T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Hazırlayan
Nagehan KILINÇ GEÇER

Danışman
Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Doktora Tezi

Eylül 2017
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Hazırlayan
Nagehan KILINÇ GEÇER

Danışman
Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Eylül 2017
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

N.Kılınç

Nagehan KILINÇ GEÇER

YÖNERGEYE UYGUNLUK

"Yüksek Mertebeden Belirli Tipteki Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı Üzerine" adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

NKılınç

Tezi Hazırlayan
Nagehan KILINÇ GEÇER

Danışman
Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Doç. Dr. Pakize TEMTEK danışmanlığında **Nagehan KILINÇ GEÇER** tarafından hazırlanan **"Yüksek Mertebeden Belirli Tipteki Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı Üzerine"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

14.09.2017

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Üye : Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Üye : Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Doç. Dr. Ayşegül ÇETİNKAYA

Üye : Doç. Dr. İ. Onur KIYMAZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 19/09/2017 tarih ve 2017/40-24 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19/09/2017

Mehmet Akkurt

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mehmet AKKURT

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bugünlere gelmemde en büyük katkı sahibi sayın hocam Doç. Dr. Pakize TEMTEK'e teşekkürü bir borç bilirim. Tez izleme komitesinin diğer değerli üyeleri sayın Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK'e ve sayın Doç. Dr. Muammer KULA'ya, ayrıca tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen sayın Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL'e teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda doktora eğitimim boyunca emeği geçen Erciyes ve Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına da katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında yaşadığım her türlü üzüntü ve sevinci benimle paylaşan, maddi ve manevi olarak daima yanımda olan canım aileme ve özellikle de saygıdeğer babam Osman Nuri KILINÇ'a en derin duygularla sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim Yunus GEÇER'e de sonsuz teşekkür ederim.

Nagehan KILINÇ GEÇER

Kayseri, Eylül 2017

YÜKSEK MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Nagehan KILINÇ GEÇER

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Doktora Tezi, Eylül 2017

Danışman: Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tez çalışmamızın temelini oluşturan orijinal sonuçların alt yapısını oluşturmak için birinci bölümde amaca yönelik temel tanım ve kavramlar, üçüncü ve dördüncü mertebeden lineer ve lineer olmayan belirli tipteki diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili sonuçlar literatür taraması ile birlikte kronolojik bir şekilde verilmiştir.

Tamamen orijinal sonuçlardan oluşan ikinci ve üçüncü bölümde ise, öncelikle üçüncü mertebeden sürekli dağılımlı mixed argümentli neutral diferensiyel denklem tipinin ve daha sonra da dördüncü mertebeden pozitif ve negatif katsayılı lineer olmayan diferensiyel denklem tipinin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Salınım, lineer olmayan diferensiyel denklem, neutral diferensiyel denklem.

ON THE BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF CERTAIN TYPES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

Nagehan KILINÇ GEÇER

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Ph.D. Thesis, September 2017

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Pakize TEMTEK

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems which constitute the basis of our thesis work are expressed, moreover the results with the solutions of the third and fourth order linear and non-linear differential equations are given chronologically together with the literature review.

In the second and third chapters which are constituted from fully original results firstly third order neutral differential equations with continuously distributed mixed arguments and then fourth order non-linear differential equations with positive and negative coefficients with oscillation related results are provided.

Lastly, in the fourth chapter conclusions and recommendations are presented.

Keywords: Oscillation, non-linear differential equation, neutral differential equation.

İÇİNDEKİLER

YÜKSEK MERTEBEDEN BELİRLİ TİPTEKİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

4. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

GİRİŞ

Bilinmeyen fonksiyon ve bunun çeşitli mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferensiyel denklem adı verilir. Diferensiyel denklemler üzerinde iki asrı aşkın bir süredir çalışılmaktadır. Aynı zamanda diferensiyel denklemlerin matematik dışında pek çok bilim dalında da uygulaması mevcuttur. Örneğin uzay bilimlerinde dünyadan yörünge dışına atılan uydularda, hava araçlarının birçoğunda, denizaltı araçlarının basınç ve derinlikle ilgili çalışmalarında, katı hal fiziğinde kullanılması gibi. Dolayısıyla karşımıza çıkan her diferensiyel denklemi çözme ihtiyacı normaldir. Fakat bilindiği gibi her diferensiyel denklemin çözümü mevcut değildir. Bu gerçek, birçok araştırmacıyı diferensiyel denklemleri çözmeden çözümleri hakkında yorum yapmaya yöneltmiştir. Bu noktada diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışları ciddi bir öneme sahip olup, çözümlerin salınımlılığı, salınımsızlığı, kararlılığı, kararsızlığı ve asimptotik davranışları gibi kavramlar ortaya çıkmıştır. Örneğin her diferensiyel denklem salınımlı değildir. Bir diferensiyel denklemin salınımlı olabilmesi için belirli şartlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Diferensiyel denklemlerin çalışılması ile birlikte salınım teorisi de yaklaşık iki yüz yıldır araştırılıp, geliştirilerek incelenmeye devam edilmektedir. Özellikle ikinci mertebeden diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar literatürde geniş bir yer tutmaktadır. Üçüncü ve daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar ise, ikinci mertebe diferensiyel denklemlere nazaran daha az sayıda olup son zamanlarda bilim dünyasında daha fazla merak uyandırmıştır.

Teorik olarak literatür geçmişine bakarsak, salınım teorisinin temelleri 1836 yılında Sturm ile atılmıştır. Bundan sonra Kneser'in 1893 yılından önce bazı salınım kriterleri bulunmasına rağmen tamamen kayda değer sonuçlar Hartman[1-7], Hille[8], Leighton[9-12], Nehari[13], Wintner[1-7, 14-17] in çalışmaları ile devam etmiştir. Son yıllara gelinceye kadar ikinci mertebe diferensiyel denklemler sürekli bir gelişim içinde olup daha genel formdaki denklemlerin incelenmesine başlanmıştır.

Bu sırada yüksek mertebeden denklemlerin salınımı da merak uyandırmaya devam etmiş ve ikinci mertebeden denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar, diğer yüksek mertebeden denklemlerin çalışılmasına ışık tutmuştur.

Üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler üzerine ise, Birkhoff'un 1911 yılındaki çalışmasına kadar kayda değer bir çalışma bulunmamaktadır. Ayrıca Birkhoff, ikinci mertebeden daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için ayırma ve karşılaştırma teoremlerini araştırmıştır. Salınım teoremleri ile ilgili olan diğer sonuçlar da 1930'da Cimmino[18], 1931'de Mammana[19], 1948'de Sansone[20] ve 1951'de Zlamal[21] tarafından elde edilmiştir. Ayrıca üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler teorisi 1955'den bu yana Gregus[22-26], Hanan[27], Lazer[28], Parhi[29-30], Temtek[31-38], Tiryaki[39-43] ve Aktaş[39-41] tarafından önemli ölçüde geliştirilmiştir.

Dördüncü mertebeden denklem yapılarının çalışılması ise, 1958 yılında Leighton ve Nehari[44] nin çalışması ile kayda değer bir önem kazanmış ve birçok araştırmacının da dikkatini çekmiştir. Daha sonra Howard[45], Barrett[46-50], Kreith[51] gibi birçok araştırmacı dördüncü mertebe denklemler için salınım teorisine katkıda bulunmuştur. Diğer mertebeden diferensiyel denklemlerde olduğu gibi dördüncü mertebeden diferensiyel denklem tiplerinde de ayırma, karşılaştırma, salınımlılık ve salınımsızlık teoremleri oluşturulmuştur.

n. mertebeden diferensiyel denklemlerin çalışılması ise, Reynolds[52] ile 1921 yılında başlamış olup günümüze gelinceye kadar yüksek mertebeden diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar geliştirilerek devam edilmiştir. n. mertebeden diferensiyel denklemler için özellikle Hille, Wintner ve Leighton'un elde ettiği sonuçlar genelleştirilip birçok araştırmacı[53-65] tarafından çalışılmıştır.

Diferensiyel denklemler çalışılırken, bilinmeyen fonksiyonun denklemdeki yerine göre lineer, lineer olmayan, yarı lineer, gecikmeli, ileri, mixed, neutral, vb. gibi çeşitli sınıflara ayrılmıştır. Gecikmeli terim içeren diferensiyel denklem kavramı ise, ilk defa Kondorse tarafından 1771 yılında ortaya atılmıştır. Fakat bu konu ile ilgili çalışmalar genellikle yirminci yüzyılda yapılmaya başlanmıştır. Gecikmeli terim içeren diferensiyel denklemler uygulamalı bilimin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin kontrol sistemlerinin modellenmesinde, nüfus dinamiği, immünoloji, enzim kinetiği, ekoloji ve biyoloji gibi. Ancak ileri terim içeren diferensiyel denklemler veya hem ileri hem gecikmeli terim içeren yani mixed tipteki denklemler daha az bilim insanı tarafından çalışılmıştır.

Özetle, ilk salınım teorisi çalışmalarından itibaren farklı yapıdaki diferensiyel denklemler çeşitli yöntemlerle çalışılmış ve çalışılmaya da devam edilmektedir. Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalarda salınım ile ilgili kriterler ve elde edilen sonuçlar diferensiyel denklemlerin daha genel yapıları için verilmiştir. Bunun yanı sıra salınım ile ilgili ispatlarda farklı yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerin en çok bilinenleri Riccati dönüşümü ve integral ortalama tekniğidir.

Ayrıca ilk olarak ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı ile başlayan salınım teorisi daha sonra sürekli geliştirilerek ilerlemiş ve salınımın yanı sıra salınımsızlık da ciddi bir araştırma konusu olmuştur. Böylece birçok matematikçi tarafından çeşitli mertebedeki denklem yapılarının salınımsızlığı ve bunun için elde edilen kriterler önem arz etmiştir.

Bu tez çalışmasında amacımız üçüncü ve dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin belirli tipleri için yeterli şartlar altında bazı salınım kriterleri elde ederek, incelenen diferensiyel denklem tipleri için salınım sonuçlarına ulaşmaktır. Tamamen orijinal sonuçlardan oluşan ikinci ve üçüncü bölümün alt yapısını oluşturmak için birinci bölümde amaca yönelik temel tanım ve kavramlar ile birlikte bazı salınım kriterleri, teoremleri ve sonuçları kronolojik bir biçimde verilmiştir.

İkinci bölümde, $\gamma > 0$ ve $t \geq t_0$ olmak üzere

$$\left[r(t)\left(\left[x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu\right]''\right)^{\gamma}\right]'$$

$$+\int_c^d q_1(t,\xi)f(x[\phi_1(t,\xi)])d\xi + \int_c^d q_2(t,\eta)g(x[\phi_2(t,\eta)])d\eta = 0 \qquad (1)$$

şeklindeki üçüncü mertebeden sürekli dağılımlı mixed argümentli neutral diferensiyel denklemi için salınımlılık kriterleri verilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Riccati dönüşümü ve integral ortalama tekniği kullanılarak, (1) diferensiyel denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu ya da sıfıra yakınsadığını garanti eden yeni yeter şartlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise,

$$\left(r(t)\left(x(t)+p(t)x\big(\sigma(t)\big)\right)''\right)''+\sum_{i=1}^{l}q_i(t)G\left(x\big(\tau_i(t)\big)\right)-\sum_{i=1}^{l}h_i(t)H\left(x\big(\rho_i(t)\big)\right)=0$$

formundaki dördüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemi incelenerek denklemin çözümlerinin asimptotik davranışları ve sınırsız salınımı için yeter şartlar oluşturulmuştur. Bu şartları oluştururken çözümlerin salınımlılığı ve asimptotik davranışları özel olarak

$$\int_0^{\infty}\frac{t}{r(t)}dt<\infty$$

kabulü altında çalışılmıştır.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde yeri geldikçe kullanılacak bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır[66,67,68].

$F \in ([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ve $t \geq t_0 \geq 0$ olmak üzere

$$F\big(t, x(t), x'(t), x''(t)\big) = 0 \tag{1.1}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Tanım 1.1. $t \in [t_x, \infty) \subset [t_0, \infty)$ olmak üzere $[t_x, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve (1.1) denklemini sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonuna, (1.1) denkleminin çözümü denir. Ayrıca $t_x \geq t_0 > 0$ sayısı $x(t)$ çözümüne bağlı bir değerdir.

Tanım 1.2. $x(t), [t_0, \infty)$ aralığında verilen bir diferensiyel denklemin bir çözümü olsun. Eğer en az bir $t \in [t_0, \infty)$ için $x(t) \neq 0$ oluyorsa, bu çözüme aşikar olmayan çözüm denir.

Tanım 1.3. $x(t)$, (1.1) diferensiyel denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığında aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t)$ çözümü sonsuz sayıda sıfırlara sahipse, bu $x(t)$ çözümüne salınımlıdır denir. Bu tanıma göre salınımlı bir $x(t)$ çözümü için $\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$ ve $x(t_n) = 0$ olacak şekilde bir (t_n) dizisi vardır.

Tanım 1.4. (1.1) diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir $x(t)$ çözümü salınımlı değilse, salınımsızdır. Yani bu çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfıra sahipse, salınımsızdır. Çözüm salınımsız ise, her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir

$t_1 \in [t_0, \infty)$ sayısı mevcuttur. Diğer bir ifadeyle, salınımsız bir çözüm belirli bir yerden sonra pozitif veya negatif olmalıdır.

Tanım 1.5. Eğer (1.1) diferensiyel denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise, denkleme salınımlıdır, aksi halde salınımsızdır denir.

Ayrıca son tanım hariç yukarıda verilen bütün tanımlar üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler için de geçerlidir. Yani üçüncü mertebeden bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü $x(t)$ olsun. Yeterince büyük t değerleri için $x(t)$ çözümü sonsuz sayıda sıfıra sahip ise, salınımlı aksi halde salınımsızdır denir.

Ancak üçüncü mertebeden bir diferensiyel denklemin salınımı için durum farklıdır.

Üçüncü mertebeden bir diferensiyel denklemin en az bir çözümü salınımlı ise, denkleme salınımlı denklem aksi halde salınımsız denklem denir.

Örnek 1.1. β reel bir sabit olmak üzere $x''(t) + \beta x(t) = 0$ diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\beta > 0$ durumunda lineer bağımsız iki çözüm $\cos\sqrt{\beta}\, t$ ve $\sin\sqrt{\beta}\, t$ şeklindedir. Burada her iki çözümde salınımlı olduğu için diferensiyel denkleme de salınımlıdır denir. $\beta < 0$ durumunda ise, lineer bağımsız iki çözüm $e^{\sqrt{-\beta}t}$ ve $e^{-\sqrt{-\beta}t}$ olur. Bu durumda ise denklem salınımsızdır.

Şimdi de adi diferensiyel denklemlerin bir türü olan fonksiyonel diferensiyel denklemler ve fonksiyonel diferensiyel denklemlerin sınıflandırılmasından kısaca bahsedelim.

Adi diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece belirli bir zamanda hesaplanır. Günlük yaşantımızda ise bazı olaylar sadece şimdiki zamana değil geçmişe ve geleceğe bağlı olabilir.

Buna göre adi diferensiyel denklemler sadece t değişkenine bağlı iken bazı tipteki diferensiyel denklemler $\tau > 0$ olmak üzere $t - \tau$ veya $t + \tau$ değişkenine bağlı olabilir. Bu tipteki diferensiyel denklemlere fonksiyonel diferensiyel denklemler denir. Aynı zamanda bu denklemler sapan (deviating) argümentli denklemler olarak da bilinmektedir.

Fonksiyonel diferensiyel denklemler bilinmeyen fonksiyonunun içerdiği değişkenlere göre sınıflandırılabilirler.

Tanım 1.6(Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferensiyel denklemler).

Gecikmeli diferensiyel denklemler en yüksek mertebeden türevi t değişkenine bağlı iken diğer türevlerin t veya t'den daha küçük değişkenlere bağlı olduğu diferensiyel denklemlerdir.

Örnek 1.2. $x'(t) - x(t-1) + x(t) + 2 = 0$

$$x''(t) + 3x'(t) - 5x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x'''(t) - 7x'(t-2) + 5 = 0$$

denklemleri gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem tipine birer örnektir.

Tanım 1.7(İleri (Advanced) fonksiyonel diferensiyel denklemler).

İleri diferensiyel denklemler en yüksek mertebeden türevi t değişkenine bağlı iken diğer türevlerin t veya t'den daha büyük değişkenlere bağlı olduğu diferensiyel denklemlerdir.

Örnek 1.3. $x'(t) = x(2t) + x(t) + x(t + \sqrt{3}) + t$

$$x''(t) = x'(t+1) + x\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

$$x'''(t) = x''(t+4) + x'(t+2) + 2t$$

denklemleri ileri fonksiyonel diferensiyel denklem tipine örnek olarak gösterilebilir.

Tanım 1.8(Karma (Mixed) fonksiyonel diferensiyel denklemler).

Hem gecikmeli hem de ileri terimlerin bulunduğu fonksiyonel diferensiyel denklemlere mixed fonksiyonel diferensiyel denklemler adı verilir.

Örnek 1.4. $x'(t) - x(t-3) + x(t+5) + x(t)x(t+4) + 5 = 0$

$$x''(t) + 2x'(t-1) - 2x(t+2) = 0$$

$$x'''(t) - x''(2t) + x'\left(t - \frac{5}{2}\right) + x(t+1) = 0$$

denklemleri karma fonksiyonel diferensiyel denklem tipine örnek teşkil eder.

Tanım 1.9(Nötral (Neutral) fonksiyonel diferensiyel denklemler).

Bu tip diferensiyel denklemlerde en yüksek mertebeden türev sadece t değişkenine bağlı değil, hem t'den büyük hem de t'den küçük değişkenlere bağlı olabilir.

Örnek 1.5. $x'(t) = tx'(t-1) + \sin t + 3$

$$x''(t-1) - x'(t+2) + x(t) + 1 = 0$$

$$x'''(t+5) + x''(2t) + x'(t) - 8 = 0$$

denklemleri birer nötral fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

Burada belirtelim ki bazı adi diferensiyel denklemler salınımsız iken bu denklemlere karşılık gelen gecikmeli diferensiyel denklemler salınımlı olabilir.

Örnek 1.6. $x'(t) + x(t) = 0$ denkleminin $x(t) = e^{-t}$ salınımsız çözümü iken bu denkleme karşılık gelen bir gecikmeli denklem olan $x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ diferensiyel denkleminin $x(t) = sint$ salınımlı bir çözümüdür.

Örnek 1.7. $x''(t) - x(t) = 0$ denkleminin $x(t) = e^{-t}$ ve $x(t) = e^{t}$ salınımsız çözümleri iken yine bu denkleme karşılık gelen bir gecikmeli denklem olan

$x''(t) - x(t-\pi) = 0$ diferensiyel denkleminin $x(t) = sint$ ve $x(t) = cost$ salınımlı çözümleridir.

Bilindiği gibi salınım teorisi Sturm ile başlamış ve ikinci mertebeden denklemler ile ilgili olan Sturm Ayırma ve Karşılaştırma teoremleri de bu teorinin temellerini oluşturmuştur.

Bu teoremleri hatırlayalım.

Teorem 1.1(Sturm Ayırma Teoremi).

$u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. Burada $p(t)$ ve $q(t)$, $(0, \infty)$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlardır. Bu durumda $v(t)$ nin ardışık iki sıfırı arasında $u(t)$ nin bir ve yalnız bir sıfır yeri vardır.

İspat. $u(t)$ ve $v(t)$ çözümleri lineer bağımsız olduğundan, onların

$$W(t) = W(u, v)(t) = u(t)v'(t) - v(t)u'(t)$$

ile belirtilen Wronskiyeni sıfır olamaz. $W(t)$ sürekli olduğundan bir aralıkta ya pozitif ya da negatif olmak zorundadır. t_1 ve t_2, $v(t)$ nin ardışık iki sıfırı olsun. t_1 ve t_2 noktalarında Wronksiyen $u(t)v'(t)$ ye indirgenir. Bu noktaların her birinde $u(t)$ ve $v'(t)$ çarpanlarının her ikisi sıfırdan farklıdır. Ayrıca $v'(t_1)$ ve $v'(t_2)$ zıt işaretlere sahip olmak zorundadır. Abel Teoremi'nden Wronksiyen sabit işarete sahip olduğu için $u'(t_1)$ ve $u'(t_2)$ nin işaretleri zıt olmak zorundadır. Bu yüzden süreklilik nedeniyle $u(t), t_1$ ve t_2 arasında bir noktada sıfır olmak zorundadır.

Dikkat edelim ki $u(t)$ nin t_1 ve t_2 arasında birden fazla sıfırı olamaz. Zira bu durumda aynı iddiaya göre $v(t), u(t)$ nin bu sıfırları arasında bir sıfıra sahip olmak zorunda kalacaktı. Bu ise $v(t)$ nin ardışık sıfırları olan t_1 ve t_2 varsayımıyla çelişir.

Örnek 1.8. $y'' + y = 0$ diferensiyel denkleminin $y_1(t) = sint$ ve $y_2(t) = cost$ lineer bağımsız çözümleridir. Bilindiği gibi $sint$ ve $cost$ fonksiyonlarından birinin ardışık iki sıfır yeri arasında diğerinin bir ve yalnız bir sıfır yeri vardır.

Teorem 1.2(Sturm Karşılaştırma Teoremi).

$p(t) > 0$ olmak üzere

$$(p(t)u')' + q(t)u = 0$$

denkleminin (a, b) aralığında bir çözümü u ve

$$(p(t)v')' + Q(t)v = 0$$

denkleminin de bir çözümü v olsun. $Q(t) > q(t)$ olacak şekilde Q ve q fonksiyonları sürekli olsun. (a, b) aralığında t_1, t_2, u nun ardışık iki sıfırı ise, $t_1 < t < t_2$ aralığında v nin en az bir sıfırı vardır.

İspat. Kabul edelim ki $v, t_1 < t < t_2$ aralığında hiçbir sıfıra sahip olmasın. Bu durumda genelliği bozmaksızın $t_1 < t < t_2$ aralığında $v(t) > 0$, $u(t) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca hipotezden $\forall\ t \in [a, b]$ için

$$\left(p(t)u'(t)\right)' + q(t)u(t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\left(p(t)v'(t)\right)' + Q(t)v(t) = 0 \tag{1.3}$$

yazılabilir. Buradan (1.2) denklemini $v(t)$ ile, (1.3) denklemini ise, $u(t)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarma işlemi yaptığımızda

$$\{p(t)[u'(t)v(t) - v'(t)u(t)]\}' = [Q(t) - q(t)]u(t)v(t)$$

elde edilir. Bu ifadenin t_1 den t_2 ye integrali alındığında,

$$p(t_2)u'(t_2)v(t_2) - p(t_1)u'(t_1)v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [Q(t) - q(t)]u(t)v(t)dt \tag{1.4}$$

elde edilir. Teoremdeki hipotezden $p(t_2) > 0$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $t_1 < t < t_2$ aralığında $u(t_2) = 0$ ve $u(t) > 0$ olduğundan $u'(t_2) < 0$ elde edilir. $v(t) > 0$ olduğunda $v(t_2) \geq 0$ olur. Buna bağlı olarak

$$p(t_2)u'(t_2)v(t_2) \leq 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$p(t_1)u'(t_1)v(t_1) \geq 0$$

olduğu görülür. (1.4) eşitliğini göz önüne aldığımızda eşitliğin sağ yanı pozitiftir. Sol yanı ise, negatiftir ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Buradan $v(t)$ fonksiyonunun $t_1 < t < t_2$ aralığında en az bir sıfıra sahip olduğu sonucuna varılır.

Özel olarak $c(t)$ ve $C(t), t_0 \geq 0$ için $t_0 \leq t < \infty$ aralığında pozitif reel değerli sürekli fonksiyonlar ve de $c(t) \leq C(t)$ olmak üzere

$$u'' + c(t)u = 0$$

ve

$$v'' + C(t)v = 0$$

diferensiyel denklemleri alınarak, Sturm Karşılaştırma Teoremine benzer şekilde yazılabilir.

Örnek 1.9. $$y'' + y = 0$$

ve

$$z'' + 4z = 0$$

diferensiyel denklemlerini ele alalım. Verilen denklemlerde $Q(t) = 4$ ve $q(t) = 1$ olup, $Q(t) > q(t)$ dir. İlk diferensiyel denklemin $y(t) = sint$ (veya $y(t) = cost$) çözümü ile ikinci diferensiyel denklemin $z(t) = sin2t$ (veya $z(t) = cos2t$) çözümünü ele alalım. Bu iki çözüm karşılaştırılırsa $y(t)$ nin ardışık herhangi iki sıfırı arasında $z(t)$ nin bir sıfırı vardır.

İkinci mertebeden denklemler ile ilgili salınımlılık çalışmalarının yanı sıra tezimizin konusunu oluşturan üçüncü ve dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı, son zamanlarda daha fazla merak uyandırmış ve bu konularla ilgili çalışmalar hız kazanmıştır.

Şimdi biz de tezimizin alt yapısını oluşturan bazı üçüncü mertebeden diferensiyel denklem yapılarını, salınımlılık koşul ve sonuçlarını kronolojik bir şekilde verelim.

Daha öncede bahsettiğimiz gibi üçüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık teorisi son elli yıldır büyük ölçüde gelişmiş olmasına rağmen özellikle Gregus[22-26], Hannan[27], Lazer[28], Rab[69-72], Svec[73-75], Villari[76, 77] tarafından elde edilen bazı sonuçlar uzun zamandır bilinmektedir.

İlk olarak Birkhoff[78], 1911 yılında üçüncü mertebeden denklemler ile ilgili olan çalışması ile mertebesi ikiden yüksek olan diferensiyel denklemler için ayırma ve karşılaştırma teoremlerinin çalışılmasına önderlik etmiştir. Bundan on yıl sonra Reynolds[52], Birkhoff'un sonuçlarının bazılarını genelleştirmiş ve geliştirmiştir.

Birkhoff ve Reynolds'un çalışmaları oldukça özel olup sadece salınım kriterleri ile ilgilenmez. Aslında Birkhoff, daha çok araştırılan ikinci ve dördüncü mertebeden çalışmaların aksine üçüncü mertebeden self-adjoint durum üzerine dikkat çekmiştir. Diğer karşılaştırma ve salınım teoremleri ise, sırasıyla 1930'da Cimmino[18], 1931'de Mammana[19], 1948'de Sansone[20] ve 1951'de Zlamal[21] tarafından elde edilmiştir [66].

Şimdi Birkhoff[78] tarafından elde edilen üçüncü mertebeden self-adjoint denklemi için ilk ayırma teoremini verelim.

Teorem 1.3(Birkhoff). Eğer u ve v, $b \in C^1$ olmak üzere

$$u''' + b(x)u' + \frac{1}{2}b'(x)u = 0 \tag{1.5}$$

diferensiyel denkleminin en az bir sıfıra sahip lineer bağımsız çözümleri ise, bu taktirde u ve v nin sıfırları tek tek veya çift olarak birbirini ayırır. Ayrıca (1.5) denkleminin hiç sıfırı olmayan bir çözümü her zaman vardır.

1966 yılında ise, Lazer

$$u''' + b(x)u' + c(x)u = 0 \tag{1.6}$$

diferensiyel denklemi için aşağıdaki ayırma teoremlerini ispatlamıştır.

Teorem 1.4(Lazer). Eğer $b \in C^1$ olmak üzere $b(x) \leq 0, c(x) \leq 0$ ve $2c(x) \leq b'(x)$ ise, bu taktirde (1.6) diferensiyel denkleminin herhangi iki lineer bağımsız çözümlerinin sıfırları birbirini ayırır.

Teorem 1.5(Lazer). Eğer $c \in C^2$ olmak üzere $b(x) \leq 0,\ c(x) < 0$ ve

$\frac{2b(x)}{c(x)} + \left[\frac{1}{c(x)}\right]'' \geq 0$ ise, bu taktirde (1.6) diferensiyel denkleminin herhangi iki lineer bağımsız salınımlı çözümlerinin sıfırları birbirini ayırır.

Bu ayırma teoremlerinin yanı sıra üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler için karşılaştırma teoremleri de bulunmuştur. Hanan ve Lazer tarafından bulunan bu karşılaştırma teoremlerini de verelim.

Hanan[79] karşılaştırma teoremini aşağıdaki

$$u''' + a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0 \tag{1.7}$$

$$u''' + a(x)u'' + b(x)u' + C(x)u = 0 \tag{1.8}$$

denklemleri için

$$c(x) \geq C(x), \quad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

kabulü altında vermiştir. Öncelikle teoremde geçen bir tanımı ifade edelim.

Tanım 1.10. Eğer (1.7) denkleminin her $u(x)$ çözümü

$$u(\alpha) = u'(\alpha) = 0, u''(\alpha) > 0, 0 < \alpha < \infty$$

özelliklerini sağlıyorsa, (1.7) denklemine I sınıfındandır denir. Burada $u(x) > 0$ çözümü $(0, \alpha)$ aralığındadır.

Teorem 1.6(Hanan). Eğer (1.8) denklemi I sınıfından ve (1.9) kabulü sağlanıyorsa, bu taktirde (1.7) denklemi de I sınıfındandır. Ayrıca sırasıyla (1.7) ve (1.8) in konjuge noktaları $\delta_n(\alpha), \delta_n^*(\alpha)$ arasında $n = 1,2, \dots; \alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\delta_n(\alpha) \leq \delta_{2n-1}^*(\alpha)$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda özellikle (1.8) denklemi salınımlı ise, (1.7) denklemi de salınımlıdır.

Bu teorem 1961 yılına kadar hiç kimse tarafından elde edilememişti. Birkhoff[78] ise, farklı bir terminoloji kullanarak 1911 yılında $a(x) \equiv 0$ özel durumu altında $\delta_1(\alpha) \leq \delta_1^*(\alpha)$ olduğunu ispatlamıştır.

Lazer[28] ise (1.6) denklemini karşılaştırmak için m bir sabit olmak üzere

$$u'' + [b(x) + mxc(x)]u = 0 \tag{1.10}$$

ikinci mertebeden denklemini kullanmıştır.

Teorem 1.7(Lazer). Kabul edelim ki $b \in C^1$ olmak üzere $b(x) \geq 0, c(x) \geq 0$ ve $2c(x) \geq b'(x)$ olsun. Eğer (1.10) denklemi salınımlı olacak şekilde $m > 1/2$ sayısı var ise, bu taktirde (1.6) denklemi de salınımlıdır.

Şimdiye kadar açıkladığımız üçüncü mertebe diferensiyel denklemlerin salınım teorisinin temellerini oluşturan bu ayırma ve karşılaştırma teoremlerinin yanı sıra üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler için salınımlılık kriterleri de elde edilmiştir. Şimdi de bu kriterlere ve sonuçlarına bakalım.

Kneser-Hille limit tipinde ve Hille-Winter-Leighton-Nehari integral tipinde salınım kriterleri bulunmuştur. Uygun şartlar altında (1.6) diferensiyel denkleminin salınımlılık özelliklerini içeren birkaç teoremden bahsedelim.

Teorem 1.8(Sabit katsayılar durumu).

(1) Eğer $b < 0,\ c > 0$ ve $c - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)(-b)^{3/2} > 0$ ise, bu taktirde (1.6) denklemi salınımlıdır. Bu şart sağlandığında bir u_1 çözümünün sabit katları hariç (1.6) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. $u_1(x)$ çözümü $(0, \infty)$ aralığında sıfırlanmaz ve $x \to \infty$ iken bütün türevleri ile birlikte monoton olarak sıfıra gider.

(2) Eğer $b < 0,\ c < 0$ ve $c + \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)(-b)^{3/2} < 0$ ise, bu taktirde (1.6) denklemi salınımlıdır. Bu şart sağlandığında (1.6) denklemi iki lineer bağımsız salınımlı çözüme sahiptir.

(3) Eğer $b > 0$ ve $c > 0$ ise, bu taktirde (1.6) denkleminin bir u_1 çözümünün sabit katları hariç bütün çözümleri salınımlıdır. $u_1(x)$ çözümü $(0, \infty)$ aralığında sıfırlanmaz ve $x \to \infty$ iken bütün türevleri ile birlikte monoton olarak sıfıra gider.

Hanan, Kneser-Hille tipinden hareketle aşağıdaki salınım kriterini bulmuştur.

Teorem 1.9(Hanan). Eğer bazı $p > 1$ sayıları için $b \in C^1$ olmak üzere

$$2c(x) > b'(x), 0 < x < \infty$$

ve

$$\lim_{x\to\infty} inf\ x^2 b(x) > p\,, \qquad \lim_{x\to\infty} inf\ x^3 c(x) > -p$$

şartları sağlanıyorsa, bu taktirde (1.6) denklemi salınımlıdır.

Teorem 1.10(Kondrat'ev[62]-Lazer[28]). Eğer $b(x) \leq 0, c(x) > 0, 0 < x < \infty$ ve

$$\int_{\alpha}^{\infty} [c(x) - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\left(-b(x)\right)^{3/2}]dx = \infty$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı mevcut ise, (1.6) denklemi salınımlıdır.

Kondrat'ev, bu sonucu 1958 yılında ve $b(x) \equiv 0$ şartı altında elde etmiştir.

Teorem 1.11(Gregus[26]). Kabul edelim ki $b \in C^1$ olmak üzere $b(x) \leq 0, c(x) > 0$ ve eşitliğin sadece izole noktalarda ortaya çıktığı $0 < x < \infty$ için $2c(x) \geq b'(x)$ şartları sağlansın. Eğer (1.6) denklemin bir salınımlı çözüme sahipse, bu taktirde sıfırlanmayan $u_1(x)$ çözümünün sabit katları hariç (1.6) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. Ayrıca $x \to \infty$ iken $u_1(x)$ sonlu bir limit değerine sahiptir.

Teorem 1.12(Lazer[28]). Kabul edelim ki $c \in C^2$ için $b(x) \leq 0, c(x) > 0$ ve

$\frac{2b(x)}{c(x)} + \left[\frac{1}{c(x)}\right]'' \leq 0, 0 < x < \infty$ şartları sağlansın. Bu taktirde Teorem 1.11 in sonuçları geçerlidir.

Teorem 1.13(Svec[80]-Villari[75]). Eğer $b(x) \equiv 0, c(x) > 0$ ve (1.6) denkleminin bir salınımlı çözümü var ise, bu taktirde $x \to \infty$ iken her salınımsız çözüm de sıfıra gider.

Teorem 1.14(Zlamal[21]-Lazer[28]). Kabul edelim ki $b \in C^1$ için $b(x) \geq 0, c(x) > d$, burada d pozitif bir sabit ve $c(x) \geq b'(x), 0 < x < \infty$ olsun. Eğer $u(x)$, (1.6) denkleminin herhangi bir salınımsız çözümü ise, bu taktirde

$$u \in C^2(1, \infty) \text{ olmak üzere } \lim_{x \to \infty} u(x) = \lim_{x \to \infty} u'(x) = 0$$

dır. Ayrıca herhangi iki salınımsız çözüm lineer bağımlıdır.

Daha fazla sonuç ise, Azbelez ve Caljuk[55], Cerven[81], Gregus[23-26], Kalafati[82], Kondrat'ev[62, 63], Rab[70-72] ve Svec[73-75] in çalışmalarında bulunabilir.

Şu ana kadar üçüncü mertebeden diferensiyel denklemler için bulunan ilk ayırma ve karşılaştırma teoremleri ile belirli denklemler için salınım kriterlerini içeren teoremleri belirttik. Şimdi de farklı denklem tiplerinin literatür geçmişine bakalım.

1966 yılında Waltman[83] , $t \geq t_0$ için

$$x'''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x^{\alpha}(t) = 0 \tag{1.11}$$

$$x'''(t) + p(t)x'(t) + q(t)f\big(x(t)\big) = 0 \tag{1.12}$$

denklemlerini ele almış ve salınım için iki teorem oluşturmuştur. Her iki denklemden de elde edilen sonuçlar integral şartlarını ve tek sıfırı olan çözümlerin salınımlılığını içermektedir.

1967 yılında ise, Schuur[84] $t \geq t_0$ için

$$x'''(t) + p(t)x''(t) + q(t)x'(t) + r(t)x(t) = 0 \tag{1.13}$$

denklemini incelemiş ve p, q, r fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$v_1(t) < \alpha < v_2(t) < \beta < v_3(t)$$

olacak şekilde $\alpha < \beta$ sabitleri mevcut ise, (1.13) denkleminin $[0, \infty)$ aralığında

$\alpha < z < \beta$ olmak üzere

$$x(t) = x(0) \exp\left(\int_0^t z(s)ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahip olduğunu ispatlamıştır. Burada v_1, v_2, v_3 ler

$$v^3 + p(t)v^2 + qv(t) + r(t) = 0$$

denkleminin kökleridir.

Heidel[85] ise, 1968 yılında (1.11) denkleminin salınımlı çözümlerinin varlığını ve salınımsız çözümlerinin davranışını incelemiştir. Bu incelemede iki farklı

(i) $p(t) \leq 0, q(t) \leq 0$

(ii) $p(t) \geq 0, q(t) \geq 0$

durumlarını ele almıştır.

1968 de Barrett[86], $t \geq t_0$ olmak üzere

$$x'''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{1.14}$$

formundaki üçüncü mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne almıştır. Çalışmasındaki temel sonuç da bu denklemin çözümlerinin salınımsızlığı ve diskonjugeliği ile ilgilidir. Aslında üçüncü mertebeden denklemlerin salınımsızlığı ve diskonjugeliği ile ikinci mertebeden denklemlerin diskonjugeliğini karşılaştırmıştır.

Örneğin

$$\int_{t_0}^{\infty} s^2|q(s)|ds < \infty$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} s|p(s)|ds < \infty$$

ise, bu taktirde (1.14) denklemi diskonjugedir ve böylece salınımsızdır.

Kim[87] 1970 de, (1.13) denkleminin katsayılarının reel değerli fonksiyonlar olduğu durumda incelemiş ve ayırma teoremlerini, çözümlerin sıfırlarının dağılımını ve diskonjugelik kriterlerini tartışmıştır. Diskonjugelik için, eğer katsayılar açık bir aralık olan (a, b) üzerinde tanımlı olmak üzere

$$p \leq 0, q \leq 0, r \leq 0, p^2 + p' + q \leq 0 \text{ ve } pq - r + q' \leq 0$$

özelliklerini sağlarsa, bu taktirde (1.13) denkleminin (a, b)aralığı üzerinde diskonjuge olduğunu ispatlamıştır.

1970 yılında ise, Ahmad ve Lazer yine (1.13) denklemini ele alıp,

$$p(t) \leq 0, q(t) \leq 0 \text{ ve } r(t) < 0$$

olduğunda, aşağıdaki iki durumun birbirine denk olduğunu ispatlamışlardır.

(A) (1.13) denkleminin salınımlı bir çözümü mevcuttur.

(B) Eğer w, (1.13) denkleminin aşikar olmayan salınımsız bir çözümü ise, bu taktirde $t \geq t_1$ için $sgn\, w(t) = sgn\, w'(t) = sgn\, w''(t)$ ve yine $t \geq t_1$ için $w(t)w'(t)w''(t) \neq 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ sayısı mevcuttur.

Yine 1970 de, Utz[88] üçüncü mertebeden (1.13) diferensiyel denklemini ele almış ve denklemin çözümlerinin asimptotik davranışlarını araştırmıştır.

Jones[89] ise, 1973 yılında $p(t) \leq 0, q(t) > 0$ olduğu durumda (1.14) denklemini incelemiş ve salınımsız çözümlerin davranışlarını çalışmıştır. Eğer $x(t)$ salınımsız bir çözüm ve (1.14) denkleminin salınımlı bir çözümü var ise, bu taktirde $\lim_{t\to\infty} tx'(t) = 0$ olduğunu ve $x(t) > 0, x'(t) < 0$ ve $x''(t) > 0$ olduğunda da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olacağını ispatlamıştır.

Yine 1973 yılında Etgen ve Shih[90], (1.14) denkleminin diskonjugeliği için bazı yeterli şartlar oluşturmuşlardır. Aslında Etgen ve Shih[91] yine aynı yıl yaptıkları başka bir çalışmada ise, (1.13) denkleminin diskonjugeliği için bazı yeni şartlar oluşturmuşlardır.

Aynı yıl yapılmaya devam edilen çalışmalardan bir tanesi de Soltes[92] tarafından $f(u)/u \geq K > 1$ olduğu durumda (1.12) denkleminin incelenmesidir.

Daha sonra 1974 de, Jones[93] (1.14) denklemini araştırmış ve (1.14) denklemi ile onun adjoint denklemi olan

$$x'''(t) + p(t)x'(t) + \left(p'(t) - q(t)\right)x(t) = 0$$

denklemi arasında bir ilişki bulmuştur. Ayrıca Jones, Lazer[28] in elde ettiği sonuçları genelleştirmiştir.

Mehri[94] de, 1976 da $t \in (0, \infty)$ için

$$x'''(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{1.15}$$

şeklindeki üçüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemini incelemiş ve Leighton[12] un sonuçlarını genişletmiştir. Mehri, (1.15) denkleminin ancak ve ancak

$$\int_{t_0}^{\infty} q(t)dt = \infty \tag{1.16}$$

olduğu durumda salınımlı olduğunu ispatlamıştır. Yine Erbe de 1976 yılında (1.13) denkleminin genel formunu ele almış, çözümlerin asimptotik davranışları üzerine çalışmış ve salınım için bazı yeni yeterli şartlar oluşturmuştur. Erbe aynı zamanda 1979 yılına kadar çeşitli denklem yapıları ile ilgili birçok çalışma yapmıştır.

1981 yılında, Kusano ve Naito[95]

$$\left[\frac{1}{r_2(t)}\left[\frac{1}{r_1(t)}\left[\frac{x(t)}{r_0(t)}\right]'\right]'\right]' - p(t)x\left(\tau(t)\right) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemi için bazı karşılaştırma teoremleri vermişlerdir. Burada $i = 0, 1, 2$ olmak üzere $r_i(t), \tau(t)$ ve $p(t)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar, $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde

$$r_i(t) > 0, p(t) > 0, \tau(t) > 0 \text{ ve } t \to \infty \text{ iken } \tau(t) \to \infty, \tau(t) < t$$

dir.

Gregus[96], 1987 de

$$x'''(t) + 2A(t)x'(t) + [A'(t) + b(t)]x(t) = 0,\ \ t \geq t_0 \tag{1.17}$$

denkleminin salınımlılığı için bazı yeterli şartlar elde etmiştir. Bundan on yıl sonra Gregus ve Jr. Gregus[97] (1.17) diferensiyel denklemini göz önüne almış ve aşağıdaki sonucu ispatlamıştır. $t \in (a, \infty), a > 0$ için

$$A(t) > m > 0, A'(t) \leq 0, A'(t) + B(t) > d/t$$

olsun. Bu durumda $x(t)$ çözümü hariç (1.17) denkleminin her çözümü (a, ∞) aralığı üzerinde salınımlıdır. Burada $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0, x'(t) \to 0$ ve $x''(t) \to 0$ dır.

1990 da Parhi ve Das[98] lineer

$$x'''(t) + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0 \tag{1.18}$$

diferensiyel denklemini ele almış ve eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} + c(t) - \frac{a(t)b(t)}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) \right)^{\frac{3}{2}} \right] dt = \infty \tag{1.19}$$

sağlanıyor ise, bu taktirde (1.18) denkleminin salınımlılığını ispatlamıştır. Burada dikkat edelim ki $a(t) = 0 = b(t)$ olduğunda (1.18) denklemi, (1.15) denklemine ve (1.19) şartı da (1.16) şartına indirgenir.

Yine Gregus 1992 yılında, $[t_0, \infty)$ aralığında $p'(t)$ ve $q(t)$ sürekli fonksiyonlar, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $0 \leq \theta < \infty$ için $\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = \theta > 0$ kabulleri altında lineer olmayan (1.12) diferensiyel denklemini incelemiştir.

1993 de, Parhi ve Das[99] lineer (1.18) diferensiyel denklemini göz önünde bulundurmuş ve eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{2a^3(t)}{27}+c(t)-\frac{a(t)b(t)}{3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(t)}{3}-b(t)+a'(t)\right)^{\frac{3}{2}}\right]dt=\infty$$

sağlanıyor ise, bu taktirde (1.18) denkleminin salınımlılığını ispatlamıştır.

1995 yılında, Skerlik[67] p ve q pozitif fonksiyonlar olmak üzere (1.14) lineer diferensiyel denklemini incelemiş ve Lazer[28] tarafından oluşturulan sonuçları geliştirmiştir.

Yine 1995 yılında Das[100]

$$x'''(t)+a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=f(t) \tag{1.20}$$

forced denklemini ele almış ve bazı yeni salınım kriterleri oluşturmuştur.

1996 da Dzurina[101], Skerlik tarafından çalışılan denklemin gecikmeli versiyonu olan

$$x'''(t)-p(t)x'(t)+q(t)x\big(\tau(t)\big)=0$$

lineer gecikmeli diferensiyel denklemini çalışmıştır.

Cecchi ve arkadaşları[67] 1996 da,

$$\left(\frac{1}{p(t)}\left[\frac{1}{r(t)}x'(t)\right]'\right)'+q(t)x(t)=0, \quad t\geq t_0$$

lineer diferensiyel denklemi için bazı yeterli şartlar vermişlerdir.

Cecchi ve arkadaşları[67] bu seferde 1997 yılında,

$$\left(\frac{1}{p(t)}\left[\frac{1}{r(t)}x'(t)\right]'\right)'+c(t)f\big(x(t)\big)=0, \quad t\geq t_0$$

lineer olmayan diferensiyel denklemini göz önüne almışlar ve çözümlerin asimptotik davranışlarını çalışmışlardır. Burada

$$\lim_{u\to 0} sup\frac{f(u)}{u}<\infty$$

veya

$$\lim_{|u|\to\infty} sup \frac{f(u)}{u} > 0$$

dır.

1998 yılında ise, Cecchi ve Marini[67] (1.12) lineer olmayan denklemini f fonksiyonu azalmayan ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$, $p(t)$ monoton olmayan ve sabit işarete sahip olmayan bir fonksiyon ve $q(t) > 0$ şartları altında ele almışlardır. Bu çalışmadan elde ettikleri sonuçlar Waltman[83] tarafından oluşturulan sonuçların genişletilmiş halidir.

Yine 1998 de, Tiryaki ve Çelebi[102] $t \geq t_0$ için

$$x'''(t)p(t)\big(x'(t)\big)^{\alpha} + q(t)f\big(x(t)\big) = 0 \tag{1.21}$$

lineer olmayan denklemini göz önünde bulundurmuşlardır. Burada p ve q pozitif fonksiyonlar, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $\alpha > 0$ şeklinde tanımlanmışdır. Tiryaki ve Çelebi, (1.21) denkleminin salınımlılığı için bazı yeterli şartlar oluşturmuşlar ve çözümlerin asimptotik davranışları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

1998 yılında Parhi ve Padhi[103], Das[100] tarafından elde edilen koşullardan farklı olarak katsayılar üzerine yeni şartlar koyarak

$$x'''(t) + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x\big(\tau(t)\big) = 0 \tag{1.22}$$

denklemini göz önüne almışlardır. Bu çalışmada yazarlar temel sonuçları ispatlamak için (1.22) denkleminin

$$Lx(t) + q(t)x\big(\tau(t)\big) = 0$$

kanonik formunda yazılabileceğini ispatlamışlardır.

1999 da sırasıyla Bartusek[67], Parhi ve Padhi[103], Parhi ve Panigrahi[104]

$$\left(\frac{1}{p(t)}\left[\frac{1}{r(t)}x'(t)\right]'\right)' - q(t)f\big(x(t)\big) = 0, \qquad t \geq t_0,$$

(1.22) ve (1.15) denklemlerini ele alıp, incelemişlerdir.

2001 yılında Bartusek[67] ayrıca Cecchi ve Martini[67] $f(0) = 0$ ve $u \neq 0$ için

$uf(u) > 0,\ q(t) > 0$ olmak üzere (1.12) lineer olmayan diferensiyel denklemini yeniden ele almışlardır.

2003 de ise, Candan ve Dahiya[105]

$$\left(b(t)\big(a(t)x'(t)\big)'\right)' + \sum_{i=1}^{m} q_i(t) f\left(x\big(\sigma_i(t)\big)\right) = h(t)$$

ve

$$\left(b(t)\big(a(t)x'(t)\big)'\right)' + \int_{c}^{d} q(t,\xi) f\left(x\big(\sigma(t,\xi)\big)\right) d\xi = 0$$

formundaki fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımlılığını incelemişlerdir. Burada $a, b, h \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}), a(t), b(t) > 0, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve $i = 1, 2, \dots, m$ için

$t \to \infty$ iken $\sigma_i(t) \to \infty$ dur.

Ayrıca ilgili çalışmada

$$\int^{\infty} \frac{dt}{b(t)} = \infty$$

ve

$$\int^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \infty$$

şartları altında birçok salınımlılık sonucu bulunmuştur.

Yine Candan ve Dahiya[106] 2005 yılında

$$[a(t)[b(t)[x(t) + c(t)x(t-\tau)]']']' + \int_{a}^{b} p(t,\xi) x\big(\sigma(t,\xi)\big) d\xi = 0$$

formundaki sapan argümentli üçüncü mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımlılığını

(a) $a(t), a'(t), b(t), c(t) \in C\big([t_0, \infty), (0, \infty)\big), 0 < c(t) \leq 1, a'(t) \geq 0,$

(b) $\int^{\infty} \frac{dt}{b(t)} = \infty$ ve $\int^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \infty$,

(c) $p(t,\xi) \in C([t_0,\infty) \times [a,b],[0,\infty))$ ve $t_m \geq t_0$ için $p(t,\xi)$ fonksiyonu belirli bir yerden sonra hiçbir $[t_m,\infty) \times [a,b]$ yarı ekseni üzerinde sıfır değildir,

(d) $\sigma(t,\xi) \in C([t_0,\infty) \times [a,b],\mathbb{R}), \sigma(t,\xi) + \tau \leq t, \sigma(t,\xi)$ fonksiyonu sırasıyla t ve ξ değerlerine göre azalmayandır ve $\lim\limits_{t\to\infty} inf_{\xi\in[a,b]}\, \sigma(t,\xi) = \infty$ dur

kabulleri altında incelemişlerdir.

2007 de ise, Tiryaki ve Aktaş[107] üçüncü mertebeden damping terimli lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemini Riccati dönüşümü ve integral ortalama tekniğini kullanarak denklemin her çözümünün ya salınımlı ya da sıfıra gittiğini garanti eden bazı yeterli şartlar vermişlerdir. Ele aldıkları bu fonksiyonel diferensiyel denklem

$$(r_2(t)(r_1(t)y')')' + p(t)y' + q(t)f\left(y(g(t))\right) = 0 \qquad (1.23)$$

formundadır.

Yine aynı yıl Temtek[108]

$$y''' + q(t)(y')^{\gamma} + p(t)h(y) = f(t)$$

şeklindeki homogen olmayan üçüncü mertebeden diferensiyel denklemin çözümlerinin salınımsızlığı için yeterli şartlar vermiştir. Burada $p(t) \leq 0, q(t) \leq 0, f(t) \geq 0$ olacak şekilde p, q ve f fonksiyonları reel değerli sürekli fonksiyonlardır. $\gamma > 0$ tek tamsayıların oranı ve $y \neq 0$ için $h(y)y > 0$ olacak şekilde h fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

2008 yılında Grace vd.[109]

$$\int^{\infty} a^{-\frac{1}{\alpha}}(s)ds < \infty$$

olduğu durumda,

$$\frac{d}{dt}\left(a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)^{\alpha}\right) + q(t)f(x[g(t)]) = 0$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left(a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)^{\alpha}\right) = q(t)f(x[g(t)]) + p(t)h(x[\sigma(t)]) \qquad (1.24)$$

üçüncü mertebeden lineer olmayan fonksiyonel diferensiyel denklemlerinin bütün çözümlerinin salınımlılığı için bazı yeterli şartlar sunmuşlardır.

2009 da ise, Şenel ve Temtek[110] üçüncü mertebeden lineer olmayan forced

$$(r(t)x'')' + q(t)k(x') + p(t)h(x) = f(t)$$

diferensiyel denklemini ele almışlar, burada $r(t) > 0, f(t) \geq 0$ fonksiyonları [0,∞) aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $k(x')$ ve $h(x)$ fonksiyonları $x \neq 0$ için $h(x)x > 0, x' \neq 0$ için $k(x')x' > 0$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlardır. Bu şartlar altında denklemin çözümlerinin salınımsızlığı için yeterli şartlar elde etmişlerdir.

2010 yılında da sırasıyla Aktaş vd.[111], Baculikova ve Dzurina[112], (1.23) ve γ pozitif tek tamsayıların oranı olmak üzere

$$\left[a(t)\left(\left[x(t) \pm p(t)x(\delta(t))\right]''\right)^{\gamma}\right]' + q(t)x^{\gamma}(\tau(t)) = 0$$

üçüncü mertebeden diferensiyel denklem yapıları için salınım kriterleri araştırmışlar ve elde ettikleri bazı salınım sonuçlarını çalışmalarında ifade etmişlerdir.

2011 de yine Baculikova ve Dzurina[113], γ pozitif tek tamsayıların oranı,

$a(t), q(t) \in C([t_0,\infty))$ olup pozitif fonksiyonlar, $\tau(t)C([t_0,\infty)), \tau(t) \leq t$,

$\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a^{-\frac{1}{\gamma}}(s)ds = \infty$ ve $x \neq 0$ için $f(x) \in C(-\infty,\infty), xf(x) > 0$,

$f'(x) \geq 0$ ayrıca $xy > 0$ için $-f(-xy) \geq f(xy) \geq f(x)f(y)$ kabulleri altında

$$[a(t)[x''(t)]^{\gamma}]' + q(t)f(x[\tau(t)]) = 0$$

şeklindeki üçüncü mertebeden lineer olmayan fonksiyonel diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışı ile ilgilenmişlerdir.

Yine aynı yıl Li vd.[114]

$$\left[a(t)\left(x''(t)\right)^{\alpha}\right]' + q(t)x^{\alpha}(\tau(t)) = 0$$

formundaki üçüncü mertebeden gecikmeli diferensiyel denkleminin salınım özelliklerini araştırmışlardır. Bir önceki çalışmadan farklı olarak burada $a'(t) \geq 0$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}}(t)dt \leq \infty,$$

ayrıca γ sabiti ile aynı özelliklere sahip α sabiti tanımlanmıştır.

Agarwal vd.[115] 2012 yılında, mixed argümentli üçüncü mertebeden lineer olmayan fonksiyonel (1.24) diferensiyel denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığını ve asimptotik özelliklerini çalışmışlardır. Daha önce bahsettiğimiz gibi aynı denklem Grace vd.[109] tarafından incelenmişti. Bu çalışmanın önceki çalışmadan farkı ise, (1.24) denklemi için yeni karşılaştırma teoremleri elde edilmesi ve böylece salınımlılık kriterlerinin iyileştirilerek, genelleştirilmiş olmasıdır.

Bu çalışmanın yanı sıra aynı yıl Zhang vd.[116]

$$\left[r(t)\left[x(t)+\int_{a}^{b} p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu\right]''\right]' + \int_{c}^{d} q(t,\xi)f(x[\sigma(t,\xi)])d\xi = 0$$

yapısındaki sürekli dağılımlı gecikmeli değişkenli üçüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemi için salınım kriterleri vermişlerdir. Buradaki dikkat çekici koşullar

$\int^{\infty} \frac{1}{r(t)}dt = \infty, 0 \leq p(t) \equiv \int_a^b p(t,\mu)d\mu \leq P < 1$ ve $x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq \delta > 0$ olmasıdır.

2013 de Candan[117] ise, şimdiye kadar incelenen denklem yapılarından farklı olarak gecikmeli argüment içeren

$$\left(r_2(t)\left[\left(r_1(t)y'(t)\right)'\right]^{\gamma}\right)' + q_1(t)x^{\gamma}(t-\sigma_1) + q_2(t)x^{\gamma}(t+\sigma_1) = 0$$

ve

$$\left(r_2(t)\left[\left(r_1(t)y'(t)\right)'\right]^{\gamma}\right)' + \int_{a}^{b} \widetilde{q_1}(t,\xi)x^{\gamma}(t-\xi)d\xi + \int_{a}^{b} \widetilde{q_2}(t,\xi)x^{\gamma}(t+\xi)d\xi = 0$$

üçüncü mertebeden lineer olmayan neutral diferensiyel denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığını ve asimptotik özelliklerini ele almıştır.

Son olarak 2015 yılında da Tian vd.[118], $\alpha \geq 1$ tek tamsayıların oranı olmak üzere

$$\left[r(t)\left(\left[x(t)+\int_a^b p(t,\xi)x\big(\tau(t,\xi)\big)d\xi\right]''\right)^{\alpha}\right]' + \int_c^d q(t,\xi)f\Big(x\big(\sigma(t,\xi)\big)\Big)\,d\xi = 0$$

şeklindeki üçüncü mertebeden dağılımlı sapan argüment içeren neutral diferensiyel denkleminin salınımlılık ve asimptotik davranışlarını incelemişlerdir. Zhang vd.[116] çalışmasındaki kabullerin aynısı bu çalışma içinde geçerlidir.

Böylece üçüncü mertebeden çeşitli özellik ve yapılardaki diferensiyel denklemlerin salınım teorisi farklı açılardan ele alınarak özetlenmiş olup, şimdi de dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili yapılan çalışmaları inceleyelim.

Dördüncü mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışının araştırılması matematiksel fiziğin titreşen çubuk problemi ile başlamıştır. Courant ve Hilbert[119] tarafından araştırılan bu problem

$$[a(x)u'']'' - \lambda c(x)u = 0$$

şeklindedir. Aşağıdaki

$$[a(x)u'']'' - c(x)u = 0, a(x) > 0, c(x) > 0 \tag{1.25}$$

ve

$$[A(x)v'']'' - C(x)v = 0, A(x) > 0, C(x) > 0 \tag{1.26}$$

diferensiyel denklemler için karşılaştırma ve salınım teoremleri Leighton ve Nehari[44], Howard[45], Kreith[51] tarafından elde edilmiştir. 1958 yılında yapılmış olan Leighton ve Nehari'nin çalışmasından önce dördüncü mertebeden diferensiyel denklemler için çok az sonuç bilinmekteydi.

Öncelikle dördüncü mertebeden diferensiyel denklemler için elde edilen ayırma teoremlerinde kullanılan önemli bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 1.1. a ve c, sırasıyla C^2 ve C sınıfından pozitif birer fonksiyon olsunlar. Eğer u, u', u'' ve $(au'')'$ fonksiyonlarının hepsi birden α noktasında nonnegatif (bunlardan bir tanesi $\neq 0$ olmak üzere) olacak şekilde $u(x)$, (1.25) denkleminin bir çözümü ise, bu taktirde a ve c üzerine olan kabullerin sağlandığı yerlerdeki her $x > \alpha$ için x noktasında hepsi pozitiftir.

Lemma 1.1, (1.25) denkleminin her zaman en az bir salınımsız çözüme sahip olduğunu gösterir. Mesela bu çözüm, $(0, \infty)$ aralığındaki sıfırların sadece sonlu bir sayısıdır. Ayrıca (1.25) diferensiyel denkleminin aşağıdaki örnekte olduğu gibi salınımlı çözümleri de vardır.

Örneğin özel olarak $u^{(4)} - u = 0$ diferensiyel denklemi $u_1 = sinx$ ve $u_2 = cosx$ salınımlı çözümleridir. Dördüncü mertebeden diferensiyel denklemler için geçerli olan bütün çözümlerin salınımlı olması veya bütün çözümlerin salınımsız olması durumu ikinci mertebeden diferensiyel denklemler için verilen tanımlardan farklıdır.

Teorem 1.15(Leighton ve Nehari). Eğer (1.25) diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri $u(\alpha), u(\beta) = v(\alpha) = v(\beta) = 0$ $(0 < \alpha < \beta)$ olacak şekilde u ve v ise, bu taktirde u ve v nin sıfırları (α, β) aralığında birbirini ayırır.

Teorem 1.16(Fite[120], Leighton ve Nehari). Eğer u ve v,

$$[a(x)u'']'' + c(x)u = 0, a(x) > 0, c(x) > 0 \tag{1.27}$$

diferensiyel denkleminin γ noktasındaki katlı sıfırları ile birlikte lineer bağımsız çözümleri ise, hem $(0, \gamma)$ hem de (γ, ∞) aralığında u ve v nin sıfırları birbirini ayırır.

Şimdi de dördüncü mertebeden diferensiyel denklemler için oluşturulan karşılaştırma teoremlerinden bahsedelim.

Teorem 1.17(Leighton ve Nehari). Kabul edelim ki (1.25) ve (1.26) diferensiyel denklemlerinde $0 \leq x < \infty$ olmak üzere $a(x) \geq A(x)$ ve $c(x) \leq C(x)$ olsun. Eğer δ_n ve δ_n^* sırasıyla (1.25) ve (1.26) diferensiyel denklemleri için n. konjuge noktaları ise, bu taktirde $\delta_n^* \leq \delta_n$ dir.

Görüldüğü gibi $c(x)$ in işareti (1.25) diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışları üzerinde ciddi bir öneme sahiptir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.18(Leighton ve Nehari).

$$C(x) \geq c(x) > 0, 0 < A(x) \leq a(x)$$

kabulü altında (1.27),

$$[a(x)u'']'' + C(x)u = 0 \tag{1.28}$$

ve

$$[A(x)u'']'' + c(x)u = 0 \tag{1.29}$$

denklemleri için α nın konjuge noktaları arasında

$$\delta_n^* \leq \delta_{2n-1}, \qquad \delta_n' < \delta_{2n}\,, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

ilişkisi vardır. Özel olarak eğer (1.27) diferensiyel denklemi salınımlı ise, (1.28) ve (1.29) denklemlerinin her ikisi birden salınımlıdır.

(1.25) diferensiyel denkleminin bir genel hali olan

$$[a(x)u'']'' + [b(x)u']' - c(x)u = 0$$

şeklindeki dördüncü mertebeden diferensiyel denklemi Barrett[48] tarafından çalışılmıştır. Bu diferensiyel denklemde a, b, c fonksiyonları sırasıyla C^2, C^1, C sınıfındandır ve $0 \leq x < \infty$ için $a(x) > 0, b(x) \geq 0$ ve $c(x) \geq 0$ dır.

Şimdi de dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımsızlığı ile ilgili şartları içeren teoremleri ifade edelim.

Teorem 1.19(Leighton ve Nehari).

$$(au'')'' = \lambda cu, u(\alpha) = u'(\alpha) = u(\beta) = u'(\beta) = 0$$

probleminin en küçük özdeğeri $\lambda = \lambda(\beta)$ olup, her $\beta > \alpha$ için $\lambda(\beta) > 1$ ise, (1.25) denklemi (α, ∞) aralığında salınımsızdır.

Teorem 1.20(Howard). Eğer $u^{(4)} = c(x)u$ denklemi (α, ∞) aralığında salınımsız ise, bu taktirde aşağıdaki

$$\int_{x}^{\infty}(t-x)^2\,c(t)dt \leq (x-\alpha)^{-1},$$

$$\int_{x}^{\infty}(t-x)c(t)dt \leq 3^{-\frac{1}{2}}\left(12-6\sqrt{3}\right)(x-\alpha)^{-2},$$

$$\int_{x}^{\infty}c(t)dt \leq 3(x-\alpha)^{-3}, (\alpha < x < \infty)$$

eşitsizlikler sağlanır.

Teorem 1.21(Leighton ve Nehari). Eğer $\alpha > 0$ için

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{a(x)}, \qquad \int_{\alpha}^{\infty}x^2c(x)dx$$

integrallerinin her ikisi birden mevcut ve sonlu ise, bu taktirde (1.25) diferensiyel denklemi salınımsızdır.

Dördüncü mertebeden farklı yapıdaki diferensiyel denklemlerin salınımlılığı üzerine yapılan çalışmalardan dikkat çekenleri kronolojik olarak özetleyelim.

İlk olarak 1958 yılında Leighton ve Nehari dördüncü mertebeden self-adjoint lineer diferensiyel denklemlerin belirli bir sınıfını çalışmış ve

$$x^{(4)} = p(t)x$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili birçok sonuç vermiştir.

Daha sonra Howard[45] 1960 da,

$$\left(r(t)x''(t)\right)'' = p(t)x(t)$$

diferensiyel denklemi için salınımlılık kriterleri oluşturmuştur. Burada $t \in (0,\infty)$ için $r(t) \in C^2$ ve pozitif bir fonksiyondur aynı şekilde $t \in (0,\infty)$ için $p(t) \in C$ de pozitif bir fonksiyondur.

Daha sonra 1976 yılında Kusano ve Naito[121,122],

$$\left(r(t)x''(t)\right)'' + x(t)F(x^2(t),t) = 0$$

diferensiyel denkleminin

$$\int_0^\infty \frac{t}{r(t)}dt < \infty$$

veya

$$\int_0^\infty \frac{t}{r(t)}dt = \infty$$

şartları altında salınımlılığını incelemiştir. Burada r ve F fonksiyonları $(0,\infty) \times [0,\infty)$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlardır.

Kusano ve Naito'nun dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili bahsettiğimiz çalışmasının yanı sıra daha birçok araştırmacının çalışması bulunmaktadır. Bunlar arasından son yıllarda yapılan Parhi ve Tripathy'nin çalışmasını[123] gösterebiliriz.

Parhi ve Tripathy 2004 yılında,

$$\left(r_1(t)\left(x(t) + p(t)x(t-\tau)\right)''\right)'' + q(t)G\left(x(t-\alpha)\right) = 0$$

formundaki dördüncü mertebeden lineer olmayan neutral diferensiyel denklemi için

$$\int_0^\infty \frac{t}{r_1(t)}dt < \infty$$

şartı altında bazı salınım koşulları elde etmiştir.

Yine Parhi ve Tripathy[124] 2005 yılında ise,

$$\left(r_1(t)\left(x(t) + p(t)x(t-\tau)\right)''\right)'' + q(t)G\left(x(t-\sigma)\right) = 0$$

ve forced yapıdaki

$$\left(r_1(t)\left(x(t) + p(t)x(t-\tau)\right)''\right)'' + q(t)G\left(x(t-\sigma)\right) = f(t)$$

dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerinin çözümlerinin salınımı için yeterli şartları bu seferde

$$\int_0^\infty \frac{t}{r_1(t)}dt = \infty$$

kabulü altında incelemiştir.

2013 de Tripathy[125] ve ayrıca Tripathy vd.[126] da sırasıyla

$$\left(\frac{1}{a(t)}\left(\left(x(t)+p(t)x(t-\tau)\right)''\right)^\alpha\right)'' = q(t)f\left(x(t-\sigma_1)\right)+r(t)g\left(x(t+\sigma_2)\right)$$

şeklindeki lineer olmayan dördüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemini ve

$$\left(r(t)\left(x(t)+p(t)x(t-\tau)\right)''\right)'' + q(t)G\left(x(t-\sigma)\right) - h(t)H\left(x(t-\beta)\right) = 0$$

şeklindeki lineer olmayan dördüncü mertebeden neutral gecikmeli diferensiyel denklemini araştırmışlardır. Bu diferensiyel denklemler için yeterli şartlar altında salınımlılık sonuçları elde etmişlerdir.

Son olarak ise 2014 yılında Bartusek ve Dosla[127],

$$x^{(4)}(t) + q(t)x''(t) + r(t)f\left(x(t)\right) = 0$$

lineer olmayan dördüncü mertebe diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığını

(i) yeterince büyük t değerleri için $q \in C(\mathbb{R}_+), q(t) > 0, r \in C(\mathbb{R}_+), r(t) > 0$ ve $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$şeklinde tanımlanan fonksiyonlar,

(ii) $f \in C(\mathbb{R})$ fonksiyonu $u \neq 0$ için $f(u)u > 0$ olacak şekilde ya $u \in \mathbb{R}$ için

$|f(u)| \geq |u|$ ya da $0 < \lambda < 1$ için $|f(u)| \geq |u|^\lambda$

kabulleri altında araştırmışlardır.

Böylece üçüncü ve dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınım teorisi için literatür taraması tamamlanmış olup toplanan bu bilgiler tezimizin temelini oluşturan bölümlere ilham vermiş ve kaynak oluşturmuştur.

2. BÖLÜM

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SÜREKLİ DAĞILIMLI MİXED ARGÜMENTLİ NEUTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

Bu bölümde, bir önceki bölümde yapılan literatür taramasından yola çıkarak, tamamen orijinal sonuçları bulunan çalışmamız verilecektir.

Bu çalışmanın amacı $\gamma > 0$ tek tamsayıların oranı ve $t \geq t_0$ olmak üzere

$$\left[r(t)\left(\left[x(t)+\int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu\right]''\right)^{\gamma}\right]'$$

$$+\int_c^d q_1(t,\xi)f(x[\phi_1(t,\xi)])d\xi+\int_c^d q_2(t,\eta)g(x[\phi_2(t,\eta)])d\eta=0 \qquad (2.1)$$

şeklindeki üçüncü mertebeden sürekli dağılımlı mixed argümentli neutral diferensiyel denklemi için salınımlılık kriterlerini vermektir. Ayıca genelleştirilmiş Riccati dönüşümü ve integral ortalama tekniğini kullanarak, (2.1) diferensiyel denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu ya da sıfıra yakınsadığını garanti eden yeni bazı yeterli şartlar elde edeceğiz. Yani (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışı ile ilgileneceğiz. Bu bölüm boyunca kullanacağımız aşağıdaki kabulleri verelim.

(H1) $r(t) \in C^1\big([t_0,\infty),(0,\infty)\big)$ olmak üzere

$$r'(t) \geq 0 \text{ ve } \int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}dt=\infty$$

dir.

(H2) $p(t,\mu) \in C([t_0,\infty) \times [a,b],\mathbb{R}),\ 0 \le p(t) \equiv \int_a^b p(t,\mu)d\mu \le P < 1.$

(H3) $\tau(t,\mu) \le t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \min\limits_{\mu\epsilon[a,b]} \tau(t,\mu) = \infty$ olacak şekilde μ için

$\tau(t,\mu) \in C([t_0,\infty) \times [a,b],\mathbb{R})$ azalmayan bir fonksiyondur.

(H4) $\phi_1(t,\xi) \le t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \min\limits_{\xi\epsilon[c,d]} \phi_1(t,\xi) = \infty$ olacak şekilde ξ için

$\phi_1(t,\xi) \in C([t_0,\infty) \times [c,d],\mathbb{R})$ azalmayan bir fonksiyondur.

(H5) $u \neq 0,\ \frac{f(u)}{u^\gamma} \ge \delta > 0$ olmak üzere $f(x), g(x) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ve $f(x), g(x)$ fonksiyonları aynı özelliklere sahiptir.

(H6) $\phi_2(t,\eta) \ge t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \max\limits_{\eta\epsilon[c,d]} \phi_2(t,\eta) = \infty$ olacak şekilde η için

$\phi_2(t,\eta) \in C([t_0,\infty) \times [c,d],\mathbb{R})$ artmayan bir fonksiyondur.

(H7) $q_1(t,\xi), q_2(t,\eta) \in C\big([t_0,\infty) \times [c,d],(0,\infty)\big)$ dir.

Burada

$$z(t) = x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu \tag{2.2}$$

olarak alalım.

Buna göre (2.1) diferensiyel denklemi

$$[r(t)([z(t)]'')^\gamma]' + \int_c^d q_1(t,\xi)f(x[\phi_1(t,\xi)])d\xi + \int_c^d q_2(t,\eta)g(x[\phi_2(t,\eta)])d\eta = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Daha önce de ifade ettiğimiz gibi (2.1) diferensiyel denkleminin bir $x(t)$ çözümü eğer belirli bir yerden sonra ne pozitif ne de negatif ise, salınımlıdır aksi taktirde salınımsızdır denir.

Son yıllarda salınım teorisi ve diferensiyel denklemlerin uygulamalarını içeren çok sayıda çalışmanın[111,112,116,128] yanı sıra üçüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılık kriterleri ile ilgili çalışmalar nispeten azdır ve bu çalışmaların çoğu da gecikmeli denklem ile ilgilidir. Üçüncü mertebeden sürekli dağılımlı gecikmeli değişken içeren neutral diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgilenen çalışmalar[31,33,34,36-38,107,109,111,129] daha az sayıdadır.

Son zamanlarda Baculikova ve Dzurina[112],

$$\left[a(t)\left(\left[x(t) \pm p(t)x\big(\delta(t)\big)\right]''\right)^{\gamma}\right]' + q(t)x^{\gamma}\big(\tau(t)\big) = 0$$

şeklindeki üçüncü mertebeden neutral diferensiyel denklem çiftinin asimptotik özelliklerini çalışmışlardır. Bu diferensiyel denklemde $a(t), q(t), p(t)$ pozitif fonksiyonlar, $\tau(t) \leq t, \delta(t) \leq t$ ve $\gamma > 0$ pozitif tek tamsayıların oranıdır.

Zhang vd.[116],

$$\left[r(t)\left[x(t) + \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu\right]''\right]' + \int_c^d q(t,\xi)f(x[\sigma(t,\xi)])d\xi = 0$$

şeklindeki sürekli dağılımlı gecikmeli değişkenli üçüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemin salınımlılık davranışı ile ilgilenmişlerdir.

Bizim bu bölümde elde edeceğimiz sonuçlar ise, [116] da elde edilen sonuçların geliştirilmiş halidir çünkü $\phi_2(t,\eta) \geq t$ şeklindeki ileri değişkeni ve pozitif tek tamsayıların oranı olmak üzere $\gamma > 0$ sabiti eklenmiştir.

Şimdi teoremler de kullanacağımız lemmaları ifade ve ispat edelim.

Lemma 2.1. $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümü ve $z(t)$, (2.2) de tanımlandığı gibi olsun. Bu taktirde $z(t)$ aşağıdaki iki özellikten sadece birine sahiptir.

Yani yeterince büyük t_1 değerleri için $t \geq t_1$ olmak üzere ya

(I) $z(t) > 0,\ z'(t) > 0,\ z''(t) > 0,$

ya da

(II) $z(t) > 0,\ z'(t) < 0,\ z''(t) > 0.$

dır.

İspat. Kabul edelim ki $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Burada $z(t) > x(t) > 0$ ve

$$[r(t)([z(t)]'')^{\gamma}]' = -\int_c^d q_1(t,\xi) f(x[\phi_1(t,\xi)])d\xi - \int_c^d q_2(t,\eta) g(x[\phi_2(t,\eta)])d\eta < 0$$

olduğu görülebilir. Bu taktirde $r(t)([z(t)]'')^{\gamma}$ azalan bir fonksiyon ve böylece belirli bir yerden sonra tek bir işarete sahiptir, bu durumda $t \geq t_1 \geq t_0$ üzerinde $z''(t)$ ya belirli bir yerden sonra pozitiftir ya da belirli bir yerden sonra negatiftir. $t \geq t_1 \geq t_0$ üzerinde $z''(t) > 0$ olduğunu iddia edelim. Aksi taktirde, kabul edelim ki $z''(t) < 0$ olsun, bu taktirde

$$r(t)\big(z''(t)\big)^{\gamma} \leq -M < 0$$

olacak şekilde $M > 0$ sabiti mevcuttur. Son eşitsizliğin t_1 den t ye integrali alınırsa,

$$z'(t) \leq z'(t_1) - M^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_1}^{t} \left(\frac{1}{r(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} ds$$

elde edilir. $t \to \infty$ iken (H1) den $z'(t) \to -\infty$ ve böylece belirli bir yerden sonra

$z'(t) < 0$ dır. $z''(t) < 0$ ve $z'(t) < 0$ olduğundan $z(t) < 0$ elde ederiz ki bu da bizim $z(t) > 0$ kabulümüz ile çelişir. Bu durumda $z(t)$, (I) ve (II) özelliklerinden sadece birisine sahiptir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.2. $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin (II) özelliğine sahip olan $z(t)$ fonksiyonuna karşılık gelen pozitif bir çözümü olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{v}^{\infty}\left[\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{\infty}\big(q_3(s)+q_4(s)\big)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} dudv=\infty \tag{2.4}$$

ise, bu taktirde $\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{t\to\infty} z(t)=0$ dır. Burada $q_3(t)=K^{\gamma}\delta\int_c^d q_1(t,\xi)d\xi$,

$q_4(t)=K^{\gamma}\delta\int_c^d q_2(t,\eta)d\eta$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat. Kabul edelim ki $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümü olsun. $z(t)>0$ ve $z'(t)<0$ olduğundan bu taktirde sonlu bir $\lim_{t\to\infty} z(t)=I$ değeri mevcuttur. İddia ediyoruz ki $I=0$ olsun. Kabul edelim ki $I>0$ olsun, bu taktirde her $\varepsilon>0$ için $I+\varepsilon>z(t)>I$ dır. $\varepsilon<\frac{I(1-P)}{P}$ seçersek,

$$\begin{aligned} x(t)&=z(t)-\int_a^b p(t,\mu)\big[x\big(\tau(t,\mu)\big)\big]d\mu \\ &>I-\int_a^b p(t,\mu)\,\big[x\big(\tau(t,\mu)\big)\big]d\mu \\ &\geq I-p(t)\big[z\big(\tau(t,a)\big)\big] \\ &\geq I-P(I+\varepsilon)>Kz(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. Burada $K=\frac{I-P(1+\varepsilon)}{I+\varepsilon}>0$ dır. (H5) ve (2.5) kullanılırsa, (2.1) diferensiyel denkleminden

$$\begin{aligned} \big[r(t)\big(z''(t)\big)^{\gamma}\big]' &= -\int_c^d q_1(t,\xi)f(x[\phi_1(t,\xi)])d\xi-\int_c^d q_2(t,\eta)g(x[\phi_2(t,\eta)])d\eta \\ &\leq -\int_c^d q_1(t,\xi)(x[\phi_1(t,\xi)])^{\gamma}\delta d\xi-\int_c^d q_2(t,\eta)(x[\phi_2(t,\eta)])^{\gamma}\delta d\eta \\ &\leq -K^{\gamma}\delta\int_c^d q_1(t,\xi)(z[\phi_1(t,\xi)])^{\gamma}d\xi-K^{\gamma}\delta\int_c^d q_2(t,\eta)(z[\phi_2(t,\eta)])^{\gamma}d\eta \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edelim ki $z(t)$, (II) özelliğine sahiptir, (H4) ve (H6) kabullerinden

$$\left[r(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma}\right]'$$

$$\leq -K^{\gamma}\delta(z[\phi_1(t,d)])^{\gamma}\int_c^d q_1(t,\xi)d\xi - K^{\gamma}\delta(z[\phi_2(t,c)])^{\gamma}\int_c^d q_2(t,\eta)d\eta$$

$$= -q_3(t)\left(z\left(\phi_3(t)\right)\right)^{\gamma} - q_4(t)\left(z\left(\phi_4(t)\right)\right)^{\gamma} \tag{2.6}$$

elde edilir. Burada $\phi_3(t) = \phi_1(t,d), \phi_4(t) = \phi_2(t,c)$ şeklinde tanımlanmıştır.

(2.6) eşitsizliğinin t den ∞ a kadar integrali alınırsa,

$$r(t)\left(z''(t)\right)^{\gamma} \geq \int_t^{\infty}\left(q_3(s)\left(z\left(\phi_3(s)\right)\right)^{\gamma} + q_4(s)\left(z\left(\phi_4(s)\right)\right)^{\gamma}\right)ds$$

olur. $\left(z\left(\phi_3(s)\right)\right)^{\gamma} \geq I^{\gamma}$, $\left(z\left(\phi_4(s)\right)\right)^{\gamma} \geq I^{\gamma}$ eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$z''(t) \geq \frac{I}{r^{\frac{1}{\gamma}}}\left[\int_t^{\infty}\left(q_3(s)+q_4(s)\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} ds \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.7) eşitsizliğinin t den ∞ a kadar integrali alınırsa,

$$-z'(t) \geq I\int_t^{\infty}\left[\frac{1}{r(u)}\int_u^{\infty}\left(q_3(s)+q_4(s)\right)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} du$$

bulunur. Ayrıca son eşitsizliğin de t_1 den ∞ a kadar integrali alınırsa,

$$z(t_1) \geq I\int_{t_1}^{\infty}\int_v^{\infty}\left[\frac{1}{r(u)}\int_u^{\infty}\left(q_3(s)+q_4(s)\right)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} du\,dv$$

elde edilir. Bu ifade (2.4) kabulü ile çelişir. Bu taktirde $I = 0$ olup, ayrıca

$0 \leq x(t) \leq z(t)$ eşitsizliği $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.3[112, Lemma 3]. Kabul edelim ki (t_0,∞) aralığı üzerinde $u(t) > 0$,

$u'(t) \geq 0, u''(t) \leq 0$ olsun. Bu taktirde $t \geq T_l$ değeri için

$$\frac{u\big(\tau(t)\big)}{\tau(t)} \geq l\,\frac{u(t)}{t}$$

olacak şekilde her $l \in (0,1)$ için bir $T_l \geq t_0$ değeri mevcuttur.

İspat. Ortalama değer teoreminden ve $u'(t)$ nin monotonluk özelliğinden

$$u(t) - u\big(\tau(t)\big) \leq u'\big(\tau(t)\big)\big(t - \tau(t)\big)$$

veya

$$\frac{u(t)}{u\big(\tau(t)\big)} \leq 1 + \frac{u'\big(\tau(t)\big)}{u\big(\tau(t)\big)}\big(t - \tau(t)\big) \tag{2.8}$$

olduğu görülür. Ortalama değer teoremini bir kez daha kullanırsak,

$$u\big(\tau(t)\big) \geq u\big(\tau(t)\big) - u(t_0) \geq u'\big(\tau(t)\big)(\tau(t) - t_0)$$

elde edilir. $t \geq T_l$ değeri için

$$\frac{u\big(\tau(t)\big)}{u'\big(\tau(t)\big)} \geq l\tau(t) \tag{2.9}$$

olacak şekilde her $l \in (0,1)$ için bir $T_l \geq t_0$ değeri mevcuttur. (2.8) eşitsizliği (2.9) ile birlikte dikkate alınırsa,

$$\frac{u(t)}{u\big(\tau(t)\big)} \leq 1 + \frac{1}{l\tau(t)}\big(t - \tau(t)\big) \leq \frac{t}{l\tau(t)}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.4[112, Lemma 4]. Kabul edelim ki (T_l, ∞) aralığı üzerinde $z(t) > 0$,

$z'(t) > 0, z''(t) > 0, z'''(t) \leq 0$ olsun. Bu taktirde $t \geq T_l$ için

$$\frac{z(t)}{z'(t)} \geq \frac{t - T_l}{2}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. İlk olarak

$$Z(t) = (t - T_l)z(t) - \frac{(t - T_l)^2}{2} z'(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde

$$Z(T_l) = 0 \text{ ve } Z'(t) = z(t) - \tfrac{(t-T_l)^2}{2} z''(t)$$

dir. $Z(t) > 0$ olduğunu ispatlayacağız. Taylor teoreminden ve $z''(t)$ artmayan olduğundan

$$z(t) \geq z(T_l) + (t - T_l)z'(T_l) + \frac{(t - T_l)^2}{2} z''(t)$$

elde edilir ki bu eşitsizlik

$$Z'(t) = z(t) - \frac{(t - T_l)^2}{2} z''(t) \geq z(T_l) + (t - T_l)z'(T_l) > 0$$

olmasını gerektirir. $Z(T_l) = 0$ olduğundan $t \geq T_l$ için $Z(t) > 0$ dır, bu da istenen eşitsizliği sağlar.

Temel Sonuçlar

Bu kısımda (2.1) diferensiyel denklemi için bazı yeni salınım kriterleri vereceğiz.

Teorem 2.1. Kabul edelim ki (2.4) şartı sağlansın ve $\rho \in C^1\big([t_0, \infty), (0, \infty)\big)$ şeklinde pozitif bir fonksiyon mevcut olsun. $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty} sup \int_T^t \left[P_l(s) - \frac{r(s)\big(\rho'(s)\big)^{\gamma+1}}{(\gamma + 1)^{\gamma+1}\rho^\gamma(s)}\right] ds = \infty \tag{2.10}$$

şartı sağlanıyor ise, bu taktirde (2.1) diferensiyel denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da sıfıra yakınsar. Burada

$$q_5(t) = \delta(1 - P)^\gamma \int_c^d q_1(t, \xi) d\xi, \;\; \phi_5(t) = \phi_1(t, c)$$

ve

$$q_6(t) = \delta(1-P)^\gamma \int_c^d q_2(t,\eta)d\eta, \quad \phi_6(t) = \phi_2(t,d)$$

olmak üzere

$$P_l(t) = q_5(t)\rho(t)l^\gamma \left(\frac{\phi_5(t)}{t}\right)^\gamma \left(\frac{\phi_5(t)-T_l}{2}\right)^\gamma$$

$$+q_6(t)\rho(t)l^\gamma \left(\frac{\phi_6(t)}{t}\right)^\gamma \left(\frac{\phi_6(t)-T_l}{2}\right)^\gamma \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat. Kabul edelim ki $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın her $t_1 \in [t_0,\infty)$ ve $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $(t,\mu) \in [t_1,\infty) \times [a,b]$ için $x(\tau(t,\mu)) > 0$ ve $(t,\xi) \in [t_1,\infty) \times [c,d]$ için $x(\phi_1(t,\xi)) > 0$ aynı şekilde $(t,\eta) \in [t_1,\infty) \times [c,d]$ için $x(\phi_2(t,\eta)) > 0$ olduğunu iddia edebiliriz ve $z(t)$ fonksiyonu (2.2) de tanımlandığı gibidir. Lemma 2.1 den $z(t)$, (I) veya (II) özelliğine sahiptir.

$z(t)$, (I) özelliğine sahip olduğunda,

$$x(t) = z(t) - \int_a^b p(t,\mu)x[\tau(t,\mu)]d\mu$$

$$\geq z(t) - \int_a^b p(t,\mu)z[\tau(t,\mu)]d\mu$$

$$\geq z(t) - z[\tau(t,b)]\int_a^b p(t,\mu)d\mu$$

$$\geq \left(1 - \int_a^b p(t,\mu)d\mu\right)z(t)$$

$$\geq (1-P)z(t) \tag{2.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (H4), (H5) ve (H6) kabulleri kullanılırsa,

$$[r(t)([z(t)]'')^{\gamma}]' = -\int_c^d q_1(t,\xi)f(x[\phi_1(t,\xi)])d\xi - \int_c^d q_2(t,\eta)g(x[\phi_2(t,\eta)])d\eta$$

$$\leq -\delta(1-P)^{\gamma}\int_c^d q_1(t,\xi)z^{\gamma}\big(\phi_1(t,\xi)\big)d\xi - \delta(1-P)^{\gamma}\int_c^d q_2(t,\eta)z^{\gamma}\big(\phi_2(t,\eta)\big)d\eta$$

$$\leq -\delta(1-P)^{\gamma}z^{\gamma}\big(\phi_1(t,c)\big)\int_c^d q_1(t,\xi)d\xi - \delta(1-P)^{\gamma}z^{\gamma}\big(\phi_2(t,d)\big)\int_c^d q_2(t,\eta)d\eta$$

$$\leq -q_5(t)z^{\gamma}\big(\phi_5(t)\big) - q_6(t)z^{\gamma}\big(\phi_6(t)\big) \tag{2.13}$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca

$$[r(t)([z(t)]'')^{\gamma}]' \leq 0$$

dır. Son eşitsizlik $r'(t) \geq 0$ ile birlikte düşünülürse, $z'''(t) \leq 0$ elde edilir. Böylece $t \in [T,\infty)$ için $z(t)$ nin $z\big(\tau(t,\mu)\big) > 0,\ z\big(\phi_1(t,\xi)\big) > 0,\ z\big(\phi_2(t,\eta)\big) > 0,\ z'(t) > 0,$ $z''(t) > 0,\ z'''(t) \leq 0$ ifadelerini sağlayacak şekilde bir $T \geq t_0$ değeri mevcuttur.

Riccati dönüşümü ile $w(t)$ fonksiyonunu

$$w(t) = \rho(t)\frac{r(t)([z(t)]'')^{\gamma}}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlayalım.

Dolayısıyla $w(t)$ fonksiyonunun pozitif olduğu ve

$$w'(t) = \left(\frac{\rho(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}}\right)' r(t)([z(t)]'')^{\gamma} + (r(t)([z(t)]'')^{\gamma})'\frac{\rho(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}}$$

$$= \frac{\rho'(t)([z(t)]'')^{\gamma}r(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}} - \frac{(([z(t)]')^{\gamma})'\rho(t)r(t)([z(t)]'')^{\gamma}}{([z(t)]')^{2\gamma}}$$

$$+(r(t)([z(t)]'')^{\gamma})'\frac{\rho(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}}$$

eşitliğini sağladığı görülür. $w(t)$ fonksiyonunun tanımından ve (2.13) eşitsizliğinden

$$w'(t) \le \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\gamma\big(z'(t)\big)^{\gamma-1}[z(t)]''\rho(t)r(t)([z(t)]'')^{\gamma}}{([z(t)]')^{2\gamma}}$$

$$-\big[q_5(t)z^{\gamma}\big(\phi_5(t)\big) + q_6(t)z^{\gamma}\big(\phi_6(t)\big)\big]\frac{\rho(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}}$$

$$\le \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \gamma\rho(t)\frac{r(t)([z(t)]'')^{\gamma+1}}{\big(z'(t)\big)^{\gamma+1}}$$

$$-\big[q_5(t)z^{\gamma}\big(\phi_5(t)\big) + q_6(t)z^{\gamma}\big(\phi_6(t)\big)\big]\frac{\rho(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}}$$

$$\le \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\gamma}{\big(\rho(t)r(t)\big)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

$$-\big[q_5(t)z^{\gamma}\big(\phi_5(t)\big) + q_6(t)z^{\gamma}\big(\phi_6(t)\big)\big]\frac{\rho(t)}{\big(z'(t)\big)^{\gamma}} \qquad (2.15)$$

elde edilir. $u(t) = z'(t)$ ile birlikte Lemma 2.3 den $l \in (0,1)$ için $t \ge T_l$ olmak üzere

$$\frac{1}{z'(t)} \ge l\frac{\tau(t)}{t}\frac{1}{z'\big(\tau(t)\big)}$$

olduğu görülür ki bu (2.15) eşitsizliği ile birlikte

$$w'(t) \le \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\gamma}{\big(\rho(t)r(t)\big)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - q_5(t)\rho(t)l^{\gamma}\left(\frac{\phi_5(t)}{t}\right)^{\gamma}\frac{z^{\gamma}\big(\phi_5(t)\big)}{\Big(z'\big(\phi_5(t)\big)\Big)^{\gamma}}$$

$$-q_6(t)\rho(t)l^{\gamma}\left(\frac{\phi_6(t)}{t}\right)^{\gamma}\frac{z^{\gamma}\big(\phi_6(t)\big)}{\Big(z'\big(\phi_6(t)\big)\Big)^{\gamma}}$$

eşitsizliğini verir. Lemma 2.4 den

$$z(t) \ge \frac{t - T_l}{2} z'(t)$$

olduğu kullanılırsa,

$$w'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\gamma}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - q_5(t)\rho(t)l^{\gamma} \left(\frac{\phi_5(t)}{t}\right)^{\gamma} \left(\frac{\phi_5(t) - T_l}{2}\right)^{\gamma}$$

$$-q_6(t)\rho(t)l^{\gamma} \left(\frac{\phi_6(t)}{t}\right)^{\gamma} \left(\frac{\phi_6(t) - T_l}{2}\right)^{\gamma} \tag{2.16}$$

elde edilir. (2.11) ifadesinden

$$w'(t) \leq -P_l(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\gamma}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\lambda} \tag{2.17}$$

eşitsizliği bulunur, burada $\lambda = \frac{\gamma+1}{\gamma}$ dır. $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ olacak şekilde

$$A^{\lambda} = \frac{\gamma}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\lambda}, \qquad B^{\lambda-1} = \frac{\rho'(t) r^{\frac{1}{\gamma+1}}(t) (\gamma)^{\frac{1}{\gamma+1}}}{(\gamma+1)\rho^{\frac{1}{\lambda}}(t)}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu taktirde

$$\lambda A B^{\lambda-1} - A^{\lambda} \leq (\lambda - 1) B^{\lambda} \tag{2.18}$$

eşitsizliği[130] kullanılarak,

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \frac{\gamma}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\lambda} \leq \frac{r(t)\left(\rho'(t)\right)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\rho^{\gamma}(t)}$$

sağlanır. Son eşitsizlikten ve (2.17) den

$$w'(t) \leq -P_l(t) + \frac{r(t)\left(\rho'(t)\right)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\rho^{\gamma}(t)}$$

bulunur. Her iki tarafın T den t ye integrali alınırsa,

$$\int_T^t \left[P_l(s) - \frac{r(s)\left(\rho'(s)\right)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\rho^{\gamma}(s)}\right] ds \leq w(T) - w(t) \leq w(T)$$

elde edilir ki bu (2.10) kabulü ile çelişir. Eğer $z(t)$, (II) özelliğine sahip ise, (2.4) sağlandığından bu taktirde Lemma 2.2 nin şartları sağlanır. Bu durumda $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Böylece Teorem 2.1 in ispatı tamamlanır.

Uyarı 2.1. Teorem 2.1 den $\rho(t)$ nin farklı seçimleri ile birlikte (2.1) denkleminin salınımlılığı için farklı şartlar elde edebiliriz.

Tanım 2.1. $D \equiv \{(t,s): t \geq s \geq t_0\}$; $D_0 \equiv \{(t,s): t > s \geq t_0\}$ olsun. $H \in C(D,R)$ fonksiyonu eğer $t \geq t_0$ için $H(t,t) = 0$, $(t,s) \in D_0$ için $H(t,s) > 0$ ve $\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \leq 0$ özelliklerini sağlıyor ise, X sınıfına aittir$(H \in X)$ denir.

Teorem 2.2. Kabul edelim ki (2.4) sağlansın,

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) = -\frac{h(t,s)}{\rho(s)} \big(H(t,s)\big)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \tag{2.19}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{1}{H(t,t_2)} \int_{t_2}^{t} \left[H(t,s) P_l(s) - \frac{\big(h_-(t,s)\big)^{\gamma+1} r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1} \rho^{\gamma}} \right] ds = \infty \tag{2.20}$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde $\rho \in C^1\big([t_0,\infty),(0,\infty)\big)$, $h \in C(D_0,R)$ ve $H \in X$ fonksiyonları mevcuttur. Bu taktirde (2.1) diferensiyel denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da sıfıra yakınsar. Burada $h_-(t) = \max\{0, -h(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat. Kabul edelim ki $x(t)$, (2.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü ve $z(t)$ fonksiyonu (2.2) de tanımlandığı gibi olsun. Eğer Lemma 2.1 deki durum (I) sağlanıyor ve Teorem 2.1 in ispatındaki gibi hareket edilirse, $t > t_0$ için (2.17) eşitsizliği sağlanır. (2.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $H(t,s)$ fonksiyonu ile çarpılır ve $t \geq t_2 \geq t_0$ için t_2 den t ye integrali alınırsa,

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s) P_l(s) ds \leq -\int_{t_2}^{t} H(t,s) w'(s) ds + \int_{t_2}^{t} H(t,s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s) ds$$

$$-\int_{t_2}^{t} H(t,s)\frac{\gamma}{\left(\rho(s)r(s)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}w^{\lambda}(s)ds$$

$$= H(t,t_2)w(t_2) + \int_{t_2}^{t} \frac{\partial H(t,s)}{\partial s}w(s)ds + \int_{t_2}^{t} H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}w(s)ds$$

$$-\int_{t_2}^{t} H(t,s)\frac{\gamma}{\left(\rho(s)r(s)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}w^{\lambda}(s)ds$$

$$= H(t,t_2)w(t_2)$$

$$+\int_{t_2}^{t}\left[\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}H(t,s)\right]w(s)ds - \int_{t_2}^{t} H(t,s)\frac{\gamma}{\left(\rho(s)r(s)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}w^{\lambda}(s)ds$$

elde edilir. (2.19) eşitliği kullanılırsa,

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)\,P_l(s)ds = H(t,t_2)w(t_2) + \int_{t_2}^{t}\left[-\frac{h(t,s)}{\rho(s)}\left(H(t,s)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]w(s)ds$$

$$-\int_{t_2}^{t} H(t,s)\frac{\gamma}{\left(\rho(s)r(s)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}w^{\lambda}(s)ds$$

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)\,P_l(s)ds = H(t,t_2)w(t_2) + \int_{t_2}^{t}\left[\frac{h_{-}(t,s)}{\rho(s)}\left(H(t,s)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right]w(s)ds$$

$$-\int_{t_2}^{t} H(t,s)\frac{\gamma}{\left(\rho(s)r(s)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}w^{\lambda}(s)ds \qquad (2.21)$$

bulunur. Bu nedenle Teorem 2.1 de olduğu gibi

$$A^{\lambda} = H(t,s)\frac{\gamma}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}w^{\lambda}(t), \qquad B^{\lambda-1} = \frac{h_{-}(t,s)\left(r(t)\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}}{(\gamma+1)\left(\rho(t)\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\lambda A B^{\lambda-1} - A^{\lambda} \leq (\lambda - 1) B^{\lambda}$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_{t_2}^{t} \left[\frac{h_-(t,s)}{\rho(s)} \big(H(t,s)\big)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \right] w(s) ds - \int_{t_2}^{t} H(t,s) \frac{\gamma}{\big(\rho(s) r(s)\big)^{\frac{1}{\gamma}}} w^{\lambda}(s) ds$$

$$\leq \int_{t_2}^{t} \frac{\big(h_-(t,s)\big)^{\gamma+1} r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1} \rho^{\gamma}} ds$$

elde edilir. Son eşitsizlikten ve (2.21) ifadesinden

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)\, P_l(s) ds \leq H(t,t_2) w(t_2) + \int_{t_2}^{t} \frac{\big(h_-(t,s)\big)^{\gamma+1} r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1} \rho^{\gamma}} ds$$

olduğu bulunur ve bu da

$$\frac{1}{H(t,t_2)} \int_{t_2}^{t} \left[H(t,s) P_l(s) - \frac{\big(h_-(t,s)\big)^{\gamma+1} r(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1} \rho^{\gamma}} \right] ds \leq w(t_2)$$

olmasını gerektirir. Son eşitsizlik (2.20) kabulü ile çelişir. Böylece Teorem 2.2 nin ispatı tamamlanır.

Örnek 2.1. Aşağıdaki üçüncü mertebeden

$$\left(t^2 \left[\left(x(t) + \int_a^b \frac{\mu}{t^2} x\left(\frac{t}{2\mu}\right) d\mu \right)'' \right]^3 \right)' + \int_c^d \frac{\xi}{t^3} f\left(x\left(\frac{t+\xi}{2}\right) \right) d\xi$$

$$+ \int_c^d \frac{\eta}{t^2} g\big(x(t+e^{-\eta})\big) d\eta = 0, \;\; t > 0 \qquad (2.22)$$

neutral diferensiyel denklemi göz önüne alalım, burada $r(t) = t^2,\ \gamma = 3, p(t,\mu) = \frac{\mu}{t^2}$, $\tau(t,\mu) = \frac{t}{2\mu}, q_1(t,\xi) = \frac{\xi}{t^3}, \phi_1(t,\xi) = \frac{t+\xi}{2}, q_2(t,\eta) = \frac{\eta}{t^2}, \phi_2(t,\eta) = t + e^{-\eta}$ şeklindedir. Burada (H_1) ve (2.5) kabulünün sağlandığı aşikardır.

Yani

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{3}}dt=\infty$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{v}^{\infty}\left[\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{\infty}\big(q_3(s)+q_4(s)\big)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}dudv=\int_{t_0}^{\infty}\int_{v}^{\infty}\left[\frac{1}{u^2}\int_{u}^{\infty}k\left(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}\right)ds\right]^{\frac{1}{3}}dudv=\infty$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $q_3(t)=K^{\gamma}\delta\int_c^d q_1(t,\xi)d\xi=\frac{K^3\delta}{2t^3}(d^2-c^2)\cong k\,t^{-3}$ (k bir sabittir), $q_4(t)=K^{\gamma}\delta\int_c^d q_1(t,\eta)d\eta=\frac{K^3\delta}{2t^2}(d^2-c^2)\cong kt^{-2}$ (k bir sabittir) şeklinde tanımlanmıştır.

Böylece, Teorem 2.1 den $\rho(t)=t$ alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} sup\int_{T}^{t}\left[P_l(s)-\frac{r(s)\big(\rho'(s)\big)^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds$$

$$=\int_{T}^{t}\left[\frac{k_1}{2^{12}}s(s+c)^3(s+c-2T_l)^3+\frac{k_1}{2^6}s^{-2}(s+e^{-d})^3(s+e^{-d}-T_l)^3-\frac{1}{4s}\right]ds=\infty$$

elde edilir. Burada

$$P_l(t)=q_5(t)\rho(t)l^{\gamma}\left(\frac{\phi_5(t)}{t}\right)^{\gamma}\left(\frac{\phi_5(t)-T_l}{2}\right)^{\gamma}+q_6(t)\rho(t)l^{\gamma}\left(\frac{\phi_6(t)}{t}\right)^{\gamma}\left(\frac{\phi_6(t)-T_l}{2}\right)^{\gamma}$$

$$=k_1t^{-3}t\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{\frac{t+c}{2}}{t}\right)^3\left(\frac{\frac{t+c}{2}-T_l}{2}\right)^3+k_1t^{-2}t\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{t+e^{-d}}{t}\right)^3\left(\frac{t+e^{-d}-T_l}{2}\right)^3$$

$$=\frac{k_1}{2^6 4^3}t(t+c)^3(t+c-2T_l)^3+\frac{k_1}{2^6}\frac{1}{t^2}(t+e^{-d})^3(t+e^{-d}-T_l)^3$$

ve

$$q_5(t) = \delta(1-P)^{\gamma}\int_c^d q_1(t,\xi)d\xi = 3\left(1-\frac{3}{4}\right)^3\int_c^d \frac{\xi}{t^3}d\xi = 3\frac{1}{4^3t^3 2}(d^2-c^2) \cong k_1 t^{-3}$$

(k_1 bir sabittir),

$$q_6(t) = \delta(1-P)^{\gamma}\int_c^d q_2(t,\eta)d\eta = 3\left(1-\frac{3}{4}\right)^3\int_c^d \frac{\eta}{t^2}d\eta = 3\frac{1}{4^3t^2 2}(d^2-c^2) \cong k_1\, t^{-2}$$

(k_1 bir sabittir) şeklindedir. Bu nedenle Teorem 2.1 den, (2.22) diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlıdır veya sıfıra yakınsar.

3. BÖLÜM

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN POZİTİF VE NEGATİF KATSAYILI LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM SONUÇLARI

Son yıllarda birinci ve ikinci mertebeden pozitif ve negatif katsayılı gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışının çalışılması yoğun bir ilgi oluşturmuştur[131-137]. Biz bu bölümde

$$\left(r_1(t)\left(x(t)+p(t)x\big(\sigma(t)\big)\right)''\right)''+\sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)\,G\left(x\big(\tau_i(t)\big)\right)-\sum_{i=1}^{\ell} h_i(t)H\left(x\big(\rho_i(t)\big)\right)=0 \tag{3.1}$$

şeklindeki dördüncü mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemini inceledik. Burada $i\in\{1,2,\dots,\ell\}$ olmak üzere $r_1,\sigma,q_i,\tau_i,h_i,\rho_i$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif olarak tanımlansınlar, $p\in C([0,\infty),\mathbb{R})$ dir. $d,b\neq 0$ için $dG(d)>0, bH(b)>0$ olacak şekilde $G,H\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fonksiyonları mevcut ve H sınırlı, G ise azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca $\sigma_1<\sigma(t)\leq t$ olacak şekilde σ_1 pozitif bir sabit ve $\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty$ şeklindedir. $i\in\{1,2,\dots,\ell\}$ için $\tau(t)\leq\tau_i(t)\leq t$ olacak şekilde $\tau\in C([0,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu mevcut ve $\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$ dur. Benzer şekilde

$i\in\{1,2,\dots,\ell\}$ için $\rho(t)\leq\rho_i(t)\leq t$ olacak şekilde $\rho\in C([0,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu mevcut ve $\lim_{t\to\infty}\rho(t)=\infty$ dur.

Bu bölümdeki amacımız ise, (3.1) diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılık özelliklerinin ve asimptotik davranışlarının

$$(H_1) \qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}_1(\mathrm{t})}\mathrm{dt} < \infty$$

kabulü altında araştırılmasıdır.

Eğer (3.1) denkleminde $\sigma(t) = t - \tau$ ve

$$\sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)G\Big(x\big(\tau_i(t)\big)\Big) - \sum_{i=1}^{\ell} h_i(t)H\Big(x\big(\rho_i(t)\big)\Big)$$

ifadesi yerine $q(t)G\big(x(t-\alpha)\big)$ alınırsa, bu taktirde denklem

$$\Big(r_1(t)\big(x(t) + p(t)x(t-\tau)\big)''\Big)'' + q(t)G\big(x(t-\alpha)\big) = 0 \qquad (3.2)$$

denklemine indirgenir. Burada $\tau, \alpha > 0$ şeklinde sabitler, $d \neq 0, dG(d) > 0$ olacak şekilde $G \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonu tanımlanmış ve G azalmayan bir fonksiyondur. Parhi ve Tripathy[124] bu diferensiyel denklemi yine aynı (H_1) kabulü altında çalışmışlardır.

Tripathy vd.[126] ise,

$$\Big(r(t)\big(y(t) + p(t)y(t-\tau)\big)''\Big)'' + q(t)G\big(y(t-\alpha)\big) - h(t)H\big(y(t-\beta)\big) = 0 \qquad (3.3)$$

formundaki dördüncü mertebeden lineer olmayan neutral diferensiyel denklemini $\tau, \alpha, \beta > 0$ şeklinde sabitler ve G, H fonksiyonları yukarıdaki kabullere sahip olacak şekilde alarak incelemişlerdir. Ayrıca Tripathy vd. (3.3) denklemini bizim (H_1) kabulümüze ilaveten

$$(H_2) \qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}_1(\mathrm{s})} \int_{\mathrm{s}}^\infty \mathrm{th(t)dtds} < \infty$$

kabulü altında ele almışlardır. (3.1) diferensiyel denklemi (3.2) ve (3.3) diferensiyel denklemlerine göre daha genel olduğundan çalışılmaya değerdir. Ayrıca bizim çalışmamız Tripathy vd.[126] nin çalışmasına göre bazı salınımlılık sonuçlarının daha genel ve geliştirilmiş halidir. Bu çalışmada $\eta = max\{\sigma, \tau_i, \rho_i\}$ ve her $t \geq t_0$ için

$sup\{x(t) : t \geq t_0\} > 0$ olmak üzere (3.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü olarak $x \in C([-\eta, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu kastedilmektedir. (3.1) diferensiyel denkleminin bir $x(t)$ çözümünün salınımlılık tanımı için ise, ne belirli bir yerden sonra pozitif ne de belirli bir yerden sonra negatiftir ifadesi kullanılabilir.

Şimdi teoremlerin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmaları vererek başlayalım.

Lemma 3.1[123]. (H_1) kabulü sağlansın. Eğer yeterince büyük t değerleri için $r_1(t)f''(t)$ sürekli iki kez diferensiyellenebilir ve

$$\left(r_1(t)f''(t)\right)'' \leq 0, \qquad \not\equiv 0$$

olacak şekilde $f(t)$ belirli bir yerden sonra pozitif iki kez sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise, bu taktirde yeterince büyük t değerleri için aşağıdaki durumlardan bir tanesi sağlanır.

(a) $f'(t) > 0, f''(t) > 0$ ve $\left(r_1(t)f''(t)\right)' > 0,$

(b) $f'(t) > 0, f''(t) < 0$ ve $\left(r_1(t)f''(t)\right)' > 0,$

(c) $f'(t) > 0, f''(t) < 0$ ve $\left(r_1(t)f''(t)\right)' < 0,$

(d) $f'(t) < 0, f''(t) > 0$ ve $\left(r_1(t)f''(t)\right)' > 0.$

Lemma 3.2[123]. Kabul edelim ki Lemma 3.1 in şartları sağlansın. Bu taktirde aşağıdaki durumlar geçerlidir.

(i) Lemma 3.1 in (c) durumunda yeterince büyük t değerleri için aşağıdaki

$$f'(t) \geq -\left(r_1(t)f''(t)\right)'R(t), f'(t) \geq -r_1(t)f''(t)\int_t^\infty \frac{ds}{r_1(s)},$$

$$f(t) \geq ktf'(t) \text{ ve } f(t) \geq -k\left(r_1(t)f''(t)\right)'tR(t)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Burada $k > 0$ bir sabit ve $R(t) = \int_t^\infty \frac{s-t}{r_1(s)} ds$ şeklinde tanımlanmıştır.

(ii) Lemma 3.1 in (d) durumunda yeterince büyük t değerleri için

$f(t) \geq r_1(t)f''(t)R(t)$ eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.3[123]. Eğer Lemma 3.1 in şartları sağlanıyor ise, bu durumda yeterince büyük t değerleri için $k_1 R(t) \leq f(t) \leq k_2 t$ olacak şekilde $k_1 > 0$ ve $k_2 > 0$ sabitleri mevcuttur.

Lemma 3.4[123]. (H_1) kabulü sağlansın. Kabul edelim ki yeterince büyük t değerleri için $\left(r_1(t)z''(t)\right)'' \leq 0,\ \not\equiv 0$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığı üzerinde reel değerli iki kez sürekli diferensiyellenebilir bir $z(t)$ fonksiyonu mevcuttur. Eğer belirli bir yerden sonra $z(t) > 0$ ise, bu taktirde yeterince büyük t değerleri için aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır.

(a) $z'(t) > 0, z''(t) > 0$ ve $\left(r_1(t)z''(t)\right)' > 0$,

(b) $z'(t) > 0, z''(t) < 0$ ve $\left(r_1(t)z''(t)\right)' > 0$,

(c) $z'(t) > 0, z''(t) < 0$ ve $\left(r_1(t)z''(t)\right)' < 0$,

(d) $z'(t) < 0, z''(t) > 0$ ve $\left(r_1(t)z''(t)\right)' > 0$.

Eğer yeterince büyük t değerleri için $z(t) < 0$ ise, bu durumda da yeterince büyük t değerleri için ya (b)-(d) durumlarından birisi ya da

(e) $z'(t) < 0, z''(t) < 0$ ve $\left(r_1(t)z''(t)\right)' > 0$,

(f) $z'(t) < 0, z''(t) < 0$ ve $\left(r_1(t)z''(t)\right)' < 0$.

durumlarından birisi sağlanır.

Lemma 3.5[138]. $t \geq t_1 > \tau$ için $x(t) > 0$, $t \geq \tau \geq 0$ için de

$z(t) = x(t) + p(t)x(t-\tau)$ olacak şekilde $p, x, z \in C([0,\infty), \mathbb{R})$ fonksiyonları ve $\lim_{t\to\infty} inf\, x(t) = 0, \lim_{t\to\infty} z(t) = L$ değerleri mevcut olsun. Ayrıca $1 \leq i \leq 4$ için p_i değerleri sabit olmak üzere $p(t)$ fonksiyonu

(i) $0 \leq p(t) \leq p_1 < 1$,

(ii) $1 < p_2 \leq p(t) \leq p_3$,

(iii) $p_4 \leq p(t) \leq 0$.

şartlarından bir tanesini sağlar. Bu taktirde $L = 0$ dır.

Temel Sonuçlar

Şimdi (H_1) kabulü altında (3.1) diferensiyel denkleminin çözümlerinin sınırsız salınımı ve asimptotik davranışları için oluşturduğumuz yeterli şartları verelim. Bu amaç için aşağıdaki kabulleri yapalım.

(H_3) $d, b \in \mathbb{R}, d, b > 0$ için $G(d) + G(b) \geq \lambda G(d + b)$ olacak şekilde $\lambda > 0$ değeri mevcuttur,

(H_4) $d, b \in \mathbb{R}$ için $G(db) = G(d)G(b)$,

(H_5) $d \in \mathbb{R}$ için $G(-d) = -G(d)$, ve $H(-d) = -H(d)$,

(H_6) $t \geq \sigma_1$ için $\int_{\sigma_1}^{\infty} Q(t)dt = \infty, Q(t) = \min\{q(t), q(\sigma(t))\}$,

(H_7) $\gamma > 1, t_0 \geq \eta > 0$ için $\int_{t_0}^{\infty} b(t)Q(t) \sum_{i=1}^{\ell} G\left(R(\tau_i(t))\right) dt = \infty$,

burada b(t)=min$\{R^{\gamma}(t), R^{\gamma}\left(\sigma(t)\right)\}$ şeklinde tanımlansın,

(H_8) $\gamma > 1, t_0 \geq \eta > 0$ için $\int_{t_0}^{\infty} R^{\gamma}(t) \sum_{i=1}^{\ell} G\left(R(\tau_i(t))\right) q_i(t)dt = \infty$ dur.

Uyarı 3.1.

$$R(t) < \int_t^{\infty} \frac{s}{r_1(s)} ds$$

olduğundan, (H_1) kabulünden dolayı $t \to \infty$ iken $R(t) \to 0$ sonucuna varabiliriz.

Uyarı 3.2. (H_4) kabulü $G(-d) = G(-1)G(d) = -G(d)$ olmasını gerektirir. Aslında $G(1)G(1) = G(1)$ ve $G(1) > 0$ olması $G(1) = 1$ olmasını gerektirir. Ayrıca $G(-1)G(-1) = G(1) = 1$ olması da $\left(G(-1)\right)^2 = 1$ olmasıdır. $G(-1) < 0$ olduğundan $G(-1) = -1$ sonucunu çıkarabiliriz. Böylece

$$G(-d) = G(-1)G(d) = -G(d)$$

dir. Dahası $d, b > 0$ için $G(db) = G(d)G(b)$ ve $d \in \mathbb{R}$ için $G(-d) = -G(d)$ olması her $x, y \in \mathbb{R}$ için $G(xy) = G(x)G(y)$ olması anlamına gelir. Bütün bunlara ilaveten

$a \geq 0, b > 0, \gamma \geq 0, \mu \geq 0$ ve $a + b = 1$ olacak şekilde $G(u) = (a + b|u|^{\gamma})|u|^{\mu} sgnu$ ifadesi mevcuttur. Ayrıca G fonksiyonu $(H_3), (H_4)$ ve (H_5) özelliklerini sağlar.

Teorem 3.1. $0 \leq p(t) \leq a < 1$ veya $1 < p(t) \leq a < \infty$ olsun. Kabul edelim ki (H_1)-(H_7) şartları sağlansın. Bu taktirde (3.1) diferensiyel denkleminin $\sigma(t) = t - \sigma_1$ olmak üzere her çözümü ya salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. Uyarı 3.1 den dolayı $t \to \infty$ iken $b(t) \to 0$ a gider. Böylece (H_7) kabulü

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(t) \sum_{i=1}^{\ell} G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right) dt = \infty \tag{3.3}$$

olmasını gerektirir. Kabul edelim ki $x(t)$, (3.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu taktirde $t \geq t_0 > \rho$ için ya $x(t) > 0$ ya da $x(t) < 0$ dır. $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. Burada

$$z(t) = x(t) + p(t)x\big(\sigma(t)\big) \tag{3.4}$$

$$K(t) = \int_{t}^{\infty} \frac{s-t}{r_1(s)} \int_{s}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell} (\theta - s) h_i(\theta) H\left(x\big(\rho_i(\theta)\big)\right) d\theta ds \tag{3.5}$$

ve

$$v(t) = z(t) - K(t) = x(t) + p(t)x\big(\sigma(t)\big) - K(t) \tag{3.6}$$

alınırsa, $t \geq t_0 + \sigma_1$ için

$$\big(r_1(t)v''(t)\big)'' = -\sum_{i=1}^{\ell} q_i(t) G\left(x\big(\tau_i(t)\big)\right) \leq 0, \qquad \not\equiv 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. Böylece $t \geq t_0 + \sigma_1$ için $v(t), v'(t), \big(r_1(t)v''(t)\big)$ ve $\big(r_1(t)v''(t)\big)'$ fonksiyonları $[t_1, \infty)$ aralığında monotondur. Bu durumda $t \geq t_1$ için karşımıza iki durum çıkar, yani $v(t) > 0$ veya $v(t) < 0$ dır. Kabul edelim ki ilk durum sağlansın. Lemma 3.1 den (a), (b), (c), (d) durumlarından herhangi bir tanesi sağlanır. (a), (b) ve (d) durumlarından birinin sağlandığını varsayalım. $(H_3), (H_4)$ ve (H_6) kabulleri kullanılırsa, (3.1) diferensiyel denklemi $t \geq t_2 > t_1$ için

$$0 = \left(r_1(t)v''(t)\right)'' + \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)G\left(x\left(\tau_i(t)\right)\right) + G(a)\left(r_1\left(\sigma(t)\right)v''\left(\sigma(t)\right)\right)''$$

$$+G(a)\sum_{i=1}^{\ell} q_i\left(\sigma(t)\right) G\left(x\left(\tau_i\left(\sigma(t)\right)\right)\right)$$

$$\geq \left(r_1(t)v''(t)\right)'' + G(a)\left(r_1\left(\sigma(t)\right)v''\left(\sigma(t)\right)\right)''$$

$$+\lambda Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(x\left(\tau_i(t)\right) + ax\left(\tau_i\left(\sigma(t)\right)\right)\right)$$

$$\geq \left(r_1(t)v''(t)\right)'' + G(a)\left(r_1\left(\sigma(t)\right)v''\left(\sigma(t)\right)\right)'' + \lambda Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(z\left(\tau_i(t)\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $z(t) \leq x(t) + ax\left(\sigma(t)\right)$ olduğunu kullandık. (3.5) eşitliğinden $K(t) > 0, K'(t) < 0$ olduğu görülür ve böylece de (H_2) kabulünden dolayı $\lim_{t\to\infty} K(t)$ mevcuttur. Ayrıca $t \geq t_1$ için $v(t) > 0$ eşitsizliği $t \geq t_2$ için $v(t) > z(t)$ olmasını gerektirir ve böylece de son eşitsizlik $t \geq t_2$ için

$$\left(r_1(t)v''(t)\right)'' + G(a)\left(r_1\left(\sigma(t)\right)v''\left(\sigma(t)\right)\right)'' + \lambda Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(v\left(\tau_i(t)\right)\right) \leq 0$$

olmasını veya $t \geq t_3 > t_2$ için (H_4) kabulü ve Lemma 3.3 den

$$\left(r_1(t)v''(t)\right)'' + G(a)\left(r_1\left(\sigma(t)\right)v''\left(\sigma(t)\right)\right)'' + \lambda G(k_1)Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(R\left(\tau_i(t)\right)\right) \leq 0$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizliğin t_3 den ∞ a integrali alınırsa,

$$\lambda G(k_1)\int_{t_3}^{\infty} Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(R\left(\tau_i(t)\right)\right)dt < \infty$$

elde edilir ki bu ifade (3.3) eşitliği ile çelişir.

Şimdi de (c) durumunun sağlandığını kabul edelim. Lemma 3.2 ve Lemma 3.3 kullanılarak $t \geq t_4 > t_3$ için

$$k\left(-r_1(t)v''(t)\right)' tR(t) \leq v(t) \leq k_2 t$$

ifadesi bulunur. Böylece $L = \frac{k}{k_2} > 0$ olmak üzere

$$-\left[\left(\left(-r_1(t)v''(t)\right)'\right)^{1-\gamma}\right]' = (\gamma - 1)\left(\left(-r_1(t)v''(t)\right)'\right)^{-\gamma}\left(-r_1(t)v''(t)\right)''$$

$$\geq (\gamma - 1)L^{\gamma}R^{\gamma}(t)\sum_{i=1}^{\ell} q_i\left(\sigma(t)\right)G\left(x\left(\tau_i\left(\sigma(t)\right)\right)\right) \quad (3.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda eşitsizlik

$$-\left[\left(\left(-r_1(t)v''(t)\right)'\right)^{1-\gamma}\right]' - G(a)\left[\left(\left(-r_1\left(\sigma(t)\right)v''\left(\sigma(t)\right)\right)'\right)^{1-\gamma}\right]'$$

$$\geq (\gamma - 1)L^{\gamma}$$

$$\left[R^{\gamma}(t)\sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)G\left(x\left(\tau_i(t)\right)\right) + G(a)R^{\gamma}\left(\sigma(t)\right)\sum_{i=1}^{\ell} q_i\left(\sigma(t)\right)G\left(x\left(\tau_i\left(\sigma(t)\right)\right)\right)\right]$$

$$\geq \lambda(\gamma - 1)L^{\gamma}b(t)Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(z\left(\tau_i(t)\right)\right)$$

$$\geq \lambda(\gamma - 1)L^{\gamma}b(t)Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(v\left(\tau_i(t)\right)\right)$$

$$\geq \lambda(\gamma - 1)L^{\gamma}G(k_1)b(t)Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(R\left(\tau_i(t)\right)\right)$$

haline dönüşür. Bu da

$$\lambda(\gamma - 1)L^{\gamma}G(k_1)\int_{t_4}^{\infty} b(t)Q(t)\sum_{i=1}^{\ell} G\left(R\left(\tau_i(t)\right)\right)dt < \infty$$

olmasını gerektirir fakat bu elde edilen sonuç (H_7) kabulü ile çelişir. Böylece ikinci durum geçerlidir. Sonuç olarak $z(t) < K(t)$ eşitsizliği $K(t)$ sınırlı olduğundan $x(t)$ nin sınırlı olmasını gerektirir. Lemma 3.4 ün (b)-(f) durumlarından herhangi birisinden

$t \geq t_2 > t_1$ için bu durumun geçerli olduğu görülür. Lemma 3.4 ün (e) ve (f) durumlarında $\lim_{t\to\infty} v(t) = -\infty$ elde edilir ki bu durum $x(t)$ nin sınırlı ve $\lim_{t\to\infty} v(t)$ nin mevcut olması ile çelişir. (b) veya (c) durumlarını göz önüne alırsak,

$-\infty < \lim_{t\to\infty} v(t) \leq 0$ olur. Sonuç olarak

$$0 \geq \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \sup[z(t) - K(t)] \geq \lim_{t\to\infty} \sup[x(t) - K(t)]$$

$$\geq \lim_{t\to\infty} \sup x(t) - \lim_{t\to\infty} K(t) = \lim_{t\to\infty} \sup x(t)$$

olması, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olmasını gerektirir. Burada dikkat edelim ki $\lim_{t\to\infty} K(t) = 0$ dır. Son olarak da Lemma 3.4 ün (d) durumu sağlansın. Bu taktirde $\lim_{t\to\infty}\left(r_1(t)v''(t)\right)'$ mevcuttur. Böylece (3.7) ifadesinin t_2 den ∞ a integrali alınırsa,

$$\int_{t_2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t) G\left(x\left(\tau_i(t)\right)\right) dt < \infty$$

veya

$$\int_{t_2}^{\infty} Q(t) \sum_{i=1}^{\ell} G\left(x\left(\tau_i(t)\right)\right) dt < \infty \tag{3.9}$$

elde edilir. Eğer $\lim_{t\to\infty} \inf x(t) > 0$ ise, bu taktirde (3.9) eşitsizliği

$$\int_{t_2}^{\infty} Q(t) dt < \infty$$

olmasını gerektirir ki bu ifade de Uyarı 3.1 den dolayı (H_6) kabulü ile çelişir. Böylece

$\lim_{t\to\infty} \inf x(t) = 0$ dır. $\lim_{t\to\infty} v(t)$ mevcut olduğundan Lemma 3.5 de kullanılırsa,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} z(t)$$

elde edilir. Hatta $z(t) \geq x(t)$ olması $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olmasını gerektirir. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t) < 0$ ise, bu taktirde $t \geq t_0$ için $y(t) = -x(t)$ alınır ve

$$\left(r_1(t)\left(y(t)+p(t)y(\sigma(t))\right)''\right)''+\sum_{i=1}^{\ell}q_i(t)G\left(y(\tau_i(t))\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{\ell}h_i(t)H\left(y(\rho_i(t))\right)=0$$

olur. Böylece Teorem 3.1 in ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.3. Teorem 3.1 den görülür ki $t \geq t_1$ için $v(t) < 0$ olduğu durumda $x(t)$ sınırlıdır ayrıca $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar. Fakat bu gerçek $x(t)$ nin sınırsız olduğu durumları gerektirmez. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.2. $0 \leq p(t) \leq a < \infty$ olsun. Kabul edelim ki (H_1)-(H_7) şartları sağlansın. Bu taktirde (3.1) diferensiyel denkleminin her sınırsız çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.3. Kabul edelim ki $0 \leq p(t) \leq a < 1$ olsun. Eğer $(H_1), (H_2), (H_4), (H_5)$ ve (H_8) şartları sağlanıyor ise, bu taktirde (3.1) diferensiyel denkleminin her sınırsız çözümü salınımlıdır.

İspat. Burada $t \to \infty$ iken $R(t) \to 0$ olduğunu biliyoruz. (H_8) şartı

$$\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\ell}G\left(R(\tau_i(t))\right)q_i(t)\,dt=\infty \tag{3.10}$$

olmasını gerektirir ve bu durumda

$$\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\ell}q_i(t)\,dt=\infty \tag{3.11}$$

dir. $x(t)$, sınırsız ve $t \geq t_0 > 0$ için $x(t) > 0$ olacak şekilde (3.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. $t \geq t_0 > 0$ için $x(t) < 0$ durumu da benzerdir. $t \geq t_0 + \sigma_1$ için (3.7) ifadesini elde edebilmek için $z(t)$, $K(t)$ ve $v(t)$ sırasıyla (3.4), (3.5) ve (3.6) da olduğu gibi tanımlansın. Sonuç olarak $t \geq t_0 + \sigma_1$ için $[t_1, \infty)$ aralığında $v(t), v'(t), \left(r_1(t)v''(t)\right)$ ve $\left(r_1(t)v''(t)\right)'$ fonksiyonlarının her biri sabit işaretlidir. Kabul edelim ki $t \geq t_1$ için $v(t) > 0$ olsun. Bu taktirde Lemma 3.1 sağlanır. Eğer (a) veya (b) durumlarından herhangi bir tanesi sağlanır ise, bu durumda $t \geq t_1$ için

$$0 < v'(t) = z'(t) - K'(t)$$

eşitliği $z'(t) > 0$ veya < 0 olmasını gerektirir. $x(t)$ sınırsız olduğundan $z(t)$ nin de sınırsız olduğuna dikkat edelim. Böylece $z'(t) < 0$ değildir. Sonuç olarak $z'(t) > 0$ dır ve

$$\big(1 - p(t)\big)z(t) < z(t) - p(t)z\big(\sigma(t)\big) = x(t) - p(t)p\big(\sigma(t)\big)x\left(\sigma\big(\sigma(t)\big)\right) < x(t)$$

elde edilir. Bu da $t \geq t_2 > t_1$ için

$$x(t) > (1 - a)z(t) > (1 - a)v(t)$$

olması demektir. Bu durumda (3.7) ifadesi

$$\sum_{i=1}^{\ell} G\left((1 - a)v\big(\tau_i(t)\big)\right) q_i(t) \leq -\big(r_1(t)v''(t)\big)''$$

olmasını, Lemma 3.3 ve (H_4) kabulünden de

$$\sum_{i=1}^{\ell} G\big(k_1(1 - a)\big)G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right) q_i(t) \leq -\big(r_1(t)v''(t)\big)'' \qquad (3.12)$$

olmasını gerektirir. (3.12) eşitsizliğinin t_2 den ∞ a integrali alınırsa,

$$\int_{t_2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell} G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right) q_i(t)\, dt < \infty$$

elde edilir ki bu da (3.10) ifadesi ile çelişir. Lemma 3.1 in (c) durumunda (3.8) eşitsizliğini elde etmek için Teorem 3.1 in ispatındaki gibi ilerleyebiliriz. (3.8) eşitsizliği kullanılarak $t \geq t_2$ için

$$-\left[\left(\big(-r_1(t)v''(t)\big)'\right)^{1-\gamma}\right]' \geq (\gamma - 1)L^{\gamma}G\big((1 - a)k_1\big)R^{\gamma}(t)\sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin t_2 den ∞ a integrali alınırsa,

$$\int_{t_2}^{\infty} R^{\gamma}(t)\sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right) dt < \infty$$

bulunur ki bu ifade (H_8) kabulü ile çelişir. Lemma 3.1 in (d) durumunda ise, $\lim_{t\to\infty} v(t)$ mevcuttur, yani $\lim_{t\to\infty} z(t)$ mevcuttur. Bu durum bizim kabulümüz ile çelişki oluşturur. Uyarı 3.3 den dolayı $v(t) < 0$ durumu göz önüne alınmaz. Böylece Teorem 3.3 ün ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4. Kabul edelim ki $-1 < a \le p(t) \le 0$ olsun. Eğer $(H_1), (H_2), (H_5)$ ve (H_8) kabulleri sağlanır ise, bu taktirde $\sigma(t) = t - \sigma_1$ ile birlikte (3.1) diferensiyel denkleminin her çözümü ya salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsar.

İspat. $t \ge t_0 > 0$ için $x(t) > 0$ olacak şekilde $x(t)$, (3.1) diferensiyel denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. $z(t)$, $K(t)$ ve $v(t)$ sırasıyla (3.4), (3.5) ve (3.6) da olduğu gibi tanımlansın. Burada $t \ge t_0 + \sigma_1$ için (3.7) elde edilir ve böylece $v(t), [t_1, \infty)$ aralığı üzerinde monotondur. $t \ge t_1$ için $v(t) > 0$ olsun. Kabul edelim ki $t \ge t_1$ için Lemma 3.1 in (a), (b) ve (d) durumlarından bir tanesi sağlansın. Lemma 3.3 den $t \ge t_2 > t_1$ için

$x(t) \ge v(t) \ge k_1 R(t)$ sonucunu çıkarırız ve böylece (3.7) ifadesi

$$\int_{t_3}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t) G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right) dt < \infty, \qquad t_3 > t_2 + \sigma_1$$

olmasını gerektirir. Fakat bu eşitsizlik (3.10) kabulü ile çelişir. Şimdi (c) durumunu göz önüne alalım. Teorem 3.1 in ispatındaki gibi ilerlenirse (3.8) eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca Lemma 3.3 den $t \ge t_2$ için $x(t) \ge v(t) \ge k_1 R(t)$ bulunur. Sonuç olarak

$t \ge t_3 > t_2 + \alpha$ için

$$-\left[\left(\big(-r_1(t)v''(t)\big)'\right)^{1-\gamma}\right]' \ge (\gamma - 1) L^{\gamma} G(k_1) R^{\gamma}(t) \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t) G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin t_3 den ∞ a integrali alınırsa,

$$\int_{t_3}^{\infty} R^{\gamma}(t) \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t) G\left(R\big(\tau_i(t)\big)\right) dt < \infty$$

elde edilir ki bu sonuç (H_8) kabulü ile çelişir. Eğer $t \ge t_1$ için $v(t) < 0$ ise, bu taktirde $x(t)$ sınırlıdır. Bu durumda $z(t)$ de sınırlıdır ve aynı durum $v(t)$ içinde geçerlidir. Ayrıca

Lemma 3.4 ün (e) ve (f) durumlarının her ikisi de göz önüne alınmaz. İlaveten (b) veya (c) durumunda

$$-\infty < \lim_{t\to\infty} v(t) \le 0$$

elde edilir. Aslında $\lim_{t\to\infty} K(t) = 0$ olması durumundan dolayı

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} z(t)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
0 \ge \lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty} z(t) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sup\big[x(t) + p(t)x\big(\sigma(t)\big)\big] \\
&\ge \limsup_{t\to\infty} x(t) + \liminf_{t\to\infty}\Big(ax\big(\sigma(t)\big)\Big) \\
&= \limsup_{t\to\infty} x(t) + a\limsup_{t\to\infty} x\big(\sigma(t)\big) \\
&= (1+a)\limsup_{t\to\infty} x(t)
\end{aligned}$$

olması $\limsup_{t\to\infty} x(t) = 0$ olmasını gerektirir yani $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Şimdi (d) durumu sağlansın. Buna göre

$$\lim_{t\to\infty}\big(r_1(t)v''(t)\big)'$$

mevcut olduğundan (3.7) ifadesi

$$\int_{t_2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)G\Big(x\big(\tau_i(t)\big)\Big)\,dt < \infty \tag{3.13}$$

olmasını gerektirir. Eğer $\liminf_{t\to\infty} x(t) > 0$ ise, bu taktirde (3.13) den

$$\int_{t_2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\ell} q_i(t)\,dt < \infty$$

olduğu görülür fakat bu ifade (3.11) ile çelişir. Böylece $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Lemma 3.5 den dolayı

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} z(t)$$

olduğunu iddia ediyoruz. Yukarıdaki ispat takip edilirse, $\limsup_{t\to\infty} x(t) = 0$ olduğunu görebiliriz ve bu durumda $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t) < 0$ ise, bu taktirde yukarıdaki gibi hareket edilirse, $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$ elde edilir. Bu da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ demektir. Böylece Teorem 3.4 ün ispatı tamamlanır.

Teorem 3.5. Kabul edelim ki $-\infty < p(t) \leq 0$ olsun. Eğer $(H_1), (H_2), (H_5)$ ve (H_8) kabulleri sağlanıyor ise, bu taktirde $\sigma(t) = t - \sigma_1$ ile birlikte (3.1) diferensiyel denkleminin her sınırsız çözümü salınımlıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.4 ün ispatına benzer olduğu için ihmal edilmiştir.

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu tezde, üçüncü ve dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılık problemi ele alındı. Üçüncü mertebeden sürekli dağılımlı mixed argümentli neutral diferensiyel denklemlerin ve dördüncü mertebeden pozitif ve negatif katsayılı lineer olmayan diferensiyel denklemlerin belirli bir sınıfı için çözümlerin salınımlılığı ile ilgili şartlar verilerek teoremler ispatlandı. Bu ispatlarda Riccati dönüşümü ve integral ortalama tekniği kullanıldı.

6.2. Öneriler

Bu tezde kullanılan metotlar ve elde edilen sonuçlar daha farklı ve genel diferensiyel denklem yapılarına uygulanabilir. Ayrıca bizim incelediğimiz denklem yapıları için farklı metotlar kullanılarak salınım ve salınımsızlık sonuçları elde edilebilir. Aynı zamanda E. Tunç'un 2017 yılında yaptığı çalışmada[139] elde edilen sonuçlar bizim ele aldığımız üçüncü mertebeden diferensiyel denklem yapısı için de uyarlanabilir ve çalışmada da bahsedildiği gibi adi diferensiyel denklemler için elde ettiğimiz sonuçlar fark denklemlerine taşınabilir.

KAYNAKLAR

1. Hartman, P., Wintner, A., 1948. On non-conservative linear oscillations of low frequency. **Amer. J. Math., 70**: 529-539.

2. Hartman, P., Wintner, A., 1953. On non-oscillatory linear differential equations. **Amer. J. Math., 75**: 717-730.

3. Hartman, P., Wintner, A., 1954. On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients. **Amer. J. Math., 76**: 207-219.

4. Hartman, P., Wintner, A., 1955. On the assignment of asymptotic values fort he solutions of linear differential equations of second order. **Amer. J. Math., 77**: 475-483.

5. Hartman, P., Wintner, A., 1951. On the classical transcendents of mathematical physics. **Amer. J. Math., 73**: 381-389.

6. Hartman, P., Wintner, A., 1949. On the Laplace-Fourier transcendents. **Amer. J. Math., 71**: 367-372.

7. Hartman, P., Wintner, A., 1949. Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations. **Amer. J. Math., 71**: 627-649.

8. Hille, E., 1948. Non-oscillation theorems. **Trans. Amer. Math. Soc., 64**: 234-252.

9. Leighton, W., 1952. On self-adjoint differential equations of second order. **J. London Math. Soc., 27**: 37-47.

10. Leighton, W., 1949. On self-adjoint differential equations of second order. **Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 35**: 656-657.

11. Leighton, W., 1949. Principal quadratic functionals and self-adjoint second order differential equations. **Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 35**: 190-193.

12. Leighton, W., 1950. The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equations. **Duke Math. J., 17**: 57-62.

13. Nehari, Z., 1957. Oscillation criteria for second-order linear differential equations. **Trans. Amer. Math. Soc., 85**: 428-445.

14. Hartman, P., Wintner, A., 1953. Linear differential and difference equations with monotone solutions. **Amer. J. Math., 75**: 731-743.

15. Hartman, P., Wintner, A., 1954. Linear differential equations with completely monotone solutions. **Amer. J. Math., 76**: 199-206.

16. Hartman, P., Wintner, A., 1951. On an oscillation criterion of Liapounoff. **Amer. J. Math., 73**: 885-890.

17. Wintner. A., 1949. A criterion of oscillatory stability. **Quart. Appl. Math., 7**: 115-117.

18. Cimmino, G., 1930. Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiori. **Math. Z., 32**: 4-58.

19. Mammana, G., 1931. Decomposizione delle espressioni dierenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione rellavita allo studio delle equazioni differenziali lineari. **Math. Z., 33**: 186-231.

20. Sansone, G., 1948. Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale. **Univ. Nac. Tucuman Rev., A6**: 195-253.

21. Zlamal, M., 1951. Asymptotic properties of the solutions of third order linear differential equations. **Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk., 329**(6): 1951-1956.

22. Gregus, M., 1958. Bermerkungen zu den oszillatorischen eigenschaften der lösngen der differentialgleicung dritter ordnung. **Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Math., 3**: 23-28.

23. Gregus, M., 1956. Die differentialgleichung der dritten ordnung

$y''' + 2A(x)y' + [A' + b]y = 0$ mit allen oszillatorischen lösungen. **Acta. Fac. Nat. Univ. Comenian. Math., 1**: 41-47.

24. Gregus, M., 1961. Oscillatory properties of solutions of a third order differential equation of the type $y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$. **Acta. Fac. Nat. Univ. Comenian. Math., 6**: 275-300.

25. Gregus, M., 1959. Oszillatorische eigenschaften der lösungen der linearen differentialgleichung dritter ordnung $y''' + 2Ay' + [A' + b]y = 0$ wo $A = A(x) \leq 0$ ist. **Czechoslovak Math. J., 9**(84): 416-428.

26. Gregus, M., 1961. Über einige eigenschaften dr lösungen der differentiagleichung

$y''' + 2Ay' + [A' + b]y = 0, A \leq 0$. **Czechoslovak Math. J., 11**(86): 106-114.

27. Hanan, M., 1961. Oscillation criteria for third-order linear differential equations. **Pacific J. Math., 11**: 919-944.

28. Lazer, A. C., 1966. The behavior of solutions of the differential equation

$y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$. **Pacific J. Math.,** 435-466.

29. Parhi, N., 1989. Nonoscillation of solutions of a class of third order differential equations. **Acta Math. Hung., 54**(1-2): 79-88.

30. Parhi, N., 1994. On non-homogeneous canonical third-order linear differential equations. **Journal of the Australian Mathematical Society(Series A), 57**: 138-148.

31. Şenel, M. T., Temtek, P., 2009. On behaviour of solutions for third order nonlinear ordinary differential equations with damping terms. **Journal of Computational Analysis and Applications, 11**(2): 346-355.

32. Şenel, M. T., Temtek, P., 2008. On nonoscillation of nonhomogeneous third order differential equations wirh damping terms. **Applied Mathematical Sciences, 17**(20): 995-1004.

33. Temtek, P., 2006. Nonoscillatory behavior of solutions of third order differential equations. **J. Appl. Funct. Differ. Equ.(JAFDE), 1**: 23-30.

34. Temtek, P., 2004. On the nonoscillatory behaviour of the differential equations

$y''' + q(t)k(y') + p(t)h(y) = 0$. **Advanced Studies in Contemporary Math., 1**: 27-32.

35. Temtek, P., 2004. On the nonoscillatory of solutions of a class of third order differential equations. **Advanced Studies in Contemporary Math., 2**: 119-124.

36. Temtek, P., Şenel, T., 2004. Nonoscillation theorems for a class third order differential equations. **Indian J. Pure Appl. Math., 4**: 455-461.

37. Temtek, P., 2007. The behaviour of solutions of nonhomogeneous third order diferential equations. **Int. J. Pure Appl. Math., 1**: 63-68.

38. Temtek, P., Tiryaki, A., 2002. Nonoscillation results or a class of third order nonlinear diferential equations. **Applied Mathematics and Mechanics, 10**: 1170-1175.

39. Agarwal, R. P., Aktaş, M. F., Tiryaki, A., 2009. On oscillation criteria for third order criteris for third order nonlinear delay differential equations. **Archivum Mathematicum(BRNO), 45**: 1-18.

40. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A., 2011. On the qualitative behaviors of solutions of third order nonlinear functional differential equations. **Applied Mathematics Letters, 24**: 1849-1855.

41. Aktaş, M. F., Tiryaki, A., Zafer, A., 2009. Integral criteria for oscillation of third order nonlinear differential equations. **Nonlinear Anal., 71**(12).

42. Temtek, P., Tiryaki, A., 2002. Nonoscillation results or a class of third order nonlinear diferential equations. **Applied Mathematics and Mechanics, 10**: 1170-1175.

43. Tiryaki, A., 2012. Some criteria for the asymptotic behavior of a certein nonlinear perturbed differential equation. **Advances in Pure Mathematics, 2**(5): 341-343.

44. Leighton, W., Nehari, Z., 1958. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order. **Trans. Amer. Math. Soc., 89**: 325-377.

45. Howard, H., 1960. Oscillation criteria for fourth order linear differential equations. **Trans. Amer. Math. Soc., 96**: 296-31.

46. Barrett, J. H., 1960. Two-point Boundary Value Problems and Comparison Theorems for Fourth-order Self-adjont Differential Equations and Second-order Matrix Differential

Equations. Technical summary report no:150, Mathematics Research Center, U. S., Army., Univ. Of Wisconsin, Madison.

47. Barrett, J. H., 1961. Disconjugacy of a self-adjoint differential equation of the fourth-order. **Pacific J. Math., 11**: 25-37.

48. Barrett, J. H., 1961. Fourth-order boundary value problems and comparison theorems. **Canad. J. Math., 13**: 625-638.

49. Barrett, J. H., 1961. Systems-disconjugacy of a fourth-order differential equation. **Proc. Amer. Math. Soc., 12**: 205-213.

50. Barrett, J. H., 1962. Two-point boundary problems for linear self-adjoint differential equation of the fourth-order with middle term. **Duke Math. J., 29**: 543-554.

51. Kreith, K., 1963. Comparison theorems for constrained rods. **SIAM Rev., 6**:31-36.

52. Reynolds, C. N., 1921. On the zeros of solutions of homogeneous linear differential equations. **Trans. Amer. Math. Soc., 22**: 220-229.

53. Anan'eva, G. V., Balaganskii, V. I., 1959. Oscillation of the solutions of certain differential equations of high order. **Uspehi Math. Nauk., 14**(1): 135-140.

54. Arama, O., 1962. Intervals of non-oscillation of linear differential equations. **Acad. R. P. Romine Fil. Cluj. Cerc. Stud. Mat., 13**: 213-239.

55. Azbelev, N. V., Caljuk, Z. B., 1960. On the question of the distribution of the zeros of solutions of a third-order linear differential equation. **Mat. Sb., 51**(93): 475-486.

56. Cickin, E. S., 1962. A theorem on a differential inequality for multi-point boundary-value problems. **Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat., 2**(27): 170-179.

57. Elsin, M. I., 1962. On a solution of a classical oscillation problem. **Dokl. Akad. Nauk., 147**:1013-1016.

58. Glazman, I. M., 1965. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators. Davey, New York.

59. Halanay, A., Shandar, Sh., 1957. Sturm theorems for self-conjugate systems of higher order differential equations. **Dokl. Akad. Nauk., 114**:506-507.

60. Kiguradze, I. T., 1962. Oscillatory properties of solutions of certain ordinary differential equations. **Soviet Math. Dokl., 3**:649-652.

61. Komlenko, Ju. V., 1965. Some criteria for nonoscillation and boundednessof solutions of linear differential equations. **Soviet Math. Dokl., 6**:1212-1215.

62. Kondratev, V. A., 1958. On the oscillation of solutions of linear differential equations of third and fourth order. **Dokl. Akad. Nauk., 118**:22-24.

63. Kondratev, V. A., 1959. Oscillation of solutions of linear equations and third and fourth order. **Trudy. Moscov. Math. Obsc., 8**:259-281.

64. Levin, A. Ju., 1963. Some problems bearing on the oscillation of solutions of linear differential equations. **Soviet Math. Dokl., 4:**121-124.

65. Levin, A. Ju., 1964. Distribution of the zeros of solutions of a linear differential equation. **Soviet Math. Dokl., 5**:818-821.

66. Swanson, C. A., 1968. Comparison And Oscillation Theory Of Linear Differential Equations. Academic Press, New York and London, 229pp.

67. Saker, S. H., Oscillation Theory Of Third-order Functional Differential Equations. 59pp.

68. El'sgol'ts, L. E., Mclaughlin, R. J., 1966. Introduction To The Theory Of Differential Equations With Deviating Arguments. Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 109pp.

69. Rab, M., 1955. Oszillatorische eigenschaften der lösungen linearer differentialgleichungen 3 ordnung. **Acta Acad Sci.Cechoslovenicae Basis Brunensis, 27**: 349-360.

70. Rab, M., 1956. Asymptotische eigenschaften der lösungen linearer differentialgleichungen dritter ordnung. **Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk,** 177-184, 441-454.

71. Rab, M., 1958. Über die differentialgleichhung $y'''+2A(x)\,y'+(A'(x)+w(x))y=0$. **Mat.-Fyz. Casopis. Sloven. Akad. Vied., 8**: 115-122.

72. Rab, M., 1960. Über eine verallgemeinerung eines satzes von sansone über nichtoszillation der lösüngen der differentialgleichhung y"+2A(x)y'+(A'(x)+w(x))y=0. **Mat.-Fyz. Casopis. Sloven. Akad. Vied., 10**: 3-8.

73. Svec, M., 1957. Sur les dispersions de 1'equation [y]^((n))+Q(x)y=0,n=3,4. **Czechoslavak Mat. J.,, 82**: 450-462.

74. Svec, M., 1962. Asymptotische darstellung der lösüngen der differentialgleichhung

[y]^((n))+Q(x)y=0,n=3,4. **Czechoslavak Mat. J.,, 87**: 572-581.

75. Svec, M., 1965. Some remarks on a third order linear differential equation(Russian). **Czechoslavak Math. J., 15**(90): 42-49.

76. Villari, G., 1958. Sul carattera oscillatario delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogonee del terzo ordine. **Boll. Un. Matç Ital., 13**(3): 73-78.

77. Villari, G., 1960. Contributi allo studio asintotico del 1'equazioni. **Ann. Mat. Pura Appl., 51**: 301-328.

78. Birkhoff, G. D., 1911. On solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order. **Ann. of Math., 12**: 103-127.

79. Hanan, M., 1961. Oscillation criteria for third-order linear differential equations. **Pacific J. Math., 11**: 919-944.

80. Svec, M., 1957. Sur une propriete des integrales de 1'equation

$y^{(n)}+Q(x)y=0, n=3{,}4$. **Czechoslovak Math. J., 7**(82): 450-462.

81. Cerven, J. 1964. A sufficient condition for non-oscillation of solutions of a linear third-order differential equation. **Acta. Fac. Nat. Univ. Comenian, 9**: 63-70.

82. Kalafati, P. D., 1962. Oscillatory properties of the fundamental functions of third-order boundary value problems. **Dokl. Akad. Nauk., 143**: 518-521.

83. Waltman, P., 1966. Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations. **Pacific J. Math., 18**: 385-389.

84. Schuur, J. D., 1967. Asymptotic behavior of a solution of the third order linear differential equation. **Proc. Amer. Math. Soc., 18**: 391-393.

85. Heidel, J. W., 1968. Qualitative behavior of a solutions of third order nonlinear differential equations. **Pacific J. Math., 27**: 507-526.

86. Barrett, J. H., 1968. Third-order equations with nonnegative coefficients. **J. Math. Anal. Appl., 24**: 212-224.

87. Kim, W. J., 1970. Oscillatory properties of linear third-order differential equations. **Proc. Amer. Math. Soc., 26**: 286-293.

88. Utz, W. R., 1970. Oscillating solutions of third order differential equations. **Proc. Amer. Math. Soc., 26**: 273-277.

89. Jones, G. D., 1973. An asymptotic property of solutions $x'''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$. **Pacific J. Math., 48**: 138-138.

90. Etgen, G. J., Shih, C. D., 1933. Disconjugacy and oscillation of third order differential equations with nonnegative coefficients. **Proc. Amer. Math. Soc., 38**:533-582.

91. Etgen, G. J., Shih, C. D., 1933. On the oscillation of certain third order linear differential equations. **Proc. Amer. Math. Soc., 41**:151-155.

92. Soltes, P., 1973. A remark on the oscillatoriness od solutions of a non-linear third-order equations. **Mat. Casop., 237**: 326-333.

93. Jones, G. D., 1974. Oscillatory behavior of third order differential equations. **Proc. Amer. Math. Soc., 43**: 133-135.

94. Mehri, B., 1976. On the conditions fort he oscillations of solutions of nonlinear third order differential equations. **Cas. Pest Math., 101**: 124-129.

95. Kusano, T., Naito, M., 1981. Comparison theorems for functional differential equations with deviating arguments. **J. Math. Soc. Japan, 3**: 509-533.

96. Gregus, M., 1987. Third Order Linear Differential Equations. Reidel, Drodrecht.

97. Gregus, M., Gregus, M. Jr., 1997. An oscillation criterion for nonlinear third-order differential equations. **Georg. Math. J., 4**: 19-26.

98. Parhi, N., Das, P., 1990. Asymptotic property of solutions of a class of third-order differential equations. **Proc. Amer. Math. Soc., 110**: 387-393.

99. Parhi, N., Das, P., 1993. On asymptotic property of solutions of linear homogeneous third order differential equations. **Bollettino U. M. I.,** 775-786.

100. Das, P., 1995. On oscillation of third order forced equations. **J. Math. Anal. Appl., 196**: 502-513.

101. Dzurina, J., 1996. Asymptotic properties of the third order delay differential equations. **Nonlinear Anal. Ther. Meth. & Appl., 26**: 33-39.

102. Tiryaki, A., Çelebi, A. O., 1998. Nonoscillation and asymptotic behavior for third order nonlinear differential equations. **Czech. Math. J., 48**: 677-685.

103. Parhi, N., Padhi, S., 1998. On asymptotic behaviour of delay-differential equations of third order. **Nonlinear Anal., 34**: 391-403.

104. Parhi, N., Panigrahi, S., 1999. On Liapunov-type inequality for third-order differential equations. **J. Math. Anal. Appl., 233**: 445-460.

105. Candan, T., Dahiya, R.S., 2003. Oscillation of third order functional differential equations with delay. **Electronic Journal of Differential Equations, 10**: 79-88.

106. Candan, T., Dahiya, R.S., 2005. Functional differential equations of third order. **Electronic Journal of Differential Equations, 12**: 47-56.

107. Tiryaki, A., Aktaş, M. F., 2007. Oscillation criteria of a certain class of third order nonlinear delay differential equations with delay. **J. Math. Anal. Appl., 325**: 54-68.

108. Temtek, P., 2007. The behaviour of solutions of nonhomogeneous third order differential equations. **International Journal of Pure and Applied Mathematics, 39**(1): 63-68.

109. Grace, S. R., Agarwal, R. P., Pavani, R., Thandapani, E., 2008. On the oscillation of certain third order nonlinear functional differential equations. **Applied Mathematics and Computation, 202**: 102-112.

110. Şenel, M. T., Temtek, P., 2009. On behaviour of solutions for third order nonlinear ordinary differential equations with damping terms. **Journal of Computational Analysis and Applications, 11**(2): 346-355.

111. Aktaş, M. F., Tiryaki, A., Zafer, A., 2010. Oscillation criteria for third-order nonlinear functional differential equations. **Applied Mathematics Letters, 23**: 756-762.

112. Baculikova, B., Dzurina, J., 2010. Oscillation of third-order neutral differential equations. **Mathematical and Computer Modelling, 52**: 215-226.

113. Baculikova, B., Dzurina, J., 2011. Oscillation of third-order nonlinear differential equations. **Applied Mathematics Letters, 24**: 466-470.

114. Li, T., Zhang, C., Baculikova, B., Dzurina, J., 2011. On the oscillation of third-order quasi-linear delay differential equations. **Tatra Mountains Mathematical Publications, 48**: 117-123.

115. Agarwal, R. P., Baculikova, B., Dzurina, J., Li, T., 2012. Oscillation of third-order nonlinear functional differential equations with mixed arguments. **Acta Math. Hungar., 134**(1-2): 54-67.

116. Zhang, Q., Gao, L., Yu, Y., 2012. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with continuously distributed delay. **Applied Mathematics Letters, 25**(10): 1514-1519.

117. Candan, T., 2013. Oscillation criteria and asymptotic properties of solutions of third-order nonlinear neutral differential equations. **Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38**: 1379-1392.

118. Tian, Y., Cai, Y., Fu, Y., Li, T., 2015. Oscillation and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. **Advances in Difference Equations, 267**: 1-14.

119. Courant, R., Hilbert, D., 1953. Methods Of Mathematical Physics. Wiley, New York.

120. Fite, W. B., 1917. Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. **Trans. Amer. Math. Soc., 19**: 341-352.

121. Kusano, T., Naito, M., 1976. Non-linear oscillation of fourth order differential equations. **Canad. J. Math**., 4: 840-852.

122. Kusano, T., Naito, M., 1976. On fourth order nonlinear oscillations**. J. London Math. Soc., 14**(2): 91-105.

123. Parhi, N., Tripathy, A. K., 2004. On oscillatory fourth-order nonlinear neutral differential equations I. **Math. Slovaca, 54**: 389-410.

124. Parhi, N., Tripathy, A. K., 2005. On oscillatory fourth-order nonlinear neutral differential equations II. **Math. Slovaca, 55**(2): 183-202.

125. Tripathy, A. K., 2013. Oscillation criteria for a class of nonlinear fourth order neutral differential equations. **Math. Slovaca, 63**(2): 243-262.

126. Tripathy, A. K., Panigrahi, S., Basu, R., 2013. Oscillation results for fourth-order nonlinear neutral differential equations with positive and negative coefficients. **Journal of Mathematical Sciences, 194**(4): 453-471.

127. Bartusek, M., Dosla, Z., 2014. Oscillatory solutions of nonlinear fourth order differential equations with a middle term. **Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 55**: 1-9.

128. Agarwal, R. P., Grace, S. R., O'Regan, D., 2000. Oscillation Theory For Difference And Functional Differential Equations. Kluwer, Dordrecht.

129. Grace, S. R., Agaarwal, R. P., Aktaş, M. F., 2008. On the oscillation of third-order functional differential equations. **Indian J. Pure Appl. Math., 39**: 491-507.

130. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Polya, G., 1988. Inequalities. Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

131. Tripathy, A. K., 2010. Oscillation properties of a class of neutral differential equations with positive and negative coefficients. **Fasc. Math., 45**: 133-155.

132. Parhi, N., Chand, S., 2000. On forced first-order neutral differential equations with positive and negative coefficients. **Math. Slovaca, 50**: 183-202.

133. Ocalan, O., 2007. Oscillation of forced neutral differential equations with positive and negatice coefficients. **Comput. Math. And Appl., 54**: 1411-1421.

134. Ocalan, O., 2007. Oscillation of neutral differential equation with positive and negative coefficients. **J. Math. Anal. And Appl., 331**: 644-654.

135. Chuanxi, Q., Ladas, G., 1990. Oscillation in differential equations with positive and negative coefficients. **Can. Math. Bull., 33**: 442-450.

136. Li, W. T., Quan, H. S., 1995. Oscillation of higher order neutral differential equations with positive and negative coefficients. **Ann. Different. Equat., 2**: 70-76.

137. Li, W. T., Yan, J., 1999. Oscillation of first-order neutral differential equations with positive and negative coefficients. **Collect. Math., 50**: 199-209.

138. Gyori, I., Ladas, G., 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equation With Application. Clarendon Press, Oxford.

139. Tunç, E., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. **Electronic Journal of Differential Equations, 16**: 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Nagehan KILINÇ GEÇER
Uyruğu: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri: 1987, Kozan
Medeni Durumu: Evli
Tel: +90 386 280 45 17
email: nagehan.kilinc@ahievran.edu.tr
Yazışma Adresi: Ahi Evran Üniversitesi Bağbaşı Yerleşkesi Fen Edebiyat Fakültesi Zemin Kat Oda No:Z03 Merkez/KIRŞEHİR

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2011
Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2009
Lise	Kozan Anadolu Lisesi	2004

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2012- Halen	Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	Arş. Gör.

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1. Kılınç Geçer N. ve Temtek P. "Oscillatory of Third-Order Neutral Differential Equations with Continuously Distributed Mixed Arguments", Applied Mathematics & Information Sciences, 10(5), 1893-1899, 2016.

2. Temtek P. ve Kılınç Geçer N. "Oscillation Results for a Class of Fourth-Order Nonlinear Differential Equations with Positive and Negative Coefficients", Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 5(1), 99-107, 2017.