



**T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN
DOĞRUSAL DİNAMİK DENKLEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Gül AYDEMİR
(201592171101)**

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN

**SİVAS
KASIM 2017**

Gül AYDEMİR'in hazırladığı ve “**ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN DOĞRUSAL DİNAMİK DENKLEMLER**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı **Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN**
Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ**
Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Yılmaz ÇEVEN**
Süleyman Demirel Üniversitesi

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.





Bütün hakları saklıdır.
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

© Gül AYDEMİR, 2017



Çalışma sırasında bana destek olan aileme ve değerli hocama...

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

27.11.2017

Gül AYDEMİR

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN'a çok teşekkür ederim.



ÖZET

ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN DOĞRUSAL DİNAMİK DENKLEMLER

Gül AYDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN

2017, 57+xi sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, konunun önemi ve tarihsel gelişimi anlatılmaktadır. İkinci bölümde, zaman skalası teorisinin temel kavramları ile zaman skalasında tanımlı herhangi bir fonksiyon için türev ve integral kavramları verilmektedir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden lineer dinamik denklemlerin genel teorisine yer verilmektedir. Beşinci bölümde, zaman skalasında kurulan Sturm-Liouville tipinde sınır değer problemi ele alınıp, bu tip problemlerin öz değer ve öz fonksiyonlarının özellikleri incelenmektedir.

Anahtar kelimeler: Zaman Skalası, Delta Türev, Delta İntegral, Dinamik Denklemler.

ABSTRACT

THE FIRST AND SECOND ORDER LINEAR DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALE

Gül AYDEMİR

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN

2017, 57+xi pages

This thesis consists five chapters. In introduction, the importance and historical development of the subject is explained. In the second chapter, the basic concepts of time scale theory and derivation and integration of a function defined in time scale are given. In chapter 3 and 4, the general theory of first and second order linear dynamic equations is explained, respectively. In the last chapter, the Sturm-Liouville type boundary value problem is considered and the properties of eigenvalues and eigenfunctions of this type of problems are investigated.

Key Words: Time scale, Delta derivation, Delta integration, Dynamic equations.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
SİMGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SKALASINDA ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI	4
2.1 Temel Tanım ve Örnekler.....	4
2.2 Zaman Skalasında Türev.....	7
2.3 Zaman Skalasında İntegral.....	12
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER	20
3.1 Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon.....	21
3.2 Birinci Mertebeden Lineer Denklemler için Başlangıç Değer Problemleri....	23
3.3 Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon Örnekleri.....	29
4. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER	32
4.1 Homojen Dinamik Denklemin Çözümleri.....	33
4.2 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler.....	36
4.3 İkinci Tip Lineer Homojen Dinamik Denklem.....	38
4.4 Homojen Olmayan Lineer Dinamik Denklemler İçin Parametrelerin Değişimi Metodu.....	40
5. ZAMAN SKALASINDA STURM-LIOUVILLE ÖZDEĞER PROBLEMİ.	42
5.1 Problemin Tanımı ve Probleme Karşılık Gelen Operatör.....	42
5.2 Sturm-Liouville Denkleminin Bazı Özel Çözümleri.....	45
5.3 Özdeğerlerin Özellikleri.....	47
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{T}	Zaman skalası
C_{rd}	Sağ-yoğun sürekli (rd-sürekli) fonksiyonların sınıfı
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
\circ	Bileşke gösterimi
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Graininess fonksiyonu
σ^n	$\sigma\sigma^{n-1}$, $n>1$
f^σ	$f\circ\sigma$
f^Δ	f fonksiyonunun Δ -türevi
$f^{\Delta\Delta}$	f fonksiyonunun ikinci mertebeden Δ -türevi
$W(y,z)$	Wronsky determinantı (Wronskiyan)
\mathcal{R}	Regresif fonksiyonlar kümesi
$\langle x,y \rangle$	x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\int_a^b f(t)\Delta t$	f fonksiyonunun a dan b ye Δ -integrali
$L_2(a, b)$	Mutlak değerinin karesi $(a, b)_{\mathbb{T}}$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olan fonksiyonların uzayı.

1. GİRİŞ

Matematiğin tamamında ve matematiği kullanan tüm bilim dallarında çok önemli bir yere sahip olan fonksiyonlar teorisi günümüzde mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Hiç kuşku yok ki fonksiyonlar teorisinin en önemli ve en temel problemlerinden biri fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının belirlenmesidir. Matematiksel olarak bu problem türevle açıklanır. Fakat uygulamalı bilimlerde karşılaşılan bir çok problem matematiksel olarak modellendiğinde tanım kümesi ayrık noktalardan oluşan fonksiyonlar ortaya çıkar. Ayrık kümelerde tanımlı fonksiyonlar için birden fazla türev tanımından bahsedilebilir ve bu türevler klasik analizdeki türev tanımından farklıdır. Klasik analizde, \mathbb{R} reel sayılar kümesinde veya \mathbb{R} 'nin bir $[a, b]$ alt aralığında tanımlı olan bir f fonksiyonunun bir $t \in (a, b)$ noktasındaki türevi

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti ile açıklanır. Buna karşın tanım kümesi \mathbb{Z} tam sayılar kümesi olan bir f fonksiyonu için bir $t \in \mathbb{Z}$ noktasındaki ileri fark türevi

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

şeklinde, geri fark türevi ise

$$\nabla f(t) = f(t) - f(t-1)$$

şeklinde tanımlanır.

$h > 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi de ayrık noktalardan oluşan bir kümedir. " h - sayılar" kümesi olarak adlandırılan bu kümede tanımlı bir fonksiyonun bir $t \in h\mathbb{Z}$ noktasındaki türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\Delta_h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Son yıllarda popüler olan bir diğer ayrık küme de $q > 1$ bir reel sayı olmak üzere

$$q^{\mathbb{N}_0} = \{q^k : k = 0, 1, 2, \dots\}$$

kümesidir. "*q - sayılar*" kümesi olarak isimlendirilen bu kümedeki bir türev kavramı

$$D_q f(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{qt - t}$$

formülü ile verilir.

Görüldüğü gibi, fonksiyonun tanımlı olduğu kümenin yapısı değiştiğinde türev kavramını açıklayan formülün de değişmesi gerekmektedir. 1988 yılında Stefan Hilger tarafından hazırlanan doktora tezinde ayrık analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla zaman skalası teorisi ortaya atılmıştır. Bunun için de her iki teorideki türev kavramları tek bir tanım yardımıyla birleştirilmiştir. Hilger, \mathbb{R} 'nin boş kümeden farklı herhangi bir kapalı alt kümesini zaman skalası diye adlandırmış ve zaman skalasında, tüm sürekli ve ayrık kümelerdeki türev kavramlarını genelleştiren bir türev tanımı vermiştir. Böylece sürekli analizdeki ve ayrık analizdeki; türev, integral, diferansiyel denklem, başlangıç ya da sınır değer problemleri gibi kavramlar zaman skalasına aktarılmıştır.

Zaman skalası, diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. Zaman skalasında tanımlanan türevli denklemlere dinamik denklemler denir. Herhangi bir zaman skalasındaki bir dinamik denklem, hem sürekli analizdeki diferansiyel denklemlerden hem de ayrık analizdeki fark denklemlerinden daha geneldir. \mathbb{R} 'de tanımlı diferansiyel denklemler veya \mathbb{Z} 'de tanımlı fark denklemleri için ayrı sonuçlar vermek yerine, zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem göz önüne alınarak inceleme yapılabilir. Ayrıca zaman skalası sadece \mathbb{R} ve \mathbb{Z} için değil farklı yapıdaki sürekli ya da ayrık kümeler üzerinde araştırma yapma imkanı sağlar.

Özellikle biyoloji, tıp ve ekonomi problemlerinin bir çoğu ayrık kümelerde analiz yapmayı gerektirir. Üstelik, zamana bağımlı çeşitli değişkenleri bulunduran bu tip problemler türev yardımıyla modellenmektedir. Bu ise zaman skalası teorisinin uygulamalı bilimlerdeki önemini ortaya koymaktadır.

Zaman skalasında gerek birinci mertebeden gerekse yüksek mertebeden doğrusal denklemler, dinamik denklemler teorisinin en temel konularındandır. Özel olarak ikinci mertebeden bir dinamik denklem olan Sturm-Liouville denklemi uygulamalı bilimlerdeki problemlerde yaygın olarak ortaya çıkar. Zaman skalası \mathbb{R} olduğunda yani sürekli

analizde Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ile ilgili oldukça geniş bir literatür bulunmaktadır. Sturm Liouville diferansiyel denklemi ile türetilen operatörlerin spektral teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Bernoulli, D'Alembert, Euler, Liouville ve Sturm'a aittir. 1836'da Sturm ve Liouville, belirli koşullar altında Sturm Liouville denklemini ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonlarının varlığına olanak veren λ sayılarının, yani özdeğerlerin, ayrık bir küme oluşturduğunu ispatlamışlardır. Günümüzde bu tip denklemler üzerine kurulan problemler kapsamlı şekilde çalışılmış ve oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Zaman skalasında Sturm Liouville teorisi ise ilk olarak Erbe ve Hilger tarafından 1993'de ele alınmıştır. Herhangi bir zaman skalasında, çeşitli Sturm-Liouville problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının özellikleri Agarwal, R.P., Bohner, M., Wong, P.J.Y.(1999); Erbe, L., Peterson, A. (2000); Davidson, F.A., Rynne, B.P. (2007); Guseinov, G.S (2007 ve 2008); Kong, Q. (2008); Amster, P., De Na'poli, P., Pinasco, J.P. (2008 ve 2009); Huseynov, A., Bairamov, E. (2009); çalışmalarında ele alınmıştır.

Bu tezde zaman skalası teorisinin temel kavramları ile birinci ve ikinci mertebeden doğrusal dinamik denklemlerin genel teorisi işlenmekte ve zaman skalası üzerinde kurulan ayrık sınır koşullu Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının önemli özellikleri verilmektedir. İkinci bölümde verilen tüm sonuçlar Bohner ve Peterson'un "Dynamic Equations on Time Scales" eserinden alınmış olup bu sonuçların ispatları için bu eser kaynak gösterilmektedir. Diğer bölümlerde derlenen sonuçların ayrıntılı ispatlarına da yer verilmiştir. Özel olarak, beşinci bölümde yer alan bazı ispatlar ve örnekler orjinaldir.

2. ZAMAN SKALASINDA ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

2.1. Temel Tanım ve Örnekler

Tanım 2.1.1: \mathbb{R} 'nin boş kümeden farklı, kapalı herhangi bir \mathbb{T} alt kümesine zaman skalası (time scale) denir. Örneğin,

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, [0, 1] \cup [2, 3], [0, 1] \cup \mathbb{N},$$

$$h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}, \quad h > 0$$

$$q^{\mathbb{N}_0} = \{q^k : k \in \mathbb{N}_0\}, \quad q > 1$$

$$\mathbb{K}_q = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

kümeleri birer zaman skalasıdır.

\mathbb{T} zaman skalası

$$d(t, s) = |t - s|, \quad t, s \in \mathbb{T} \quad (2.1)$$

dönüşümü ile bir metrik uzaydır. \mathbb{T} 'nin \mathbb{R} içinde kapalı bir alt küme olmasından dolayı \mathbb{T} 'nin (2.1) metriği ile bir tam uzay olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, metrik uzayların genel teorisinden \mathbb{T} içinde bir dizinin limiti, noktanın komşuluğu, açık küme, kapalı küme, kompakt küme vs. gibi kavramlar verilebilir. Örneğin, $\delta > 0$ verilen bir reel sayı olmak üzere $t_0 \in \mathbb{T}$ noktasının δ -komşuluğu $U_\delta(t_0) = \{t \in \mathbb{T} : |t - t_0| < \delta\}$ şeklinde tanımlanır.

Aynı zamanda, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için süreklilik kavramı ve sürekli fonksiyonların genel özellikleri açıklanabilir.

Bir \mathbb{T} zaman skalasında kapalı, açık ve yarı kapalı (yarı açık) aralıklar $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a \leq b$ olmak üzere,

$$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$$

$$[a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$$

$$(a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a < t \leq b\}$$

$$(a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a < t < b\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2: \mathbb{T} bir zaman skalası olmak üzere,

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \sigma(t) &= \begin{cases} \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}, & t \neq \sup \mathbb{T} \\ t, & t = \sup \mathbb{T} \end{cases} \\ \rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \rho(t) &= \begin{cases} \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}, & t \neq \inf \mathbb{T} \\ t, & t = \inf \mathbb{T} \end{cases} \\ \mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty), \quad \mu(t) &= \sigma(t) - t.\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan σ , ρ ve μ fonksiyonlarına sırasıyla ileri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü ve graininess operatörü denir.

\mathbb{T} 'nin kapalı olmasından her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.3: \mathbb{T} bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere, $\sigma(t) = t$ ise t 'ye sağ yoğun nokta, $\sigma(t) > t$ ise t 'ye sağ yayılmış nokta, $\rho(t) = t$ ise t 'ye sol yoğun nokta ve $\rho(t) < t$ ise t 'ye sol yayılmış nokta denir. Hem sol yoğun hem de sağ yoğun olan noktaya yoğun nokta adı verilir. $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise t izole noktadır.

Örnek 2.1.4: $\mathbb{T} = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4]$ zaman skalası için

$$t_0 = 0 : \text{sağ yoğun} \quad \sigma(0) = 0$$

$$t_1 = 1 : \text{sağ yayılmış ve sol yoğun} \quad \sigma(1) = 2 \text{ ve } \rho(1) = 1$$

$$t_2 = 4 : \text{sol yoğun} \quad \rho(4) = 4$$

$$t_3 = 3 : \text{sol yayılmış ve sağ yoğun} \quad \sigma(3) = 3 \text{ ve } \rho(3) = 2$$

$$t_4 = 2 : \text{izole} \quad \sigma(2) = 3 \text{ ve } \rho(2) = 1$$

$$t_5 = \frac{1}{2} : \text{yoğun} \quad \sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \rho\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Örnek 2.1.5:

a. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise tanımdan her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

bulunur. Her $t \in \mathbb{R}$ için t sol yoğun ve sağ yoğun nokta olduğundan yoğunudur. Graniniess μ fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

şeklinde olup, bu eşitlik $\forall t \in \mathbb{R}$ için sağlandığından $\mu \equiv 0$ dir.

b. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise her $t \in h\mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{t + h, t + 2h, t + 3h, \dots\} = t + h$$

$$\rho(t) = \sup \{\dots, t - 3h, t - 2h, t - h\} = t - h$$

$$\mu \equiv h$$

bulunur.

Özel olarak $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise her $t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ ve $\mu \equiv 1$ dir.

c. $\mathbb{T} = \mathbb{K}_q = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$ halinde her $t \in \mathbb{K}_q$ ve $t > 0$ için

$$\sigma(t) = \inf \{qt, q^2t, q^3t, \dots\} = qt$$

$$\rho(t) = \sup \left\{ \dots, \frac{1}{q^3}t, \frac{1}{q^2}t, \frac{1}{q}t \right\} = \frac{1}{q}t$$

ve $t = 0$ için

$$\sigma(0) = \rho(0) = 0$$

dir. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{K}_q$ için

$$\sigma(t) = qt, \rho(t) = \frac{1}{q}t$$

yazılabilir.

d. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ise her $t \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(t) = t + 1$$

$$\rho(t) = \begin{cases} t - 1, & t > 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

bulunur.

e. $\mathbb{T} = [0, 1] \cup [2, 3]$ ise her $t \in [0, 1] \cup [2, 3]$ için

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \cup [2, 3], \\ 2, & t = 1 \end{cases}$$

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \cup (2, 3], \\ 1, & t = 2 \end{cases}$$

bulunur.

2.2. Zaman Skalasında Türev

\mathbb{T} bir zaman skalası olmak üzere

$$\mathbb{T}^k := \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & \mathbb{T} \text{ sol-yayılmış bir maksimum } m \text{ noktasına sahipse} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

kümesi \mathbb{T} 'deki türevlenebilme bölgesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.1: Kabul edelim ki

$$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t 'nin en az bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu, her $s \in U$ elemanı için

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde mevcut ise, f 'e t noktasında Δ - diferansiyellenebilir veya Δ - türevlenebilir fonksiyon ve $f^\Delta(t)$ sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki

Δ - türevi veya Hilger türevi denir. Bununla birlikte, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f 'ye \mathbb{T}^k 'da Δ - diferensiyellenebilirdir denir.

$$f^\Delta : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu f 'nin \mathbb{T}^k 'daki Δ - türevi olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.2: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O halde

(i) Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ - türevlenebilirse, t 'de süreklidir.

(ii) Eğer f , t 'de sürekli ve t bir sağ yayılmış nokta ise f , t 'de Δ - türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

biçimindedir.

(iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise f 'nin t 'de Δ - türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul sonlu

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dır.

(iv) f , t 'de Δ - diferansiyellenebilir ise

$$f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t) \cdot f^\Delta(t)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ dir.

Tanımdan, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise f 'nin Δ - türevi

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t);$$

ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ 'de Δ - diferansiyellenebilir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

dir.

Örnek 2.2.3:

\mathbb{T} herhangi zaman skalası olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğu Δ - türev tanımından elde edilebilir.

a. Herhangi bir c sabiti için $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = c$ ise $f^\Delta(t) \equiv 0$.

b. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = ct$ ise $f^\Delta(t) \equiv c$.

c. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ ise $f^\Delta(t) = t + \sigma(t)$.

d. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^n$ ise $f^\Delta(t) = \sum_{k=1}^n t^{n-k} \sigma^{k-1}(t)$.

e. $f : \mathbb{T} \cap (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{t}$ ise $f^\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}}$.

f. $f : \mathbb{T} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$ ise $\sigma(t) \neq 0$ için $f^\Delta(t) = -\frac{1}{t\sigma(t)}$.

Örnek 2.2.4:

Bu örnekte de bazı özel zaman skalalarında bazı fonksiyonların Δ - türevleri verilmektedir.

a. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$(t^2)^\Delta = 2t.$$

b. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + h$ olduğundan

$$(t^2)^\Delta = t + (t + h) = 2t + h.$$

c. $\mathbb{T} = \mathbb{K}_q$ ise $\sigma(t) = qt$ olduğundan

$$(t^2)^\Delta = t + qt = (q + 1)t.$$

d. $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{k} : k \in \mathbb{N}_0\}$ ise $\sigma(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}(t^3)^\Delta &= t^2 + t\sigma(t) + \sigma^2(t) \\ &= 2t^2 + t\sqrt{t^2 + 1} + 1.\end{aligned}$$

e. $\mathbb{T} = \{2^{(2^k)} : k \in \mathbb{N}_0\}$ ise $\sigma(t) = t^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}(t^4)^\Delta &= t^3 + t^2\sigma(t) + t\sigma^2(t) + \sigma^3(t) \\ &= t^6 + t^5 + t^4 + t^3\end{aligned}$$

f. $\mathbb{T} = [0, 1] \cup [2, 3]$ ise

$$(e^t)^\Delta = \begin{cases} e^t, & t \in [0, 1) \cup [2, 3] \\ e^2 - e, & t = 1. \end{cases}$$

Teorem 2.2.5: $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında $\Delta -$ türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda:

(i) $f + g$, bir α sabiti için αf ve fg fonksiyonları da t 'de $\Delta -$ türevlenebilirdir. Ayrıca t noktasında

$$\begin{aligned}(f + g)^\Delta(t) &= f^\Delta(t) + g^\Delta(t) \\ (\alpha f)^\Delta(t) &= \alpha f^\Delta(t) \\ (fg)^\Delta(t) &= f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) \\ &= f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

(ii) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ oramı da t 'de $\Delta -$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

eşitliği geçerlidir.

(iii) Eğer $f(t) \cdot f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$, t 'de Δ - diferensiyellenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t) \cdot f(\sigma(t))}$$

dir.

Tanım 2.2.6: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $t_0 \in \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında

i) t_0 sağ yayılmış nokta ise $f(\sigma(t_0)) > f(t_0)$;

ii) t_0 sağ yoğun nokta ise öyle bir $U(t_0)$ komşuluğu var ki, $t > t_0$ olan her $t \in U(t_0)$ için $f(t) > f(t_0)$

koşulları geçerli ise f 'e t_0 noktasında sağ-artan fonksiyon denir.

Tanım 2.2.7: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $t_0 \in \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında

i) t_0 sağ yayılmış nokta ise $f(\sigma(t_0)) < f(t_0)$;

ii) t_0 sağ yoğun nokta ise öyle bir $U(t_0)$ komşuluğu var ki, $t > t_0$ olan her $t \in U(t_0)$ için $f(t) < f(t_0)$

koşulları geçerli ise f 'e t_0 noktasında sağ-azalan fonksiyon denir.

Teorem 2.2.8: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında Δ - türevlenebilir ve $f^\Delta(t_0) > 0$ ($f^\Delta(t_0) < 0$) ise f , t_0 noktasında sağ-artan (sağ-azalan) fonksiyondur.

Teorem 2.2.9: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli, $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ - türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ ise

$$f^\Delta(u) \leq 0 \leq f^\Delta(v)$$

eşitsizliğin sağlayan $u, v \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ noktaları vardır.

Teorem 2.2.10(Ortalama Değer Teoremi): $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli ve $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ - türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$f^\Delta(u) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(v)$$

eşitsizliğini sağlayan $u, v \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ noktaları vardır.

Sonuç 2.2.11: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli ve $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ -türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ için

- i) $f^{\Delta}(t) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında artandır.
- ii) $f^{\Delta}(t) < 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında azalandır.
- iii) $f^{\Delta}(t) = 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sabittir.

Tanım 2.2.12: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu \mathbb{T}^k da Δ - türevlenebilir olsun.

$f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\mathbb{T}^{k^2} = \{\mathbb{T}^k\}^k$ kümesinde Δ - türevlenebilir ise f fonksiyonu ikinci mertebeden Δ - türevlenebilirdir denir ve ikinci türev

$$f^{\Delta^2} = f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}$$

şeklinde tanımlanır. Genel şekilde, f 'nin n . mertebeden Δ - türevi, $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ her $t \in \mathbb{T}^{k^n}$ için

$$f^{\Delta^n} = \left(f^{\Delta^{n-1}} \right)^{\Delta}, \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.13:

\mathbb{T} herhangi bir zaman skalası ve c bir sabit olmak üzere $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = ct$ fonksiyonu için $f^{\Delta}(t) = c$ ve $f^{\Delta\Delta}(t) = 0$ dir.

2.3. Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1: Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun \mathbb{T} 'deki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri var(sonlu) ve \mathbb{T} 'deki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var(sonlu) ise bu f fonksiyonuna \mathbb{T} 'de düzenli (regulated) fonksiyon denir.

\mathbb{T} 'de sürekli her fonksiyonun düzenli olduğu açıktır fakat bunun tersi doğru değildir.

Tanım 2.3.2: Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, \mathbb{T} 'deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f 'ye rd-sürekli fonksiyon denir.

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ n. mertebeden Δ -türevlenebilir ve n. mertebeden Δ -türevi rd-sürekli fonksiyonların kümesi ise

$$C_{rd}^n = C_{rd}^n(\mathbb{T}) = C_{rd}^n(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.3.3: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- (i) f fonksiyonu sürekli ise rd-sürekli.
- (ii) f fonksiyonu rd-sürekli ise düzenlidir.
- (iii) σ operatörü rd-sürekli.
- (iv) Eğer f rd-sürekli ise f^σ da rd-sürekli.

Tanım 2.3.4: Bir

$$F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

eşitliğini sağlıyorsa F fonksiyonuna $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi(ilkeli) denir.

Bu durumda f 'in belirsiz integrali

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + c, \quad (c \text{ integral sabiti})$$

ve Cauchy integrali, $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.3.5:

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere,

$$\int_a^b \alpha^t \Delta t$$

belirli integralini hesaplayalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan

$$f^\Delta(t) = \Delta f(t)$$

yazılır. Buna göre $\alpha \neq 1$ sabiti için

$$\left(\frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right)^\Delta = \Delta\left(\frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right) = \frac{\alpha^{t+1} - \alpha^t}{\alpha-1} = \alpha^t$$

eşitliği yardımıyla,

$$\int \alpha^t \Delta t = \frac{\alpha^t}{\alpha-1} + C \quad \text{ve} \quad \int_a^b \alpha^t \Delta t = \frac{\alpha^b - \alpha^a}{\alpha-1}$$

olur.

Teorem 2.3.6 (Anti Türevlerin Varlığı): Her rd-sürekli fonksiyon anti türeve sahiptir. Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun anti türevi,

$$F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta\tau,$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.7: \mathbb{T} bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun. $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ kümesi $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ şeklinde tanımlanırsa bu kümeye $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının bir parçalanması denir. $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının tüm parçalanmalarının ailesi $P(a, b)$ ile gösterilir. Ayrıca bir $P = \{t_i : i = \overline{0, n}\} \in P(a, b)$ parçalanması herhangi bir $\delta > 0$ için " $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, t_i - t_{i-1} < \delta$ veya $t_i - t_{i-1} > \delta$ ve $\rho(t_i) = t_{i-1}$ " koşulunu sağlarsa P ye $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının bir δ -parçalanması denir. $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının tüm δ -parçalanmalarının ailesi de $P_\delta(a, b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.8: f , $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sınırlı bir fonksiyon, $P = \{t_i : i = \overline{0, n}\} \in P(a, b)$ ve $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (t_i - t_{i-1})$$

ifadesine f 'in P parçalanmasına karşılık gelen Riemann Δ -toplamı denir.

Şimdi de klasik analizdekine benzer olarak Riemann Δ -integralinin tanımını verelim.

Tanım 2.3.9: $f, [a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun.

" $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki, her bir $P \in P_{\delta}(a, b)$ parçalanması için $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}$ noktalarının seçiminden bağımsız olarak $|S - I| < \varepsilon$ eşitsizliği geçerlidir." önermesi sağlanacak şekilde bir I sayısı varsa f 'e $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ -integrallenebilir fonksiyon (veya Riemann Δ -integrallenebilir fonksiyon) denir. Bu I sayısı tektir ve bu sayıya da f 'in $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığındaki Δ -integrali (veya Riemann Δ -integrali) denir ve

$$I = \int_a^b f(\tau) \Delta\tau$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3.10: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = c$ sabit fonksiyonu Δ -integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(\tau) \Delta\tau = c(b - a)$$

dir.

Teorem 2.3.11: $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. Eğer $f, [t, \sigma(t)]_{\mathbb{T}}$ 'de Δ -integrallenebilirdir ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t) f(t)$$

dir.

Teorem 2.3.12: $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı her bir

i) monoton, ii) sürekli, iii) rd-sürekli veya iv) düzenli fonksiyon Δ -integrallenebilirdir.

Teorem 2.3.13: $f, [a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ -integrallenebilir bir fonksiyon,

$m = \inf\{f(t) : t \in [a, b]_{\mathbb{T}}\}$ ve $M = \sup\{f(t) : t \in [a, b]_{\mathbb{T}}\}$ olsun. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[m, M]$ aralığında sürekli ise $\varphi \circ f$ bileşke fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ -integrallenebilirdir.

Teorem 2.3.14(Analizin Temel Teoremi-1): f , $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli, $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ – türevlenebilir ve f^{Δ} , $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ –integrallenebilir ise

$$\int_a^b f^{\Delta}(t) \Delta t = f(b) - f(a)$$

geçerlidir.

Teorem 2.3.15(Analizin Temel Teoremi-2): f , $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ –integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ için

$$F(t) = \int_a^t f(\tau) \Delta \tau$$

fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ 'de sürekli dir. Ayrıca f , bir $t_0 \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ sağ yoğun noktasında sürekli ise F bu noktada Δ – türevlenebilir dir ve $F^{\Delta}(t_0) = f(t_0)$ dir.

Teorem 2.3.16: f ve f^{Δ} sürekli fonksiyonlar ise

$$\left(\int_a^t f(t, \tau) \Delta \tau \right)^{\Delta} = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^{\Delta}(t, \tau) \Delta \tau$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.3.17: Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve f, g fonksiyonları $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ –integrallenebilir ise

(i)

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$$

(ii)

$$\int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t$$

(iii)

$$\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

(iv)

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$$

(v)

$$\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t$$

(vi)

$$\int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t$$

(vii)

$$\int_a^a f(t) \Delta t = 0$$

(viii) Her $t \in \mathbb{T}$ için $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

dir.

(ix) Her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$$

dır.

Tanım 2.3.18: $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $E(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s \leq t\}$, $t \in [a, b]$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f \circ E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f 'in $[a, b]$ 'na bir genişlemesi olur. Eğer $f \circ E$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir (veya integrallenebilir) ise f fonksiyonuna $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir (veya integrallenebilir) fonksiyon denir. f 'in $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığındaki Lebesgue integrali

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f \circ E dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada eşitliğin sağ tarafındaki integral $[a, b]$ aralığındaki standart Lebesgue integralidir.

\mathbb{T} sınırlı zaman skalası, $\alpha = \inf \mathbb{T}$, $b = \sup \mathbb{T}$ olmak üzere

$L_2(a, b) = \{f : |f|^2, (a, b)_{\mathbb{T}} \text{ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir}\}$ kümesi

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} \Delta t$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır.

f , $[a, b]$ 'de Riemann anlamında Δ -integrallenebilir ise Lebesgue anlamında da integrallenebilir ve bu durumda bu integrallerin değerleri birbirine eşittir. Ayrıca Lebesgue integrali için Teorem 2.3.16 ve Teorem 2.3.17'deki özellikler geçerlidir.

Teorem 2.3.19: $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ -integrallenebilen her bir f fonksiyonu için

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

(ii) Eğer \mathbb{T} yalnızca izole noktalar içeren bir zaman skalası ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{t \in [a, b]} \mu(t) f(t)$$

dir.

(iii) Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh) h$$

dir.

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t)$$

dir.

Örnek 2.3.20:

a. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ iken

$$\begin{aligned}\int_0^t s \Delta s &= \sum_{s=0}^{t-1} s \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (t-2) + (t-1) \\ &= \frac{(t-1) \cdot (t-1+1)}{2} \\ &= \frac{t \cdot (t-1)}{2}\end{aligned}$$

dir.

b. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ iken

$$\begin{aligned}\int_0^t s \Delta s &= \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh) h \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} sh^2 \\ &= h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s \\ &= h^2 \left[0 + 1 + 2 + 3 + \dots + \left(\frac{t}{h} - 1 \right) \right] \\ &= h^2 \left(\frac{t}{h} - 1 \right) \frac{t}{h} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (t-h) t\end{aligned}$$

dir.

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

$f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$y^\Delta(t) = f(t, y(t), y^\sigma(t)) \quad (3.1)$$

şeklindeki denkleme *birinci mertebeden dinamik denklem* adı verilir.

Eğer özel olarak

$$f(t, y(t), y^\sigma(t)) = f_1(t)y(t) + f_2(t)$$

veya

$$f(t, y(t), y^\sigma(t)) = f_1(t)y^\sigma(t) + f_2(t)$$

olacak şekilde $f_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları varsa (3.1)'e \mathbb{T} zaman skalası üzerinde tanımlı *birinci mertebeden lineer(doğrusal) dinamik denklem* denir.

Bir $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu \mathbb{T} 'de birinci mertebeden Δ - türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$y^\Delta(t) = f(t, y(t), y^\sigma(t))$$

eşitliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona (3.1) denkleminin bir çözümü denir.

(3.1) denkleminin tüm çözümlerinin kümesi denklemin genel çözümü olarak adlandırılır.

Genel çözüm bir tek keyfi sabit bulunduran bir fonksiyon ailesidir.

Belirli $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y_0 \in \mathbb{R}$ sayıları için (3.1) denkleminin

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.2)$$

koşulunu sağlayan çözümünün aranmasına başlangıç değer problemi, (3.2) koşuluna da başlangıç koşulu denir.

Bu bölümde birinci mertebeden lineer dinamik denklemler ve bu denklemler için başlangıç değer problemleri incelenecektir. Bunun için öncelikle, klasik analizdeki üstel fonksiyonun zaman skalasındaki genelleştirilmesi sayılan genelleştirilmiş üstel fonksiyon ve onun bazı önemli özellikleri verilmelidir.

3.1. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon

Tanım 3.1.1: \mathbb{T} bir zaman skalası olmak üzere $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ ise p 'ye *regresif fonksiyon* denir. \mathbb{T} 'den \mathbb{R} 'ye tanımlı tüm rd-süreklili ve regresif fonksiyonların kümesi \mathcal{R} veya $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.1.2: \mathcal{R} kümesi

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t), \quad t \in \mathbb{T}^k \quad (3.3)$$

işlemine göre bir değişmeli gruptur. Bu gruba *regresif grup* adı verilir.

İspat:

i) Öncelikle işlemin kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için $p, q \in \mathcal{R}$ için $p \oplus q \in \mathcal{R}$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ ve $1 + \mu(t)q(t) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} 1 + \mu(t)(p \oplus q)(t) &= 1 + \mu(t)p(t) + \mu(t)q(t) + (\mu(t))^2 p(t)q(t) \\ &= (1 + \mu(t)p(t))(1 + \mu(t)q(t)) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $p \oplus q \in \mathcal{R}$ geçerlidir.

ii) $\forall p, q, r \in \mathcal{R}$ için $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$ ve $p \oplus q = q \oplus p$ olduğu işlemin tanımından açıktır.

iii) θ sıfır fonksiyonunu göstermek üzere, $\forall p \in \mathcal{R}$ için $p \oplus \theta = \theta \oplus p = p$ dir.

iv) $p \in \mathcal{R}$ olmak üzere $\ominus p = -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$ alırsak $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} [p \oplus (\ominus p)](t) &= p(t) \oplus \left(-\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \right) \\ &= p(t) - \frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} - \mu(t)p(t) \frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \\ &= \theta \end{aligned}$$

eşitliği sağlar. Bu ise $\ominus p$ fonksiyonunun p 'nin ters elemanı olduğunu gösterir. Böylece ispat biter.

\oplus işleminin ve bu işleme göre ters eleman kullanılarak $p \ominus q$ işlemi,

$$\begin{aligned}
(p \ominus q)(t) &= (p \oplus (\ominus q))(t) \\
&= p(t) - \frac{q(t)}{1 + \mu(t)q(t)} + \mu(t) \frac{p(t)(-q(t))}{1 + \mu(t)q(t)} \\
&= \frac{p(t) + \mu(t)p(t)q(t) - q(t) - \mu(t)p(t)q(t)}{1 + \mu(t)q(t)} \\
&= \frac{p(t) - q(t)}{1 + \mu(t)q(t)}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.3: $p \in \mathcal{R}$ olmak üzere $e_p : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right) \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlı $e_p(t, s)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş üstel fonksiyon denir.

Burada

$$\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(\tau)} \text{Log}(1 + p(\tau)\mu(\tau)), & \mu(\tau) > 0 \\ p(\tau), & \mu(\tau) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

dir.

Lemma 3.1.4: $p \in \mathcal{R}$ ise $\forall s, t, u \in \mathbb{T}$ için

i) $e_0(t, s) \equiv 1, \quad e_p(t, t) \equiv 1,$

ii) $e_p(t, u) \cdot e_p(u, s) = e_p(t, s),$

iii) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

(i) ve (ii) şıkları tanımdan açıktır.

iii) $\sigma(t) = t$ ise ispat açıktır. $\sigma(t) > t$ olsun.

$$\begin{aligned}
e_p(\sigma(t), s) &= \exp \int_s^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \\
&= \exp \left[\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau + \int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right] \\
&= e_p(t, s) \exp \mu(t) \xi_{\mu(t)}(p(t)) \\
&= e_p(t, s) \exp(\text{Log}(1 + \mu(t)p(t))) \\
&= e_p(t, s) [1 + \mu(t)p(t)]
\end{aligned}$$

olur.

3.2. Birinci Mertebeden Lineer Denklemler İçin Başlangıç-Değer Problemleri

Tanım 3.2.1: $p \in \mathcal{R}$ ise

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t) + q(t) \quad (3.6)$$

denkleminin *birinci mertebeden regresif lineer dinamik denklem* denir. Özel olarak $q(t) = 0$ ise (3.6) denkleminin *homojen lineer regresif denklem* adı verilir.

Teorem 3.2.2: $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere $e_p(t, t_0)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} y^\Delta(t) = p(t)y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

İspat: $e_p(t_0, t_0) = 1$ olduğu Lemma 3.1.4 (i)'den açıktır. $e_p^\Delta(t, t_0) = p(t)e_p(t, t_0)$ olduğu gösterilmelidir.

$\sigma(t) > t$ olsun. Doğrudan hesaplama ile Teorem 2.3.11 ve Lemma 3.1.4 (ii) den

$$\begin{aligned}
e_p^\Delta(t, t_0) &= \frac{e_p(\sigma(t), t_0) - e_p(t, t_0)}{\sigma(t) - t} \\
&= e_p(t, t_0) \left\{ \frac{e_p(\sigma(t), t) - 1}{\mu(t)} \right\} \\
&= \frac{e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \left\{ \exp \int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - 1 \right\} \\
&= \frac{e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \{ \exp [\mu(t) \xi_{\mu(t)}(p(t))] - 1 \} \\
&= \frac{e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \{ \exp \text{Log}(1 + \mu(t)p(t)) - 1 \} \\
&= \frac{e_p(t, t_0)}{\mu(t)} \{ 1 + \mu(t)p(t) - 1 \} \\
&= p(t) e_p(t, t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de $\sigma(t) = t$ ve $y = e_p(t, t_0)$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\forall s \in U_\delta(t)$ için

$$|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| < \varepsilon |t-s| \quad (3.8)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde en az bir $U_\delta(t)$ komşuluğunun mevcut olduğunu göstermek yeterlidir.

$$|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| = |e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t-s)|$$

$$= |e_p(t, t_0)| |1 - e_p(s, t) - p(t)(t-s)|$$

$$= |e_p(t, t_0)| \left| 1 - e_p(s, t) - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - p(t)(t-s) \right|$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| &\leq |e_p(t, t_0)| \left| 1 - e_p(s, t) - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right| \\
&\quad + |e_p(t, t_0)| \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - p(t)(t-s) \right|
\end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir.

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \xi_0(p(t)) = p(t) \quad (3.10)$$

olduğundan $\exists \delta_1 > 0$ ve $\forall \tau \in U_{\delta_1}(t)$ için

$$|\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))| < \frac{\varepsilon}{3|e_p(t, t_0)|} \quad (3.11)$$

geçerlidir. Buna göre $s \in U_{\delta_1}(t)$ alırsak

$$\begin{aligned} & |e_p(t, t_0)| \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - p(t)(t-s) \right| \\ &= |e_p(t, t_0)| \int_s^t |\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))| \Delta\tau \\ &< \frac{\varepsilon}{3} |t-s| \end{aligned} \quad (3.12)$$

yazabiliriz. Diğer yandan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - h - e^{-h}}{h} = 0$$

eşitliği geçerli olduğundan $\exists \delta_2 > 0$ ve $\forall s \in U_{\delta_2}(t)$ için

$$\left| 1 - e_p(s, t) - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right| < \varepsilon_1 \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\varepsilon_1 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + |3p(t)e_p(t, t_0)|}\right\} \quad (3.13)$$

dır.

Böylece $U_\delta(t) := U_{\delta_1}(t) \cap U_{\delta_2}(t)$ alırsak $s \in U_\delta(t)$ için

$$\begin{aligned}
\left| 1 - e_p(s, t) - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right| &\leq \varepsilon_1 \left| \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right| \\
&= \varepsilon_1 \left| \int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau - \xi_0(p(t)) \Delta\tau] \right. \\
&\quad \left. + \int_s^t \xi_0(p(t)) \Delta\tau \right| \\
&\leq \varepsilon_1 \int_s^t |\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))| \Delta\tau \\
&\quad + \varepsilon_1 |p(t)| |t - s|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise (3.13) den

$$|e_p(t, t_0)| \left| 1 - e_p(s, t) - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right| < \frac{2\varepsilon}{3} |t - s| \quad (3.14)$$

eşitsizliğini verir. (3.12) ve (3.14) eşitsizlikleri birleştirilerek (3.8) ispatlanır.

Teorem 3.2.3: $p \in \mathcal{R}$ olmak üzere (3.7) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y(t) = e_p(t, t_0)$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $y_1(t)$ (3.7) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y_1(t)}{e_p(t, t_0)} \right)^\Delta &= \frac{y_1^\Delta(t) e_p(t, t_0) - y_1(t) e_p^\Delta(t, t_0)}{e_p(t, t_0) e_p(\sigma(t), t_0)} \\
&= \frac{p(t) y_1(t) e_p(t, t_0) - p(t) y_1(t) e_p(t, t_0)}{e_p(t, t_0) e_p(\sigma(t), t_0)} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\frac{y_1(t)}{e_p(t, t_0)} = C$ (sabit) olmalıdır.

Diğer yandan

$$y_1(t_0) = e_p(t_0, t_0) = 1$$

olduğundan $C = 1$ dir. Böylece (3.7) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y_1(t) = y(t) = e_p(t, t_0)$$

fonksiyonudur.

Sonuç 3.2.4: $p \in \mathcal{R}$ ise

$$y^\Delta(t) = p(t) y(t)$$

denkleminin genel çözümü

$$y(t) = C.e_p(t, t_0) \quad (3.15)$$

şeklindedir. Burada C keyfi sabittir.

Teorem 3.2.5: $p \in \mathcal{R}$ ise

$$\begin{cases} y^\Delta(t) = p(t) y(t) + q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = e_p(t, t_0) \left\{ y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(\tau)) q(\tau) \Delta\tau \right\} \quad (3.16)$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle denklemin çözümünü

$$y(t) = C(t) e_p(t, t_0) \quad (3.17)$$

şeklinde arayalım. Burada $C(t)$, \mathbb{T} zaman skalasında Δ - türevlenebilir herhangi bir fonksiyondur.

$$y^\Delta(t) = C^\Delta(t) e_p(\sigma(t), t_0) + C(t) e_p^\Delta(t, t_0) \quad (3.18)$$

olduğundan (3.17) ve (3.18)'i denklemde yerine yazarak

$$C^\Delta(t) = e_p(t_0, \sigma(t)) q(t)$$

ve buradan

$$C(t) = \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(\tau)) q(\tau) \Delta\tau + C_0$$

elde edilir.

Böylece

$$y^\Delta(t) = p(t) y(t) + q(t)$$

denkleminin genel çözümünü

$$y(t) = e_p(t, t_0) \left\{ C_0 + \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(\tau)) q(\tau) \Delta\tau \right\}$$

şeklinde yazabiliriz. $y(t_0) = y_0$ başlangıç koşulunu gözönüne alırsak $C_0 = y_0$ olduğu çıkar. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6: $p, q \in \mathcal{R}$ olmak üzere

i) $\frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$

ii) $e_p(t, s) e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$

iii) $\frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$

bağıntıları geçerlidir.

İspat:

i) Doğrudan türev hesaplayarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e_p(t, s)} \right)^\Delta &= \frac{-e_p^\Delta(t, s)}{e_p(t, s) e_p(\sigma(t), s)} \\ &= \frac{-p(t) e_p(t, s)}{e_p(t, s) e_p(\sigma(t), s)} \\ &= \frac{-p(t)}{(1 + \mu(t) p(t)) e_p(t, s)} \\ &= \frac{-p(t)}{(1 + \mu(t) p(t))} \frac{1}{e_p(t, s)} \\ &= \ominus p(t) \frac{1}{e_p(t, s)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her bir s için $\frac{1}{e_p(t, s)}$ fonksiyonu

$$y^\Delta = \ominus p(t) y$$

$$y(s) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'den bu problemin tek çözümü $e_{\ominus p}(t, s)$ dir. Buna göre

$$\frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$$

eşitliği geçerlidir.

ii) Her bir s için

$$y(t) := e_p(t, s) e_q(t, s)$$

alalım.

$$\begin{aligned} y^\Delta(t) &= e_p^\Delta(t, s) e_q(t, s) + e_p^\sigma(t, s) e_q^\Delta(t, s) \\ &= p(t) e_p(t, s) e_q(t, s) + [1 + \mu(t) p(t)] q(t) e_p(t, s) e_q(t, s) \\ &= e_p(t, s) e_q(t, s) [p(t) + q(t) + \mu(t) p(t) q(t)] \\ &= e_p(t, s) e_q(t, s) [p \oplus q] = (p \oplus q) y(t) \end{aligned}$$

ve her bir s için

$$y(s) = e_p(s, s) e_q(s, s) = 1$$

olduğundan $y(t)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} y^\Delta(t) = (p \oplus q) y(t) \\ y(s) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür. Yine Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'den bu başlangıç değer probleminin tek çözümü $e_{p \oplus q}(t, s)$ dir. Buna göre $y(t) = e_{p \oplus q}(t, s)$ geçerlidir.

iii)

$$\begin{aligned} \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} &= e_p(t, s) \frac{1}{e_q(t, s)} \\ &= e_p(t, s) e_{\ominus q}(t, s) \\ &= e_{p \ominus q}(t, s) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon Örnekleri

Örnek 3.3.1: $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$y^\Delta(t) = y'(t)$$

olduğundan

$$\begin{cases} y' = p(t) y \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümünün

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t p(t)dt}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre \mathbb{R} 'de

$$e_p(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t p(t)dt}$$

geçerlidir.

Özel olarak $p(t) = \alpha$ (*sabit*) alınırsa,

$$e_\alpha(t, t_0) = e^{\alpha(t-t_0)}$$

olur.

Örnek 3.3.2: $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$ zaman skalasını alalım. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{h}\}$ sabit olsun.

$$e_\alpha(t, 0) = (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}, \quad t \in \mathbb{T}$$

için geçerlidir. Gerçekten, $y(t) = (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}$ alalım.

$$\begin{cases} y^\Delta(t) = \alpha y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. $y(0) = (1 + \alpha h)^0 = 1$ olduğu açıktır.

Diğer yandan $h\mathbb{Z}$ 'de

$$\begin{aligned} y^\Delta(t) &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \frac{(1 + \alpha h)^{\frac{t+h}{h}} - (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\ &= \frac{(1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}+1} - (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\ &= (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} \left(\frac{1 + \alpha h - 1}{h} \right) \\ &= \alpha (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} \\ &= \alpha y(t) \end{aligned}$$

olduğunda istenen eşitlik elde edilir.

Örnek 3.3.3: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$e_\alpha(t, 0) = (1 + \alpha)^t$$

dır. Özel olarak

$$e_1(t, 0) = 2^t$$

dir.

Örnek 3.3.4:

$$\begin{cases} y^\Delta = y + 3^t, & t \in \mathbb{Z} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözelim. Teorem 3.2.5'den

$$\begin{aligned} y &= e_1(t, 0) \int_0^t e_1(0, \tau + 1) 3^\tau \Delta\tau \\ &= 2^t \int_0^t 2^{(\tau+1)} 3^\tau \Delta\tau \\ &= 2^{t-1} \int_0^t \left(\frac{3}{2}\right)^\tau \Delta\tau \\ &= 3^t - 2^t \end{aligned}$$

bulunur.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

Bu bölümde p, q ve f , C_{rd} uzayından alınan fonksiyonlar olmak üzere $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ kümesinde verilen

$$y^{\Delta\Delta} + p(t)y^\Delta + q(t)y = 0 \quad (4.1)$$

ve

$$y^{\Delta\Delta} + p(t)y^\Delta + q(t)y = f(t) \quad (4.2)$$

denklemlerinin çözümlerini araştıracağız.

(4.1) ve (4.2) denklemlerine, *ikinci mertebeden sırasıyla homojen ve homojen olmayan lineer dinamik denklemler* denir.

Birinci mertebeden denklemlere benzer olarak, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t) \neq 0$$

ise (4.1)'e (veya (4.2)'ye) *regresif denklem* adı verilir. Bundan böyle aksi belirtilmedikçe (4.1) ve (4.2) denklemlerinin regresif denklemler olduğu kabul edilecektir.

(4.1) (veya (4.2)) denklemini sağlayan ikinci mertebeden Δ -türevlenebilir $y(t)$ fonksiyonuna bu denklemin bir çözümü denir.

Belirli bir $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ için (4.2) denkleminin

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y^\Delta(t_0) &= y_1 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan çözümünün araştırılmasına başlangıç değer problemi denir.

$\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ olmak üzere (4.2) denkleminin $[\alpha, \beta]_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı olup

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= y_0 \\ y^\Delta(\beta) &= y_1 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan çözümlerinin araştırılmasına da sınır değer problemi denir.

4.1. Homojen Dinamik Denklemin Çözümleri

$y_1(t)$ ve $y_2(t)$, (4.1)'in herhangi iki çözümü olmak üzere

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

determinantına, $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin Wronsky determinantı veya Wronskiyanı denir.

Eğer $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ ise $\{y_1(t), y_2(t)\}$ kümesi (4.1) denkleminin *temel çözümler sistemi(kümesi)* olarak adlandırılır.

Lemma 4.1.1: $y_1(t)$ ve $y_2(t)$, (4.1)'in herhangi iki çözümü olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

i) $\mu(t) W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\sigma & y_2^\sigma \end{vmatrix},$

ii) $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix},$

iii) $\forall t \in \mathbb{T}^{k^2}$ için $W^\Delta(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^{\Delta\Delta} & y_2^{\Delta\Delta} \end{vmatrix}$

dır.

İspat:

i) $\sigma(t) = t$ ise $\mu(t) = 0$, $y_1^\sigma(t) = y_1(t)$ ve $y_2^\sigma(t) = y_2(t)$ olduğundan ispat açıktır.

$\sigma(t) > t$ olsun. Doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{y_1^\sigma - y_1}{\mu(t)} & \frac{y_2^\sigma - y_2}{\mu(t)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{1}{\mu(t)} y_1^\sigma & \frac{1}{\mu(t)} y_2^\sigma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{1}{\mu(t)} y_1 & \frac{1}{\mu(t)} y_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\mu(t)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\sigma & y_2^\sigma \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Determinantın özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma - \mu(t) y_1^\Delta & y_2^\sigma - \mu(t) y_2^\Delta \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} - \mu(t) \begin{vmatrix} y_1^\Delta & y_2^\Delta \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

iii) $y_1(t)$ ve $y_2(t)$, (4.1)'in çözümleri olduğundan ikinci mertebeden Δ -türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu nedenle $W(y_1, y_2)(t)$ fonksiyonunun her bir $t \in \mathbb{T}^{k^2}$ noktasında Δ -türevi mevcut olup

$$\begin{aligned}
W^\Delta(y_1, y_2)(t) &= (y_1 y_2^\Delta - y_1^\Delta y_2)^\Delta \\
&= y_1^\Delta y_2^\Delta + y_1^\sigma y_2^{\Delta\Delta} - y_1^\Delta y_2^\Delta - y_1^{\Delta\Delta} y_2^\sigma \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^{\Delta\Delta} & y_2^{\Delta\Delta} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.1.2(Abel): $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $y_1(t), y_2(t)$ fonksiyonları (4.1) denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda

$$W(y_1, y_2)(t) = e_{-p+\mu q}(t, t_0) W(y_1, y_2)(t_0) \quad (4.4)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$, $W(t_0) = W_0$ alalım.

$$\begin{aligned}
W^\Delta(t) &= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^{\Delta\Delta} & y_2^{\Delta\Delta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ -p(t)y_1^\Delta - q(t)y_1 & -p(t)y_2^\Delta - q(t)y_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ -p(t)y_1^\Delta - q(t)(y_1^\sigma - \mu(t)y_1^\Delta) & -p(t)y_2^\Delta - q(t)(y_2^\sigma - \mu(t)y_2^\Delta) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^\Delta(-p(t) + \mu(t)q(t)) & y_2^\Delta(-p(t) + \mu(t)q(t)) \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ -q(t)y_1^\sigma & -q(t)y_2^\sigma \end{vmatrix} \\
&= (-p(t) + \mu(t)q(t)) \begin{vmatrix} y_1^\sigma & y_2^\sigma \\ y_1^\Delta & y_2^\Delta \end{vmatrix} \\
&= (-p(t) + \mu(t)q(t)) W(t)
\end{aligned}$$

olduğundan $W(t)$ fonksiyonunun $W^\Delta(t) = (-p(t) + \mu(t)q(t))W(t)$ dinamik denklemini ve $W(t_0) = W_0$ başlangıç koşulunu sağladığımızı ispatlamış oluruz. Dolayısıyla

$$W(t) = e_{-p+\mu q}(t, t_0) W_0$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür.

Teorem 4.1.3: $\{y_1(t), y_2(t)\}$, (4.1) denkleminin temel çözüm sistemi ise bu denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (4.5)$$

şeklinindedir.

İspat: $y_1(t)$ ve $y_2(t)$, (4.1) denkleminin çözümleri olduğundan $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ ifadesi de bu denklemi sağlar. Denklemin tüm çözümlerinin (4.5) şeklinde olduğunu gösterebilirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$u(t)$, (4.1) denkleminin

$$u(t_0) = u_0, \quad u^\Delta(t_0) = u_1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

$$u(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

olacak şekilde bir tek (c_1, c_2) ikilisinin var olduğunu göstermeliyiz.

$u^\Delta(t) = c_1 y_1^\Delta(t) + c_2 y_2^\Delta(t)$ olduğundan başlangıç koşulları yardımıyla

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = u_0 \\ c_1 y_1^\Delta(t_0) + c_2 y_2^\Delta(t_0) = u_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

lineer cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

Bu sistemin katsayılar determinantı $W(y_1, y_2)(t_0)$ dir. $\{y_1(t), y_2(t)\}$, denklemin temel çözüm sistemi olduğundan $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ dir. Dolayısıyla, (4.6) sistemi bir tek (c_1, c_2) çözümüne sahiptir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.2. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere \mathbb{T} zaman skalasında

$$y^{\Delta\Delta} + \alpha y^\Delta + \beta y = 0 \quad (4.7)$$

dinamik denklemini gözönüne alalım.

Açıktır ki $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 - \alpha\mu(t) + \beta\mu^2(t) \neq 0$ ise (4.7) denklemi regresiftir.

Bu denklemin çözümünü $y(t) = e_\lambda(t, t_0)$ şeklinde arayalım. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 + \lambda\mu(t) \neq 0$ olduğu kabul edilmektedir. $e_\lambda(t, t_0)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden Δ - türevleri

$$\begin{aligned} e_\lambda^\Delta(t, t_0) &= \lambda e_\lambda(t, t_0) \\ e_\lambda^{\Delta\Delta}(t, t_0) &= \lambda^2 e_\lambda(t, t_0) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından bu eşitlikler (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) e_\lambda(t, t_0) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8)'e (4.7)'nin *karakteristik denklemi* denir.

Açıktır ki bu denklemin çözümleri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}\end{aligned}\tag{4.9}$$

şeklindedir.

Buna göre, $e_\lambda(t, t_0)$ fonksiyonunun (4.7) denkleminin çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul λ sayısının (4.9)'da verilen λ_1 ve λ_2 sayılarından birine eşit olmasıdır.

Lemma 4.2.1: (4.7) denkleminin regresif olması için gerekli ve yeterli koşul (4.9) eşitlikleri ile tanımlanan λ_1 ve λ_2 sayılarının regresif olmasıdır. Yani $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 - \alpha\mu(t) + \beta\mu^2(t) \neq 0 \iff 1 + \lambda_1\mu(t) \neq 0 \text{ ve } 1 + \lambda_2\mu(t) \neq 0$$

dır.

İspat: $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$\begin{aligned}(1 + \lambda_1\mu(t))(1 + \lambda_2\mu(t)) &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\mu(t) + \lambda_1\lambda_2\mu^2(t) \\ &= 1 - \alpha\mu(t) + \beta\mu^2(t)\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan ispat açıktır.

Teorem 4.2.2: $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ olsun. (4.7) denklemi regresif ise bu denklemin temel çözümler sistemi

$$\{e_{\lambda_1}(t, t_0), e_{\lambda_2}(t, t_0)\}$$

şeklindedir. Burada $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve λ_1, λ_2 , (4.9) eşitlikleri ile tanımlı sayılardır.

İspat: (4.7) denklemi regresif ise $e_{\lambda_1}(t, t_0)$ ve $e_{\lambda_2}(t, t_0)$ fonksiyonlarının bu denklemin çözümleri olduğunu gösterdik. Dolayısıyla $W(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2})(t) \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ ise

$$\begin{aligned}W(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2})(t) &= \begin{vmatrix} e_{\lambda_1}(t, t_0) & e_{\lambda_2}(t, t_0) \\ e_{\lambda_1}^\Delta(t, t_0) & e_{\lambda_2}^\Delta(t, t_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e_{\lambda_1}(t, t_0) & e_{\lambda_2}(t, t_0) \\ \lambda_1 e_{\lambda_1}(t, t_0) & \lambda_2 e_{\lambda_2}(t, t_0) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda_2 - \lambda_1) e_{\lambda_1}(t, t_0) e_{\lambda_2}(t, t_0) \\
&= -\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} e_{\lambda_1}(t, t_0) e_{\lambda_2}(t, t_0) \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

dır. Böylece $\{e_{\lambda_1}(t, t_0), e_{\lambda_2}(t, t_0)\}$ kümesi, (4.7) denkleminin temel çözümler sistemidir.

Sonuç 4.2.3: (4.7) denklemi regresif ve $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ ise bu denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 e_{\lambda_1}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda_2}(t, t_0)$$

şeklindedir.

4.3. İkinci Tip Lineer Homojen Dinamik Denklem

(4.1) denkleminin alternatif olarak aşağıda verilen dinamik denklemi gözönüne alalım.

$$y^{\Delta\Delta} + p(t) y^{\Delta\sigma} + q(t) y^\sigma = 0 \quad (4.10)$$

Burada $y^{\Delta\sigma}(t) = y^\Delta \circ \sigma$ dır.

Tanım 4.3.1: $p \in \mathcal{R}$ ve $q \in C_{rd}$ ise (4.10) denkleminin *regresif denklem* denir.

Teorem 4.3.2: (4.1) ve (4.10) tipindeki regresif denklemler birbirine denktir.

İspat:

$$y^\sigma = y + y^\Delta \mu(t)$$

$$y^{\Delta\sigma} = y^\Delta + y^{\Delta\Delta} \mu(t)$$

eşitlikleri kullanılarak (4.10) denkleminin

$$[1 + \mu(t) p(t)] \left\{ y^{\Delta\Delta} + \frac{p(t) + \mu(t) q(t)}{1 + \mu(t) p(t)} y^\Delta + \frac{q(t)}{1 + \mu(t) p(t)} y \right\} = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$p_1(t) := \frac{p(t) + \mu(t) q(t)}{1 + \mu(t) p(t)}, \quad q_1(t) := \frac{q(t)}{1 + \mu(t) p(t)}$$

yazılırsa $p \in \mathcal{R}$ olduğundan

$$y^{\Delta\Delta} + p_1(t) y^\Delta + q_1(t) y = 0 \quad (4.11)$$

denklemini elde edilir. Buna göre, (4.10) denklemini (4.1) tipindeki bir denkleme dönüştürülebilir.

Ayrıca $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$\begin{aligned}
1 - \mu(t)p_1(t) + \mu^2(t)q_1(t) &= 1 - \mu(t) \frac{p(t) + \mu(t)q(t)}{1 + \mu(t)p(t)} + \mu^2(t) \frac{q(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \\
&= 1 - \frac{\mu(t)p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \\
&= \frac{1}{1 + \mu(t)p(t)} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan, elde edilen (4.11) denklemini regresiftir.

Şimdi de gösterelim ki, (4.1) tipinde

$$y^{\Delta\Delta} + p(t)y^\Delta + q(t)y = 0$$

denklemini regresif ise bu denklem (4.10) tipinde regresif bir denkleme dönüştürülebilir.

$\forall t \in \mathbb{T}^k$ için, $1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
y^{\Delta\Delta} + p(t)y^\Delta + q(t)y &= y^{\Delta\Delta} + p(t)[y^{\Delta\sigma} - \mu(t)y^{\Delta\Delta}] + q(t)[y^\sigma - \mu(t)y^\Delta] \\
&= (1 - \mu(t)p(t))y^{\Delta\Delta} + p(t)y^{\Delta\sigma} + q(t)y^\sigma - q(t)\mu(t)[y^{\Delta\sigma} - y^{\Delta\Delta}\mu(t)] \\
&= [1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t)] \cdot \left\{ y^{\Delta\Delta} + \frac{p(t) - \mu(t)q(t)}{1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t)} y^{\Delta\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \frac{q(t)}{1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t)} y^\sigma \right\}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre (4.1) denkleminin (4.10) tipindeki bir denkleme dönüştürülebilir olduğu elde edilir.

Son olarak $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 + \mu(t) \frac{p(t) - \mu(t)q(t)}{1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t)} = \frac{1}{1 - \mu(t)p(t) + \mu^2(t)q(t)} \neq 0$$

olduğundan elde edilen denklem regresiftir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.4. Homojen Olmayan Lineer Dinamik Denklemler İçin Parametrelerin Değişimi Metodu

Homojen olmayan (4.2) dinamik denklemini gözönüne alalım. Buna karşılık gelen (4.1) homojen denkleminin temel çözüm sistemi $\{y_1(t), y_2(t)\}$ olsun.

(4.2) denkleminin çözümünü

$$y(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) \quad (4.12)$$

şeklinde arayalım. Burada $c_1(t)$ ve $c_2(t)$, \mathbb{T} 'de Δ - türevlenebilir fonksiyonlardır. (4.12)'nin Δ - türevini alırsak

$$y^\Delta(t) = c_1^\Delta(t) y_1^\sigma(t) + c_2^\Delta(t) y_2^\sigma(t) + c_1(t) y_1^\Delta(t) + c_2(t) y_2^\Delta(t)$$

yazabiliriz.

$$c_1^\Delta(t) y_1^\sigma(t) + c_2^\Delta(t) y_2^\sigma(t) = 0 \quad (4.13)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$y^{\Delta\Delta}(t) = c_1^\Delta(t) y_1^{\Delta\sigma}(t) + c_2^\Delta(t) y_2^{\Delta\sigma}(t) + c_1(t) y_1^{\Delta\Delta}(t) + c_2(t) y_2^{\Delta\Delta}(t)$$

bulunur.

$y(t)$, $y^\Delta(t)$ ve $y^{\Delta\Delta}(t)$, (4.2) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & c_1^\Delta(t) y_1^{\Delta\sigma}(t) + c_2^\Delta(t) y_2^{\Delta\sigma}(t) + c_1(t) y_1^{\Delta\Delta}(t) + c_2(t) y_2^{\Delta\Delta}(t) \\ & + p(t) [c_1(t) y_1^\Delta(t) + c_2(t) y_2^\Delta(t)] + q(t) [c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)] = f(t) \end{aligned}$$

ve

$$c_1^\Delta(t) y_1^{\Delta\sigma}(t) + c_2^\Delta(t) y_2^{\Delta\sigma}(t) = f(t) \quad (4.14)$$

elde edilir.

(4.13) ve (4.14) eşitliklerinden oluşan cebirsel denklem sistemi çözümlerse,

$$\begin{aligned} c_1^\Delta(t) &= \frac{-f(t) y_2^\sigma(t)}{W^\sigma(y_1, y_2)} \\ c_2^\Delta(t) &= \frac{f(t) y_1^\sigma(t)}{W^\sigma(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}c_1(t) &= - \int_{t_0}^t \frac{f(\tau) y_2^\sigma(\tau)}{W^\sigma(y_1, y_2)} \Delta\tau + a \\c_2(t) &= \int_{t_0}^t \frac{f(\tau) y_1^\sigma(\tau)}{W^\sigma(y_1, y_2)} \Delta\tau + b\end{aligned}$$

elde edilir. Burada a ve b integral sabitleridir. Bu ifadelerin (4.12)'de yerine yazılmasıyla, (4.2) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t) + \int_{t_0}^t \frac{y_1^\sigma(\tau) y_2(t) - y_2^\sigma(\tau) y_1(t)}{W(y_1, y_2)(\sigma(\tau))} f(\tau) \Delta\tau \quad (4.15)$$

şeklinde bulunur.

5. ZAMAN SKALASINDA STURM-LIOUVILLE ÖZDEĞER PROBLEMİ

5.1. Problemin Tanımı ve Probleme Karşılık Gelen Operatör

\mathbb{T} sınırlı bir zaman skalası, $\alpha = \inf \mathbb{T}$ ve $\beta = \rho(\sup \mathbb{T})$ olsun. Aşağıda verilen sınır değer problemini gözöntüne alalım.

$$\ell y := -y^{\Delta\Delta} + q(t) y^\sigma = \lambda y^\sigma, \quad t \in \mathbb{T}^{k^2} \quad (5.1)$$

$$U_1(y) := a_1 y^\Delta(\alpha) - b_1 y(\alpha) = 0 \quad (5.2)$$

$$U_2(y) := a_2 y^\Delta(\beta) - b_2 y(\beta) = 0 \quad (5.3)$$

Burada $q(t) \in L_2(\alpha, \beta)$ reel değerli bir fonksiyon $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ ve λ kompleks parametredir.

(5.1)-(5.3) problemine \mathbb{T} zaman skalasında tanımlanan *Sturm-Liouville tipinde sınır değer problemi* denir. Sürekli analizde klasik Sturm-Liouville probleminin

$$-y'' + q(t)y = \lambda y, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

$$a_1 y'(\alpha) - b_1 y(\alpha) = 0$$

$$a_2 y'(\beta) - b_2 y(\beta) = 0$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Bu problemle ilgili çalışmalar oldukça geniş bir literatür oluşturmaktadır.

Bir λ sayısı için (5.1) denkleminin (5.2) ve (5.3) sınır koşullarını sağlayan bir $y(t) \neq 0$ çözümü varsa, λ 'ya (5.1)-(5.3) probleminin bir özdeğeri, $y(t)$ fonksiyonuna da o özdeğere karşılık gelen öz fonksiyon denir.

$L_2(\alpha, \beta)$ uzayında, tanım kümesi

$$D(L) = \{y \in L_2(\alpha, \beta) \mid y \in C_{rd}^2(\mathbb{T}), \quad U_1(y) = U_2(y) = 0\}$$

olan ve $\forall y \in D(L)$ için

$$Ly = \ell y$$

şeklinde tanımlanan L operatörünü gözönüne alalım. L 'nin lineer bir operatör olduğu kolayca gösterilebilir. Bu L operatörü üzerine kurulan özdeğer problemi

$$Ly = \lambda y^\sigma$$

şeklinde ifade edilir. Bu problem, (5.1)-(5.3) sınır-değer problemi ile çakışmaktadır. Başka bir deyişle L operatörünün her bir özdeğeri, (5.1)-(5.3) probleminin bir özdeğeri. Ve tersine (5.1)-(5.3) probleminin her bir özdeğeri, aynı zamanda L operatörünün bir özdeğeri.

Teorem 5.1.1: $\forall y, z \in D(L)$ için

$$\langle Ly, z^\sigma \rangle = \langle y^\sigma, Lz \rangle$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \langle Ly, z^\sigma \rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} (-y^{\Delta\Delta} + q(t) y^\sigma) \bar{z}^\sigma(t) \Delta t \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} y^{\Delta\Delta} \bar{z}^\sigma(t) \Delta t + \int_{\alpha}^{\beta} q(t) y^\sigma \bar{z}^\sigma(t) \Delta t \\ &= -y^{\Delta} \bar{z}(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} y^{\Delta} \bar{z}^{\Delta}(t) \Delta t + \int_{\alpha}^{\beta} q(t) y^\sigma \bar{z}^\sigma(t) \Delta t \\ &= -y^{\Delta} \bar{z}(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + y \bar{z}^{\Delta}(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} y^\sigma \bar{z}^{\Delta\Delta}(t) \Delta t + \int_{\alpha}^{\beta} q(t) y^\sigma \bar{z}^\sigma(t) \Delta t \\ &= W[y, \bar{z}](\beta) - W[y, \bar{z}](\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} y^\sigma(t) (\bar{z}^{\Delta\Delta} + q(t) \bar{z}^\sigma) \Delta(t) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, $y, z \in D(L)$ olduğundan

$$U_1(y) = U_2(y) = U_1(z) = U_2(z) = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$W[y, \bar{z}](\beta) = W[y, \bar{z}](\alpha) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\langle Ly, z^\sigma \rangle = \langle y^\sigma, Lz \rangle$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür.

Sonuç 5.1.2:

i) L operatörünün ve dolayısıyla (5.1)-(5.3) probleminin tüm özdeğerleri reel sayılardır.

ii) $y(t)$ ve $z(t)$, (5.1)-(5.3) probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\int_{\alpha}^{\beta} y^\sigma \bar{z}^\sigma(t) \Delta t = 0$$

geçerlidir.

İspat: i) λ_0 , L operatörünün bir özdeğeri ve $y(t)$ bu özdeğere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Teorem 5.1.1'den

$$\langle Ly, y^\sigma \rangle = \langle y^\sigma, Ly \rangle$$

geçerlidir. Dolayısıyla $\langle Ly, y^\sigma \rangle \in \mathbb{R}$ dir. Diğer yandan

$$\langle Ly, y^\sigma \rangle = \langle \lambda_0 y^\sigma, y^\sigma \rangle = \lambda_0 \langle y^\sigma, y^\sigma \rangle$$

eşitliği geçerli olduğundan λ_0 özdeğerinin reel sayı olduğu açıktır.

ii)

$$Ly = \lambda_1 y^\sigma$$

$$Lz = \lambda_2 z^\sigma$$

olsun. Teorem 5.1.1'den

$$\lambda_1 \langle y^\sigma, z^\sigma \rangle = \langle Ly, z^\sigma \rangle = \langle y^\sigma, Lz \rangle = \lambda_2 \langle y^\sigma, z^\sigma \rangle$$

yazılabilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\langle y^\sigma, z^\sigma \rangle = 0$$

dir.

5.2. Sturm-Liouville Denkleminin Bazı Özel Çözümleri

$S(t, \lambda), C(t, \lambda), \varphi(t, \lambda)$ ve $\psi(t, \lambda)$ fonksiyonları (5.1) denkleminin sırasıyla

$$S(\alpha, \lambda) = 0, \quad S^\Delta(\alpha, \lambda) = 1 \quad (5.4)$$

$$C(\alpha, \lambda) = 1, \quad C^\Delta(\alpha, \lambda) = 0 \quad (5.5)$$

$$\varphi(\alpha, \lambda) = a_1, \quad \varphi^\Delta(\alpha, \lambda) = b_1 \quad (5.6)$$

$$\psi(\beta, \lambda) = a_2, \quad \psi^\Delta(\beta, \lambda) = b_2 \quad (5.7)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Lemma 5.2.1: $y(t)$ ve $z(t)$ (5.1) denkleminin iki farklı çözümü olsun. Bu çözümlerin $W[y(t), z(t)]$ Wronsky determinanı t 'den bağımsızdır.

İspat:

$$\begin{aligned} W^\Delta(y(t), z(t)) &= (y(t)z^\Delta(t) - y^\Delta(t)z(t))^\Delta \\ &= y^\Delta(t)z^\Delta(t) + y^\sigma(t)z^{\Delta\Delta}(t) - y^\Delta(t)z^\Delta(t) - y^{\Delta\Delta}(t)z^\sigma(t) \\ &= y^\sigma(t)\{q(t) - \lambda\}z^\sigma(t) - y^\sigma(t)\{q(t) - \lambda\}z^\sigma(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan ispat açıktır.

Lemma 5.2.1'e göre

$$\begin{aligned} W[S, C](t) &= W[S, C](\alpha) \\ &= S(\alpha, \lambda)C^\Delta(\alpha, \lambda) - S^\Delta(\alpha, \lambda)C(\alpha, \lambda) = -1 \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Bu nedenle $\{S(t, \lambda), C(t, \lambda)\}$ kümesi (5.1) denkleminin temel çözüm sistemidir. (5.4)-(5.6) başlangıç koşulları kullanılarak

$$\varphi(t, \lambda) = a_1C(t, \lambda) + b_1S(t, \lambda)$$

eşitliğinin doğru olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 5.2.2: $S(t, \lambda), C(t, \lambda), \varphi(t, \lambda), \psi(t, \lambda)$ çözümleri ve bu çözümlerin birinci

mertebeden Δ - türevleri, λ 'nın tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyonlarıdır.

İspat: $\varphi(t, \lambda)$ 'nın analitik olduğunu ispatlayalım. Diğer fonksiyonların analitikliği benzer şekilde ispatlanabilir. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ herhangi bir kompleks sayı olsun.

$$\phi(t, \lambda) := \varphi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda_0)$$

fonksiyonunu tanıyalım. Bu fonksiyon için

$$\begin{aligned} \phi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) &= \varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) - \varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda_0) \\ &= \varphi^\sigma(t, \lambda) \{q(t) - \lambda\} - \varphi^\sigma(t, \lambda_0) \{q(t) - \lambda_0\} \\ &= q(t) \{\varphi^\sigma(t, \lambda) - \varphi^\sigma(t, \lambda_0)\} - \lambda\varphi^\sigma(t, \lambda) + \lambda_0\varphi^\sigma(t, \lambda_0) \\ &= q(t) \{\varphi^\sigma(t, \lambda) - \varphi^\sigma(t, \lambda_0)\} - \lambda_0 \{\varphi^\sigma(t, \lambda) - \varphi^\sigma(t, \lambda_0)\} \\ &\quad - (\lambda - \lambda_0) \varphi^\sigma(t, \lambda) \\ &= q(t) \phi^\sigma(t, \lambda) - \lambda_0 \phi^\sigma(t, \lambda) - (\lambda - \lambda_0) \varphi^\sigma(t, \lambda) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Buna göre $\phi(t, \lambda)$ fonksiyonu

$$-\phi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) + q(t) \phi^\sigma(t, \lambda) = \lambda_0 \phi^\sigma(t, \lambda) + (\lambda - \lambda_0) \varphi^\sigma(t, \lambda) \quad (5.8)$$

denklemini sağlamaktadır. Diğer yandan (5.6) başlangıç koşullarına göre

$$\phi(\alpha, \lambda) = \phi^\Delta(\alpha, \lambda) = 0 \quad (5.9)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\phi(t, \lambda)$ fonksiyonu (5.8), (5.9) başlangıç değer probleminin çözümüdür. Sabitlerin değişimi yöntemi kullanılarak (5.8), (5.9) başlangıç değer problemi çözümlerse

$$\phi(t, \lambda) = (\lambda - \lambda_0) \int_{\alpha}^t [C^\sigma(\xi, \lambda_0) S(t, \lambda_0) - S^\sigma(\xi, \lambda_0) C(t, \lambda_0)] \varphi^\sigma(\xi, \lambda) \Delta\xi \quad (5.10)$$

eşitliği elde edilir. (5.10) eşitliğinin her iki tarafını $\lambda - \lambda_0$ 'a bölüp $\lambda \rightarrow \lambda_0$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\varphi(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \int_{\alpha}^t [C^\sigma(\xi, \lambda_0) S(t, \lambda_0) - S^\sigma(\xi, \lambda_0) C(t, \lambda_0)] \varphi^\sigma(\xi, \lambda_0) \Delta\xi$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülmüştür. Buna göre, $\varphi(t, \lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir. λ_0 keyfi seçildiğinden $\varphi(t, \lambda)$ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde analitiktir.

5.3. Özdeğerlerin Özellikleri

$W(\psi, \varphi)$ fonksiyonu t 'ye bağlı olmadığından bu fonksiyon $\Delta(\lambda)$ şeklinde gösterilebilir.

(5.7) başlangıç koşulundan

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \psi(\beta, \lambda) \varphi^\Delta(\beta, \lambda) - \psi^\Delta(\beta, \lambda) \varphi(\beta, \lambda) \\ &= a_2 \varphi^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 \varphi(\beta, \lambda)\end{aligned}$$

yazılabilir.

$\varphi(t, \lambda)$ ve $\varphi^\Delta(t, \lambda)$, λ 'nın analitik fonksiyonları olduğundan $\Delta(\lambda)$ da öyledir. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna, (5.1)-(5.3) probleminin *karakteristik fonksiyonu* denir.

Lemma 5.3.1: $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları, (5.1)-(5.3) probleminin özdeğerleri ile çakışır.

İspat: (5.1) denkleminin genel çözümü

$$y(t, \lambda) = AS(t, \lambda) + BC(t, \lambda)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çözümün (5.2) ve (5.3) koşullarında yerine yazılmasıyla

$$a_1 [AS^\Delta(\alpha, \lambda) + BC^\Delta(\alpha, \lambda)] - b_1 [AS(\alpha, \lambda) + BC(\alpha, \lambda)] = 0$$

$$a_2 [AS^\Delta(\beta, \lambda) + BC^\Delta(\beta, \lambda)] - b_2 [AS(\beta, \lambda) + BC(\beta, \lambda)] = 0$$

elde edilir. (5.4) ve (5.5) başlangıç koşulları kullanılarak

$$a_1 A - b_1 B = 0$$

$$[a_2 S^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 S(\beta, \lambda)] A + [a_2 C^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 C(\beta, \lambda)] B = 0$$

yazılabilir. Bu sistemin sıfırdan farklı bir (A, B) çözümünün var olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 S^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 S(\beta, \lambda) & a_2 C^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 C(\beta, \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Buradan

$$\begin{aligned}
& a_1 a_2 C^\Delta(\beta, \lambda) - a_1 b_2 C(\beta, \lambda) + a_2 b_1 S^\Delta(\beta, \lambda) - b_1 b_2 S(\beta, \lambda) = 0 \\
\implies & a_2 [a_1 C^\Delta(\beta, \lambda) + b_1 S^\Delta(\beta, \lambda)] - b_2 [a_1 C(\beta, \lambda) + b_1 S(\beta, \lambda)] = 0 \\
\implies & a_2 \varphi^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 \varphi(\beta, \lambda) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre (5.1)-(5.3) probleminin her bir özdeğeri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırındır.

Tersine λ sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun herhangi bir sıfırı ise $\varphi(t, \lambda)$ fonksiyonu (5.1)-(5.3) probleminin sıfırdan farklı çözümü olacağından λ sayısı bu problemin bir özdeğeri olur.

Lemma 5.3.2: λ_0 , (5.1)-(5.3) probleminin herhangi bir özdeğeri olsun. Bu durumda

$$\varphi(t, \lambda_0) = \chi_0 \psi(t, \lambda_0) \quad (5.11)$$

eşitliği geçerli olacak şekilde $\chi_0 \neq 0$ sayısı vardır.

İspat: λ_0 , (5.1)-(5.3) probleminin bir özdeğeri olduğundan

$$\Delta(\lambda_0) = 0$$

dır. Buna göre

$$W(\psi(t, \lambda_0), \varphi(t, \lambda_0)) = \psi(t, \lambda_0) \varphi^\Delta(t, \lambda_0) - \psi^\Delta(t, \lambda_0) \varphi(t, \lambda_0) \equiv 0$$

geçerlidir. Bu ise

$$\left(\frac{\psi(t, \lambda_0)}{\varphi(t, \lambda_0)} \right)^\Delta$$

ifadesinin tanımlı olduğu her t için sifira eşit olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $\frac{\psi(t, \lambda_0)}{\varphi(t, \lambda_0)}$ fonksiyonu sabit olup istenen eşitlik elde edilir.

Not: (5.6) ve (5.7) başlangıç koşullarından

$$\chi_0 = \frac{a_1}{\psi(\alpha, \lambda_0)} = \frac{\varphi(\beta, \lambda_0)}{a_2}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.3: (5.1)-(5.3) probleminin tüm özdeğerleri cebirsel olarak basittir.

İspat: λ_0 , (5.1)-(5.3) probleminin herhangi bir özdeğeri olsun.

$$\Delta(\lambda_0) = 0$$

olduğu açıktır. $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $\varphi(t, \lambda)$, (5.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$-\varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) + q(t) \varphi^\sigma(t, \lambda) = \lambda \varphi^\sigma(t, \lambda) \quad (5.12)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının λ 'ya göre türevini alırsak,

$$-\varphi_\lambda^{\Delta\Delta}(t, \lambda) + q(t) \varphi_\lambda^\sigma(t, \lambda) = \varphi^\sigma(t, \lambda) + \lambda \varphi_\lambda^\sigma(t, \lambda) \quad (5.13)$$

eşitliğini elde ederiz. (5.12) denklemini $\varphi_\lambda^\sigma(t, \lambda)$ ile (5.13) denklemini de $-\varphi^\sigma(t, \lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$\varphi^\sigma(t, \lambda) \varphi_\lambda^{\Delta\Delta}(t, \lambda) - \varphi_\lambda^\sigma(t, \lambda) \varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) = -(\varphi^\sigma(t, \lambda))^2$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitliğin her iki tarafı α 'dan β 'ya integralenirse,

$$\int_\alpha^\beta \left(\varphi^\sigma(t, \lambda) \varphi_\lambda^{\Delta\Delta}(t, \lambda) - \varphi_\lambda^\sigma(t, \lambda) \varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) \right) \Delta t = - \int_\alpha^\beta (\varphi^\sigma(t, \lambda))^2 \Delta t$$

yazılabilir.

$$\varphi^\sigma(t, \lambda) \varphi_\lambda^{\Delta\Delta}(t, \lambda) - \varphi_\lambda^\sigma(t, \lambda) \varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) = \left(\varphi(t, \lambda) \varphi_\lambda^\Delta(t, \lambda) - \varphi_\lambda(t, \lambda) \varphi^\Delta(t, \lambda) \right)^\Delta$$

eşitliği geçerli olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (\varphi^\sigma(t, \lambda))^2 \Delta t &= \varphi(\alpha, \lambda) \varphi_\lambda^\Delta(\alpha, \lambda) - \varphi_\lambda(\alpha, \lambda) \varphi^\Delta(\alpha, \lambda) - \\ &\quad - \varphi(\beta, \lambda) \varphi_\lambda^\Delta(\beta, \lambda) + \varphi_\lambda(\beta, \lambda) \varphi^\Delta(\beta, \lambda) \\ &= \varphi_\lambda(\beta, \lambda) \varphi^\Delta(\beta, \lambda) - \varphi(\beta, \lambda) \varphi_\lambda^\Delta(\beta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde edilir.

(5.14) eşitliğinde $\lambda \rightarrow \lambda_0$ iken limit alırsak,

$$\int_\alpha^\beta (\varphi^\sigma(t, \lambda_0))^2 \Delta t = \varphi_\lambda(\beta, \lambda_0) \varphi^\Delta(\beta, \lambda_0) - \varphi(\beta, \lambda_0) \varphi_\lambda^\Delta(\beta, \lambda_0)$$

eşitliğini yazabiliriz. Buna göre (5.11) eşitliğinden,

$$\int_\alpha^\beta (\varphi^\sigma(t, \lambda_0))^2 \Delta t = \chi_0 \left[b_2 \varphi_\lambda(\beta, \lambda_0) - a_2 \varphi_\lambda^\Delta(\beta, \lambda_0) \right]$$

$$= -\chi_0 \Delta'(\lambda_0) \quad (5.15)$$

geçerlidir. $\varphi(t, \lambda_0)$ öz fonksiyon olduğundan, (5.15) eşitliğinin sol tarafı sıfırdan farklıdır. Bu ise $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu ispatlar.

Teorem 5.3.4: \mathbb{T} sonlu n eleman bulduran bir zaman skalası ise \mathbb{T} üzerinde verilen (5.1)-(5.3) probleminin özdeğerlerinin sayısı

$$S := n - 2 - \text{def}(a_1 + \mu(\alpha) b_1) - \text{def}(a_2)$$

şeklinde dir. Burada def sembolü

$$\text{def}(U) = \begin{cases} 0 & , U \neq 0 \\ 1 & , U = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat: \mathbb{T} zaman skalası sonlu eleman buldurduğundan tüm elemanları izole noktalar dır. Dolayısıyla

$$\mathbb{T} = \{\alpha, \sigma(\alpha), \sigma^2(\alpha), \dots, \sigma^{n-2}(\alpha), \sigma^{n-1}(\alpha)\}, \quad \beta = \sigma^{n-2}(\alpha)$$

şeklinde alınabilir. Burada

$$\sigma^r(\alpha) = (\sigma \circ \sigma^{r-1})(\alpha), \quad r \geq 2$$

dır.

(5.6) başlangıç koşullarından

$$\varphi^\sigma(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha, \lambda) + \mu(\alpha) \varphi^\Delta(\alpha, \lambda) = a_1 + \mu(\alpha) b_1$$

geçerlidir.

\mathbb{T} izole noktalardan oluştuğundan

$$\begin{aligned} \varphi^\Delta(t, \lambda) &= \frac{\varphi^\sigma(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda)}{\mu(t)}, \quad t \in \mathbb{T}^k \\ \varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) &= \frac{\varphi^{\Delta\sigma}(t, \lambda) - \varphi^\Delta(t, \lambda)}{\mu(t)} \\ &= \frac{1}{\mu(t)} \left[\frac{\varphi^{\sigma^2}(t, \lambda) - \varphi^\sigma(t, \lambda)}{\mu^\sigma(t)} - \frac{\varphi^\sigma(t, \lambda) - \varphi(t, \lambda)}{\mu(t)} \right] \\ &= \frac{1}{\mu^\sigma(t) (\mu(t))^2} \left\{ \mu(t) \varphi^{\sigma^2}(t, \lambda) - (\mu(t) + \mu^\sigma(t)) \varphi^\sigma(t, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \mu^\sigma(t) \varphi(t, \lambda) \right\} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$\varphi^{\Delta\Delta}(t, \lambda) = \{q(t) - \lambda\} \varphi^\sigma(t, \lambda)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi^{\sigma^2}(t, \lambda) &= \mu^\sigma(t) \mu(t) \{q(t) - \lambda\} \varphi^\sigma(t, \lambda) + \frac{\mu(t) + \mu^\sigma(t)}{\mu(t)} \varphi^\sigma(t, \lambda) - \frac{\mu^\sigma(t)}{\mu(t)} \varphi(t, \lambda) \\ &= [f(t) \lambda + g(t)] \varphi^\sigma(t, \lambda) + h(t) \varphi(t, \lambda) \end{aligned} \quad (5.16)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} f(t) &= -\mu^\sigma(t) \mu(t) \\ g(t) &= \mu^\sigma(t) \mu(t) q(t) + \frac{\mu^\sigma(t)}{\mu(t)} + 1 \end{aligned}$$

ve

$$h(t) = -\frac{\mu^\sigma(t)}{\mu(t)}$$

dir.

(5.16) eşitliği kullanılarak

$$\frac{\varphi^{\sigma^r}(\alpha, \lambda)}{\prod_{k=0}^{r-2} f^{\sigma^k}(\alpha)} = \begin{cases} (a_1 + \mu(\alpha) b_1) \lambda^{r-1} + P_{r-2}(\lambda); & a_1 + \mu(\alpha) b_1 \neq 0 \text{ ise} \\ \frac{a_1}{\mu(\alpha)^2} \lambda^{r-2} + P_{r-3}(\lambda); & a_1 + \mu(\alpha) b_1 = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (5.17)$$

eşitliği elde edilir. Burada $P_{r-2}(\lambda)$ ve $P_{r-3}(\lambda)$ sırasıyla $(r-2)$. ve $(r-3)$. dereceden polinomlardır.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= a_2 \varphi^\Delta(\beta, \lambda) - b_2 \varphi(\beta, \lambda) \\ &= a_2 \frac{\varphi^\sigma(\beta, \lambda) - \varphi(\beta, \lambda)}{\mu(\beta)} - b_2 \varphi(\beta, \lambda) \\ &= \frac{1}{\mu(\beta)} [a_2 \varphi^\sigma(\beta, \lambda) - (a_2 + b_2) \mu(\beta) \varphi(\beta)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

eşitliği elde edilir.

(5.17) formülünden,

$$\begin{aligned} \text{der} \varphi(\beta) &= \text{der} \varphi^{\sigma^{n-2}}(\alpha) = \begin{cases} n-3, & a_1 + \mu(\alpha) b_1 \neq 0 \text{ ise} \\ n-4, & a_1 + \mu(\alpha) b_1 = 0 \text{ ise} \end{cases} \\ \text{der} \varphi^\sigma(\beta) &= \text{der} \varphi^{\sigma^{n-1}}(\alpha) = \begin{cases} n-2, & a_1 + \mu(\alpha) b_1 \neq 0 \text{ ise} \\ n-3, & a_1 + \mu(\alpha) b_1 = 0 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

(5.18) ve (5.19) eşitliklerinden

$$der\Delta(\lambda) = \begin{cases} n-2, & a_1 + \mu(\alpha)b_1 \neq 0, & a_2 \neq 0 \\ n-3, & a_1 + \mu(\alpha)b_1 \neq 0, & a_2 = 0 \\ n-3, & a_1 + \mu(\alpha)b_1 = 0, & a_2 \neq 0 \\ n-4, & a_1 + \mu(\alpha)b_1 = 0, & a_2 = 0 \end{cases}$$

olduğu sonucuna varılır. Böylece özdeğer sayısının

$$S := n - 2 - def(a_1 + \mu(\alpha)b_1) - def(a_2)$$

olduğunu ispatlamış oluruz.

Örnek 5.3.5: $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$-y^{\Delta\Delta} = \lambda y^\sigma, \quad t \in \mathbb{T}^{k^2} = \{0, 1\}$$

$$y^\Delta(0) = y^\Delta(2) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini bulunuz.

Çözüm: Gerekli türevler alınıp denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y^\Delta &= \frac{y^\sigma - y}{\mu(t)} = y^\sigma - y \\ y^{\Delta\Delta} &= \frac{y^{\Delta\sigma} - y^\Delta}{\mu(t)} \\ &= y^{\Delta\sigma} - y^\Delta \\ &= y^{\sigma^2} - y^\sigma - y^\sigma + y \\ &= y^{\sigma^2} - 2y^\sigma + y \end{aligned}$$

$$y^{\sigma^2}(t) - 2y^\sigma(t) + y(t) = -\lambda y^\sigma(t), \quad t \in \{0, 1\}$$

elde edilir. Bu denklem ve sınır koşullarından

$$\begin{cases} -y(2) + 2y(1) - y(0) = \lambda y(1) \\ -y(3) + 2y(2) - y(1) = \lambda y(2) \\ y(1) - y(0) = 0 \\ y(3) - y(2) = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri yazılabilir.

$k \in \mathbb{T}$, $y(k) = y_k$ ile gösterelim. Buna göre

$$\begin{cases} y_0 + (\lambda - 2)y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + (\lambda - 2)y_2 + y_3 = 0 \\ y_0 - y_1 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} (\lambda - 1)y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + (\lambda - 1)y_2 = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri bulunur. Bu sistemin aşikar olmayan çözüme sahip olması için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Bu nedenle,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğinden $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 2$ özdeğerleri bulunur.

Diğer yandan bu problemin özdeğer sayısının $S = 2$ olduğu Teorem 5.3.4 de verilen formülden de açıktır.

Örnek 5.3.6: $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$$-y^{\Delta\Delta} = \lambda y^\sigma, \quad t \in \mathbb{T}^{k^2} = \{0, 1\}$$

$$y^\Delta(0) + y(0) = 0$$

$$y^\Delta(2) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğer sayısını ve bu özdeğerleri bulunuz.

Çözüm: Teorem 5.3.4'den bu problemin özdeğer sayısı

$$S = n - 2 - \text{def}(a_1 + \mu(\alpha)b_1) - \text{def}(a_2) = 1$$

dir. Verilen denklem ve sınır koşullarından

$$\begin{cases} -y(2) + 2y(1) - y(0) = \lambda y(1) \\ -y(3) + 2y(2) - y(1) = \lambda y(2) \\ y(1) - y(0) + y(0) = 0 \\ y(3) - y(2) = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir.

$k \in \mathbb{T}$, $y(k) = y_k$ olmak üzere bu eşitlikler

$$\begin{cases} y_0 + (\lambda - 2)y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + (\lambda - 2)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = y_3 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan,

$$\begin{cases} y_0 + y_2 = 0 \\ (\lambda - 1)y_2 = 0 \end{cases}$$

bulunur. $y_0 = y_2 = 0$ ise aşıkâr çözüm elde edilir. Bu nedenle y_0 ve y_2 terimlerinin sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Buradan, problemin tek özdeğerinin $\lambda_1 = 1$ olduğu bulunur.

Örnek 5.3.7: $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$-y^{\Delta\Delta} = \lambda y^\sigma, \quad t \in \mathbb{T}^{k^2} = \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} y^\Delta(0) + y(0) &= 0 \\ y(2) &= 0 \end{aligned}$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini bulunuz.

Çözüm: Teorem 5.3.4'e göre bu problemin özdeğer sayısı

$$S = n - 2 - \text{def}(a_1 + \mu(\alpha)b_1) - \text{def}(a_2) = 0$$

olmalıdır.

Denklem ve sınır koşulları yardımıyla

$$\begin{cases} -y(2) + 2y(1) - y(0) = \lambda y(1) \\ -y(3) + 2y(2) - y(1) = \lambda y(2) \\ y(1) - y(0) + y(0) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri yazılabilir.

$k \in \mathbb{T}$, $y(k) = y_k$ olmak üzere bu eşitlikler

$$\begin{cases} y_0 + (\lambda - 2)y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + (\lambda - 2)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

sistemini oluşturur. Bu sistemin yalnızca aşıkâr çözümü var olduğundan problemin özdeğeri yoktur.

KAYNAKLAR

- [1] **Agarwal, R.P., Bohner, M. and Wong, P.J.Y.** (1999). Sturm-Liouville eigenvalue problems on time scales, *Appl. Math. Comput.* 99, pp. 153–166.
- [2] **Amster, P., De Na'poli, P. and Pinasco, J.P.** (2008). Eigenvalue distribution of second-order dynamic equations on time scales considered as fractals, *J. Math. Anal. Appl.* 343, pp. 573–584.
- [3] **Amster, P., De Na'poli, P. and Pinasco, J.P.** (2009). Detailed asymptotic of eigenvalues on time scales, *J. Differ. Equ. Appl.* 15, pp. 225–231.
- [4] **Atkinson, F.** (1964). *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Press, New York.
- [5] **Bohner, M. and Peterson, A.** (2001). *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, MA.
- [6] **Bohner, M. and Peterson, A. (eds.)** (2003). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, MA.
- [7] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.** (2002). Global bifurcation on time scales, *J. Math. Anal. Appl.* 267, pp. 345–360.
- [8] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.** (2007). Self-adjoint boundary value problems on time scales, *Electron. J. Differ. Equ.* 2007(175), pp. 1–10.
- [9] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.** (2007). Eigenfunction expansions in L^2 spaces for boundary value problems on time-scales, *J. Math. Anal. Appl.* 335, pp. 1038–1051.
- [10] **Erbe, L. and Hilger, S.** (1993). Sturmian theory on measure chains, *Differ. Equ. Dyn. Syst.* 1, pp. 223–244.
- [11] **Erbe, L. and Peterson, A.** (2000). Eigenvalue conditions and positive solutions, *J. Differ. Equ. Appl.* 6, pp. 165–191.
- [12] **Guseinov, G.S.** (2007). Eigenfunction expansions for a Sturm-Liouville problem on time scales, *Int. J. Differ. Equ.* 2, pp. 93–104.
- [13] **Guseinov, G.S.** (2008). An expansion theorem for a Sturm-Liouville operator on semi-unbounded time scales, *Adv. Dyn. Syst. Appl.* 3, pp. 147–160.
- [14] **Hilger, S.** (1990). Analysis on measure chains – a unified approach to continuous

and discrete calculus, *Results in Math.* 18, 18–56.

[15] **Huseynov, A.** (2010). Limit point and limit circle cases for dynamic equations on time scales, *Hacet. J. Math. Stat.* 39, pp. 379–392.

[16] **Huseynov, A. and Bairamov, E.** (2009). On expansions in eigenfunctions for second order dynamic equations on time scales, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* 9, pp. 7–88.

[17] **Kong, Q.** (2008). Sturm-Liouville problems on time scales with separated boundary conditions, *Results Math.* 52, pp. 111–121.

[18] **Rynne, B.P.** (2007). L^2 spaces and boundary value problems on time-scales, *J. Math. Anal. Appl.* 328, pp. 1217–1236.

[19] **Sun, S., Bohner, M. and Chen, S.** (2010). Weyl-Titchmarsh theory for Hamiltonian dynamic systems, *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 514760, 18 pp.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı Gül Aydemir
Doğum Yeri ve Tarihi Bakırköy, 11.07.1983
Medeni Hali Bekar
Yabancı Dil İngilizce
İletişim Adresi Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik
Bölümü 58140 Sivas
E-posta Adresi gulaydemir7443@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise Bayrampaşa Tuna Lisesi, 2001
Yüksekokul Sakarya Üniversitesi Bilgisayar Teknolojileri ve
Programlama Bölümü, 2009
Lisans Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik
Bölümü, 2015
Yüksek Lisans Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017

İş Tecrübesi

Vali Aydın Güçlü Ort. Matematik Öğretmeni, 2017