiş. O zaman şunun $(x^{-1}x)$ e olduğunu söylerim. O zaman $ax = hx$ olur. Şurada boşluk doldurma vermiş. Grupta birle.. birim elemandan [boş bırakılan kısma 'birim' yazıyor], ya da $a.x$ olarak dedik. $a^{-1}h$ yı elde etmem gerekir [üçüncü adımda verilen eşitliğe bakıyor]. O zaman şunu a^{-1} ile çarpacağız. [Önceden yaptığı işlemleri silerek] Burada hocam şu ilk önce şu sondan $a^{-1}h$ ile çarpmış bunu [üçüncü adımda anahtar fikir olarak verilen eşitliği göstererek]. O zaman ben de onu $a^{-1}h$ ile işleme tabi tutuyorum: $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$. Grupta birleşme özelliği olduğu için parantezine alıyorum şunu $(a^{-1}a)x^{-1} = a^{-1}h$, şurası $(a^{-1}a)$, e oluyor. O zaman $ex^{-1} = a^{-1}h$ elde ediyorum. Grupta birim elemanın varlığını da buluyorum [önceden hatalı olarak tamamladığı 'Grupa birim özelliğinden' ifadesini göstererek]. Buradan bu bana şunu garantiliyor: ex^{-1} 'i.

Mülakatçı: Birim elemanı aşağıda kullanmış ama sanki.

Umut: O zaman ters elemanın varlığından mı yapmış? Ters eleman hocam doğru çünkü niye a^{-1} ile işleme tabi tuttuğumuz için a^{-1} elemanı G dir yani, Bu da ters elemanın varlığından söz etmiş [$\text{'Ters elemanın varlığından söz etmiş'}$ diyor ancak; ' $\text{Grupa } a^{-1} \in G$ özelliğinden' yazıyor]

Mülakatçı: Ters eleman diyelim istersen, a^{-1} değil.

Umut: Ters eleman özelliğinden...[yazdığı ' $a^{-1} \in G$ 'yi silerek 'ters eleman' yazıyor] $ex^{-1} = a^{-1}h$ dır. Şimdi burada da birim elemanı olduğundan e birim olduğundan [boş

bırakılan ikinci kısma 'birim' yazıyor.] x^{-1} yani e ile x^{-1} işleme tabi tuttuğunda $x^{-1}o$ da $= a^{-1}h$ eşitliğin her iki yanının tersi alınır, tersini aldığım, bir elemanın tersinin tersi kendisine eşittir. $(a^{-1}h)$ nin da tersi $h^{-1}(a^{-1})^{-1} = h^{-1}a$ gelir. Yani burada $x = h^{-1}a$ olur. h eleman H ve H, G nin bir alt grubu olduğundan; boşluk doldurmaya ne getireceğiz? $[(x = h_0a)$ anahtar fikrini göstererek düşünüyor] Bunda $x = h_0a$ alınır mı denirse mi diyeceğiz; [Boş bırakılan kısma ' $x = h_0a$ ' yazıyor] denirse, $x = h_0a$ elemanı Ha olur; ki bu da bize a nın Ha nın bir alt kümesi olduğunu söyler. Tersine olarak, gerek ve yeter şartlı teorem olduğu için, hem gerek şartını, hem yeter şartını göstermemiz gerekir. Ters olarak y eleman Ha alınır, x eleman H vardır; öyle ki, $y = xa$; Ha yan küme olduğu için, y de yan küme şeklinde yazılabilir, $x.a$ şeklinde yazılabilir. Buradan yine grupta birleşme özelliğinden, yani ilk önce buraya [üçüncü adımda verilen ' $ya^{-1} = xe$ ' eşitliğini göstererek] bakıyorum y, a^{-1} işleme tabi tuttuğu için, her tarafı sağdan a^{-1} ile işleme tabi tutuyorum. [$'ya^{-1} = xaa^{-1}'$ yazıyor] Yine birleşme özelliğini kullan diyor; parantezi açıyorum [$'ya^{-1} = x(aa^{-1})'$ şeklinde paranteze alıyor]. Bu da aa^{-1} birim eleman vardır gruplarda e dir. [$'a.a^{-1} = e'$ yazarak siliyor]; Birim eleman şey, ters eleman vardır pardon hocam, yine karıştırdım. a^{-1} elemanı G , dolayısıyla ters eleman özelliğinden yine, ya^{-1} in e olduğundan $= x.e$ olduğunu söylerim. Grupta birim eleman vardır. Birim eleman olduğundan, birim elemanla x i işleme tabi tuttuğum zaman, x i verecektir. $ya^{-1} x e$ eşittir. Buradan $x = ya^{-1}$ olur. Yine a^{-1} , G nin bir elemanı olduğundan, bunu yine a gibi düşünürsek, ' ya ' olur. Şurada $y = xa$ idi. ' ya ' da, x de ' ya ' olabilir. O da eleman H olur. Yani xa şeklinde düşünürsek ya da y yi x_1 gibi alırsak, a^{-1} i de a gibi alırsak, xa, y nin elemanı ise, x_1a da y nin elemanı olduğunu söyleyebiliriz. Buradan ya^{-1} , H nin bir elemanı ise, aynı şekilde y nin ya^{-1}, H nin elemanıysa, H ya eşit olduğunu söyleyebiliriz. [$'ya^{-1} = H'$ yazıyor] Buradan eşit olduğuna göre mod sadece şunu [$'ya^{-1} = H(\text{mod})'$ yazıyor] h olarak alırsak $(\text{mod } H)$ ya göre [yazdığı ' $ya^{-1} = H(\text{mod})'$ ifadesindeki H yi h olarak yazıyor ve ifadeyi ' $ya^{-1} = h(\text{mod } H)$ ' biçimine getiriyor], a alsak [yazdığı ' $ya^{-1} = h(\text{mod } H)$ ' ifadesini ' $ya^{-1} = a(\text{mod } H)$ ' şeklinde düzenliyor]. Buradan da $\overline{ya^{-1}}$ in denk olacağını, $\bar{a}$ söyleyeceğiz, $(\text{mod } H)$ ya göre [$\overline{ya^{-1}} \equiv \bar{a}$ denkliğini yazıyor]. Veyahut da şuradan da $(ya^{-1} \in H)$ direk söyleyebiliriz. ya^{-1} H nin bir elemanı ise, $y a$ ya göre denktir, $(\text{mod } H)$ ya göre; veya y denk a ya ola... olmayabilir. $a \equiv y$ olabilir, $(\text{mod } H)$ ya göre. Buradan her iki durumda, y elemanı $\bar{a}$ olur. Ancak

ve ancak ikisini birlikte sağlaması için y nin a ya eşit olması gerekiyor $\bar{a}$ ye [Verilen ' $y \in \bar{a}$ ' yi 'eşit olması gerekir' şeklinde okuyor]. Bu da H nin, $\bar{a}$ nin, H nin bir alt grup olduğunu gösterir. 1 ve 2 den iki taraflı alt grup olduğu için a nın Ha ya eşit olduğunu söyleyebiliriz.

Mülakatçı: Alt grup mu, alt küme mi?

Umut: Alt küme, pardon.

Teorem.2: $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,
 $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim. Yani $\bar{a}$, a nın denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu dolayısıyla $\bar{a} \subset Ha$ ve $x \in Ha \subset \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall x \in Ha \quad \forall x \in \bar{a}$

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir altgrup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Buradan;

$x \in \bar{a}$
 $x \in H$
 $x^{-1} \in H$
 $a \in H$

$(a^{-1}ax^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$ (Grupta birleşme özelliğinden)
 $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ (Grupta ters alma özelliğinden)
 $ax^{-1} = a^{-1}h$ (Grupta birleşme özelliğinden)
 $x^{-1} = a^{-1}h$ olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alırsa
 $(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$ $(a^{-1}h)^{-1} = h^{-1}(a^{-1})^{-1}$
 $x = h^{-1}a$ olur.
 $(h \in H \text{ ve } H \leq G \text{ olduğundan } \dots x = h^{-1}a \dots \text{denirse})$
 $x = h^{-1}a \in Ha$ olur ki buradan $\bar{a} \subset Ha$ bulunur.....(1)

ii) Tersine olarak $y \in Ha$ alınırsa; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dir. Buradan;

$y a^{-1} = x a a^{-1}$ (Grupta birleşme özelliğinden)
 $y a^{-1} = x e$ (Grupta birleşme özelliğinden)
 $y a^{-1} = x$ (Grupta birleşme özelliğinden)
 $y a^{-1} = x$ olur. Buradan $x = y a^{-1} \in H$ bulunur.
 $y a^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \vee a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a}$ bulunur ki;
 $Ha \subset \bar{a}$ demektir.....(2)

(1) Ve (2) den $Ha = \bar{a}$ denir.

$y a^{-1} = x$
 $y a^{-1} \equiv \bar{a}$

Şekil 4.25. Teorem.2'nin ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 2. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.23'te yer verilmiştir.

Tablo 4.23.

Umut'un 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Şimdi G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Her a eleman G için H_a yan kümesi $\{x \in G: a \equiv x \pmod{H}\}$ ya göre, yani H_a, a çizgilerden $(\bar{a})$ oluşur. a çizgiye $(\bar{a})$ eşittir [teoremi okudu]. Eğer ki $a \equiv x \pmod{H}$ ya göre kongrüansına uyan x eleman G lerin kümesini a üstü $(\bar{a})$ ile gösterelim. (...) Birden ve ikiden H_a nın, a çizgiye $(\bar{a})$ eşit olduğunu söyleyebiliriz. Her ikisi de H_a nın bir alt grubu olduğu için.</i>	İspata başlamadan önce teoremin ifadesini okuyarak anahtar fikir olarak verilen ve iki kümenin eşitliği ile ilgili olan hipotezi ve hükmü belirleme basamaklarını detaylarıyla yorumluyor.
<i>Şimdi ne yapmış hocam? [Aşağıda verilen ispatın kalan kısmını farkediyor] Burada bitirmemiş mi hocam? Burada söyleyemez miyiz? a, H_a ya ve H a üstüne $(\bar{a})$ olduğunu...</i>	Herhangi bir işlem yapmaksızın yorumlarıyla yaptığı ispatın yeterli olduğunu düşünüyor.
<i>Olduğunu göstermeliyiz diyor. Tamam pardon. Şimdi $x \in \bar{a}$ ise, yani $a \equiv x \pmod{H}$ ya göre. O zaman şunu [$ax^{-1} \in H$ 'i göstererek] yazabiliriz. Çünkü $x \in \bar{a}$ idi. [Başka bir yere '$x \in \bar{a}$' yazıyor] a da x e denk olduğuna göre x aynı zamanda H nın da elemanı [$x \in \bar{a}$ 'nın altına '$x \in H$' yazıyor] olduğunu söyleyebiliriz. Buradan x^{-1} in de H nın elemanı [$x^{-1} \in H$ ' yazıyor] olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde a nın da H nın elemanı [$a \in H$ ' yazıyor] olduğu söylersek, ax^{-1} de H nın elemanı yazılır.</i>	Alt grup olma şartlarını kullanarak hipotezi kullanma basamağını açıklıyor.
<i>Ya da yan küme olarak düşünebiliriz. Yani, $x^{-1} H$ nın elemanı ise aH olarak düşünüp, bunu da yan küme olduğu için H nın bir elemanı olduğunu söyleyebiliriz.</i>	Yan küme tanımını kullanarak verilen anahtar fikirleri bütüncül bir yaklaşımla ele alıyor ve böylece hipotezi kullanma basamağını açıklıyor.
<i>H bir alt grup olduğundan, kapalılık özelliğine göre öyle bir h eleman H vardır ki, $ax^{-1} h$ dır. Şimdi buradan verdiği özelliklerden,</i>	Anahtar fikirlerden yola çıkıyor.
<i>Şu birleşme özelliğini kullandığımdan, grupta birleşme özelliğinden bana anahtar kelimeyi vermiş</i>	Anahtar fikirden yola çıkarak yapacağı işleme karar veriyor.
<i>Şurada boşluk doldurma vermiş. Grupta birle.. birim elemandan [boş bırakılan kısma 'birim' yazıyor], ya da $a.x$ olarak dedik. $a^{-1}h$ yı elde etmem gerekir [üçüncü adımda verilen eşitliğe bakıyor]. O zaman şunu a^{-1} ile çarpacağız.</i>	Üçüncü adımda anahtar fikir olarak verilen $ex^{-1} = a^{-1}h$ eşitliğinden yola çıkarak ispata nasıl başlayacağına ve ne yapması gerektiğine karar veriyor.

Tablo 4.23. (Devamı)

[Önceden yaptığı işlemleri silerek] Grupta hocam şu ilk önce şu sondan $a^{-1}h$ ile çarpmış bunu [üçüncü adımda anahtar fikir olarak verilen eşitliği göstererek]. O zaman ben de onu $a^{-1}h$ ile işleme tabi tutuyorum $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ Grupta birleşme özelliği olduğu için parantezine alıyorum şunu $(a^{-1}a)x^{-1} = a^{-1}h$, şurası $(a^{-1}a)$, e oluyor. O zaman $ex^{-1} = a^{-1}h$ elde ediyorum.	Üçüncü adımda anahtar fikir olarak verilen $ex^{-1} = a^{-1}h$ eşitliğinden yola çıkarak $ax^{-1} = h$'ın her iki tarafına da aynı yönden a^{-1} yazıyor ve eksik bırakılan ilk basamağı tamamlıyor. Ancak işlemlerini basamak basamak ilerletmede problem yaşıyor.
Grupta birim eleman varlığını da buluyorum [önceden hatalı olarak tamamladığı 'Grupta birim özelliğinden' ifadesini göstererek]. Buradan bu bana şunu garanti geliyor. ex^{-1}. [Mülakatçının uyarısı üzerine] O zaman ters elemanın varlığından mı yapmış? Ters eleman hocam doğru çünkü niye a^{-1} ile işleme tabi tuttuğumuz için a^{-1} elemanı G dir yani, Bu da ters elemanın varlığından söz etmiş ['Ters elemanın varlığından söz etmiş' demesine rağmen; 'Grupta $a^{-1} \in G$ özelliğinden' yazıyor].	Basamak basamak ilerlemediği ve önceden yazdığı hatalı ifadeyi silmediği için aslında grup özelliklerine ait kavramsal bilgileri sözlü olarak ifade etmesine rağmen yazarken hatalı yazmış ve bu durumu mülakatçının uyarısı ile düzeltilmiştir.
Ters eleman özelliğinden...[mülakatçının uyarısı üzerine yazdığı '$a^{-1} \in G$'yi silerek 'ters eleman' yazıyor.] $ex^{-1} = a^{-1}h$ dır. Şimdi burada da birim elemanı olduğundan e birim olduğundan [boş bırakılan ikinci kısma 'birim' yazıyor.]	Kavramsal bilgileri seçip kullanabiliyor.
x^{-1} yani e ile x^{-1} işleme tabi tuttuğunda $x^{-1}o$ da $= a^{-1}h$ eşitliğin her iki yanının tersi alınır, tersini aldığım, bir elemanın tersinin tersi kendisine eşittir. $(a^{-1}h)$ nın da tersi $h^{-1}(a^{-1})^{-1} = h^{-1}a$ gelir. Yani burada $x = h^{-1}a$ olur.	Anahtar fikir olarak verilen sonraki adımları açıklıyor.
h eleman H ve H, G nin bir alt grubu olduğundan; boşluk doldurmaya ne getireceğiz? [$(x = h_0a)$ anahtar fikrini göstererek düşünüyor] Bunda $x = h_0a$ alınır mı denirse mi diyeceğiz; [Boş bırakılan kısma '$x = h_0a$' yazıyor]	$(x = h_0a)$ anahtar fikri ile $(x = h^{-1}a)$ anahtar fikri arasında bağlantı kuramamış yalnızca $(x = h_0a)$ anahtar fikrinden yola çıktığı için '$h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' kısmını tamamlayamamıştır.
denirse, $x = h_0a$ elemanı Ha olur; ki bu da bize a nın Ha nın bir alt kümesi olduğunu söyler. Tersine olarak, gerek ve yeter şartlı teorem olduğu için, hem gerek şartını, hem yeter şartını göstermemiz gerekir.	İki kümenin eşitliğinin ispatını gerek ve yeter şart ispatı olarak düşünüyor.
Ters olarak y eleman Ha alınır, x eleman H vardır; öyle ki, $y = xa$; Ha yan küme olduğu için, y de yan küme şeklinde yazılabilir, x. a şeklinde yazılabilir.	Anahtar fikri okuyarak yan kümenin elemanlarının nasıl yazılması gerektiğini yorumluyor.

Tablo 4.23. (Devamı)

Buradan yine grupta birleşme özelliğinden, yani ilk önce buraya [üçüncü adımda verilen '$ya^{-1} = xe$' eşitliğini göstererek] bakıyorum y, a^{-1} işleme tabi tuttuğu için, her tarafı sağdan a^{-1} ile işleme tabi tutuyorum. [$ya^{-1} = xaa^{-1}$, yazıyor] Yine birleşme özelliğini kullan diyor; parantezi açıyorum [$ya^{-1} = x(aa^{-1})$] şeklinde paranmteze alıyorum].	Üçüncü adımda anahtar fikir olarak verilen $ya^{-1} = xe$ eşitliğinden yola çıkarak $y = xa$ nın her iki tarafına da aynı yönden a^{-1} yazıyor ve eksik bırakılan ilk basamağı tamamlıyor. Ancak işlemlerini basamak basamak ilerletmede problem yaşıyor.
Bu da aa^{-1} birim eleman vardır grupta e dir. [$a.a^{-1} = e$ yazarak sildi]; Birim eleman şey, ters eleman vardır pardon hocam, yine karıştırdım	i. şıkkının ispatında yaptığı hangi kavramsal bilginin hangi adımda kullanıldığına yönelik hatayı burada yapmıyor ancak basamak basamak yazmada problem yaşamaya devam ediyor.
a^{-1} elemanı G, dolayısıyla ters eleman özelliğinden yine, ya^{-1} in e olduğundan $= x.e$ olduğunu söylerim. Grupta birim eleman vardır. Birim eleman olduğundan, birim elemanla x i işleme tabi tuttuğum zaman, x i verecektir.	Kavramsal bilgileri doğru bir biçimde seçip kullanabiliyor.
Buradan $x = ya^{-1}$ olur. Yine a^{-1}, G nin bir elemanı olduğundan, bunu yine a gibi düşünürsek, 'ya' olur. Şurada $y = xa$ idi. 'ya' da, x de 'ya' olabilir. O da eleman H olur. Yani xa şeklinde düşünürsek ya da y yi x_1 gibi alırsak, a^{-1} i de a gibi alırsak, xa, y nin elemanı ise, x_1a da y nin elemanı olduğunu söyleyebiliriz	Eksik bırakılan adımlardan önce verilen $y = xa$ anahtar fikri ile sonra verilen $x = ya^{-1}$ anahtar fikri arasında bağlantı kurmaya çalışıyor.
Buradan ya^{-1}, H nin bir elemanı ise, aynı şekilde y nin ya^{-1}, H nin elemanıysa, H ya eşit olduğunu söyleyebiliriz. [$ya^{-1} = H$ yazıyor] Buradan eşit olduğuna göre mod sadece şunu [$ya^{-1} = H(\text{mod } H)$] yazıyor] h olarak alırsak $(\text{mod } H)$ ya göre [yazdığı '$ya^{-1} = H(\text{mod } H)$' ifadesindeki H yi h olarak yazıyor ve ifadeyi '$ya^{-1} = h(\text{mod } H)$' biçimine getiriyor], a alsak [yazdığı '$ya^{-1} = h(\text{mod } H)$' ifadesini '$ya^{-1} = a(\text{mod } H)$' şeklinde düzenliyor]. Buradan da ya^{-1} in denk olacağını, $\bar{a}$ söyleyeceğiz, $(\text{mod } H)$ ya göre [$ya^{-1} \equiv \bar{a}$] denklğini yazıyor]. Veyahut da şuradan da $(ya^{-1} \in H)$ direk söyleyebiliriz. ya^{-1} H nin bir elemanı ise, y, a ya göre denktir, $(\text{mod } H)$ ya göre; veya y denk a ya ola... olmayabilir. $a \equiv y$ olabilir, $(\text{mod } H)$ ya göre. Buradan her iki durumda, y elemanı $\bar{a}$ olur. Ancak ve ancak ikisini birlikte sağlaması için y nin a ya eşit olması gerekiyor $\bar{a}$ ye [Verilen '$ye\bar{a}$' yi 'eşit olması gerekir' şeklinde okuyor]. Bu da H nin, $\bar{a}$ nin, H nin bir alt grup olduğunu gösterir. 1 ve 2 den iki taraflı alt grup olduğu için a nın Ha ya eşit olduğunu söyleyebiliriz. [Mülakatçının sorusu üzerine] Alt küme, pardon.	İspatın tamamlandığı basamakta verilenleri açıklarken hatalı ifadeler kullanıyor.

Tablo 4.23'te de görüldüğü gibi; kavramsal bilgileri ve önceki bilgileri kullanarak tamamlanması beklenen 2. teoremin ispatında Umut, aktif bir şekilde anahtar fikirleri kullanmaktadır. İspatı anlamak ve yapacağı işlemlere karar verebilmek için anahtar fikirleri açıklama yoluna gitmiştir. Boşluklardan önce ve sonra verilen anahtar fikirleri bir bütün olarak düşünmüş ve bu şekilde nasıl bir yol izleyeceğine karar vermeye çalışmıştır. İlk bölümde anahtar fikir olarak verilen hipotezi kullanma basamağından yola çıkarak işlemlerini hatalı bir şekilde ilerletse de üçüncü adımda verilen anahtar fikir yardımıyla bu hatasını düzeltmiş; ii. adımın ispatına da üçüncü adımda anahtar fikir olarak verilen eşitliği kullanarak başlamıştır. Umut, ispatın i. adımında basamak basamak ilerlemediği için aslında grup özelliklerine ait kavramsal bilgileri sözlü olarak ifade etmesine rağmen yazarken hatalı yazmış ve bu durumu mülakatçının uyarısı ile düzeltmiştir. İspata yönelik verilen bütün anahtar fikirleri tek tek açıklamasına bütüncül bir yaklaşımla ispatı incelemeye çalışmasına rağmen; yalnızca verilen $(x = h_0a)$ anahtar fikrinden yola çıkarak boş bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' ifadesini tamamlayamamıştır. Dolayısıyla önceki adımlarda kavramsal bilgileri seçip kullanabilmesine rağmen burada grupta ters elemanın varlığına yönelik ifadeyi yazamamıştır. i şikkının ispatında yaptığı hangi kavramsal bilginin hangi adımda kullanıldığına yönelik hatayı ii şikkında tekrarlamamış ancak basamak basamak yazmada problem yaşamaya devam etmiştir. İspatın tamamlandığı basamakta verilen ifadeleri açıklarken Umut'un kullandığı hatalı ifadelerin dikkatsiz ve heyecanlı yapısından kaynaklandığı düşünülmektedir.

4.2.4.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.3 Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

Umut: Bir $(G, .)$ grubunun bir takım sonlu veya sonsuz alt gruplarının kesişiminin yine G nin bir alt grubudur [teoremi okudu]. $I = \{1,2,3, \dots\}$ bir indis olmak üzere, alt gruplarının kesişimi i eleman I dan, H olsun mesela. H_i ler olsun. i eleman I dan. Bu kesişimi G nin bir alt grubunun olduğunu göstereceğiz [$\cap_{i \in I} H_i < G$ yazıyor]. Bunun için a, b eleman H alalım. Kesişim tanımından, her i eleman I için...

Mülakatçı: H nerede? Sana sonradan H vermiş ya neye H demiş olabilir?

Umut: İlk önce, H nin G nin bir alt grubunun olduğunu göstermem gerekir ki, ondan sonra da kesişimlerinin alt grubu olduğunu göstermem lazım [$H < G$ yazıyor]. G grubunun bir takım alt gruplarının, bir takım alt grubu diyor ya hocam burada.

Mülakatçı: Hum. Tamam.

Umut: O yüzden yani H bir takım alt grubu olsun. G olsun. Bu ise bizden şey istiyor. Kesişim i eleman I nin yani şurayı yanlış yaptık aslında [Önceki yazdığı ' $\bigcap_{i \in I} H_i < G$ ' ifadesini siliyor]. Bunu atladık. H_i lerden olduğunu, bunun da G nin bir alt kümesi olduğunu gösterecek. [Eksik bırakılan bölümden farklı bir yere ' $H < G \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i < G$ ' yazdı.] E bunun için de a, b eleman H alalım diyor. H dan eleman alıyorum. Kesişim tanımından, her i eleman I için, $a \cdot b$ elemanı H_i dir. Çünkü a burada, mesela H_1 in elemanı ise, H_2 nin elemanı da b olur mesela, bu da $a \cdot b$ nin, H_i nin elemanları olduğunu gösterir. Alt grubun tanımından, her i eleman A için, mesela alt grup tanımında her x, y elemanı H_i için, $x \cdot y^{-1}$ elemanı H_i idi [diyerek ' $x, y \in H_i \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H_i$ ' yazıyor]. Bir tanımı. Bu da her i eleman I için. Yani $i =$ mesela I dan $1, 2$ için mesela, $a \cdot b^{-1}$ elemanı olmalı, H_1 kesişim H_2 mesela, örnek olarak verirse, olduğunu göstermeliyiz. Kesişim tanımından, a , H_i nin elemanıydı. b de H_i nin elemanıydı. H grup olduğundan grupta ters eleman varlığından, b^{-1} de nerenin elemanı olur? H nin elemanı olur. O zaman, $a \cdot b^{-1}$ de elemanı H olur. Öyleyse H alt grup G dir.

$$\textcircled{H < G}$$

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) altgruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

$$\textcircled{H < G} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i < G$$

..... olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a, b \in H_i$

→ Alt grubun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

$$\begin{array}{l} H_1 \quad H_2 \\ \textcircled{H_i} \\ b^{-1} \in H \\ \forall x, y \in H_i \\ x \cdot y^{-1} \in H_i \end{array}$$

Şekil 4.26. Teorem.3'ün ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 3. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.24'te yer verilmiştir.

Tablo 4.24.

Umut'un 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Bir $(G, .)$ grubunun bir takım sonlu veya sonsuz alt gruplarının kesişiminin yine G nin bir alt grubudur (teoremi okudu). $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis olmak üzere, alt gruplarının kesişimi i eleman I dan, H olsun mesela. H_i ler olsun. i eleman I dan. Bu kesişimi G nin bir alt grubunun olduğunu göstereceğiz [$\cap_{i \in I} H_i < G$ yazıyor]. Bunun için a, b eleman H alalım. Kesişim tanımından, her i eleman I için...	Teoremi okumasına rağmen sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerden faydalanmadan hipotezi ve hükmü belirlemeye çalışmış ancak ifadeyi eksik yazabilmiştir.
[Mülakatçının uyarısı üzerine] İlk önce, H nin G nin bir alt grubunun olduğunu göstermem gerekir ki, ondan sonra da kesişimlerinin alt grubu olduğunu göstermem lazım [$H < G$ yazıyor].	Mülakatçının uyarısı üzerine sonraki adımlarla teoremin ifadesini ilişkilendirmiş ancak teoremden geçen 'birtakım alt gruplarının' ifadesini gözardı ettiği için ilk önce H 'nin G 'nin bir alt grubu olduğunu sonra da H 'ların kesişimlerinin alt grup olduğunu göstermeyi planlamıştır.
G grubunun bir takım alt gruplarının, bir takım alt grubu diyor ya hocam burada. O yüzden yani H bir takım alt grubu olsun. G olsun. Bu ise bizden şey istiyor. Kesişim i eleman I nin yani şurayı yanlış yaptık aslında [Önceki yazdığı ifadeyi siliyor] (...) [Eksik bırakılan bölümden farklı bir yere ' $H < G \Rightarrow \cap_{i \in I} H_i < G$ ' yazdı]	Anahtar fikirleri ve teoremin ifadesini tam anlamıyla ilişkilendirememiş dolayısıyla hipotezi ve hükmü doğru bir düşünceyle oluşturamamıştır. İspatta belirtilenin aksine H 'ları alt grup, H_i 'leri de bu alt grupların kesişimi olarak ele almıştır.
E bunun için de a, b eleman H alalım diyor. H dan eleman alıyorum. Kesişim tanımından, her i eleman I için, a, b elemanı H_i dir. Çünkü a burada, mesela H_1 in elemanı ise, H_2 nin elemanı da b olur mesela, bu da a, b nin, H_i nin elemanları olduğunu gösterir	Hipotezi ve hükmü belirleme basamağını yanlış bir düşünceyle oluşturduğu için kesişimin tanımını da yanlış yorumluyor.
Alt grubun tanımından, her i eleman A için, mesela alt grup tanımında her x, y elemanı H_i için, $x.y^{-1}$ elemanı H_i idi [diyerek ' $x, y \in H_i \Rightarrow x.y^{-1} \in H_i$ ' yazıyor].	Alt grup tanımını biliyor.

Tablo 4.24. (Devamı)

<i>Bu da her i eleman I için. Yani $i=$ mesela I dan $1,2$ için mesela, $a.b^{-1}$ elemanı olmalı, H_1 kesişim H_2 mesela, örnek olarak verirsek, olduğunu göstermeliyiz</i>	Alt grup tanımını bildiği halde hipotezi ve hükmü belirleme basamağını yanlış bir düşünceyle oluşturuyor ve ispatı bütüncül bir yaklaşımla ele alamadığı için altgrup tanımını ifadeyle ilişkilendiremiyor.
<i>Kesişim tanımından, a, H_i nin elemanıydı. b de H_i nin elemanıydı. H grup olduğundan grupta ters eleman varlığından, b^{-1} de nerenin elemanı olur? H nin elemanı olur.</i>	‘$a, b \in H$’ dan ve ‘$a.b^{-1} \in H_i$’ den yola çıkması gerekirken son basamağı kendi oluşturduğu ancak teoremin ifadesine zıt olan mantıktan yola çıkarak açıklamaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır.

Tablo 4.24’te de görüldüğü gibi; hipotezi ve hükmü belirleyerek tamamlanması istenen 3. Teoremin ispatında Umut, sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerle teoremin ifadesini birbiriyle ilişkilendirememiş, mülakatçının uyarısı üzerine sonraki adımlarla teoremin ifadesini ilişkilendirmeye çalışmış ancak teoremde geçen ‘birtakım alt gruplarının’ ifadesini gözardı ettiği için ilk önce H ’nin G ’nin bir alt grubu olduğunu sonra da H ’lerin kesişimlerinin alt grup olduğunu göstermeyi planlamıştır. Anahtar fikirleri ve teoremin ifadesini tam anlamıyla ilişkilendiremediği için hipotezi ve hükmü doğru bir düşünceyle oluşturamamış, ispatta belirtilenin aksine H ’leri alt grup, H_i ’leri de bu alt grupların kesişimi olarak ele almıştır. Bu durumda matematiksel notasyon bilgisi eksikliği de göze çarpmaktadır. Hipotezi ve hükmü belirleme basamağını yanlış bir düşünceyle oluşturduğu için kesişimin tanımını da yanlış yorumlamıştır. Alt grup tanımını bildiği halde hipotezi ve hükmü belirleme basamağını yanlış bir düşünceyle oluşturmuş ve ispatı bütüncül bir yaklaşımla ele alamadığı için alt grup tanımını ifadeyle ilişkilendirememiştir. ‘ $a, b \in H$ ’ dan ve ‘ $a.b^{-1} \in H_i$ ’ den yola çıkması gerekirken son basamağı kendi oluşturduğu ancak teoremin ifadesine zıt olan mantıktan yola çıkarak açıklamaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır. Görüldüğü gibi Umut bu teoremin ispatında anahtar fikirleri etkili bir şekilde kullanamamıştır.

4.2.4.4. Teorem.4’ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.4 Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

Umut: Order G , k ; ($o(G) = k$) ve, ve k asal ise, G grubu bir devir grubudur [Teoremi okudu]. $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz. a eleman

G , gruptan bir eleman alalım. Eğer bu e den farklı olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim. Lagrange teoreminden sonlu bir grubun elemanının mertebesi, grubun mertebesini bölecekti. Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur [verilen anahtar fikirleri okudu]. O halde, eğer o zaman $o(H)$ nın ben ne olduğunu söylerim? Ya 1 olduğunu söylerim, ya da k ya eşit olduğunu söylerim. 1 ve kendisinden başka böleni yoksa bunları yazabilirim [$o(H) = 1, o(H) = k$ yazdı].

Eğer $o(H) = 1$ e eşitse bu $(H) = \{e\}$ dir. Bu da e tarafından üretilir [$\langle e \rangle = \{e\}$ yazdı]. Eğer $o(H) = k$ ise. Gruplarda, grubun mertebesi ile elemanın mertebesi eğer birbirine eşitse, o devirli ise G grubu, H alt grubu için de devirli olduğunu söylerim. Yani $o(G) = k$ eğer k eleman tarafından üretiliyorsa, buradan $o(H) = k$ da yine k tarafından üretilir derim [$o(G) = k \Rightarrow o(H) = k$ yazıyor]. Bu da H nın bir devir grubu olduğunu gösterir. [H bir devir grubu olduğunu gösterir. yazıyor] Olduğunu gösterir.

Teorem.4: $o(G) = k$ ve k asal ise G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ olmalıdır.

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur.

O halde;

$$\begin{aligned} o(H) &= 1, & o(H) &= k \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \langle e \rangle &= \{e\} & o(G) &= \langle k \rangle \\ & & o(H) &= \langle k \rangle \\ & & \Rightarrow & \text{bir devir grubu olduğunu gösterir.} \end{aligned}$$

Şekil 4.27. Teorem.4'ün ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 4. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.25'te yer verilmiştir.

Tablo 4.25.

Umut'un 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>O halde, eğer o zaman $o(H)$ nın ben ne olduğunu söylerim? Ya 1 olduğunu söylerim, ya da k ya eşit olduğunu söylerim. 1 ve kendisinden başka böleni yoksa bunları yazabilirim [$o(H) = 1, o(H) = k$ yazdı].</i>	Verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak ve asal sayı tanımını kullanarak ' $o(H) = 1, o(G) = k$ ' çıkarımında bulunuyor.
<i>Eğer $o(H)$ 1 e eşitse bu (H) e dir. Bu da e tarafından üretilir [$\{e\} = \langle e \rangle$' yazdı].</i>	Yapmış olduğu çıkarımla yukarıda verilen $a \neq e$ anahtar fikrini ilişkilendirememiştir.
<i>Eğer $o(H) = k$ ise. Grublarda, grubun mertebesi ile elemanın mertebesi eğer birbirine eşitse, o devirli ise G grubu, H alt grubu için de devirli olduğunu söylerim. Yani $o(G)$ eğer k eleman tarafından üretiliyorsa, buradan $o(H)$ da yine k tarafından üretilir derim. [$o(G) = \langle k \rangle \Rightarrow o(H) = \langle k \rangle$ yazıyor.]</i>	Söylediği cümle ile yazdığı ifade birbirinden farklı olduğu için 'elemanın mertebesi' ifadesiyle ' $o(H) = k$ 'yi kastettiği düşünülmüştür.
<i>Grublarda, grubun mertebesi ile elemanın mertebesi eğer birbirine eşitse, o devirli ise G grubu, H alt grubu için de devirli olduğunu söylerim.</i>	'Alt grup devirli ise G de devirlidir' yorumu yapması beklenen ispatta ' G devirli ise H alt grubu için de devirli olduğunu söylerim.' diyerek yanlış bir düşünce üretmiştir.
<i>Yani $o(G)$ eğer k eleman tarafından üretiliyorsa, buradan $o(H)$ da yine k tarafından üretilir derim. [$o(G) = \langle k \rangle \Rightarrow o(H) = \langle k \rangle$ yazıyor.] Bu da H nın bir devir grubu olduğunu gösterir. [H bir devir grubu olduğunu gösterir.' yazıyor.]</i>	Grubun mertebesi ve grubu üreten elemanı aynı gösterimle ele almış ayrıca düşündüklerini matematiksel notasyona uygun bir biçimde ifade edememiştir.

Tablo 4.25'te de görüldüğü gibi; Umut, verilen anahtar fikirleri ve asal asayı tanımını kullanarak tamamlanması beklenen Teorem.4'ün ispatında hem verilen anahtar fikirleri hem de asal sayı tanımını kullanarak bir takım çıkarımlarda bulunmuş, bu çıkarımları anahtar fikirlerle destekleyemediği dolayısıyla bütüncül bir yaklaşım sergileyemediği için ispatı tamamlayamamıştır. 'Alt grubu devirli ise G de devirlidir' yorumunun yapılması beklenen ispatta ' G devirli ise H alt grubu için de devirli

olduğunu söylerim.’ diyerek yanlış bir düşünce üretmiştir. Umut, grubun mertebesi ve grubu üreten elemanı aynı gösterimle ele almış ayrıca düşündüklerini matematiksel notasyona uygun bir biçimde ifade edememiştir. Daha önce kullandığı ‘ $o(H) = k$ ’ doğru yazımını sonraları ‘ $o(H) = \langle k \rangle$ ’ olarak hatalı bir şekilde yazmasının; Umut’un matematiksel notasyon bilgisi eksikliğinden değil de dikkatsiz ve dağınık olmasından kaynaklandığı düşünülmüştür.

4.2.4.5. Teorem.5’in ispatına yönelik bulgular

Teorem.5 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Umut: G bir grup ve a , G nin bir elemanı olsun. Her x eleman G için $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı φ_a , G den G ye G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ’ya G nin bir iç otomorfizması denir [Teoremi okudu]. İspatımızı yapalım. Her x, y eleman G için, ilk önce $\varphi_a(xy)$ ’nin bir otomorfizma olduğunu göstermek istiyorum. Buradan $(\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1})$ çıktısı şu x (Teoremin ifadesinde verilen eşitlikte ‘ axa^{-1} ’ ifadesindeki x) elemanını xy gibi düşünürsek. $a(xy)a^{-1}$ olur. Buradan $(a(xy)a^{-1})$ şu arada [‘ $a(xy)a^{-1}$ ’ ifadesinde (xy) nin ortasını göstererek ‘e’ yazıyor] bir birim eleman gibi düşünürsek, e gibi. $a(xx^{-1}x)$ olarak alırım. Öyle mi alıyorduk? Birim eleman gibi düşünüyorduk. $a(xx^{-1}xy)a^{-1}$ alsam, şurası [yazdığı ‘ $a(xx^{-1}xy)a^{-1}$ ’ ifadesinde ‘ $x^{-1}x$ ’ i göstererek] e olacağından, değişen bir şey olmaz. Ya da xx^{-1} mi alıyorduk? Hah şurada axa^{-1} [teoremin ifadesinde verilen eşitliği göstererek] a cinsinden alacağız. O zaman şurada, $a^{-1}a$ alırsam ben hocam [‘ $a(xx^{-1}xy)a^{-1}$ ’ ifadesini ‘ $a(xa^{-1}ay)a^{-1}$ ’ şeklinde düzenliyor], şu $a^{-1}a$ e olduğu için, bu $(a(xa^{-1}ay)a^{-1})$ değişmeyecektir. Birleşme özelliğini parantez kaydırarak, şöyle $(= (axa^{-1})(aya^{-1}))$ belirlerim. φ_a nın elemanları axa^{-1} lerden oluştuğu için, şu $((axa^{-1})) \varphi(x)$ olacaktır. Bu da $((aya^{-1})) \varphi(y)$ olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır [işlem basamaklarından sonra verilen anahtar fikrin ifadesini okudu].

$\varphi_a(xy) = \varphi(x), \varphi_a(x)$ ve $\varphi_a(y)$ olduğu için [işlem basamaklarından önce ve sonra verilen anahtar fikirleri göstererek ‘ $\varphi(x)$ ’ ve ‘ $\varphi(y)$ ’ yi ‘ $\varphi_a(x)$ ’ ve ‘ $\varphi_a(y)$ ’ olarak düzenledi] φ bir homomorfizmadır. Şimdi homomorfizma olduğunu gösterdik, bire-bir ve örten olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ ise, $\varphi_a(x)$ in çıktısı axa^{-1} ,

$\varphi_a(y)$ nin çıktısı da aya^{-1} olur. Buradan $x = y$ olduğunu göstermeliyiz. $axa^{-1} = aya^{-1}$ olduğundan her iki tarafını soldan a^{-1} ve sağdan a ile işleme tabi tutarsam $a^{-1}axa^{-1}a = a^{-1}aya^{-1}a$, $(a^{-1}a)e$, $(a^{-1}a)e$ olduğundan, $x = y$ elde edilir. O zaman φ_a bire-birdir. Örtten olduğunu göstermem için, değer kümesinden alacağım bir eleman için, her y eleman değer kümesi için, $\varphi_a(x)$ yani, eleman axa^{-1} olacak şekilde, yani değer kümesinden aldığım her y elemanı için, $\varphi(x) = y$ olacak şekilde bir x eleman G olduğunu göstermem gerekiyor. $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ in y ye eşit olacak şekilde bir x elemanını bulunabilir. Çünkü $axa^{-1} = y$ ise, her tarafı a nın, soldan a nın tersi ve sağdan a ile işleme tabi tutarsam, $a^{-1}axa^{-1}a = a^{-1}ya$, $x = a^{-1}ya$ elde edilir. O zaman φ_a örtendir. Böyle bir x elemanı tanım kümesinden bulduğumuz için, örtten olduğunu gösterir bize. Şu halde hem bire-bir, hem örtten, bir de homomorfizma olduğu için, G bir otomorf.., şeydi izomorfizmadır. Ama G de değer kümesi ve tanım kümesi eşit olduğundan, aynı zamanda bu otomorfizmadır. Ama hocam iç otomorfizmasıdır denir diyor ya, bunu göstermemiş. Sadece otomorfizma olduğunu göstermiş.

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$ nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1} = a(xa^{-1}ay)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır.

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$$\exists x \in G \text{ bulunabileceğinden, } \varphi_a \text{ örtten de olur. Şu halde } \varphi_a \text{ } G \text{ nin bir otomorfizmasıdır.}$$

$a^{-1}axa^{-1}a = a^{-1}aya^{-1}a$

$x = a^{-1}ya$

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = y$

Şekil 4.28. Teorem.5'in ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 5. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.26'da yer verilmiştir.

Tablo 4.26.

Umut'un 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Her x, y eleman G için, ilk önce $\varphi_a(xy)$ 'nin bir otomorfizma olduğunu göstermek istiyorum. Buradan $(\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1})$ çıktısı şu x (Teoremin ifadesinde verilen eşitlikte ' axa^{-1} ' ifadesindeki x) elemanını xy gibi düşünürsek. $a(xy)a^{-1}$ olur.	Verilen anahtar fikri okuyor ve teoremin ifadesinde verilen eşitlikten yola çıkarak anahtar fikri açıklıyor.
Buradan $(a(xy)a^{-1})$ şu arada [$'a(xy)a^{-1}'$ ifadesinde (xy) nin ortasını göstererek 'e' yazıyor] bir birim eleman gibi düşünürsek, e gibi. $a(xx^{-1}x)$ olarak alırım. Öyle mi alıyorduk? Birim eleman gibi düşünüyorduk. $a(xx^{-1}xy)a^{-1}$ alsam, şurası [yazdığı ' $a(xx^{-1}xy)a^{-1}$ ' ifadesinde ' $x^{-1}x$ ' i göstererek] e olacağından, değişen bir şey olmaz. Ya da xx^{-1} mi alıyorduk? Hah şurada axa^{-1} [teoremin ifadesinde verilen eşitliği göstererek] a cinsinden alacağız. O zaman şurada, $a^{-1}a$ alırsam ben hocam [$'a(xx^{-1}xy)a^{-1}'$ ifadesini ' $a(xa^{-1}ay)a^{-1}$ ' şeklinde düzenliyor], şu $a^{-1}a$ e olduğu için, bu $(a(xa^{-1}ay)a^{-1})$ değişmeyecektir.	$(a(xx^{-1}xy)a^{-1})$ hatalı bir şekilde yaptığı işlemleri teoremin ifadesinde verilen ' $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ', eşitliğini göstererek $a(xa^{-1}ay)a^{-1}$ şeklinde düzenliyor. Grupta birim eleman özelliğini $(axa^{-1})(aya^{-1})$ ye ulaşma amacına hizmet edecek şekilde uygulayabiliyor.
Birleşme özelliğini parantez kaydırarak, şöyle $(= (axa^{-1})(aya^{-1}))$ belirlerim. φ_a nın elemanları axa^{-1} lerden oluştuğu için, şu $((axa^{-1})) \varphi(x)$ olacaktır. Bu da $((aya^{-1})) \varphi(y)$ olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır [işlem basamaklarından sonra verilen anahtar fikrin ifadesini okudu].	Grupa birleşme özelliğini kullanarak işlemlerini ilerletiyor ve $(axa^{-1})(aya^{-1})$ i elde ediyor.
$\varphi_a(xy) = \varphi(x)$, $\varphi_a(x)$ ve $\varphi_a(y)$ olduğu için φ bir homomorfizmadır.	İşlem basamaklarından önce ve sonra verilen anahtar fikirlerle bulduğu sonucu ilişkilendirerek önceden yazdığı ' $\varphi(x)$ ' ve ' $\varphi(y)$ ' yi ' $\varphi_a(x)$ ' ve ' $\varphi_a(y)$ ' olarak düzenliyor.
$\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ ise, $\varphi_a(x)$ in çıktısı axa^{-1} , $\varphi_a(y)$ nin çıktısı da aya^{-1} olur. Buradan $x = y$ olduğunu göstermeliyiz (...) Örtlen olduğunu göstermem için, değer kümesinden alacağım bir eleman için, her y eleman değer kümesi için, $\varphi_a(x)$ yani, eleman axa^{-1} olacak şekilde, yani değer kümesinden aldığım her y elemanı için, $\varphi(x) = y$ olacak şekilde bir x eleman G olduğunu göstermem gerekiyor (...)	Bire-birlik ve örtlenliğin araştırıldığı anahtar fikirleri işlemler yaparak açıklıyor.
Şu halde hem bire-bir, hem örtlen, bir de homomorfizma olduğu için, G bir otomorf., şeydi izomorfizmadır. Ama G de değer kümesi ve tanım kümesi eşit olduğundan, aynı zamanda bu otomorfizmadır. Ama hocam iç otomorfizmasıdır denir diyor ya, bunu göstermemiş. Sadece otomorfizma olduğunu göstermiş.	Otomorfizm, izomorfizm ve iç otomorfizm kavramlarına ait özellikleri tam anlamıyla bilmiyor yalnızca teoremin ifadesinden ve ispattan yola çıkarak bir yorum yapmaya çalışıyor.

Tablo 4.26’da da görüldüğü gibi; Umut, tamamlanması beklenen Teorem.5’in ispatında teoremin ifadesinde verilen eşitlikten yola çıkarak verilen $x, y \in G$ ve $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$ anahtar fikirlerini açıklamış ve bu şekilde ispata başlamıştır. Hatalı bir şekilde başlattığı işlemlerini teoremin ifadesinde verilen ‘ $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ’ eşitliği yardımıyla yeniden düzenlemiş ve grupta birim eleman ile birleşme özelliklerini $(axa^{-1})(aya^{-1})$ ye ulaşma amacına hizmet edecek şekilde uygulayabilmiştir. İşlem basamaklarından önce ve sonra verilen anahtar fikirlerle bulduğu sonucu ilişkilendirerek hatalarını ortadan kaldıracıkmıştır. İspat tamamlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayan işlemlerini doğru bir biçimde ortaya koyan Umut’un otomorfizm, izomorfizm ve iç otomorfizm kavramlarına ait özellikleri tam anlamıyla bilmediği yalnızca teoremin ifadesinden ve ispattan yola çıkarak yorum yapmaya çalıştığı görülmüştür.

4.2.4.6. Teorem.6’nın ispatına yönelik bulgular

Teorem.6 S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

Umut: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de, S' alt grup S olacak şekilde, V vektör uzayının bir alt kümesi ise, S' de lineer bağımsızdır demiş [teoremi okudu]. Şimdi lineer bağımsızlık tanımını kullanarak c_i eleman R ve x_i eleman S lerden oluşacak şekilde $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots + c_i \cdot x_i$ lerden oluşuyor, bu ifadenin 0 a eşit [$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$ yazdı], eğer bütün c_1, c_2, c_3 ler 0 a eşitse c_n ler lineer bağımsızdır; ancak bir tanesi için eğer 0 dan farklı bir c_i için, bu lineer bağımlıdır. Sisteminin lineer bağımsız olabilmesi için tüm c_i lerin 0 olması gerekir. c_1, c_2, c_3, c_4 hepsi birden c_n hepsi birden 0 olması gerekir. O yüzden $c_i = 0$ ve $i; 1$ den n e kadar olmalıdır demiş. Daha sonra S' kümesi S nin bir alt kümesi. S nin bir alt kümesi olduğundan [$S' \subset S$ yazdı], bazı x_i ler yani şuradaki (S) x_i ler bazı x_i ler, ayrıyeten bu kapsadığı için S' nü, bunun (S') da elemanı olacaktır. Dolayısıyla x_i den v_i ye bir fonksiyon tanımladığım zaman buna göre; yine $i = 1, 2, 3 \dots n$ e kadar gitsin. $v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + \dots + v_n \cdot x_n = 0$ [boş bırakılan ikinci kısma ' $v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + \dots + v_n \cdot x_n = 0$ ' eşitliğini yazdı] olması için yine v_i lerin hepsinin birden 0 olması gerekir. Lineer bağımsız olması için. Eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri, S nin

elemanları olduğundan yani v_i ler S nin elemanı olduğundan [$v_i \in S$ yazıyor] v_i vektörleri lineer bağımsızdır. S nin niye elemanları? Çünkü v_i ler x_i leri, v_i ye götürüyor [$x_i \rightarrow v_i$ yazıyor]. Şuradan x_i alırsam, bunu (x_i) $f(x_i)$ ye götürür v_i de. Bu (x_i) aynı zamanda S' nün de elemanı idi. S' de x_i yi yine $f(x_i)$ ye götürecek. O yüzden v_i vektörleri aynı zamanda S de S' nü kapsadığı için aynı şekilde bu x_i yi $f(x_i)$ ye götürecektir. v_i vektörlerinin elemanı olur. Yani S , burada v_i vektörleri S nin elemanları olur; x_i ler. Çünkü $f(x_i)$ şeklindedir. Dolayısıyla elemanı olur. Buradan da lineer bağımsız olduğunu söyleriz.

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_i x_i = 0$$

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.

Buna göre:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n = 0 \quad S' \subset S$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

$x_i = f(x_i)$

$v_i \in S$

$x_i \rightarrow f(x_i)$ $x_i \rightarrow v_i$

x_i $f(x_i)$

Şekil 4.29. Teorem.6'nın ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 6. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.27'de yer verilmiştir.

Tablo 4.27.

Umut'un 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Şimdi lineer bağımsızlık tanımını kullanarak c_i eleman R ve x_i eleman S lerden oluşacak şekilde $c_1.x_1 + c_2.x_2 + c_3.x_3 + \dots + c_i.x_i$ lerden oluşuyor, bu ifadenin 0 a eşit [$c_1.x_1 + c_2.x_2 + c_3.x_3 + \dots + c_i.x_i = 0$ yazdı], eğer bütün c_1, c_2, c_3 ler 0 a eşitse c_n ler lineer bağımsızdır; ancak bir tanesi için eğer 0 dan farklı bir c_i için, bu lineer bağımlıdır.</i>	$c_i \in R$ ve $x_i \in S$ ile S kümesinin lineer bağımsız olarak verildiği anahtar fikirler yardımıyla $c_1.x_1 + c_2.x_2 + c_3.x_3 + \dots + c_i.x_i = 0$ eşitliğini yazıyor.
<i>eğer bütün c_1, c_2, c_3 ler 0 a eşitse c_n ler lineer bağımsızdır; ancak bir tanesi için eğer 0 dan farklı bir c_i için, bu lineer bağımlıdır.</i>	Lineer bağımsızlık tanımını ifade edebiliyor.
<i>Sisteminin lineer bağımsız olabilmesi için tüm c_i lerin 0 olması gerekir. c_1, c_2, c_3, c_4 hepsi birden c_n hepsi birden 0 olması gerekir. O yüzden $c_i = 0$ ve $i; 1$ den n e kadar olmalıdır demiş. Daha sonra S' kümesi S nin bir alt kümesi. S nin bir alt kümesi olduğundan [$S' \subset S$ yazdı], bazı x_i ler yani şuradaki (S) x_i ler bazı x_i ler, ayrıyeten bu kapsadığı için S' nü, bunun (S') da elemanı olacaktır. Dolayısıyla x_i den v_i ye bir fonksiyon tanımladığım zaman buna göre</i>	Anahtar fikri okuyor ve yorumluyor.
<i>yine $i = 1, 2, 3 \dots n$ e kadar gitsin. $v_1.x_1 + v_2.x_2 + \dots + v_n.x_n = 0$ [boş bırakılan ikinci kısma '$v_1.x_1 + v_2.x_2 + \dots + v_n.x_n = 0$' eşitliğini yazdı] olması için yine v_i lerin hepsinin birden 0 olması gerekir.</i>	Anahtar fikir olarak verilen ' S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.' ifadesinde $x_i \rightarrow v_i$ yi yanlış yorumlayarak v_i leri katsayı olarak düşündüğü için eşitliği doğru yazamıyor.
<i>(...) v_i vektörleri lineer bağımsızdır. S nin niye elemanları? Çünkü v_i ler x_i leri, v_i ye götürüyor(...)</i>	İkinci eşitlikten sonra verilen anahtar fikri anlamaya ve açıklamaya çalışıyor. $x_i \rightarrow v_i$ yi şekilsel olarak biliyor ancak bu ifadeyi ispata nasıl uygulayacağını bilmiyor.
<i>Şuradan x_i alırsam, bunu (x_i) $f(x_i)$ ye götürür v_i de. Bu (x_i) aynı zamanda S' nün de elemanı idi. S' de x_i yi yine $f(x_i)$ ye götürecektir. O yüzden v_i vektörleri aynı zamanda S de S' nü kapsadığı için aynı şekilde bu x_i yi $f(x_i)$ ye götürecektir. v_i vektörlerinin elemanı olur. Yani S, burada v_i vektörleri S nin elemanları olur; x_i ler. Çünkü $f(x_i)$ şeklindedir. Dolayısıyla elemanı olur. Buradan da lineer bağımsız olduğunu söyleriz.</i>	Anahtar fikre açıklama getirmeye ve dolayısıyla yazdığı ikinci eşitlikle anahtar fikri ilişkilendirmeye çalışıyor ancak ispatta v_i nin işlevini anlayamadığı için ispatı tamamlayamıyor.

Tablo 4.27’de de görüldüğü gibi; Umut, tamamlanması beklenen Teorem.6’nın ispatında, anahtar fikir olarak verilen ‘ $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ ile S kümesinin lineer bağımsız olduğundan’ ifadesini etkin bir biçimde kullanarak ilk boşluğu doldurabilmesine ve lineer bağımsızlık tanımını ifade edebilmiş olmasına rağmen; ‘ $x_i \rightarrow v_i$ ’ ifadesini ispata nasıl uygulayacağını bilemeyerek yanlış yorumlamış dolayısıyla her ne kadar sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerle bir bağlantı kurmaya çalışsa da bunu başaramamış ve ispatı tamamlayamamıştır. Umut, eksik bırakılan ilk adımda $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$ eşitliğinde $c_n \cdot x_n$ yazması gerekirken $c_i \cdot x_i$ yazmış ancak eksik bırakılan ikinci adımda bu hatayı yapmadığı için bu durumun dikkatsizlik kaynaklı olduğu düşünülmüştür.

4.2.4.7. Teorem.7’nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

Umut: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt kümesi olmak üzere, U kesişim W kümesinin V nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz [teoremi okudu]. u, v elemanı U kesişim W için u, v nin elemanı U kesişim W ; ve c elemanı F cismi için, $c \cdot u$ nun elemanı U kesişim W olduğunu [eksik bırakılan kısımdan farklı bir bölümde ‘ $u, v \in U \cap W$ için $u, v \in U \cap W$ ’ ve ‘ $c \in F$ için $c \cdot u \in U \cap W$ ’ ifadelerini yazdı] veya ikisinin birleşmiş hali; u, v elemanı U kesişim W olsun. c eleman F cisim denilsin. $c \cdot u + v$ nin U kesişim W nin elemanı olduğunu göstermeliyiz [Hipotezi ve hükmü belirleme basamağını okudu]. u, v elemanı U , kesişimin tanımından ve u, v elemanı W olur. Her ikisinin de elemanı olur. u, v eğer kesişimin elemanı ise hem U nun elemanıdır hem W nin elemanıdır. Buradan c elemanı F için, F cismi için, $c \cdot u$ elemanı U kesişim W ve $c \cdot u$ elemanı, U ve $c \cdot u$ elemanı W dir [‘ $c \in F$ için $c \cdot u \in U \wedge c \cdot u \in W$ ’ yazdı]. Çünkü c bir cisim olduğu için u elemanı U kesişim W olduğu için, hem u elemanı U , u elemanı W , $c \cdot u$ ile çarptığımız zaman, skaler ile çarptığımız zaman, bunlar $(c \cdot u)$ da U nun ve W nin elemanları olacaktır. $c \cdot u$ ve v elemanıdır U ve $c \cdot u$ ile v elemanıdır W ise [‘ $c \cdot u, v \in U \wedge c \cdot u, v \in W$ ’ yazdı] hem $c \cdot u$ elemanı, hem v elemanı ise iki elemanın toplamı da yine bu kümededir. Dolayısıyla $c \cdot u + v$ elemanı U , $c \cdot u + v$ elemanı W olur. Buradan da $c \cdot u + v$ nin elemanı U kesişim W olduğunu söyleriz. Veyahut da hem

diğer yoldan, hem $u \cdot v$ nin elemanı U kesişim W olduğunu gösterip, $c \cdot u$ nun da skalerle çarpımında yine kapalı olduğunu, yani çarpmaya göre kapalı, hem skalerle çarpma işlemine göre kapalı olduğunu göstererek de söyleyebilirdik.

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.
 $c \cdot u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U, \wedge u, v \in W$
 $c \in F$ tsm $c \cdot u \in U \wedge c \cdot u \in W$
 $c \cdot u, v \in U \wedge c \cdot u, v \in W$
 $c \cdot u + v \in U \wedge c \cdot u + v \in W$ ise
 $c \cdot u + v \in U \cap W$ dir.

$u, v \in U \cap W$ tsm
 $u, v \in U \cap W$
 $c \in F$ tsm
 $c \cdot u \in U \cap W$

Şekil 4.30. Teorem.7'nin ispatına yönelik Umut'un çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 7. Teoremin ispatına yönelik Umut'un çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.28'de yer verilmiştir.

Tablo 4.28.

Umut'un 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>u, v elemanı U kesişim W için u, v nin elemanı U kesişim W; ve c elemanı F cismi için, c, u nun elemanı U kesişim W olduğunu [Eksik bırakılan kısımdan farklı bir bölümde 'u, v ∈ U ∩ W için u, v ∈ U ∩ W' ve 'c ∈ F için c, u ∈ U ∩ W' ifadelerini yazdı] veya ikisinin birleşmiş hali; u, v elemanı U kesişim W olsun. c eleman F cisim denilsin. c, u + v nin U kesişim W nin elemanı olduğunu göstermeliyiz [Hipotezi ve hükmü belirleme basamağını okudu]</i>	Teoremin ifadesinden ve hipotezi ve hükmü belirleme basamağında verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak ispatı nasıl yapacağı hakkında yorum yapıyor.
<i>u, v elemanı U, kesişimin tanımından, ve u, v elemanı W olur. Her ikisinin de elemanı olur. u, v eğer kesişimin elemanı ise, hem U nun elemanıdır hem W nin elemanıdır</i>	$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ anahtar fikrini kesişimin tanımını kullanarak yorumluyor.
<i>Buradan c elemanı F için, F cismi için, c, u elemanı U kesişim W ve c, u elemanı, U ve c, u elemanı W dir ['c ∈ F için cu ∈ U ∧ cu ∈ W' yazdı]. Çünkü c bir cisim olduğu için u elemanı U kesişim W olduğu için, hem u elemanı U, u elemanı W, c, u ile çarptığımız zaman, skaler ile çarptığımız zaman, bunlar (c, u) da U nun ve W nin elemanları olacaktır. c, u ve v elemanıdır U ve c, u ile v elemanıdır W ise ['cu, v ∈ U ∧ cu, v ∈ W' yazdı.] hem c, u elemanı, hem v elemanı ise iki elemanın toplamı da yine bu kümededir. Dolayısıyla c, u + v elemanı U, c, u + v elemanı W olur. Buradan da c, u + v nin elemanı U kesişim W olduğunu söyleriz.</i>	Eksik bırakılan bölümleri tamamlarken, yalnızca kesişimin tanımını esas alarak alt uzay kavramına yönelik bilgileri gözden kaçırdığı için ispatı eksiksiz bir biçimde tamamlayamıyor.

Tablo 4.28'de de görüldüğü gibi; Umut, tamamlanması beklenen Teorem.7'nin ispatında, teoremin ifadesinden ve anahtar fikir olarak verilen hipotez ve hükümden yola çıkarak ispatı nasıl yapacağına ilişkin yorum yapmış ve böylelikle ispata başlamıştır. Eksik bırakılan bölümleri tamamlarken, yalnızca kesişimin tanımını esas alarak alt uzay kavramına yönelik bilgileri gözden kaçırdığı için ispatı eksiksiz bir şekilde tamamlayamamıştır.

4.2.5. Hasan'ın Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumu

Hasan genel olarak; sessiz bir yapıya sahip olmamasına rağmen bazı sorularda sesli düşünmekte zorluk yaşamış bu yüzden mülakatçı Hasan'ı sesli düşünmeye teşvik etmek ve düşüncelerini açığa çıkarabilmek amacıyla sık sık soru sormak durumunda kalmıştır.

4.2.5.1. Teorem.1'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.1 $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

Hasan: *Bunu şimdi şunu göstereceğiz. Hani G/N olduğunu göstereceğiz. Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir. Evet. [Düşünüyor]*

Mülakatçı: *Nasıl gösteririz? Ne düşünüyorsun?*

Hasan: *Yani şimdi buraya [son adımda verilen ' $[(xN)(yN)](zN)$ ' anahtar fikrini gösteriyor] ulaşmamız için değişiklikler yapmamız gerekiyor. x indis y, z . Yani bu bir dönüşümle yapıliyordu. Hani normal alt grup dönüşümü vardı galiba. Hani şu şekildeydi. $(yN).(zN) = (yzN)$ gibi bir dönüşümü vardı herhalde. Ondan ötürü o şekilde yapıyorduk. Bunu nasıl yaparız bu... Hem normal alt grupsa, yani $Nx = xN$ şeklinde bir eşitliği vardı ama. Yine belki onu kullanabiliriz tekrar burada. $= Nx.(yz)N$ şeklinde yazabiliriz.*

Mülakatçı: *Alt basamağa bak belki o yardımcı olur sana. Nereden, nereye girmiş? Nasıl yapabiliriz?*

Hasan: *Yani zN i dışarıya bırakmak istiyoruz. Hani birleşme özelliğini gösteriyoruz. Bunu nasıl gösterebiliriz tam olarak? Geri gitsek şöyle yapacaktık. $[(xy)N]$ şeklinde burası da (zN) oluyordu [son adımdan yola çıkarak ' $[(xy)N](zN)$ ' yazdı] O zaman. Hah anladım. Buradakine [ilk adımda verilen ' $(xN)[(yN)(zN)]$ ' anahtar fikrini göstererek] benzeteceğiz yani şu şekilde. $[(xyz)N]$ şeklinde yazacağız. Herhalde bunu. Yani tersten gittiğimizde bu şekilde gelecek. Bir tek kalan yer şurası [daha önce ' $Nx.(yz)N$ ' yazdığı ikinci adımı silerek] Burayı nasıl yapacağız? Him orayı da, orayı da yine benzer şekilde yapabiliriz. Yani bunu (xN) mesela t , işte bunu (yz) mesela k şeklinde alıp tek bir N im varmış gibi, tkN olacak. t dediğimiz zaten x , diğeri de yz , o zaman $[(xyz)N]$ olacak. Yani aynısını elde etmiş olduk burada.*

Mülakatçı: *Tamam. Ne yardımcı oldu sana burada?*

Hasan: *Bana yardımcı olan şeydi. Şuradaki özellik [Ayrıca yazmış olduğu $(yN)(zN) = (yzN)$ ’i göstererek] Yani biraz önce de yazdığım özellik. Hem bu hem de buradan [Son adımda verilen $[(xN)((yN)(zN))$ ’ anahtar fikrini göstererek] geri gitmek yardımcı oldu birazcık.*

Mülakatçı: *Tamam devam edelim.*

Hasan: *Birim elemanı. Evet. Hı hı. Birim elemandır. Alta geçiyorum o zaman [Birim elemanın varlığını araştırıldığı anahtar fikri okuyor].*

Mülakatçı: *Neyi göstermeye çalışmış?*

Hasan: *Şimdi ters elemanı göstermeye çalışıyor. Hani grup olduğunu göstermek için. Birim elemanı var. Bunu da şu şekilde yazabiliyorduk. $(x \cdot x^{-1})N = eN$ şeklinde yazabiliriz. Bu da N ye eşit zaten. N zaten yukarıda bulmuştuk, birim elemanı. E benim elemana gidiyorsa $(x^{-1}N)$ ters olacak. Yani ters eleman olacak. Buraya da şunu yazabiliriz. $(x^{-1})N$ eleman G/N , yani ters elemanın varlığı.*

Teorem.1: $(G, \cdot)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. ($x, y, z \in G$ için)

Bu takdirde,

$$\begin{aligned} (xN)[(yN)(zN)] &= \overset{x \cdot y}{xN}[(yz)N] \\ &= \overset{t}{(xyz)N} \\ &= \overset{k}{(xy)N}(zN) \\ &= [(xy)N](zN) \\ &= [(xN)(yN)](zN) \end{aligned}$$

$$\overset{x \cdot y}{(yN)} \cdot (zN) = (yzN)$$

$x(x) = xN$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ var mıdır?

$$\begin{aligned} (xN)(x^{-1}N) &= (xx^{-1})N \\ &= eN \\ &= N \end{aligned}$$

$x^{-1}N \in G/N$ ters elemanı varlığı

olduğu görülür.

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Şekil 4.31. Teorem.1'in ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 1. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.29.

Hasan'ın 1. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Yani şimdi buraya [son adımda verilen $'[(xN)(yN)](zN)'$ anahtar fikrini gösteriyor] ulaşmamız için değişiklikler yapmamız gerekiyor.</i>	Son adımda verilen $[(xN)(yN)](zN)$ anahtar fikrini yorumluyor.
<i>Hani normal alt grup dönüşümü vardı galiba. Hani şu şekildeydi. $(yN).(zN) = (yzN)$ gibi bir dönüşümü vardı herhalde. Ondan ötürü o şekilde yapıyorduk. Bunu nasıl yaparız bu... Hem normal alt grupsa, yani $Nx = xN$ şeklinde bir eşitliği vardı ama. Yine belki onu kullanabiliriz tekrar burada. $= Nx.(yz)N$ şeklinde yazabiliriz.</i>	Normal alt grup tanımı ve özelliklerine yönelik önceki bilgilerini hatırlıyor ve bunlardan yola çıkarak ikinci basamağı hatalı bir ifadeyle tamamlıyor.
<i>[Mülakatçının uyarısı üzerine] Yani zN i dışarıya bırakmak istiyoruz. Hani birleşme özelliğini gösteriyoruz. Bunu nasıl gösterebiliriz tam olarak? Geri gitsek şöyle yapacaktık. $[(xy)N]$ şeklinde burası da (zN) oluyordu [son adımdan yola çıkarak $'[(xy)N](zN)'$ yazdı]</i>	Mülakatçının uyarısı üzerine son adımda verilen anahtar fikri gözden geçiriyor ve son adımdan yola çıkarak ispata yönelik işlemleri yapmaya başlıyor.
<i>Hah anladım. Buradakine [ilk adımda verilen $'(xN)[(yN)(zN)]'$ anahtar fikrini göstererek] benzeceğiz yani şu şekilde. $[(xyz)N]$ şeklinde yazacağız. Herhalde bunu. Yani tersten gittiğimizde bu şekilde gelecek. Bir tek kalan yer şurası [daha önce $'Nx.(yz)N'$ yazdığı ikinci adımı silerek]</i>	İlk adımda verilen $'(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N'$ anahtar fikri ile son adımda verilen $'= [(xN)(yN)](zN)'$ anahtar fikri arasında bağlantı kuruyor ve son adımdan yola çıkarak doğru işlemlerle bir üst adımı tamamlıyor.
<i>Burayı nasıl yapacağız? Him orayı da, orayı da yine benzer şekilde yapabiliriz. Yani bunu (xN) mesela t, işte bunu (yz) mesela k şeklinde alıp tek bir N im varmış gibi, tkN olacak. t dediğimiz zaten x, diğeri de yz, o zaman $[(xyz)N]$ olacak. Yani aynısını elde etmiş olduk burada.</i>	$(x(yz))N = ((xy)z)N$ adımlarını ifade etmeden kısmen de olsa ispatı tamamlayabilmiştir.
<i>Bana yardımcı olan şuydu. Şuradaki özellik (Ayrıca yazmış olduğu $'(yN)(zN) = (yzN)'$ i göstererek] Yani biraz önce de yazdığım özellik. Hem bu hem de buradan [Son adımda verilen $'[(xN)(yN)](zN)'$ anahtar fikrini göstererek] geri gitmek yardımcı oldu birazcık.</i>	Son adımda verilen anahtar fikirden ve normal alt grup tanımından yardım aldığını ifade ediyor.
<i>[Birim elemanın varlığının araştırıldığı basamağı okuduktan sonra] Şimdi ters elemanı göstermeye çalışıyor. Hani grup olduğunu göstermek için. Birim elemanı var. Bunu da şu şekilde yazabiliyorduk. $(x.x^{-1})N = eN$ şeklinde yazabiliriz. Bu da N ye eşit zaten. N zaten yukarıda bulmuştuk, birim elemandı. E benim elemana gidiyorsa $(x^{-1}N)$ ters olacak. Yani ters eleman olacak. Buraya da şunu yazabiliriz. $(x^{-1})N$ eleman G/N, yani ters elemanın varlığı.</i>	Ters eleman özelliğini biliyor ancak G grubunda ters elemanın varlığını ifade etmiyor. i. ve ii. adımlarda verilen anahtar fikirler yardımıyla $(xN)(x^{-1}N)$ yi $(xx^{-1})N$ şeklinde yazıyor.

Tablo 4.29’da da görüldüğü gibi; Hasan, birleşme özelliğinin varlığını araştırırken işlem yapmaya başlamadan önce son adımda verilen anahtar fikri yorumlamış, normal alt grup tanımını ve özelliklerini ifade ederek eksik bırakılan bileşeni tamamlamak için bileşenin başlangıcında ve bitiminde verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurmaya çalışmış ve son adımda verilen anahtar fikirden yola çıkarak işlemlerini iletmiştir. Anahtar fikirleri ilişkilendirmiş ve normal alt grup tanımını ifade etmiş olmasına rağmen birkaç işlem basamağı yanlış ifade ederek ispatı kısmen sonuçlandırmıştır. Ters elemanın varlığını araştırırken ise birim eleman ve ters eleman özelliğinde verilen anahtar fikirlerden ve her ne kadar sözlü olarak ifade etmese de önceden yazdığı normal alt grup tanımına yönelik yazdığı ifadeden yola çıkarak ispatı belirli bir düzeye getirmiştir. Kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek anahtar fikri gözden kaçırdığı için tek taraflı olarak işlemlerini yürütmüş dolayısıyla ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamıştır.

4.2.5.2. Teorem.2’nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.2 $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.

Hasan: G çarpım bir grup olduğunu ve H nin da G nin bir alt grubu olduğunu söylüyoruz. H nin sağ yan kümelerinin a nın kalan sınıfları olduğunu söylüyor mod H ye göre, bunu göstereceğiz [teoremi okudu]. x eleman a üstü ($\bar{a}$) yani, H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre, evet [Hipotezi kullanma basamağını okudu]. Şimdi birleşme özelliğini göstereceğiz. Birleşme özelliği için ne yapabiliriz?

Mülakatçı: Yani ne demeye çalışmış, ne anladın?

Hasan: H ı anladım. E şunu göstermeye çalışıyoruz. Eğer iki küme birbirine eşitse, birbirinin alt kümesidir. Bunu gösterirsek iki kümenin birbirine eşitliğinden söz edebiliriz. Onu göstereceğiz. Gruptaki birleşme özelliğini [Düşünüyor], şuradan gidersek yukarıya doğru [üçüncü adımda verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' eşitliğini göstererek] ...[düşünüyor]

Mülakatçı: Nasıl gidebiliriz?

Hasan: Şimdi burada grubun birim elemanını kullanmış. Grubun birim elemanını kullandığı için $x = h^{-1}a$ olur demiş. $h^{-1}a \dots$ [Sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri okuyor.] Buna sonra bakayım.

Mülakatçı: Tamam.

[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.]

Hasan: Şu soruya bir bakayım. Biz şunu [anahtar fikir olarak verilen ' $ax^{-1} = h$ ' eşitliğini gösteriyor.] kullanacağız, ama nasıl kullanacağımızı... x^{-1} , bunu bulabiliriz [düşünüyor].

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hasan: Yani iki tane eleman alıp, hani birleşme özelliği dediği için, iki tane eleman alıp birleştirmemiz gerekebilir de nasıl yapacağız? Şu, belki şöyle bir şey olabilir; hani yukarıya doğru [üçüncü adımda verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' eşitliğini göstererek] gittiğimizde. x^{-1} , şurası a idi. Hani sol taraftan a^{-1} ile çarptığımızı şey, işleme tabi tuttuğumuzu düşünerek, şurası a^{-1} , burası da işte $a^{-1}h$ olur [üçüncü adımda verilen eşitlikten yola çıkarak eksik bırakılan ikinci adıma ' $a^{-1}ax = a^{-1}h$ ' yazdı.]. Soldan a^{-1} ile işleme tabi tutarsak. Buradaki de $(a^{-1}a)$ yine birim elemanı verecek şurası. Burası da yine a^{-1} i verecek. Hani orayı bu şekilde bulabiliriz. Birleşme özelliği için ne söyleyebiliriz; peki onu düşünelim şimdi.

Mülakatçı: Orada hangi özellikleri kullandık? Ne yazabiliriz?

Hasan: Burada şunu kullandım. Hani birim elemanı gittiğimiz için, Bir elemanın tersi ile kendisini işleme tabi tuttuğumuz da birim elemandı. Buraya ne yazabiliriz? Buraya belki ters elemanın varlığı yazabiliriz. Ters eleman özelliğinden... Buraya da benzer şekilde, hani birim elemanı verdiği için, birim eleman özelliğinden diyebiliriz. Yukarıya birleşme özelliğinden dediği için [Düşünüyor] h eleman H ve H alt grup G olduğundan şuna bakıyorum. h , H nin elemanı ve H da G nin bir alt grubuymuş. Buradan ne yazabiliriz? [Düşünüyor]

Mülakatçı: Bir üst basamakla bir alt basamağı nasıl birleştirebiliriz, burada?

Hasan: Buradan nasıl birleştirebiliriz? $h^{-1}a$ olduğunu, bir şey dememiz lazım da [İki şık arasında eksik bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan.....' bölümünü ' $x =$

h_0a denirse' şeklinde tamamladı.]. Ya şunu diyoruz herhalde h^{-1} de yine H 'ın elemanı olacak. Yani h_0 gibi bir eleman düşünebiliriz.

Mülakatçı: Tamam. Yani nasıl yazarız bunu?

Hasan: H ya mesela şurası [$x = h^{-1}a$ 'daki ' h^{-1} 'i göstererek] H nın elemanıdır. h yazabiliriz yerine mesela. h_0a şeklinde yazabiliriz diye düşünüyorum ama.

Mülakatçı: Yani sen h^{-1} yerine h_0 , yani $h^{-1} = h_0$ yazabiliriz diyorsun.

Hasan: H ı h ı evet evet, yazayım şuraya [$x = h_0a$ 'nın üzerine ' $h^{-1} = h_0$ ' yazdı]. Denirse bu şekilde bulunur. Tersine demiş, tersine dediği için herhalde şunu gösterip, daha sonra yukarıya çıkacağız. $y = x.a$ dır, demiş. $y \in Ha$ alınırsa. $y = x.a$ Buradan belki birleşme özelliği. Yine tersinden gidelim o zaman. Bu yine birim eleman, hani e leri aşağıya geçmiş. Burada şunu düşünebiliriz. $y = x.a$ idi. Her tarafı soldan a^{-1} ile işleme tabi tuttuğumuzu düşünebiliriz [Eksik bırakılan ikinci adıma ' $y = xa / a^{-1}$ ' yazdı]. Buna ters elemanın varlığı diyebiliriz. Hani buradan (aa^{-1}) e gelecek buradan da a^{-1} gelecek tekrar [Soldan a^{-1} ile işleme tabi tuttuğunda üçüncü adımda verilen eşitliği elde ettiğini ifade ediyor]. Birleşme özelliğini düşünebiliriz. [Düşünüyor]

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hasan: Şimdi şu şeyi anlamadım tam olarak, hani zaten bunun buraya geçirirken birleşme özelliğini birleşme özelliğini pek gerek yok gibi duruyor da, onun için hani birleşme özelliğini nerede kullanacağız diye düşünemedim bir an. Tamam bu da dursun.

Teorem.2: $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim. Yani $\bar{a}$, a nın denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu dolayısıyla $\bar{a} \subset H\bar{a}$ ve $H\bar{a} \subset \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir altgrup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \text{(Grupa birleşme özelliğinden)} \\ & a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h \dots\dots\dots \text{(Grupa ters eleman özelliğinden)} \\ & ex^{-1} = a^{-1}h \dots\dots\dots \text{(Grupa birleşme özelliğinden)} \\ & x^{-1} = a^{-1}h \dots\dots\dots \text{olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa} \\ & (x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1} \\ & x = h^{-1}a \text{ olur.} \quad h^{-1} = h_0 \\ & (h \in H \text{ ve } H \leq G \text{ olduğundan } \dots\dots\dots \text{denirse}) \\ & x = h_0a \in H\bar{a} \text{ olur ki buradan } \bar{a} \subset H\bar{a} \text{ bulunur.} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ii) Tersine olarak $y \in H\bar{a}$ alınır; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \text{(Grupa birleşme özelliğinden)} \\ & \dots\dots\dots \text{(Grupa ters eleman özelliğinden)} \\ & ya^{-1} = xe \\ & ya^{-1} = x \dots\dots\dots \text{(Grupa birleşme özelliğinden)} \\ & \dots\dots\dots \text{olur. Buradan } x = ya^{-1} \in H \text{ bulunur.} \\ & ya^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \vee a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a} \text{ bulunur ki;} \\ & H\bar{a} \subset \bar{a} \text{ demektir.} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

(1) Ve (2) den $H\bar{a} = \bar{a}$ denir.

Şekil 4.32. Teorem.2'nin ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 2. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.30'da yer verilmiştir.

Tablo 4.30.

Hasan'ın 2. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>G çarpım bir grup olduğunu ve H'nin da G'nin bir alt grubu olduğunu söylüyoruz. H'nin sağ yan kümelerinin a'nın kalan sınıfları olduğunu söylüyor mod H'ye göre, bunu göstereceğiz [teoremi okudu]. x eleman a üstü ($\bar{a}$) yani, H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre, evet</i>	Teoremin ifadesini okuyor ve hipotezi kullanma basamağını anlamaya çalışıyor.
<i>E şunu göstermeye çalışıyoruz. Eğer iki küme birbirine eşitse, birbirinin alt kümesidir. Bunu gösterirsek iki kümenin birbirine eşitliğinden söz edebiliriz. Onu göstereceğiz.</i>	Hipotezi ve hükmü belirleme basamağını yorumluyor.
<i>Gruptaki birleşme özelliğini [Düşünüyor], şuradan gidersek yukarıya doğru [üçüncü adımda verilen '$ex^{-1} = a^{-1}h$' eşitliğini göstererek]</i>	Üçüncü adımda verilen $ex^{-1} = a^{-1}h$ anahtar fikrinden yola çıkmayı düşünüyor.
<i>[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.] Biz şunu [anahtar fikir olarak verilen '$ax^{-1} = h$' eşitliğini gösteriyor.] kullanacağız, ama nasıl kullanacağımızı... x^{-1}, bunu bulabiliriz. Yani iki tane eleman alıp, hani birleşme özelliği dediği için, iki tane eleman alıp birleştirmemiz gerekebilir de nasıl yapacağız?</i>	Anahtar fikir olarak verilen $ax^{-1} = h$ eşitliğinden 'Grupta birleşme özelliğinden' anahtar fikrinden yola çıkarak ilerlemeyi planlıyor ancak bunu nasıl yapacağını bilemiyor.
<i>Şu, belki şöyle bir şey olabilir; hani yukarıya doğru [üçüncü adımda verilen '$ex^{-1} = a^{-1}h$' eşitliğini göstererek] gittiğimizde. x^{-1}, şurası a idi. Hani sol taraftan a^{-1} ile çarptığımızı şey, işleme tabi tuttuğumuzu düşünerek, şurası a^{-1}, burası da işte $a^{-1}h$ olur [üçüncü adımda verilen eşitlikten yola çıkarak eksik bırakılan ikinci adıma '$a^{-1}ax = a^{-1}h$' yazdı.]. Soldan a^{-1} ile işleme tabi tutarsak. Buradaki de $(a^{-1}a)$ yine birim elemanı verecek şurası. Burası da yine a^{-1} i verecek. Hani orayı bu şekilde bulabiliriz.</i>	Anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımdaki eşitlikten yola çıkarak ikinci adımda eksik bırakılan eşitliği tamamlıyor ve kontrol ediyor ancak burada birleşme özelliğini nasıl kullanacağını bilemediği için matematiksel notasyona uygun olarak yazamıyor.
<i>[Mülakatçının sorusu üzerine] Burada şunu kullandım. Hani birim elemanı gittiğimiz için, Bir elemanın tersi ile kendisini işleme tabi tuttuğumuz da birim elemandı. Buraya ne yazabiliriz? Buraya belki ters elmanın varlığı yazabiliriz. Ters eleman özelliğinden... Buraya da benzer şekilde, hani birim elemanı verdiği için, birim eleman özelliğinden diyebiliriz.</i>	Kavramsal bilgileri seçip kullanabiliyor. Tamamladığı eşitlikte kullanılan kavramsal bilgiyi ve özelliğini biliyor.

Tablo 4.30. (Devamı)

Buradan nasıl birleştirebiliriz? $h^{-1}a$ olduğunu, bir şey dememiz lazım da [İki şık arasında eksik bırakılan '$h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan.....' bölümünü '$x = h_0a$ denirse' şeklinde tamamladı.]. Ya şunu diyoruz herhalde h^{-1} de yine H nın elemanı olacak. Yani h_0 gibi bir eleman düşünebiliriz.(...) H ya mesela şurası ($x = h^{-1}a$ daki h^{-1}i göstererek) H nın elemanıdır. h yazabiliriz yerine mesela. h_0a şeklinde yazabiliriz diye düşünüyorum ama.[Mülakatçının uyarısı üzerine] yazayım şuraya [$x = h_0a$' nın üzerine '$h^{-1} = h_0$' yazdı].	Öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak '$h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan.....denirse' bölümünü nasıl doldurması gerektiğinin sözlü olarak ifade etse de mülakatçının hatırlatması üzerine yazılı olarak kısmen tamamlayabiliyor.
Tersine demiş, tersine dediği için herhalde şunu gösterip, daha sonra yukarıya çıkacağız. $y = x.a$ dır, demiş. $y \in Ha$ alınırsa. $y = x.a$ Buradan belki birleşme özelliği. Yine tersinden gidelim o zaman. Bu yine birim eleman, hani e leri aşağıya geçmiş. Burada şunu düşünebiliriz. $y = x.a$ idi. Her tarafı soldan a^{-1} ile işleme tabi tuttuğumuzu düşünebiliriz [Eksik bırakılan ikinci adıma '$y = xa / a^{-1}$' yazdı]. Buna ters elemanın varlığı diyebiliriz. Hani buradan (aa^{-1}) e gelecek buradan da a^{-1} gelecek tekrar [Soldan a^{-1} ile işleme tabi tuttuğunda üçüncü adımda verilen eşitliği elde ettiğini ifade ediyor].	Anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımdaki eşitlikten yola çıkarak ikinci adımda eksik bırakılan eşitliği tamamlıyor ve kontrol ediyor ancak burada birleşme özelliğini nasıl kullanacağını bilemediği için matematiksel notasyona uygun olarak yazamıyor. Kavramsal bilgileri seçip kullanabiliyor.
Şimdi şu şeyi anlamadım tam olarak, hani zaten bunun buraya geçirirken birleşme özelliğini birleşme özelliğini pek gerek yok gibi duruyor da, onun için hani birleşme özelliğini nerede kullanacağız diye düşünemedim bir an	Birleşme özelliğine yönelik kavramsal bilgileri seçip kullanamadığı için ispatı tam anlamıyla tamamlayamıyor.

Tablo 4.30'da da görüldüğü gibi; kavramsal bilgileri ve önceki bilgileri kullanarak tamamlanması beklenen 2. teoremin ispatında Hasan, aktif bir şekilde anahtar fikirleri kullanabilmiş, öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirleri birlikte düşünerek eksik bırakılan bölümleri tamamlamaya çalışmıştır. Her iki bölümde de anahtar fikir olarak verilen üçüncü adımdaki eşitliklerden yola çıkarak eksik bırakılan ikinci adımları tamamlamaya çalışmasına rağmen birleşme özelliğinin kullanımına yönelik eşitlikleri oluşturamamış dolayısıyla ispatı tam anlamıyla tamamlayamamıştır. Anahtar fikir olarak verilen ($x = h_0a$) ile ($x = h^{-1}a$) anahtar fikirleri arasında bağlantı kurarak boş bırakılan ' $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse' ifadesinin sözlü olarak nasıl tamamlanacağını belirtse de ancak mülakatçının hatırlatmasıyla yazılı olarak kısmen tamamlayabilmiştir. Dolayısıyla grupta ters elemanın varlığına yönelik ifadeyi yazamamıştır. Hasan'ın bu ispatı tamamlayabilmesinde etkili olan anahtar fikirler genel olarak, üçüncü adımlarda verilen eşitliklerdir.

4.2.5.3. Teorem.3'ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.3 Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

Hasan: *Bir indis kümesi olsun. G nin bir alt grubu olduğunu göstereceğiz [teoremi okudu].*

Mülakatçı: *Teoremde ne diyor, ne yapmış?*

Hasan: *Teorem de hani G nin sonlu ya da sonsuz alt gruplarının kesişimi ile G nin bir alt grup olduğunu söylüyor. Hani bunu göstermemiz gerekiyor. G nin alt kümelerini, hani G_1, G_2 şeklinde, alt gruplarını daha doğrusu, G_3 şeklinde alırsak, bunların da hani sonlu ya da sonsuz olduğunu bilmiyoruz [$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots \leq G$ yazdı]. G nin bir alt grubu olduğunu mu göstereceğiz?*

Mülakatçı: *Aşağıda neler kullanmış?*

Hasan: *Bunun için a, b eleman H alalım demiş [sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri sessizce okuyor]. Bunun için şunu kullanmış. Hani grubun bir tanımı vardı. Birincisi kapalılık özelliği, ikincisi de hani ikincinin tersi ile birincinin işleme tabi tutulmasıyla grubun elemanı olacaktı.*

Mülakatçı: *Evet. Kullandığı kümeler nasıl?*

Hasan: *Kullandığı kümeler G_1, G_2, G_3 şeklinde. Hani G nin alt grupları ve bunların kesişimleri. Ama H dediğini, H olarak söyledi galiba şu; hani bunların kesişimlerine H diyor. H nın biz G nin alt grubu olduğunu göstermek istiyoruz [$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots \leq G$ ifadesini ' $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots = H, H \leq G$ ' şeklinde düzenliyor.]. O şekilde söyleyebiliriz.*

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) altgruplarının kesişimi yine G nin bir altgrubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \dots = H$ $H \leq G$ olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b \in H_i$

→ Altgrupun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Şekil 4.33. Teorem.3'ün ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 3. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.31'de yer verilmiştir.

Tablo 4.31.

Hasan'ın 3. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Teorem de hani G 'nin sonlu ya da sonsuz alt gruplarının kesişimi ile G 'nin bir alt grup olduğunu söylüyor. Hani bunu göstermemiz gerekiyor. G 'nin alt kümelerini, hani G_1, G_2 şeklinde, alt gruplarını daha doğrusu, G_3 şeklinde alırsak, bunların da hani sonlu ya da sonsuz olduğunu bilmiyoruz [$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots \leq G$ yazdı]. G nin bir alt grubu olduğunu mu göstereceğiz? G nin bir alt grubu olduğunu mu göstereceğiz?	Hipotezi ve Hükmü belirleyebilmek için teorem ifadesinden yola çıkarak sözlü olarak alt grup olduklarını ifade ettiği G_1, G_2, G_3 lerin kesişimlerini ele alıyor ve ' $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots \leq G$ ' yazıyor.
[Mülakatçının sorusu üzerine] Bunun için a, b eleman H alalım demiş [sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri sessizce okuyor].	Sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri okuyor yorumluyor.
Bunun için şunu kullanmış. Hani grubun bir tanımı vardı. Birincisi kapalılık özelliği, ikincisi de hani ikincinin tersi ile birincinin işleme tabi tutulmasıyla grubun elemanı olacaktı.	Anahtar fikirleri yorumlarken alt grup olma şartlarını grup olma şartları diye ifade ederek bir kavramsal bir karmaşa yaşıyor.

Tablo 4.31. (Devamı)

[Mülakatçının sorusu üzerine] Kullandığı kümeler G_1, G_2, G_3 şeklinde. Hani G nin alt grupları ve bunların kesişimleri. Ama H dediğini, H olarak söyledi galiba şu; hani bunların kesişimlerine H diyor. H nın biz G nin alt grubu olduğunu göstermek istiyoruz [$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots \leq G$] ifadesini [$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots = H, H \leq G$] şeklinde düzenliyoruz]. O şekilde söyleyebiliriz.	Aslında hipotezi sözlü olarak belirliyor ancak mülakatçının sorusu üzerine sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerle kendi yazdığı ifadeyi ilişkilendirdiğinde kısmen de olsa hipotezi ve hükmü belirleme basamaklarını tamamlayabiliyor.
--	---

Tablo 4.31’de de görüldüğü gibi; Hasan, hipotezi ve hükmü belirleyerek tamamlanması istenen 3. Teoremin ispatında teoremin ifadesinden yola çıkmıştır. Mülakatçının sorusu üzerine anahtar fikirleri okuyan ve yorumlayan Hasan, her ne kadar grup ve alt grup kavramlarına yönelik bir karmaşa yaşamış olsa da hipotezi sözlü olarak ifade edebilmiş ve verilen anahtar fikirlerle kendi yazdığı ifadeyi ilişkilendirerek önceden yazdığı ifadeyi düzenlemiş dolayısıyla kısmen de olsa hipotezi ve hükmü belirleme basamaklarını tamamlayabilmiştir. Burada Hasan’ın aslında hipotezi ve hükmü belirleme basamağını zihinsel olarak şekillendirdiği ancak sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerle ilişkilendirmediği için G nin altgruplarını H_i ler yerine G_i lerle göstermeyi tercih ettiği görülmüştür.

4.2.5.4. Teorem.4’ün ispatına yönelik bulgular

Teorem.4 Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

Hasan: Burada asal mertebeli bir grubun devirli grup olduğunu göstereceğiz. Şimdi k ve k asal olan demiş, devir grubu olduğunu göstereceğiz. a eleman G ve a farklı e olsun. Zaten ikisi olunca aşikâr olarak çıkıyordu. Hani ispatlanabiliyor. Lagrange teoremi gereğince, alt grubun mertebesi, grubun mertebesini bölecekti. Bölmesi gerekiyordu. k ’nın mertebesi asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. O halde, yani H nın mertebesi kendisine eşit olamaz.

Mülakatçı: Yani H nın mertebesi ne olabilir?

Hasan: H nın mertebesi 1 ve kendisinden başka böleni olmadığı için ya G nin mertebesi ne eşit olacak, ya da 1’e eşit olacak. 1’e eşit olma durumunu zaten, e ’ye eşit olması gerekiyordu. O zaman hani direk G ye eşit olması gerekiyor [$o(H) = o(G)$] yazdı].

Mülakatçı: Yani e 'ye eşit olamadığı için mi G ye eşit olması gerekiyor?

Hasan: Evet. Evet.

Mülakatçı: G ye eşit olması demek ne demek?

Hasan: G ye eşit olması demek, yani mertebeye G ye eşit yani G nin kendisi demek, aslında. Yani G nin kendisi olması demek.

Mülakatçı: Yani nasıl yorumlarsınız, biz bunu?

Hasan: Mertebesi G nin aynısı ise, G nin aşikâr olduğu...

Mülakatçı: H nin mertebesi ne oldu şimdi?

Hasan: H nin mertebesi G nin mertebesine eşit oldu.

Mülakatçı: Yani ne oldu? G nin mertebesi neydi?

Hasan: G nin mertebesi k .

Mülakatçı: Tamam H ın mertebesi ne oldu?

Hasan: O da k oldu. Asal oldu herhalde.

Mülakatçı: Evet. Peki devirli grup olması için ne olması gerekiyor?

Hasan: Üreteci olması lazım...

Mülakatçı: Üretecinin ne olması lazım?

Hasan: Tek bir eleman, tek bir eleman olması lazım... [Düşünüyor]

Mülakatçı: Bütün bunları birleştirecek ne olur? Nasıl ifade ederiz?

Hasan: [Düşünüyor] Bunu a elemanı tarafından gerildiği için, diyebiliriz. Toplamsal olursa $a.k$ veya a^k şeklinde olacak. O zaman şöyle yazabiliriz belki. Hani bunun üreteci de a olacak [$\langle a \rangle = \langle a \rangle$] yazdı. [Düşünüyor]

Mülakatçı: Dolayısıyla, ne olur?

Hasan: Yani asal demesi, orayı tam çıkaramadım. Hani a ile alakalı bir durum mu var? Mesela asal dediği için a üstü k (a^k), sonuçta onun asal olup olmadığını bilmiyoruz. a tarafından gerildiği için, $k.a$ da asal olmayabilir. Başka bölünebilir.

[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor].

Hasan: Şuraya bakalım. k nin asal olduğunu söylemiştik biraz önce de. Öyle söylüyor zaten. Burada bunun bunu $(o(H) \mid o(G))$ bölmesi demek, yani H nin mertebesinin G nin mertebesine bölünmesi demek, yani ya H nin, G nin mertebesine eşit olacak ya da mertebesi 1 olacak. Yani mertebesinin 1 olması zaten birim elemana işaret eder. Şu da $(a \neq e)$ zaten hani a nın birim elemandan farklı olduğunu söylüyoruz. Çünkü a tarafından gerildiği için, birim elemanın bir üreteç olmadığını söylüyoruz. Bunu söylüyoruz.

Mülakatçı: Dolayısıyla ne olacak?

Hasan: Yani G nin mertebesine eşit olacak. Bu da direkt şunu doğuruyor. Hani G nin mertebesine eşit olması için ve alt grubu olması için, hani direkt H nin G ye eşit olmasını ortaya çıkartıyor. [$H = G$ yazıyor]

Mülakatçı: H alt devir grubuydu.

Hasan: Hı hı. Alt devir olduğunu nasıl gösteririz, işte? Yani devir noktasında biraz sıkıntı... O zaman mesela a^2 ye işte ve işte mesela a hani işte a^3 şeklinde gidecek. Devir grubu... [$\{a, a^2, a^3, \dots\}$ yazdı.]

Teorem.4: $o(G) = k$ ve k asal ise G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ olmalıdır.

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka bölünü yoktur.

O halde; $o(H) = o(a) = \langle a \rangle = H = \{a, a^2, a^3, \dots\}$

Şekil 4.34. Teorem.4'ün ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 4. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.32'de yer verilmiştir.

Tablo 4.32.

Hasan'ın 4. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Burada asal mertebeli bir grubun devirli grup olduğunu göstereceğiz. Şimdi k ve k asal olan demiş, devir grubu olduğunu göstereceğiz. a eleman G ve a farklı e olsun. Zaten ikisi olunca aşikâr olarak çıkıyordu. Hani ispatlanabiliyor. Lagrange teoremi gereğince, alt grubun mertebesi, grubun mertebesini bölecekti. Bölmesi gerekiyordu. k'nın mertebesi asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur.</i>	Anahtar fikirleri okuyor ve yorumluyor.
<i>H nin mertebesi 1 ve kendisinden başka böleni olmadığı için ya G nin mertebesi ne eşit olacak, ya da 1'e eşit olacak. 1'e eşit olma durumunu zaten, e'ye eşit olması gerekiyordu. O zaman hani direk G ye eşit olması gerekiyor [$o(H) = o(G)$] yazdı].</i>	Asal sayı tanımını kullanarak verilen anahtar fikirleri yorumluyor.
<i>[Mülakatçının sorusu üzerine] G ye eşit olması demek, yani mertebeye G ye eşit yani G nin kendisi demek, aslında. Yani G nin kendisi olması demek.(...) H nin mertebesi G nin mertebesine eşit oldu. (...) Asal oldu herhalde.</i>	' $a \neq e$ ' anahtar fikrinden yola çıkarak yorum yapıyor. Teorem ifadesi ve ispatta verilen bilgilerden yola çıkarak ispatı sezgisel olarak anlıyor ve sözlü olarak ifade edebiliyor.
<i>[Mülakatçının sorusu üzerine] Üreteci olması lazım...(.)Tek bir eleman, tek bir eleman olması lazım...[Düşünüyor].</i>	Devirli grup tanımını biliyor.
<i>Bunu a elemanı tarafından gerildiği için, diyebiliriz. Toplamsal olursa $a.k$ veya a^k şeklinde olacak. O zaman şöyle yazabiliriz belki. Hani bunun üretici de a olacak [$o(H) = o(G) = \langle a \rangle$] yazdı]. [Düşünüyor]</i>	Mertebe ve üreteç kavramlarına yönelik bilgileri yardımıyla ispatı tamamlamaya çalışıyor.
<i>Yani asal demesi, orayı tam çıkaramadım. Hani a ile alakalı bir durum mu var? Mesela asal dediği için a üstü k (a^k), sonuçta onun asal olup olmadığını bilmiyoruz. a tarafından gerildiği için, $k.a$ da asal olmayabilir. Başka böleni yoktur</i>	Asal sayı tanımını ispatı tamamlamada nasıl kullanacağını bilemiyor.
<i>[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.] Şuraya bakalım. k nin asal olduğunu söylemiştik biraz önce de. Öyle söylüyor zaten. Burada bunun bunu ($o(H) \mid o(G)$) bölmesi demek, yani H nin mertebesinin G nin mertebesine bölünmesi demek, yani ya H nin, G nin mertebesine eşit olacak ya da mertebesi 1 olacak. Yani mertebesinin 1 olması zaten birim elemana işaret eder. Şu da ($a \neq e$) zaten hani a nin birim elemandan farklı olduğunu söylüyoruz. Çünkü a tarafından gerildiği için, birim elemanın bir üreteç olmadığını söylüyoruz. Bunu söylüyoruz.</i>	Anahtar fikir olarak verilen önceki bilgileri okuyor ve yorumluyor.

Tablo 4.32. (Devamı)

<i>Lagrange teoremi gereğince, alt grubun mertebesi, grubun mertebesini bölecekti. Bölmesi gerekiyordu. (...) Burada bunun bunu $(o(H) \mid o(G))$ bölmesi demek, yani H nin mertebesinin G nin mertebesine bölünmesi demek, yani ya H nin, G nin mertebesine eşit olacak ya da mertebesi 1 olacak.</i>	Lagrange teoreminin ve dolayısıyla '$o(H) \mid o(G)$' ifadesinin ne demek olduğunu biliyor ve doğru bir biçimde ifade edip yorumluyor bu yüzden 'H nin mertebesinin G nin mertebesine bölünmesi demek' şeklindeki yanlış ifadeyi dikkatsizlik sebebiyle kullanıyor.
<i>Yani G nin mertebesine eşit olacak. Bu da direk şunu doğuruyor. Hani G nin mertebesine eşit olması için ve alt grubu olması için, hani direk H nin G ye eşit olmasını ortaya çıkartıyor. [$H = G$ yazıyor] (...) Hı hı. Alt devir olduğunu nasıl gösteririz, işte? Yani devir noktasında biraz sıkıntı... O zaman mesela a^2 ye işte ve işte mesela a hani işte a^3 şeklinde gidecek. Devir grubu... [$\{a, a^2, a^3, \dots\}$ yazdı.]</i>	Sezgisel olarak ispatı anlayabiliyor ancak alt devir grubu ile grup arasında mantıksal bir ilişki kuramadığı için ispatı tamamlayamıyor.

Tablo 4.32'de de görüldüğü gibi; Hasan, verilen anahtar fikirler ve asal sayı tanımını kullanılarak tamamlanması beklenen Teorem.4'ün ispatında hem verilen anahtar fikirleri hem de asal sayı tanımını kullanarak bazı çıkarımlarda bulunmuştur. ' $a \neq e$ ' anahtar fikrinden, teorem ifadesi ve ispatta verilen bilgilerden yola çıkarak ispatı sezgisel olarak anlayabilmiş ve sözlü olarak kısmen de olsa ifade edebilmiş olmasına rağmen, alt devir grubu ile grup arasında mantıksal bir ilişki kuramadığı için ispatı tamamlayamamıştır.

4.2.5.5. Teorem.5'in ispatına yönelik bulgular

Teorem.5 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Hasan: [Teoremin ifadesini gözden geçirerek] Evet bunu göstereceğiz. İç otomorfizmasını, iç otomorfizma olduğunu göstereceğiz. $x.y$ almış yine, hani şöyle yapabiliriz [$axeya^{-1}$ yazıyor]. Burada bir e elemanı olduğunu söyleyebiliriz. e elemanı yine G nin bir, grup olduğu için G , birim eleman oluyor. Bunu işte $axa^{-1}aya^{-1}$ şeklinde yazabiliriz. Bu da şuna, şu sonuca varabiliriz, yine bu da

$\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$ şeklinde olur. Bire-birliği de benzer şekilde yapabiliriz. Ya bunu devam ettirecek miyim yoksa sadece bu kadar mı?

Mülakatçı: Bunu gösterdin artık, yani ne göstermeye çalışıyordun?

Hasan: Şey bu iç otomorfizma diye tanımladığının otomorfizma olduğunu göstermeye çalışıyoruz. Yani bire-birlik yapacağız. Yani mesela, işte diyelim ki, her x, y eleman G için, Hah şurası var [Eksik bırakılan basamaktan sonra verilen anahtar fikirleri görüyor.] Homomorfizmadır, diyor. Homomorfizma olması için, bu şart [$\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$ 'yi göstererek] lazım, başka bir şeye gerek yok. Evet. Tamam. O zaman başka bir şeye gerek yok. Çünkü örten olduğunu da göstermiş, bire-bir olduğunu da göstermiş ve G den G ye tanımlandığı için, yani tanımı ve görüntü kümesi eşit olduğu için de, aynı şekilde söyleyebiliriz.

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1} = a \times e_y a^{-1} = a \times a^{-1} a y a^{-1} = \varphi_a(x) \varphi_a(y)$$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır.

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$\exists x \in G$ bulunabileceğinden, φ_a örten de olur. Şu halde φ_a G nin bir otomorfizmasıdır.

Şekil 4.35. Teorem.5'in ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 5. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.33'te yer verilmiştir.

Tablo 4.33.

Hasan'ın 5. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
<i>Evet bunu göstereceğiz. İç otomorfizmasını, iç otomorfizma olduğunu göstereceğiz. $x.y$ almış yine, hani şöyle yapabiliriz [$axeya^{-1}$ yazıyor].</i>	Anahtar fikir olarak verilen eşitlikten yola çıkarak; $axeya^{-1}$ yazıyor.
<i>Burada bir e elemanı olduğunu söyleyebiliriz. e elemanı yine G nin bir, grup olduğu için G, birim eleman oluyor. Bunu işte $axa^{-1}aya^{-1}$ şeklinde yazabiliriz.</i>	Birim eleman özelliğini amacına uygun bir biçimde kullanabiliyor.
<i>Bu da şuna, şu sonuca varabiliriz, yine bu da $\varphi_a(x). \varphi_a(y)$ şeklinde olur.</i>	İspata başlama aşamasında anahtar fikir olarak verilen eşitlikten ve birim eleman özelliğinden yola çıkarak işlemleri yapıyor ancak birleşme özelliğini kullanmıyor.
<i>Homomorfizmadır, diyor. Homomorfizma olması için, bu şart [yazdığı '$\varphi_a(x). \varphi_a(y)$' yi göstererek] lazım, başka bir şeye gerek yok. Evet. Tamam. O zaman başka bir şeye gerek yok. Çünkü örten olduğunu da göstermiş, bire-bir olduğunu da göstermiş ve G den G ye tanımlandığı için, yani tanımı ve görüntü kümesi eşit olduğu için de, aynı şekilde söyleyebiliriz</i>	Homomorfizma, otomorfizma ve iç otomorfizma şartlarını biliyor.

Tablo 4.33'te de görüldüğü gibi; Hasan, tamamlanması beklenen Teorem.5'in ispatında anahtar fikir olarak verilen $\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1}$ eşitliğinden yola çıkmış ve homomorfizma şartını bildiği için birim eleman özelliğini kullanarak bu şartı sağlamaya çalışmıştır. Homomorfizm, otomorfizma ve iç otomorfizma şartlarını bilen Hasan, ispata başlama aşamasında anahtar fikir olarak verilen eşitlikten ve birim eleman özelliğinden yola çıkarak işlemleri yapmış ancak birleşme özelliğini kullanmamıştır. Bu sebeple eksik bir şekilde de olsa ispatı tamamlayabilmiştir.

4.2.5.6. Teorem.6'nın ispatına yönelik bulgular

Teorem.6 S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

Hasan: Alt kümesi ve c_i ler R nin, x_i ler de S nin elemanı. S kümesi lineer bağımsız olduğundan, şunu yazabiliriz. $c_i x_1 +$ işte, bu sefer [Siliyor]. Lineer bağımsızlık denklemini yazacağız. Hani mesela şu $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_i x_i$ şeklinde, 0 a eşitleyeceğiz.

Mülakatçı: Son eleman n miş. $c_n x_n$

Hasan: H_1 h_1 yani [$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$] yazdı. x_n şeklinde olacak ve burada [$\text{'Sisteminin çözümünde.....'}$ anahtar fikrini göstererek] hani, bir denklem sisteminden bahsediyor. c_i katsayılarının sıfır olması gerektiğini söylüyor. Yine aynı şekilde S' kümesi de S nin bir alt kümesi olduğundan, bazı x_i ler S' de olacaktır. x_i lere v_i şeklinde v_i olsun demiş. S' kümesinin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. Yani biraz önceki verdiği bilgiye S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan, alt küme olduğunun hani, S deki x_i ler S' nün de elemanı olabilir, diyor herhalde.

Mülakatçı: x_i leri v_i lere götürmüş.

Hasan: O zaman şunu yazacağız hani $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ yazacağız. S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

Mülakatçı: Evet dolayısıyla ne yazarız?

Hasan: Dolayısıyla v_i vektörleri, S nin elemanları olduğundan, hani bunların [ikinci boşluğa yazdığı denklemi gösteriyor] da yukarıda gibi sıfır olması gerekecek hani.

Mülakatçı: Teorem ne diyordu? Teoremi istersen bir daha oku.

Hasan: Tamam. S kümesinin bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de S' alt küme S olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır, diyor.

Mülakatçı: S' lineer bağımsız olduğunu buradan nasıl görürüz?

Hasan: Yani şu denklemden ($c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$) bahsediyoruz. Yani S' nün lineer bağımsız olduğunu S' deki elemanlar, x_i ler, hani S nin bazı x_i lerin S' nün elemanıydı. x_i ve v_i yi yazdık. x_i ler lineer bağımsız olduğu için v_i ler de lineer bağımsızdır, diyebilir miyiz? Acaba.

Mülakatçı: Yani ispatı tamamlamanı istiyor sadece senden aşağıda.

Hasan: v_i vektörleri bağımsızdır. Hah şundan bahsediyor herhalde. Hani S' deki v_i ler aslında S nin de elemanı oluyor. Alt küme olduğu için... Hımm. Yani, alt küme olduğu için hani, x_i nin, x_i gibi düşünebiliriz, x_i çünkü S nin elemanı ama v_i ler S' nün elemanı, S nin alt kümesinin elemanı olmuş oluyor. Yani x_i ler lineer bağımsızsa v_i ler

için de lineer bağımsızdır, diyebiliriz. O zaman hani S' de lineer bağımsızdır, diyebiliriz.

Mülakatçı: Tamam, yaz istersen.

Hasan: [S' de lineer bağımsızdır' yazdı.]

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$$

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. $S' \subset S$ kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun.

Buna göre;

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. S' de lineer bağımsızdır.

Şekil 4.36. Teorem.6'nın ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 6. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.34'te yer verilmiştir.

Tablo 4.34.

Hasan'ın 6. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Alt kümesi ve c_i ler R nin, x_i ler de S nin elemanı. S kümesi lineer bağımsız olduğundan, şunu yazabiliriz. $c_i x_1$ işte, bu sefer [Siliyor]. Lineer bağımsızlık denklemini yazacağız. Hani mesela şu $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_i x_i$ şeklinde 0 a eşitleyeceğiz. (...) c_i katsayılarının sıfır olması gerektiğini söylüyor.	' $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun S kümesi lineer bağımsız olduğundan' ve lineer bağımsızlık tanımından yola çıkarak $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots x_i c_i = 0$ denklemini yazıyor.

Tablo 4.34. (Devamı)

<i>[Mülakatçının uyarısı üzerine] H_i h_i yani $[c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$ yazdı]. x_n şeklinde olacak</i>	Mülakatçının uyarısı üzerine ‘ $i = 1, \dots, n$ ’ anahtar fikrinden yola çıkarak yanlış yazdığı denklemi düzenliyor.
<i>burada $[$‘Sisteminin çözümünde.....’ anahtar fikrini göstererek] hani, bir denklem sisteminden bahsediyor.</i>	Anahtar fikri okuyor ve yazdığı denklem sisteminin eksik bırakılan adıma ait olduğunu anahtar fikirde geçen ‘sisteminin çözümünde’ ifadesi ile doğruluyor.
<i>Yine aynı şekilde S' kümesi de S nin bir alt kümesi olduğundan, bazı x_i ler S' de olacaktır. x_i lere v_i şeklinde v_i olsun demiş. S' kümesinin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. Yani biraz önceki verdiği bilgiye S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan, alt küme olduğunun hani, S deki x_i ler S' nün de elemanı olabilir, diyor herhalde</i>	Verilen anahtar fikirleri anlamaya çalışıyor. $x_i \rightarrow v_i$ ifadesini doğru yorumluyor.
<i>[Mülakatçının ifadesi üzerine] O zaman şunu yazacağız hani $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ yazacağız.</i>	Doğru bir biçimde yorumladığı $x_i \rightarrow v_i$ ifadesini mülakatçının da ifade etmesi üzerine ‘ $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ ’ denklemini yazıyor.
<i>S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. (...) Dolayısıyla v_i vektörleri, S nin elemanları olduğundan, hani bunların [ikinci denklemde yazdığı denklemi gösteriyor] da yukarıda gibi sıfır olması gerekecek hani.</i>	Yukarıda verilen ‘tüm c_i katsayıları 0 olmalıdır.’ bilgisinden yola çıkarak yorum yapıyor.
<i>(...) Yani şu denklemden ($c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$) bahsediyoruz. Yani S' nün lineer bağımsız olduğunu S' deki elemanlar, x_i ler, hani S nin bazı x_i lerin S' nün elemanıydı. x_i ve v_i’yi yazdık. x_i ler lineer bağımsız olduğu için v_i ler de lineer bağımsızdır, diyebilir miyiz? Acaba.</i>	‘bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.’ anahtar fikrini anlamaya çalışıyor.
<i>v_i vektörleri bağımsızdır. Hah şundan bahsediyor herhalde. Hani S' deki v_i ler aslında S nin de elemanı oluyor. Alt küme olduğu için... Humm. Yani, alt küme olduğu için hani, x_i nin, x_i gibi düşünebiliriz, x_i çünkü S nin elemanı ama v_i ler S' nün elemanı, S nin alt kümesinin elemanı olmuş oluyor. Yani x_i ler lineer bağımsızsa v_i ler için de lineer bağımsızdır, diyebiliriz. O zaman hani S' de lineer bağımsızdır, diyebiliriz.</i>	‘bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.’ anahtar fikrini doğru bir biçimde yorumluyor ve ispatı eksik de olsa yazılı bir biçimde tamamlayabiliyor.

Tablo 4.34’te de görüldüğü gibi; Hasan, tamamlanması beklenen Teorem.6’nın ispatında, anahtar fikir olarak verilen ‘ $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun S kümesi lineer bağımsız olduğundan’ ifadelerini ve lineer bağımsızlık tanımını kullanarak ispata başlamış; ilk denklemi oluşturabilmiş ancak denklemi oluştururken dikkatsizlik sonucu yanlış indis kullandığı $c_i \cdot x_i$ ifadesini, mülakatçının uyarısı üzerine ‘ $i = 1, \dots, n$ ’ anahtar

fikrinden yola çıkarak düzenlemiştir. Yazdığı denklem sisteminin eksik bırakılan adıma ait olduğunu anahtar fikirde geçen ‘sisteminin çözümünde’ ifadesi ile doğrulamıştır. Kendisinin de doğru bir biçimde yorumladığı ‘ $x_i \rightarrow v_i$ ’ ifadesini mülakatçının hatırlatmasıyla birlikte ikinci denklemi oluşturabilmiştir. Anahtar fikirleri anlayarak doğru bir biçimde yorumlayan Hasan, matematiksel dille ifade edilmiş teoremi ve ispatı anlamış ve ‘tüm c_i katsayıları sıfır olmalıdır.’ anahtar fikrini okumuş olmasına ve ikinci yazdığı denklemde bu bilgiyi kullanarak yorum yapmış olmasına rağmen ispat tamamlama bileşenini eksik bir şekilde yazılı olarak ifade edebilmiştir. Hasan’ın bu ispatı yazılı olarak eksik tamamlamasının sebebinin eksik bırakılan her iki sistemde de aynı katsayıyı kullanması ve dolayısıyla katsayının sıfır olduğunu yeniden ifade etme gereği duymaması olduğu düşünülmektedir.

4.2.5.7. Teorem.7’nin ispatına yönelik bulgular

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

Hasan: *[Teoremi gözden geçiriyor.] Evet, şimdi ispata baktığımızda, $c.u + v$ eleman mıdır U kesişim W nin, olduğunu göstermek istiyoruz. x ve v ler, U nun elemanı, şey kesişimin elemanı olduğu için, ayrı ayrı elemanları da olmak zorunda, diyebiliriz. O zaman şunu yazabiliriz. $u + v$ de U nun elemanıdır. Benzer şekilde $u + v$ de W nin elemanıdır [Eksik bırakılan ilk adıma ‘ $u + v \in U \wedge u + v \in W$ ’ yazdı]. Kapalılıktan ötürü herhalde, oradan geliyor. Daha sonra bir sayıyla çarpıp, sabit bir sayıyla çarpıp, $c.u + v \in U$, $c.u + v \in W$ diyebiliriz [Eksik bırakılan ikinci adıma ‘ $c.u + v \in U$, $c.u + v \in W$ ’ yazdı].*

Mülakatçı: Neden bunu diyebiliriz?

Hasan: *Çünkü c sabit olduğu için, belirli katsayısı olacak. O da yine hani U nun elemanı olur. Benzer şekilde.*

Mülakatçı: Yani neden o bu şartı sağlasın ki? U ve W ne olduğu için bu şartı sağlar?

Hasan: *Vektör uzayının alt uzayı olduğu için mi? Olduğundan herhalde. Çünkü olduğunu vermiş. Yine kesişim olduğu için, hani ikisinin de elemanı olduğu için, kesişimin de elemanı olacaktır.*

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.

$c \cdot u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$$

$$u, v \in U \wedge u, v \in W$$

$$c \cdot u + v \in U \wedge c \cdot u + v \in W$$

$$c \cdot u + v \in U \wedge c \cdot u + v \in W \text{ ise}$$

$$c \cdot u + v \in U \cap W \text{ dir.}$$

Şekil 4.37. Teorem.7'nin ispatına yönelik Hasan'ın çözümü

İspat tamamlama formunda verilen 7. Teoremin ispatına yönelik Hasan'ın çözümlerini içeren video kayıtları, video kayıtlarının transkripti ve formdaki çözümleri birlikte incelenerek yapılan yorumlara Tablo 4.35'te yer verilmiştir.

Tablo 4.35.

Hasan'ın 7. Teorem'de Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumuna Yönelik Verilerin Yorumlanması

Öğretmen Adayının Cümlesi	Yorum
Evet, şimdi ispata baktığımızda, $c \cdot u + v$ eleman mıdır U kesişim W nin, olduğunu göstermek istiyoruz. x ve v ler, U nun elemanı, şey kesişimin elemanı olduğu için, ayrı ayrı elemanları da olmak zorunda, diyebiliriz.	Hipotezi ve hükmü belirleme basamağında verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak ispatı nasıl yapacağı hakkında yorum yapıyor.
O zaman şunu yazabiliriz. $u + v$ de U nun elemanıdır. Benzer şekilde $u + v$ de W nin elemanıdır [Eksik bırakılan ilk adıma ' $u + v \in U \wedge u + v \in W$ ' yazdı]. Kapalılıktan ötürü herhalde, oradan geliyor. Daha sonra bir sayıyla çarpıp, sabit bir sayıyla çarpıp, $c \cdot u + v \in U$, $c \cdot u + v \in W$ diyebiliriz [Eksik bırakılan ikinci adıma ' $c \cdot u + v \in U$, $c \cdot u + v \in W$ ' yazdı].	' $u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ ' anahtar fikrinden yola çıkarak ve kesişimin tanımını kullanarak eksik bırakılan adımları tamamlamaya çalışıyor.
[Mülakatçının sorusu üzerine] Vektör uzayının alt uzayı olduğu için mi? Olduğundan herhalde. Çünkü olduğunu vermiş. Yine kesişim olduğu için, hani ikisinin de elemanı olduğu için, kesişimin de elemanı olacaktır.	Eksik bırakılan adımları tamamlarken, yalnızca kesişimin tanımını esas alarak alt uzay kavramına yönelik gözden kaçırdığı bilgileri mülakatçının sorusu üzerine farkediyor ancak ispatı eksiksiz bir biçimde tamamlayamıyor.

Tablo 4.35’te de görüldüğü gibi; Hasan, tamamlanması beklenen 7. Teoremin ispatında hipotezi ve hükmü belirleme basamağında verilen anahtar fikirlerden, $u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ eşitliğinden yola çıkarak ve kesişimin tanımını kullanarak eksik bırakılan adımları tamamlamaya çalışmıştır. Eksik bırakılan adımları tamamlarken, yalnızca kesişimin tanımını esas alan Hasan, alt uzay kavramına yönelik bilgileri gözden kaçırmış, mülakatçının sorusu üzerine farketmediği bu bilgileri yazılı olarak ifade etmediği için ispatı eksiksiz bir biçimde tamamlayamamıştır.

4.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Temel Bileşenleri Tamamlama Durumuna İlişkin Bulgular ve Yorumlar

4.3.1. Hipotezi Belirleme ve Hükmü Belirleme Temel Bileşenlerinin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.” ifadesiyle verilen Teorem.3’ün ispatında hipotezi ve hükmü belirleme bileşenine yönelik basamak eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşenleri tamamlama durumları incelenmiştir. Burada öğretmen adaylarının hipotezi belirleme bileşenini “ $i \in I$ olmak üzere kabul edelim ki; H_i ler G nin bir alt grubu olsun ($H_i \leq G$). $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ denirse” ifadesiyle; hükmü belirleme bileşenini ise “ $H \leq G$ olduğunu göstereceğiz” ifadesiyle tamamlamaları beklenmiştir.

Gül, Ceyda ve Hasan hükmü belirleme basamağını oluşturabilmişken hipotezi belirleme basamağında kısmen de olsa matematiksel notasyon bilgisi eksikliği yaşamışlardır. Sonraki adımlarda verilen anahtar fikirlerden ve teoremin ifadesinden yola çıkan Gül; hipotezi ve hükmü net bir şekilde ifade etmiş ancak $\bigcap_{i \in I} H_i = H$ ifadesini hatalı bir biçimde $\bigcap_{i=1} H_i = H$ şeklinde yazmıştır. Ceyda, hipotezde H_i lerin alt grup olduğunu sözlü olarak ifade etmesine rağmen $H_i \leq G$ ifadesine yer vermemiş dolayısıyla bu durum ispatında eksiklik oluşturmuştur. Hasan ise teoremin ifadesinden yola çıkarak hipotezi ve hükmü sözlü olarak ifade edebilmiş, hükmü ayrıca yazılı olarak da belirtmiştir. Ayrıca anahtar fikirlerle kendi yazdığı ifadeyi ilişkilendirerek önceden yazdığı ifadeyi düzenlemiş ancak anahtar fikirlerle eksik bırakılan bölüm arasındaki ilişkiyi gözden kaçırdığı ve dolayısıyla G nin alt grupları olduğunu düşündüğü G_i leri H_i

yerine tercih ettiği için hipotezi matematiksel notasyona uygun bir biçimde tam anlamıyla ifade edememiştir.

Hipotezi ve Hükmü belirleme bileşenlerini tamamlama durumuna yönelik Gül'ün düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Mülakatçı: *Bu soruda ne istiyor senden? Nereye yazmanı istiyor?*

Gül: *Şu kısma [hipotez ve hüküm belirleme basamağını gösteriyor] ama hani o kısmı şuradan [Anahtar fikirlerin olduğu basamakları gösteriyor] bulmaya çalışıyorum. Yalnız hani iki tane alt grup olması gerekiyor ama burada alt grupların hangisi olduğunu bulmaya çalışıyorum.(...)*

Mülakatçı: *O zaman yazalım ne düşünüyorsan, düşündüklerini ifade ederek.*

Gül: *eee. şöyle küme şeklinde gösterirsek. H_i lerden oluşur ki H_i ler alt gruptur G nin. ve i de hani $1, 2$ şeklinde gider. [$\{H_i: H_i \leq G, i = 1, 2, \dots\}$] yazıyor] eeee. ve H_i lerin kesişimi H yi verir 1 den sonsuza kadar mı artık [$\bigcap_{i=1} H_i = H$] yazıyor] aaaa. ve bu olsun. H nin G nin alt grup olduğunu göstermemiz gerekiyor.*

(...) Hani hipotez bu kısım (Bir $(G, .)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi) diğer istenen bu $(G$ nin bir alt grubudur).

Hipotezi ve Hükmü belirleme bileşenlerini tamamlama durumuna yönelik Ceyda'nın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ceyda: *H_i lerin elemanı olacağını söylemiş. H_i ler burada bahsettiği sonlu veya sonsuz alt grupları. Bir de her i eleman I için demiş. Hani grup olma şartları, alt grup olma şartları bu H_i lerin. a işlem b^{-1} 'i ihtiva ettiği zaman H_i ler alt grup olacaktı. Burada onu söylemiş. Kesişimin tanımından yine kesişimin tanımından da şu a işlem b^{-1} H_i lerin elemanı ise bütün yani H nin da elemanı oluyor.*

Mülakatçı: *H ne oluyor?*

Ceyda: *H da bunların kesişim kümesi oluyor hocam burada dediğini göre.*

Mülakatçı: *O zaman yaz.*

Ceyda: *[Önceki yazdıklarını siliyor] Şöyle olacak o zaman hocam. I indisleri imiş zaten, bunu ben ilk yanlış anlamışım. Şöyle H_i kesişim, yok öyle değil. Kesişim H_i .*

Bütün H_i lerin kesişimi H olmak üzere bu H nin G nin bir alt grubu olduğunu göstereceğiz [$\cap_i H_i = H$ olmak üzere $H \leq G$ yazdı.].

Hipotezi ve Hükmü belirleme bileşenlerini tamamlama durumuna yönelik Hasan'ın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Hasan: Kullandığı kümeler G_1, G_2, G_3 şeklinde. Hani G nin alt grupları ve bunların kesişimleri. Ama H dediğini, H olarak söyledi galiba şu; hani bunların kesişimlerine H diyor. H ın biz G nin alt grubu olduğunu göstermek istiyoruz [$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots \leq G$ ifadesini ' $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4, \dots = H, H \leq G$ ' şeklinde düzenliyor]. O şekilde söyleyebiliriz.

Teoremin ifadesinden yola çıkan, ispatı oluşturma süreci içerisinde sonraki adımlarda verilen anahtar fikirleri okuyan ve hipotezi kısmen de olsa belirleyebilen Ezgi, son adımla hipotezi ve hükmü belirleme basamakları arasındaki ilişkiyi kuramadığı için hipotezi ve hükmü matematiksel dil ve notasyona uygun bir biçimde tam anlamıyla ifade edememiştir.

Hipotezi ve Hükmü belirleme bileşenlerini tamamlama durumuna yönelik Ezgi'nin düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Ezgi: Bir G grubun bir takım alt gruplarının kesişimi yine bir alt gruptur, demiş. Bir indis kümesi olsun. Biz neyi göstermemiz lazım o zaman, şunu şöyle yazsam hocam. n, i eleman I lardan oluşsun. H_i nin bir alt grup, ne olduğunu göstereceğim; G olduğunu göstereceğim. Bu H_i ler de işte H_1, H_2 bunlar da birer grup. Bunu başta yazsam daha iyiydi ama. [$\cap_{i \in I} H_i < G, H_i: H_1, H_2$ birer grup yazdı. Burada ' $H_i: H_1, H_2 \cap_{i \in I} H_i < G$ ' olması gerektiğini sözlü olarak ifade etti bir okla gösterdi]. Bunlar $(H_i: H_1, H_2)$ birer grup ve bu gruplarının kesişimi indislerden oluşan kesişimi. (...)

Mülakatçı: Öyle mi yapmış yani. Yani H ne, H yı kullanmadık ya o yüzden soruyorum. Nasıl anlamalısınız yani?

Ezgi: H_i ler, yani şeyi yazsak hocam. Bir hani buradaki H_i ler yani tüm kesişimlerin kümesi ve bir tane H almış. Bunlardan temsilci bir tane H alsam. O şekilde göstermiş olabilir mi?

Umut, kesişimin tanımını yanlış yorumlamış ve alt grup tanımını hipotezle ilişkilendiremediği için hipotezi ve hükmü belirleme basamağını yanlış bir düşünceyle

oluşturmuş ancak hatalı oluşturduğu bu ifadeyi matematiksel dil ve notasyona uygun bir biçimde yazabilmiştir.

Hipotezi ve Hükümü belirleme bileşenlerini tamamlama durumuna yönelik Umut'un düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Umut: (...) [eksik bırakılan bölümden farklı bir yere ' $H < G \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i < G$ ' yazdı] E bunun için de a, b eleman H alalım diyor. H dan eleman alıyorum. Kesişim tanımından, her i eleman I için, a, b elemanı H_i dir. Çünkü a burada, mesela H_1 in elemanı ise, H_2 nin elemanı da b olur mesela, bu da a, b nin, H_i nin elemanları olduğunu gösterir. Alt grubun tanımından, her i eleman A için, mesela alt grup tanımında her x, y elemanı H_i için, $x \cdot y^{-1}$ elemanı H_i idi. Bir tanımı. Bu da her i eleman I için. Yani $i =$ mesela I dan $1, 2$ için mesela, $a \cdot b^{-1}$ elemanı olmalı, H_1 kesişim H_2 mesela, örnek olarak verirse, olduğunu göstermeliyiz. Kesişim tanımından, a , H_i nin elemanıydı. b de H_i nin elemanıydı. H grup olduğundan grupta ters eleman varlığından, b^{-1} de nerenin elemanı olur? H nin elemanı olur. O zaman $a \cdot b^{-1}$ de elemanı H olur. Öyleyse H alt grup G dir.

Görüldüğü gibi anahtar fikirlerle teoremin ifadesini birlikte düşünerek ikisi arasında bir ilişki kurmaya çalışan öğretmen adayları hipotezi ve hükümü belirleyebilmişler ancak matematiksel notasyon bilgisi açısından sorun yaşamışlardır. Anahtar fikirler yardımıyla hipotezi ve hükümü belirli bir düzeye getirebilen öğretmen adayları teoremin ifadesiyle anahtar fikirleri ilişkilendirmede problem yaşadıklarında bu bileşenleri tamamlayamamışlardır.

4.3.2. Hipotezi Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“ U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.” ifadesiyle verilen Teorem.7'nin ispatında hipotezi kullanma bileşenine yönelik basamak eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşeni tamamlayabilme durumları incelenmiştir. Burada öğretmen adaylarından hipotezde verilen $u, v \in U \cap W$ ifadesini eksik bırakılan adımlarda kullanmaları ve $u, v \in U$ ve U, V nin alt uzayı olup” ile “ $u, v \in W$ ve W, V nin alt uzayı olup” ifadelerini amaçlarına uygun bir şekilde adım adım yazabilmeleri beklenmektedir.

Öğretmen adaylarından yalnızca Ceyda ve Ezgi bu bileşeni eksik de olsa tamamlayabilmişlerdir.

Hipotezi kullanma bileşenini tamamlama durumuna yönelik öğretmen adaylarının düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Umut: (...) u, v elemanı U , kesişimin tanımından ve u, v elemanı W olur. Her ikisinin de elemanı olur. u, v eğer kesişimin elemanı ise, hem U nun elemanıdır hem W nin elemanıdır.

Gül: Şimdiiii U kesişim W den bir u, v elemanları almış. c de bir sabit. F cisim diyor ama bir sabit olarak alıyoruz. eee $c.u + v$ nin de U kesişim W nin elemanı olduğunu gösterirsek eğer W nin bir alt uzay olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi U kesişim verdikten bir u, v elemanı alıyor. u, v de U nundur ve u, v de W nin dir de aynı zamanda.

Mülakatçı: Neden?

Gül: Çünkü hani kesişimlerinin elemanı ise ayrı ayrı iki kümenin de elemanı olur.(...) U W alt uzay ise bu $[u, v$ yi göstererek] (...) U alt uzay olduğundan (...) W de bir alt uzay olduğundan (...)

Ezgi: (...) u, v U kesişim W nin elemanı ise. U hani kesişimin elemanı ise bu hem bunlar U nun elemanıdır, hem W nin elemanıdır. Hem de... Yanlış bir şey söylemedim. Hem U nun elemanıdır, hem W nin elemanıdır, demiş. Bundan ne geçiyor. c, u ...[eksik bırakılan adımların öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirleri gözden geçiriyor]. Burada tamamen şeyin özelliklerini kullanacağız, kesişimin. u, v elemandır U , hem u, v elemandır W demişiz. Çünkü kesişim bunlar.(...) [$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$ 'yi siliyor ve ayrı ayrı yazıyor] Çünkü bunlar birer birer ayrıca alt uzay, çünkü. [Her bir ifadenin yanına 'alt uzay' yazıyor]

Ceyda: (...) Ayrı ayrı şu iki eleman (u, v) hani bu adımda ($u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$) onu vermiş bize. Her ikisinin de elemanı olacak.(...) Çünkü hocam alt uzay olması...

Mülakatçı: Yaz. Yanına yaz ne alt uzay olduğu için?

Ceyda: U alt uzay olduğu için. Şöyle şunu da yazayım [$c.u + v \in U \wedge$ yazıyor]

Mülakatçı: *Bence onu aşağıya yaz, ayrı ayrı yaz.*

Ceyda: $[\wedge \text{yi siliyor}] \text{ c.u} + v \text{ eleman } U. U \text{ alt uzay olduğundan. [eksik bırakılan ilk basamağa; 'c.u} + v \in U ; U \text{ alt uzay olduğundan' yazıyor]} (...) W \text{ alt uzayı... Alt uzayı olduğu için şu ('c.u} + v \in U \cap W')$ şarttan yine bunu $(\text{c.u} + v \in W)$ da yazabiliriz. $W \text{ alt uzay olduğundan } ['\text{c.u} + v \in W ; W \text{ alt uzay olduğundan' yazdı}]$

Hasan: $(...)$ x ve v ler, U nun elemanı, şey kesişimin elemanı olduğu için, ayrı ayrı elemanları da olmak zorunda, diyebiliriz. $(...)$

Mülakatçı: *Yani neden o bu şartı sağlasın ki? U ve W ne olduğu için bu şartı sağlar?*

Hasan: *Vektör uzayının alt uzayı olduğu için mi? Olduğundan herhalde. Çünkü olduğunu vermiş.*

Görüldüğü gibi, öğretmen adaylarının çoğu hipotezi kullanma bileşenine yönelik “ $u, v \in U$ ” ile “ $u, v \in W$ ” ifadelerini sözlü olarak ifade etmiş yazılı olarak aktarma gereği duymamışlardır. Bu durumun anahtar fikir olarak verilen $u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$ ifadesi nedeniyle hipotezi kullanmaya yönelik bilgileri amaca yönelik adım adım yazma gereği duymamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının hipotezi kullanarak yazmaları beklenen “ U, V nin alt uzayı olup” ile “ W, V nin alt uzayı olup” ifadelerini Umut’un aksine Ezgi, Ceyda, Gül ve Hasan sözlü olarak ifade etmişlerdir. Ceyda mülakatçının uyarısı üzerine yazılı olarak ifade edebilmişken; Hasan mülakatçının sorusuna cevap niteliğinde bu ifadeyi kullanmıştır. Bütün bunlar gözönüne alındığında öğretmen adaylarından yalnız Ezgi eksik de olsa hipotezi kullanma bileşenini tamamlayabilmiştir.

4.3.3. Tanım Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“($G, .$) bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” ifadesiyle verilen Teorem.1 ve “Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.” ifadesiyle verilen Teorem.4’ün ispatında tanım kullanma bileşenine yönelik basamak eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşeni tamamlayabilme durumları incelenmiştir.

Teorem.1’in ispatında $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ ’nin grup olma şartlarını sağlayıp sağlamadığı araştırılmış dolayısıyla ilk adımda birleşme özelliğinin varlığı

gösterilmiştir. Birleşme özelliğinin varlığına yönelik işlem basamaklarının yapılabilmesi için normal alt grup tanımından faydalanılmıştır. Eksik bırakılan adımlarda öğretmen adaylarından normal alt grup tanımından yola çıkarak “ $N \triangleleft G$ için $G/N = \{xN : x \in G\}$ bölüm grubu tanımını ve “ $N \triangleleft G \Rightarrow (xN, yN \in G/N$ için $(xN)(yN) = (xy)N$ ” ifadesini kullanarak işlemlerini iletmeleri beklenmiştir. Bu noktada bu bilgileri hatırlatması için “ $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. ($x, y, z \in G$ için)” anahtar fikri verilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat tamamlama süreçleri incelendiğinde yalnız Hasan’ın bu bilgileri kısmen de olsa hatırlayarak kullandığı görülmüştür. Bu bağlamda Hasan’ın düşünceleri aşağıda sunulduğu gibidir.

Hasan: (...) Hani normal alt grup dönüşümü vardı galiba. Hani şu şekildeydi. $(yN) \cdot (zN) = (yzN)$ gibi bir dönüşümü vardı herhalde. Ondan ötürü o şekilde yapıyorduk. Bunu nasıl yaparız bu... Hem normal alt grupsa, yani $Nx = xN$ şeklinde bir eşitliği vardı ama. Yine belki onu kullanabiliriz tekrar burada. $= Nx \cdot (yz)N$ şeklinde yazabiliriz.

Burada Hasan; normal alt grup tanımı ve özelliklerine yönelik bilgileri hatırlamış ancak bunlardan yola çıkarak eksik bırakılan ikinci basamağı hatalı bir ifadeyle tamamlamıştır.

Teorem.1’de tanım kullanma bileşenini tamamlama durumuna yönelik iki adayın düşünceleri aşağıda sunulmuştur.

Gül: eee G, N den bir elemanlar almış ve x, y, z de zaten G nin evet, n ler N nindir zaten. Bunlar da x, y, n dir. Şunlar $((xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N])$ şuraya $(= [(xN)(yN)](zN))$ ulaşıyor [Teoremi ve verilen anahtar fikirleri okudu]. Birleşme özelliğini sağlatmaya çalışıyor yani. Acaba bunu $[(yN)(zN)]$ eğer bu $[(yz)N]$ şekilde yazabiliyorsak, bunu da şu şekilde yazabiliriz [$(xN)[(yN)(zN)]$ ’yi $(xyz)N$ şeklinde yazıyor]. Sonra $x, y, z; G$ nin, G de grup olduğundan birleşme özelliği zaten sağlar.

Ceyda: Hocam şimdi aslında yol göstermiş bize. Hani buna $[(xN)(yN)](zN)$ ulaşmamız gerek, nasıl ulaşırız? Bu da birleşme özelliğini gösterir zaten öyle diyor. Birleşme özelliğinin var olduğunu göstermeye çalışmış. Çalışıyoruz ama... Buradan devam edersek dağılma özelliği varsa şu da içeri dağılamaz mı hocam? Evet dağılabilir

yani. Yani çarpmanın dağılma özelliği. [Yazdığı ' $xN[(yN)(zN)]$ ' de ' xN ' yi parantez içine dağıtmayı kastediyor.]

Normal alt grup tanımını kullanmamalarına rağmen anahtar fikirlerden yardım alan Gül ve Umut birleşme özelliğinin varlığının araştırıldığı adımları kısmen de olsa tamamlayabilmişlerdir. Oysaki aynı anahtar fikirler normal alt grup tanımını kullanmayan Ezgi ve Ceyda'nın bu basamağı tamamlamalarında yeterli olmamıştır.

Teorem.4'ün ispatında mertebesi asal olan bir grubun devir grubu olup olmadığı araştırılmış ve ispatın son bölümü eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarından asal sayı tanımını kullanarak ' $o(H)$ ın $o(G)$ yi bölmesi için $o(H) = k$ olmalıdır' çıkarımını yapmaları beklenmiştir. İspatı tamamlama süreçleri incelendiğinde öğretmen adaylarının tamamının asal sayı tanımını kullandıkları ve beklenen çıkarımı yaptıkları görülmüştür. Bu bağlamda bazı katılımcıların ifadeleri aşağıda sunulmuştur.

Ceyda: (...) G nin mertebesi k , asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur. Burada bunu nasıl kullanabiliriz? Burada $(o(G))$ k dersek, o zaman H nin mertebesi ya k olacak ya da 1 olacak.

Umut: (...) O halde, eğer o zaman $o(H)$ nin ben ne olduğunu söylerim? Ya 1 olduğunu söylerim, ya da k ya eşit olduğunu söylerim. 1 ve kendisinden başka böleni yoksa bunları yazabilirim [$o(H) = 1, o(H) = k$ yazdı].

4.3.4. Özellik Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“($G, .$) bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” ifadesiyle verilen Teorem.1, “($G, .$) bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.” ifadesiyle verilen Teorem.2 ve “ G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.” ifadesiyle verilen Teorem.5'in ispatlarında özellik kullanma bileşenine yönelik basamaklar eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşeni tamamlayabilme durumları incelenmiştir.

Teorem.1'in ispatında öğretmen adaylarının; i. ispatta, G bir grup olduğundan $(x, y, z \in G)$ için birleşme özelliğini kullanarak $(x(yz))N = ((xy)z)N$ eşitliğini ayrıca

iii. ispatta ters elemanın varlığının araştırıldığı bölümde de yine G bir grup olduğundan $\forall x \in G$ için $x^{-1} \in G$ özelliğini kullanarak eşitlikleri oluşturabilme durumları incelenmiştir. İfadeleri incelendiğinde öğretmen adaylarından Gül ve Umut'un işlemlerini yaparken G nin bir grup olduğu ve dolayısıyla birleşme özelliğinin var olduğu bilgisinden hareketle işlemlerini ilerlettikleri ve beklenen eşitliği oluşturabildikleri; ters elemanın varlığına yönelik grup özelliğini ise yalnız Gül'ün ifade ettiği ve kullandığı görülmüştür. Umut'un bu basamakta ' G bir grup olduğundan ters elemanın da var olduğu'nu ifade etmeyişi, ilk adımda bu durumu gözönüne aldığı için yeniden ifade etme gereği duymadığı şeklinde yorumlanmıştır.

Teorem.1'de özellik kullanma bileşenini tamamlama durumuna yönelik Gül ve Umut'un düşünceleri şöyledir:

Gül: (...) Sonra x, y, z G nin, G de grup olduğundan birleşme özelliği zaten sağlar. Bu şekilde $((xy)zN)$ ayırabiliriz. Hah evet şu şekilde $((xy)(z)N)$ yazayım: şu şekilde ayırırsak eğer, şu şekilde birleşme özelliği sağladığından şu şekilde yazabiliriz: $([(xy)N](zN))$ uuuu tekrar bunu $([(xy)N])$ açarsak, buna $((xN)(yN)(zN))$ ulaşmış oluruz buradan.(...)

(...) Ondan sonra x G nin elemanı, G de bir grup o zaman x üzeri -1 de G nin elemanı olur ki x in ters elemanı olur ve bu da etkisiz elemana eşittir. Bu da eN olur.(...)

Umut: Buradan aynı şartları aldığımızda, yine $x(yz)N$ olur, buradan da birleşme özelliğinden (xy) parantezi kaydırırsak $(xy)NzN$ olur.

Teorem.2'de i. ve ii. ispatlarda öğretmen adaylarının grupta birleşme özelliğini kullanma durumları incelenmiş bu bağlamda ilk adımlarda 'grupta birleşme özelliğinden' ifadesinden yola çıkarak ' $a^{-1}(ax^{-1}) = a^{-1}h$ ' eşitliğine birleşme özelliğini uygulayarak ' $(a^{-1}a)x^{-1} = a^{-1}h$ ' eşitliğini oluşturabilmeleri beklenmiştir. Öğretmen adaylarının düşünceleri incelendiğinde; Umut, Gül, Ezgi ve Hasan i. ve ii. ispatta yapılması gereken işlemleri bilmelerine ve ifade etmelerine rağmen nasıl yazacaklarını bilememiş dolayısıyla birleşme özelliğine yönelik eşitliği oluşturamamışlardır. Ceyda ise birleşme özelliğine yönelik kavramsal bilgileri uygulayarak eşitliği oluşturabilmiş ve birleşme özelliğine yönelik adımı doğru tamamlayabilmiştir.

Teorem.2’de kavramsal bilgileri seçip kullanmalarına yönelik bazı öğretmen adaylarının düşünceleri şöyledir:

Gül: (...) Buradan; grupta birleşme özelliğinden, grupta etkisiz eleman sanırım bi de ters eleman özelliğinden. Şurada: [$ax^{-1} = h$] yazıyor ve ispatı yapmaya başlıyor] her iki tarafı a nın tersiyle işleme sokuyor, sağdan tabi, bu da a nın [$a^{-1}/ax^{-1} = h$] yazdı] [eşitliğin diğer tarafına ' a^{-1} ' yazmayıp sadece söylüyor]

Mülakatçı: Diğer tarafı da yaz istersen daha açıklayıcı olsun, ne taraftan dediyse o taraftan.

Gül: [siliyor] şu şekilde mi? [$a^{-1}/ax^{-1} = h/a^{-1}$] yazıyor]

Mülakatçı: nereden işleme sokuyorsun a^{-1} i?

Gül: sağdan [diyerek ' $a^{-1}/ax^{-1} = h/a^{-1}$ sağdan' yazıyor]

Mülakatçı: Şimdi sola yazdın da o yüzden...

Gül: hı pardon soldan işleme sokuyorum [$'sağdan'$ ı silerek ' $soldan$ ' yazıyor]

Mülakatçı: Bir tarafta soldan oldu bir tarafta sağdan oldu.

Gül: evet [siliyor] bunu ama şöyle mi yazayım, öyle de yazamam, hah şöyle [$a^{-1}/ax^{-1} = h a^{-1}/$] yazıyor] mi? [$a^{-1}/$] i siliyor] [gülerek] şöyle oklar çizsem olmaz mı?

Mülakatçı: Sen bilirsin, tamam.

Gül: u Soldan diye belirteyim her iki tarafı [$a^{-1}/ax^{-1} = h$] eşitliğinin başına ' $soldan$ ' yazıyor]

Görüldüğü gibi Gül, i. ve ii. ispatlarının her ikisinde de birleşme özelliğini kullanamamış ve bu duruma ek olarak matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle de ilgili adımları tamamlayamamıştır.

[Diğer sorular bittikten sonra tekrar bu soruya dönüyor.]

Ceyda: Zaten bu buna bakacağım herhalde. [önceki yaptığı işlemleri siliyor] Şöyle hocam her iki tarafı da a^{-1} ile işleme koymuştum en son. [$ya^{-1} = xaa^{-1}$] yazdı] Burada birleşme özelliğinden diyor. Birleşme özelliğinde şunların önce hangi ikili hangi ikisini işleme aldığımız fark etmeyecek. O yüzden şöyle aa^{-1} yazsam [bir sonraki basamağa ' $ya^{-1} = x(aa^{-1})$] yazdı]. (...) Ne yapmamız lazım hocam bir kere şuradaki

[i. ispatın üçüncü basamağında verilen ' $ex^{-1} = a^{-1}h$ ' eşitliğini göstererek] x^{-1} yok olmayacakmış onu görüyoruz buradan. O yüzden a^{-1} ile işleme koyacağız [ilk basamağa; ' $a^{-1}ax = a^{-1}h$ ' yazıyor]. Buradan da birleşme özelliğinden şuraya [ikinci basamağa; ' $a^{-1}ax = a^{-1}h$ ' yazıyor] şu parantezi şuraya $((a^{-1}a)x = a^{-1}h)$ koyup buna $((a^{-1}a))$ da zaten diğer adımda e demiş.

Görüldüğü gibi Ceyda, i. ve ii. ispatlarının her ikisinde de birleşme özelliğini kullanmış, yalnız ilk basamaklara yazdığı eşitliklerde parantez kullanmayı ihmal etmiştir.

Teroem.5'in ispatında özellik kullanma bileşenine yönelik basamak eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşeni tamamlayabilme durumları incelenmiştir. Burada öğretmen adaylarının bir dönüşümün homorfizm olması için gereken " $\varphi_a(xy) = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$ " şartını hatırlayarak işlemlerini bu yönde yapmaları ayrıca işlemlerini yaparken de grupta birim eleman ve grupta birleşme özelliklerini kullanmaları beklenmiştir.

Öğretmen adaylarının ifadeleri incelendiğinde tamamının homomorfizma özelliğini hatırlayarak işlemlerine bu şekilde yön verdiği görülmüştür. İşlemleri yaparken Gül, Ceyda ve Umut hem birim eleman hem de birleşme özelliklerini amaçlarına uygun bir şekilde kullanabilmiş; Ezgi ve Hasan ise yalnızca birim eleman özelliğini kullanmış, birleşme özelliğini kullanmayı ihmal etmişlerdir. Öğretmen adaylarından Ceyda birleşme özelliğinin varlığını ilk adımda ifade etmiş ancak yazılı olarak uygulamamıştır. Dolayısıyla Ceyda'nın birleşme özelliğini kullanacağını bildiği, işlemlerini bu noktadan hareketle devam ettirdiği ancak yazılı olarak ifade etmeyi ihmal ettiği düşünülmüştür.

Bu duruma ilişkin öğretmen adaylarından bazılarının düşünceleri şöyledir:

Ceyda: (...) Burada şunu $(a(xy)a^{-1})$ devam ettirelim. Bi kere grup olduğu için birleşme özelliği geçerli olacak. Yani $axya^{-1}$; buradan aslında şunu [teorem ifadesinde verilen ' $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ 'i göstererek] axa^{-1}, aya^{-1} böyle iki ifade elde etmemiz lazım. Şu iki basamaktan [eksik bırakılan adımları gösteriyor]... Çünkü şunu $(\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y))$ yazabilmemiz için. Ama bunu nasıl elde ederiz? Şuraya [$'axya^{-1}'$ de x ile y arasına e yazarak ' $axeya^{-1}$ ' yi elde ediyor] e yazsak x, y yani sonuç değişmeyecek. axe şunu sileyim de [x ile y arasına yazdığı e yi silerek bu aynı eşitliği

bir sonraki basamağa yazıyor] $axeya^{-1}$, e yerine de a çarpı, $a^{-1}a$ yazabiliriz. $axa^{-1}aya^{-1}$, sonuçta $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ oluyordu. Şuradan $(axa^{-1}aya^{-1})$ yazınca da direk şu ifade (axa^{-1}) bunu $(\varphi_a(x))$ veriyor. Bu (aya^{-1}) , ifade de bunu $(\varphi_a(y))$.

Hasan: (...) Burada bir e elemanı olduğunu söyleyebiliriz. e elemanı yine G nin bir, grup olduğu için G , birim eleman oluyor. Bunu işte $axa^{-1}aya^{-1}$ şeklinde yazabiliriz. Bu da şuna, şu sonuca varabiliriz, yine bu da $\varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$ şeklinde olur.

Gül: (...) Şurada [$(ax)(ya^{-1})$] ifadesinde parantezlerin arasını gösteriyor] bir e etkisiz elemanı vardır [$(ax)e(ya^{-1})$] yazıyor]. Bu e etkisiz elemanı şu şekilde $((ax)aa^{-1}(ya^{-1}))$ yazabiliriz. e çünkü G nin etkisiz elemanı a larda G nin etkisiz elemanı olduğundan ve G de bir grup olduğundan a nın zaten tersi var. Birleşme özelliğini [axa yazıyor] uygularsak, pardon [axa] yı siliyor] değişme özelliğini uygularsak, yani hımmm aslında e yi şu şekilde de yazabiliriz baştan [$(ax)aa^{-1}(ya^{-1})$] deki ' aa^{-1} 'i silerek ' $a^{-1}a$ ' yazıyor yani ' $(ax)a^{-1}a(ya^{-1})$ ' yazmış oluyor]. Şunu da sağlar eee. Birleşme özelliğinden tekrar bunları $((axa^{-1})(aya^{-1}))$ yazarsak, bu sefer bu $\varphi_a(x)\varphi_a(y)$ ye eşit olmuş oluyor. Dolayısıyla homomorfizmayı sağlıyor.

Görüldüğü gibi öğretmen adayları genel olarak ispat tamamlama sürecinde kullanmaları gereken özellikleri amaçlarına uygun bir biçimde kullanabilmişlerdir. İspatı tamamlama sürecinde kullanılması gereken özelliklerin kullanılmamasının bilgi eksikliğinden ziyade özelliğin kullanımının ihmal edilmesinden ve özelliğin işlemlerde nasıl uygulanacağını bilinememesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

4.3.5. Kavramsal Bilgileri Seçip Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“(G,.) bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” ifadesiyle verilen Teorem.1, “ G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G: a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.” ifadesiyle verilen Teorem.2, “ S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.” ifadesiyle verilen Teorem.6 ve “ U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.” ifadesiyle verilen Teorem.7'nin ispatlarında kavramsal bilgileri seçip kullanma bileşenine yönelik

basamaklar eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşeni tamamlayabilme durumları incelenmiştir.

Teorem.1’de ters elemanın varlığının araştırıldığı basamakta öğretmen adaylarının ters elemanın varlığına yönelik kavramsal bilgileri kullanabilmesi incelenmiş bu bağlamda “ $(xN)(x^{-1}N) = eN = (x^{-1}N)(xN)$ ” eşitliğini oluşturarak işlemleri yapmaları beklenmiştir. Bu kavramsal bilginin hatırlanmasını kolaylaştırmak amacıyla etkisiz elemanın varlığına yönelik basamak anahtar fikir olarak verilmiştir.

Öğretmen adaylarının düşünceleri incelendiğinde; yalnız Umut’un anahtar fikir olarak verilen birim elemanın varlığının gösterildiği basamağı doğru bir biçimde analiz ettiği görülmüştür. Dolayısıyla Umut kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek bu anahtar fikri iyi analiz ettiği için ispatı beklenen düzeyde tamamlayabilmiştir. Diğer öğretmen adayları ise, kavramsal bilgileri seçip kullanmalarına yardım edecek anahtar fikri gözden kaçırdıkları için tek taraflı olarak işlemleri ilerletmişler dolayısıyla ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamışlardır.

Bu duruma yönelik bazı öğretmen adaylarının görüşleri şöyledir:

Ezgi: (...) *G birim eleman, her xN eleman G/N için $(xN)(eN) = xN$; birim eleman olduğunu direk göstermiş, ben de bunu [ters eleman özelliğine yönelik verilen anahtar fikri okudu] şöyle yapayım [ters elemanın varlığının ispatına başlıyor]. $(x.x^{-1})N$ diyeyim. x in kendi ile tersinin birleşimine eN . E zaten ters eleman olması için yani kendisi ile tersini işleme soktuğumdan birim eleman olması lazım. O zaman ben buradan x^{-1} eleman, $x^{-1}N$ elemandır G böler N derim [$x^{-1}N \in G/N$ yazıyor]. Yani şey, ters eleman var e birimi var, birleşme var, birim var, ters eleman var, o zaman G/N bir gruptur.*

Hasan: *Birim elemanı. Evet. Hı hı. Birim elemandır. Alta geçiyorum o zaman [Birim elemanın varlığını araştırdığı anahtar fikri okuyor].*

Mülakatçı: *Neyi göstermeye çalışmış?*

Hasan: *Şimdi ters elemanı göstermeye çalışıyor. Hani grup olduğunu göstermek için. Birim elemanı var. Bunu da şu şekilde yazabiliyorduk. $(x.x^{-1})N = eN$ şeklinde yazabiliriz. Bu da N ye eşit zaten. N zaten yukarıda bulmuştuk, birim elemandı. E benim*

elemana gidiyorsa $(x^{-1}N)$ ters olacak. Yani ters eleman olacak. Buraya da şunu yazabiliriz. $(x^{-1})N$ eleman G/N , yani ters elemanın varlığı.

Umut: (...) G nin birim elemanı e olsun. Her x elemanı xN bölüm grubunun elemanı için, yan küme olduğu için bölüm grubunun da elemanı olacaktır. $(g_1N)(g_2N)$ nin çıktısı $(g_1g_2)N$ olduğu için $(xN)(eN)$ için de aynı şekilde $(xe)N$ olacaktır. (xe) de e birim eleman olduğu için $= xN$ olarak çıkacaktır. Bunu sağdan bir de soldan göstermemiz gerekir. Yine $(eNxN)$ i almış, bunun da çıktısı $(ex)N$ olacaktır (ex) birim eleman olduğu xN olarak çıkacaktır. Sağdan ve soldan eşit olduğu için, burada da N nin, G/N nin birim elemanı olduğunu söylemiş. En son üçüncü adımda, ters elemanın varlığını göstermeliyiz. Yine her xN eleman G/N grubu için, $(xN)^{-1}$, $(ab)^{-1}$ in biz $b^{-1}a^{-1}$ olduğunu biliyoruz. Buradan $(xN)^{-1}$ in de $x^{-1}N$ elemanı G/N var mıdır, ona bakacağız şimdi. Şimdi $(xN)(x^{-1}N)$ yine çıktı aynı olacaktır. $(xx^{-1})N$ olacaktır. Buradan da (xx^{-1}) de e olacağından N yi verdi yani. Bu demek ki (xN) in tersinin $((xN)^{-1})$ soldan tersinin $x^{-1}N$ olduğunu söylüyor bize. Aynı şekilde bir de sağdan aynı işlemi yaparsak; $(x^{-1}NxN)$ olacaktır. Bu da aynı şekilde çıktısı $(x^{-1}x)N$ olacaktır. $(x^{-1}x)$ de e olduğundan burada da N olacaktır, yani birimi verdiği için sağdan ve soldan her ikisini de sağladığı için burada xN in tersinin $((xN)^{-1} = x^{-1}N)$ $(x^{-1}N)$ olduğunu gösteririz. Dolayısıyla ters elemanı da gösterdiğimizde G/N bir grup olduğunu söyleriz.

Görüldüğü gibi Ezgi, ters elemanın varlığını araştırırken birim eleman ve ters eleman özelliğinde verilen anahtar fikirler ve her ne kadar sözlü olarak ifade etmese de birleşme özelliğinde verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak ispatı belirli bir düzeye getirmiştir. Benzer şekilde Hasan da birim eleman ve ters eleman özelliğinde verilen anahtar fikirlerden ve her ne kadar sözlü olarak ifade etmese de önceden yazdığı normal alt grup özelliğinden yola çıkarak eksik bırakılan adımları tamamlamaya çalışmıştır. Ancak her ikisi de kavramsal bilgileri seçip kullanmalarına yardım edecek anahtar fikri gözden kaçırmış ve dolayısıyla tek taraflı olarak işlemleri yürütmüş ve ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamışlardır. Oysa Umut, kavramsal bilgileri seçip kullanmasına yardım edecek anahtar fikri iyi analiz etmiş ve yorumlamış, bu sayede ters elemanın varlığına yönelik basamağı eksiksiz tamamlamıştır.

Teorem.2’de i ve ii ispatlarında birim ve ters eleman özelliklerine yönelik öğretmen adaylarının kavramsal bilgileri incelenmiş ikinci adımlarda ters eleman kavramını hem işlemlerine uygulayabilmeleri hem de ifade etmeleri, üçüncü adımlarda ise verilen eşitlikte yapılan işlemlerin birim eleman kavramına yönelik olduğunu ifade etmeleri beklenmiştir.

Öğretmen adaylarının düşünceleri bu bağlamda değerlendirildiğinde Gül, Ezgi ve Hasan i. ve ii. ispatta birim ve ters elemanlara yönelik kavramsal bilgileri doğru bir biçimde seçip ifade edebilmişlerdir. Ceyda birim ve ters elemene yönelik kavramsal bilgileri doğru bir biçimde seçip kullanamamıştır. İşlemlerini basamak basamak yazmada sorun yaşayan Ceyda bütün sorular bittikten sonra yeniden bu soruya zaman ayırmak istediğinde ise aynı durum yaşanmamış, işlemlerini basamak basamak yazabilmiştir. Bu durumun Ceyda’nın uygulamanın ilk dakikalarındaki heyecanından ve uygulamaya yönelik tecrübesizliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğretmen adaylarından Umut ise, kavramsal bilgileri seçip kullanmada sorun yaşamamış ancak işlemlerini doğru ilerletmesine rağmen basamak basamak yazarak aktarmada başarılı olamamıştır.

Teorem.2’de kavramsal bilgileri seçip kullanmalarına yönelik bazı öğretmen adaylarının düşünceleri şöyledir:

Gül: (...) eee [bir sonraki adıma ' $a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$ ' yazıyor] h şeklinde şurası ($a^{-1}a$) e olur, bu ($a^{-1}ax^{-1} = a^{-1}h$) da buna ($ex^{-1} = a^{-1}h$) ulaşmamızı sağlar. Bu grupta [düşünerek] ters eleman özelliğinden olabilir [diyerek bırakılan ilk boşluğa 'ters eleman' yazıyor]. Sonra eee çarpı $x - 1$ de bu zaten her iki tarafın tersini almış, grupta etkisiz eleman bu da [bırakılan ikinci boşluğa 'etkisiz eleman' yazıyor], immm buradan x , a nın tersi a olur h eleman H ydı ve H , G nin alt grubu olduğundan imm şimdiii evet x i eşitliğini ($x = h^{-1}a$) gösterdik [i şikkına ait hipotezi ve hükmü belirleme basamağını tekrar okuyor] , şunu $ax^{-1} = h$ göstermedik mi? h nın tersi H , yok, x x nerenin elemanıydı x , G nin elemanı h da zaten H nin a da Ha nin elemanı mı oluyor, yok o da G nin elemanı bu da H nin. Ha tersine bakarsak y eleman Ha alınır, H vardır öyle ki $y = xa$ buradan şey [a^{-1} / sağdan' yazarak] bu da sağdan işleme sokuyor, [$ya^{-1} = xaa^{-1}$ ' yazıyor] şurası (aa^{-1}) e zaten etkisiz eleman [bırakılan boşluğa

'etkisiz eleman' yazıyor], yok ters eleman mı? [yazdığı 'etkisiz eleman' ı siliyor] şimdi y eleman H

Mülakatçı: *Oraları neden yazmadın?*

Gül: *Burayı, tam emin olamadım.*

Mülakatçı: *Hangi özelliği kullandın?*

Gül: *Ters eleman [diyerek ii. ispatta bırakılan ilk boşluğa 'ters eleman' yazıyor] Burada da etkisiz elemanı [diyerek ikinci boşluğa yazıyor] (...)*

Görüldüğü gibi Gül, i. ispatta duraksamadan etkisiz ve ters eleman kavramlarını ilgili boşluklara yazabilmişken ii. ispatta aynı adımları tamamlarken duraksamış, yaptığı işlemleri tekrar gözden geçirdikten ve emin olduktan sonra ilgili adımları tamamlayabilmiştir. Bu duruma grup özelliklerini hep aynı sırayla göstermenin oluşturduğu alışkanlıkların ya da ezberin sebep olduğu düşünülmektedir.

Umut: (...) O zaman $ex^{-1} = a^{-1}h$ elde ediyorum. Grupta birim elemanın varlığını da buluyorum [önceden hatalı olarak tamamladığı 'Grupta birim özelliğinden' ifadesini göstererek]. Buradan bu bana şunu garantiliyor: ex^{-1} 'i.

Mülakatçı: *Birim elemanı aşağıda kullanmış ama sanki.*

Umut: O zaman ters elemanın varlığından mı yapmış? Ters eleman hocam doğru çünkü niye a^{-1} ile işleme tabi tuttuğumuz için a^{-1} elemanı G dir yani, Bu da ters elemanın varlığından söz etmiş ['Ters elemanın varlığından söz etmiş' diyor ancak; 'Grupta $a^{-1} \in G$ özelliğinden' yazıyor]

(...) Buradan yine grupta birleşme özelliğinden, yani ilk önce buraya [üçüncü adımda verilen ' $ya^{-1} = xe$ ' eşitliğini göstererek] bakıyorum y , a^{-1} işleme tabi tuttuğu için, her tarafı sağdan a^{-1} ile işleme tabi tutuyorum. [$ya^{-1} = xaa^{-1}$ yazıyor] Yine birleşme özelliğini kullan diyor; parantezi açıyorum [$ya^{-1} = x(aa^{-1})$] şeklinde paranteze alıyor]. Bu da aa^{-1} birim eleman vardır gruplarda e dir. [$a.a^{-1} = e$ yazarak siliyor]; Birim eleman şey, ters eleman vardır pardon hocam, yine karıştırdım. a^{-1} elemanı G , dolayısıyla ters eleman özelliğinden yine, ya^{-1} in e olduğundan $= x.e$ olduğunu söylerim. Grupta birim eleman vardır. Birim eleman olduğundan, birim elemanla x i işleme tabi tuttuğum zaman, x i verecektir. $ya^{-1} x$ e eşittir. Buradan $x =$

ya^{-1} olur. Yine a^{-1} , G nin bir elemanı olduğundan, bunu yine a gibi düşünersek, ' ya ' olur. Şurada $y = xa$ idi. ' ya ' da, x de ' ya ' olabilir. O da eleman H olur.

Görüldüğü gibi Umut, i. ispatta basamak basamak ilerlemediği ve önceden yazdığı hatalı ifadeyi silmediği için aslında grup özelliklerine ait kavramsal bilgileri sözlü olarak ifade etmesine rağmen yazarken hatalı yazmış, bu durumu mülakatçının uyarısı ile düzeltmiş ve ii. ispatta da aynı durum yaşanmamıştır.

Teorem.6'nın ispatında öğretmen adaylarından lineer bağımsızlığa yönelik kavramsal bilgileri hatırlamaları ve eksik bırakılan ilk iki adımı bu doğrultuda tamamlamaları beklenmiştir. Katılımcıların tamamı lineer bağımsızlığa yönelik kavramsal bilgileri hatırlamış ve eksik bırakılan ilk adımı tamamlamış olmalarına rağmen matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksiklikleri sebebiyle ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesini yorumlayamamışlardır. Umut ve Ceyda eksik bırakılan ikinci adım için $v_1.x_1 + v_2.x_2 + \dots + v_n.x_n = 0$ denklemini oluşturmuş; Ceyda x_i leri Umut ise v_i leri katsayı olarak ele aldığını ifade etmiştir. Bu durum lineer bağımsızlığa yönelik kavramsal bilgileri bilmelerine rağmen matematiksel dil ve notasyon bilgisi eksikliklerini bir kez daha göstermiştir. Ezgi ve Hasan mülakatçının da uyarısıyla ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesini doğru bir biçimde yorumlayarak ikinci denklemi oluşturabilmişlerdir. Hasan'ın mülakatçının uyarısından önce de ' $x_i \rightarrow v_i$ 'yi doğru anladığına yönelik ifadeleri olmasına rağmen mülakatçının uyarısı ile ikinci denklemi yazmaya başladığı görülmüştür. Ancak Umut'un Teorem.6'ya yönelik ispat süreci incelendiğinde de mülakatçının Hasan ve Ezgi'nin ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesini doğru yorumlamasına sebep olan uyarısını Umut'un sözlü olarak zaten ifade ettiği ancak bu ifadeyi Hasan ve Ezgi gibi doğru yorumlayamadığı görülmüştür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının lineer bağımsızlığa yönelik kavramsal bilgileri kullanabildikleri ve bileşene ait tamamlanmayan adımların matematiksel dil ve notasyon bilgisine ve bu bilgilerin yorumlanmasına ilişkin eksiklikleri sebebiyle tamamlanamadığı görülmüştür.

Teorem.6'da kavramsal bilgileri seçip kullanmalarına yönelik bazı öğretmen adaylarının ifadeleri şöyledir:

Umut: (...) Şimdi lineer bağımsızlık tanımını kullanarak c_i eleman R ve x_i eleman S lerden oluşacak şekilde $c_1.x_1 + c_2.x_2 + c_3.x_3 + \dots + c_i.x_i$ lerden oluşuyor, bu ifadenin 0 a eşit [$c_1.x_1 + c_2.x_2 + c_3.x_3 + \dots + c_i.x_i = 0$ yazdı], eğer bütün c_1, c_2, c_3 ler 0 a

eşitse c_n ler lineer bağımsızdır; ancak bir tanesi için eğer 0 dan farklı bir c_i için, bu lineer bağımlıdır. Sisteminin lineer bağımsız olabilmesi için tüm c_i lerin 0 olması gerekir. c_1, c_2, c_3, c_4 hepsi birden c_n hepsi birden 0 olması gerekir. O yüzden $c_i = 0$ ve $i; 1$ den n e kadar olmalıdır demiş. Daha sonra S' kümesi S nin bir alt kümesi. S nin bir alt kümesi olduğundan [$S' \subset S$ yazdı], bazı x_i ler yani şuradaki (S) x_i ler bazı x_i ler, ayrıyeten bu kapsadığı için S' nü, bunun (S') da elemanı olacaktır. Dolayısıyla x_i den v_i ye bir fonksiyon tanımladığım zaman buna göre; yine $i = 1, 2, 3 \dots n$ e kadar gitsin. $v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + \dots + v_n \cdot x_n = 0$ [boş bırakılan ikinci kısma ' $v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + \dots + v_n \cdot x_n = 0$ ' eşitliğini yazdı] olması için yine v_i lerin hepsinin birden 0 olması gerekir. Lineer bağımsız olması için. Eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri, S nin elemanları olduğundan yani v_i ler S nin elemanı olduğundan [$v_i \in S$ yazıyor] v_i vektörleri lineer bağımsızdır. S nin niye elemanları? Çünkü v_i ler x_i leri, v_i ye götürüyor [$x_i \rightarrow v_i$ yazıyor]. Şuradan x_i alırsam, bunu (x_i) $f(x_i)$ ye götürür v_i de.

Hasan: (...) Lineer bağımsızlık denklemini yazacağız. Hani mesela şu $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_i x_i$ şeklinde, 0 a eşitleyeceğiz.

Mülakatçı: Son eleman n miş. $c_n x_n$

Hasan: H_1 h_1 yani [$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$ yazdı]. x_n şeklinde olacak ve burada [S sisteminin çözümünde.....' anahtar fikrini göstererek] hani, bir denklem sisteminden bahsediyor. c_i katsayılarının sıfır olması gerektiğini söylüyor. Yine aynı şekilde S' kümesi de S nin bir alt kümesi olduğundan, bazı x_i ler S' de olacaktır. x_i lere v_i şeklinde v_i olsun demiş. S' kümesinin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. Yani biraz önceki verdiği bilgiye S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan, alt küme olduğunun hani, S deki x_i ler S' nün de elemanı olabilir, diyor herhalde.

Mülakatçı: x_i leri v_i lere götürmüş.

Hasan: O zaman şunu yazacağız hani $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$ yazacağız. S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

Teorem.7'nin ispatında öğretmen adaylarından alt uzay kavramına yönelik kavramsal bilgilerden yola çıkarak " $c \cdot u + v \in U$ " ile " $c \cdot u + v \in W$ " ifadelerini yazmaları beklenmektedir. İspat tamamlama süreçleri incelendiğinde bütün öğretmen adaylarının " $c \cdot u + v \in U$ " ile " $c \cdot u + v \in W$ " ifadelerini yazabildikleri ancak Umut ve

Hasan'ın bu ifadeleri yazarken kesişimin tanımını kullandıkları, alt uzaya yönelik kavramsal bilgileri kullanmadıkları ve dolayısıyla eksik bırakılan adımları doğru tamamlayamadıkları görülmüştür.

Teorem.7'de kavramsal bilgileri seçip kullanmalarına yönelik Umut ve Ezgi'nin ifadeleri şöyledir:

Umut: (...) Buradan c elemanı F için, F cismi için, $c.u$ elemanı U kesişim W ve $c.u$ elemanı, U ve $c.u$ elemanı W dir [$c \in F$ için $cu \in U \wedge cu \in W$ yazdı]. Çünkü c bir cisim olduğu için u elemanı U kesişim W olduğu için, hem u elemanı U , u elemanı W , $c.u$ ile çarptığımız zaman, skaler ile çarptığımız zaman, bunlar ($c.u$) da U nun ve W nin elemanları olacaktır. $c.u$ ve v elemanıdır U ve $c.u$ ile v elemanıdır W ise [$cu, v \in U \wedge cu, v \in W$ yazdı] hem $c.u$ elemanı, hem v elemanı ise iki elemanın toplamı da yine bu kümededir. Dolayısıyla $c.u + v$ elemanı U , $c.u + v$ elemanı W olur. Buradan da $c.u + v$ nin elemanı U kesişim W olduğunu söyleriz. Veyahut da hem diğer yoldan, hem $u.v$ nin elemanı U kesişim W olduğunu gösterip, $c.u$ nun da skalerle çarpımında yine kapalı olduğunu, yani çarpmaya göre kapalı, hem skalerle çarpma işlemine göre kapalı olduğunu göstererek de söyleyebilirdik.

Ezgi: $cu + v$ elemanıdır U olur. Çünkü bu niye alt uzay olduğunu göstermek için bunun ($c.u + v \in U \cap W$) olması gerekiyorsa, U da kendi başına bir hani burada [teoremi gösteriyor] bir alt uzay olduğunu söylemiş. O yüzden ben derim ki cu elemanıdır ve aynı şekilde $cu + v$ de elemanıdır ve [$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$ yazıyor]. $cu + v$ elemanıdır W olur.

Mülakatçı: Ayrı ayrı yaz istersen çünkü iki tane boşluk vermiş sana.

Ezgi: [$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$ yi siliyor ve ayrı ayrı yazıyor] Çünkü bunlar birer birer ayrıca alt uzay, çünkü. [Her bir ifadenin yanına 'alt uzay' yazıyor]

4.3.6. Önceki Bilgileri Kullanma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Bireyin hâlihazırda bilmesi gereken yardımcı bir teoremi ya da ispatın akışı sırasında ulaştığı bir bilgiyi kullanıp kullanmadığının araştırıldığı önceki bilgileri kullanma bileşeninin tamamlanma durumu, “ $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$

için, $Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.” ifadesiyle verilen Teorem.2’de ve “ S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.” ifadesiyle verilen Teorem.6’da araştırılmıştır.

Teorem.2’de öğretmen adaylarından ‘ $h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan denirse’ ifadesini tamamlarken verilen ‘ $h \in H$ ve $H \leq G$ ’ bilgilerini kullanmaları ve eksik bırakılan bölümü ‘ $h^{-1} \in H$ ve $h^{-1} = h_0 \in H$ ’ yazarak tamamlamaları beklenmiştir. İfadeler incelendiğinde öğretmen adaylarının hiçbirinin bu adımda verilen önceki bilgileri etkin kullanamadıkları ve dolayısıyla grupta ters elemanın varlığına yönelik ‘ $h^{-1} \in H$ ’ ifadesini yazamadıkları görülmüştür. Öğretmen adayları bu adımı tamamlarken önceki bilgileri kullanmamış olmalarına rağmen Umut’tan farklı olarak Gül, Ezgi, Ceyda ve Hasan eksik bırakılan bölümden bir adım önce ve bir adım sonra verilen anahtar fikirler arasında ilişki kurarak en azından ‘ $h^{-1} = h_0$ ’ eşitliğini yazabilmişlerdir.

Teorem.2’de önceki bilgileri kullanmasına yönelik Ceyda’nın ifadeleri şöyledir:

Ceyda: (...) olduğundan burada h' yani h ’nin tersi = h_0 olmuş demişse.

Mülakatçı: Neden böyle yazdın?

Ceyda: Çünkü hocam şurada [$x = h_0 a$]’yı göstererek şu ($x = h^{-1} a$) ifadenin aynısı, ama sadece h ’in tersine h_0 demiş. O yüzden yazdım bunu. (...)

Görüldüğü gibi Ceyda, eksik bırakılan bölümden önce verilen bilgileri değil anahtar fikir olarak verilen bilgileri kullanarak eksik de olsa bu bölümü tamamlayabilmiştir.

Teorem.2’de önceki bilgileri kullanmasına yönelik Umut’un ifadeleri şöyledir:

Umut: (...) h eleman H ve H, G ’nin bir alt grubu olduğundan; boşluk doldurmaya ne getireceğiz? [$(x = h_0 a)$ anahtar fikrini göstererek düşünüyor] Bunda $x = h_0 a$ alınırsa mı denirse mi diyeceğiz; [Boş bırakılan kısma ‘ $x = h_0 a$ ’ yazıyor] denirse, (...)

Görüldüğü gibi Umut, eksik bırakılan bölümden önce verilen bilgileri okuduğu halde bu bilgileri kullanmadan ilerlemeye çalışmış diğer öğretmen adayların yaptığı gibi bir ilişki de kuramamış dolayısıyla bu bölümü tamamlayamamıştır.

Teorem.6'da öğretmen adaylarından ispat içerisinde verilen 'Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır.' bilgisini kullanarak ispatın sonunda 'öyleyse bütün b_i katsayıları sıfırdır.' çıkarımını yapmaları beklenmiştir. İfadeler incelendiğinde öğretmen adaylarından Ezgi, Ceyda ve Hasan'ın bu çıkarımı zihinsel olarak yaptıkları ancak yazılı olarak ifade edemedikleri mülakatçının da yönlendirmesiyle yazdıkları ifadelerde bu konuya yönelik bir bilgi vermedikleri; diğer katılımcıların ise bu çıkarımı yapamadığı dolayısıyla eksik bırakılan adım öncesinde verilen bilgiyi amaçlarına uygun bir biçimde kullanamadıkları görülmüştür.

Teorem.6'da önceki bilgileri kullanmasına yönelik Ceyda'nın düşünceleri şöyledir:

Ceyda: (...) Biz bunu ($c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_i \cdot x_i = 0$) lineer bağımsız bulduysak yani şuradaki ($c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n = 0$) c_i leri lineer bağımsız bulduysak. Yok x_i leri... v_i vektörleri S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri de lineer bağımsızdır.

Mülakatçı: Yani neyi göstermiş oldu?

Ceyda: Şu ($x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n = 0$) denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü olmadığını lineer bağımsız olması için. Hani sadece sıfır için sağlama.

Mülakatçı: İspatı tamamla o zaman.

Ceyda: O zaman v_i ler sıfıra mı eşit olacak. [$v_i = 0$ yazıp, siliyor] Tamamlayamadım. S nin elemanı olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

Mülakatçı: v_i lerin lineer bağımsız olması demek ne demek?

Ceyda: Şunun ($x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n = 0$) sıfırdan farklı çözümünün olmaması demek... Şunu katsayı olarak, katsayı olarak [$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n = 0$ '] denkleminde ' x_i ' leri katsayı olarak gösteriyor]

Görüldüğü gibi Ceyda eksik bırakılan ikinci adıma yazdığı denklemde x_i lerin katsayı olduğunu ifade etmiş ve bu sebeple denklemi oluşturma mantığı doğru olmasına rağmen matematiksel notasyon bilgisi eksikliği ve önceki bilgileri kullanamaması sebebiyle bu bileşeni tamamlayamamıştır.

Teorem.6'da önceki bilgileri kullanmasına yönelik Hasan'ın düşünceleri şöyledir:

Mülakatçı: *Evet dolayısıyla ne yazarız?*

Hasan: *Dolayısıyla v_i vektörleri, S nin elemanları olduğundan, hani bunların [ikinci boşluğa yazdığı denklemi gösteriyor] da yukarıda gibi sıfır olması gerekecek hani.*

Mülakatçı: *Teorem ne diyordu? Teoremi istersen bir daha oku.*

Hasan: *Tamam. S kümesinin bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de S' alt küme S olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır, diyor.*

Mülakatçı: *S' lineer bağımsız olduğunu buradan nasıl görürüz?*

Hasan: *Yani şu denklemden $(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0)$ bahsediyoruz. Yani S' nün lineer bağımsız olduğunu S' deki elemanlar, x_i ler, hani S nin bazı x_i lerin S' nün elemanıydı. x_i ve v_i yi yazdık. x_i ler lineer bağımsız olduğu için v_i ler de lineer bağımsızdır, diyebilir miyiz? Acaba.*

Görüldüğü gibi Hasan, ‘tüm c_i katsayıları sıfır olmalıdır.’ anahtar fikrini okumuş olmasına ve ikinci yazdığı denklemde bu bilgiyi kullanarak yorum yapmış olmasına rağmen her iki denklemde de aynı katsayıyı kullandığı için katsayının sıfır olduğunu yeniden ve yazılı olarak ifade etme gereği duymamıştır.

Teorem.6’da önceki bilgileri kullanmasına yönelik Ezgi’nin ifadeleri şöyledir:

Ezgi: *(...) Şunlar (v_1) eleman S olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsız. Çünkü bunun (v_1) da sıfır olması için ancak şey olması lazım. Hani sıfır olması lazım aynı bu şekilde... $v_1, 2, 3, \dots$ bunlar [v_i leri gösteriyor] da $= 0$ olmalı o yüzden lineer bağımsız olmalı.*

Mülakatçı: *Yaz dolayısıyla.*

Ezgi: *Dolayısıyla diyeyim, dolayısıyla ancak bunun [$v_1 c_1 + v_2 c_2 + \dots + v_n c_n = 0$] denklemini göstererek] hani lineer bağımsız olabilmesi için şu katsayıların dedik, hani sıfır olması lazım. v_i ler sıfır. i ler de $1, 2, \dots$ den n ’e kadar dolayısıyla sıfır olup lineer bağımsızdır. [$\text{‘Dolayısıyla } v_i = 0 \text{ (} i = 1, 2, \dots \text{) olup lineer bağımsızdır’ yazdı.}]$*

Görüldüğü gibi Ezgi, her iki sistemde de aynı katsayıyı kullandığı ve dolayısıyla katsayının sıfır olduğunu yeniden ifade etme gereği duymadığı ayrıca dikkatsizlik sonucu daha önce vektör olarak ele aldığı ‘ v_i ’ leri sonraki adımlarda katsayı olarak

ifade ettiği için bu bileşeni tamamlayamamıştır. Bu durumda Ezgi'nin, dikkatsizlik kaynaklı matematiksel notasyon bilgisi eksikliği ve önceki bilgileri kullanamaması sebebiyle bu bileşeni tamamlayamadığı düşünölmüştür.

Bütün bunlar gözönüne alındığında Ezgi, Ceyda ve Hasan'ın aslında eksik bırakılan bölümü tamamlayabilmek için verilen ön bilgiyi kullanabildikleri ancak matematiksel notasyon bilgisi eksikliğinden kaynaklanan yanlış yazımları sebebiyle bu bileşeni tamamlamaya yönelik doğru çıkarımı yazılı olarak ifade edemedikleri sonucuna varılmıştır.

4.3.7. İşlem Yapma Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“($G, .$) bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.” ifadesiyle verilen Teorem.1, “($G, .$) bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için, $Ha = \{x \in G : x \equiv a \pmod{H}\}$ yani $Ha = \bar{a}$ dir.” ifadesiyle verilen Teorem.2 ve “ G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a : G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.” ifadesiyle verilen Teorem.5'in ispatlarında öğretmen adaylarının işlem yapabilme durumları incelenmiştir.

Öğretmen adaylarının işlemlerini beklenen şekilde yapabilmeleri, Teorem.1'de grupta birleşme ve ters eleman özellikleri ile normal alt grup tanımını kullanabilmelerine; Teorem.5'te ise grupta birleşme ve ters eleman özellikleri ile grup homomorfizmasının özelliğini kullanabilmelerine ve ayrıca yaptıkları işlemleri adım adım yazabilmelerine bağlıdır. Bu sebeple bu teoremlerde bu bileşenlere yönelik aktarılan bulgular öğretmen adaylarının işlem yapma bileşenini tamamlama durumuna yönelik bulgulara işaret etmektedir.

Öğretmen adaylarının Teorem.1'in ispatının tamamlanmasında yaptıkları işlemler bütöncöl bir bakış açısıyla ele alındığında; ($G, .$) grubunun birleşme özelliğini Gül ve Umut, normal alt grup tanımını ise yalnız Hasan kullanmışken, ($G, .$) grubunun ters eleman özelliğini hiçbir katılımcının kullanmadığı ve sözlü olarak da ifade etmediğı görölmüştür. Ancak katılımcılardan Gül, Ezgi, Umut ve Hasan anahtar fikirlerden yardım alarak işlemlerini beklenen düzeyde ilerletebilmişlerdir. Teorem.5'in ispatının tamamlanmasında yaptıkları işlemler bütöncöl bir bakış açısıyla ele alındığında ise;

öğretmen adaylarının tamamının grupta birim eleman özelliği ve homomorfizma özelliğini kullandıklarını ancak birleşme özelliğini yalnız Gül ve Umut'un kullandığı, Ceyda'nın sözlü olarak ifade ettiği ancak bu özelliği işlemlerinde yazılı olarak belirtmediği, Ezgi ve Hasan'ın ise birleşme özelliğini hiç kullanmadıkları görülmüştür. Bununla birlikte bütün katılımcılar bu teoremin ispatında işlemlerini tamamlayabilmişlerdir.

Bütün bunlar gözönüne alındığında öğretmen adaylarının bir özelliği ya da bir tanımı kullanmadan da anahtar fikirler yardımıyla işlemlerini ilerletebileceği sonucu çıkarılmıştır.

Teorem.1'de öğretmen adaylarının işlem yapabilme durumları ile birleşme özelliği, ters eleman özelliği ve normal alt grup tanımını kullanma durumlarının karşılaştırması Tablo 4.36'da sunulmuştur.

Tablo 4.36.

Teorem.1'de İşlem Yapabilme Bileşeninin Tanım ve Özellik Kullanma Durumuna Göre İncelenmesi

Öğretmen Adayı	Birleşme Özelliği	Ters Eleman Özelliği	Normal Alt grup Tanımı	İşlem Yapabilme
Gül	Kullandı	Kullanmadı	Kullanmadı	Anahtar fikirler yardımıyla eksik de olsa yapabildi
Ezgi	Kullanmadı	Kullanmadı	Kullanmadı	Anahtar fikirler yardımıyla eksik de olsa yapabildi.
Ceyda	Kullanmadı	Kullanmadı	Kullanmadı	İşlemleri yapamadı.
Umut	Kullandı	Kullanmadı	Kullanmadı	Anahtar fikirler yardımıyla işlemlerini yapabildi.
Hasan	Kullanmadı	Kullanmadı	Kullandı	Anahtar fikirler yardımıyla eksik de olsa yapabildi.

Teorem.5'te öğretmen adaylarının işlem yapabilme durumları ile birleşme özelliği, birim eleman özelliği ve homomorfizma özelliğini kullanma durumlarının karşılaştırması Tablo 4.36'da sunulmuştur.

Tablo 4.37.

Teorem.5'te İşlem Yapabilme Bileşeninin Tanım ve Özellik Kullanma Durumuna Göre İncelenmesi

Öğretmen Adayı	Birleşme Özelliği	Birim Eleman Özelliği	Homomorfizma Özelliği	İşlem Yapabilme
<i>Gül</i>	Kullandı	Kullandı	Kullandı	Eksiksiz olarak yaptı.
<i>Ezgi</i>	Kullanmadı	Kullandı	Kullandı	Birleşme özelliğini kullanmadan yaptı.
<i>Ceyda</i>	Yalnız sözlü olarak ifade etti	Kullandı	Kullandı	Birleşme özelliğini yazılı olarak kullanmadan yaptı.
<i>Umut</i>	Kullandı	Kullandı	Kullandı	Eksiksiz olarak yaptı.
<i>Hasan</i>	Kullanmadı	Kullandı	Kullandı	Birleşme özelliğini kullanmadan yaptı.

Görüldüğü gibi, işlem yapabilmek için kullanılması beklenen özellik veya tanımların herhangi birinin kullanılmaması her ne kadar anahtar fikirler yardımıyla olsa bile işlemlerin eksik olması sonucunu da beraberinde getirmiştir. Bununla birlikte işlemlerinin eksiksiz yapılabilmesi, bu süreçte kullanılması gereken bütün özelliklerin veya tanımların kullanmasına bağlıdır.

Teorem.2'de ise öğretmen adaylarından i. ispatta verilen $ax^{-1} = h$ eşitliğinde eşitliğin her iki yanını a^{-1} ile soldan işleme tabi tutarak ve $a^{-1}(ax^{-1}) = a^{-1}h$ eşitliğini elde etmeleri ve benzer şekilde ii. ispatta $y = xa$ eşitliğinde eşitliğin her iki

yanını a^{-1} ile sağdan işleme tabi tutarak $ya^{-1} = (xa)a^{-1}$ eşitliğini elde etmeleri ve yine işlemlerini adım adım yazabilmeleri beklenmektedir.

Teorem.2'ye yönelik yazılı ve sözlü ifadeleri analiz edildiğinde öğretmen adaylarının tamamının, i. ispatta verilen $ax^{-1} = h$ eşitliğinde eşitliğin her iki yanını a^{-1} ile soldan işleme tabi tutarak ve $a^{-1}(ax^{-1}) = a^{-1}h$ eşitliğini, benzer şekilde ii. ispatta $y = xa$ eşitliğinde eşitliğin her iki yanını a^{-1} ile sağdan işleme tabi tutarak $ya^{-1} = (xa)a^{-1}$ eşitliğini elde ettikleri ancak diğerlerinden farklı olarak Ceyda'nın işlemlerini adım adım yazabildiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının işlemlerini adım adım yazamamaları birleşme özelliğini nasıl uygulayacaklarını bilememelerinden kaynaklanmıştır. Hasan, Gül ve Elif eşitlikleri doğru oluşturmuş ancak işlemlerini adım adım yazmakta problem yaşadıkları için ilk adıma değil ikinci adıma yazmışlar, Umut eşitliği doğru oluşturmuş ve ilk adıma yazmış ancak aynı adımda birleşme özelliğini de uygulayarak $(a^{-1}a)x^{-1} = a^{-1}h$ eşitliğini elde etmiştir. Bu durumun katılımcıların aynı adımda birden fazla cebirsel işleme yer vermelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

4.3.8. İspatı Tamamlama Temel Bileşeninin Tamamlanma Durumuna İlişkin Bulgu ve Yorumlar

“Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.” ifadesiyle verilen Teorem.4'ün ve “ S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.” ifadesiyle verilen Teorem.6'nın ispatlarında ispatı tamamlama bileşenine yönelik basamak eksik bırakılmış ve öğretmen adaylarının bu bileşeni tamamlayabilme durumları incelenmiştir.

Öğretmen adaylarından Teorem.4'te ispatı bütüncül olarak ele almaları ve dolayısıyla sonuçta da ‘Dolayısıyla G grubu H grubuna eşittir. Yani; $H = \langle a \rangle$ ve $o(H) = k$ olup $G = \langle a \rangle = H$ dir.’ ifadesini kullanarak ispatı tamamlamaları beklenmiştir. Öğretmen adaylarının düşünceleri incelendiğinde Gül, Ezgi, Ceyda ve Hasan'ın sezgisel olarak ispatı anladıkları ancak yalnız Gül'ün yazılı olarak ispatı tamamlayabildiği görülmüştür. Ezgi yaşadığı kavram karmaşası sebebiyle, Hasan alt devir grubu ile grup arasında mantıksal bir ilişki kuramaması sebebiyle, Ceyda ise

düşüncelerini yazılı olarak nasıl ifade edeceğini bilememesi sebebiyle ispatı tamamlayamamıştır.

Teorem.4'te ispatın tamamlanmasına yönelik Ceyda'nın düşünceleri şöyledir:

Ceyda: a^k lar grubun elemanlarına eşit olacak. k yı değiştir yani bu k buradaki (a^k) k değil tabi. Burada da a^k yine e yi üretmiş. O zaman e de grup olduğu için, alt devir grubu, alt yani alt grup olduğu için e illaki H nin elemanı demek ki a^k H nin elemanlarını üretebiliyor. Diye bir yorum yapıp, o zaman k nin, k asal, k olduğunda da merte.. hı olmadı. Bi dakika. $o(H) = k$ olduğunda da H bir alt devir grubudur diyebiliriz.

Mülakatçı: Neden?

Ceyda: Çünkü e yi üretmiş hocam. k , a^k e yi üretmiş. e de H nin elemanı. Buradan $a^k = e$.

Teorem.4'te ispatın tamamlanmasına yönelik Hasan'ın düşünceleri şöyledir:

Hasan: Yani G nin mertebesine eşit olacak. Bu da direk şunu doğuruyor. Hani G nin mertebesine eşit olması için ve alt grubu olması için, hani direk H nin G ye eşit olmasını ortaya çıkartıyor. [$H = G$ yazıyor]

Mülakatçı: H alt devir grubuydu.

Hasan: Hı hı. Alt devir olduğunu nasıl gösteririz, işte? Yani devir noktasında biraz sıkıntı... O zaman mesela a^2 ye işte ve işte mesela a hani işte a^3 şeklinde gidecek. Devir grubu... [$\{a, a^2, a^3, \dots\}$ yazdı.]

Teorem.4'te ispatın tamamlanmasına yönelik Umut'un düşünceleri ise şöyledir:

Umut: Eğer $o(H) = 1$ e eşitse bu $(H) = e$ dir. Bu da e tarafından üretilir [$\{e\} = \langle e \rangle$ yazdı]. Eğer $o(H) = k$ ise. Gruplarda, grubun mertebesi ile elemanın mertebesi eğer birbirine eşitse, o devirli ise G grubu, H alt grubu için de devirli olduğunu söylerim. Yani $o(G)$ eğer k eleman tarafından üretiliyorsa, buradan $o(H)$ da yine k tarafından üretilir derim [$o(G) = \langle k \rangle \Rightarrow o(H) = \langle k \rangle$ yazıyor]. Bu da H nin bir devir grubu olduğunu gösterir. [H bir devir grubu olduğunu gösterir. yazıyor] Olduğunu gösterir.

Görüldüğü gibi Umut, Teorem.4'ün ispatını, bütüncül bir yaklaşım sergileyemediği ve ispata yanlış bir düşünceyle yaklaştığı için tamamlayamamıştır.

Öğretmen adaylarından Teorem.6'da ispatı bütüncül bir yaklaşımla ele almaları ve sonuç olarak 'dolayısıyla S' de lineer bağımsızdır.' ifadesiyle de tamamlamaları beklenmiştir. Katılımcıların ifadeleri incelendiğinde; Hasan, Ceyda ve Ezgi'nin ispatı bütüncül bir yaklaşımla ele alarak ' S' de lineer bağımsızdır.' cümlesiyle tamamladıkları, Umut ve Gül'ün ise ' $x_i \rightarrow v_i$ ' ifadesini matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle yanlış yorumlamaları dolayısıyla ispatı bütüncül olarak ele alamadıkları ve ispatı tamamlayamadıkları görülmüştür. Hasan ve Ezgi'nin düşündüklerini mülakatçının hatırlatması üzerine yazılı olarak ifade etmişlerdir.

Teorem.6'da ispatın tamamlanmasına yönelik Umut ve Ceyda'nın düşünceleri şöyledir:

Umut: (...) Bu v_i vektörleri, S nin elemanları olduğundan yani v_i ler S nin elemanı olduğundan [$v_i \in S$ yazıyor] v_i vektörleri lineer bağımsızdır. S nin niye elemanları? Çünkü v_i ler x_i leri, v_i ye götürüyor [$x_i \rightarrow v_i$ yazıyor]. Şuradan x_i alırsam, bunu (x_i) $f(x_i)$ ye götürür v_i de. Bu (x_i) aynı zamanda S' nün de elemanı idi. S' de x_i yi yine $f(x_i)$ ye götürecektir. O yüzden v_i vektörleri aynı zamanda S de S' nü kapsadığı için aynı şekilde bu x_i yi $f(x_i)$ ye götürecektir. v_i vektörlerinin elemanı olur. Yani S , burada v_i vektörleri S nin elemanları olur; x_i ler. Çünkü $f(x_i)$ şeklindedir. Dolayısıyla elemanı olur. Buradan da lineer bağımsız olduğunu söyleriz.

Görüldüğü gibi Umut, sözlü olarak ispatı tamamlama cümlesini ifade etse de bu ifadesi ispat sürecinde verilen bilgilerin yanlış bir düşünceden yola çıkarak açıklamış olması sebebiyle Umut'un bu bileşeni tamamladığı düşünülmemektedir.

Mülakatçı: Yani sen şu anda neyi göstermeye çalıştın bu ispatta?

Ceyda: Lineer bağımsızlığı gösteriyoruz.

Mülakatçı: Neyin lineer bağımsızlığını?

Ceyda: Hocam bir alt kümenin... S kümesi V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ise bu alt kümenin bir alt kümesi de yine V vektör uzayının lineer bağımsız oluyor. Neyi gösterdik? S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. O zaman S' alt küme S de lineer bağımsızdır. Bunu gösterdik hocam. [ispatın sonunda bırakılan eksik kısma ' $S' \subset S$ lineer bağımsızdır.' yazdı.]

Görüldüğü gibi Ceyda, ispatı bütüncül bir yaklaşımla ele alarak ispat tamamlama cümlesini oluşturabilmiş ve yazılı olarak ifade edebilmiştir.

Teorem.6'da ispatın tamamlanmasına yönelik Hasan'ın düşünceleri şöyledir:

Mülakatçı: *Yani ispatı tamamlamanı istiyor sadece senden aşağıda.*

Hasan: *v_i vektörleri bağımsızdır. Hah şundan bahsediyor herhalde. Hani S' deki v_i ler aslında S nin de elemanı oluyor. Alt küme olduğu için... Hımm. Yani, alt küme olduğu için hani, x_i nin, x_i gibi düşünebiliriz, x_i çünkü S nin elemanı ama v_i ler S' nün elemanı, S nin alt kümesinin elemanı olmuş oluyor. Yani x_i ler lineer bağımsızsa v_i ler için de lineer bağımsızdır, diyebiliriz. O zaman hani S' de lineer bağımsızdır, diyebiliriz.*

Mülakatçı: *Tamam, yaz istersen.*

Hasan: *[‘ S' de lineer bağımsızdır’ yazdı.]*

Teorem.6'da ispatın tamamlanmasına yönelik Ezgi'nin düşünceleri şöyledir:

Mülakatçı: *Hangisi de lineer bağımsızdır? Neyi gösterdik?*

Ezgi: *Şeyi S' nün de, şunun aldığımız S' de, yani aslında lineer bağımsız bir kümenin alt kümesininden lineer bağımsız olduğunu, hani biz burada göstermiş olduk.*

Mülakatçı: *Yaz istersen.*

Ezgi: *[yazdığı ‘lineer bağımsızdır’ ifadesini siliyor] olup S' . S' de lineer bağımsızdır. [‘ S' de lineer bağımsızdır’ yazıyor.]*

Görüldüğü gibi Hasan ve Ezgi bütüncül bir yaklaşımla ispatı ele almış ve sözlü olarak ispatı tamamlama cümlesini oluşturabilmiş ancak düşündüklerini mülakatçının hatırlatması üzerine yazılı olarak ifade etmişlerdir.

Bütün bunlar gözönüne alındığında öğretmen adaylarının ispatı bütüncül olarak ele aldıklarında ispatı tamamlama cümlesini oluşturabildikleri söylenebilir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Araştırmanın bu bölümünde matematiksel ispat sürecini oluşturan temel bileşenlerin belirlenmesine yönelik, öğretmen adaylarının matematiksel ispat yaparken temel bileşenleri tamamlama ve anahtar fikirleri kullanabilme durumlarına yönelik elde edilen bulgulardan ortaya çıkan sonuç, tartışma ve önerilere sırasıyla yer verilmiştir.

5.1. Matematiksel İspat Sürecini Oluşturan Temel Bileşenlerin Belirlenmesine Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Matematiksel ispat yapma sürecinde bireylerin karşılaştığı zorluklardan yola çıkılarak oluşturulan ve cebir uzmanlarının görüşleri doğrultusunda son şekli verilen temel bileşen formuyla (Şekil 4.2) ispat, zorunlu ve hiyerarşik olmayan bir yapıyla adım adım ele alınmıştır. Bir ispatta bu bileşenlerin her birinin mutlaka yer alması zorunlu değildir. Teoremin ifadesine ve ispatının yapısına göre hangi temel bileşenlerin ispatın yapısını oluşturduğu değişiklik gösterebilmektedir.

Matematiksel ispat yapma sürecinde karşılaşılan zorluklardan biri ispata nasıl ve nereden başlayacağını bilememektir (Karaoğlu, 2010; Moore, 1990; Moralı vd., 2006; Polat ve Akgün, 2016). Şekil 4.2’de verilen temel bileşen formunda ispata başlama süreci hipotezi belirleme ve hükmü belirleme olarak iki alt basamakta ele alınmıştır. Hipotezi belirleme basamağı; ispatın temelini oluşturan bir varsayımın kurulmasını; hükmü belirleme basamağı ise hipotezden yola çıkılarak varılacak olan yargının belirlenmesini içerir.

İspat yapma sürecinde karşılaşılan bir diğer önemli zorluk ise yöntem bilgisi eksikliğidir. Bu bağlamda ispat öğretimi sırasında etkili bir yöntem bilgisinin kazandırılması (Weber, 2001) ve ispat yapma süreci incelenirken de doğru yöntemin seçilip seçilmediğinin araştırılması gerekmektedir. Temel bileşen formunda yer verilen ispat yöntemini belirleme basamağı, uygun ispat yönteminin teorem ifadesinden yola çıkılarak tespit edilebilmesini içerir.

İspat yapma süreci bireylerin yeterli düzeyde kavramsal bilgiye sahip olup olmadıklarından (Karaoğlu, 2010; Moore, 1990) ve matematiksel tanımları ve onları nasıl kullanacaklarını bilip bilmediklerinden (Bayazit, 2009; Moore, 1990; Polat ve Akgün, 2016; Şahin, 2016) etkilenmektedir. Ayrıca bireylerin ön bilgi ve temel bilgi eksiklikleri de ispat yapma süreçlerini zorlaştırmaktadır (Polat ve Akgün, 2016). Dolayısıyla bireylerin önceki bilgilerinin ve kavramsal bilgilerinin yeterli olup olmadığı ve bu bilgileri ve tanımları kullanabilme durumları da matematiksel ispat yapma sürecini şekillendirmektedir. Şekil 4.2’de verilen temel bileşen formunda yer alan tanım kullanma bileşeni, tanımların ispatın amacına yönelik kullanımını; önceki bilgileri kullanma bileşeni, sahip olunması gereken bir ön bilginin ya da ispat yapma sürecinde ulaşılan bir bilginin kullanımını; kavramsal bilgileri seçip kullanma bileşeni ise matematiksel kavramların ve bu kavramlara yönelik bilgilerin doğru bir biçimde seçilerek kullanımını içermektedir. Hipotezi kullanma bileşeni ise teoremin ispatı için bir hipotez belirlenmiş ve ispatın akışı içerisinde hipotezin kullanımı gerekmişse bu hipotezin kullanımını kapsamaktadır.

Cebir alanında uzman üç akademisyenin görüşleri doğrultusunda temel bileşen formuna ilave edilen özellik kullanma ve işlem yapma bileşenlerinin de ispat yapma sürecini şekillendirdiği düşünülmektedir. Özellik kullanma bileşeni ispatı oluşturmaya yardımcı olması beklenen matematiksel bir özelliği kullanmayı; işlem yapma bileşeni ise çeşitli cebirsel işlemlerle ispatı belli bir düzeye taşımayı içermektedir.

İspatı tamamlama bileşeni ise ispat yapma sürecinde ulaşılan bütün bilgilerin belirli bir düzende ele alınarak gerekli çıkarımın yapılmasını ve matematiksel dil ve notasyona uygun ifadelerle ispatın sonlandırılmasını gerektirmektedir.

Bir teoremin ispatının temel bileşenler yardımıyla aşamalandırılmasının ve bu aşamalandırma ile bireylerin ispat yapma sürecinin basamak basamak ele alınmasının hem ispat öğretiminde hem de ispat yapma sürecinin incelenmesinde kolaylık sağlayacağı düşünülmektedir. Şekil 4.2’de verilen temel bileşen formu kullanılarak hiyerarşik olmayan belirli bir düzen içerisinde ispat öğretimi yapılmasının anlamayı kolaylaştıracağı ve öğreticiye ispat yapma sürecinde öğrencilerinin hangi basamakta zorluk yaşadıklarını bilme imkânı tanıyacağı öngörülmektedir.

5.2. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Anahtar Fikirleri Kullanabilme Durumlarına İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının matematiksel ispat yaparken anahtar fikirleri kullanabilme durumlarına yönelik elde edilen bulgulardan ortaya çıkan sonuç, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının anahtar fikirleri kullanabilme durumlarını ortaya çıkarabilmek amacıyla yedi teoremin anahtar fikirlerle desteklenmiş ispatlarından oluşan bir uygulama kullanılmıştır. İspat araştırması karmaşıklıkla uğraşmayı gerektirir (Reid, 1999). Bu karmaşıklığı nispeten ortadan kaldırabilmek ve bireylerin ispat yapma süreçlerini detaylı olarak ortaya koyabilmek amacıyla ispat süreci bileşenlere ayrılmıştır. Uygulamada bazı bileşenler eksik bırakılmış ve eksik bırakılan bileşenin tamamlanabilmesi için anahtar fikir adı verilen ipuçlarına yer verilmiştir. İspat yaparken bütün bilgileri koordine edip kullanmada zorluk yaşanabildiği (Moore, 1990) için bu uygulamada anahtar fikirler ispat içerisinde belirli bir düzende verilmiş bu şekilde öğretmen adaylarının eksik bırakılan temel bileşenleri tamamlayabilmek için verilen anahtar fikirleri kullanabilme durumları belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının eksik bırakılan bileşenleri tamamlarken anahtar fikirlerden etkili bir şekilde faydalandıkları yalnız Umut'un bazı teoremlerde anahtar fikirlerden faydalanmak yerine açıklama yoluna gittiği dolayısıyla anahtar fikirleri ispata yardımcı olacak şekilde kullanamadığı görülmüştür. Öğretmen adayları ispatın akışına odaklanıp anahtar fikirleri farketmedikleri ya da sesli düşünmeyi ihmal ettikleri durumlarda araştırmacı tarafından uyarılmışlardır.

Elde edilen bulguların analizleri bütüncül bir yaklaşımla ele alındığında aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmıştır:

Normal alt grup tanımı kullanılarak birleşme özelliğinin varlığının araştırıldığı 1. Teoremin ilk adımında öğretmen adaylarının çoğu normal alt grup tanımını kullanmamış eksik bırakılan adımların başlangıcında ve bitiminde verilen anahtar fikirlerden yola çıkarak ispatı tamamlamaya çalışmışlardır. Burada yalnız Hasan normal alt grup tanımını ifade etmiş olmasına rağmen eksik bırakılan bileşeni tamamlamak için bileşenin başlangıcında ve bitiminde verilen anahtar fikirler arasında bağlantı kurmaya çalışmış ancak son adımda verilen anahtar fikirden yola çıkarak işlemlerini ilerletmiştir.

1. Teoremin üçüncü adımında ise öğretmen adayların ikinci adımda anahtar fikir olarak verilen kavramsal bilgilerden de yola çıkarak ispatı tamamlamaları beklenmiş yalnız Umut ikinci adımdaki kavramsal bilgileri detaylı olarak incelediği için üçüncü adımı eksiksiz olarak tamamlayabilmiştir. Diğer öğretmen adayları yalnızca üçüncü adımın başlangıcında anahtar fikir olarak verilen eşitlikten yola çıktıkları için tek taraflı olarak işlemlerini ilerletmiş dolayısıyla ispatı beklenen düzeyde tamamlayamamışlardır.

2. Teoremin ispatının tamamlanması sürecinde öğretmen adaylarının tamamı anahtar fikirleri etkin bir şekilde kullanmışlar ve bütün adımlarda anahtar fikirlerden yola çıkarak bir çözüm geliştirmeye çalışmışlardır. Eksik bırakılan adımları tamamlarken yaptıkları hataları da yine anahtar fikirler yardımıyla düzeltmişlerdir. Önceki bilgilerin kullanılmasına yönelik bileşenin tamamlanmasında öğretmen adayları verilen önceki bilgileri kullanmak yerine eksik bırakılan adımın öncesinde ve sonrasında verilen anahtar fikirler arasında bir ilişki kurmaya çalışmış ve bu şekilde eksik de olsa ispatı tamamlayabilmişlerdir. Diğer öğretmen adaylarından farklı olarak Umut önceki ve sonraki adımlar arasında ilişki kurmak yerine yalnız önceki adımda verilen anahtar fikirden yola çıktığı için eksik bırakılan bu bileşeni nasıl tamamlaması gerektiğini bilememiş ve tamamlayamamıştır.

3. Teoremin ispatında öğretmen adaylarından hipotezi ve hükmü belirlemeleri istenmiş ve anahtar fikir olarak hipotez ve hükümden sonraki adımlar verilmiştir. Öğretmen adayları hipotezi ve hükmü belirlemede anahtar fikirlerden yardım almıştır. Teoremin ifadesinden yola çıkarak hipotezi ve hükmü belirlemeye çalışan Ceyda yazdığı anlam ve matematiksel gösterim açısından hatalı ifadeleri yine anahtar fikirler yardımıyla yeniden düzenlemişken Hasan ise yazdığı ifadeyi anahtar fikirleri okumasına rağmen düzenlememiştir. 3. Teoremde diğer öğretmen adaylarının aksine anahtar fikirleri etkin bir şekilde kullanamayan Umut hipotezi ve hükmü belirleyememiş ve uygun bir şekilde ifade edememiştir.

Anahtar fikir olarak verilen asal sayı tanımı kullanılarak ve yine anahtar fikir olarak verilen bilgiler bütüncül bir yaklaşımla ele alınarak belirli çıkarımların yapılmasının beklendiği 4. Teoremin ispatında öğretmen adayları anahtar fikirleri kullanarak belirli çıkarımlarda bulunmuşlar ve bu çıkarımlarla ispatı tamamlama yoluna gitmişlerdir. Öğretmen adayları bu teoremde asal sayı tanımını kullanarak beklenen

çıkarımı yaptıkları ve sezgisel olarak ispatı anlayabildikleri halde yazılı olarak ifade etmede Gül hariç sorun yaşamışlardır. Ayrıca Ceyda Lagrange teoremini aslında bildiğini ancak bu ispatta kullanılması gerektiği düşüncesinin anahtar fikir yardımıyla oluştuğunu ifade etmiştir.

5. Teoremden temelde homomorfizma özelliğini hatırlamaları beklenen öğretmen adaylarının birleşme ve etkisiz eleman özelliklerini kullanarak işlemleri yapmaları beklenmiş, işlemlere başlama adımı olan eşitlik anahtar fikir olarak verilmiştir. Öğretmen adaylarının tamamı anahtar fikirden yola çıkarak işlem basamaklarını ilerletmişlerdir. Bu noktada Umut işlem basamaklarından önce ve sonra verilen anahtar fikirlerle bulunduğu sonucu ilişkilendirerek hatalarını da ortadan kaldırmıştır.

6. Teoremden lineer bağımsızlık, 7. Teoremden ise alt uzay kavramlarına yönelik verilen anahtar fikirleri etkin olarak kullanabilen öğretmen adayları yazdıkları ifadeleri yine anahtar fikirler yardımıyla yeniden düzenlemişlerdir. 6. Teoremden bütün öğretmen adayları eksik bırakılan ilk adımı anahtar fikirler yardımıyla tamamlayabilmişken, her ne kadar anahtar fikirleri kullanarak ikinci adımı da nasıl tamamlayabilecekleri hakkında bir fikre sahip olsalar da Gül, Ceyda ve Umut matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle bu adımı tamamlayamamışlardır. 7. Teoremden ise alt uzay kavramına yönelik anahtar fikirleri kullanabilen Gül, Ceyda ve Ezgi, anahtar fikirleri kullanmayarak kesişimin tanımından yola çıkan Umut ve Hasan'a göre daha başarılı bir süreç sergilemişlerdir.

Anahtar fikirler öğretmen adaylarının sezgisel olarak ispatı anlamalarını, ispata yönelik olumlu bir tutum geliştirmelerini, ispata başlamalarını, cebirsel işlemleri yapmalarını ve ispatı tamamlamalarını kolaylaştırmaktadır. Öğretmen adayları ispat yapma sürecinde ortaya koydukları hatalı adımları yine anahtar fikirler yardımıyla düzenlemişlerdir. Teoremlerin anahtar fikirlerle desteklenmesi, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının teoremi ispatlama performansını da etkilemiştir ancak öğretmen adaylarının teoremin ispatı ile ilgili sahip oldukları kavramsal bilginin düzeyi ya da yeterliliği (Örneğin; Ceyda'nın anahtar fikirleri kullanmasına rağmen 1. Teoremden normal alt grubun tanımından hareketle yapılan işlemleri dağılma özelliği olarak algılaması sebebiyle ispatı tamamlayamaması gibi) anahtar fikirlerden faydalanma

düzeyini de etkilemiştir. Araştırmayla ulaşılan bu sonuçlar Karaoğlu'nun (2010) çalışmasının bulgularıyla da tutarlılık göstermektedir.

Bireyler hangi bilgiye ispatın hangi aşamasında yer vereceğini bilememektedirler. Bu sonucu destekler nitelikte Moore (1990) da ispatı yapılan bir teoremdeki tüm bilgileri bireylerin aynı anda koordine edip kullanmakta sorun yaşadıklarını belirtmiştir. Anlama ve detaylandırmayı sağlayan anahtar fikirler (Raman, 2002) bireylere bir bilginin ispatın hangi aşamasında kullanıldığını görebilme ya da bilgilerini koordine edip kullanabilme imkânı sunmaktadırlar. Bu araştırmada da anahtar fikirlerin ispatın sezgisel olarak anlaşılmasında önemli bir rol oynadığı görülmüştür. Bu sebeple anahtar fikirlerle desteklenmiş bir ispatı tamamlamak öğretmen adaylarına zor gelmemektedir. Buna rağmen bir ispat anahtar fikirler yardımıyla ne kadar kolaylaştırılırsa kolaylaştırılsın yine de temel düzeyde eksikliği ve yanlış öğrenmeleri olanlar anahtar fikirleri kullanamamaktadır. Ancak burada da anahtar fikirler, öğrencinin daha derinlerde olan yanlış öğrenmelerini ortaya çıkarabilme olanağı sunmaktadır. Anahtar fikirlerle desteklenerek verilmiş bir ispatın tamamlanabilmesi için birey, hangi bilgiyi kullanması gerektiğini ve dolayısıyla ispatı hangi bilginin eksikliği sebebiyle tamamlayamadığını da görebilmektedir. Bütün bunlardan hareketle anahtar fikirlerin ispat yapma sürecinde ve öğretiminde etkin bir rol oynadığı söylenebilir.

Selden A. ve Selden J.,'e (2007) göre, öğretim elemanları; yalnızca kendilerinin veya ders kitaplarının ispatlarını sunmamalı, öğrencilerin ispat girişimleri ile ilgili öğretici-öğrenci ve öğrenci-öğrenci şeklinde karşılıklı etkileşimlerini de dikkate almalıdırlar. İspat yapma gibi karmaşık bir süreci yalnızca ders anlatımı yoluyla tamamen öğretmeye çalışmak, birisine ayak bağlarını bağlamayı telefonla öğretmek gibidir. Bu durum elbette mümkündür ancak en etkili yol bu değildir. Karaoğlu'na (2010) göre, anahtar nokta ve fikirler öğrencilerin ispat yapma performanslarını olumlu yönde etkilemektedir. Dolayısıyla öğretim sürecinde anahtar fikirlerden yardım alınmasının ve anahtar fikirlerle desteklenmiş ispatların ders anlatım sürecine dâhil edilmesinin ispat öğretimine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Öğrencilere bir teoremin ispatlanması anahtar fikirler yardımıyla öğretilirse; öğrencinin bu öğretim süreci sonunda bir ispatın temel noktalarını belirleyebilecek ve en baştan oluşturulmasında kendine yardımcı olabilecek ipuçlarını zihinsel olarak şekillendirebilecek dolayısıyla ezber yapmaya ihtiyaç duymadan ispat yapabilecek

duruma gelmesi sağlanabilir. Raman'a (2003) göre; anahtar fikirlere, lise ve üniversite müfredatında merkezi bir yer ayırmak, öğrencilerin matematiksel ispatlara yönelik olumlu bir bakış açısı geliştirmelerine yardımcı olmak için önemli bir adım gibi gözükmektedir.

Matematik öğretmeni adaylarının eğitim sürecinde yüzlerce teorem ve bunların ispatlarını öğrendikleri göz önüne alınırsa, öğretmen adaylarının ispat yapmayı içselleştirebilecekleri etkinlikler geliştirilerek öğrenilen bilgilerin ezbere dayalı edinilmesinin önüne geçmek gerekmektedir (Güler vd., 2012). Anahtar fikirlerle desteklenmiş ispatlardan oluşan etkinlikler geliştirilerek öğretmen adaylarının ezber yapmaksızın ispat yapabilmelerine ve ispat yapmayı içselleştirebilmelerine katkı sağlanabilir.

Bu araştırma yalnızca doğrudan ispat yöntemiyle yapılmış teorem ispatlarıyla sınırlandırılmış, ispat yönteminin belirlenmesine yönelik teoremlere uygulamanın yoğunluğu sebebiyle yer verilmemiş, bu durum farklı bir çalışmada ele alınmak üzere ayrı tutulmuştur. Verilen anahtar fikirlerin her soruda farklılık göstermesi ön koşuluyla anahtar fikirlerle desteklenmiş ispatlar öğrencilere verilerek ispat yöntemini belirleme basamağının öğrenciler tarafından tamamlanmasının istendiği benzer bir çalışmayla, öğrencilerin yöntem belirlemede yaşadıkları zorlukların nelerden kaynaklandığını ortaya çıkarmak farklı bir araştırmanın konusu olabilir.

5.3. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Yaparken Temel Bileşenleri Tamamlama Durumuna İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının matematiksel ispat yaparken temel bileşenleri tamamlama durumlarına yönelik elde edilen bulgulardan ortaya çıkan sonuç, tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının temel bileşenleri tamamlama durumlarını ortaya çıkarabilmek amacıyla yedi teoremin ispatında 19 bileşen eksik bırakılarak hazırlanmış bir uygulama kullanılmıştır. Hipotezi ve Hükmü belirleme bileşenleri 3. Teoremde, hipotezi kullanma bileşeni 7. Teoremde, Tanım kullanma bileşeni 1. ve 4. Teoremlerde, Özellik kullanma bileşeni 1., 2. ve 5. Teoremlerde, Kavramsal Bilgileri Seçip Kullanma bileşeni 1., 2., 6. ve 7. Teoremlerde, Önceki Bilgileri Kullanma bileşeni 2. ve 6.

Teoremlerde, İşlem Yapma bileşeni 1., 2. ve 5. Teoremlerde ve son olarak İspat Tamamlama bileşeni ise 4. ve 6. Teoremlerde eksik bırakılmıştır.

3. Teoremde anahtar fikirlerle teoremin ifadesini birlikte düşünerek ikisi arasında bir ilişki kurmaya çalışan Gül, Ceyda ve Hasan hipotezi ve hükmü belirleyebilmişler ancak hipotezi belirleme basamağında matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle sorun yaşamışlardır.

7. Teoremde hipotezi kullanma bileşenini sözlü olarak ifade eden Gül, Ceyda, Ezgi ve Hasan yazılı olarak aktarma gereği duymamışlardır. Ancak Ceyda mülakatçının uyarısı üzerine yazılı olarak ifade edebilmişken Ezgi hipotezi kullanmaya yönelik ifadeleri eksik bir şekilde yazmıştır. Hasan hipotezi kullanma bileşenine yönelik ifadeyi mülakatçının sorusuna cevap niteliğinde ifade etmiştir. Bütün bunlar gözönüne alındığında öğretmen adaylarının bu bileşene yönelik ifadeyi sezgisel olarak kullandıkları, ancak yazılı olarak ifade etme gereği duymadıkları sonucuna varılmıştır.

1. Teoremde yalnız Hasan normal alt grup tanımını kullanmışken; 4. Teoremde bütün öğretmen adayları asal sayı tanımını kullanarak beklenen çıkarımı yapabilmışlerdir. 1. Teoremde normal alt grup tanımı ispat sırasında anahtar fikir olarak verilmemiş ancak 4. Teoremde asal sayı tanımını anahtar fikir olarak verilmiş ve adayların bu tanımını kullanarak belirli bir yorum yapmalarına yönelik adım eksik bırakılmıştır. Tanımlar, eğer anahtar fikir olarak verilmişlerse öğretmen adayları bu tanımını kullanmakta sorun yaşamamışlar ancak ifadesi anahtar fikir olarak verilmeyen tanımları her ne kadar bu tanımlara ilişkin bir nokta verilse de hatırlamakta ve ispat yaparken kullanmakta sorun yaşamışlardır. Oysa Güler'e (2013) göre öğretmen adayları kullandıkları tanımları ifade etmede ve yaptıkları ispatlarda gerekli olan tanımların adımlarını ve kullanma sebeplerini açıklamada isteklidirler.

Öğretmen adaylarından 1. Teoremin ispatının i. adımında işlemlerini yaparken grupta birleşme özelliğini kullanmaları, iii. adımında ise grupta ters eleman özelliğini kullanmaları beklenmiş yalnız Gül ve Umut işlemlerini yaparken bu iki özelliği de kullanabilmiştir. 2. Teoremde ise eksik bırakılan ikinci adımları grupta birleşme özelliğini kullanarak yazdıkları eşitlikle tamamlamaları istenmiş ancak Umut, Gül, Ezgi ve Hasan yapılması gereken işlemleri bilmelerine ve ifade etmelerine rağmen nasıl yazacaklarını bilememiş dolayısıyla birleşme özelliğine yönelik eşitlikleri

oluşturamamışlardır. Yalnız Ceyda eksik bırakılan bu adımı beklenen düzeyde tamamlayabilmiştir. 5. Teoremde, homomorfizma özelliği bütün öğretmen adayları tarafından uygulanabilmiş, homomorfizma olduğunun gösterilmesine yönelik işlemlerde Gül, Ceyda ve Umut grupta birim eleman ve grupta birleşme özelliklerini, Ezgi ve Hasan ise yalnız birim eleman özelliğini kullanmışlardır. İspatı tamamlama sürecinde kullanılması gereken özelliklerin kullanılmaması ispatın eksik tamamlanmasına sebep olmuştur. Bu durum katılımcıların özelliğe yönelik bilgi eksikliğinden değil özelliğin kullanımını ihmal etmelerinden, kullanılabilme ihtimalini gözden kaçırmalarından veya özelliği nasıl kullanacaklarını ve nasıl ifade edeceklerini bilememelerinden kaynaklanmıştır.

Gül, Ezgi, Umut ve Hasan birim eleman ve ters eleman kavramlarıyla ilgili bilgilerden hareketle 2. Teoremde hangi işlemin hangi kavrama ait olduğunu ifade edebilmişken, Umut dışında diğer adaylar ters eleman kavramının varlığıyla ilgili kavramsal bilgileri 1. Teoremin üçüncü adımında kullanamamışlar ve dolayısıyla bu adımı tek taraflı olarak ispatlama yoluna gitmişlerdir. Bütün öğretmen adayları lineer bağımsızlıkla ilgili kavramsal bilgileri kullanarak 6. Teoremde eksik bırakılan ilk adıma uygun denklemi yazabilmiş ancak matematiksel dil ve notasyon bilgisine ve bu bilgilerin yorumlanmasına ilişkin eksiklikleri sebebiyle Gül, Ceyda ve Umut bileşene ait ikinci adımı tamamlayamamışlardır. Yine bütün öğretmen adaylarının 7. Teoremde alt uzay kavramıyla ilgili bilgilerden yola çıkarak yazmaları beklenen ifadeleri eksik bırakılan bölümlere yazabildikleri ancak Umut ve Hasan'ın bu ifadeleri yazarken alt uzayla ilgili bilgileri kullanmadıkları, kesişimin tanımını kullandıkları görülmüştür.

Eksik bırakılan adıma yönelik verilen önceki bilgiler 2. Teoremde hiçbir öğretmen adayı tarafından kullanılmamış ve dolayısıyla grupta ters elemanın varlığıyla ilgili ' $h^{-1} \in H$ ' ifadesi de yazılmamıştır. 6. Teoremde ise Ezgi, Ceyda ve Hasan'ın verilen önceki bilgilerden hareketle beklenen çıkarımı zihinsel olarak yaptıkları ancak yazılı olarak ifade etmedikleri görülmüştür. Öğretmen adayları ispat tamamlama sürecinde eksik bırakılan bölümü tamamlayabilmeleri için gereken ön bilgileri ispat sürecinde kullanamamış olmalarına rağmen farklı anahtar fikirlerden yardım alarak bileşeni tamamlama yönünde adım atabilmişlerdir. Verilen önceki bilgileri kullanabilen öğretmen adayları ise yaptıkları çıkarımı notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle doğru bir

biçimde yazılı olarak aktaramamışlardır. Dolayısıyla önceki bilgileri kullanmalarıyla ilgili bileşeni eksiksiz bir biçimde tamamlayamamışlardır.

1. Teoremin ispatının tamamlanması sürecinde öğretmen adaylarının i. adımda $(G, .)$ grubunun birleşme özelliğini ve normal alt grup tanımını; iii. adımda ise $(G, .)$ grubunun ters eleman özelliğini kullanarak işlemleri yapmaları beklenmiştir. i. adımda Gül ve Umut birleşme özelliğini kullanmışken normal alt grup tanımını kullanamamış, diğer adayların aksine Hasan normal alt grup tanımını kullanmış, Ezgi de birleşme özelliğini ve normal alt grup tanımını kullanmamış ancak anahtar fikirler yardımıyla işlemleri beklenen düzeyde tamamlayabilmiştir. Ceyda kavramsal bilgileri yetersiz olduğu için işlemleri yapamamıştır. iii. adımda ise öğretmen adaylarının hiçbirisi ters eleman özelliğini kullanmamış ancak anahtar fikirler yardımıyla eksik de olsa işlemleri yapabilmişlerdir. Burada yalnız Umut ters eleman özelliğini kullanmamasına rağmen yine anahtar fikirler yardımıyla bu adımı tamamlayabilmiştir. 2. Teorem’de öğretmen adaylarından hem i. hem de ii. adımlarda anahtar fikir olarak verilen eşitliklerde soldan ve sağdan a^{-1} ’i işleme tabi tutarak bunu yazılı bir biçimde ifade etmeleri beklenmiştir. Bütün öğretmen adaylarının bu işlemi yaptıkları ancak Ceyda hariç diğerlerinin işlemleri basamak basamak yazmada problem yaşadıkları görülmüştür. Öğretmen adayları işlemleri adım adım ilerletemedikleri için bir sonraki adımda birleşme özelliğini uygulayarak oluşturmaları beklenen eşitlikleri oluşturamamışlardır. Umut ise her iki işlemi de oluşturmuş ancak tek bir basamakta ifade etmiş dolayısıyla eksik bırakılan bölümleri uygun bir biçimde tamamlayamamıştır. 5. Teoremde homomorfizma özelliği kullanılarak tamamlanması gereken ispatta öğretmen adaylarından, işlemleri birleşme özelliği ve birim eleman özelliğini kullanarak ilerletmeleri beklenmiştir. Bütün öğretmen adayları homomorfizma ve birim eleman özelliğini kullanmışken, Gül, Umut ve Ceyda’nın bunlara ek olarak birleşme özelliğini de kullandıkları görülmüştür.

4. Teoremde Gül, Ezgi, Ceyda ve Hasan ispatı sezgisel olarak anlamış ancak yalnız Gül yazılı olarak ispatı tamamlayabilmiştir. Ezgi yaşadığı kavram karmaşası sebebiyle, Hasan alt devir grubu ile grup arasında mantıksal bir ilişki kuramaması sebebiyle, Ceyda ise düşüncelerini yazılı olarak nasıl ifade edeceğini bilememesi sebebiyle ispatı tamamlayamamıştır. 6. Teoremde ise Hasan, Ceyda ve Ezgi ispatı

bütüncül bir yaklaşımla ele alarak tamamlamış, Umut ve Gül ise matematiksel notasyon bilgisi eksikliği sebebiyle ispatı tamamlayamamışlardır.

Güler (2013) araştırmasında öğretmen adaylarının birleşme özelliğinin, birim eleman özelliğinin ve ters eleman özelliğinin ne anlam ifade ettiğini bilmediklerini ortaya koymuştur. Ancak öğretmen adaylarının anahtar fikirlerle desteklenmiş ispat yapma süreci incelendiğinde grupta birim eleman, ters eleman ve birleşme özellikleriyle ilgili bilgileri seçip kullanabildikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının işlem yaparken bu özelliklerden yeterli düzeyde faydalanamamaları ise bu kavramları ya da nasıl uygulandıklarını bilmemelerinden değil işlemlerini adım adım yapmamalarından ve çoğu zaman farkında bile olmadan uyguladıkları bir özelliği (özellikle birleşme) ifade etmemelerinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla öğretmen adayları her ne kadar tam olarak anlamını bilmeseler ya da ifade edemeseler de bir özellik ile ilgili bilgileri anahtar fikirler yardımıyla seçip kullanabilmektedirler. Anahtar fikir olarak verilmeyen tanımların ifade edilmesinde ve kullanılmasında sorun yaşanmaktadır. Öğretmen adayları 1. Teoremin ispatının i. adımında ifadesi verilmeyen normal alt grup tanımını kullanmamışlar; anahtar fikirlerle desteklenmiş ispata yönelik işlem yapma sürecinde özellikleri kısmen de olsa uygulayabilmelerine rağmen kullandıkları tanımları ifade etmemişler, yaptıkları işlemin normal alt grup tanımına dayandığını farketmemişlerdir. Bu sonuç Güler'in (2013) ve Bayazit'in (2009) çalışmalarıyla da benzerlik göstermektedir. Oysa öğretmen adayları anahtar fikir olarak ifadesi verilen bir tanımla ispat yapma sürecinde kullanmakta sorun yaşamamışlardır. Ayrıca 1. Teoremden Ceyda kavramsal bilgileri yetersiz olduğu için anahtar fikirlerden yeterli düzeyde faydalanamamış ve dolayısıyla ispata yönelik işlemleri oluşturamamış ve beklenen düzeyde ispatı tamamlayamamıştır. Bu durum gözönüne alındığında Karaoğlu (2010) ile benzer olarak; teoremin ispatı sürecinde öğretmen adaylarının kavramsal bilgilerinin yetersiz oluşu anahtar fikirlerden faydalanma düzeyini ve dolayısıyla ispatın tamamlanması sürecini de etkilediği sonucuna varılmıştır.

Güler'e (2013) göre, öğretmen adayları ispata nasıl başlayacaklarını ifade etmekte güçlük yaşamaktadırlar. Ancak bu çalışmada görüldüğü gibi anahtar fikirlerle desteklenmiş bir ispatta hipotezi ve hükmü belirleyebilmek dolayısıyla ispata başlamak kolaylaşmaktadır. Bu sonuç Karaoğlu'nun (2010) araştırma sonuçları ile de tutarlılık göstermektedir.

Öğretmen adaylarının doğru varsayımı ortaya attıkları halde ispatı sonuçlandıramamaları yeterli gerekçe sunamamalarından ve önceden öğrenilmiş yanlış bilgilerden kaynaklanmaktadır (Ceylan, 2012). Bu araştırmadan elde edilen sonuca göre ispatlar, anahtar fikirler yardımıyla önceden öğrenilmiş yanlış bilgilerden arındırılırsalar ve yeterli gerekçelerle desteklenseler bile verilen bilgiler bütüncül olarak ele alınmadığında ve matematiksel notasyon bilgisi eksikliği (Moore, 1990; Selden ve Selden 2007) sebebiyle anahtar fikirler yanlış yorumlandığında da tamamlanamayabilmektedirler. Dolayısıyla anahtar fikirlerle desteklenmiş ispatlar ancak bütüncül bir yaklaşımla ele alınmalarının yanında kavramsal bilgi ve matematiksel notasyon bilgisi eksikliğinin yaşanmadığı durumlarda eksiksiz bir biçimde tamamlanabilirler.

İspat tamamlama sürecinin detaylı olarak incelenmesini sağlayan temel bileşen formu ispat öğretimi sırasında da kullanılabilir. Hazırlanan temel bileşen formuna göre kategorize edilen ve hiyerarşik olmayan bir düzen içerisinde okuyucuya sunulan bir ispatın karmaşık yapısından kurtularak daha anlaşılır bir ispat olabileceği ve dolayısıyla öğrencilerin ileriki zamanlarda kendi anahtar fikirlerini kendileri oluşturarak ezber yapmaksızın verilen bir ispatı tamamlayabilme yetisine sahip olabilecekleri düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Akkaş S., Hacısalihoğlu H. H., Özel Z. ve Sabuncuoğlu A. (1988). *Soyut Matematik* (2. Baskı). Ankara: Gazi Üniversitesi.
- Akkuş İspir O. ve Palabıyık U. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 111-123.
- Aktaş, C. M. ve Aktaş Y. D. (2013). Matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarının metaforlar yoluyla belirlenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3), 701-718.
- Almeida, D. (2003). “Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero. (Ed.). *Theorem in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27-42). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Arslan, Ç. (2007). *İkögretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Asar, A. O., Arıkan, A. ve Arıkan, A. (2009). *Cebir* (1. Baskı). Ankara: Eflatun Yayınevi.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Bahtiyari, A. Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm. (Ed.). *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235) London: Hodder and Stoughton.

- Bayazit, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doingproof*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University, Florida.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1-2), 23-40.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2010). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (6.baskı). Ankara: Pegem Yayınları.
- Cajori, F. (1893). *Matematik Tarihi* (Çev. D. İlalan) Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A. Ş.
- Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin van hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Cohen, L., Manion L. and Morrison, K. (2005). (5 th ed.). *Research Methods in Education*. British Library Cataloguing in Publication Data, ISBN 0-203-22434-5 Master e-book ISBN.
- Creswell, J. W. (2015). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (Gözden Geçirilmiş 2. Baskı). (Çev. M. Bütün ve S. B. Demir). Ankara: Siyasal Kitabevi. (Eserin orijinali 2013'de yayımlandı).
- Çevik, A. S. (2010). *Cebire giriş* (2. Baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Çetin, A. ve Dikici, R. (2016). Matematiksel ispat yapma ve problem çözmede sesli düşünmenin rolü [Öz]. 8. *International Congress of Educational Research Abstracts Book*. 268. Çanakkale.

- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof. In M. De Villiers (Ed.), *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad* (pp. 3–10). Key Curriculum Press.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 4(2), 47-71.
- Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations*. Unpublished master's thesis. Middle East Technical University, Ankara.
- Derek, M. (2011). *Teaching and learning of proof in the college curriculum*. Unpublished master's thesis. San Jose State University, Washington.
- Doruk, M. ve Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 71-93.
- Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (2. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Ericsson, K. A. and Simon, H. A. (1998). How to study thinking in everyday life: Contrasting think-aloud protocols with descriptions and explanations of thinking. *Mind, Culture, and Activity*, 5(3), 178-186.
- Glesne, C. (2011/2012). *Nitel araştırmaya giriş* (Çev. A. Ersoy ve P. Yalçınoglu). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Goldberg A. (2002), What are Mathematical Proofs and Why are They Important? <http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf>
- Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- Güler, A., Halıcıoğlu M. B. ve Taşgın, S. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

- Güler, G., ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güneş, F. (2012). Eğitimde sesli düşünme. *Akademik Araştırmalar Dergisi*, 55, 83-104.
- Güzel, İ., Karataş, İ. ve Çetinkaya, B. (2010). Ortaöğretim matematik öğretim programlarının karşılaştırılması: Türkiye, Almanya ve Kanada. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 1(3), 309-325.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23.
- Hanna, G., and Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Netherlands: Springer.
- Hanna, G. and Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421-438.
- Hazzan, O. and Leron, U. (1994). Students' use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's Theorem, *For the Learning of Mathematics*, 16, 23-26.
- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 71-90.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof*. Unpublished doctoral dissertation. Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.
- Irmak, H. (2008). *Soyut matematik*. (1. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

- İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımlarını kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları*. Yayınlanmamış doktora tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Johnstone, C. J., Bottsford-Miller, N. A. and Thompson, S. J. (2006). *Using the think aloud method (cognitive labs) to evaluate test design for students with disabilities and English language learners (Technical Report 44)*. Minneapolis, MN: University of Minnesota, National Center on Educational Outcomes.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Kayacan, N. (2005). *Lise hazırlık sınıfı öğrencileri tarafından kullanılan ingilizce okuma stratejilerinin sesli düşünme yöntemiyle bulunması ve tanımlanması*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education (IJTASE)*, 1(2), 134-141.
- Kılıç, H. (2013). Lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 222-241.
- Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1109-1129.

- Köğce, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies-International Periodical For The Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, 8(12), 765-776.
- Krantz, S. G. (2011). *The proof is in the pudding: the changing nature of mathematical proof*. New York: Springer Science & Business Media.
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16.
- Mansi, K. E. (2003). *Reasoning and geometric proof in mathematics education: a review of the literature*. Unpublished master's thesis. North Carolina State University, North Carolina.
- McMillan J. H. and Schumacher S. (2010). *Research in Education: Evidence-based inquiry*. (7th ed.). New Jersey: Pearson Education.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education. revised and expanded from: Case study research in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber*. (Çev. S. Turan) Ankara: Nobel Yayın Dağıtım. (Eserin orijinali 2009'da yayımlandı).
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8 sınıflar öğretim programı ve kılavuzu*. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2011). *Ortaöğretim matematik dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar öğretim programı*. Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar öğretim programı*. Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Miral, D. (2013). *Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation. University of Georgia, Athens.

- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3), 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics, <http://www.nctm.org/standards/> adresinden 11.04.2017 tarihinde edinilmiştir.
- Öçal, M. F. ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 318-323.
- Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2000). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68.
- Polat, K. ve Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438.
- Raman, M. J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus*. Unpublished doctoral dissertation. University of California, Berkeley.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319-325.
- Raman, M., Sandefur, J., Birky, G., Campbell, C., and Somers, K. (2009). "Is that a proof?": Using video to teach and learn how to prove at the university level. In F. L. Lin, F. Hsieh, G. Hanna and M. de Villiers. (Eds.). *Proof and proving in mathematics education: ICMI Study 19 conference proceedings*, 2, 154-159. Taipei: National Taiwan Normal University.
- Reid, D. A. (1999). Needing to explain: The mathematical emotional orientation. In Z. O. Zaslavsky. (Ed.). *Proceedings of the 23rd Conference of the International*

- Group for the psychology of mathematics education*, 4, 105-112. Israel: Israel Institute of Technology.
- Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- Selden, A. and Selden, J. (2008). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. In M. Carlson and C. Rasmussen. (Eds.). *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 95–110). Mathematical Association of America.
- Soto, D. O. (2010). *Teacher change in the context of a proof-centered professional development*. Unpublished doctoral dissertation. University of California, San Diego.
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.
- Şengül, S. and Güner, P. (2014). Relationship between proof schemes used by preservice mathematics teachers and gender, views towards proof. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 617-620.
- Tall, D.O. (1995). Cognitive development, representations and proof. In *Proceedings of Justifying and Proving in School Mathematics*, (pp. 27–38). London: Institute of Education.
- Turgut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.
- Thompson, G. A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 105-127.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

- van Someren, M. W., Barnard, Y. F. and Sandberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method: a practical approach to modelling cognitive processes. (Knowledge-based systems)*. London: Academic Press.
- Varghese, T. (2007). *Student teachers' conceptions of mathematical proof*. Unpublished master's thesis. University of Alberta, Alberta.
- Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-14.
- Velleman, D. J. (2008). *Kanıt nasıl yapılır: bir yapısal yaklaşım* (Çev. M. Terziler ve T. Öner) (s. 84-85). Ankara: Palme Yayıncılık. (Eserin orijinali 1994 tarihinde yayımlandı).
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- Yackel, E., and Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (7. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2015). *Matematiksel düşünme* (11.Basım). İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: design and methods*. (4th ed.). California: Sage Publications.
- Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu.

EKLER

EK 1. GÖNÜLLÜLÜK SÖZLEŞMELERİ

Değerli Öğrenciler:

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği mezunuyum ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile beraber doktora tez konum olan "Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri" isimli çalışmayı yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Lineer Cebir ve Soyut Cebir derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız bulunmaktadır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakata katılacak ve yapılan mülakatlar video ile kayıt altına alınacaktır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğretmen adaylarının bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk yaratmayacaktır.

Mülakatlar süresince katılımcılar herhangi bir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır. Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana () numaralı telefonda veya adresinden ulaşabilirsiniz.

Saygılarımla,

Aysun ÇETİN

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı: ()

İmza: ()

Tarih: 22.05.2015

Saat: 15:20

Değerli Öğrenciler:

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği mezunuyum ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile beraber doktora tez konum olan "Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri" isimli çalışmayı yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Lineer Cebir ve Soyut Cebir derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız bulunmaktadır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakata katılacak ve yapılan mülakatlar video ile kayıt altına alınacaktır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğretmen adaylarının bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk yaratmayacaktır.

Mülakatlar süresince katılımcılar herhangi bir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır. Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana [redacted] numaralı telefonda veya [redacted] adresinden ulaşabilirsiniz.

Saygılarımla,

Aysun ÇETİN

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı: [redacted]

İmza: [redacted]

Tarih: 28.05.2015

Saat: 16:50

Değerli Öğrenciler:

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği mezunuyum ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile beraber doktora tez konum olan "Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri" isimli çalışmayı yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Lineer Cebir ve Soyut Cebir derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız bulunmaktadır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakata katılacak ve yapılan mülakatlar video ile kayıt altına alınacaktır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğretmen adaylarının bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk yaratmayacaktır.

Mülakatlar süresince katılımcılar herhangi bir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır. Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana [redacted] numaralı telefonda veya [redacted] dresinden ulaşabilirsiniz.

Saygılarımla,
Aysun ÇETİN

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı: [redacted]

İmza: [redacted]

Tarih: 20.05.15

Saat: 15:30

Değerli Öğrenciler:

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği mezunuyum ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile beraber doktora tez konum olan "Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri" isimli çalışmayı yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Lineer Cebir ve Soyut Cebir derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız bulunmaktadır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakata katılacak ve yapılan mülakatlar video ile kayıt altına alınacaktır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğretmen adaylarının bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk yaratmayacaktır.

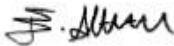
Mülakatlar süresince katılımcılar herhangi bir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır. Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana () numaralı telefonda veya () adresinden ulaşabilirsiniz.

Saygılarımla,

Aysun ÇETİN

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı: ()

İmza: 

Tarih: 06.05.2019

Saat: 11:13

Değerli Öğrenciler:

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği mezunuyum ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda doktora öğrencisiyim. Danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ile beraber doktora tez konum olan "Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspatta Önceden Belirlenen Anahtar Fikirleri Yazabilme Süreçleri" isimli çalışmayı yürütmekteyiz.

Doktora tez çalışmamın hedefine ulaşabilmesi için Linceer Cebir ve Soyut Cebir derslerini alan gönüllü öğretmen adaylarına ihtiyacımız bulunmaktadır. Çalışmada katılımcılar araştırmacı ile beraber mülakata katılacak ve yapılan mülakatlar video ile kayıt altına alınacaktır. Çalışmaya başlayıp daha sonra ayrılan katılımcılar hakkında kötü niyet beslenmeyecek ve öğretmen adaylarının bölümlerindeki durumlarında herhangi bir olumsuzluk yaratmayacaktır.

Mülakatlar süresince katılımcılar herhangi bir riskle veya olumsuz bir durumla karşılaşmayacaklardır. Araştırmada toplanan veriler asla katılımcıların özelini yansıtmayacaktır. Katılımcıların isimleri gizli tutulacak ve araştırma raporlaştırılırken kod isimler kullanılacaktır. Eğer araştırma ile ilgili bir sorunuz olursa bana [redacted] numaralı telefonda veya [redacted] adresinden ulaşabilirsiniz.

Saygılarımla,
Aysun ÇETİN

Yukarıdaki araştırmaya katılmaya gönüllüyüm.

Adı-Soyadı: [redacted]

İmza: [redacted]

Tarih: 22.05.2015

Saat: 16:52

EK 2. TEMEL BİLEŞENLERİNE AYRILARAK UZMAN İNCELEMESİNE SUNULAN İSPAT ÖRNEKLERİ

Teoremi ^{**} G bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat i. (Birleşme Özelliği) : $xN, yN, zN \in G/N$
alalım. ($x, y, z \in G$ için)

Bu takdirde,

$$(xN)[(yN)(zN)] = xN(yzN)$$

$$= (x(yz))N$$

$$= (x(yz))N$$

$$= (x(yN)(zN))N$$

$$= [(xN)(yN)](zN)$$

birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(x^{-1}N) = eN = (x^{-1}N)(xN)$$

$$(x \cdot x^{-1})N = (x^{-1} \cdot x)N$$

den $(xN)^{-1} = (x^{-1})N \in G/N$ olduğu
görülür.

Böylece olarak G/N bir gruptur. $\rightarrow$ ispatı tamamlama

Kaynak:

matematik
temelleri

1

Teorem: G bir grup, $a \in G$ ve $o(a)=r$ olsun. kaynak matematiksel temeller
 $a^n = e$ ise r sayısı n yi böler.

İspat: Kabul edelim ki; r sayısı n yi bölmeyen. Olmayan Erp'i yöntemi $\Rightarrow$ A.F. yöntemi teşpit
 O halde bölme algoritmasından dolayı $n = pr + k$, $0 < k < r$ yazılır. Hipotezin belirlenmesi

Buradan:

$$e = a^n = a^{pr+k} = a^{pr} \cdot a^k = \underbrace{(a^r)^p}_e \cdot a^k = e^p \cdot a^k = a^k$$

$o(a)=r \Rightarrow a^r = e$ birim elemanın tanımının kullanımı. Hipotezin kullanımı.

$o(a)=r$ olduğundan r , $a^n = e$ yi sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. merkezi teoremin kullanımı

$a^k = e$ olması; $o(a)=r$ olmasıyla çelişir. İspatı tamamlama
 Öyleyse $k=0$ ve $n=pr \Rightarrow r|n$ dir.

Teorem: $n \geq 2$ olan her tam sayı ya asaldır, ya da asalların çarpımıdır.

İspat: $n=2$ için teoremin iddiası doğrudur çünkü 2 asaldır. Yöntem teşpiti
 Şimdi k , 2 den küçük olmayan herhangi bir tam sayı o.ü. teoremin $n=2,3,\dots,k$ için doğru olduğunu kabul edelim, Hipotezi belirleme
 $n=k+1$ için teoremin iddiasının doğru olduğunu gösterelim. Hipotezin kullanımı
 Eğer $k+1$ asal ise ispat tamamdır. $k+1$ bileşik sayı ise $2 \leq r \leq k$, $2 \leq s \leq k$ olan öyle r,s tam sayıları vardır ki $k+1 = r \cdot s$ dir. r ve s tam sayıları 2 ile k arasında olduklarından hipotez gereği bunların her ikisi ya asaldır ya da asalların çarpımıdır ki bu durumda $k+1$ asalların çarpımı olarak ifade edilmiş olur. Bu ise teoremin $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar. Kavramsal bilgiler seçilip kullanımı

Teorem: G bir grup, $H \leq G$ olsun. Bu takdirde, H nin G içindeki sol yantkümüleri G nin bir parçalanmasını oluşturlar.

İspat: H nin G içindeki iki sol yantkümünün ya ayrık ya da özdeş olduğunu ve ayrıca, $\bigcup_{x \in G} xH = G$ olduğunu göstermeliyiz. } Hipotezi belirleme

Önce xH ve yH , H nin iki sol yan kümesi olsun ve $xH \cap yH \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. } Hipotezi kullanma

Bu durumda, $z \in (xH \cap yH)$ alalım. Uysun } Kesimin tanımını kullan

$h_1, h_2 \in H$ ile $z = xh_1 = yh_2$ yazabiliriz.

O zaman,

$$x = y h_2 h_1^{-1} \text{ ve } y = x h_1 h_2^{-1} \text{ ve buradan,}$$

$$\forall h \in H \text{ için } xh = y \overbrace{h_2 h_1^{-1} h}^{eH} \in yH \text{ ve}$$

$$y h = x \overbrace{h_1 h_2^{-1} h}^{eH} \in xH \text{ olduğu ve dolayısıyla,}$$

$xH = yH$ olduğu görülür. } Kavramsal bilgileri seçip kullanabilme

Şimdi $z \in G$ alalım.

$$z = \overbrace{z e}^{eH} \in xH \text{ olduğundan, } z \in \bigcup_{x \in G} xH \text{ ve böylece,}$$

$$G \subseteq \bigcup_{x \in G} xH \text{ dir. Diğer yandaki kapsama}$$

$$\text{arılır olduğundan } G = \bigcup_{x \in G} xH \text{ dir.}$$

$$G = \bigsqcup_{x \in G} xH$$



Kaynak: matematiksel temellere

(3)

Teorem: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) altgruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

İspat: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indeks kümesi olsun.

$i \in I$ olmak üzere edelim ki; H_i ler G nin bir alt grubu olsun. $(H_i \leq G)$ Bu takdirde;

Hipotezi belirleme

$H = \bigcap_{i \in I} H_i$ denirse $H \leq G$ olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

$\Rightarrow$ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a, b \in H_i$;

Tanım kullanımı

$\Rightarrow$ Alt grubun

$\Rightarrow$ Kesişimin " ; $a, b^{-1} \in H$ olur.

$\rightarrow$ ispatı tamamlama.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Teorem (Lagrange Teoremi): Sonlu bir grubun her alt grubunun mertebesi, grubun mertebesini tam olarak böler.

İspat: G , n . mertebesinde bir sonlu grup ve

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ da G nin bir alt grubu olsun.

Hipotezi belirleme

$a \notin H$ ve $a \in G$ o.d. H nin G deki;

$H_a = \{h_a : h \in H \text{ ve } a \in G\} = \{h_1 a, h_2 a, \dots, h_r a\}$

şeklinde kümesini oluşturalım.

$\{$ i. Bu kümenin $h_i a$ elemanları $(i=1, 2, \dots, r)$ birbirinden

Yöntem belirleme

Uzun

$\{$ i. Bu kümenin $h_i a$ elemanları $(i=1, 2, \dots, r)$ birbirinden

farklıdır. (O.E.M.)

Kabul edelim ki; $i \neq j$ için $h_i a = h_j a$ olsun. Bu eşitliğin

Hipotezi kullanımı

her iki yanına a^{-1} ; sağdan uygularsak;

$(h_i a) a^{-1} = (h_j a) a^{-1} \Rightarrow h_i (a a^{-1}) = h_j (a a^{-1}) \Rightarrow h_i e = h_j e$

$\Rightarrow h_i = h_j$, $i \neq j$ için $h_i = h_j$ olması bir çelişkidir.

O halde $i \neq j$ için $h_i a \neq h_j a$ dir.

İspatı

(4)

ii) H a'nın $h_i a$ elemanları H nin elemanlarından farklıdır. (O.E.M) } Yan
 Kabul edelim ki, $h_i a = h_r$ olsun. Bu takdirde; } böl
 $h_i^{-1}(h_i a) = h_i^{-1} h_r$ olur. } Hipotezi
 Buradan ; $a = h_i^{-1} h_r$ dir. H bir grup olduğundan } kullanma
 $h_i^{-1} \in H$ ve $h_r \in H$; kapalılık özelliğinden dolayı } özellik kullan
 $h_i^{-1} \cdot h_r = a \in H$ elde edilir ki bu; $a \notin H$ } İspatı
 kabulümüzle çelişir. Öyleyse; $h_i a \neq h_r$ dir. } tamam
 $a \in G$ den farklı $\forall b \in G$ ve $b \notin H$ için de } lara
 yukarıda söylediklerimize peşettir.

Öyleyse ;

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_r\} \quad [H = eH = He]$$

$$Ha_1 = \{h_1 a_1, h_2 a_1, \dots, h_r a_1\}$$

$$Ha_2 = \{h_1 a_2, h_2 a_2, \dots, h_r a_2\}$$

$$Ha_{q-1} = \{h_1 a_{q-1}, h_2 a_{q-1}, \dots, h_r a_{q-1}\}$$

tablosunda q satır ve her satırda r tane eleman vardır. Tablodaki bütün elemanların sayısı $q \cdot r$ tane dir. Yan kümeler, ikiser ikiser ayrık ve birleşimleri G yi vereceğinden

$$o(G) = n = q \cdot r \Rightarrow r | n \text{ elde edilir.}$$

$$o(H) | o(G) \text{ dir.}$$

Kaynak: Ders
 Notları
 (R. Dibi)

Teorem: $\checkmark$ Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

İspat: $|G| = k$ ve k asal olsun. G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz. } Hipotez belirlen

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından verilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $|H| \mid |G|$ olmalıdır. } önceki bilgileri kullanma

Ancak $|G| = k$ asal olduğundan 1 ve k dışında başka böleni yoktur. } (Asal sayı) tanım kullanma

O halde; $|H|$ n $|G|$ yi bölmesi için

$|H| = k$ olmalıdır. Dolayısıyla G grubu

H grubuna eşittir. Yani; $H = \langle a \rangle$ ve $|H| = k$ olup $G = \langle a \rangle = H$ dir. } ispatı tamamlama

(Ders Notları)

Teorem.2: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim. Yani $\bar{a}$, a H 'nin denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz. } hipotez belirlenmesi

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir altgrup olduğundan H kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Bu eşitliğin her iki yanına a^{-1} i soldan işleme tabi tutarsak;

$$a^{-1}(ax^{-1}) = a^{-1}h \quad (\text{Grupta birleşme özelliğinden})$$

$$(a^{-1}a)x^{-1} = a^{-1}h \quad (\text{Grupta ters eleman özelliğinden})$$

$$ex^{-1} = a^{-1}h \quad (\text{Grupta özdeş eleman özelliğinden})$$

$$x^{-1} = a^{-1}h \quad \text{olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alınır}$$

$$(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$$

$$x = h^{-1}a \text{ olur.}$$

$$(h \in H \text{ ve } H \leq G \text{ olduğundan } h^{-1} \in H \text{ } h^{-1} = h_0 \in H \text{ denirse})$$

$$x = h_0a \in Ha \text{ olur ki buradan } \bar{a} \subset Ha \text{ bulunur.....(1)}$$

ii) Tersine olarak $y \in Ha$ alınır; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dir. Bu eşitliğin her iki yanına a^{-1} i sağdan işleme tabi tutarsak;

$$ya^{-1} = (xa)a^{-1} \quad (\text{Grupta birleşme özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = x(aa^{-1}) \quad (\text{Grupta ters eleman özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = xe \quad (\text{Grupta özdeş eleman özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = x \quad \text{olur. Buradan } x = ya^{-1} \in H \text{ bulunur.}$$

$$ya^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \forall a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a} \text{ bulunur ki;}$$

$$Ha \subset \bar{a} \text{ demektir.....(2)}$$

(1) Ve (2) den $Ha = \bar{a}$ denir. $\rightarrow$ İspat tamamlanmış.

EK 3. TEMEL BİLEŞENLERİ EKSİK BIRAKILMIŞ İSPAT TAMAMLAMA FORMU

Teorem.1: $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. $(x, y, z \in G$ için)

Bu takdirde,

$$(xN)[(yN)(zN)] = xN[(yz)N]$$

$$= [(xN)(yN)](zN)$$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için $(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N$ var mıdır?

$$(xN)(x^{-1}N) =$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Teorem.2: $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim.

Yani $\bar{a}$, a nın denklik sınıfı olsun. $H \leq G$ için $Ha = \bar{a}$ olduğunu dolayısıyla $\bar{a} \subset H_a$ ve $H_a \subset \bar{a}$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. Buradan;

..... (Grupta birleşme özelliğinden)

..... (Grupta özelliğinden)

$$ex^{-1} = a^{-1}h \quad \text{(Grupta özelliğinden)}$$

$$x^{-1} = a^{-1}h \quad \text{olur. Eşitliğin her iki yanının tersi alınırsa}$$

$$(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$$

$$x = h^{-1}a \text{ olur.}$$

($h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundandenirse)

$$x = h_0a \in H_a \text{ olur ki buradan } \bar{a} \subset H_a \text{ bulunur.....(1)}$$

ii) Tersine olarak $y \in H_a$ alınır; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dır.

Buradan;

..... (Grupta birleşme özelliğinden)

..... (Grupta özelliğinden)

$$ya^{-1} = xe \quad \text{(Grupta özelliğinden)}$$

$$ya^{-1} = x \quad \text{olur. Buradan } x = ya^{-1} \in H \text{ bulunur.}$$

$$ya^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \vee a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a} \text{ bulunur ki;}$$

$$H_a \subset \bar{a} \text{ demektir.....(2)}$$

$$(1) \vee (2) \text{ den } H_a = \bar{a} \text{ denir.}$$

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

.....
..... olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b \in H_i$

→ Alt grubun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Teorem.4: Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ olmalıdır.

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur.

O halde;

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

İle tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G, G$ nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\varphi_a(xy) = a(xy)a^{-1} =$$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır.

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$\exists x \in G$ bulunabileceğinden, φ_a örten de olur. Şu halde φ_a G nin bir otomorfizmasıdır.

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

.....

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun. Buna göre;

.....

eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır.

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.

$c.u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$$

.....

.....

$$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W \text{ ise}$$

$$c.u + v \in U \cap W \text{ dir.}$$



EK 4. EKSİK BIRAKILAN TEMEL BİLEŞENLERİ TAMAMLANMIŞ İSPAT FORMU

Teorem.1: $(G, .)$ bir grup ve $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$ bir gruptur.

İspat.1:

i. $xN, yN, zN \in G/N$ alalım. $(x, y, z \in G$ için)

Bu takdirde, *

$$\begin{aligned} (xN)[(yN)(zN)] &= xN[(yz)N] && \{N \triangleleft G \text{ olduğundan} \\ &= [x(yz)N] && \{G' \text{ de birleşme özelliğinden} \\ &= [(xy)z]N \\ &= [(xy)N](zN) \\ &= [(xN)(yN)](zN) && * \end{aligned}$$

Birleşme özelliğinin var olduğunu gösterir.

ii. G nin birim elemanı $e \Rightarrow \forall xN \in G/N$ için

$$(xN)(eN) = xN = (eN)(xN)$$

ve böylece, $eN = N$, G/N nin birim elemanıdır.

iii. $\forall xN \in G/N$ için *

$$(xN)(x^{-1}N) = eN = (x^{-1}N)(xN)$$

$$(xx^{-1})N = (xx^{-1})N = eN \quad \{G' \text{ de ters eleman özelliğinden}$$

olup

$$(xN)^{-1} = (x^{-1}N) \in G/N \quad * \text{olduğu görülür.}$$

Sonuç olarak; G/N bir gruptur.

Teorem.2: $(G, .)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için,

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod{H}\} \text{ yani } Ha = \bar{a} \text{ dir.}$$

İspat.2: $a \equiv x \pmod{H}$ kongrüansına uyan $x \in G$ lerin kümesini $\bar{a}$ ile gösterelim.

Yani $\bar{a}$, a

nın denklik sınıfı olsun.

i) $x \in \bar{a}$, yani $a \equiv x \pmod{H} \Rightarrow ax^{-1} \in H$ yazılır. H bir alt grup olduğundan kapalılık özelliğine göre öyle bir $h \in H$ vardır ki; $ax^{-1} = h$ dir. **Bu eşitliğin her iki yanına a^{-1} i soldan işleme tabi tutarsak;**

$$a^{-1}(ax^{-1}) = a^{-1}h \quad (\text{Grupta birleşme özelliğinden})$$

$$(a^{-1}a)x^{-1} = a^{-1}h \quad (\text{Grupta ters eleman özelliğinden})$$

$$ex^{-1} = a^{-1}h \quad (\text{Grupta özdeş eleman özelliğinden})$$

$$x^{-1} = a^{-1}h \quad \text{olur. Eşitliğin her iki yanının tersi}$$

alınırsa

$$(x^{-1})^{-1} = (a^{-1}h)^{-1}$$

$$x = h^{-1}a$$

olur.

($h \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan $h^{-1} \in H$ $h^{-1} = h_0 \in H$ denirse)

$$x = h_0a \in H_a \quad \text{olur ki buradan } \bar{a} \subset H_a$$

bulunur.....(1)

ii) Tersine olarak $y \in H_a$ alınır; $x \in H$ vardır öyle ki; $y = xa$ dır. Bu eşitliğin her iki yanına a^{-1} i sağdan işleme tabi tutarsak;

$$ya^{-1} = (xa)a^{-1} \quad (\text{Grupta birleşme özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = x(aa^{-1}) \quad (\text{Grupta ters eleman özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = xe \quad (\text{Grupta özdeş eleman özelliğinden})$$

$$ya^{-1} = x \quad \text{olur. Buradan } x = ya^{-1} \in H \text{ bulunur.}$$

$$ya^{-1} \in H \Rightarrow y \equiv a \pmod{H} \quad \forall a \equiv y \pmod{H} \Rightarrow y \in \bar{a} \text{ bulunur ki;}$$

$$H_a \subset \bar{a} \text{ demektir.....(2)}$$

(1) Ve (2) den $H_a = \bar{a}$ denir

Teorem.3: Bir $(G, \cdot)$ grubunun birtakım (sonlu veya sonsuz) alt gruplarının kesişimi yine G nin bir alt grubudur.

İspat.3: $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ bir indis kümesi olsun.

$*i \in I$ olmak üzere kabul edelim ki; H_i ler G nin bir alt grubu olsun. ($H_i \leq G$)

Bu takdirde; $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ denirse $H \leq G$ olduğunu göstereceğiz.*

Bunun için $a, b \in H$ alalım.

→ Kesişimin tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b \in H_i$

→ Alt grubun tanımından; $\forall i \in I$ için $a \cdot b^{-1} \in H_i$

→ Kesişimin tanımından; $a \cdot b^{-1} \in H$ olur.

Öyleyse $H \leq G$ dir.

Teorem.4: Mertebesi asal olan her G grubu bir devir grubudur.

İspat.4: $o(G) = k$ ve k asal olan G nin bir devir grubu olduğunu göstereceğiz.

$a \in G$ ve $a \neq e$ olsun. a elemanı tarafından gerilen H alt devir grubunu düşünelim.

Lagrange teoremi gereğince; $o(H) \mid o(G)$ olmalıdır.

Ancak $o(G) = k$ asal olduğundan 1 ve kendisinden başka böleni yoktur.

O halde;* $o(H)$ ın $o(G)$ yi bölmesi için $o(H) = k$ olmalıdır.

Dolayısıyla G grubu H grubuna eşittir. Yani; $H = \langle a \rangle$ ve $o(H) = k$ olup $G = \langle a \rangle = H$ dir.*

Teorem.5: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G, G$ nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

İspat.5: $\forall x, y \in G$ için;

$$\begin{aligned}\varphi_a(xy) &= a(xy)a^{-1} = a(xa^{-1}ay)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) \\ &= \varphi_a(x)\varphi_a(y)\end{aligned}$$

Olduğundan, φ_a bir homomorfizmadır.

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

Olduğundan φ_a 1-1 dir.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde

$\exists x \in G$ bulunabileceğinden, φ_a örten de olur. Şu halde φ_a G nin bir otomorfizmasıdır.

Teorem.6: S kümesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi ve S' de $S' \subset S$ olacak şekilde V vektör uzayının bir alt kümesi ise S' de lineer bağımsızdır.

İspat.6: $c_i \in R$ ve $x_i \in S$ olsun. S kümesi lineer bağımsız olduğundan,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

Sisteminin çözümünde tüm c_i katsayıları sıfır ($c_i = 0, i = 1, \dots, n$) olmalıdır. S' kümesi S nin bir alt kümesi olduğundan bazı x_i ler S' de olacaktır. $x_i \rightarrow v_i$ olsun. Buna göre;

$$b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n = 0$$

eşitliğini yazalım. Bu v_i vektörleri S nin elemanları olduğundan v_i vektörleri lineer bağımsızdır. Öyleyse bütün b_i katsayıları sıfırdır. Dolayısıyla S' de lineer bağımsızdır.

Teorem.7: U ve W kümeleri V vektör uzayının birer alt uzayı olmak üzere; $U \cap W$ kümesi de V nin bir alt uzayıdır.

İspat.7: $u, v \in U \cap W$ olsun. $c \in F$ (F cisim) denilsin.

$c.u + v \in U \cap W$ olduğunu göstermeliyiz.

$$u, v \in U \cap W \Rightarrow u, v \in U \wedge u, v \in W$$

$u, v \in U$ ve U, V nin alt uzayı olup $c.u + v \in U$

$u, v \in W$ ve W, V nin alt uzayı olup $c.u + v \in W$

$c.u + v \in U \wedge c.u + v \in W$ ise

$c.u + v \in U \cap W$ dir.



ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Erzurum'un Şenkaya ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lisans öğrenimini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde tamamlayarak 2009 yılında mezun oldu. 2010-2011 eğitim öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Doktora eğitimine başladı. Doktora öğrenimine devam ettiği sırada 2012'de Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde araştırma görevlisi oldu. Halen Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde görev yapmaktadır.