**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**Melek YAĞCI**

# YARIGRUPLARIN İKİNCİ HOMOLOJİSİ VE ETKİNLİK

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADANA-2018**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARIGRUPLARIN İKİNCİ HOMOLOJİSİ VE ETKİNLİK**

**Melek YAĞCI**

**DOKTORA TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez 23/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| .................................... | ............................... | ...................................... |
| Prof. Dr. Hayrullah AYIK | Prof. Dr. Gonca AYIK | Prof. Dr. Melis MİNİSKER |
| DANIŞMAN | ÜYE | ÜYE |
| ................................................ | ...................................... | |
| Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ | Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL | |
| ÜYE | ÜYE | |

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
**Kod No:**

**Prof. Dr. Mustafa GÖK**
**Enstitü Müdürü**

**Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Birimi Tarafından Desteklenmiştir.**
**Proje No: FDK-2015-4817**

# ÖZ

## DOKTORA TEZİ

## YARIGRUPLARIN İKİNCİ HOMOLOJİSİ ve ETKİNLİK

**Melek YAĞCI**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2018, Sayfa: 73
Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

$S$ ve $T$ iki sonlu monoid olmak üzere $S \between T$, $S$ ve $T$ monoidlerinin Schützenberger çarpımını göstersin. Biz bu çalışmada $S \between T$ Schützenberger çarpımının ikinci (tamsayı) homolojisinin, iki monoidin direkt çarpımının ikinci (tamsayı) homolojisine eşit olduğunu, yani

$$H_2(S \between T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \left(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\right)$$

eşitliğini gösterdik. Ayrıca $S$ ve $T$ sol veya sağ tersinir eleman içermeyen monoidler olmak üzere $S \between T$ Schützenberger çarpımının etkin olmadığını gösterdik.

**Anahtar Kelimeler:** Monoid, Schützenberger çarpımı, ikinci (tamsayı) homolojisi, etkinlik

## ABSTRACT

**PhD THESIS**

**SECOND HOMOLOGY of the SEMIGROUPS and EFFICIENCY**

**Melek YAĞCI**

**ÇUKUROVA UNIVERSITY**
**INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**
**DEPARTMENT OF MATHEMATİCS**

Supervisor : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Year: 2018, Pages: 73
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Assoc. Prof. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

For two finite monoids $S$ and $T$, let $S \lozenge T$ be Schützenberger product of $S$ and $T$. In this study we prove that the second integral homology of the Schützenberger product $S \lozenge T$ is equal to

$$H_2(S \lozenge T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$$

as the second integral homology of the direct product of two monoids. Moreover, we show that $S \lozenge T$ is inefficient if there is no left or right invertible element in both $S$ and $T$.

**Key Words**: Monoid, Schützenberger product, second (integral) homology, efficiency

## GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

$\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlamak üzere $R$, $A$ üzerinde ve $Q$ da $B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. $\mathfrak{I} = A \cup B$ ve $\mathfrak{R} = R \cup Q \cup \{(ba = ab): a \in A, b \in B\}$ için $S \times T = \langle \mathfrak{I}|\mathfrak{R}\rangle$ olup $\mathfrak{R}, \mathfrak{I}$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olur.

Böylece $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlamak üzere $R$, $A$ üzerinde ve $Q$ da $B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. O zaman $S$ ve $T$ monoidlerinin $S \times T$ direkt çarpımlarının $\langle \mathfrak{I}|\mathfrak{R}\rangle$ takdimini kullanarak $S \times T$ nin ikinci (tamsayı) homolojisi

$$H_2(S \times T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3} = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$$

olur.

$S$ ve $T$ iki sonlu monoid olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpımının tüm altkümelerinin kümesi $P(S \times T)$ ile gösterilsin. $X \in P(S \times T)$, $s \in S$ ve $t \in T$ için $sX$ ve $Xt$ kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$sX = \{(sx, y)|(x, y) \in X\} \text{ ve } Xt = \{(x, yt)|(x, y) \in X\}.$$

Bu durumda $S \times P(S \times T) \times T$ kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(s_1, X_1, t_1)(s_2, X_2, t_2) = (s_1 s_2, s_1 X_2 \cup X_1 t_2, t_1 t_2)$$

ikili işlem ile bir yarıgrup olur. Üstelik $(1_S, \emptyset, 1_T)$ bu yarıgrubun birim elemanı olup $S \times P(S \times T) \times T$ bir monoid olur. Bu monoide $S$ ve T monoidlerinin **Schützenberger çarpımı** denir ve $S \lozenge T$ ile gösterilir.

$\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ ($A$ ve $B$ ayrık kümeler) monoid takdimleri sırası ile $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlasın. Bu durumda

$$C = \{c_{s,t} | s \in S, t \in T\} \text{ ve}$$

$$Z = \left\{ \begin{array}{ccc} {c_{s,t}}^2 & = & c_{s,t}\ (s \in S, t \in T) \\ c_{s,t}c_{s',t'} & = & c_{s',t'}c_{s,t}\ ((s,t) \prec (s',t') \in S \times T \\ ac_{s,t} & = & c_{as,t}a\ (a \in A, s \in S, t \in T) \\ c_{s,t}b & = & bc_{s,tb}\ (b \in B, s \in S, t \in T) \\ ab & = & ba\ (a \in A, b \in B) \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\langle A \cup B \cup C | R \cup Q \cup Z\rangle$ takdimi, üreteç kümesi

$$\{(a, \emptyset, 1_T), (1_S, \emptyset, b), (1_S, \{(s,t)\}, 1_T) | a \in A, b \in B, (s,t) \in S \times T\}$$

olan $S \between T$ yi tanımlar. (İspat için Howie ve Ruskuc (1994), Teorem 3.2'e bakınız.)

$S$ ve $T$ iki sonlu monoid olsun. $R, A$ üzerinde ve $Q, B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olmak üzere $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ sırasıyla $S$ ve $T$ nin sonlu monoid takdimleri olsun. Yukarıdaki notasyonlarla $R \cup Q \cup Z$ nin $A \cup B \cup C$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğunu gösterdik. Böylece Squier Çözümlemesini kullanarak $S$ ve $T$ sonlu takdim edilebilir monoidler olmak üzere $S$ ve $T$ monoidlerinin Schützenberger çarpımı $S \between T$ nin ikinci (tamsayı) homolojisi için

$$H_2(S \between T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3} = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$$

eşitliğini elde ettik.

O halde $S$ ve $T$ sonlu takdim edilebilir monoidler olmak üzere $S \lozenge T$ Schützenberger çarpımının ikinci (tamsayı) homolojisi, $S \times T$ direkt çarpımının ikinci (tamsayı) homolojisine eşittir.

$S$ bir yarıgrup olsun. $S$ yarıgrubunun bir yarıgrup takdimi $S^1$ monoidi için bir monoid takdimi olarak düşünülebileceği için $S$ sonlu bir yarıgrup ve $\langle A|R\rangle$ de $S$ yarıgubunun sonlu yarıgrup takdimi olmak üzere

$$|R| - |A| \geq \mathrm{rank}(H_2(S^1))$$

dir.

$S$ sonlu bir yarıgrup (monoid) ve $\langle A|R\rangle$ de $S$ nin bir yarıgrup (monoid) takdimi olsun. Eğer $|R| - |A| = \mathrm{rank}(H_2(S^1))$ ise $S$ ye **etkin yarıgrup (monoid)** denir. Aksi takdirde **etkin olmayan yarıgrup (monoid)** denir. Eğer $|R| - |A| = \mathrm{rank}(H_2(S^1))$ ise $S$ nin $\langle A|R\rangle$ yarıgrup (monoid) takdimine **etkin yarıgrup (monoid) takdimi** denir.

Ayrıca $S$ ve $T$ sol veya sağ tersinir eleman içermeyen monoidler olsun. Bu durumda $S \lozenge T$ Schützenberger çarpımının etkin olmayan monoid olduğunu gösterdik.

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışmanın her aşamasında hiçbir zaman yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora Tez Jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Gonca AYIK, Sayın Prof. Dr. Melis MİNİSKER, Sayın Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL'a destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan sevgili babam Osman ŞENOL, annem Kadriye ŞENOL, ablam Meral ERDEM, abim Gürsel ŞENOL'a, eşim Onur YAĞCI'a ve Ç. Ü. Matematik bölümünün saygıdeğer öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma yardım, destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak doktora yaptığım süre içerisinde aldığım maddi destekten dolayı Ç. Ü. Bilimsel Araştırma Projeler Birimine (Proje No: FDK-2015-4817) teşekkürlerimi sunarım.

**İÇİNDEKİLER** **SAYFA**

ÖZ ....................................................................................................I
ABSTRACT ................................................................................................ II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET ................................................................................ III
TEŞEKKÜR ...............................................................................................VII
İÇİNDEKİLER ........................................................................................... VIII
1. GİRİŞ ..................................................................................................... 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER ................................................................ 5
2.1. Kongrüanslar ........................................................................................ 6
2.2. Doğuray Kümeleri ................................................................................ 10
2.3. Yarıgrup Takdimi ................................................................................. 11
2.4. Tietze Dönüşümleri ............................................................................... 15
2.5. Grup Takdimi ....................................................................................... 16
2.6. Serbest Değişmeli Gruplar ..................................................................... 17
2.7. Monoidlerin Homoloji Grubu ve Tensör Çarpım ......................................... 20
2.8. Yarıgrupların Etkinliği ........................................................................... 27
3. YERİNE YAZMA SİSTEMLERİ .................................................................. 31
4. MONOİDLERİN SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ İKİNCİ
(TAMSAYI) HOMOLOJİSİ .......................................................................... 57
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER……................................................................ 69
KAYNAKLAR ............................................................................................. 71
ÖZGEÇMİŞ ................................................................................................ 73

# 1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi cebirin en temel dallarından biridir. “Yarıgrup” terimi ilk olarak 1904’te Monsieur l’Abbé J. A. Séguier’in “Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits” adlı kitabında yer almış, 1926 ve 1928 yıllarında A. K. Sushkevich’in bir sonlu yarıgrubun minimal idealinin yapısını belirlemesiyle gelişim sürecine başlamıştır. Bu dönemden itibaren çalışmalar hızla artmış ve nihayet 1950’li yılların sonunda yarıgrup teorisinin kendisi modern cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelmiştir. Yarıgrupların zengin bir soru içeriğine sahip olmasının yanı sıra, grup ve halka teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer alanları ve bilgisayar bilimleri ile olan bağlantısı da yarıgrup teorisinin önemini arttırmıştır.

Bir yarıgrubu sonlu bir ifade ile tanımlamanın birçok yöntemi vardır. Bunlardan en iyi bilineni yarıgrup takdimidir. Yarıgrupların sonlu takdim edilebilirliği uzun zamandır çalışılan bir konudur. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile birlikte, yarıgrupların sonlu takdim edilebilirliği daha da önem kazanmıştır. Ayrıca teorik bilgisayar bilimcilerin son yıllarda geliştirdiği yerine-yazma yöntemleri, yarıgrupların takdimini bulmada, sonluluk özelliklerini araştırmada ve homoloji hesaplamalarında büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Squier (1987), $M, \langle A|R\rangle$ monoid takdimine sahip bir monoid ve $R$ de $A$ üzerinde indirgenmiş tam yerine-yazma sistemi olmak üzere $\mathbb{Z}M$ monoid halkası üzerinde $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözümlemesini inşa etti. Pride (1997), $M$ sonlu bir monoid ve $\langle A|R\rangle$ de $M$ monoidinin sonlu monoid takdimi olmak üzere

$$|R| - |A| \geq \operatorname{rank}(H_2(M))$$

olduğunu (yayınlanmamış) gösterdi.

$S$ bir yarıgrup olsun. $S$ yarıgrubunun bir yarıgrup takdimi $S^1$ monoidi için bir monoid takdimi olarak düşünülebileceği için $S$ sonlu bir yarıgrup ve $\langle A|R\rangle$, $S$ yarıgubunun sonlu yarıgrup takdimi olmak üzere

$$|R| - |A| \geq \text{rank}(H_2(S^1))$$

dir.

$P = \langle A|R\rangle$ sonlu yarıgrup takdimi olsun. $P = \langle A|R\rangle$ takdiminin noksanlığı $|R| - |A|$ ile tanımlıdır ve $\text{def}(P)$ ile gösterilir. Bir sonlu takdime sahip $S$ yarıgrubunun yarıgrup noksanlığı $\text{def}_S(S)$ ile gösterilir ve

$$\text{def}_S(S) = \min\{\text{def}(P)|P, S \text{ nin bir sonlu yarıgrup takdimi}\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir sonlu takdime sahip $M$ monoidinin monoid noksanlığı $\text{def}_M(M)$ ile gösterilir ve benzer şekilde tanımlanabilir.

$P$, sonlu takdime sahip $S$ yarıgrubu için bir sonlu yarıgrup takdimi olsun. Eğer $\text{def}(P) = \text{def}_S(S)$ ise $P$ ye bir minimal yarıgrup takdimi denir. Benzer tanım minimal monoid takdimi için de verilebilir.

$S$ sonlu bir yarıgrup (monoid) ve $\langle A|R\rangle$ de $S$ nin bir yarıgrup (monoid) takdimi olsun. Eğer $|R| - |A| = \text{rank}(H_2(S^1))$ ise $S$ ye etkin yarıgrup (monoid) denir. Aksi takdirde etkin olmayan yarıgrup (monoid) denir. Eğer $|R| - |A| = \text{rank}(H_2(S^1))$ ise $S$ nin $\langle A|R\rangle$ yarıgrup (monoid) takdimine etkin yarıgrup (monoid) takdimi denir.

Etkin ve etkin olmayan yarıgrupların ilk örneklerini Prof. Dr. Hayrullah Ayık 1998 yılında, St Andrews Üniversitesinde tamamladığı doktora tezinde verdi. 2000 yılından itibaren bu alanda ilk yayınlar yayınlanmaya başlandı. Ayık ve ark (2000a), $S$ bir yarıgrup olmak üzere eğer $S$ nin bir sol sıfır veya sağ sıfır elemanı mevcut ise her $n \geq 1$ için $S$ nin $n$-inci (tamsayı) homolojisi $H_n(S)$ nin aşikar gruba eşit olduğunu; $m,n \geq 1$ için $R_{m,n}$ dikdörtgensel band olmak üzere $H_2(R_{m,n}) = \mathbb{Z}^{(m-1)(n-1)}$ olduğunu ve $m,n \geq 1$ için dikdörtgensel band $R_{m,n}$ nin etkin olduğunu; $n \geq 2$ için $Z_n$ sıfır yarıgrup olmak üzere $\text{def}(Z_n) = (n-1)(n-2)$ olduğunu yani $n \geq 3$ için $Z_n$ nin etkin olmayan yarıgrup olduğunu; $A$ boş kümeden farklı sonlu bir küme ve boyutu $n$ olsun. Bu durumda $\text{def}(SL_A) = {n(n-1)}/{2}$ olduğunu yani $n \geq 2$ için $SL_A$ nın etkin olmayan yarıgrup olduğunu gösterdi. Ayık ve ark (2000b), $S = M[G; I, \Lambda; P]$ bir sonlu Rees Matris yarıgrubu olmak üzere $H_2(S) = H_2(G) \times \mathbb{Z}^{(|I|-1)(|\Lambda|-1)}$ olduğunu gösterdi ve bir sonlu Rees Matris yarıgrubunun etkin olduğu durumları inceledi. Ayık ve ark (2007), sonlu sayıda sonlu monojenik (tek doğuraylı) monoidin direkt çarpımının etkinliği için gerek ve yeter koşulları belirledi. Çevik (2003), bir tek-ilişkili (one-relator) monoid ile bir sonsuz devirli monoidin yarı-direkt çarpımının bir takdiminin "minimal fakat etkin olmayan takdim" olması için yeterli koşulları verdi. Çevik (2005), $A$ ve $K$ iki üreteçli serbest değişmeli monoidlerin kopyaları ve herhangi bir bağlantılı monoid homomorfizmi $\theta: A \to \text{End}(K)$ için $D = K \rtimes_\theta A$, eş monoid yarı-direkt çarpımı olmak üzere $\theta$ nın matris temsiline göre $D$ nin bir standart takdiminin etkin olması için gerek ve yeter koşulları belirledi. Bu makalenin bir sonucu olarak da Çevik (2007), $D$ nin bu takdiminin "minimal fakat etkin olmayan takdim" olması için yeterli koşulları verdi. Ateş ve ark (2010), bir sonlu monojenik (tek doğuraylı) monoid ile sonlu ranklı bir serbest değişmeli monoidin ayrık genişlemesini düşünerek etkin monoidlerin ve minimal fakat etkin olmayan monoidlerin örneklerini verdi.

$S$ ve $T$ iki sonlu monoid olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpımının tüm altkümelerinin kümesi $P(S \times T)$ ile gösterilsin. $X \in P(S \times T)$, $s \in S$ ve $t \in T$ olmak üzere $sX$ ve $Xt$ kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$sX = \{(sx, y) | (x, y) \in X\} \text{ ve } Xt = \{(x, yt) | (x, y) \in X\}.$$

Bu durumda $S \times\ P(S \times T) \times T$ kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(s_1, X_1, t_1)(s_2, X_2, t_2) = (s_1 s_2, s_1 X_2 \cup X_1 t_2, t_1 t_2)$$

ikili işlem ile bir yarıgrup olur. Üstelik $(1_S, \emptyset, 1_T)$ bu yarıgrubun birim elemanı olup $S \times\ P(S \times T) \times T$ bir monoid olur. Bu monoide $S$ ve T monoidlerinin Schützenberger çarpımı denir ve $S \lozenge T$ ile gösterilir.

Biz bu çalışmamızda $S$ ve T monoidlerinin Schützenberger çarpımı $S \lozenge T$ nin ikinci (tamsayı) homolojisi $H_2(S \lozenge T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3}$ yi Squier Çözümlemesini kullanarak hesapladık. Ayrıca $S \lozenge T$ nin etkin olup olmadığı ile ilgili çalışmalar yaptık.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanacağımız önemli tanım ve teoremleri vereceğiz.

**Tanım 2.1.** $S$ bir yarıgrup ve $S^1$ kümesi de

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

olsun. $S^1$ kümesi üzerinde, $\forall x, y \in S^1$ için

$$xy = \begin{cases} xy, & x \neq 1,\ y \neq 1 \text{ ise} \\ x, & y = 1 \text{ ise} \\ y, & x = 1 \text{ ise} \\ 1, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ikili işlemi tanımlansın. Bu ikili işleme göre $S^1$ bir monoid olup bu monoide $S$ **ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid** denir.

**Tanım 2.2.** $S$ bir monoid, $1 \in S$ birim eleman ve $x \in S$ olsun. Eğer $xy = 1$ olacak şekilde bir $y \in S$ var ise $x$ e **sağ tersinir eleman** ve $zx = 1$ olacak şekilde bir $z \in S$ var ise $x$ e **sol tersinir eleman** denir. Böylece eğer $x$ hem sağ hem de sol tersinir ise $y = z$ olup

$$xy = 1 = yx$$

olur. Bu durumda $x$ e $S$ nin bir **birimi (unit)** ve $y$ ye $x$ in **tersi** denir. Bir $x \in S$ elemanının tersi varsa tektir ve genellikle $x^{-1}$ ile gösterilir.

**Tanım 2.3.** $S$ ve $T$ iki yarıgrup ve $\varphi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda $\varphi$ nin **görüntü kümesi** im$\varphi$

$$\mathrm{im}\varphi = \{x\varphi : x \in S\}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 2.4.** $S$ ve $T$ iki yarıgrup ve $\varphi : S \to T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda $\varphi$ nin **çekirdeği** Ker$\varphi$

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{(x, y) \in S \times S : x\varphi = y\varphi\}$$

şeklinde tanımlıdır.

## 2.1. Kongrüanslar

**Tanım 2.1.1.** $X$ boş olmayan bir küme olsun. $X$ üzerindeki tüm bağıntıların kümesi

$$B_X = \{\rho : \rho \subseteq X \times X\}$$

ile gösterilir ve $\emptyset$, $\Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi de $X$ üzerinde birer bağıntı olup bu bağıntılara sırasıyla **boş bağıntı**, **birim bağıntı** ve **evrensel bağıntı** denir.

$\rho$, $X$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine ***x* in denklik sınıfı** ve $X$ in tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$X/_{\rho} = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine de $X$ in $\rho$ ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

**Tanım 2.1.2.** $X$ boş olmayan bir küme ve $R$, $X$ kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. $R \subseteq X \times X$ olup $X$ üzerinde $R$ yi içeren en az bir denklik bağıntısı var olduğundan $X$ üzerinde $R$ yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. $X$ üzerinde $R$ yi içeren denklik bağıntılarının arakesiti de $R$ yi içeren bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısı $R$ yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. $R$ yi içeren bu en küçük denklik bağıntısına $R$ **tarafından doğrulan denklik bağıntısı** denir ve $R^e$ ile gösterilir, yani

$$R^e = \bigcap \{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

olur.

**Tanım 2.1.3** $X$ boş olmayan bir küme ve $R$, $X$ üzerinde yansımalı bir bağıntı $(\Delta_X \subseteq R)$ olsun. O halde

$$R = \Delta_X \circ R \subseteq R \circ R \quad \Longrightarrow R \subseteq R^2;$$
$$R^2 = \Delta_X \circ R^2 \subseteq R \circ R^2 \quad \Longrightarrow R^2 \subseteq R^3;$$

olup bu şekilde devam edilirse

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots \subseteq R^n \subseteq \cdots$$

olur. Bu durumda $X$ üzerinde $R^\infty$ bağıntısı

$$R^{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} R^n$$

olarak tanımlanır.

**Önerme 2.1.4.** $X$ boş olmayan bir küme olmak üzere $X$ üzerindeki herhangi bir $R$ yansımalı bağıntısı için tanımlanan $R^{\infty}$, $X$ üzerinde $R$ yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

**İspat:** Howie (1995), Yardımcı Teorem 1.4.8'e bakınız. ■

**Önerme 2.1.5.** $X$ boş olmayan bir küme ve $R, X$ üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R^e = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^{\infty}$ olur.

**İspat:** Howie (1995), Önerme 1.4.9'a bakınız. ■

**Tanım 2.1.6.** $S$ bir yarıgrup ve $R$ de $S$ üzerinde bir bağıntı olsun.

i) Eğer $\forall\, a \in S$ ve $\forall\, (s,t) \in R$ için $(as, at) \in R$ ise $R$ ye **sol uyumlu bağıntı** denir.
ii) Eğer $\forall\, a \in S$ ve $\forall\, (s,t) \in R$ için $(sa, ta) \in R$ ise $R$ ye **sağ uyumlu bağıntı** denir.
iii) Eğer $\forall\, (s,t), (u,v) \in R$ için $(s,t) \cdot (u,v) = (su, tv) \in R$ ise $R$ ye **uyumlu bağıntı** denir.

**Tanım 2.1.7.** $S$ bir yarıgrup ve $R$ de $S$ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

i) Eğer $R$ sol uyumlu bağıntı ise $R$ ye **sol kongrüans** denir.

ii) Eğer $R$ sağ uyumlu bağıntı ise $R$ ye **sağ kongrüans** denir.

iii) Eğer $R$ uyumlu bağıntı ise $R$ ye **kongrüans** denir.

**Önerme 2.1.8.** $S$ bir yarıgrup ve $\rho$, $S$ üzerinde bir bağıntı olsun. $\rho$ nun bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul $\rho$ nun hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

**İspat:** Howie (1995), Yardımcı Teorem 1.5.1'e bakınız. ■

**Önerme 2.1.9.** $S$ bir yarıgrup ve $\rho$ da $S$ üzerinde bir kongrüans olsun. $S/\rho$ bölüm kümesi üzerinde

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem birleşmeli olup $S/\rho$ bir yarıgruptur.

**İspat:** Howie (1995), syf 23'e bakınız. ■

**Tanım 2.1.10.** $S$ bir yarıgrup ve $R$, $S$ üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq S \times S$ olup $S$ üzerinde $R$ yi içeren en az bir kongrüans vardır. $S$ üzerinde $R$ yi içeren tüm kongrüansların arakesiti de $R$ yi içeren bir kongrüans olup bu kongrüansa $R$ **tarafından doğurulan kongrüans** denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir, yani

$$R^{\#} = \bigcap \{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, S \text{ üzerinde bir kongrüans } \}$$

olur. Tanımdan kolayca görülüyor ki $R^{\#}$, $R$ yi içeren en küçük kongrüanstır.

**Önerme 2.1.11.** $S$ bir yarıgrup ve $R$, $S$ üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

$$R^c = \{(xay, xby) | x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

şeklinde tanımlanan $R^c$ kümesi, $R$ yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır.

**İspat:** Howie (1995), Yardımcı Teorem 1.5.5'e bakınız. ■

**Önerme 2.1.12.** $S$ yarıgrubu üzerindeki her $R$ bağıntısı için $R^\# = (R^c)^e$ dir.

**İspat:** Howie (1995), Yardımcı Teorem 1.5.8'e bakınız. ■

## 2.2. Doğuray Kümeleri

**Tanım 2.2.1.** $S$ bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. $S$ nin $X$ kümesini içeren alt yarıgruplarının arakesiti de $X$ kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba $S$ nin $X$ **tarafından doğurulan alt yarıgrubu** denir ve ${}_S\langle X\rangle$ ile gösterilir. Dikkat edilirse ${}_S\langle X\rangle$, $X$ kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur. Ayrıca, ${}_S\langle X\rangle$ alt yarıgrubu $X$ kümesi üzerindeki tüm sonlu çarpımlarının kümesi olup

$${}_S\langle X\rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+;\ x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $X$ **tarafından doğurulan alt monoid** ve $X$ **tarafından doğurulan alt grup** tanımları da yapılabilir. Bunlar da sırasıyla

$${}_M\langle X\rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\} \cup \{1\} \text{ ve}$$

$${}_G\langle X\rangle = \left\{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{Z}^+; x_i \in X, \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\ (i = 1,2, \dots, n)\right\}$$

şeklindedir. $X$ kümesinin bir yarıgrup (monoid, grup) doğuray kümesi olduğu içerikten anlaşılıyorsa $X$ tarafından doğurulan alt yarıgrup (alt monoid, alt grup) kolaylık olması açısından $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

**Tanım 2.2.2.** $S$ bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi varsa bu $X$ kümesine $S$ nin bir **(yarıgrup) doğuray kümesi**, $X$ in elemanlarına ***S* nin (yarıgrup) doğurayları** ve $S$ ye de ***X* tarafından doğurulan yarıgrup** denir.

Eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde sonlu bir $\emptyset \neq X \subseteq S$ kümesi varsa $S$ ye **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Benzer tanımlar monoid ve grup için de yapılabilir.

**Tanım 2.2.3.** $S$, sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min\{|X| : S = {}_S\langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına $S$ nin **(yarıgrup) rankı** denir ve $\text{rank}_S(S)$ ile gösterilir. Ayrıca, $S$ nin $\text{rank}_S(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine de **minimal doğuray kümesi** denir. Benzer şekilde **monoid rankı** $\text{rank}_M(S)$ ve **grup rankı** $\text{rank}_G(S)$ de tanımlanabilir.

### 2.3. Yarıgrup Takdimi

**Tanım 2.3.1.** $A$ boş olmayan bir küme olsun. ($A$ ya alfabelerin kümesi denir.) $A^+$ ile $A$ dan üretilmiş tüm boş olmayan sonlu kelimelerin kümesini gösterelim. $\forall$ $a_1a_2 \cdots a_m$, $b_1b_2 \cdots b_n \in A^+$ için $A^+$, üzerinde tanımlanan

$$(a_1a_2 \cdots a_m)(b_1b_2 \cdots b_n) = a_1a_2 \cdots a_m b_1b_2 \cdots b_n$$

ikili işlem ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba $A$ üzerindeki **serbest yarıgrup** denir.

$A$ üzerindeki boş kelime $\epsilon$ ile gösterilir ise $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$, yukarıdaki ikili işlem ile bir monoid olup bu monoide $A$ üzerindeki **serbest monoid** denir.

$A$ üzerindeki serbest yarıgubun evrensel tanımı ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

**Tanım 2.3.2.** $F$ bir yarıgrup ve $A \subseteq F$ olsun. Eğer her $S$ yarıgrubu ve her $\phi: A \to S$ fonksiyonu için $i: A \to F$ içerme fonksiyonu olmak üzere $i \circ \Psi = \phi$ olacak şekilde bir tek $\Psi: F \to S$ homomorfizmi mevcut ise $F$ ye $A$ üzerinde **serbest yarıgrup** denir.

**Önerme 2.3.3.** Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik imajıdır.

**İspat:** Lallement (1979). ■

**Tanım 2.3.4.** $A$ bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O zaman $\langle A|R\rangle$ ikilisine bir **yarıgrup takdimi** denir. Ayrıca bir $S$ yarıgrubu için ${A^+}/_{R^\#} \cong S$ ise $\langle A|R\rangle$ ye $\boldsymbol{S}$ **nin bir takdimi** veya $S$ ye $\boldsymbol{\langle A|R\rangle}$ **tarafından takdim edilen yarıgrup** denir ve $S = \langle A|R\rangle$ veya $S \cong \langle A|R\rangle$ yazılır. $(r, s) \in R$ olmak üzere $(r, s)$ ikilisine $R$ nin bir ilişkisi denir ve $(r, s)$ yerine $r = s$ yazılır.

Benzer tanımlamalar monoid takdimi için de verilebilir. Bu durumda $R \subseteq A^* \times A^*$ ve ${A^*}/_{R^\#}$ gözönüne alınır.

**Tanım 2.3.5.** $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $S \cong {A^+}/_{R^\#}$ olsun. Eğer $A$ ve $R$ kümelerinin her ikiside sonlu ise $\langle A|R\rangle$ takdimine bir **sonlu takdim** ve $S$ ye de **sonlu takdime sahip yarıgrup** denir.

**Tanım 2.3.6.** $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi, $S \cong A^+/_{R^\#}$ ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $w_1$ ile $w_2$ aynı kelime ise $w_1 \equiv w_2$ yazılır. Eğer $w_1, w_2 \in A^+$, $S$ yarıgrubunun aynı elemanını temsil ediyor ise yani $(w_1, w_2) \in R^\#$ ise $w_1 = w_2$ yazılır ve $\boldsymbol{w_1 = w_2}$**, $\boldsymbol{S}$ de sağlanıyor** denir.

Eğer $w_1 \equiv w_2$ veya $w_1 \equiv urv$ ve $w_2 \equiv usv$ olacak şekilde $u, v \in A^*$ ve $(r, s) \in R \cup R^{-1}$ mevcut ise $\boldsymbol{w_1, w_2}$ **den $\boldsymbol{R}$ nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiştir** denir ve $w_1 \underset{R}{\leftrightarrow} w_2$ yazılır. İlişkiler kümesi $R$ yi vurgulamak gerekmediği sürece biz $\underset{R}{\leftrightarrow}$ yerine $\leftrightarrow$ yi kullanacağız.

Örneğin; $A = \{a, b\}$ ve $R = \{(a^4, a), (b^3, b), (ab, ba), (a^3, b^2)\}$ olsun. O zaman

$$b^3a \leftrightarrow ba,\ ab \leftrightarrow ba,\ a^4b \leftrightarrow ab,\ baba \leftrightarrow b^2a^2$$

şeklinde örnekler verilebilir.

Eğer $w_1 \equiv w_2$ veya $\forall\ i = 1,2, \dots, n-1$ için $\alpha_{i+1}, \alpha_i$ den $R$ nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmek üzere

$$w_1 \equiv \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \alpha_{n-1} \leftrightarrow \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi mevcut ise $\boldsymbol{w_2, w_1}$ **den elde edilmiştir** veya $\boldsymbol{w_2 \equiv w_1}$, $\boldsymbol{R}$ **nin bir sonucudur** denir ve $w_1 \overset{*}{\leftrightarrow} w_2$ şeklinde gösterilir. Kolayca görüleceği üzere $w_2, w_1$ den elde edilmiş ise $w_1$ de $w_2$ den elde edilir.

Örneğin; $A = \{a, b\}$ ve $R = \{(a^4, a), (b^3, b), (ab, ba), (a^3, b^2)\}$ olsun. O zaman

$$ba^3bab \leftrightarrow ba^4b^2 \leftrightarrow bab^2 \leftrightarrow ab^3 \leftrightarrow ab$$

olur. Yani $ba^3bab \equiv ab$, $R$ nin bir sonucudur.

**Teorem 2.3.7.** $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $S \cong {A^+}/{R^\#}$ olsun. Ayrıca $T$ bir yarıgrup olmak üzere $B \subseteq T$, $T$ nin bir doğurayı ve $f: A \to B$ örten bir fonksiyon olsun. O zaman $\phi: A^+ \to T$, $f$ yi geren (tek) homomorfizm olmak üzere, eğer her $(u, v) \in R$ için $u\phi = v\phi$ ise her $wR^\# \in {A^+}/{R^\#}$ için $(wR^\#)\Psi = w\phi$ olarak tanımlanan $\Psi: S \to T$ fonksiyonu bir örten homomorfizmdir.

**İspat:** Ruskuc (1995), Önerme 2.1' e bakınız. ■

**Önerme 2.3.8.** $S$ bir yarıgrup, $A \subseteq S$ olmak üzere $A, S$ nin bir doğuray kümesi ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O zaman $\langle A|R\rangle$ nin $S$ nin bir takdimi olması için gerek ve yeter koşul

i) $R$ deki tüm ilişkiler $S$ de sağlanır; ve
ii) Her $u, v \in A^+$ için $u = v$ $S$ de sağlanıyor ise $u = v$ nin $R$ nin bir sonucu olmasıdır.

**İspat:** Ruskuc (1995), Önerme 2.3' e bakınız. ■

**Önerme 2.3.9.** $S$ bir yarıgrup, $A \subseteq S$ olmak üzere $A, S$ nin bir doğuray kümesi, $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun. Eğer

i) $R$ deki tüm ilişkiler $S$ de sağlanıyor;
ii) $\forall\, w \in A^+$ için $w = \overline{w}$, $R$ nin bir sonucu olacak şekilde $\overline{w} \in W$ var; ve
iii) $|W| \leq |S|$,

ise $\langle A|R\rangle$, $S$ nin bir takdimidir.

**İspat:** Ruskuc (1995), Önerme 2.2' e bakınız. ■

**2.4. Tietze Dönüşümleri**

$A$ boş olmayan bir küme, $R \subseteq A^+ \times A^+$ $(A^* \times A^*)$ olmak üzere bir $P = \langle A|R\rangle$ yarıgrup (monoid) takdimi verilsin. $P$ nin tanımladığı yarıgrup (monoid) $S$ olsun. Dört tip Tietze dönüşümleri vardır:

i) (T1) Doğuray Ekleme: $b \notin A$ ve $w \in A^+$ olmak üzere

$$\langle A, b|R, w = b\rangle$$

takdimi $S$ yi tanımlar.

ii) (T2) Doğuray Çıkarma: $b \in A$ olsun. Eğer $b \in (A\backslash\{b\})^+$ yani bir $w \in (A\backslash\{b\})^+$ için $b = w$ ise $b$ çıkartılabilir. Her bir $u \in A^+$ için $u$ da ki $b$ lerin $w$ ile yer değiştirilmesi ile elde edilen kelime $\bar{u} \in (A\backslash\{b\})^+$ ve $\bar{R} = \{(\bar{r}, \bar{s}) : (r, s) \in R\}$ olsun. O zaman

$$\langle A\backslash\{b\}|\bar{R}\rangle$$

takdimi $S$ yi tanımlar.

iii) (T3) İlişki Ekleme: $(u, v) \in R^\#$ yani $u = v, R$ nin bir sonucu olsun. O zaman

$$\langle A|R, u = v\rangle$$

takdimi $S$ yi tanımlar.

iv) (T4) İlişki Çıkarma: $(u, v) \in R$ olsun. Eğer $(u, v) \in (R\backslash(u, v))^\#$ ise

$$\langle A|R\backslash\{u=v\}\rangle$$

takdimi $S$ yi tanımlar.

**Teorem 2.4.1.** $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ sonlu yarıgrup takdimleri olsun. Bu durumda $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ takdimleri $S$ yarıgubunu tanımlar gerek ve yeter koşul $\langle A|R\rangle$ ($\langle B|Q\rangle$) takdimine sonlu sayıda Tietze dönüşümleri uygulanarak $\langle B|Q\rangle$ ($\langle A|R\rangle$) takdimi elde edilebilir.

**İspat:** Ruskuc (1995), Önerme 2.5'e bakınız. ■

### 2.5. Grup Takdimi

**Tanım 2.5.1.** $G$ bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. ${G}/{N} = \{xN|x \in G\}$ kümesi üzerinde $xN, yN \in {G}/{N}$ olmak üzere

$$(xN)(yN) = (xy)N$$

ikili işlemi tanımlansın. Bu işlem ile ${G}/{N}$ bir gruptur ve ${G}/{N}$ grubuna ***G* nin *N* ye göre bölüm grubu** denir.

**Teorem 2.5.2.** Her $G$ grubu için ${G}/{G'}$ bir değişmeli gruptur.

**İspat:** Karakaş (2010), Ders 8, Teorem 4'e bakınız. ■

**Tanım 2.5.3.** $G$ bir grup ve $N \trianglelefteq G$ ise,

$$\delta_N : G \rightarrow {G}/{N}$$

$$\delta_N(x) = xN$$

ile tanımlanan $\delta_N$, bir örten grup homomorfizmidir. $\delta_N$ ye $G$ den $G/_N$ bölüm grubuna **doğal homomorfizm** denir.

**Tanım 2.5.4.** $F$ bir grup ve $X$ de $F$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $F$ nin her elemanı tek türlü olarak $X$ in elemanlarının (sonlu) bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa $F$ ye $X$ üzerinde **serbest grup** denir.

Bu tanıma denk olan başka bir tanım ise şu şekilde ifade edilmektedir. $F$ bir grup ve $X$ de $F$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $G$ grubu ve her $\theta: X \to G$ fonksiyonu için $x\theta = x\theta'$ $(\forall x \in X)$ olacak şekilde bir tek $\theta': F \to G$ homomorfizmi mevcut ise $F$ ye $X$ üzerinde **serbest grup** denir.

**Tanım 2.5.5.** $X$ bir küme, $F = F(X)$, $X$ üzerindeki serbest grup, $R$, $F$ nin bir alt kümesi $N = \bar{R}$ de $R$ nin $F$ deki normal kapanışı ve $G = F/_N$ olsun. $\langle X|R\rangle$ ikilisine $G$ nin bir **grup takdimi** denir ve $G = \langle X|R\rangle$ veya $G \cong \langle X|R\rangle$ yazılır.

**Tanım 2.5.6.** $\langle X|R\rangle$, $G$ nin bir grup takdimi olsun. Eğer $|X|, |R| < \infty$ ise $\langle X|R\rangle$ ikilisine bir **sonlu grup takdimi** ve $G$ grubuna da **sonlu takdim edilebilir grup** denir.

Örneğin; $X = \{x\}$ ve $R = \emptyset$ ise $\langle x| \quad \rangle = \mathbb{Z}$ sonsuz devirli grup olur.
$\langle x|x^n = e\rangle$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ ise $\mathbb{Z}_n$ nin bir grup takdimidir.

### 2.6. Serbest Değişmeli Gruplar

Sadece değişmeli gruplar söz konusu olunca, genellikle, grup işlemi için toplamsal gösterim kullanılmaktadır. Biz de bu genelliği bozmadan, toplamsal gösterim kullanacağız. Bu bağlamda eğer $G$ bir değişmeli grup, $x \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ ise $n > 0$ olması durumunda, $nx = x + x + \cdots + x$ , $n < 0$ olması durumunda, $nx = (-x) + (-x) + \cdots + (-x)$ ve $0x = 0$ dır. Böylece; $x, y \in G$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$(m+n)x = mx + nx$ ve $m(x+y) = mx + my$ dir. $X \subseteq G$ ise, $X$ in $G$ içinde ürettiği alt grup

$$\langle X \rangle = \{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_r x_r | r \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X, 1 \leq r \leq i\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

**Tanım 2.6.1.** $F$ bir değişmeli grup ve $\emptyset \neq X \subseteq F$ olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, $X$ kümesi $F$ nin bir **bazıdır** denir.

i) $\langle X \rangle = F$
ii) $X$ in herhangi $r$ tane farklı elemanı $x_1, \dots, x_r$ ve $r$ tane tamsayı $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ için $n_1 x_1 + \cdots + n_r x_r = 0$ olduğunda $n_1 = \cdots = n_r = 0$ olur.

**Tanım 2.6.2.** $F$ bir değişmeli grup ve $X \subseteq F$ olsun. Eğer $X, F$ nin bir bazı ise, $F$ grubu $X$ üzerinde **serbest değişmeli gruptur** denir.

$F, X$ üzerinde serbest değişmeli grup ise, tanım gereği, $X \neq \emptyset$ dir. Ayrıca, $0 \notin X$ tir; çünkü, $0 \in X$ olunca, tanımdaki ikinci koşul sağlanmaz. Sadece sıfırdan ibaret $\{0\}$ grubu, bazı $\emptyset$ olan serbest değişmeli grup olarak tanımlanır.

**Teorem 2.6.3.** $F$ bir değişmeli grup, $\emptyset \neq X \subseteq F$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki önermeler denktir:

i) $F, X$ üzerinde serbest değişmeli gruptur.
ii) $F \neq \{0\}$ dır ve her $a \in F \backslash \{0\}$ için $a = n_1 x_1 + \cdots + n_s x_s$ olacak biçimde tek türlü belirli, birbirinden farklı $x_1, \dots, x_s \in X$ ve sıfırdan farklı $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$ vardır.

**İspat:** Karakaş (2010), Ders 21, Teorem 1'e bakınız. ■

**Önerme 2.6.4.** $F, r$ elemanlı bir baza sahip bir serbest değişmeli grup ise

$$F \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ tane}}$$

dir.

**İspat:** Karakaş (2010), Ders 21, Önerme 1'e bakınız. ■

**Tanım 2.6.5.** Bir serbest değişmeli grubun bazının kardinalitesine o serbest değişmeli grubun **rankı** denir.

Örneğin; $\mathbb{Z}$ nin rankı 1, $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ tane}}$ nin rankı $r$ dir.

**Önerme 2.6.6.** Her sonlu üretilmiş değişmeli grup, bir sonlu üretilmiş serbest değişmeli grubun homomorf görüntüsüdür.

**İspat:** Karakaş (2010), Ders 21, Önerme 2'e bakınız. ■

**Teorem 2.6.7.** Her sonlu üretilmiş değişmeli grup $G$ için öyle $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ ve negatif olmayan bir $t$ tamsayısı vardır ki her $j = 2, \dots, r$ için ${}^{m_j}/_{m_{j-1}}$ ve

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{t \text{ tane}}$$

dir.

**İspat:** Karakaş (2010), Ders 21, Teorem 3'e bakınız. ■

**Teorem 2.6.8.** Her sonlu üretilmiş değişmeli grup $G$ için öyle (farklı olmaları gerekmeyen) asal sayılar $p_1, \dots, p_k$; pozitif tamsayılar $n_1, \dots, n_k$ ve negatif olmayan bir $t$ tamsayısı vardır ki

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1{}^{n^1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2{}^{n^2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k{}^{n^k}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{t \text{ tane}}$$

dir.

**İspat:** Karakaş (2010), Ders 21, Teorem 4'e bakınız. ■

**2.7. Monoidlerin Homoloji Grubu ve Tensör Çarpım**

Biz bu çalışmamızda işlemleri sol $R$-modül alarak yaptığımız için aksi belirtilmedikçe modül dediğimizde sol $R$-modül anlaşılmalıdır. Açıkça yapılan işlemler sağ $R$-modül alınarak da yapılabilir.

**Tanım 2.7.1.** $M$ bir ( çarpımsal ) monoid ve $\mathbb{Z}$ de tamsayılar halkası olsun. $M$ nin $\mathbb{Z}M$ monoid halkası, bazı $M$ olan serbest değişmeli gruptur ve

$$\mathbb{Z}M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+, m_i \in M, r_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,\dots,n \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{Z}M$ üzerinde "+" işlemi: $x = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} s_i m_i \in \mathbb{Z}M$ için

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) m_i$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{Z}M$ üzerinde "$\cdot$" işlemi: $x = \sum r_m m,\ \ y = \sum s_n n \in \mathbb{Z}M$ için

$$xy = \left(\sum r_m m\right)\left(\sum s_n n\right) = \sum (r_m s_n) mn$$

şeklinde tanımlıdır. Bu işlemler altında $\mathbb{Z}M$ birim elemanlı bir halkadır ve ayrıca $\mathbb{Z}M$ bir $\mathbb{Z}M$-modüldür.

**Tanım 2.7.2.** $A$ ve $B$ $R$-modül, $x, y \in A$ ve $r \in R$ olsun. Eğer $f: A \to B$ dönüşümü (fonksiyonu)

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
ii) $f(rx) = rf(x)$

koşullarını sağlıyorsa $f$ ye bir ***R*-dönüşüm (modül homomorfizması)** denir.

**Tanım 2.7.3.** $M$ bir monoid olsun. Her $x \in M$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $\circ: M \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, n) \to x \circ n = xn = n$ şeklinde tanımlanan sol etki $\mathbb{Z}M$ üzerine genişletilir ise $\mathbb{Z}$, bir $\mathbb{Z}M$-modüldür. Bu durumda

$$\left(\sum r_m m\right) n = \sum r_m n$$

olur ve $\mathbb{Z}$ ye **aşikar sol $\mathbb{Z}M$-modül** denir. Benzer şekilde **aşikar sağ $\mathbb{Z}M$-modül $\mathbb{Z}$ nin** tanımı da yapılabilir.

**Tanım 2.7.4.** $M$ bir monoid, $\mathbb{Z}M$ bir $\mathbb{Z}M$-modül ve $\mathbb{Z}$ de aşikar $\mathbb{Z}M$-modül olmak üzere

$$\varepsilon: \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}$$
$$\sum r_m m \to \sum r_m$$

şeklinde tanımlanan $\varepsilon$ bir $\mathbb{Z}M$-dönüşümdür ve $\varepsilon$ na **augmentation dönüşüm** denir.

**Tanım 2.7.5.** $f: A \to B$ bir $R$-dönüşüm olsun. O zaman $f$ nin **görüntü kümesi** $\mathrm{im}f$

$$\mathrm{im}f = \{y \in B | f(x) = y \text{ olacak şekilde bir } x \in A \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlıdır ve $f$ nin **çekirdeği** $\mathrm{Ker}f$ ise

$$\mathrm{Ker}f = \{x \in A | f(x) = 0_B\}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 2.7.6.** $A, B$ ve $C$ $R$-modül ve $f: A \to B$, $g: B \to C$ $R$- dönüşüm olsun. Eğer $\mathrm{im}f = \mathrm{Ker}g$ ise

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

dizisi $B$ de **tamdır** denir.

**Tanım 2.7.7.** $m \geq 2$ için $B_1, B_2, \dots, B_m$ $R$-modül ve $\forall 2 \leq k \leq m$ için $f_k: B_k \to B_{k-1}$ $R$-dönüşüm olmak üzere

$$\cdots \to B_k \xrightarrow{f_k} B_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \xrightarrow{f_3} B_2 \xrightarrow{f_2} B_1$$

dizisi $\forall k \geq 2$ için $B_k$ da tam ise diziye **tam dizi** denir.

**Önerme 2.7.8.** $R$-modül ve $R$-dönüşümlerin

$$\mathcal{B} = \cdots \to B_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} B_n \xrightarrow{f_n} B_{n-1} \to \cdots$$

dizisi verilsin. Bu dizinin tam olması için gerek ve yeter koşul

i) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $x_n \in B_n$ için $f_{n-1}\big(f_n(x_n)\big) = 0_{B_{n-2}}$ ve
ii) Her $n \in \mathbb{Z}$ için $f_{n+1}g_n + g_{n-1}f_n = 1_{B_n}$ olacak şekilde $g_n\colon B_n \to B_{n+1}$, $R$- dönüşümlerinin olmasıdır.

Buradaki $g_n\colon B_n \to B_{n+1}$, $R$-dönüşümlerine $\mathcal{B}$ için bir **contracting homotobi** denir.

**İspat:** Rotman (1979). ■

**Tanım 2.7.9.** $A$ bir $R$-modül ve $X \subseteq A$ olsun. $A$ nın $X$ i içeren en küçük alt modülüne $X$ **tarafından doğurulan modül** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

**Tanım 2.7.10.** $F$ bir $R$-modül ve $F = \langle X \rangle$ olsun. Eğer $\sum_{x\in X} n_x x = 0$ olduğunda $\forall x \in X$ için $n_x = 0$ ise $F$ ye $\boldsymbol{X}$ **tarafından doğurulan serbest** $\boldsymbol{R}$**-modül** ve $X$ e de $F$ nin bir **bazı** denir. Eğer $|X| = n$ ise $F$ ye $\boldsymbol{n}$**-boyutlu serbest modül** denir. Kolayca gösterilir ki $n$-boyutlu bir serbest $R$-modül $R^n$ ye izomorfiktir.

**Tanım 2.7.11.** $A$ bir $R$-modül olsun. Eğer $\forall n \geq 0$ için $F_n$ serbest $R$-modül olmak üzere $f_n: F_n \to F_{n-1}$ $(n \geq 1)$ ve $f_0: F_0 \to A$, $R$-dönüşümler ise

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \to 0$$

tam dizisine $A$ nın **serbest çözümlemesi** denir.

**Tanım 2.7.12.** $A$ sağ $R$-modül ve $B$ sol $R$-modül olmak üzere $F$, $A \times B$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde serbest değişmeli grup olsun. $x, x' \in A$; $y, y' \in B$; $r \in R$ olmak üzere eğer $N, F$ nin

$$\{(x + x', y) - (x, y) - (x', y), (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), (xr, y) - (x, ry)\}$$

kümesi tarafından doğurulan altgrubu ise $F/_N$ bölüm grubuna $A$ ile $B$ nin **tensör çarpımı** denir ve $A \otimes_R B$ ile gösterilir. Ayrıca $(x, y) + N \in A \otimes_R B$ koseti $x \otimes y$ ile gösterilir.

**Teorem 2.7.13.** $A$ bir sağ $R$-modül ve $B$ de bir sol $R$-modül olmak üzere $x, x_1, x_2 \in A$; $y, y_1, y_2 \in B$ ve $r \in R$ için

i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$

ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$

iii) $xr \otimes y = x \otimes ry$

olur.

**İspat:** Vermani (2003), syf 23'e bakınız. ■

**Teorem 2.7.14.** $A$ ile $B$ sağ $R$-modül ve $C$ ile $D$ sol $R$-modül olmak üzere $f: A \to B$ ile $g: C \to D$, $R$-dönüşümler olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f \otimes g : A \otimes C &\to B \otimes D \\ x \otimes y &\to f(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f \otimes g$ bir grup homomorfizmasıdır.

**İspat:** Rotman (1979), Teorem 1.5'e bakınız.■

**Önerme 2.7.15.** $M$ bir monoid, $\emptyset \neq X \subseteq F$ olmak üzere $F, X$ kümesi üzerinde serbest sol $\mathbb{Z}M$-modül ve $\mathbb{Z}$ de aşikar sağ $\mathbb{Z}M$-modül olsun. Bu durumda $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} F$ değişmeli grubu, $X$ üzerinde serbest değişmeli gruptur.

**İspat:** Hungerford (1974), Sonuç 5.13'e bakınız.■

**Not 2.7.16.** $\emptyset \neq X \subseteq F$ olmak üzere $F$, $X$ kümesi üzerinde serbest değişmeli grup olsun. $R \subset F$ ve $R$ nin doğurduğu altgrup $N$ ise $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ ve $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ olmak üzere $F/_N = \langle X|R\rangle$ değişmeli grup takdimi

$$\langle X|R\rangle = \langle x_1, \dots, x_m | r_1 = 0, \dots, r_n = 0\rangle$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 2.7.17.** $M$ bir monoid ve $\forall\, n \geq 0$ için $F_n$ serbest $\mathbb{Z}M$-modül olmak üzere

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

dizisi aşikar $\mathbb{Z}M$-modül $\mathbb{Z}$ nin bir sol serbest çözümlemesi olsun. Eğer bu diziye soldan $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} -$ tensör çarpımı uygulanırsa 1 birim dönüşüm olmak üzere

$$\cdots \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} F_n \xrightarrow{1\otimes f_n} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} F_{n-1} \xrightarrow{1\otimes f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{1\otimes f_2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} F_1$$
$$\xrightarrow{1\otimes f_1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} F_0 \xrightarrow{1\otimes \varepsilon} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} \mathbb{Z} \to 0$$

dizisi elde edilir.

$$\begin{aligned}(1 \otimes f_n)\big((1 \otimes f_{n+1})(x \otimes y)\big) &= (1 \otimes f_n)\big(x \otimes f_{n+1}(y)\big)\\ &= x \otimes f_n f_{n+1}(y)\\ &= x \otimes 0\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $\mathrm{im}(1 \otimes f_{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(1 \otimes f_n)$ dir. Yani yukarıdaki dizi değişmeli grupların zincir kompleksidir.

$n \geq 0$ için $M$ nin **$n$-inci (tamsayı) homolojisi** $H_n(M)$ ile gösterilir ve

$$H_n(M) = {\mathrm{Ker}(1 \otimes f_n)}\big/{\mathrm{im}(1 \otimes f_{n+1})}$$

dir. Ayrıca homoloji hesabı çözümlemenin seçiminden bağımsızdır.

**Önerme 2.7.18.** $M$ birim elemanı $1_M$ olan bir monoid ve $M^1 = M \cup \{1\}, (1 \notin M)$ olmak üzere $M^1$ birim elemanı 1 olan monoid olsun. O zaman

$$H_2(M) = H_2(M^1)$$

olur.

**İspat:** Ayık (1998), Önerme 1.22'e bakınız. ■

**Önerme 2.7.19.** $M$ bir monoid olsun. O zaman $n \geq 0$ olmak üzere

$$H_n(M) = H_n(M^1)$$

olur.

**İspat:** Ayık (1998), Önerme 1.23'e bakınız. ■

**Sonuç 2.7.20.** $S$ bir yarıgrup ve $S^1$, $S$ yarıgrubuna birim eleman 1 eklenerek elde edilen monoid olsun. O zaman $n \geq 0$ olmak üzere

$$H_n(S) = H_n(S^1)$$

olur.

**İspat:** Ayık (1998), Bölüm 6'a bakınız. ■

### 2.8. Yarıgrupların Etkinliği

**Tanım 2.8.1.** $P = \langle A|R \rangle$ sonlu yarıgrup takdimi olsun. $P = \langle A|R \rangle$ takdiminin **noksanlığı** $|R| - |A|$ ile tanımlıdır ve $\mathrm{def}(P)$ ile gösterilir. Bir sonlu takdime sahip $S$ yarıgrubunun **yarıgrup noksanlığı** $\mathrm{def}_S(S)$ ile gösterilir ve

$$\mathrm{def}_S(S) = \min\{\mathrm{def}(P) | P, S \text{ nin bir sonlu yarıgrup takdimi}\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir sonlu takdime sahip $M$ monoidinin **monoid noksanlığı** $\mathrm{def}_M(M)$ ile gösterilir ve

$$\mathrm{def}_M(M) = \min\{\mathrm{def}(P) | P, M \text{ nin bir sonlu monoid takdimi}\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir sonlu takdime sahip $G$ grubunun **grup noksanlığı** $\mathrm{def}_G(G)$ ile gösterilir ve

$$\mathrm{def}_G(G) = \min\{\mathrm{def}(P) | P, G \text{ nin bir sonlu grup takdimi}\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Böylece bir sonlu takdime sahip $G$ grubu $\mathrm{def}_G(G), \mathrm{def}_M(G), \mathrm{def}_S(G)$ noksanlıklarına ve bir sonlu takdime sahip $M$ monoidi $\mathrm{def}_M(M)$ ve $\mathrm{def}_S(M)$ noksanlıklarına sahiptir.

**Tanım 2.8.2.** $P$, sonlu takdime sahip $S$ yarıgrubu için bir sonlu yarıgrup takdimi olsun. Eğer $\mathrm{def}(P) = \mathrm{def}_S(S)$ ise $P$ ye bir **minimal yarıgrup takdimi** denir. Benzer tanımlar **minimal monoid takdimi** ve **minimal grup takdimi** için de verilebilir.

$G$ sonlu bir grup ve $\langle A|R\rangle$ de $G$ grubunun bir sonlu takdimi olmak üzere $|R| - |A| \geq 0$ (Macdonald, 1968) dır. Ayrıca $G$ sonlu bir grup ve $\langle A|R\rangle$ de $G$ grubunun bir sonlu takdimi olmak üzere $|R| - |A| \geq \mathrm{rank}(H_2(G))$ (Rotman, 1979) dir.

**Tanım 2.8.3.** $G$ (sonlu) bir grup ve $\langle A|R\rangle$ de $G$ nin bir grup takdimi olsun. Eğer $|R| - |A| = \mathrm{rank}(H_2(G))$ ise $G$ ye **etkin grup** denir. Aksi takdirde **etkin olmayan grup** denir. Eğer $|R| - |A| = \mathrm{rank}(H_2(G))$ ise $G$ nin $\langle A|R\rangle$ takdimine **etkin grup takdimi** denir.

Pride 1997 yılında, $M$ sonlu bir monoid ve $\langle A|R\rangle$ de $M$ monoidinin sonlu monoid takdimi olmak üzere

$$|R| - |A| \geq \mathrm{rank}(H_2(M))$$

olduğunu (yayınlanmamış) gösterdi.

$S$ bir yarıgrup olsun. $S$ yarıgrubunun bir yarıgrup takdimi $S^1$ monoidi için bir monoid takdimi olarak düşünülebileceği için $S$ sonlu bir yarıgrup ve $\langle A|R\rangle$ de $S$ yarıgubunun sonlu yarıgrup takdimi olmak üzere

$$|R| - |A| \geq \mathrm{rank}(H_2(S^1))$$

dir.

**Tanım 2.8.4.** $S$ sonlu bir yarıgrup (monoid) ve $\langle A|R\rangle$ de $S$ nin bir yarıgrup (monoid) takdimi olsun. Eğer $|R| - |A| = \mathrm{rank}(H_2(S^1))$ ise $S$ ye **etkin yarıgrup (monoid)** denir. Aksi takdirde **etkin olmayan yarıgrup (monoid)** denir. Eğer $|R| - |A| = \mathrm{rank}(H_2(S^1))$ ise $S$ nin $\langle A|R\rangle$ yarıgrup (monoid) takdimine **etkin yarıgrup (monoid) takdimi** denir.

Böylece; $S$ etkin bir yarıgrup (monoid, grup) olsun. $S$ nin bir $\langle A|R\rangle$ yarıgrup (monoid, grup) takdiminin etkin olması için gerek ve yeter koşul $\langle A|R\rangle$ takdiminin minimal takdim olmasıdır.

## 3.YERİNE-YAZMA SİSTEMLERİ

**Tanım 3.1.** $A$ boş olmayan bir küme ve $A^*$, $A$ üzerindeki serbest monoid olsun. $R \subseteq A^* \times A^*$ ise $R$ ye $A$ üzerinde bir **yerine-yazma sistemi (rewriting system)** denir. $(r,s) \in R$ elemanına da bir **yerine-yazma kuralı** denir ve $r \overset{R}{\rightarrow} s$ veya $r \rightarrow s$ ($R$, yerine yazma sistemini vurgulamak gerekmediği sürece ‘‘$\overset{R}{\rightarrow}$ ‘‘ yerine ‘‘$\rightarrow$‘‘ kullanacağız) şeklinde gösterilir. $w_1, w_2 \in A^*$ olmak üzere eğer $w_1 \equiv urv$ ve $w_2 \equiv usv$ olacak şekilde $(r,s) \in R$ ve $u, v \in A^*$ mevcut ise $w_1$ **yerine-yazar** $w_2$ denir ve $w_1 \rightarrow w_2$ şeklinde gösterilir.

$\rightarrow$, $A^*$ üzerinde bir bağıntı ise bu bağıntının yansımalı ve geçişmeli kapanışı $\overset{*}{\rightarrow}$ ile gösterilir. Yani, her $i = 1, \ldots, k-1$ için $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$ olmak üzere

$$w_1 \equiv \alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_k \equiv w_2$$

şeklinde sonlu bir dizi mevcut ise $w_1 \overset{*}{\rightarrow} w_2$ yazılır. $\rightarrow$ tarafından üretilen denklik bağıntısı ise ‘‘$\sim$ ‘‘ ile gösterilir. Yani, $(w_1, w_2) \in R^e$ ise $w_1 \sim w_2$ yazılır.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a, b | a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ olmak üzere $a^4b^2ab^3$ kelimesini ele alalım. Bu durumda

$$a^4b^2ab^3 \rightarrow a^2b^2ab^3 \rightarrow a^2b^2a \rightarrow a^2bab \rightarrow a^3b^2 \rightarrow ab^2$$

dır. Yani; $a^4b^2ab^3 \overset{*}{\rightarrow} ab^2$ olur.

**Tanım 3.2.** $A$ boş olmayan bir küme olmak üzere $R$, $A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi ve $w \in A^*$ olsun. $u \neq w$ olmak üzere $w \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in A^*$ mevcut ise $w$ ya **indirgenebilir ( $\boldsymbol{R}$ -indirgenebilir) kelime** aksi takdirde **indirgenemez ($\boldsymbol{R}$-indirgenemez) kelime** denir. Eğer $w \overset{*}{\rightarrow} u$ ve $u$ indirgenemez ise

$u$ ya $w$ nın **indirgenemez formu** denir. $R$ ye göre indirgenemez kelimelerin oluşturduğu kümeye ise **kanonik (normal) form** denir.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a,b|a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ olsun. $ba, a^4, b^2a$ kelimeleri indirgenebilir; $ab, a^2$, $a^2b^2$ kelimeleri indirgenemezdir.

**Tanım 3.3.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi olsun. Eğer $\forall\, n \geq 1$ için $w_n \to w_{n+1}$ olacak şekilde sonsuz bir $(w_n)$ dizisi mevcut değilse $R$ ye bir **sınırlı (terminating) yerine-yazma sistemi** denir.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a,b|a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ için $R, A$ üzerinde sınırlı yerine-yazma sistemi iken $\langle B|Q\rangle = \langle a,b|a = a^2b\, , b^3 = 1, ba = ab\rangle$ için $Q, B$ üzerinde sınırlı değildir.

**Tanım 3.4.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi olsun. $\forall\,(r,s) \in R$ için $|r| > |s|$ ise $R$ ye **uzunluk-azaltan (length-reducing) yerine-yazma sistemi** denir.

$R, A$ üzerinde bir uzunluk-azaltan yerine yazma sistemi ise $R$ sınırlıdır.

**Tanım 3.5.** $A$ iyi sıralı bir küme ve $u, v \in A^*$ olsun. Eğer $|u| > |v|$ veya $|u| = |v|$ olduğunda $u = u_1bu_2$ ve $v = u_1au_3$ ve $b > a$ olacak şekilde $a, b \in A$; $u_1, u_2, u_3 \in A^*$ mevcut ise $u \gg v$ yazılır ve buna **sol-alfabetik (left-lexicographic) sıralama** denir. Eğer $\forall\,(r,s) \in R$ için $r \gg s$ ise $R$ ye **sol-alfabetik yerine-yazma sistemi** denir.

$R, A$ üzerinde bir sol-alfabetik yerine-yazma sistemi ise $R$ sınırlıdır.

**Tanım 3.6.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi olsun. $\forall w \in A^*$ için $w \to w_1$ ve $w \to w_2$ ($w_1, w_2 \in A^*$) olduğunda $w_1 \overset{*}{\to} z$ ve $w_2 \overset{*}{\to} z$ olacak şekilde bir $z \in A^*$ var ise $R$ ye **confluent yerine-yazma sistemi** denir.

**Tanım 3.7.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi olsun. Eğer $R$ , sınırlı ve confluent bir yerine-yazma sistemi ise $R$ ye **tam (complete) yerine-yazma sistemi** denir.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a, b|a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ olmak üzere $R, A$ üzerinde sınırlı ve confluent olduğundan tam yerine-yazma sistemidir.

$\langle B|Q\rangle = \langle a, b|aba = b\ , bab = a\rangle$ olmak üzere $Q, B$ üzerinde sınırlı yerine-yazma sistemidir. Fakat $w = abab \in B^*$ için $w \equiv (aba)b \to b^2$ ve $w \equiv a(bab) \to a^2$ iken $b^2 \xrightarrow{*} z$ ve $a^2 \xrightarrow{*} z$ olacak şekilde bir $z \in B^*$ var olmadığından $Q$ confluent yerine-yazma sistemi değildir. Dolayısıyla $Q, B$ üzerinde tam yerine-yazma sistemi değildir.

**Tanım 3.8.** $A$ boş olmayan bir küme olmak üzere $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi ve $R_1 = \{r \in A^* | \exists s \in A^* \text{ için } (r, s) \in R\}$ olsun. Eğer $\forall\ (r, s) \in R$ için

$$R_1 \cap A^* r A^* = \{r\}$$

ve $s$ indirgenemez ise $R$ ye **indirgenmiş (reduced) yerine-yazma sistemi** denir.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a, b|a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ için $R, A$ üzerinde indirgenmiş yerine-yazma sistemi iken $\langle B|Q\rangle = \langle a, b|a = a^2 b, b^3 = 1,\ ba = ab\rangle$ için $Q, B$ üzerinde indirgenmiş yerine-yazma sistemi değildir.

**Tanım 3.9.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi olsun. Eğer $R$, indirgenmiş ve tam bir yerine-yazma sistemi ise $R$ ye **tek sınırlı (uniquely terminating) yerine-yazma sistemi** denir.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a, b|a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ olmak üzere $R, A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemidir.

$\langle B|Q\rangle = \langle a, b|aba = b\ , bab = a\rangle$ olmak üzere $Q, B$ üzerinde sınırlı ve indirgenmiş yerine-yazma sistemidir fakat yukarıda gösterildiği üzere confluent yerine-yazma sistemi değildir. Dolayısıyla $Q, B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi değildir.

$\langle C|Z\rangle = \langle a, b | a = a^2b,\ b^3 = 1, ba = ab\rangle$ için $Z, C$ üzerinde sınırlı ve indirgenmiş olmadığından tek sınırlı yerine-yazma sistemi değildir.

**Tanım 3.10.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir yerine-yazma sistemi olsun. $r_2 \neq \epsilon$ olmak üzere $(r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3}), (r_1r_2r_3, s_{1,2}), (r_2, s_{2,3}) \in R$ için $[(r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3})]$ ve $[(r_1r_2r_3, s_{1,2}), (r_2, s_{2,3})]$ sıralı ikililerine **overlap** denir.

**Yardımcı Teorem 3.11.** $A$ boş olmayan bir küme ve $R, A$ üzerinde bir sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

i) $R$ confluentdir.

ii) $r_2 \neq \epsilon$ olmak üzere $\forall\ (r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3}) \in R$ için $s_{1,2}r_3 \overset{*}{\rightarrow} w$ ve $r_1s_{2,3} \overset{*}{\rightarrow} w$ olacak şekilde bir $w \in A^*$ vardır ve $\forall\ (r_1r_2r_3, s_{1,2})$, $(r_2, s_{2,3}) \in R$ için $s_{1,2} \overset{*}{\rightarrow} w$ ve $r_1s_{2,3}r_3 \overset{*}{\rightarrow} w$ olacak şekilde bir $w \in A^*$ vardır.

iii) Her $w \in A^*$ için $w$ nın bir tek indirgenemez formu vardır.

**İspat:** Guba ve ark (1996), Teorem 1.1'e veya Squier (1987), Teorem 2.1'e bakınız. ■

**Not 3.12.** $[(r_1r_2r_3, s_{1,2}), (r_2, s_{2,3})]$ overlap-leri indirgenmiş bir yerine-yazma sisteminde bulunmaz.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a,b|a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ olmak üzere $R, A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğundan tüm overlap-ler aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= [(a^2a, a), (aa^2, a)],\\
V_2 &= [(aa^2, a), (a^2a, a)],\\
V_3 &= [(1a^3, a), (a^31, a)],\\
V_4 &= [(b^2b, 1), (bb^2, 1)],\\
V_5 &= [(b^2b, 1), (ba, ab)],\\
V_6 &= [(bb^2, 1), (b^2b, 1)],\\
V_7 &= [(1b^3, 1), (b^31,1)],\\
V_8 &= \big[(1(ba), ab), \big((ba)1, ab\big)\big],\\
V_9 &= [(ba, ab), (aa^2, 1)].
\end{aligned}
$$

**Tanım 3.13.** $S$ bir monoid, $\langle A|R\rangle$ de $S$ nin bir monoid takdimi ve $R$ de $A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. Squier (1987), aşikar $\mathbb{Z}S$-modül $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözümlemesini

$$P_3 \overset{\partial_3}{\to} P_2 \overset{\partial_2}{\to} P_1 \overset{\partial_1}{\to} P_0 \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

şeklinde tanımladı. Burada $P_0$, $[\ \ ]$ sembolü üzerinde serbest $\mathbb{Z}S$-modüldür ve $\varepsilon: P_0 \to \mathbb{Z}$ augmentation dönüşümü

$$\varepsilon([\ \ ]) = 1$$

şeklinde tanımlıdır. $P_1$, $\forall\, a \in A$ için $[a]$ sembolleri üzerinde tanımlı serbest $\mathbb{Z}S$-modüldür ve $\partial_1: P_1 \to P_0$, $\mathbb{Z}S$-modül homomorfizması

$$\partial_1([a]) = (a-1)[\quad]$$

şeklinde tanımlıdır. $P_2$, $\forall\,(r,s)\in R$ için $[r,s]$ sembolleri üzerinde tanımlı serbest $\mathbb{Z}S$-modüldür. Her $a\in A$ için ${}^{\partial}/_{\partial_a}: A^* \to \mathbb{Z}A^*$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
{}^{\partial}/_{\partial_a}(1) &= 0\\
{}^{\partial}/_{\partial_a}(wa) &= {}^{\partial}/_{\partial_a}(w) + w \quad (w\in A^*)\\
{}^{\partial}/_{\partial_a}(wb) &= {}^{\partial}/_{\partial_a}(w)\ (w\in A^*; b\neq a)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve ${}^{\partial}/_{\partial_a}$ fonksiyonuna **türev** denir.

Örneğin; $A=\{a,b,c\}$ ve $w = baba^2cab$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
{}^{\partial}/_{\partial_a}(w) &= b + bab + baba + baba^2c\\
{}^{\partial}/_{\partial_b}(w) &= 1 + ba + baba^2ca\\
{}^{\partial}/_{\partial_c}(w) &= baba^2
\end{aligned}$$

olur.

$\phi: \mathbb{Z}A^* \to \mathbb{Z}S$ fonksiyonu $A^*$ dan $S$ ye tanımlanan doğal monoid homomorfizminin monoid halkalarına genişlemesi olsun. Yani ${}^{A^*}/_{\mathrm{Ker}\Psi} \cong S$ olmak üzere

$$\phi\left(\sum_{w\in A^*} n_w w\right) = \sum_{w\in A^*} n_w \Psi(w)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda $\partial_2: P_2 \to P_1$ , $\mathbb{Z}S$-modül homomorfizması

$$\partial_2([r,s]) = \sum_{a\in A} \phi\left({}^{\partial}/_{\partial_a}(r) - {}^{\partial}/_{\partial_a}(s)\right)[a]$$

olarak tanımlanır. $P_3$, tüm $\left[(r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3})\right]$ overlap-leri üzerinde tanımlı serbest $\mathbb{Z}S$-modüldür. $w, u \in A^*$ ve $u$ da $w$ nın indirgenemez formu olsun. O zaman $u_i, v_i \in A^*$ ve $i = 1, \dots, q$ için $(r_i,\ s_i) \in R$ olmak üzere

$$w \equiv u_1r_1v_1 \to u_1s_1v_1 \equiv u_2r_2v_2 \to \cdots \to u_qs_qv_q \equiv u$$

şeklinde bir dizi vardır. Bu durumda $\Phi\colon A^* \to P_2$ fonksiyonu

$$\Phi(w) = \sum_{i=1}^{q} \phi(u_i)[r_i, s_i]$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\partial_3\colon P_3 \to P_2$ $\mathbb{Z}S$-modül homomorfizması

$$\begin{aligned}\partial_3\left(\left[(r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3})\right]\right) &= r_1\left[r_2r_3, s_{2,3}\right] - \left[r_1r_2, s_{1,2}\right] \\ &\quad + \Phi\left(r_1s_{2,3}\right) - \Phi\left(s_{1,2}r_3\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örneğin; $\langle A|R\rangle = \langle a, b | a^3 = a, b^3 = 1, ba = ab\rangle$ ve $\langle A|R\rangle$ takdiminin tanımladığı monoid $S$ olsun. $R$ nin $A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$R = \mathbb{Z}S \quad = \quad \left\{ \sum_{s \in S} n_s s \,\middle|\, n_s \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$P_0 \quad = \quad \left\{ \sum_{s \in S} n_s s[\quad] \,\middle|\, n_s \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$P_1 \quad = \quad \left\{ \sum_{s_a \in S} n_{s_a} s_a[a] + \sum_{s_b \in S} n_{s_b} s_b[b] \,\middle|\, \sum_{s_a \in S} n_{s_a} s_a, \sum_{s_b \in S} n_{s_b} s_b \in \mathbb{Z}S \right\}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial_1[a] &= (a-1)[\quad], \\ \partial_1[b] &= (b-1)[\quad] \end{aligned}$$

olur.

$$P_2 = \left\{ \sum_{s_i \in S} n_{s_i} s_i [a^3, a] + \sum_{s_j \in S} n_{s_j} s_j [b^3, 1] + \sum_{s_k \in S} n_{s_k} s_k [ba, ab] \right\}$$

ve $\sum_{s_i \in S} n_{s_i} s_i$ , $\sum_{s_j \in S} n_{s_j} s_j$ , $\sum_{s_k \in S} n_{s_k} s_k \in \mathbb{Z}S$ dir. $(b^3, 1) \in R$ yi ele alalım ve $[b^3, 1]$ ye $\partial_2$ yi uygulayalım. $\partial/_{\partial_a}(b^3) = 0$, $\partial/_{\partial_a}(1) = 0$, $\partial/_{\partial_b}(b^3) = 1 + b + b^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \partial_2([b^3, 1]) &= (0-0)[a] + \big((b^2 + b + 1) - 0\big)[b] \\ &= (b^2 + b + 1)[b] \end{aligned}$$

olur.

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{s_i \in S} n_{s_i} s_i \,[(a^2a,a),(aa^2,a)] + \sum_{s_j \in S} n_{s_j} s_j \,[(aa^2,a),(a^2a,a)] \\ + \sum_{s_k \in S} n_{s_k} s_k \,[(1a^3,a),(a^3 1,a)] + \sum_{s_m \in S} n_{s_m} s_m \,[(b^2b,1),(bb^2,1)] \\ + \sum_{s_n \in S} n_{s_n} s_n \,[(b^2b,1),(ba,ab)] + \sum_{s_p \in S} n_{s_p} s_p \,[(bb^2,1),(b^2b,1)] \\ + \sum_{s_q \in S} n_{s_q} s_q [(1b^3,1),(b^3 1,1)] + \sum_{s_u \in S} n_{s_u} s_u \,[(1(ba),ab),((ba)1,ab)] \\ + \sum_{s_v \in S} n_{s_v} s_v \,[(ba,ab),(aa^2,1)] \end{array} \right\}$$

ve $\sum_{s_i \in S} n_{s_i} s_i$ , $\sum_{s_j \in S} n_{s_j} s_j$ , $\sum_{s_k \in S} n_{s_k} s_k$ , $\sum_{s_m \in S} n_{s_m} s_m$ , $\sum_{s_n \in S} n_{s_n} s_n$ $\sum_{s_p \in S} n_{s_p} s_p$ , $\sum_{s_q \in S} n_{s_q} s_q$ , $\sum_{s_u \in S} n_{s_u} s_u$ , $\sum_{s_v \in S} n_{s_v} s_v \in \mathbb{Z}S$ dir. $(b^2b,1),(ba,ab)$ $\in R$ sıralı ikililerini ele alalım ve $[(b^2b,1),(ba,ab)]$ ye $\partial_3$ ü uygulayalım;

$$\begin{aligned} \partial_3[(b^2b,1),(ba,ab)] &= b^2[ba,ab] - [b^3,1] + \Phi(b^2ab) - \Phi(a) \\ &= b^2[ba,ab] - [b^3,1] + b[ba,ab] \\ &\quad +[ba,ab] + a[b^3,1] \\ &= (b^2+b+1)[ba,ab] + (a-1)[b^3,1] \end{aligned}$$

olur.

Squier (1987), $R$, tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğunda $P_3 \overset{\partial_3}{\rightarrow} P_2 \overset{\partial_2}{\rightarrow} P_1 \overset{\partial_1}{\rightarrow} P_0 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ dizisinin tam olduğunu da gösterdi. O halde bu çözümlemeye $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} -$ tensör çarpımı uygulanırsa

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} P_3 \xrightarrow{1\otimes\partial_3} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} P_2 \xrightarrow{1\otimes\partial_2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} P_1 \xrightarrow{1\otimes\partial_1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} P_0 \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

şeklinde değişmeli grupların zincir kompleksi elde edilir. $(m \otimes n) \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}$ için

$$m \otimes n = 1 \otimes mn = mn(1 \otimes 1)$$

olduğundan $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ olur. Ayrıca $n \otimes \sum_{s \in S} n_s s \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}S$ için

$$n \otimes \sum_{s \in S} n_s s = n \sum_{s \in S} n_s s \otimes 1 = \sum_{s \in S} n_s n \otimes 1 = m(1 \otimes 1)\,, (\sum_{s \in S} n_s s = m \in \mathbb{Z})$$

olduğundan $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}$ olur. Böylece $i = 1,2,3$ olmak üzere $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} P_i = \bar{P}_i$ ve $1 \otimes \partial_i = \bar{\partial}_i$ alınır ise

$$\bar{P}_3 \xrightarrow{\bar{\partial}_3} \bar{P}_2 \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z} \to 0 \tag{3.1}$$

olur. $n \otimes \sum_{a \in A} (\sum_{s \in S} n_s s)[a] \in \bar{P}_1$ için

$$\begin{aligned} n \otimes \sum_{a \in A} \left( \sum_{s \in S} n_s s \right) [a] &= \sum_{a \in A} \left( \left( n \sum_{s \in S} n_s s \right) \otimes [a] \right) \\ &= \sum_{a \in A} \left( n \sum_{s \in S} n_s \otimes [a] \right) \\ &= \sum_{a \in A} \left( n \sum_{s \in S} n_s \right) (1 \otimes [a]) \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{P}_1$, $\{(1 \otimes [a]) : a \in A\}$ kümesi üzerinde serbest değişmeli gruptur. Benzer şekilde $\bar{P}_2$, $\{(1 \otimes [r,s]) : [r,s] \in R\}$ kümesi üzerinde serbest değişmeli grup ve $\bar{P}_3$, $\{1 \otimes [(r_1 r_2, s_{1,2}), (r_2 r_3, s_{2,3})] : (r_1 r_2, s_{1,2}), (r_2 r_3, s_{2,3}) \in R\}$ kümesi üzerinde serbest değişmeli gruptur. $1 \otimes [a] \in \bar{P}_1$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial}_1(1 \otimes [a]) &= 1 \otimes (a-1)[\ \ ] = \big(1 \cdot (a-1)\big) \otimes [\ \ ] = (1-1) \otimes [\ \ ] \\
&= 0 \otimes [\ \ ] = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\bar{\partial}_1 = 0$$

olur. $w \in A^*$ ve $a \in A$ için $w$ daki $a$ - ların sayısı $\|w_a\|$ ile gösterilsin.

Örneğin; $A = \{a, b, c, d\}$ ve $w = aba^2bc$ olsun. O zaman $\|w_a\| = 3, \|w_b\| = 2, \|w_c\| = 1, \|w_d\| = 0$ dır.

$\partial_2([r,s]) = \sum_{a \in A} \phi \left( {}^{\partial}/_{\partial_a}(r) - {}^{\partial}/_{\partial_a}(s) \right) [a]$ şeklinde tanımlı idi. Eğer $r$ ve $s$ hiç $a$ içermiyorsa ${}^{\partial}/_{\partial_a}(r) - {}^{\partial}/_{\partial_a}(s) = 0$ dır. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $r, k$ tane $a$ içersin ve $s$ hiç $a$ içermesin. O halde $w_i \in (A \backslash \{a\})^*$ $(i = 1, \dots, k+1)$ için $r \equiv w_1 a w_2 a \cdots w_k a w_{k+1}$ şeklindedir. Bu durumda ${}^{\partial}/_{\partial_a}(r) = w_1 a w_2 a \cdots a w_k + w_1 a w_2 a \cdots a w_{k-1} + \cdots + w_1 a w_2 + w_1 = {}^{\partial}/_{\partial_a}(r) - {}^{\partial}/_{\partial_a}(s)$ olur. Dolayısıyla $\phi \left( {}^{\partial}/_{\partial_a}(r) - {}^{\partial}/_{\partial_a}(s) \right) = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$ olacak şekilde $s_i \in S$ vardır. Böylece

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial}_2(1 \otimes [r,s]) &= (1 \otimes \partial_2)(1 \otimes [r,s]) \\
&= 1 \otimes (s_1 + s_2 + \cdots + s_k)[a] \\
&= k \otimes [a] \\
&= k(1 \otimes [a])
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde $r$ nin ve $s$ nin her ikisinin de $a$ içermesi durumu da gösterilebilir. Bu durumda

$$\bar{\partial}_2([r,s]) = \sum_{a\in A}(\|r\|_a - \|s\|_a)[a]$$

olur. $\Phi(w) = \phi(u_1)[r_1,s_1] + \cdots + \phi(u_q)[r_q,s_q]$ şeklinde tanımlı idi. O halde

$$\overline{\Phi}(w) = 1 \otimes \sum_{i=1}^{q}\phi(u_i)[r_i,s_i] = \sum_{i=1}^{q} 1\cdot\phi(u_i)\otimes[r_i,s_i] = \sum_{i=1}^{q}(1\otimes[r_i,s_i])$$

olup $1\otimes[(r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3})] \in \bar{P}_3$ için

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_3(1\otimes[(r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3})]) &= (1\otimes\partial_3)(1\otimes[(r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3})]) \\ &= 1\otimes\big(r_1[r_2r_3,s_{2,3}] - [r_1r_2,s_{1,2}] \\ &\quad +\Phi(r_1s_{2,3}) - \Phi(s_{1,2}r_3)\big)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\bar{\partial}_3([(r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3})]) = [r_2r_3,s_{2,3}] - [r_1r_2,s_{1,2}] + \overline{\Phi}(r_1s_{2,3}) - \overline{\Phi}(s_{1,2}r_3)$$

olur.

Biz notasyonda kolaylık olması açısından $\bar{P}_1$ yi $\forall a\in A$ için $[a]$ sembolleri üzerinde, $\bar{P}_2$ yi $\forall\,(r,s)\in R$ için $[r,s]$ sembolleri üzerinde ve $\bar{P}_3$ yi tüm $[(r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3})]$ overlap-leri üzerinde tanımlı serbest değişmeli grup olarak kabul edeceğiz.

Ayrıca $w = a_1\cdots a_m \in A^*$ için $C(w) = [a_1,\ldots,a_m]$ şeklinde bir liste olarak tanımlansın.

Örneğin; $w = aba^2$ için $C(aba^2) = [a,b,a,a]$ olur.

**Örnek 3.14.** $\langle A|R\rangle = \langle a,b|a^3=1, b^3=1, ba=ab\rangle$ olsun. $R$ nin, $A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğu açıktır. Öncelikle Ker$\bar{\partial}_2$ için bir üreteç kümesi bulalım:

$$\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2 = \left\{ \sum_{(r=s)\in R} n_{(r,s)}[r,s] \in \bar{P}_2 \,\middle|\, \bar{\partial}_2([r,s]=0) \right\}$$

şeklinde tanımlı olduğundan $n_i, n_j, n_k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $w = n_i[a^3,1] + n_j[b^3,1] + n_k[ba,ab] \in \bar{P}_2$ için $w \in$ Ker$\bar{\partial}_2$ olsun. Bu durumda $\bar{\partial}_2([a^3,1]) = 3[a], \bar{\partial}_2([b^3,1]) = 3[b]$ ve $\bar{\partial}_2([ba,ab]) = 0$ olduğundan

$$\bar{\partial}_2(w) = 3n_i[a] + 3n_j[b] = 0$$
$$\Leftrightarrow n_i = n_j = 0$$

olur. O halde

$$\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2 = \langle [ba,ab]\rangle = \{n[ba,ab] | n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

olur. Şimdi im$\bar{\partial}_3$ için bir üreteç kümesi bulalım. Öncelikle tüm overlap-leri belirleyelim:

$$V_1 = [(aa^2,1),(a^2a,1)],$$
$$V_2 = [(a^2a,1),(aa^2,1)],$$
$$V_3 = [(1a^3,1),(a^3 1,1)],$$
$$V_4 = [(bb^2,1),(b^2b,1)],$$
$$V_5 = [(b^2b,1),(bb^2,1)],$$
$$V_6 = [(1b^3,1),(b^3 1,1)],$$

$$V_7 = \big[(1(ba), ab), \big((ba)1, ab\big)\big],$$
$$V_8 = [(ba, ab), (aa^2, 1)],$$
$$V_9 = [(b^2b, 1), (ba, ab)].$$

$\mathrm{im}\bar{\partial}_3 = \big\langle \bar{\partial}_3\big(\big[(r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3})\big]\big) \big| (r_1r_2, s_{1,2}), (r_2r_3, s_{2,3}) \in R \big\rangle$ olduğundan

$$\bar{\partial}_3(V_1) = [a^3, 1] - [a^3, 1] + \overline{\Phi}(a) - \overline{\Phi}(a) = 0$$
$$\bar{\partial}_3(V_2) = [a^3, 1] - [a^3, 1] + \overline{\Phi}(a^2) - \overline{\Phi}(a^2) = 0$$
$$\bar{\partial}_3(V_3) = [a^3, 1] - [a^3, 1] + \overline{\Phi}(a) - \overline{\Phi}(a) = 0$$
$$\bar{\partial}_3(V_4) = [b^3, 1] - [b^3, 1] + \overline{\Phi}(b) - \overline{\Phi}(b) = 0$$
$$\bar{\partial}_3(V_5) = [b^3, 1] - [b^3, 1] + \overline{\Phi}(b^2) - \overline{\Phi}(b^2) = 0$$
$$\bar{\partial}_3(V_6) = [b^3, 1] - [b^3, 1] = 0$$
$$\bar{\partial}_3(V_7) = [ba, ab] - [ba, ab] + \overline{\Phi}(ab) - \overline{\Phi}(ab) = 0$$
$$\begin{aligned}\bar{\partial}_3(V_8) &= [a^3, 1] - [ba, ab] + \overline{\Phi}(b) - \overline{\Phi}(aba^2) \\ &= [a^3, 1] - [ba, ab] - 2[ba, ab] - [a^3, 1] \\ &= -3[ba, ab]\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\bar{\partial}_3(V_9) &= [ba, ab] - [b^3, 1] + \overline{\Phi}(b^2ab) - \overline{\Phi}(a) \\ &= [ba, ab] - [b^3, 1] + 2[ba, ab] + [b^3, 1] \\ &= 3[ba, ab]\end{aligned}$$

olup

$$\mathrm{im}\bar{\partial}_3 = \langle \{3[ba, ab], -3[ba, ab]\} \rangle = \langle 3[ba, ab] \rangle$$

olur. O halde

$$H_2(S) = {}^{\text{Ker}\bar{\partial}_2}\Big/_{\text{im}\bar{\partial}_3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} H_2(S) &= \langle [ba,ab] | 3[ba,ab] = 0, -3[ba,ab] = 0 \rangle \\ &= \langle [ba,ab] | 3[ba,ab] = 0 \rangle = {}^{\mathbb{Z}}/_{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

**Önerme 3.15.** $G$ bir grup, $\langle A|R \rangle$ $G$ nin bir grup takdimi ve $G'$, $G$ nin komütatör altgrubu olsun. Bu durumda

$$^{G}/_{G'} = \langle A | R, ab = ba \ (\forall a, b \in A) \rangle$$

şeklindedir.

**İspat:** Johnson (1990), Bölüm 6, Önerme 1’e bakınız. ■

Örneğin; $Q = \langle a, b | aba = b, bab = a \rangle$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} ^{Q}/_{Q'} &= \langle a, b | aba = b, bab = a, ab = ba \rangle \\ &= \langle a, b | a^2 b = b, b^2 a = a, ab = ba \rangle \\ &= \langle a, b | a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle \\ &= \text{abg}\langle a, b | 2a = 0, 2b = 0 \rangle \end{aligned}$$

olur.

**Yardımcı Teorem 3.16.** $R, A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olmak üzere $\langle A|R\rangle$ monoid takdimi $S$ monoidini tanımlasın. Ayrıca $G$ , $\langle A|R\rangle$ takdiminin tanımladığı grup ve $G'$, $G$ nin komütatör altgrubu olsun. Bu durumda

$$H_1(S) = H_1(G) = {}^{G}/_{G'}$$

olur.

**İspat:** $\bar{\partial}_1 = 0$ olduğundan $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_1 = \bar{P}_1 = \langle A\rangle$ olur. $\mathrm{im}\bar{\partial}_2 = \left\langle \bar{\partial}_2([r,s]) \middle| (r,s) \in R \right\rangle$ ve $\bar{\partial}_2([r,s]) = \sum_{a\in A}(\|r\|_a - \|s\|_a)[a]$ olduğundan

$$H_1(S) = H_1(G) = {}^{G}/_{G'} = \left\langle A \middle| \sum_{a\in A}(\|r\|_a - \|s\|_a)[a] = 0 \quad \big((r,s) \in R\big) \right\rangle$$

olur. ■

$\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlasın ve $R$ , $A$ üzerinde ve $Q$ da $B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. Yardımcı Teorem 3.16 dan $\forall b \in B$ için

$$H_1(S) = \left\langle [ba,ab](a \in A) \middle| \sum_{a\in A}(\|r\|_a - \|s\|_a)[ba,ab] = 0 \quad \big((r,s) \in R\big) \right\rangle$$

ve $\forall a \in A$ için

$$H_1(T) = \left\langle [ba,ab](b \in B) \middle| \sum_{b\in B}(\|u\|_b - \|v\|_b)[ba,ab] = 0 \quad \big((u,v) \in Q\big) \right\rangle$$

olur. Ayrıca $G = \text{abg}\langle a_1, \dots, a_k | m_i a_i = 0, 1 \le i \le k\rangle$ şeklinde ve $H = \text{abg}\langle b_1, \dots, b_l | n_j b_j = 0, 1 \le j \le l\rangle$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$G \otimes_{\mathbb{Z}} H = \text{abg}\left\langle (a_i, b_j), (1 \le i \le k, 1 \le j \le l) \left| \begin{matrix} m_i(a_i, b_j) = 0 \\ n_j(a_i, b_j) = 0 \end{matrix} \right. \right\rangle$$

olur.

**Yardımcı Teorem 3.17.** $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlasın. Bu durumda $[A, B] = \{[ba, ab]: a \in A, b \in B\}$ için

$$H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T) = \left\langle [A, B] \left| \begin{matrix} \sum_{a \in A} (\|r\|_a - \|s\|_a)[ba, ab] = 0 \quad (b \in B, (r, s) \in R) \\ \sum_{b \in B} (\|u\|_b - \|v\|_b)[ba, ab] = 0 \quad (a \in A, (u, v) \in Q) \end{matrix} \right. \right\rangle$$

olur.

**İspat:** Johnson (1990), Bölüm 6'a bakınız. ■

**Önerme 3.18.** $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlasın. Bu durumda

$$\langle A \cup B | R \cup Q \cup \{(ba = ab): a \in A, b \in B\}\rangle$$

takdimi $S \times T$ direkt çarpımını tanımlar.

**İspat:** Johnson (1990), Bölüm 4, Önerme 4'e bakınız. ■

**Yardımcı Teorem 3.19.** $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlamak üzere $R$, $A$ üzerinde ve $Q$ da $B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. $\mathfrak{I} = A \cup B$ ve $\mathfrak{R} = R \cup Q \cup \{(ba = ab) \colon a \in A, b \in B\}$ için $S \times T = \langle \mathfrak{I}|\mathfrak{R}\rangle$ olup $\mathfrak{R}, \mathfrak{I}$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemidir.

**İspat:** $w \in \mathfrak{I}^* = (A \cup B)^*$ olsun. Eğer $w \in A^*$ ise $R, A$ üzerinde sınırlı olduğundan $(r_i, s_i) \in R$ ve $u_i, v_i \in A^*, i = 1, \dots, m$ olmak üzere

$$w \equiv u_1 r_1 v_1 \to u_1 s_1 v_1 \equiv u_2 r_2 v_2 \to \cdots \to u_m s_m v_m \equiv \overline{w}$$

sonlu dizisi vardır.

Eğer $w \in B^*$ ise $Q, B$ üzerinde sınırlı olduğundan $(m_i, n_i) \in Q$ ve $p_j, q_j \in B^*, j = 1, \dots, t$ olmak üzere

$$w \equiv q_1 m_1 p_1 \to q_1 n_1 p_1 \equiv q_2 m_2 p_2 \to \cdots \to q_t n_t p_t \equiv \widetilde{w}$$

sonlu dizisi vardır.

$w = w_1 \cdots w_m$ olmak üzere $\exists\, w_i \in B^+$ ve $\exists\, w_j \in A^+ (1 \leq i \neq j \leq m)$ olsun. Bu durumda $\{(ba, ab) \colon a \in A, b \in B\}$ ilişkileri gerektiği kadar kullanılarak $u = {a_1}^{n_1} \cdots {a_r}^{n_r}$ ve $v = {b_1}^{k_1} \cdots {b_s}^{k_s}$ için $w = uv$ olur. $R$ ve $Q$ sırasıyla $A$ ve $B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğundan $w', u$ nun indirgenemez formu ve $w'', v$ nin indirgenemez formu olmak üzere $u \xrightarrow{*} w'$ ve $v \xrightarrow{*} w''$ olur. Böylece $w'w'' \in (A \cup B)^*$ indirgenemez olup

$$w \xrightarrow{*} w'w''$$

sonlu dizisi vardır. O halde $\mathfrak{R}, \mathfrak{I}$ üzerinde sınırlıdır.

$R$ ve $Q$ sırası ile $A$ ve $B$ üzerinde indirgenemez olduğundan $\forall\,(r,s) \in R$ ve $\forall\,(u,v) \in Q$ için $s$ ve $v$ indirgenemez olup $\forall\,(r_1,s_1),(r_2,s_2) \in R$ ve $\forall\,(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in Q$ için $r_1$ ile $r_2$ ve $u_1$ ile $u_2$ birbirlerinin alt kelimesi değildir. Eğer $a \in A$ ve $s = a_1 \cdots a_k \in (A\backslash\{a\})^*$ olmak üzere $(a,s) \in R$ ise Tietze Dönüşümlerini uygulayarak $(a,s)$ ilişkilerini atarız. Eğer $a \in A$ ve $s = r_1 a r_2 \in A^*$ ise $(a,s) \notin R$ dir. Çünkü $(a,s) \in R$ ise $a \to r_1 a r_2 \to r_1^2 a r_2^2 \to \cdots \to r_1^n a r_2^n \to \cdots$ dizisi sonlu olmayıp bu $R$ nin sınırlı olması ile çelişir. O halde $R$ de $(a,s)$ şeklinde ilişkiler yoktur. Benzer şekilde $Q$ da $(b,u)$ şeklinde ilişkiler yoktur. Böylece $\forall a \in A, \forall b \in B$ için $(ba,ab)$ ikililerinde $ab \in (A \cup B)^*$ indirgenemezdir. Ayrıca $\forall (p_i,q_i) \in R \cup Q \cup \{(ba = ab): a \in A, b \in B\}$ için $p_i$-ler birbirinin alt kelimesi değildir. O halde $\mathfrak{R}$, indirgenmiş yerine-yazma sistemidir. Şimdi overlap-lere bakalım;

$$V(r_1,r_2,r_3) = [(r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3})] \quad \big((r_1r_2,s_{1,2}),(r_2r_3,s_{2,3}) \in R\big)$$
$$V(u_1,u_2,u_3) = [(u_1u_2,v_{1,2}),(u_2u_3,v_{2,3})] \quad \big((u_1u_2,v_{1,2}),(u_2u_3,v_{2,3}) \in Q\big)$$
$$V(r,a,b) = [(ba,ab),(ar,s)] \quad \big((ar,s) \in R, a \in A, b \in B\big)$$
$$V(u,a,b) = [(ub,v),(ba,ab)] \quad \big((ub,v) \in Q, a \in A, b \in B\big)$$

olmak üzere $R$ tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğundan $V(r_1,r_2,r_3)$ için

$$(r_1r_2)r_3 \to s_{1,2}r_3 \to w \text{ ve } r_1(r_2r_3) \to r_1s_{2,3} \to w$$

olur. $Q$ tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğundan $V(u_1,u_2,u_3)$ için

$$(u_1u_2)u_3 \to v_{1,2}u_3 \to w' \text{ ve } u_1(u_2u_3) \to u_1v_{2,3} \to w'$$

olur. $V(r,a,b)$ için

$$(ba)r \to (ab)r \equiv a(br) \overset{*}{\to} a(rb) \equiv (ar)b \to sb \text{ ve } b(ar) \to bs \overset{*}{\to} sb$$

olur. $V(u,a,b)$ için

$$(ub)a \to va \overset{*}{\to} av \text{ ve } u(ba) \to u(ab) \equiv (ua)b \overset{*}{\to} (au)b \equiv a(ub) \to av$$

olur. Böylece Yardımcı Teorem 3.11 den $R \cup Q \cup \{(ba = ab): a \in A, b \in B\}$ confluent olup aynı zamanda bir tam yerine-yazma sistemi olur. O halde $\mathfrak{R}, \mathfrak{I}$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemidir.

**Teorem 3.20.** $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ monoid takdimleri sırasıyla $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlamak üzere $R$, $A$ üzerinde ve $Q$ da $B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. O zaman

$$H_2(S \times T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \left(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\right)$$

olur.

**İspat:** Yardımcı Teorem 3.19 da verilen $S \times T$ üzerinde ki $R \cup Q \cup \{(ba = ab): a \in A, b \in B\}$ tek sınırlı yerine-yazma sistemine (3.1) zincir kompleksini uygulayalım.

$S \times T$ nin ikinci homolojisi $H_2(S \times T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\!/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3}$ yi hesaplamadan önce $S$ ve $T$ nin ikinci homolojisini bulalım. $S$ nin ikinci homolojisini hesaplamak için

$$\bar{P}_{3_{|S}} \xrightarrow{\bar{\partial}_{3_{|S}}} \bar{P}_{2_{|S}} \xrightarrow{\bar{\partial}_{2_{|S}}} \bar{P}_{1_{|S}} \xrightarrow{\bar{\partial}_{1_{|S}}} \mathbb{Z} \to 0$$

zincir kompleksini ele alalım.

$$\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|S}} = \left\{ \sum_{(r=s)\in R} n_{(r,s)}[r,s] \in \bar{P}_{2_{|S}} \middle| \bar{\partial}_{2_{|S}}\left( \sum_{(r=s)\in R} n_{(r,s)}[r,s] \right) = 0 \right\} \text{ ve}$$

$$\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|S}} = \left\langle \bar{\partial}_{3_{|S}}\left(\left[\left(r_1r_2, s_{1,2}\right), \left(r_2r_3, s_{2,3}\right)\right]\right) \middle| \left(r_1r_2, s_{1,2}\right), \left(r_2r_3, s_{2,3}\right) \in R \right\rangle$$

olmak üzere $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|S}}$ nin baz elemanlarının kümesi $X_S$ ve $\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|S}}$ nin baz elemanlarının kümesi $Y_S$ ise

$$H_2(S) = {\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|S}}} \Big/ {\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|S}}} \cong \langle X_S | Y_S = 0 \rangle \tag{3.2}$$

olur. $T$ nin ikinci homolojisini hesaplamak için

$$\bar{P}_{3_{|T}} \xrightarrow{\bar{\partial}_{3_{|T}}} \bar{P}_{2_{|T}} \xrightarrow{\bar{\partial}_{2_{|T}}} \bar{P}_{1_{|T}} \xrightarrow{\bar{\partial}_{1_{|T}}} \mathbb{Z} \to 0$$

zincir kompleksini ele alalım.

$$\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|T}} = \left\{ \sum_{(u=v)\in Q} n_{(u,v)}[u,v] \in \bar{P}_{2_{|T}} \middle| \bar{\partial}_{2_{|T}}\left( \sum_{(u=v)\in Q} n_{(u,v)}[u,v] \right) = 0 \right\} \text{ ve}$$

$$\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|T}} = \left\langle \bar{\partial}_{3_{|T}}\left(\left[\left(u_1u_2, v_{1,2}\right), \left(u_2u_3, v_{2,3}\right)\right]\right) \middle| \left(u_1u_2, v_{1,2}\right), \left(u_2u_3, v_{2,3}\right) \in Q \right\rangle$$

olmak üzere $\text{Ker}\bar{\partial}_{2_{|T}}$ nin baz elemanlarının kümesi $X_T$ ve $\text{im}\bar{\partial}_{3_{|T}}$ nin baz elemanlarının kümesi $Y_T$ ise

$$H_2(T) = {\text{Ker}\bar{\partial}_{2_{|T}}}\Big/{\text{im}\bar{\partial}_{3_{|T}}} \cong \langle X_T | Y_T = 0 \rangle \qquad (3.3)$$

olur.

$\text{Ker}\bar{\partial}_2$ için bir üreteç kümesi bulalım. $\alpha \in \text{Ker}\bar{P}_2$ ise $n_{(r,s)}, n_{(u,v)}, n_{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\alpha = \sum_{(r=s)\in R} n_{(r,s)}[r,s] + \sum_{(u=v)\in Q} n_{(u,v)}[u,v] + \sum_{a\in A, b\in B} n_{(a,b)}[ba,ab]$$

şeklindedir. $\alpha \in \text{Ker}\ \bar{\partial}_2$ olduğundan $\bar{\partial}_2(\alpha) = 0$ dır.

$$\bar{\partial}_2(\alpha) = \bar{\partial}_2\left(\sum_{(r=s)\in R} n_{(r,s)}[r,s]\right) + \bar{\partial}_2\left(\sum_{(u=v)\in Q} n_{(u,v)}[u,v]\right) + \bar{\partial}_2\left(\sum_{a\in A, b\in B} n_{(a,b)}[ba,ab]\right)$$

olup $\bar{\partial}_2([ba,ab]) = 0$ olduğundan

$$\bar{\partial}_2(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}_2\left(\sum_{(r=s)\in R} n_{(r,s)}[r,s]\right) = 0 \text{ ve } \bar{\partial}_2\left(\sum_{(u=v)\in Q} n_{(u,v)}[u,v]\right) = 0$$

olur. Bu denklemlerden sırası ile Ker$\bar{\partial}_{2|S}$ için $X_S$ üreteç kümesi ve Ker$\bar{\partial}_{2|T}$ için $X_T$ üreteç kümesi elde edilir. O halde $X = X_S \cup X_T \cup \{[ba, ab]: a \in A, b \in B\}$ olmak üzere

$$\text{Ker } \bar{\partial}_2 = \langle X \rangle$$

olur.

Şimdi Yardımcı Teorem 3.19 un ispatında verilen overlap-leri kullanarak serbest değişmeli grup im$\bar{\partial}_3$ için bir üreteç kümesi bulalım;

$$\bar{\partial}_3\left(V(r_1, r_2, r_3)\right) = \text{im}\bar{\partial}_{3|S}$$

$$\bar{\partial}_3\left(V(u_1, u_2, u_3)\right) = \text{im}\bar{\partial}_{3|T}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_3\big(V(r, a, b)\big) &= [ar, s] - [ba, ab] + \bar{\Phi}(bs) - \bar{\Phi}(abr) \\
&= [ar, s] - [ba, ab] + \sum_{c \in C(s)} [bc, cb] \\
&\quad - \sum_{c \in C(r)} [bc, cb] - [ar, s] \\
&= \sum_{c \in C(s)} [bc, cb] - \sum_{c \in C(ar)} [bc, cb] \\
&= \sum_{c \in A} (\|s\|_c - \|ar\|_c)\, [bc, cb]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_3\big(V(u, a, b)\big) &= [ba, ab] - [ub, v] + \bar{\Phi}(uab) - \bar{\Phi}(va) \\
&= [ba, ab] - [ub, v] + \sum_{d \in C(u)} [da, ad] \\
&\quad + [ub, v] \quad - \sum_{d \in C(v)} [da, ad] \\
&= \sum_{d \in C(ub)} [da, ad] - \sum_{d \in C(v)} [da, ad]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{d \in B} (\|ub\|_d - \|v\|_d)\,[da, ad]$$

olup $\forall a \in A;\ b \in B;\ (r = s) \in R;\ (u = v) \in Q$ için

$$\left\{ Y_S, Y_T, \sum_{a \in A} (\|r\|_a - \|s\|_a)[ba, ab], \sum_{b \in B} (\|u\|_b - \|v\|_b)[ba, ab] \right\}$$

kümesi $\mathrm{im}\bar{\partial}_3$ için bir üreteç kümesi olur. $[A, B] = \{[ba, ab] | a \in A, b \in B\}$ ve $a \in A;\ \ b \in B; (r = s) \in R$ ve $(u = v) \in Q$ olmak üzere

$$H_2(S \times T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3}$$

$$= \left\langle X_S \cup X_T \cup [A, B] \,\middle|\, \begin{matrix} Y_S = 0, Y_T = 0, \\ \sum_{a \in A} (\|r\|_a - \|s\|_a)[ba, ab] = 0,\ \sum_{b \in B} (\|u\|_b - \|v\|_b)[ba, ab] = 0 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \langle X_S | Y_S = 0 \rangle \times \langle X_T | Y_T = 0 \rangle \times \left\langle [A, B] \,\middle|\, \begin{matrix} \sum_{a \in A} (\|r\|_a - \|s\|_a)[ba, ab] = 0 \\ \sum_{b \in B} (\|u\|_b - \|v\|_b)[ba, ab] = 0 \end{matrix} \right\rangle$$

olur. O halde Yardımcı Teorem 3.17 ve Eşitlik $(3.2)$ ve $(3.3)$ den

$$H_2(S \times T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$$

olur.

**Örnek 3.21.** $x^3 = x^2$ olmak üzere mertebesi 2 olan sıfır yarıgrubuna birim eleman 1 eklenerek elde edilen $S = \{1, x, x^2\}$ monoidini göz önüne alalım. Açıkça $\langle a | a^3 = a^2 \rangle$ monoid takdimi $S$ monoidini tanımlar.

$\langle x, y | x^3 = 1, y^3 = 1, yx = xy \rangle$ monoid takdiminin belirlediği monoid $T$ olsun. Bu durumda $S$ ve $T$ monoidlerinin direkt çarpımı $S \times T$ nin ikinci homolojisini Teorem 3.20 yi kullarak hesaplayalım.

$S$ sıfır yarıgrup olduğundan her $n \geq 1$ için $H_n(S) = \{0\}$ (Ayık ve ark., (2000a)) olur. Ayrıca Örnek 3.14 den $H_2(T) = \mathbb{Z}_3$ ve Yardımcı Teorem 3.16 dan $H_1(T) = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ olur. O halde

$$\begin{aligned} H_2(S \times T) &= H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big) \\ &= \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \times \big(\{0\} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)\big) \\ &= \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

olur.

# 4. MONOİDLERİN SCHÜTZENBERGER ÇARPIMININ İKİNCİ (TAMSAYI) HOMOLOJİSİ

**Tanım 4.1.** $S$ ve $T$ iki sonlu monoid olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpımının tüm altkümelerinin kümesi $P(S \times T)$ ile gösterilsin. $X \in P(S \times T)$, $s \in S$ ve $t \in T$ için $sX$ ve $Xt$ kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$sX = \{(sx, y) | (x, y) \in X\} \text{ ve } Xt = \{(x, yt) | (x, y) \in X\}.$$

Bu durumda $S \times P(S \times T) \times T$ kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(s_1, X_1, t_1)(s_2, X_2, t_2) = (s_1 s_2, s_1 X_2 \cup X_1 t_2, t_1 t_2)$$

ikili işlem ile bir yarıgrup olur. Üstelik $(1_S, \emptyset, 1_T)$ bu yarıgrubun birim elemanı olup $S \times P(S \times T) \times T$ bir monoid olur. Bu monoide $S$ ve T monoidlerinin **Schützenberger çarpımı** denir ve $S \lozenge T$ ile gösterilir.

Eğer $S$ sonlu takdim edilebilir bir monoid ise uzunluk-azaltan sıralama ile $S$ tam sıralı bir kümedir. Bu bölümde $S$ ve $T$ yi iyi sıralı monoidler olarak kabul edeceğiz. Bu durumda $S \times T$ kartezyen çarpımı da

$$(s, t) \prec (s', t') \Leftrightarrow s < s' \text{ ya da } s = s' \text{ iken } t < t'$$

sıralaması ile tam sıralıdır.

$\langle A | R \rangle$ ve $\langle B | Q \rangle$ ($A$ ve $B$ ayrık kümeler) monoid takdimleri sırası ile $S$ ve $T$ monoidlerini tanımlasın. Bu durumda

$$C = \{c_{s,t} | s \in S, t \in T\} \quad \text{ve}$$

$$Z = \left\{ \begin{array}{ccc} {c_{s,t}}^2 & = & c_{s,t} \; (s \in S, t \in T) \\ c_{s,t}c_{s',t'} & = & c_{s',t'}c_{s,t} \; ((s',t') \prec (s,t) \in S \times T) \\ ac_{s,t} & = & c_{as,t}a \; (a \in A, s \in S, t \in T) \\ c_{s,t}b & = & bc_{s,tb} \; (b \in B, s \in S, t \in T) \\ ab & = & ba \; (a \in A, b \in B) \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\langle A \cup B \cup C | R \cup Q \cup Z \rangle$ takdimi, üreteç kümesi

$$\{(a, \emptyset, 1_T), (1_S, \emptyset, b), (1_S, \{(s,t)\}, 1_T) | a \in A, b \in B, (s,t) \in S \times T\}$$

olan $S \between T$ yi tanımlar. (İspat için Howie ve Ruskuc (1994), Teorem 3.2'e bakınız.)

Notasyonda kolaylık olması açısından $\pi_S: A^* \to S$ ve $\pi_T: B^* \to T$ doğal homomorfizmler olmak üzere $c_{\pi_S(a)s,t}$ yerine $c_{as,t}$ ve $c_{s,t\pi_T(b)}$ yerine $c_{s,tb}$ yazacağız. Böylece $r, p \in A^*S$ ve $u, v \in TB^*$ olmak üzere $r = p$ ve $u = v$ ilişkileri sırası ile $S$ ve $T$ de sağlanıyor ise $c_{r,u}$ ve $c_{p,v}$ aynı kelimelerdir.

**Yardımcı Teorem 4.2.** $S$ ve $T$ iki sonlu monoid olsun. $R, A$ üzerinde ve $Q, B$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olmak üzere $\langle A|R \rangle$ ve $\langle B|Q \rangle$ sırasıyla $S$ ve $T$ nin sonlu monoid takdimleri olsun. Yukarıdaki notasyonlarla $R \cup Q \cup Z$, $A \cup B \cup C$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemidir.

**İspat:** $w \in (A \cup B \cup C)^*$ olsun. $w_1 w_2 w_3$ , $w$ nın indirgenemez formu olmak üzere $w_1, w_2, w_3$ sırasıyla $B, C$ ve $A$ üzerinde indirgenemez kelimelerdir. $R \cup Q \cup Z$ nin sınırlı ve indirgenmiş olduğu açıktır. Şimdi tüm overlap-leri bulalım.

$V_1 = \left[(r_1 r_2, p_{1,2}), (r_2 r_3, p_{2,3})\right]$,
$V_2 = \left[(ra, p), (ac_{s,t}, c_{as,t}a)\right]$,
$V_3 = [(ra, p), (ab, ba)]$,
$V_4 = \left[(u_1 u_2, v_{1,2}), (u_2 u_3, v_{2,3})\right]$,

$V_5 = [(c_{s,t}c_{s,t}, c_{s,t}), (c_{s,t}c_{s,t}, c_{s,t})]$,

$V_6 = [(c_{s,t}c_{s,t}, c_{s,t}), (c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t})]\ ((s',t') \prec (s,t))$,

$V_7 = [(c_{s,t}c_{s,t}, c_{s,t}), (c_{s,t}b, bc_{s,tb})]$,

$V_8 = [(c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}), (c_{s',t'}c_{s',t'}, c_{s',t'})]\ ((s',t') \prec (s,t))$,

$V_9 = [(c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}), (c_{s',t'}c_{s'',t''}, c_{s'',t''}c_{s',t'})]\ ((s'',t'') \prec (s',t') \prec (s,t))$,

$V_{10} = [(c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}), (c_{s',t'}b, bc_{s',t'b})]\ ((s',t') \prec (s,t))$,

$V_{11} = [(ac_{s,t}, c_{as,t}a), (c_{s,t}c_{s,t}, c_{s,t})]$,

$V_{12} = [(ac_{s,t}, c_{as,t}a), (c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t})]((s',t') \prec (s,t))$,

$V_{13} = [(ac_{s,t}, c_{as,t}a), (c_{s,t}b, bc_{s,tb})]$,

$V_{14} = [(c_{s,t}b, bc_{s,tb}), (bu, v)]$,

$V_{15} = [(ab, ba), (bu, v)]$

olur. Burada $a \in A; b \in B;\ (ra = p), (r_1r_2 = p_{1,2}), (r_2r_3 = p_{2,3}) \in R;\ (bu = v)$, $(u_1u_2 = v_{1,2}), (u_2u_3 = v_{2,3}) \in Q;\ (s,t), (s',t'), (s'',t'') \in S \times T$ dir. $R$ tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğundan $V_1$ için $w \in A^+$ olmak üzere

$$(r_1r_2)r_3 \to p_{1,2}r_3 \to w \text{ ve } r_1(r_2r_3) \to r_1p_{2,3} \to w$$

olur. $V_2$ için

$$(ra)c_{s,t} \to pc_{s,t} \overset{*}{\to} c_{ps,t}p \text{ ve } r(ac_{s,t}) \to rc_{as,t}a \overset{*}{\to} c_{ras,t}(ra) \to c_{ps,t}p$$

olur. $V_3$ için

$$(ra)b \to pb \overset{*}{\to} bp \text{ ve } r(ab) \to rba \overset{*}{\to} b(ra) \to bp$$

olur. $Q$ tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğundan $V_4$ için $w' \in B^+$ olmak üzere

$$(u_1u_2)u_3 \to v_{1,2}u_3 \to w' \text{ ve } u_1(u_2u_3) \to u_1v_{2,3} \to w'$$

olur. $V_5$ için

$$(c_{s,t}c_{s,t})c_{s,t} \to c_{s,t}c_{s,t} \to c_{s,t} \text{ ve } c_{s,t}(c_{s,t}\ c_{s,t}) \to c_{s,t}c_{s,t} \to c_{s,t}$$

olur. $V_6$ için $(s',t') \prec (s,t)$ olmak üzere

$$(c_{s,t}c_{s,t})c_{s',t'} \to c_{s,t}c_{s',t'} \to c_{s',t'}c_{s,t} \text{ ve}$$
$$c_{s,t}(c_{s,t}c_{s',t'}) \to (c_{s,t}c_{s',t'})c_{s,t} \to c_{s',t'}(c_{s,t}c_{s,t}) \to c_{s',t'}c_{s,t}$$

olur. $V_7$ için

$$(c_{s,t}c_{s,t})b \to c_{s,t}b \to bc_{s,tb} \text{ ve } c_{s,t}(c_{s,t}b) \to (c_{s,t}b)c_{s,tb} \to b(c_{s,tb}c_{s,tb}) \to bc_{s,tb}$$

olur. $V_8$ için $(s',t') \prec (s,t)$ olmak üzere

$$(c_{s,t}c_{s',t'})c_{s',t'} \to c_{s',t'}(c_{s,t}c_{s',t'}) \to (c_{s',t'}c_{s',t'})c_{s,t} \to c_{s',t'}c_{s,t} \text{ ve}$$
$$c_{s,t}(c_{s',t'}c_{s',t'}) \to c_{s,t}c_{s',t'} \to c_{s',t'}c_{s,t}$$

olur. $V_9$ için $(s'',t'') \prec (s',t') \prec (s,t)$ olmak üzere

$$(c_{s,t}c_{s',t'})c_{s'',t''} \to c_{s',t'}(c_{s,t}c_{s'',t''}) \to (c_{s',t'}c_{s'',t''})c_{s,t} \to c_{s'',t''}c_{s',t'}c_{s,t} \text{ ve}$$
$$c_{s,t}(c_{s',t'}c_{s'',t''}) \to (c_{s,t}c_{s'',t''})c_{s',t'} \to c_{s'',t''}(c_{s,t}c_{s',t'}) \to c_{s'',t''}c_{s',t'}c_{s,t}$$

olur. $V_{10}$ için $(s',t') \prec (s,t)$ olmak üzere

$$(c_{s,t}c_{s',t'})b \rightarrow c_{s',t'}(c_{s,t}b) \rightarrow (c_{s',t'}b)c_{s,tb} \rightarrow bc_{s',t'b}c_{s,tb} \text{ ve}$$
$$c_{s,t}(c_{s',t'}b) \rightarrow (c_{s,t}b)c_{s',t'b} \rightarrow bc_{s,tb}c_{s',t'b} \rightarrow bc_{s',t'b}c_{s,tb}$$

olur. $V_{11}$ için

$$(ac_{s,t})c_{s,t} \rightarrow c_{as,t}(ac_{s,t}) \rightarrow (c_{as,t}c_{as,t})a \rightarrow c_{as,t}a \text{ ve}$$
$$a(c_{s,t}c_{s,t}) \rightarrow ac_{s,t} \rightarrow c_{as,t}a$$

olur. $V_{12}$ için $(s',t') \prec (s,t)$ olmak üzere

$$(ac_{s,t})c_{s',t'} \rightarrow c_{as,t}(ac_{s',t'}) \rightarrow (c_{as,t}c_{as',t'})a \rightarrow c_{as',t'}c_{as,t}a \text{ ve}$$
$$a(c_{s,t}c_{s',t'}) \rightarrow (ac_{s',t'})c_{s,t} \rightarrow c_{as',t'}(ac_{s,t}) \rightarrow c_{as',t'}c_{as,t}a$$

olur. $V_{13}$ için

$$(ac_{s,t})b \rightarrow c_{as,t}(ab) \rightarrow (c_{as,t}b)a \rightarrow bc_{as,tb}a \text{ ve}$$
$$a(c_{s,t}b) \rightarrow (ab)c_{s,tb} \rightarrow b(ac_{s,tb}) \rightarrow bc_{as,tb}a$$

olur. $V_{14}$ için

$$(c_{s,t}b)u \rightarrow bc_{s,tb}u \overset{*}{\rightarrow} (bu)c_{s,t(bu)} \rightarrow vc_{s,tv} \text{ ve}$$
$$c_{s,t}(bu) \rightarrow c_{s,t}v \rightarrow vc_{s,tv}$$

olur. $V_{15}$ için

$$(ab)u \to b(au) \overset{*}{\to} (bu)a \to va \text{ ve}$$
$$a(bu) \to av \overset{*}{\to} va$$

olur. Böylece Yardımcı Teorem 3.11 den $R \cup Q \cup Z$ confluent olur. O halde $R \cup Q \cup Z$, $A \cup B \cup C$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemidir. ■

**Teorem 4.3.** $S$ ve $T$ sonlu takdim edilebilir monoidler olmak üzere

$$H_2(S \between T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$$

olur.

**İspat:** Yardımcı Teorem 4.2 de verilen $A \cup B \cup C$ üzerinde ki $R \cup Q \cup Z$ tek sınırlı yerine-yazma sistemini ele alalım ve $R \cup Q \cup Z$ tek sınırlı yerine-yazma sistemine (3.1) zincir kompleksini uygulayalım.

$S \between T$ nin ikinci homolojisi $H_2(S \between T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3}$ yi hesaplamadan önce kabul edelim ki $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|S}}$ , $\{X_i | i \in I\}$ kümesi üzerinde; $\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|S}}$, $\{Y_j | j \in J\}$ kümesi üzerinde; $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|T}}$, $\{U_k | k \in K\}$ kümesi üzerinde; $\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|T}}$, $\{W_l | l \in L\}$ kümesi üzerinde serbest değişmeli gruplar olsun. Bu durumda

$$H_2(S) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|S}}}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|S}}} = \langle X_i \ (i \in I) | Y_j = 0, (j \in J)\rangle \ \text{ ve}$$

$$H_2(T) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|T}}}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|T}}} \langle U_k \ (k \in K) | W_l = 0, (l \in L)\rangle$$

olur. Yardımcı Teorem 4.2 nin ispatında ki overlap-leri kullanarak serbest değişmeli grup $\mathrm{im}\bar{\partial}_3$ için bir üreteç kümesi bulalım;

$$\overline{\partial_3}(V_1) = \mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|S}}$$

$$\overline{\partial_3}(V_2) = [ac_{s,t}, c_{as,t}a] - [ra, p] + \overline{\Phi}(rc_{as,t}a) - \overline{\Phi}(pc_{s,t})$$

$$\overline{\partial_3}(V_3) = \sum_{a \in C(ra)} [ab, ba] - \sum_{a \in C(p)} [ab, ba]$$

$$\overline{\partial_3}(V_4) = \mathrm{im}\bar{\partial}_{3_{|T}}$$

$$\overline{\partial_3}(V_5) = 0$$

$$\overline{\partial_3}(V_6) = [c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_7) = [c_{s,t}b, bc_{s,tb}] - [c_{s,t}^2, c_{s,t}] + [c_{s,tb}^2, c_{s,tb}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_8) = -[c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_9) = 0$$

$$\overline{\partial_3}(V_{10}) = -[c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}] + [c_{s,tb}c_{s',t'b}, c_{s',t'b}c_{s,tb}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_{11}) = [c_{s,t}^2, c_{s,t}] - [ac_{s,t}, c_{as,t}a] - [c_{as,t}^2, c_{as,t}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_{12}) = [c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}] - [c_{as,t}c_{as',t'}, c_{as',t'}c_{as,t}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_{13}) = [c_{s,t}b, bc_{s,tb}] - [ac_{s,t}, c_{as,t}a] + [ac_{s,tb}, c_{as,tb}a] - [c_{as,t}b, bc_{as,tb}]$$

$$\overline{\partial_3}(V_{14}) = -[c_{s,t}b, bc_{s,tb}] + \overline{\Phi}(c_{s,t}v) - \overline{\Phi}(c_{s,tb}u)$$

$$\overline{\partial_3}(V_{15}) = \sum_{b \in C(v)} [ab, ba] - \sum_{b \in C(bu)} [ab, ba]$$

olmak üzere $a \in A; b \in B; s, s' \in S; t, t' \in T, (ra = p) \in R; (bu = v) \in Q$ için

$$W(ra, p) = \sum_{a \in C(ra)} [ab, ba] - \sum_{a \in C(p)} [ab, ba],$$

$$W(bu, v) = \sum_{b \in C(v)} [ab, ba] - \sum_{b \in C(bu)} [ab, ba],$$

$$W(a,s,t)=\left[c_{s,t}^2,c_{s,t}\right]-\left[ac_{s,t},c_{as,t}a\right]-\left[c_{as,t}^2,c_{as,t}\right],$$
$$W(b,s,t)=\left[c_{s,t}b,bc_{s,tb}\right]-\left[c_{s,t}^2,c_{s,t}\right]+\left[c_{s,tb}^2,c_{s,tb}\right],$$
$$W(s',t',s,t)=\left[c_{s,t}c_{s',t'},c_{s',t'}c_{s,t}\right]\ \big((s',t')\prec(s,t)\big)$$

olsun. $j\in J; l\in L; a\in A; b\in B; s,s'\in S; t,t'\in T; (ra=p)\in R; (bu=v)\in Q$ ve $(s',t')\prec(s,t)$ için

$$\{Y_j,W_l,W(ra,p),W(bu,v),W(a,s,t),W(b,s,t),W(s',t',s,t)\}$$

kümesinin serbest değişmeli grup $\mathrm{im}\bar{\partial}_3$ için bir üreteç kümesi olduğunu gösterelim. $r\equiv a_1\cdots a_m$ ve $p\equiv a_1'\cdots a_n'$ $(a_1,\ldots,a_m,a_1',\ldots,a_n'\in A)$ olmak üzere

$$W_0=W(a_m,as,t),$$
$$W_i=W(a_{m-i},a_{m+1-i}\cdots a_m as,t)\ (1\le i\le m-1),$$
$$W_0'=W(a_n',s,t),$$
$$W_j'=W\big(a_{n-j}',a_{n+1-j}'\cdots a_n's,t\big)\ (1\le j\le n-1)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_3(V_2)&=\left[ac_{s,t},c_{as,t}a\right]+\bar{\Phi}\big(rc_{as,t}a\big)-\bar{\Phi}\big(pc_{s,t}\big)\\&=\left[ac_{s,t},c_{as,t}a\right]+\left[a_mc_{as,t},c_{a_mas,t}a_m\right]\\&\quad+\sum_{i=1}^{m-1}\left[a_{m-i}c_{a_{m+1-i}\cdots a_mas,t},c_{a_{m-i}\cdots a_mas,t}a_{m-i}\right]\\&\quad-\sum_{j=1}^{n-1}\left[a_{n-j}'c_{a_{n+1-j}'\cdots a_n's,t},c_{a_{n-j}'\cdots a_n's,t}a_{n-j}'\right]\\&\quad-\left[a_n'c_{s,t},c_{a_n's,t}a_n'\right]\end{aligned}$$

$$= -W(a,s,t) + \sum_{j=0}^{n-1} W_j' - \sum_{i=0}^{m-1} W_i$$

olmak üzere $\bar{\partial}_3(V_2)$ , $W(a,s,t)$ -lerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Benzer şekilde $\bar{\partial}_3(V_{14})$ de , $W(b,s,t)$-lerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Ayrıca,

$$\bar{\partial}_3(V_3) = W(ra,p)$$
$$\bar{\partial}_3(V_6) = W(s',t',s,t)$$
$$\bar{\partial}_3(V_7) = W(b,s,t)$$
$$\bar{\partial}_3(V_8) = -W(s',t',s,t)$$
$$\bar{\partial}_3(V_{10}) = -W(s',t',s,t) + W(s',t'b,s,tb)$$
$$\bar{\partial}_3(V_{11}) = W(a,s,t)$$
$$\bar{\partial}_3(V_{12}) = W(s',t',s,t) - W(as',t',as,t)$$
$$\bar{\partial}_3(V_{13}) = W(b,s,t) + W(a,s,t) - W(a,s,tb) - W(b,as,t)$$
$$\bar{\partial}_3(V_{15}) = W(bu,v)$$

olacak şekilde yazılabilir. Şimdi Ker$\bar{\partial}_2$ için bir üreteç kümesi bulalım. $\forall \alpha \in \bar{P}_2$ ve tüm katsayılar tamsayı olmak üzere

$$\alpha = \sum_{(r=s)\in R} \alpha_{(r,s)}[r,s] + \sum_{(u=v)\in Q} \alpha_{(u,v)}[u,v] + \sum_{a\in A, b\in B} \alpha_{(a,b)}[ab,ba]$$
$$+ \sum_{s\in S, t\in T} \alpha_{(s,t)}\left[c_{s,t}^2, c_{s,t}\right] + \sum_{(s',t')\prec(s,t)\in S\times T} \alpha_{(s',t',s,t)}\left[c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}\right]$$
$$+ \sum_{a\in A, s\in S, t\in T} \alpha_{(a,s,t)}\left[ac_{s,t}, c_{as,t}a\right] + \sum_{b\in B, s\in S, t\in T} \alpha_{(b,s,t)}\left[c_{s,t}b, bc_{s,tb}\right]$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\alpha \in \mathrm{Ker}\bar{\partial}_2 \Leftrightarrow \bar{\partial}_2\left(\sum_{(r=s)\in R} \alpha_{(r,s)}[r,s]\right) = 0,\ \bar{\partial}_2\left(\sum_{(u=v)\in Q} \alpha_{(u,v)}[u,v]\right) = 0 \text{ ve}$$

$$\sum_{s\in S, t\in T} \alpha_{(s,t)}[c_{s,t}] + \sum_{a\in A} \alpha_{(a,s,t)}([c_{s,t}] - [c_{as,t}]) + \sum_{b\in B} \alpha_{(b,s,t)}([c_{s,t}] - [c_{s,tb}]) = 0.$$

$\bar{\partial}_2(\sum_{(r=s)\in R} \alpha_{(r,s)}[r,s]) = 0$ ve $\bar{\partial}_2(\sum_{(u=v)\in Q} \alpha_{(u,v)}[u,v]) = 0$ denklemlerinden sırası ile $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|S}}$ için $\{X_i | i \in I\}$ üreteç kümesi ve $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2_{|T}}$ için $\{U_k | k \in K\}$ üreteç kümesi elde edilir. Şimdi $\forall (s,t) \in S \times T$ için son denklemi tekrar hesaplayalım:

$$\alpha_{(s,t)} = -\sum_{a\in A} \alpha_{(a,s,t)} - \sum_{b\in B} \alpha_{(b,s,t)} + \sum_{\substack{a'\in A, s'\in S \\ a's'=s}} \alpha_{(a',s',t)} + \sum_{\substack{b'\in B, t'\in T \\ t'b'=t}} \alpha_{(b',s,t')} \tag{4.1}$$

olmak üzere kabul edelim ki $\alpha_{(a,s,t)} = 1$ ve Eşitlik $(4.1)$'in sağ tarafındaki tüm değişkenler sıfır olsun. Bu durumda $\alpha_{(s,t)} = -1$ ve $\alpha_{(as,t)} = 1$ olur. Böylece

$$W_1(a,s,t) = [ac_{s,t}, c_{as,t}a] - [c_{s,t}^2, c_{s,t}] + [c_{as,t}^2, c_{as,t}]$$

ve benzer şekilde

$$W_2(b,s,t) = [c_{s,t}b, bc_{s,tb}] - [c_{s,t}^2, c_{s,t}] + [c_{s,tb}^2, c_{s,tb}]$$

üreteçleri elde edilir. O halde $i \in I; k \in K; a \in A; b \in B; s, s' \in S; t, t' \in T$ ve $(s',t') \prec (s,t)$ olmak üzere

$$\{X_i, U_k, [ba,ab], W_1(a,s,t), W_2(b,s,t), [c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}]\}$$

kümesi Ker$\bar{\partial}_2$ için bir üreteç kümesi olur.

Yukarıda verilen $W_1(a,s,t), W_2(b,s,t)$ ve $\left[c_{s,t}c_{s',t'}, c_{s',t'}c_{s,t}\right]$ im$\bar{\partial}_3$ için bulunan üreteç kümesinde de bulunduğundan $i \in I; k \in K; a \in A; b \in B; j \in J; l \in L; (ra = p) \in R; (bu = v) \in Q$ için

$$\begin{aligned} H_2(S \lozenge T) &= \left\langle X_i, U_k, [ab, ba] \middle| Y_j = 0, W_l = 0, W(ra,p) = 0, W(bu,v) = 0 \right\rangle \\ &= H_2(S) \times H_2(T) \times \langle [ab, ba] | W(ra,p) = 0, W(bu,v) = 0 \rangle \end{aligned}$$

olur. Yardımcı Teorem 3.17 den

$$\left\langle [ab, ba]\ (a \in A, b \in B) \middle| W(ra,p) = 0, W(bu,v) = 0\ \big((ra,p) \in R, (bu,v) \in Q\big) \right\rangle$$

ifadesi $H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)$’e eşittir. Böylece

$$H_2(S \lozenge T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$$

olur. ■

$S \lozenge T$ Schützenberger çarpımı, $S \times T$ nin ve $S \times T$ üzerindeki serbest yarılatisin bir çeşit çarpımı olarak düşünülebileceğinden Ayık ve arkadaşlarının (2000a) kanıtlamış olduğu Önerme 3.1 den ve $H_2(S \times T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \big(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\big)$ eşitliğinden son teoremin elde edilmesi şaşırtıcı değildir.

**Örnek 4.4.** Açıkça Örnek 3.21 de verilen monoidler için de $H_2(S \lozenge T) = \mathbb{Z}_3$ olur.

# 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

**Tanım 5.1.** $A$ boş olmayan bir küme ve $P(A)$ da $A$ nın tüm alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman $(P(A),\cup)$ birim elemanı $\emptyset$ ve sıfır elemanı $A$ olan bir monoiddir. Ayrıca $P^*(A) = P(A)\backslash\{\emptyset\}$ olmak üzere $P^*(A)$ bir yarıgrup olup buna $A$ üzerinde ki **serbest yarılatis** denir ve $SL_A$ ile gösterilir.

**Teorem 5.2.** $A$ boş olmayan sonlu bir küme ve boyutu $n$ olsun. Bu durumda

$$\mathrm{def}(SL_A) = {}^{n(n-1)}/_{2} \tag{5.1}$$

dir. Özel olarak $n \geq 2$ için $SL_A$ etkin değildir.

**İspat:** Ayık ve ark (2000a), Teorem 3.3'e bakınız. ∎

**Yardımcı Teorem 5.3.** $S$ bir monoid, $P = \langle A|R\rangle$ monoid takdimi $S$ nin bir takdimi, $T, S$ nin bir alt yarıgubu ve $S\backslash T$ de $S$ nin bir ideali olsun. O zaman $B \subset A$ ve $Q \subset R$ olacak şekilde $T$ nin $\langle B|Q\rangle$ takdimi vardır.

**İspat:** Campbell ve ark (2002a), Yardımcı Teorem 2.4'e bakınız. ∎

**Sonuç 5.4.** $S$ ve $T$ sol veya sağ tersinir eleman içermeyen monoidler olsun. Bu durumda $S \lozenge T$ Schützenberger çarpımı etkin değildir.

**İspat:** $U$ ve $V$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$U = \{(1_S, X, 1_T) | X \subset S \times T\}$$
$$V = (S \between T) \backslash U = \{(s, X, t) \in S \between T | (s,t) \neq (1_S, 1_T)\}.$$

$U$ kümesinin $S \between T$ nin alt yarıgrubu ve serbest yarılatis $SL_{S \times T}$ ye izomorfik olduğu açıktır. Ayrıca $V$ kümesi $S \between T$ nin bir idealidir. Böylece Yardımcı Teorem 5.3, Eşitlik (5.1) ve Teorem 4.3 den $S \between T$ etkin değildir. ■

Bu tezde $S$ ve $T$ iki sonlu monoid olmak üzere $S$ ve $T$ monoidlerinin Schützenberger çarpımı $S \between T$ nin ikinci (tamsayı) homolojisinin $S$ ve $T$ monoidlerinin direkt çarpımı $S \times T$ nin ikinci (tamsayı) homolojisine eşit olduğu, yani

$$H_2(S \between T) = H_2(S \times T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \left(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\right)$$

gösterilmiştir. Bu eşitlik, $S$ ve $T$ sol veya sağ tersinir eleman içermeyen monoidler ise $S \between T$ Schützenberger çarpımının etkin olmadığını göstermemizi sağlamıştır. Aşağıda verilen yarıgruplar ele alınarak;

- İki monoidin wreath çarpımı
- Bir monoidin Bruck-Reilly genişlemesi
- Monoidlerin güçlü yarılatisleri

$R, A$ üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olacak şekilde bir $\langle A | R \rangle$ takdimi elde edilmeye çalışılabilir. Eğer böyle bir takdim elde edilebiliyorsa Squier Çözümlemesi kullanılarak ikinci (tamsayı) homolojisi hesaplanabilir ve böylece alınan yarıgrubun etkinliği üzerine çalışmalar yapılabilir.

## KAYNAKLAR


Ateş, F., Karpuz, E., Güngör A.D., Çevik, A.S., 2010. A New Example for Minimality of Monoids. Asian-Eur. J. Math., 3: 531--544.

Ayık, H., 1998. Presentations and Efficiency of Semigroups(Ph. D. Thesis). University of St Andrews, 189 s.

Ayık, H., Campbell, C.M., O'Connor, J. J., Ruskuc, N., 2000a. Minimal Presentations and Efficiency of Semigroups. Semigroup Forum, 60: 231--242.

Ayık, H., Campbell, C.M., O'Connor, J. J., Ruskuc, N., 2000b. On the Efficiency of Finite Simple Semigroups. Turkish Journal of Math., 24: 129--146.

Ayık, H., Campbell, C.M., O'Connor, J. J., 2007. On the Efficiency of the Direct Product of Monogenic Monoids. Algebra Colloq., 14: 279--284.

Campbell, C.M., Mitchell, J. D., Ruskuc, N., 2002a. Efficiently without Using Inverses. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 133: 31--36.

Campbell, C.M., Mitchell, J. D., Ruskuc, N., 2002b. Comparing Semigroup and Monoid Presentations for Finite Monoids. Monatsh. Math., 134: 287--293.

Çevik, A.S., 2003. Minimal but Inefficient Presentations of the Semi-direct Products of Some Monoids. Semigroup Forum, 66: 1--17 .

Çevik, A.S., 2005. Efficiency for Self Semi-direct Products of the Free Abelian Monoid on Two Generators. Rocky Mountain J. Math., 35: 47--59.

Çevik, A.S., 2007. Minimal but Inefficient Presentations for Self Semidirect Products of the Free Abelian Monoid on Two Generators. Comm. Algebra, 35: 2583--2587.

Guba, V. S., Pride, S. J., 1996. Low Dimensional (Co)homology of Free Burnside Monoids. Journal Pure Appl. Algebra, 108: 61--79.

Guba, V. S., Pride, S. J., 1998. On the Left and Right Cohomological Dimension of Monoids. Bull. London Math. Soc., 30: 391--396.

Howie, J. M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York, 351 s.

Howie, J. M., Ruskuc, N., 1994. Construction and Presentations for Monoids. Comm. Algebra, 49: 6209--6224.

Hungerford, T. W., 1974. Algebra. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 502 s.

Johnson, D. L., 1990. Presentations of Groups. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 216 s.

Karakaş, H. İ., 2010. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 462 s.

Lallement, G., 1979. Semigroups and Combinatorial Applications. John Wiley & Sons, New York, 376 s.

Macdonald, I. D., 1968. The Theory of Groups. Oxford University Press, Oxford, 254 s.

Vermani, L.R., 2003. An Elemantary Approach to Homological Algebra. Chapman &Hall/CRC, New York, 315 s.

Rotman, J. J., 1979. An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York, San Francisco, London, 693 s.

Ruskuc, N., 1995. Semigoup Presentations (Ph. D. Thesis). University of St Andrews, 256 s.

Schur, I., 1907. Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. Reine Angew. Math., 132: 85--137.

Squier, C., 1987. Word Problems and a Homological Finiteness Condition for Monoids. Journal Pure Appl. Algebra, 49: 201--217.

Yağcı, M., Bugay, L., Ayık, H., 2015. On the Second Homology of the Schützenberger Product of Monoids. Turk J Math., 39: 763--772.

## ÖZGEÇMİŞ

12.04.1985 yılında Çorum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Çorum'da tamamladıktan sonra 2004 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2008 yılında mezun oldu. 2008-2009 eğitim-öğretim yılı bahar yarıyılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa kabul edildi. 2010 yılında Ç.Ü. Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve yatay geçiş yaparak 2011 yılında Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansını bitirip yine aynı yıl Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora çalışmasına başladı. Evli ve bir çocuk annesidir.