

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FEN LİSESİ ÖĞRENCİLERİNİN GÖRSEL
İSPAT GELİŞTİRME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ
ÜZERİNE BİR ÖĞRETİM DENEYİ ÇALIŞMASI

Nurefşan ŞADAN

İzmir
2017

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FEN LİSESİ ÖĞRENCİLERİNİN GÖRSEL
İSPAT GELİŞTİRME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ
ÜZERİNE BİR ÖĞRETİM DENEYİ ÇALIŞMASI

Nurefşan ŞADAN

Danışman
Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL

İzmir
2017

YEMİN

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bu eserlere atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

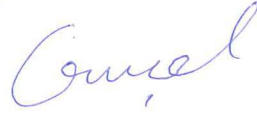
Tez Savunma Tarihi: 21.07.2017

17.07.2017

Nurefşan ŞADAN

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL 
Üye : Prof. Dr. Adem ÇELİK 
Üye : Yrd. Doç. Dr. Burçak BOZ YAMAN 

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

21/07/2017



Prof. Dr. Ali Günay BALIM
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu yorucu, zorlu ve stresli süreci benimle paylaşan ve bu süreci benim için keyifli hale getiren, üzerimde emeği geçen hayatımdaki güzel insanlara ne kadar teşekkür etsem azdır. Öncelikle hayatım boyunca her kararında yanımda olan, maddi manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, varlıklarıyla hayallerimi gerçekleştirmem için bana güç veren, beni bugünlere getiren canım annem Sema ŞADAN'a, canım babam Aytekin ŞADAN'a, pamuk prensesim babaannem Afet ŞADAN'a çok teşekkür ederim. Neşe ve finans kaynağım, doğduğu günden bugüne hayatıma güzellik katan canım kardeşim, kavga etmekten en çok keyif aldığım insan, en yakın dostum Enes Kaan ŞADAN'a her zaman yanımda olduğu için çok teşekkür ederim.

Akademik birikimine, derinliğine, üretkenliğine her zaman hayranlık duyduğum ve örnek aldığım, bu süreçte bana güvenerek ve destek vererek bir çok konuda deneyim kazanmamı sağlayan, matematiğe, matematik eğitime ve araştırma yapmaya dair bakış açımı derinleştiren, zenginleştiren, çok değerli akıl hocam, güzel insan, biricik danışmanım Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte hem fikirleriyle hem dostluğuyla yanımda olan, en stresli zamanlarımda içimi rahatlatan, bitmek tükenmek bilmeyen Harry Potter teorileri üzerine konuşmaktan en çok keyif aldığım değerli arkadaşım Ali Özgün ÖZER'e çok teşekkür ederim. Ne zaman yardıma ihtiyacım olsa hemen koşup yanıma gelen güzel insan Özge ÇOBAN'a hem desteklerinden dolayı hem de mükemmel ev sahipliğinden dolayı çok teşekkür ederim.

Huzurlu yemek davetleriyle, entellektüel sohbetleriyle, bana olan inancıyla hep yanımda olan, kendisine her zaman hayranlık duyduğum güzel insan, ablam, dostum Özgü OKKIRAN'a ve danışman hocamı bir türlü paylaşamadığım, ayaklı döviz kuru, akademik kardeşim, eğlenceli ve güzel insan Ozan OKKIRAN'a çok teşekkür ederim. İyi ki varsınız OKKIRAN ailesi.

Birlikte büyüdüğüm, birlikte bir çok özel ve güzel anımı paylaştığım canım dostum Esra Pınar KAYA'ya ve yüksek lisansın bana kattığı güzel insanlardan biri olan Berna EKEKE'ye desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Bu çalışmayı sayelerinde keyifle gerçekleştirdiğim, pırıl pırıl 6 öğrencime samimiyetleri, fedakarlıkları, özverileri ve çalışmaya katkılarından dolayı çok teşekkür ederim. Bu güzel 6 öğrenciye ulaşmamı sağlayan, bana değerli vaktini ayıran matematik öğretmeni Özgür KARKİN'e çok teşekkür ederim.

Nitel araştırmaya dair bakış açımı derinleştiren ve titizleştiren, sayesinde bir çok faydalı kaynak okuyup tartıştığımız, güzel hocam Melike YİĞİT-KOYUNKAYA'ya desteklerinden ve hoş sohbetinden dolayı çok teşekkür ederim.

Başka bir dünyanın mümkün olabildiğini gösteren, kendimi bulmamda ve matematiğin derinliğini görmemde kelimelere sığdıramayacağım kadar değerli katkısı olan Matematik Köyü aileme çok teşekkür ederim.

Bana koşulsuz sevginin ne demek olduğunu öğreten, en doğru yolun gitmek istediğim yol olduğunu gösteren, her daim çok özlediğim, hayattaki en büyük şansım, çocukluk kahramanım, güzel gözlü dedecim, biriciğim İsmail ŞADAN'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

21.07.2017

Nurefşan ŞADAN

İÇİNDEKİLER

YEMİN.....	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
Tablo Listesi	v
Şekil Listesi.....	vi
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
 BÖLÜM I.....	 1
GİRİŞ	1
1.1. Felsefi, Tarihi ve Öğretimsel Boyutlarda Görsel İspat.....	2
1.2 Problem Durumu	9
1.3. Problem Cümlesi.....	10
1.4. Sayıtlar.....	10
1.5. Sınırlılıklar	10
1.6. Kısaltmalar	10
BÖLÜM II.....	11
İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR	11
2.1 Görsel İspat İspat Mıdır?.....	11
2.4. Görsel İspatla İlgili Yapılmış Çalışmalar	16
BÖLÜM III	19
YÖNTEM	19
3.1.Araştırma Modeli.....	19
3.2. Öğretim Deneyi	19
3.3. Örneklem	21
3.4. Veri Toplama Süreci.....	23
3.5. Veri Toplama Araçları.....	26
3.5.1. Gİ Çözüm Kağıtları.....	26
3.5.2 Video ve Ses Kayıt Transkriptleri.....	30
3.6 Verilerin Analizi.....	32
 BÖLÜM IV.....	 36
BULGULAR VE YORUMLAR	36

4.1 Birinci Alt Probleme Ait Bulgular	36
4.1.1 Gİ Çözümleme Kağıtlarından Elde Edilen Bulgular	36
4.1.2 Odak Grup Görüşmesinden Elde Edilen Bulgular	55
4.2 İkinci ve Üçüncü Alt Probleme Yönelik Bulgular	61
4.2.1 Birinci Öğretim Sürecinden Elde Edilen Bulgular.....	61
4.2.1 İkinci Öğretim Sürecinden Elde Edilen Bulgular.....	104
4.4 Dördüncü Alt Probleme Yönelik Bulgular.....	141
BÖLÜM V	147
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	147
EKLER	162



Tablo Listesi

Tablo 1: Veri Toplama Aşamaları Kullanılan Araçlar ve Veri Analiz Yöntemleri...	33
Tablo 2: Gİ Değerlendirme Rubriği Sonuçları.....	39
Tablo 3: Odak Grup Görüşmesi'nin 2. Bölümü.....	56
Tablo 4: 1.Gİ'ye Yönelik Yapılan Tartışma Bölümü	58
Tablo 5: 2.Gİ'ye Yönelik Yapılan Tartışma Bölümünden Bir Kesit	58
Tablo 6: Öğrencilerin 1.Gİ Geliştirme Aşamasında Üzerinde Çalıştıkları İfadeler.	100
Tablo 7: 1. Gİ Geliştirme Sürecinde Belirlenen Hatalar ve Zorluklar.....	103
Tablo 8: Öğrencilerin 2.Gİ Geliştirme Aşamasında Üzerinde Çalıştıkları İfadeler.	138
Tablo 9: 1. Gİ ve 2. Gİ Geliştirme Süreçlerinde Belirlenen Hatalar ve Zorluklar...	139
Tablo 10: Öğrencileri Görüşleri	141

Şekil Listesi

Şekil 1: Burton'ın (2007: 107) Kitabında Yer Alan Eski Çin Metinlerindeki Pisagor Teoreminin ispatı	3
Şekil 2: Gnomon'un Aritmetik Klasığı ve Cennetin Dairesel Yolları Kitabında Yer Alan Pisagor Teoremi İle İlgili Görseller	4
Şekil 3: Bhaskara'nın Pisagor Teoremi İspatı.....	4
Şekil 4: Oliver Bryne'nın Euclid'in Elemanlar Kitabı'ndan Kesitler	5
Şekil 5: Rufus Issacs'ın Mathematics Magazine'de Yayınlanan Makalesindeki Pisagor Teoremi İspatı	6
Şekil 6: Rufus Issacs Mathematics Magazine'de Yayınlanan Makalesindeki Eş Üç Parçaya Ayırma Problemi İspatı	6
Şekil 7: Yates'in Eş Üç Parçaya Ayırma Problemi İspatı.....	6
Şekil 8: Brown'un Çalışmasında Yer Alan Görsel Yanılsama Örneği	12
Şekil 9: Araştırma Kapsamında Gerçekleştirilen Öğretim Deneyinin Aşamaları	23
Şekil 10: Uygulama Süreci.....	26
Şekil 11: Algı Aşamasında Kullanılan Gİ Çözüm Kağıtları	27
Şekil 12: Birinci Öğretim Bölümünde Kullanılan Gİ'ler.....	28
Şekil 13: İkinci Öğretim Bölümünde Kullanılan Gİ'ler	29
Şekil 14: Algı Aşamasında Verilen Birinci Görsel İspat	37
Şekil 15: Algı Aşamasında Verilen İkinci Görsel İspat.....	37
Şekil 16: Algı Aşamasında Verilen Üçüncü Görsel İspat.....	38
Şekil 17: İrem'in Birinci Soruya Yanıtı	40
Şekil 18: Görkem'in Birinci Soruya Yanıtı	40
Şekil 19: Deniz'in Birinci Soruya Yanıtı	41
Şekil 20: Emre'nin Birinci Soruya Yanıtı.....	42
Şekil 21: Efe'nin Birinci Soruya Yanıtı	42
Şekil 22: Yiğit'in Birinci Soruya Yanıtı	43
Şekil 23: İrem'in İkinci Soruya Yanıtı.....	44
Şekil 24: Görkem'in İkinci Soruya Yanıtı	45
Şekil 25: Deniz'in İkinci Soruya Yanıtı.....	46
Şekil 26: Emre'nin İkinci Soruya Yanıtı.....	47
Şekil 27: Efe'nin İkinci Soruya Yanıtı.....	48

Şekil 28: Yiğit'in İkinci Soruya Yanıtı	49
Şekil 29: İrem'in Üçüncü Soruya Yanıtı.....	51
Şekil 30: Görkem'in Üçüncü Soruya Yanıtı	52
Şekil 31: Deniz'in Üçüncü Soruya Yanıtı.....	53
Şekil 32: Emre'nin Üçüncü Soruya Yanıtı	53
Şekil 33: Efe'nin Üçüncü Soruya Yanıtı.....	54
Şekil 34: Yiğit'in Üçüncü Soruya Yanıtı	55
Şekil 35: Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan İlk Gİ	62
Şekil 36: Görkem'in Çözüm İçin Önerdiği Yol	63
Şekil 37: Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan İkinci Gİ	64
Şekil 38: Efe'nin Çözüm İçin Yaptığı Çizim	65
Şekil 39: Efe'nin Çözüm İçin Yaptığı Çizim	65
Şekil 40: Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan Üçüncü Gİ	66
Şekil 42: İrem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	69
Şekil 43: İlayda'nın 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	69
Şekil 44: İrem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali	70
Şekil 45: Yiğit'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ.....	71
Şekil 46: Yiğit'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	71
Şekil 47: Yiğit'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali	72
Şekil 48: Görkem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ.....	73
Şekil 49: Görkem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	73
Şekil 50: Görkem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali .	75
Şekil 51: Emre'nin 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	75
Şekil 52: Emre'nin 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	75
Şekil 53: Deniz'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	76
Şekil 54: Deniz'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	77
Şekil 55: Deniz'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali	78
Şekil 56: İrem'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	79
Şekil 57: İrem'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	79
Şekil 58: İrem'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali	81
Şekil 59: Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	81
Şekil 60: Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	81

Şekil 61: Efe'nin Klinik Görüşmede Taralı Alanı Hesaplamak İçin Kullandığı Parçalama	82
Şekil 62: Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali	84
Şekil 63: Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesi.....	85
Şekil 64: Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesinin GGB Versiyonu	85
Şekil 65: Emre'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesi.....	87
Şekil 66: Emre'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesinin GGB Versiyonu	87
Şekil 67: Deniz'in 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesi.....	88
Şekil 68: Deniz'in 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesinin GGB Versiyonu	88
Şekil 69: Görkem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ.....	89
Şekil 70: Görkem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	90
Şekil 71: İrem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	91
Şekil 72: İrem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	92
Şekil 73: Deniz'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	92
Şekil 74: Deniz'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali	93
Şekil 75: Emre'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	94
Şekil 76: Emre'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	94
Şekil 77: Efe'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	95
Şekil 78: Efe'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	96
Şekil 79: Görkem'in 1. Aşama 4. İfade İçin Yaptığı Gİ Denemesi	98
Şekil 80: Yiğit'in 1. Aşama 4. İfade İçin Yaptığı Gİ Denemesi	99
Şekil 81: Efe'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	112
Şekil 82: Efe'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	112
Şekil 83: Efe'nin 2. Aşama 1. Gİ İçin Yaptığı Diğer Çizim	113
Şekil 84: Efe'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	114
Şekil 85: Emre'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	114
Şekil 86: Emre'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu.....	115
Şekil 87: Emre'nin n=4 İçin Yaptığı Gİ Denemesi.....	116
Şekil 88: Görkem'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesi	116

Şekil 89: Görkem'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesinin GGB Versiyonu	117
Şekil 90: Yiğit'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesi	117
Şekil 91: Yiğit'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesinin GGB Versiyonu	118
Şekil 92: Emre'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	120
Şekil 93: Emre'nin 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	120
Şekil 94: Deniz'nin 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	121
Şekil 95: Deniz'in 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	122
Şekil 96: İrem'in 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	123
Şekil 97: İrem'in 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	123
Şekil 98: Görkem'in 2. Aşama 2. İfade İçin Yanıtı	125
Şekil 99: Efe'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	126
Şekil 100: Efe'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	126
Şekil 101: Görkem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	127
Şekil 102: Görkem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	127
Şekil 103: İrem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	128
Şekil 104: İrem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyon	128
Şekil 105: İrem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali ...	130
Şekil 106: Yiğit'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	130
Şekil 107: Yiğit'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	131
Şekil 108: Emre'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	132
Şekil 109: Emre'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu ...	132
Şekil 110: Emre'nin 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	134
Şekil 111: Emre'nin 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu ...	134
Şekil 112: Görkem'in 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ	136
Şekil 113: Görkem'in 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu	137

ÖZET

Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması

Nurefşan ŞADAN

Bu çalışmanın amacı, Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini analiz etmek ve görsel ispatın matematik öğrenme sürecinde kullanımına yönelik örnek bir uygulama sunmaktır. Katılımcılar, İzmir ilindeki bir Fen Lisesi'nin 11. sınıfında öğrenim gören 6 öğrenciden oluşmuştur. Çalışmada, bir nitel araştırma yöntemi olan Öğretim Deneyi uygulanmıştır. Araştırma süreci, bu yönetime uygun olacak şekilde üç aşamada yürütülmüştür. İlk aşamada, öğretim bölümünün daha verimli planlanması için, öğrencilerin görsel ispata dair algıları (örneklerini anlayıp açıklayabilme) belirlenmiştir. İkinci aşamada, görsel ispata dair sınıf tartışmalarından ve çeşitli görsel ispat etkinliklerinden oluşan iki öğretim bölümü gerçekleştirilmiş süreç sonunda öğrenciler verilen matematiksel ifadelerle yönelik görsel ispatlar geliştirmişlerdir. Ardından sürecin incelenmesi için, geliştirdikleri görsel ispatlara yönelik klinik görüşmeler yapılmıştır. Üçüncü aşamada ise öğretim sürecini değerlendirilerek, öğrencilerin görsel ispata ve sürece dair görüşleri alınmıştır. Öğretim deneyinden elde edilen verilerin analizi, geriye dönük (retrospective) ve ileriye dönük (prospective) analiz olmak üzere iki şekilde yapılmıştır. Yapılan her uygulama sonrası ileriye dönük analizler yapılmış, bir sonraki uygulamaya bu analizler doğrultusunda devam etmiştir. Öğrencilerin geliştirdikleri görsel ispatlar ve bu süreci deneyimleme şekilleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Görsel ispat geliştirme sürecinde yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Yapılan klinik görüşmelerde bu hatalar ve zorluklar giderilmeye çalışılmıştır. Süreç sonunda öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecini yararlı bulduklarını ve süreçten keyif aldıkları belirtmişler, görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Anahtar kelimeler: Görsel ispat, sözsüz ispat, öğretim deneyi, fen lisesi öğrencileri, ispat öğretimi, matematik öğretimi.



ABSTRACT

A Teaching Experiment Study On Examining Visual Proof Development Processes of Science High School Students

Nurefşan ŞADAN

The aim of this study is to analyze the visual proof development processes of the students of Science High School and to provide a sample application for the use of visual proof in mathematics lessons. In line with this aim, the participants consisted of 6 students who attended 11th grade of a Science High School in İzmir. In the study, the Teaching Experiment, which is a type of qualitative research method, was used. The research process was carried out in three stages, as appropriate to this method. In the first stage, for the more efficient planning of the teaching department, the students' perceptions of visual impression (understand and explain the examples) have been determined. In the second stage, a two-stage lecture section consisting of class discussion on visual expression and various visual proof activities was developed and students developed visual proofs for the given mathematical expressions. Clinical interviews were then conducted for the visual proofs they developed for the follow-up examination. In the third stage, the teaching process was evaluated and opinions of the students about visual impression and process were taken. The analysis of the data obtained from the teaching experiment was made in two ways, retrospective and prospective analysis. After each application, prospective analyzes were made and the next application continued in the direction of these analyzes. The visual proofs developed by the students and the ways of experiencing this process have been tried to be revealed. The mistakes they made during the visual proof development process and the difficulties they faced were identified. These errors and difficulties have been tried to be solved in clinical interviews. At the end of the process, the students stated that they enjoyed the process of visual proof development and they enjoyed the process and stated that they should be used in mathematics classes.

Key words: Visual proof, proofs without words, teaching experiment, science high school students, proof teaching.

BÖLÜM I

GİRİŞ

İspatın, matematik ve matematik eğitiminin önemli yapı taşlarından biri olduğu birçok araştırmacı tarafından belirtilmiştir (Knuth, 2002; Lee, 2002; Hanna & Jahnke, 1996). Ülkemizde ve uluslararası pek çok öğretim programlarında da ispata ilişkin becerilere çokça vurgu yapılmaktadır. Öğretim programımızda öğretmenlerin, öğrencilere matematiği öğrenme sürecinde akıl yürütme ve ispat yapma becerilerini geliştirebilmeleri için uygun ortamlar hazırlamaları gerektiği belirtilmektedir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi' nin (The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), yayınladığı prensip ve standartlarda anaokulundan 12. sınıf seviyesine kadar akıl yürütme ve ispatla (reasoning and proof) ilgili gerçekleştirilmesi beklenen hedefler belirlenmiştir.

İspatın önemi ve gerekliliğine yönelik vurgulamalara karşın yapılan çalışmalar, matematik eğitiminde ispat öğretiminin hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin pek çok sıkıntı yaşadığı bir alan olduğunu göstermektedir (Moore, 1994; Di Martino ve Maracci, 2009; Hoyles & Jones, 1998). Araştırmalarda karşılaşılan problemlere ve sıkıntılara yönelik birçok nokta ortaya konmuştur. Problem yaşanan noktaları ana hatları ile anlamak için Moore'un çalışmasından yararlanılabilir. Moore (1994), matematik ve matematik öğretmenliği bölümünden öğrencilerin formal ispatlar geliştirmeyi öğrenirken yaşadıkları bilişsel zorlukları incelediği çalışmada üç ana zorluk tanımlamıştır. Bunlar kavramsal anlamadaki zorluklar, matematiksel dil ve formülleri kullanmadaki zorluklar ve bir ispata nereden başlanacağını bilinmemesi olarak belirtilmiştir. Bu zorlukların ispatı anlama, kavrama, yapma ve değerlendirmede önemli engeller oluşturduğu açıktır. Çok sayıda araştırmacı ve matematik eğitimcisi söz konusu zorlukların aşılmasına yönelik çalışmalar yapmıştır. Bazı araştırmacılar ispatların nasıl daha iyi kavranabileceğine odaklanırken (Lin & Yang, 2007; Yang & Lin, 2008; Yang, 2012), bazıları örnek modül, ders tasarımları yaparak bunları uygulamayı ve ulaşılan noktaları ortaya koymayı tercih etmiştir (Leron, 1983; Knuth, 2002; Hanna & Barbeau, 2010; Derek, 2011), bazıları ispat

öğretiminde teknolojiden yararlanma yollarına odaklanırken bazıları sınıf içi iletişim ve tartışma sürecinin organizasyonuna ve yönetimine yoğunlaşmıştır (Hoyley & Jones, 1998; De Villiers, 2004; İpek, 2010). Bir grup çalışma da ise ispatın mekanizmasına ve biçimsel formatına alternatif yaklaşımlar getirerek ispat öğretimi daha etkili kılmaya çalışıldığı görülmektedir (Hemmi, 2010; De Villiers, 1998; Çağlayan, 2015).

Yukarıda sıralanan zorlukların giderilmesinde faydalı olabilecek ve ispat öğretiminde yardımcı olacak alternatif yaklaşımlardan biri de görsel ispattır. İzleyen bölümde görsel ispat nedir? Nasıl ortaya çıkmıştır? Belirtilen zorlukların giderilmesinde görsel ispatlardan nasıl yararlanılabilir? sorularına cevaplar verilmeye çalışılacaktır.

1.1.Felsefi, Tarihi ve Öğretimsel Boyutlarda Görsel İspat

Son yirmi-otuz yılda, bilgisayar bilimleri başta olmak üzere, matematik, matematik eğitimi, bilişsel psikoloji ve felsefedeki gelişmelerin sonucu olarak, mantık ve matematikte görselleştirilmeye ilgi artmıştır (Mancosu, 2005). Bu durumun sonucunda formal ve sistematik bir yapıya sahip olan matematikte çeşitli tartışmalar ortaya çıkmıştır. Bunlardan biri de, görsel temsillerin, geleneksel ispatların alternatifi olarak kullanılması tartışmalarıdır. Bu tartışmalarda iki uç taraf vardır. Bir taraf görsel temsillerin ispata yardımcı araçlar olmaktan ileri gidemeyeceğini söylerken, diğer taraf görsel temsillerin kendilerinin ispatı oluşturabileceğini iddia etmektedirler (Hanna ve Sidoli, 2007). İkinci görüşe sahip olanların elini güçlendiren araçların başında görsel ispatlar gelmektedir.

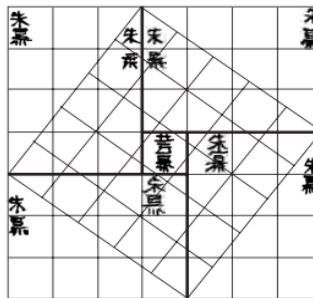
Görsel ispatlar, sözel dil ile hiçbir yorum yapılmadan noktalar, kareler, küreler, toplar, küpler vb. ile kolaylıkla çizilebilen araçlar kullanılarak oluşturulabilen tamamen diyagramlara dayalı ispatlardır (Alsina & Nelsen, 2010; Bardelle, 2010). Görsel ispatlar için Nelsen (1993), *'gözlemciye belirli bir ifadenin neden doğru olabileceğini ve aynı zamanda bunu kanıtlamaya nasıl başlayabileceğini görmesine yardımcı olan resimler veya diyagramlardır'* demiştir. Bu ispatlar uzun yıllardır kullanılmasına rağmen, Amerika Matematik Konseyi (Mathematics Association of America, MAA) tarafından 1970'lerin ortalarından itibaren düzenli olarak yayınlanan

Mathematics Magazine ve *The College Mathematics Journal* da yayınlamaya başlayana kadar resmi olarak bir isme ve tanıma sahip değildiler (Miller, 2012). Bu bölümün devamında görsel ispatların, tarihte ilk rastlanılan örneklerinden başlayarak resmi kimlik kazandığı dönemlerden günümüze kadar olan serüveni kısaca yansıtılmaya çalışılacaktır.

Antik dönemlerde matematikçilerin, matematiksel fikirlerini ifade etmek için sık sık resimler/şekiller/diyagramlardan yararlandıkları bilinmektedir (Alsina ve Nelsen, 2010). Burton'un (2007) *Matematik Tarihi* kitabındaki Pisagor teoreminin geometrik ispatının tarihini ele aldığı bölümde, Yunan ve Babil medeniyetlerinden izole bir şekilde gelişmiş olan çağdaş Çin medeniyetinin daha zarif kanıtlara muhtemelen daha önce sahip olduğu belirtilmiştir (Şekil 1). Günümüze ulaşan Gnomon'un Aritmetik Klasığı ve Cennetin Dairesel Yolları (*Zhou Bi Suan Jing /Arithmetic Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven*) isimli formal matematik teorilerini içeren en eski Çince metinde bahsedilen kanıtlara örnek bulunmuştur. Bu eserin tarihinin yaklaşık olarak M.Ö. 600 civarı olduğu düşünülmektedir. Bu kaynakta yer alan bir diyagram, Pisagor teoreminin bilinen en eski kanıtıdır (Şekil 2).

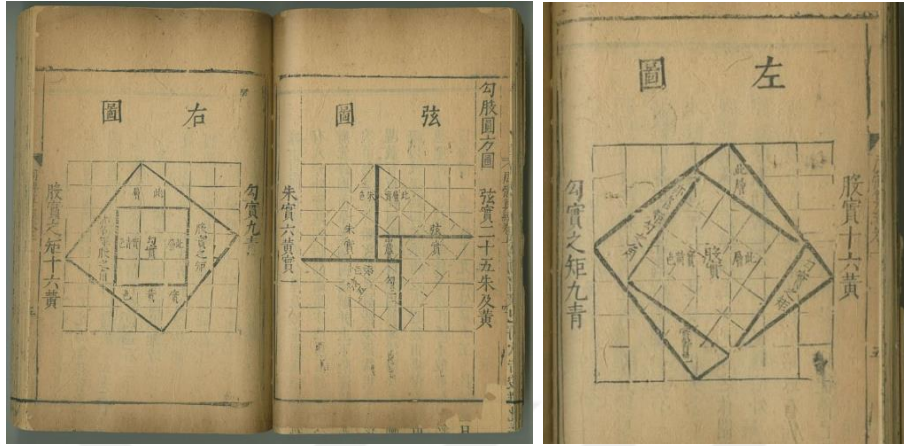
Şekil 1

Burton'ın (2007: 107) Kitabında Yer Alan Eski Çin Metnindeki Pisagor Teoreminin ispatı



Şekil 2

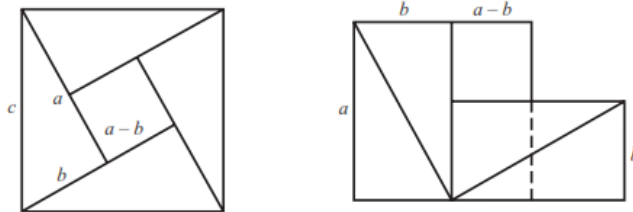
**Gnomon'un Aritmetik Klasığı ve Cennetin Dairesel Yolları Kitabında Yer Alan
Pisagor Teoremi İle İlgili Görseller**



Bu diyagramda görülen kanıtın zarafeti birçok matematikçiyi kendine hayran bırakmıştır. Bunlardan biri de Hindu Matematikçi Bhaskara (1114-1185) olmuştur. Bhaskara, bu diyagramdan esinlenerek Cebir kitabı Vijaganita'nın kök hesaplamaları bölümünde pisagor bağıntısıyla ilgili bir diyagram çizmiştir (Şekil 3). Bu diyagramda, bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunu bir kenar kabul eden kare çizilmiştir. Çizilen karenin içerisine bu dik üçgenden 4 tane yerleştirilmiştir. Böylece ortada, kenarları üçgenin iki kenarı arasındaki farka eşit olan bir kare kalmıştır. Bu kare ve çizilen dört üçgen, iki karenin alanlarını oluşturmak için yeniden düzenlenmiştir. Karelerin kenar uzunlukları ilk çizilen üçgenin kenar uzunluklarına karşılık gelmiştir. Bhaskara bu diyagram için sadece “İşte/Bakın/Dikkatli Bakın/Görün! (Behold!)” demiş, başka bir açıklama yapmamıştır (Burton, 2007).

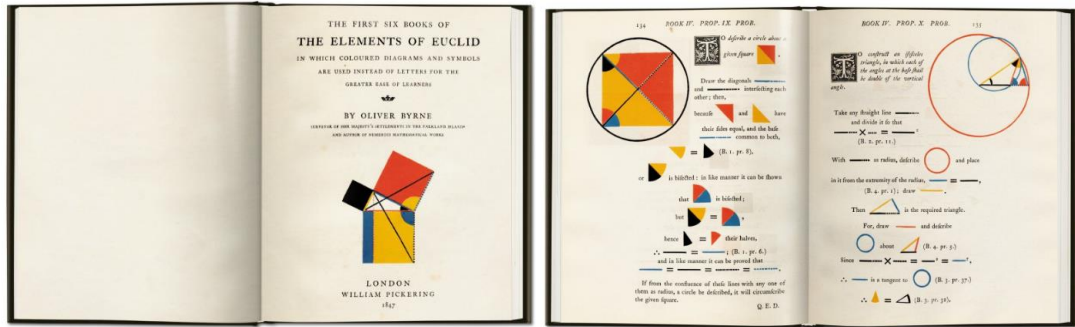
Şekil 3

Bhaskara'nın Pisagor Teoremi İspatı



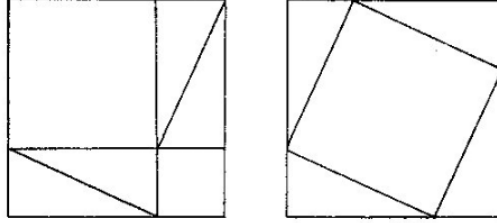
Matematiksel ispatların bu görsel formu, Oliver Byrne'a o kadar ilgi çekici gelmiştir ki 1847'de Öklid'in Elemanlar'ını (Elements) öğrencilerin anlamasını daha kolay hale getirmek için harfler yerine renkli diyagramların ve sembollerin kullanıldığı bir versiyonunu yazmıştır (Şekil 4). Bu kitapta renkleri ve resimleri kullanarak, isimlendirmeler ve işaretler dahil tüm metinsel tartışmaları en aza indirgeyerek Öklid'in geometrisini öğretmeye çalışmıştır. Byrne'ın ortaya koyduğu bu yenilikçi yaklaşımın, matematikte görselliği vurgulayarak Öklid geometrisine önemli pedagojik bir bakış açısı getirdiği düşünülmektedir (MAA, 2017b). Bu kitap 1851 yılının büyük sergisinde (The Great Exhibition of 1851) sergilenen nadir kitaplardan biri olmuştur. Ayrıca bu kitap, ünlü İngiliz tipograf Ruari McLean tarafından “*yüzyılın en garip ve en güzel kitaplarından biri*” olarak nitelendirilmiştir (MAA, 2017b).

Şekil 4
Oliver Bryne'nın Euclid'in Elemanlar Kitabı'ndan Kesitler

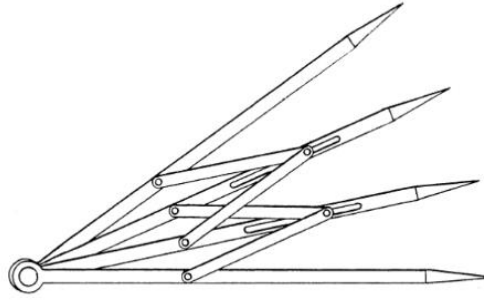


Eylül 1975'te Rufus Issacs Mathematics Magazine'de “Sözsüz İki Matematiksel Çalışma” başlıklı bir makale yayınlamıştır (Isaacs, 1975). Bu kısa makale daha uzun bir makalenin sonucunda ortaya çıkmış ve iki diyagramdan oluşturulmuştur. Bir tanesi Pisagor Teoremi'nin kanıtı (Şekil 5), diğeri ise eski Yunan matematikçileri tarafından imkansız olduğu düşünülen, bir açıyı eş üç parçaya bölmek üzere tasarlanmış varsayımsal bir cihazın çizimidir (Şekil 6). Isaacs, bu çizimleri eski Çin metnindeki diyagramdan ve Yates'in (1941) Eş Üç Parçaya Ayırma Problemi (The Trisection Problem) çalışmasından yararlanarak oluşturmuştur (Şekil 7). Her ikisi de özel olarak ispat diye belirtilmemesine rağmen, matematiksel bir düşüncüyü tamamen görsel olarak ikna edici bir biçimde ifade etmeyi amaçlamıştır.

Şekil 5
Rufus Issacs'ın Mathematics Magazine'de Yayınlanan Makalesindeki Pisagor
Teoremi İspatı

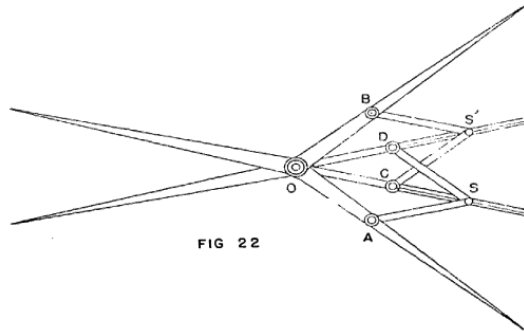


Şekil 6
Rufus Issacs Mathematics Magazine'de Yayınlanan Makalesindeki Eş Üç
Parçaya Ayırma Problemi İspatı



Şekil 7
Yates'in Eş Üç Parçaya Ayırma Problemi İspatı

$$OB = OC, \quad CS' = BS', \quad OD = OA, \quad AS = DS,$$



Bu diyagramların yayınlanmasından sonra, Isaacs ise kendi makalesiyle ilgili şunları belirtmiştir: “Tek istediğim, matematiksel bir gerçeği, tek başına görsel

delillerden kavramanın nadir ve gizli hazzını vurgulamaktı” (News and Letters, 1976: 50). Derginin yeni editörleri, sözsüz ispat geliştirmeleri için okuyucuları teşvik edici şu ifadeleri kullanmışlardır: “*Rufus Isaacs'ın ve diğerlerinin belirttiği gerekçelerle, ispatların kelimeler kullanılmadan aktarılmasını teşvik etmek istiyoruz. Derginin sayfalarını resimlendirmek ve makale sonlarındaki boşlukları doldurmak için kullanabileceğimiz ilginç görsel materyaller arıyoruz. Bunun için önemli bir matematiksel fikri göstermek için oluşturulmuş hoş bir illüstrasyondan daha iyi ne olabilir?*” (“News and Letters”, 1976: 51). Bu talebin yayınlanmasından sonra, bu tanıma uyan ifadeler Dergi'de “Sözsüz İspat (*Proofs Without Words- PWW*)” başlığı altında yılda yaklaşık bir veya iki tane çıkmaya başlamıştır. 1987'de ise bu sayı yılda altıya çıkmış her bir sayıda yaklaşık iki tane ispat yer almıştır. Kısa sürede, matematikçiler bu ilgi çekici matematiksel nesnelerle daha çok ilgilenmeye başlamışlardır (MAA, 2017a). Dergide PWW’si yayınlanan matematikçilerden biri de Profesör Roger Nelsen’dır. Daha sonra derginin editörleri, Nelsen’dan dergiye gönderilen PWW’leri değerlendirmesi için hakemlik yapmasını istemiş, Nelsen da yıllar boyunca gelen PWW’leri arşivlemiş ve bir derleme yapmaya yetecek sayıya ulaşınca 1993 yılında, tüm PWW’leri “Sözsüz İspatlar: Görsel Düşünme Egzersizleri (*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*)” adlı kitapta bir araya getirerek yayınlamıştır. Ardından 2000 yılında bu serinin ikinci cildi olan “Sözsüz İspatlar-II: Görsel Düşünme İçin Daha Fazla Egzersiz (*Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*)” yayınlanmıştır. Akabinde, 2006’da Claudi Alsina ile birlikte, öğrencilerin matematiksel fikirleri, ispatları ve tartışmaları anlamalarına yardımcı olabilecek matematik çizimler yapmanın mümkün olduğunu savunarak, hem matematiksel ve pedagojik açıdan uygun diyagramlar üretmek için bazı görselleştirme tekniklerinin nasıl kullanılabileceğini gösterdikleri “Görselleştirilmiş Matematik: Matematiği Anlamak İçin Resimler Oluşturma (*Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*)” ve 2009’da “Az Ama Öz Olduğunda: Basit Eşitsizliklerin Görselleştirilmesi (*When Less is More: Visualizing Basic Inequalities*)” kitaplarını yazmışlardır. Ve son olarak 2015 yılında PWW serisinin üçüncü kitabı “Sözsüz İspatlar-III: Görsel Düşünme İçin Daha Fazla Egzersiz” (*Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*) yayınlanmıştır.

İngilizce’de “proofs without words” olarak ortaya çıkan bu ispatlar farklı adlandırmalarla da karşımıza çıkabilmektedir. ‘Sözsüz İspat (Non-Verbal Proofs)’, ‘Görsel İspat (Visual Proof)’, ‘Diyagramatik İspat (Diagrammatic Proof)’ ve ‘Resimlerle İspat (Proof By Picture)’ şeklinde ifadeler mevcuttur. Bu çalışmada daha kapsayıcı olduğu düşünülen görsel ispat ifadesinin kullanımı tercih edilmiştir. Dolayısıyla çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde görsel ispat ifadesi kullanılacaktır.

Görsel ispatlar hakkında başlangıçta yapılan felsefi tartışmalarda, gerçek bir ispat oldukları veya olabilecekleri düşüncesi bir miktar küçümsenmiştir. Nelsen, ilk PWW kitabının ön sözünde şunu belirtmiştir: "*Elbette, görsel ispatlar gerçek ispatlar değildirler... Peki gerçek ispat değilse, bunlar nedir?*" diye sormuş ve bu soruya kendisi şu yanıtı vermiştir; "*Görsel ispatlar, gözlemciye belirli bir ifadenin neden doğru olabileceğini ve aynı zamanda bunu kanıtlamaya nasıl başlayabileceğini görmesine yardımcı olan resimler veya diyagramlardır*"(Nelsen, 1993: VI). Casselman (2000), matematiksel ifadelerde resimlerin nasıl kullanıldığını ve nasıl kullanılması gerektiğini araştırmış, sonucunda bir resmin, ispatın önemli bir bileşeni olabileceği sonucuna ulaşmıştır. Miller (2012) çalışmasında görsel ispatların ispat olup olmadığını formalizm ve platonizm çerçevesinde tartışmıştır. Formalizm perspektifinde, birçok matematikçi görsel ispatların ikna edici olsalar bile özel bir durum için ifadenin doğruluğunu yansıttığı gerekçesiyle sınırlı olduğunu ifade eder. Dolayısıyla görsel ispatlarla genel teoremin ispatının oluşturulamayacağını bu nedenle onları gerçek bir ispat olarak kabul etmediklerini belirtmişlerdir. Platonizm’de ise bir resmin, sadece özel bir durumu temsil ediyor olmasına rağmen beynimizin genel doğruları keşfetmesi için gerekli araçları sunduğu ifade edilmiştir. Görsel ispatların, formal mantıksal ifadeler olmadan matematiksel doğruları keşfetmeye yardımcı olması, özel durum için geçerli olan resimlerin nasıl genellenebileceği hakkında fikir oluşturması yönleri nedeniyle geçerli ispat olarak görülmektedir. Görsel ispatların ispat olsa da olmasa da matematik öğretimi için önemli araçlar olduğu belirtilmiştir (Miller, 2012; Hanna, 2000b). Hanna (2000b), iyi ispatların sadece bir teoremi doğrulayanlar değil aynı zamanda o teoremi anlamamıza yardımcı olanlar olduğunu da belirtmiştir. Bu şekilde oluşturulmuş bir ispatın daha ikna edici ve kabul edilebilir

olduğunu ifade etmiştir. Bu noktada görsel ispatların, görsel öğeler sunması nedeniyle öğrencilerin ispat sürecini etkili bir şekilde anlamalarına yardımcı olduğu ifade edilmiştir (Bell, 2011). Bir önceki bölümde belirtilen ispatta kavramsal anlamadaki zorluklar, matematiksel dil ve formülleri kullanmadaki zorluklar ve bir ispata nereden başlanacağını bilinmemesi gibi zorlukların giderilmesinde, bu ispatların, formal matematiksel dili içermemesi ve Nelsen'in (1993) ifade ettiği gibi, bir ispata nasıl başlanabileceğine yardımcı olmaları gibi özelliklere sahip olması nedeniyle fayda sağlayabileceği düşünülmektedir.

1.2 Problem Durumu

Mancosu (2005), bir şeklin/figürün temelde bir teoremden belirtilen ilişkilerin ve ispatta uygulanan yapıların kavranmasını kolaylaştırdığını, bu gibi ilişkileri ve yapıları keşfetmek için verimli bir araç olduğunu ifade etmiştir. Bu açılarından bakıldığında görsel ispatlar, matematik öğretimi için önemli araçlardır (Miller, 2012; Hanna, 2000b). Literatürde görsel ispatların öğretimsel boyuttaki işlevlerini ortaya koyan çalışmalar konusunda boşluk olduğu görülmektedir. Görsel ispatların matematik sınıflarında kullanımıyla ilgili yalnızca bir çalışma (Bell, 2011), lise öğrencilerin görsel ispat yapma sürecini deneyimledikleri ise iki çalışma (Bell, 2011; Uğurel, Moralı, Karahan ve Boz, 2016) yapılmıştır. Dolayısıyla bu ispatların matematik sınıflarına entegre edilebilmesi için, lise öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini inceleyen çalışmaların daha çok yapılmasına ihtiyaç vardır. Görsel ispatların, matematik öğretimde nasıl kullanılacağını araştıran, lise öğrencilerinin görsel ispatları anlama, oluşturma süreçlerini inceleyen, öğrencilerin görsel ispata yönelik becerilerini geliştirebilecek bir öğretimin nasıl yapılabileceğini konusunda denemeler ve tespitler yapılan çalışmalara gereksinim olduğu düşünülmektedir.

Bu çalışmanın amacı da Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispatı anlama ve görsel ispat oluşturma sürecini incelemek, bu süreçte yaşadıkları zorlukları/güçlükleri belirlemek, görsel ispat etkinlikleri ile tasarlanan bir eğitimi deneyimledikten sonra görsel ispatı anlama ve görsel ispat oluşturma becerilerindeki değişimi belirlemek ve bu sürece dair görüşlerini almaktır. Bu çalışmayla söz edilen literatürdeki boşluğun giderilmesine katkı sağlanacağı düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi

Araştırmanın problem cümlesi, Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçleri nasıldır? olarak belirlenmiştir.

Alt Problemler

Bu çalışma kapsamında cevap aranacak alt problemler şu şekildedir:

1-Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispatlara dair algıları nasıldır? (türlerini algılama ve örneklerini anlayıp açıklayabilme)

2-Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispatları açıklama ve geliştirme süreçleri nasıl gerçekleşmektedir? Bu süreçte karşılaştıkları zorluklar nelerdir?

3-Fen Lisesi öğrencilerinin katıldıkları öğretim deneyinin, görsel ispatı anlama, açıklama ve geliştirme becerilerinde meydana getirdiği değişimler nelerdir?

4- Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispata yönelik görüşleri nelerdir?

1.4. Sayıtlar

- 1- Araştırmaya katılan öğrencilerin süreçte, sahip oldukları bilgilerini uygulamalara ve görüşmelere yansıttıkları varsayılmaktadır.
- 2- Araştırmaya katılan öğrencilerin beklenmeyen ve istenmeyen dış etkenlerden eşit düzeyde etkilendikleri varsayılmaktadır.

1.5. Sınırlılıklar

- 1- Araştırma, uygulamanın yapıldığı Fen Lisesi'ndeki çalışılan 6 öğrenciyle sınırlıdır.

1.6. Kısaltmalar

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

Gİ: Görsel İspat

MAA: Mathematical Association of America

GGB: GeoGebra

PWW: Proofs Without Words

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

Literatüre bakıldığında görsel ispatlara yönelik bir kavramsal çerçeveye rastlanmamıştır ve bu konuda uygulama içeren çalışma sayısının oldukça az olduğu görülmüştür. Bu durumun temelinde görsel ispatların ispat olup olmadıklarına yönelik matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin yaptığı tartışmaların olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bu bölümde ilgili tartışmaların yer aldığı çalışmalar sunulmuş, ardından görsel ispatlara yönelik uygulama içeren çalışmalara yer verilmiştir.

2.1 Görsel İspat İspat Mıdır?

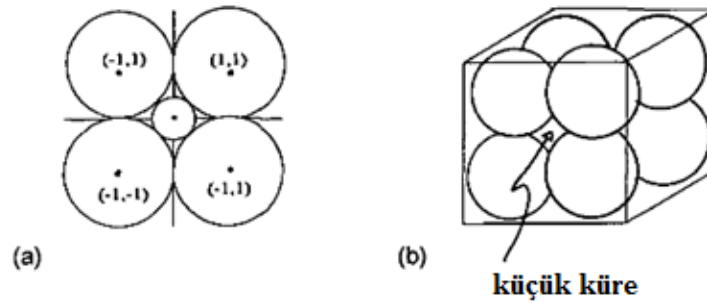
Görsel ispatların ispat olup olmadığına yönelik tartışmaların kökeninde matematikte resimlerin/diyagramların kullanılmasına dair yapılan tartışmalar yer almaktadır. Dolayısıyla önce matematikte resimlerin/ diyagramların kullanılmasına dair temel görüşler ele alınacaktır. Daha sonra farklı perspektiflerden görsel ispata dair yaklaşımlar, daha çok öğretimsel boyuta indirgenerek tartışılacaktır.

Filozoflar ve matematikçiler, uzun zaman diyagramların yanıltıcı olabilmeleri nedeniyle, matematiksel akıl yürütmede kullanımları konusunda ikilem içinde olmuşlardır. Bahsi geçen yanıltıcılık konusuna Brown (1997), çalışmasında dikkat çekici olduğunu düşündüğü şu örneği vermiştir;

Düzleme $(\pm 1, \pm 1)$ merkezli 1'er yarıçapta dört çember çizin. (Şekil 9a) Çizdiğiniz her dört çembere de geçecek şekilde orijine beşinci bir çember çizin. Bu dört çemberin çevresine -2'den +2'ye uzanacak şekilde bir kare çizin. İçteki çemberin tamamen karenin içerisinde olduğunu bariz bir şekilde görebilirsiniz. Aynı şeyi üç boyutlu uzayda yapın. Bu sefer $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ merkezli sekiz küre ve bu sekiz küreye değen orijinde dokuzuncu bir küre çizin. Bu sekiz kürenin çevresine bir kutu çizin. Ve yine merkez küre, tamamen kutunun içinde kalacaktır (Şekil 8b).

Şekil 8

Brown'un Çalışmasında Yer Alan Görsel Yanılsama Örneği



Bu resimlerden/diyagramlardan yola çıkarak daha yüksek boyutlarda da aynı sonuca ulaşılacağı kanısı 'bariz' ve son derece mantıklı gelmektedir. Fakat öyle değildir. Onuncu veya daha yüksek bir boyutta, merkezi küre n'inci boyut kutusunun dışına çıkacaktır. Sebebi de her bir kürenin merkeze uzaklığı $\sqrt{(\mp 1)^2 + \dots + (\mp 1)^2} = \sqrt{n}$ iken her kürenin yarıçapı 1 birim olduğu için merkezi kürenin yarıçapı $\sqrt{n} - 1$ olmaktadır. Yani $n \geq 10$ için, $\sqrt{n} - 1 > 2$ olacaktır. Bu yüzden merkezi küre, n boyutlu kutunun kenarlarının dışına çıkacaktır. Bu durum sezgilerimiz için büyük bir sürpriz örneğidir (Brown, 1997:178).

Brown (1997), bu tarz örneklerin amacının resimlerle/diyagramlarla sunulan argümanları sezgisel statüye indirgeyerek, bunlara formal matematiksel ispat kadar itibar edilmemesi gerektiğini ortaya koymak olduğunu belirtmiştir. Bunun yanında kimi zaman sembolik ispatların da yanılgıya yol açabileceğini örnek vererek açıklamıştır. Dolayısıyla resimlerden/diyagramlardan elde edilen kanıtları örneğin mikroskoplar gibi gözlem yapılan araçlarla elde edilen deneysel bulgular gibi görmemiz gerektiğini ifade etmiştir. Bu araçların da büyük ölçüde yanıltıcı olabileceklerini fakat gözlem konusunda bize sağladıkları yararları göz ardı edemeyeceğimizi belirtmiştir. Birçoğunun yanılgıya yol açıyor olması, bunları ispat kaynağı olarak reddetmek için geçerli bir sebep olarak görülmemektedir. Sadece bunların nasıl kullanılacağını öğrenilmesi gerekmektedir (Brown, 1997: Dreyfus, 1991). Görsel ispatların göz ardı edilmek için fazla etkili olduğunu ve onları sempatiyle karşılamamız gerektiği belirtilmiştir (Brown, 1997).

Görsel temsillerin (resim/ diyagram vb.) kullanımını konumuz bağlamında iki alt başlıkta inceleyebiliriz,

- 1- İspata yardımcı araçlar olarak görsel temsiller,

2- İspatın bir parçası olarak görsel temsiller,

Dreyfus (1991) çalışmasında ilk alt başlığa yönelik tartışmaya, “*Görsel argümanların geçerliliğini kim değerlendirir?*” sorusunu sorarak başlamış, bu soruyu üç farklı pencereden değerlendirerek yanıtlamaya çalışmıştır. İlk olarak, pek çok ispatta görsel argümanların kullanılmasının kaçınılmaz olduğunu; İkinci olarak, görsel olmayan argümanların geçerliliğine ilişkin yargıların da tamamen güvenilir olmadığını ve üçüncü olarak da görsel argümanların daha iyi değerlendirilmesi için kriterler geliştirilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Davis ve Hersh (1981) ispatı, “*konuyu bilen birini ikna eden bir argüman*” olarak tanımlamışlardır. Dreyfus (1991), bu tanımdan yola çıkarak, matematiksel ispatları kontrol etmek için herhangi bir makine algoritması olmadığını bu ispatların geçerliliğinin uzmanlar tarafından değerlendirildiği konusuna vurgu yapmış; dolayısıyla, bir ispattaki bazı gerekçelerin diyagramatik veya görsel olmaması için bir neden olmadığını ifade etmiştir.

Görsel argümanların geçerliliğinin değerlendirilmesi konusunda var olan eksikliğin tamamıyla giderilmesi zor görünmektedir. Borwein ve Jörgenson (2001), görsel argümanları değerlendirirken 3 temel koşulu (1- güvenilirlik, 2- tutarlılık, 3- tekrarlanabilirlik) sağlayıp sağlamadığına bakılması gerektiğini belirtmişlerdir. Bunların yeterli olamayabilecekleri hem kendileri tarafından belirtilmiş, hem de daha sonra Hanna ve Sidoli (2007) tarafından neden yeterli olamadıkları gerekçeler sunularak açıklanmıştır. Uğurel ve arkadaşları da (2016) yaptıkları çalışmada, lise öğrencilerin geliştirdikleri görsel ispatların geçerliliklerini değerlendirirken aynı problemle karşılaşmışlar ve kendi kodlama-puanlama anahtarlarını geliştirmişlerdir. Görsel ispatların değerlendirilmesi için doğruluk ve görsel yapı olmak üzere iki ana kategori oluşturmuşlar, her kategori için 3 alt kriter belirleyerek puanlama yapmışlardır. Bu kodlama-puanlama anahtarının genellenebilir olabilmesi veya geliştirilebilmesi için daha kapsamlı çalışmaların yapılması gerektiğini belirtmişlerdir. Görsel argümanların değerlendirilmesi konusu büyük bir problem teşkil ederken, bu diyagramların kullanılması özellikle öğretimsel boyutta bakıldığında gerekli ve hatta kaçınılmaz görülmektedir. Casselman (2000) çalışmasında, diyagramların kullanım sürecine yönelik önerilerde bulunarak konuya bu noktada yararlı olabilecek bir bakış

açısı sunmuştur. Bu önerileri oluştururken Edward Tufte'nin Görsel Açıklamalar (Visual Explanations) kitabından yararlandığını ifade etmiştir. Bu önerilerden bazıları şu şekildedir;

- Diyagramları sözlü olarak nasıl sunulacağını göz önünde bulundurarak çizin.
- Diyagramların kastedilen noktayı gerçekten ifade edip etmediğini sürekli sorgulayın. Gerekirse onları tekrar uygulayın. Metinler yeniden yazıldıkça doğru olana kadar diyagramlar yeniden çizilmelidir.
- Görsel yığılmayı azaltın. Sadece diyagramın üzerinde olması gereken ana fikri koyun.
- Geçerli tartışmanın merkezinde yer alan bileşenleri vurgulayın. Gerekirse, diyagramı birkaç kez tekrarlayın, ancak bu defa farklı bileşenleri vurgulayın (Casselmann, 2000: 1259).

Bu önerileri dikkate alarak diyagramlardan yararlanmanın, diyagramların etkisini artırabileceği ve meydana gelebilecek olası yanılgıların en aza indirebileceği düşünülmektedir. Bunun yanında bazı araştırmacılar diyagramların kullanımı konusunda matematikçilerin katı itirazlarının gerekli olmadığını düşünmektedirler (Mancosu, 2005; Hanna, 2007; Brown, 2005). Bir diyagramın/ şeklin/ figürün, teoremden belirtilen ilişkilerin ve ispatta uygulanan yapıların kavranmasını kolaylaştıracağı ifade edilmiştir. Bu gibi ilişkileri keşfetmek için verimli bir araç olarak görülmektedir (Mancosu, 2005).

Brieske (1984), matematik öğrenirken cebirsel olarak verilmiş ifadeden geometrik düşünceye geçişin ve bunun tersinin, öğrencilerin temel kavramları anlamasını önemli ölçüde derinleştirdiğini savunmaktadır. Bu noktada Thornton da (2008), öğrencilerin daha etkili görsel düşünür olmalarına yardımcı olmak için, belirli bir sonuca ait görsel çözümler veya sunumlar bulma ihtimaline karşı duyarlı olmaları gerektiği, alan, uzunluk gibi modellerle sayısal ve cebirsel ifadeleri ilişkilendirerek görsel diyagramlar oluşturmalarına teşvik etmeleri gibi öğretmenler için başlangıç noktaları olabilecek bazı öneriler sunmuştur.

Bunun yanında ispatın bir parçası olarak görsel temsiller üzerine yöneltilen farklı bir bakış açısı da MAA'nın resmi sitesinde yayınlanan makalede yer almaktadır. Bu konu 'Neden ispatları yazıyoruz?' sorusu üzerinden tartışılmıştır (MAA, 2017c). Bir ispatın, matematiksel düşüncenin sistematik olarak ifade edilmiş bir çeşidi olduğu belirtilmiş, formal ispatların matematiksel bilginin nihai ürünü olduğu fakat sıradan matematiksel akıl yürütmenin esas maddesinin olmadığı ifade edilmiştir (MAA, 2017c). Dolayısıyla formal ispatların, ispat yapma sürecinin çıktısı olduğu bunun yanında görsel ispatlar gibi informal addedilebilecek ispat türlerinin matematiksel akıl yürütmenin farklı formlarını gösteren bir görev üstlendiği düşüncesi (yanıltıcılık payları da göz önünde bulundurularak) sunulmuştur.

Görsel ispatların formal ispatlar kadar güvenilir olmaması düşüncesinin öğretimsel açıdan değerlendirilebilmesi için ispattaki formallik düşüncesini üzerine var olan bakış açılarının tartışması gerektiği düşünülmektedir. Lakatos (1978), ispattaki formaliteyi üç farklı şekilde derecelendirmiştir. Bunlar, formal öncesi ispat (pre-formal), formal ispat ve formal sonrası ispattır (post-formal). Formal öncesi ispatlarda, postulatlar ve iyi tanımlanmış bir yapının olmadığını, sezgisel olarak teoremin doğruluğuna ulaşıldığını belirtmiştir (Lakatos, 1978; Reid & Knipping, 2010: syf 9'daki alıntı). Bu tarz ispatların, matematikçiler tarafından kabul edilen, ikna edici olan, ancak formal olmayan ispatlar olduğu söylenmiştir (Reid & Knipping, 2010). Hanna (1990), ispatın matematik eğitimindeki rolü tartışılırken, ispatların farklı algılamalarını birbirinden ayırmanın gerekli olduğunu belirtmiş, formal ispatın yanında kabul edilebilir ispatlar (acceptable proof) olduğunu söylemiştir. Hanna (1990), hem matematikçilerin hem de matematik eğitimcilerinin aksiyomatik yapıların ve formal ispatın rolünü yeniden gözden geçirmeye başladıklarını, ispatların farklı derecelerde formal geçerliliğe sahip olabileceğini ve yine de aynı kabul derecesini kazanabileceği düşüncesinin matematikçiler arasında da kabul gördüğünü belirtmiştir. Bu durum, ideal ispatın ne olması gerektiğini ve okullarda hangi tür ispatın öğretilmesi gerektiğini yeniden düşünmeye yol açmıştır. Dolayısıyla görsel ispatların formal ispat statüsünde değerlendirilmemesi gerektiği, Lakatos'un (1978) formal öncesi ispatında, Hanna'nın (1990) kabul edilebilir ispatı statüsünde değerlendirilip öğretimsel boyutta yararlanılmaları gerektiği düşünülmektedir.

2.4. Görsel İspatla İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bardelle (2010), çalışmasında 13 kişiden oluşan bir grup matematik bölümü öğrencisinin, görsel ispatları anlamalarını ve yeniden inşa etmelerini istediği bir araştırma yapmıştır. Çalışmanın sonucunda, öğrencilerin görsel akıl yürütme becerilerinin zayıf olduğu ve genelde cebirsel yöntemleri kullanma eğiliminde oldukları sonucuna varmış, öğrencilerin görsel gösterge bilimsel sistemleri kullanmaları için özel bir eğitime ihtiyaç duyduklarını belirtmiştir. Gülşen (2012) ise tezinde, matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarını, seçtiği bir takım görsel ispatlardan yararlanarak incelemiştir. Görsel ispatların çiziminde bazı öğeleri eksik bırakarak öğretmen adaylarından tamamlamalarını ve ispatları açıklamalarını istemiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının görsel ispatları algılama, takip ettikleri süreç ve ulaştıkları sonuçların farkında olma ile ilgili birtakım zorluklar yaşadıkları gözlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispata görsel ispat üzerinden ulaşmak yerine cebire eğilim gösterdikleri, çözüm süreçlerinde ispata odaklandıkları veya ispattan uzaklaştıkları tespit edilmiştir. Demircioğlu ve Polat (2015), ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının görsel ispata ilişkin görüşlerini inceleyen bir çalışma yapmışlardır. Öğretmen adaylarına incelemeleri için görsel ispatlar verilmiş, bunları anlamaları ve sınıfta anlatmaları istenmiş, daha sonra da görsel ispata dair görüşleri alınmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adayları, görsel ispatların kullanımının ispat, problem çözme, anlama, akıl yürütme, görsel düşünme gibi birçok beceriyi kazanmada etkili olabileceğini ifade etmişlerdir. Bell (2011) çalışmasında, görsel ispatları kullandığı bir sınıf uygulaması yapmıştır. Öğrencilere görsel ispatlar verip, üzerine tartışma yaptırmıştır. Görsel ispatları sunarken teknoloji kullanımının ispatları anlamayı kolaylaştırdığını ve bu konuda yapılan sınıf tartışmalarının akran öğrenmelerini teşvik ettiğini belirtmiştir. Tekin ve Konyalıoğlu (2010), trigonometri konusunda toplam ve fark formüllerinin görsel şekillerle ispat edilmesi ve bunların diğer araştırmacılara tanıtılması amaçlayan bir çalışma yapmışlardır. Karrass (2012) tezinde, son sınıf matematik öğretmen adaylarına, lise matematik öğretim programında yer alan bazı teoremlerin görsel ispatlarını sunmuş ve verilen diyagramlardan akıl yürüterek bu teoremleri ispatlamalarını / açıklamalarını istemiştir. Sonuçları, Van Hiele Geometrik Anlama Düzeylerine göre analiz edilmiştir. Uğurel ve arkadaşları (2016) ise, matematikte yetenekli lise öğrencilerinin

geliştirdikleri görsel ispatların yapısını ve bunlara yönelik görüşlerini incelemişlerdir. Literatürde görsel ispatların analizinde kullanabilecek genel kabul görmüş bir çerçeve veya kodlama sistemi olmadığı için, araştırmacılar kendi kodlama sistemlerini geliştirmişler, öğrencilerin geliştirdikleri görsel ispatları bu kodlama sistemine göre değerlendirmiş ve geliştirilen görsel ispatlarda 3 teknik belirlemişlerdir. Bu çalışmaların yanında, Alsina ve Nelsen (2010) '*Görsel İspatlara Davet*' isimli bir makale yayınlamışlardır. İlkokuldan üniversite düzeyine kadar görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılabileceğini düşündüklerini belirtmişlerdir. Bu çalışmada iki farklı sayma prensibi temel alınarak doğal sayıların sayıldığı görsel ispatların nasıl oluşturulabildiğine dair örnekler ve teknikler sunmuşlardır. Thorton (2001), görsel düşünmenin öğrencilerin matematik öğrenme süreçleri için önemini ve gerekliliğini tartıştığı çalışmasında, cebirsel anlayışı geliştirme, güçlü bir problem çözme aracı sağlama ve çeşitli öğrenme stillerini değerlendirmede görselleştirmeden mutlaka yararlanılması gerektiğini belirtmiştir. Görsel ispatların da bu süreçte yararlanılabilecek araçlardan biri olduğunu ifade etmiştir. Görsel ispatlarla ilgili ortaya son dönemlerde çıkan diğer bir çalışma alanı ise, bu ispatları dinamik bir yazılım ortamında (GeoGebra gibi) ele alan çalışmaların olduğu alandır (Strausova & Hasek, 2012; Caglayan, 2015; Çekmez, 2016; Zengin, 2017). Bu ispatlara dinamik görsel ispatlar da denilmektedir (Strausova & Hasek, 2012). Ancak söz deneysel ispatlar da söz konusu dinamik görsel ispatlar içerisine alınmıştır. Dolayısıyla görsel ispatın ne olduğu ve hangi koşullarda bir ispatın görsel ispat olduğunun yeniden tanımlanması gerekmektedir. Bu başka bir araştırma konusudur. Bu nedenle bu çalışmaların içeriklerinden bahsedilmeyecektir.

Görsel ispatların önemine, değerine ve gerekliliğine değinen çalışmalar yapılmış olmasına ve son yıllarda artış göstermesine rağmen bu konuyu bir araştırma tabanına oturtturarak inceleyen çalışma sayısı oldukça azdır. Dolayısıyla literatürde görsel ispatların, ispat öğretimindeki rolünü ortaya koyan daha fazla çalışmaların yapılmasına ihtiyaç olduğu düşünülmektedir. Lise öğrencileriyle yapılan çalışma sayısı yalnızca iki tanedir (Bell, 2011; Uğurel ve diğer., 2016). Görsel ispatın matematik sınıflarında öğretimde nasıl kullanılacağını araştıran, lise öğrencilerinin görsel ispata anlama, oluşturma süreçlerini detaylı inceleyen, öğrencilerin görsel ispata

yönelik becerilerini geliştirebilecek bir öğretimin nasıl yapılabileceğini konusunda ihtiyaçların belirlenmesinin gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu çalışmanın hedefi bu eksikliği gidermeye katkı sağlamak, görsel ispat sürecini lise öğrencisi gözünden analiz etmek ve matematik sınıflarında nasıl kullanılabileceğine dair bir örnek sunmaktır. Öğrencilerin görsel ispatı anlama, oluşturma becerilerinin geliştirilmesini destekleyen öğrenme-öğretme ortamlarının düzenlenmesine yönelik önerilerde bulunarak alandaki eksikliği gidermeye katkıda bulunacağı ve ileride bu konuda yapılacak olan diğer araştırmalara yol göstereceği düşünülmektedir.



BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1.Araştırma Modeli

Bu çalışma yanıt aranan problemleri, veri toplama biçimi ve veri analizi için kullanılacak yöntemler göz önünde bulundurularak nitel araştırma yaklaşımında tasarlanmıştır. Creswell (2009) nitel araştırmanın, sosyal ya da beşeri bir probleme, bireylerin veya grupların atfettiği anlamları keşfetme ve anlamaya yönelik bir yaklaşım olduğunu, verilerin genellikle katılımcıların kendi ortamlarından toplandığını, özel durumlarından genel temalara ulaşarak tümevarımsal veri analizlerinin yapıldığı bir araştırma yaklaşımı olduğunu ifade etmiştir. Nitel yöntemler, nicel yöntemlere göre daha derin ve ayrıntılı konularda çalışma ve çok daha az kişi ve durum üzerinde çok daha fazla ve detaylı bilgi edinme imkanları sunar ve standart ölçümler yoktur (Patton, 1990).

Bu araştırma da nitel bir araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılarak yapılmıştır.

3.2. Öğretim Deneyi

Çalışmamızda son yıllarda matematik eğitiminde kullanımı yaygınlaşmaya başlayan öğretim deneyi (veya öğretme deneyi olarak da bilinen) (teaching experiments) yöntemi kullanılmıştır. Öğretim deneyi yönteminin Piaget'in klinik mülakat yönteminden evrildiği ileri sürülmektedir (Confrey, 2006; Steffe, 1991; Steffe & Thompson, 2000). Klinik mülakatın amacı, öğrencinin mevcut matematiksel bilgi yapısını ve düşünmesini var olanı değiştirmeden anlamaktır (Clements, 2000). Klinik mülakat araştırmalarının sadece öğrencinin var olan düşünce ve bilgi düzeyinin değiştirilmeden anlaşılmasına imkan sağlaması ve öğretim sürecindeki müdahalenin öğrencinin bilgiyi anlamlandırmasına etkisini ve öğrenme sürecinin anlaşılmasında yetersiz kalması, öğretim deneyi yönteminin ortaya çıkması ihtiyacını doğurmuştur (Steffe & Thompson, 2000). Bu durum ile paralel olarak bir öğretim deneyinin amacı şu şekilde ifade edilebilir: Bir öğretim şeklinin öğrencinin mevcut bilgi yapısını ve akıl yürütmesini nasıl etkilediğini anlamaktır (Cobb, 2000; Czarnocha & Prabhu, 2004;

Steffe & Thompson, 2000; Lesh & Kelly, 2000). Bu noktada öğretim deneyi yöntemini klinik mülakatlardan ayıran temel noktanın, öğrencilere düşüncelerini değiştirme fırsatı sunması olduğunu söyleyebiliriz. Engelhardt, Corpuz, Ozimek ve Rebello'ya (2004) göre ise öğretim deneyi, yeni öğretim teknikleri ve yaklaşımlarının test edilmesine ortam sağlar. Ek olarak, öğretim deneyleri öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin ve davranışlarının modelini ortaya çıkarmada kullanılabilecek etkili bir yöntemdir (Lesh & Kelly, 2000; Steffe, 1991; Steffe & Thompson, 2000). Öğrencilerin zihinlerindeki matematiksel sürecin nasıl gerçekleştiği, matematiksel bir etkinlikle karşılaştıklarında sergiledikleri davranışlarla ve söyledikleriyle belirlenebileceği düşünülmektedir (Steffe & Thompson, 2000). Bu araştırmada da öğrencilerin görsel ispat (Gİ) geliştirme süreçlerinin ve bu süreçte öğrencilerin davranışlarının ve düşünme biçimlerinin incelenmesi amaçlandığından dolayı bu yöntemin kullanılmasının uygun olduğu düşünülmüştür.

Cobb (2000), öğretim deneyinde üç temel aşama olduğunu ifade etmiştir. Bu aşamalar şu şekildedir: i) öğretim sürecinin tasarlanması ve planlanması, ii) sınıf içinde uygulanması ve iii) geriye dönük analiz. **Öğretim sürecinin tasarlanması aşamasında**, araştırma sürecine başlamadan önce hedefler ve bu hedeflere ulaşmak için neler yapılacağı belirlenir. **Sınıf içi uygulama aşamasında**, literatür taraması ya da planlama için ön uygulama yapıldıysa yapılan uygulamaların değerlendirmeleri sonucunda planlanan etkinliklerin sınıf içerisinde (sınıftan kastedilen çalışılan grup) uygulanması süreci gerçekleştirilir. Uygulama esnasında yapılanlar uygun yöntemle ve araçlarla kayıt altına alınır. Ardından bu kayıtlar analiz edilerek bir sonraki uygulama için gerekli düzenlemeler yapılır. Yöntemin öğretim aşamasına yönelik herhangi bir sınırlandırma yapılmamıştır, öğretim aşaması birkaç saat, birkaç hafta, bir dönem veya bir akademik yıl boyunca yapılabilir (Lesh & Kelly, 2000). **Geriye dönük analiz aşamasında** ise, öğretim bölümlerinin tümü bittikten sonra, tüm süreçte yaşananlara ve belirlenen hedeflere ne kadar ulaşılabildiğine yönelik genel bir değerlendirme yapılır.

Öğretim deneyinin bahsedilen süreçlerinin nasıl yapılacağına dair standart bir form tanımlanamayacağı ifade edilmiştir (Steffe, 1991; Steffe & Thompson, 2000).

Bunun nedeni her öğretim deneyinin bağlamının ve hedeflenen amaçlarının farklı olmasıdır. Dolayısıyla bu süreç öğretim deneyini tasarlayan araştırmacının bakış açısına göre şekillenmektedir.

Araştırmamızda Fen Lisesi öğrencilerinin Gİ'yi anlama-kavrama- geliştirme sürecinin incelenmesi, bu süreçte yaşadıkları zorlukların ortaya çıkarılması, bunların giderilmesi ve Gİ'nin lisede matematik sınıflarında kullanılması için öneriler sunabilmek hedeflenmiştir. Dolayısıyla araştırmanın amacı, daha önce Gİ ile ilgili herhangi bir deneyime sahip olmayan öğrencilerin, Gİ'yi deneyimlemelerine yönelik bir sürecin planlanmasını, bu süreçte yaşadıklarını ortaya koymayı gerektirdiği için bu yöntemin araştırmanın amacına uygun olduğu düşünülmüştür.

Öğretim deneyinde kritik olan bir diğer nokta araştırmacının bu süreçteki rolüdür. Araştırmacı bu süreçte, hem öğretmen hem de mülakatları yapan, süreci gözlemleyen kişi konumundadır (Steffe & Thompson, 2000). Cobb ve Steffe (2010), öğrencilerin etkileşimler yoluyla edindikleri deneyimlerin, matematiksel bilginin yapılandırılmasında önemli ölçüde etkiliyor olmasından dolayı araştırmacıların bu süreçte öğretmen olarak rol alması gerektiğini düşünmektedirler. Bu nedenle bu süreçte araştırmacı çoğunlukla öğretmen rolünde araştırmayı yürütmüştür. Sınıfın matematik öğretmeni çalışmada yer almamıştır, birinci ve ikinci öğretim bölümlerinde araştırmacı öğretmen rolünü üstlenmiştir. Odak grup görüşmesinde moderatör, klinik görüşmeler ve yarı yapılandırılmış görüşme bölümlerinde ise mülakatları yapan ve süreci yöneten kişi konumunda yer almıştır.

3.3. Örneklem

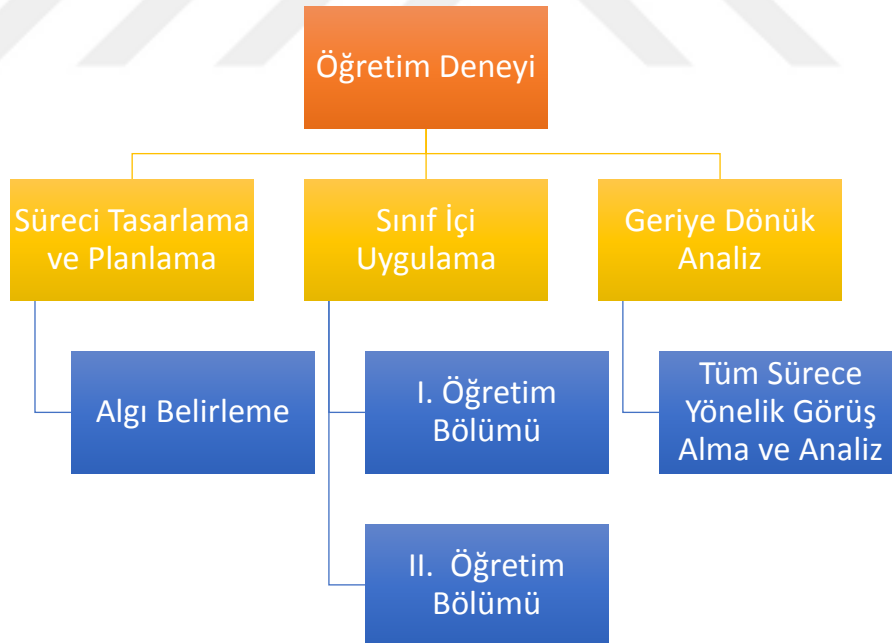
Çalışmanın gerçekleştirileceği öğrencilerin seçimi ise amaçlı örneklem yönteminde yapılmıştır. Patton (1990), bu şekilde örneklem seçiminin, araştırmanın daha derinlemesine yapılabilmesi için bilgi açısından zengin durumlar seçmek amacıyla olduğunu ifade etmiştir. Amaçlı örneklem seçiminde belli bir amaç doğrultusunda zengin bilgi durumlarını elde etmek için farklı stratejiler kullanılmaktadır. Her bir strateji belli bir amaca hizmet etmektedir. Bu çalışma için homojen örneklem stratejisi kullanılmıştır. Homojen örneklem stratejisinin odak noktası; çeşitliliği

azaltma; analizi basitleştirme grup mülakatları düzenleme olarak ifade edilmiştir (Patton, 1990: 243). Çalışmamız Gİ'yi anlama ve Gİ oluşturma sürecini içermektedir. İspata yönelik beceriler matematikte üst düzey beceriler kategorisinde yer almaktadır. Bu nedenle ülkemizde liseye giriş puanları en yüksek ortalamaya sahip olan Fen Lisesi öğrencileri tercih edilmiştir. Araştırma süreci odak grup görüşmesi, öğretim bölümü gibi aşamalar içerdiği için belirlenen öğrenci grubuyla araştırma sürecinin yönetilmesinin daha uygun olacağı düşünülmüştür. Çalışma, İzmir ilinde yer alan bir özel Fen Lisesi'nin 11. sınıfında öğrenim gören gönüllü 6 öğrenciyle yürütülmüştür. Bu sınıf düzeyinin seçilme nedeni ise, 11. sınıf öğrencilerinin lise matematik konularının çoğunu görmüş olmalarıdır. 12. sınıf öğrencileri çoğunlukla üniversiteye giriş sınavına odaklandıkları için, 11. sınıf öğrencileriyle daha verimli bir çalışma süreci geçirileceği düşünülmüştür. Öğretim deneyi araştırmalarında örneklem sayısında bir sınırlandırma yapılmamıştır. Birden fazla kişiyle gerçekleştirilen öğretim deneyi çalışmalarının sınıf ortamının taklit edilmesi gibi olduğu belirtilmiştir (Engelhardt et al., 2004). Nitel araştırmalarda örneklemle ilgili olarak, bir kişinin tek bir durum veya çok küçük örneklemde belki genelleme yapamayacağını ama onlardan çok fazla şey edinebileceği belirtilmiştir (Patton, 1990). Çalışmamız nitel bir araştırma olduğu için daha derinlemesine bilgi sahibi olmak amaçlanmıştır. Yapılacak olan odak grup görüşmeleri, öğretim süreci ve klinik görüşmeler göz önünde bulundurularak öğrenci sayısının 6 kişi olmasının yeterli olduğu düşünülmüştür. Çalışılan öğrencilere, belirlenen Fen Lisesi'nin matematik öğretmeninin görüşleri yardımıyla ulaşılmıştır. Öğretmenin matematik ve geometri konusunda yetenekli olduğunu düşündüğü 3 kız ve 3 erkek öğrenci belirlenmiştir. Uygulamalar, ders saatleri dışında öğrencilerin uygun oldukları gün ve saatlerde lisede yapılmıştır. Creswell (2009), nitel araştırmacıların araştırma problemlerine yönelik verileri katılımcıların yaşadığı fiziksel ortamda toplamaya eğilimli olduklarını, detaylı bilgilerin doğrudan insanlarla konuşularak, kendi ortamlarındaki eylemlerinin görülerek toplanmasının nitel araştırmanın önemli bir özelliği olduğunu vurgulamaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin alışkın oldukları kendi okul ortamlarında uygulamaların yapılmasının daha verimli olacağı düşünülmüştür. Öğrencilere gerçek isimlerinin kullanılmayacağı, takma isimler verileceği çalışmada belirtilmiştir.

3.4. Veri Toplama Süreci

Verilerin toplanması öğretim deneyinin aşamalarına paralel olarak, üç aşamadan oluşmuştur (Şekil 9). İlk aşamada öğretim aşamasının daha verimli planlanması için, öğrencilerin Gİ'ye dair algıları belirlenmiştir ve bu algılar doğrultusunda sınıf uygulamalarının içerikleri ve nasıl yürütüleceği planlanmıştır. Türk Dil Kurumu'nun (2017) yaptığı tanımda algı, “*bir şeye dikkatini yönelterek o şeyin bilincine varma, idrak*” olarak tanımlanmıştır. Bu oldukça kapsamlı bir tanımdır ve birden fazla boyutta ölçülmesi gerekmektedir. Dolayısıyla bu çalışma kapsamı içerisinde Gİ'ye yönelik algı ifadesinden kasıt, Gİ örneklerini anlayıp açıklayabilmedir. İkinci aşama ise 2 alt aşamadan oluşmaktadır. Bu alt aşamalar iki adet öğretim bölümünü içermektedir. Her öğretim bölümünde sınıf tartışması, Gİ geliştirme ve klinik görüşme yapılmıştır. Üçüncü aşamada ise tüm sürece yönelik öğrencilerin görüşleri alınmıştır ve uygulama öncesi hedeflere ne ölçüde ulaşıldığı incelenmiştir.

Şekil 9
Araştırma Kapsamında Gerçekleştirilen Öğretim Deneyinin Aşamaları



Süreci tasarlama ve planlama aşamasında (algı belirleme aşaması), önce öğrencilere yazılı olarak üçer tane görsel ispat ve matematiksel ifadesi verilmiş, bunlar arasındaki ilişkiyi açıklamaları istenmiştir. Ardından verilen görsel ispatlar üzerine

odak grup görüşmesi yapılmıştır. Öğrencilerin görsel ispata dair algılarını belirlemek amacıyla yapılan ilk uygulama ve sonrasında tüm öğrencilerin verilen Gİ örneklerini anlamalarını sağlamak ve Gİ'lere yönelik (geliştirmeye, ispat olup olmadıklarına, anlama sürecinde yaşadıkları zorluklara) düşüncelerini öğrenmek amaçlı yapılan odak grup görüşmesi sonrasında birinci öğretim bölümü planlamıştır. Öğrencilerin ilk aşamada cebirsel özdeşlikle ilgili verilen Gİ'yi algılamakta daha başarılı oldukları görülmüş, bu nedenle ilk Gİ geliştirme süreçlerine bu tarz ifadelerle başlanmasının daha uygun olacağı düşünülmüştür. Birinci öğretim aşamasını planlarken süreç sonunda gerçekleştirilmesi hedeflenen temel noktalar öğrencilerin görsel ispatların yapılarını anlamalarını sağlamak, farklı görsel ispat örnekleri görerek algılarında sınırlandırma yapmadan süreç sonunda cebirsel özdeşliklerle ilgili görsel ispat geliştirebilmelerine yardımcı olacak perspektifi kazandırmaya çalışmaktır. Bu aşamada öğrencilere farklı yapılarda (geometrik şekil ve geliştirilme mantığı açısından) dört tane görsel ispat örneği sunulmuş, her birine yönelik sınıf tartışması yapılmıştır. Birinci öğretim bölümünün sonunda öğrencilere cebirsel özdeşliklerle ilgili 4 tane ifade verilmiş, bunlardan istedikleri herhangi 2 tanesinin görsel ispatının oluşturmaları istenmiştir. Araştırmacı Gİ geliştirme sürecinde herhangi bir müdahalede bulunmamış sadece öğrencilerin ifadelere yönelik anlamakta zorlandığı bölümlerde gerekli açıklamalar yapmıştır. Akabinde araştırmacı tarafından öğrencilerin geliştirdikleri Gİ'lerin ön analizi yapılmış ve Gİ'ler üzerine öğrencilerle bireysel olarak klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde, Gİ'leri geliştirirken nasıl düşündüklerini nerelerde zorlandıklarını açığa çıkarmaya yönelik sorular yöneltilmiş, geliştirdikleri Gİ'lerde yaptıkları hataları fark etmeleri sağlanmış bunları giderebilmek için ne yapmaları gerektiği üzerine düşünmeleri sağlanmıştır. Bu süreçten elde edilen deneyimlerle, ikinci öğretim bölümü planlanmıştır.

İkinci öğretim bölümü aşamasında, öğrencilere geliştirdikleri diyagramların görsel ispat olarak adlandırıldıkları açıklanmış, Nelsen'in (1993-2001-2015) kitaplarında bu tarz birçok görsel ispatın yer aldığı belirtilmiştir. Daha sonra öğrencilere inceledikleri örneklerden yola çıkarak göre görsel ispatı tanımlamaları istenmiş ve türlerine yönelik düşünceleri alınmıştır. Ardından sınıf tartışmasıyla 5 tane Gİ örneği incelenmiş, birinci öğretim bölümünden farklı olarak her öğrenciye Gİ'lerin

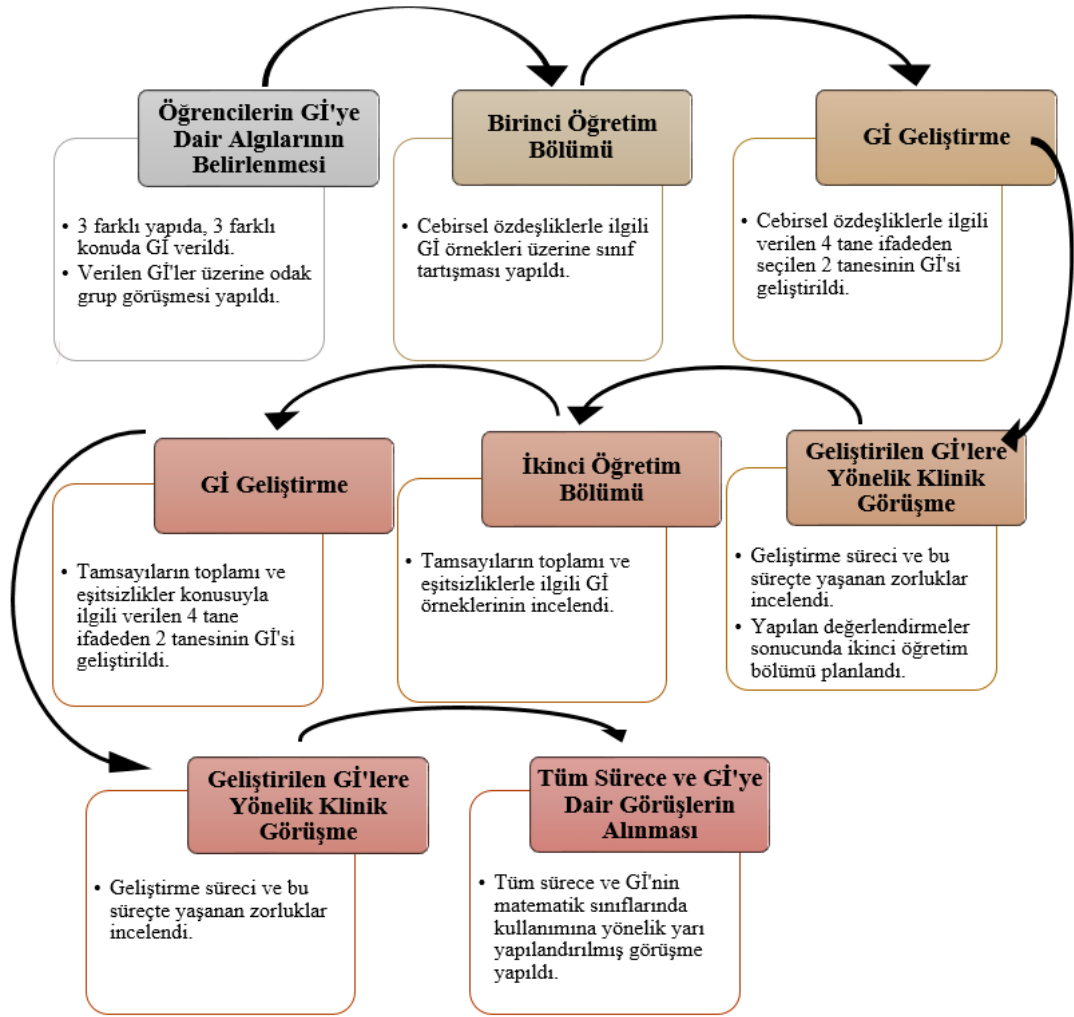
yazılı olduğu kağıtlardan verilmiştir. Verilen Gİ'lerden 2 tanesi eşitsizlikler konusuyla ilgili, 3 tanesi de tamsayıların toplamıyla ilgilidir. Algıları belirleme aşamasında (ilk aşama), öğrenciler trigonometrik ifadeyle ilgili Gİ örneğinin bir benzeriyle daha önce karşılaştıklarını ifade etmişlerdir. Odak grup görüşmesi sırasında diğer trigonometrik formüllerin de benzeri çizimlerden çıkarılabileceğine yönelik tartışmalar yapılmıştır. Dolayısıyla öğrencilerin bu konuda özgün Gİ'ler geliştirmesinin önünde engel oluşturabileceği düşünülmüş ve trigonometri konusu Gİ geliştirme sürecinden çıkarılmıştır. Öğretim ve Gİ geliştirme bölümlerinde cebirsel özdeşlikler, eşitsizlikler ve tam sayıların toplamı konularından Gİ'ler ele alınmıştır. Bu konular Nelsen'in kitaplarında (1993-2001-2015) yer alan konu başlıklarıyla paralel olmakla birlikte Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (2013) da yer alan konulardır.

Öğrenciler algı aşaması, birinci öğretim bölümü ve geliştirme sürecini deneyimledikten sonra Gİ'leri anlama konusunda ilerleme kaydettikleri görülmüştür. Bu nedenle bu aşamada görsel ispatların verilen ifadeleri nasıl doğruladıklarının tartışılmasının yanı sıra yapıları, anlaşılabilirlikleri ve genellenebilirlikleri üzerine de tartışmalar yapılmıştır. İkinci öğretim bölümünün sonunda öğrencilere eşitsizlikler konusuyla ilgili 2 tane, tam sayıların toplamı konusuyla ilgili 2 tane olmak üzere toplamda 4 tane ifade verilmiş, bunlardan istedikleri herhangi 2 tanesinin görsel ispatının oluşturmaları istenmiştir. Ardından ilk Gİ geliştirme sürecince olduğu gibi, önce araştırmacı tarafından geliştirilen Gİ'lerin ön analizi yapılmış ardından öğrencilerin geliştirdikleri Gİ'ler üzerine herbiriyle birebir klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde, Gİ'leri geliştirirken nasıl düşündüklerini nerelerde zorlandıklarını açığa çıkarmaya yönelik sorular yöneltilmiş, geliştirdikleri Gİ'lerde yaptıkları hataları fark etmeleri sağlanmış bunları giderebilmek için ne yapmaları gerektiği üzerine düşünmeleri sağlanmıştır. Yapılan son klinik görüşmelerle birlikte öğretim deneyinin ikinci aşaması tamamlanmıştır.

Üçüncü ve son aşamada ise, öğrencilerle deneyimledikleri sürece ve Gİ'lerin matematik sınıflarında kullanılmasına dair soruların yer aldığı yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır (EK-4). Son olarak tüm sürece dair genel bir değerlendirme

yapılarak geriye dönük analizler yapılmıştır. Uygulama sürecini adım adım Şekil 10’ da özetlenmiştir.

Şekil 10
Uygulama Süreci



3.5. Veri Toplama Araçları

Bu bölümde süreç boyunca kullanılan veri toplama araçları tanıtılmış, bu araçların seçilmesindeki nedenler ve süreçte nasıl kullanıldıkları açıklanmıştır.

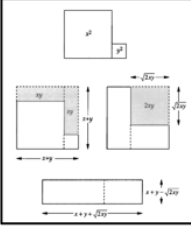
3.5.1. Gİ Çözüm Kağıtları

Öğrencilerin görsel ispata dair algılarını belirlemek için ilk aşamada her bir sayfada 1 tane Gİ örneği içeren toplamda 3 tane Gİ çözüm kağıdı verilmiştir. Verilen kağıtlar ve ifadeler Şekil 11’de biraraya getirilerek sunulmuştur. Orijinal halleri EK-1’de verilmiştir.

Şekil 11
Algı Aşamasında Kullanılan Gİ Çözüm Kağıtları

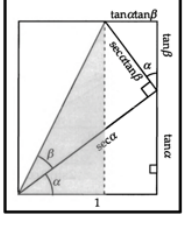
1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2}y + y)(x - \sqrt{2}y + y)$$



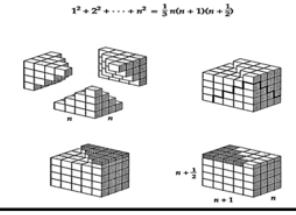
2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

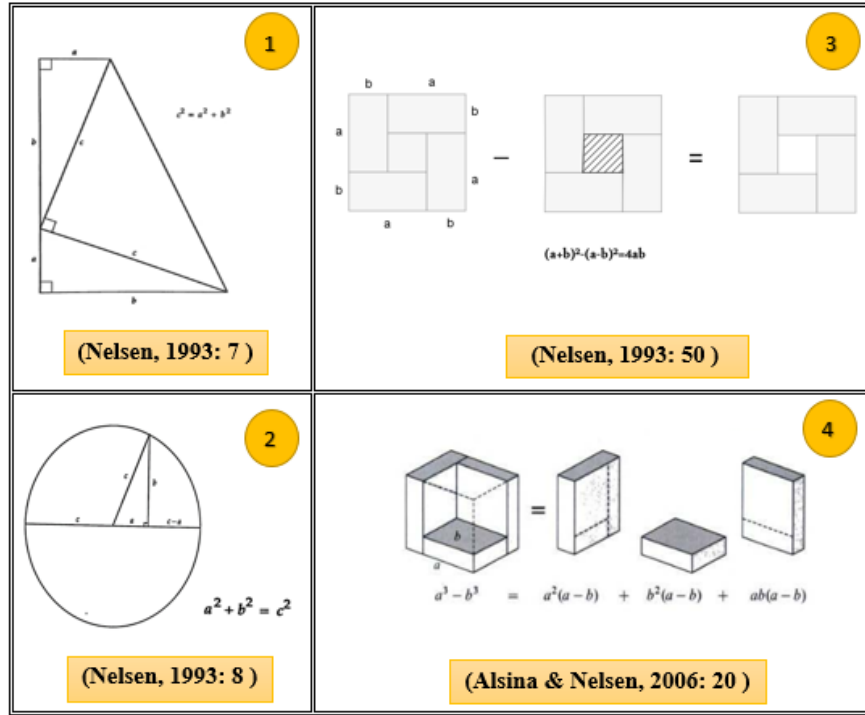
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



Bu aşamada öğrencilere verilen birinci ifade ve Gİ’si cebirsel özdeşlikler konusuyla ilgilidir. Bu Gİ’de verilen özdeşlik, kare ve dikdörtgenin alanından yararlanılarak oluşturulmuştur. İkinci Gİ ise trigonometriyle ilgilidir. $\tan(a+b)$ ’nin açılımını gösteren bir Gİ verilmiştir. Bu ispat kenar uzunluklarının oranlarından yararlanılarak oluşturulmuştur. Üçüncü Gİ ise tam sayıların karelerinin toplamının ifade edildiği bir ispattır. Bu ispat birim küplerden yararlanılarak oluşturulmuştur. Çözümlemesi için bu 3 Gİ’nin seçilmesinin amaçları; öğrencilerin farklı konularda ve farklı yapılarıdaki Gİ’leri tanıtmak, üzerine düşüncelerini sağlamak ve anlayıp, açıklayabilme süreçlerini değerlendirmektir.

Veri toplama sürecinin ikinci aşamasında, birinci ve ikinci öğretim bölümlerinde kullanılan Gİ’ler Şekil 12 ve Şekil 13’de gösterilmiştir. Bu Gİ’lerin seçilme nedenleri ve süreçte kullanım şekilleri açıklanmıştır.

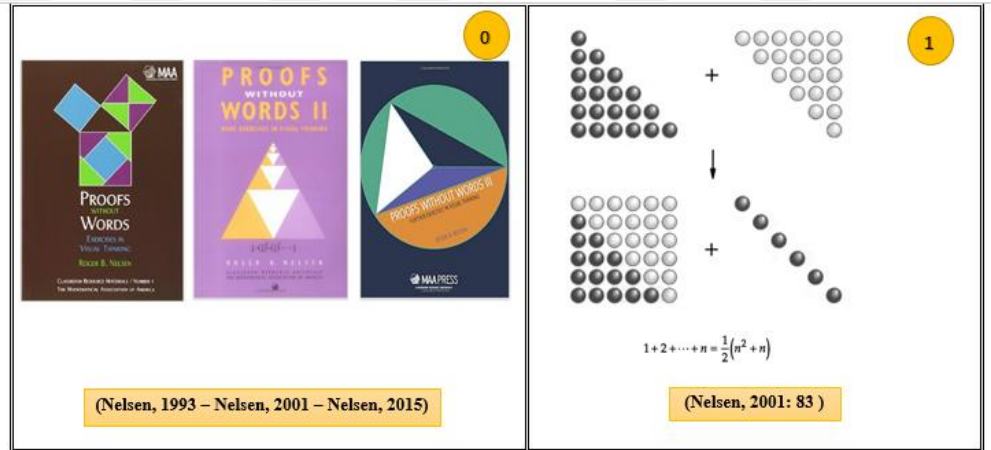
Şekil 12
Birinci Öğretim Bölümünde Kullanılan Gİ'ler

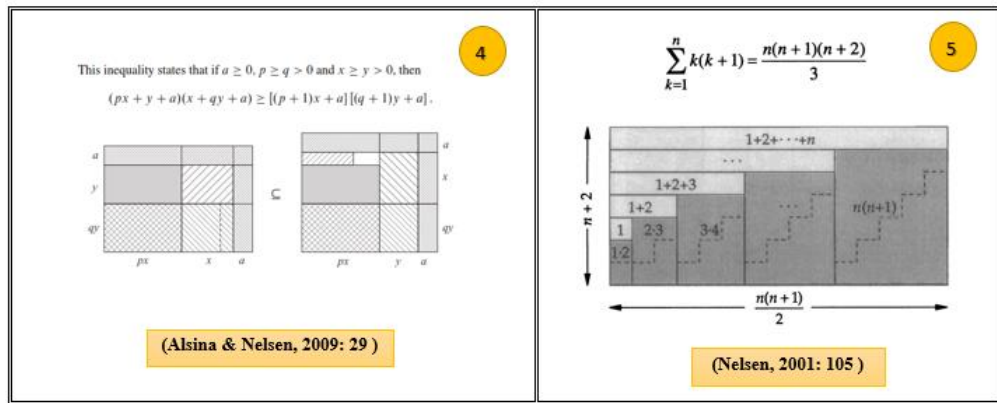
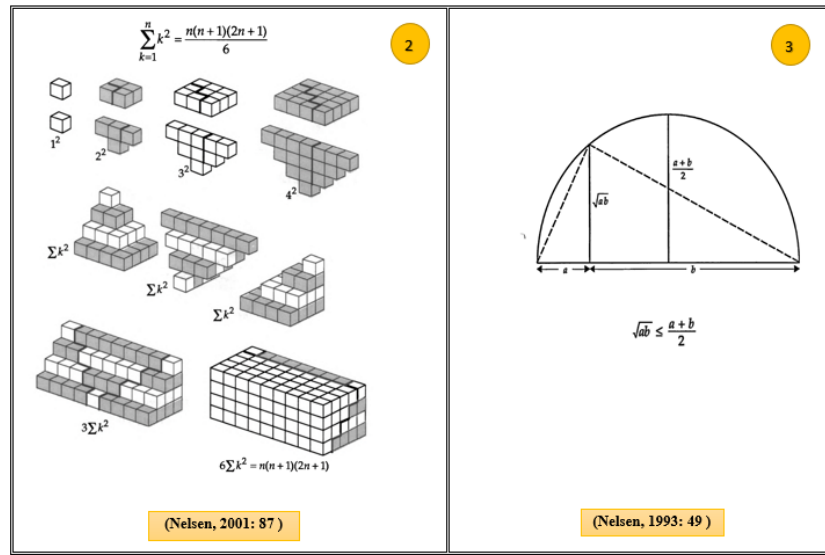


Örneklerin ilk iki tanesi pisagor teoreminin görsel ispatlarından oluşturulmuştur. Aynı ifadenin farklı geometrik şekillerle çeşitli Gİ'lerinin oluşturulabileceğini görmeleri istendiği için bir ifadenin iki farklı ispatı seçilmiştir. Bu ispatlardan ilkinde bir yamukun alanının, yamukun içerisinde yer alan üçgenlerin alanlarına eşitlenmesiyle pisagor özdeşliğine ulaşılrken, ikicisinde bir çemberde kurulan benzerlik yardımıyla pisagor özdeşliğine ulaşılmaktadır. İlk iki Gİ, Nelsen'in (1993) kitabından alınmıştır. Ancak Gİ'lerin kitaptaki versiyonlarında Gİ'lerin doğruluğunu açıklayıcı cebirsel ifadeler yer almaktadır. İlk Gİ'de yamukun alanının içerisindeki üçgenlerin alanlarının toplamına eşit olduğunu gösteren cebirsel ifade, ikinci örnekte de benzerlik oranının ifade edildiği cebirsel ifade yer almaktadır. Bu ifadeler uygulama sırasında çıkarılmış, öğrencileri alternatif yollar düşünmelerine teşvik etmek ve şekiller üzerine daha fazla düşünmelerini sağlamak amacıyla, Gİ'leri öğrencilerin kendilerinin çözümlemeleri istenmiştir. Üçüncü örnekte ise $(a+b)^2 - (a-b)^2$ ifadesinin $4ab$ 'ye eşit olduğunu gösteren, kareler yardımıyla oluşturulmuş üç adımlı bir Gİ verilmiştir. Bu Gİ'nin uygulama sırasında, hangi ifade için oluşturulduğu sorulmuştur. İlk iki örnekte ifadeden Gİ'ye ulaşma hedeflenirken, üçüncü Gİ'de,

şekilden ifadeye ulaşma hedeflenmiştir. Dördüncü ve ilk uygulamanın son örneği olarak verilen Gİ de, a^3-b^3 'ün açılımının $a^2(a-b) + b^2(a-b) + ab(a-b)$ 'ye eşit olduğunu gösteren, dört parçadan oluşan bir Gİ verilmiştir. Bu Gİ'nin öğretimde kullanılmak seçilmesinin amacı, üç boyutlu cisimlerden oluşturulmasıdır. Öğrencilerin farklı geometrik yapılarda Gİ'lerin olduğunu farketmelerini sağlamaktır. Bu örnekle birlikte öğrencilerin cebirsel özdeşliklerle ilgili verilen bir ifadenin Gİ'sinin yamuk, çember, kare ve prizma gibi farklı geometrik şekillerin çeşitli özellikleri kullanılarak, tek şekille veya birkaç adımda oluşturulabileceği görmeleri sağlanmıştır. Öğretim sırasında bu örneklerin görsel ispat olduğu söylenmemiş, ispat kelimesi de kullanılmamıştır. Bunun nedeni hem ispat ifadesi kullanıldığında öğrencilerde oluşabilecek önyargıları önlemek hem de gerçekleştirilecek diğer öğretim bölümü için algılarına dışardan gelebilecek müdahaleleri minimuma indirmeye çalışmaktır. İkinci öğretim bölümünde tartışılan Gİ örnekleri Şekil 13' de verilmiştir.

Şekil 13
İkinci Öğretim Bölümünde Kullanılan Gİ'ler





İkinci öğretim bölümünde tartışmaya sunulan Gİ örnekleri, farklı yapılarda olması dikkate alınarak seçilmiştir. Tam sayıların toplamı konusuyla ilgili Gİ'ler (1-2-5) sırasıyla noktalardan, küplerden ve dikdörtgenlerden yararlanılarak oluşturulmuş, eşitsizlikler konusuyla ilgili verilen Gİ'ler (3-4) çember ve dikdörtgenler yardımıyla oluşturulmuştur.

3.5.2 Video ve Ses Kayıt Transkriptleri

Yapılan 1. ve 2. Öğretim bölümleri video kamerayla kayıt altına alınmıştır. Tüm süreç boyunca, odak grup görüşmesi, klinik görüşme ve yarı yapılandırılmış görüşme olmak üzere 3 çeşit görüşme türü kullanılmıştır. Bu görüşmelerden odak grup görüşmesi için video kamera, klinik görüşmeler ve yarı yapılandırılmış görüşmeler için ses kayıt cihazı kullanılmıştır. Yapılan görüşmelerin amaçları ve hangi aşamada, hangi amaçla kullanıldıkları sırasıyla açıklanmıştır.

Odak grup görüşmesi, küçük bir grupla lider arasında yapılan, grup dinamiğinin etkisinin kullanıldığı, derinlemesine bilgi edinme ve düşünce üretme amacıyla tasarlanarak yapılan tartışmalardır (Bowling, 2002; Krueger, 1994).

Odak gruplarını kullanmak için önerilen kriterler ana hatlarıyla şu şekilde belirtilmiştir (Kitzinger, 1994; Gill, Stewart, Treasure, & Chadwick, 2008):

- Çok yönlü bir tasarımda, bir konuyu keşfetmek veya sonraki aşamalarda kullanılmak üzere grup dili oluşturmak ve anlatılanları toplamak.
- Diğer yöntemlerle toplanan verileri netleştirmek, genişletmek ve nitelendirmek.
- Sonuçlara yönelik araştırma katılımcılarına geri bildirimde bulunmak.

Bu görüşme yönteminin amacının, çalışmanın ilk basamağını oluşturan öğrencilerin görsel ispata yönelik algılarının belirlenmesi bölümü için uygun olduğu düşünülmüştür. Bu çalışma kapsamında odak grup görüşmesi yapılmasının amaçları;

- yazılı olarak toplanan, görsel ispatları çözümlemelerine yönelik öğrenci düşüncelerini netleştirmek ve derinleştirmek,
- verilen görsel ispatları algılama konusunda zorlanan öğrencilerin odak grup sayesinde belirli bir algı düzeyine ulaşmalarını sağlamak ve,
- birinci öğretim bölümünü planlamak için sürece yönelik öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmaktır.

Klinik görüşmeler (klinik mülakatlar), birinci ve ikinci öğretim bölümlerinin sonunda yapılan Gİ geliştirme süreçlerinden sonra, öğrencilerin her bir Gİ'sini geliştirirken/geliştirmeye çalışırken nasıl düşündüklerini öğrenmek amacıyla yapılmıştır. Klinik görüşmeler, öğrencinin matematiksel düşünme süreçlerindeki zenginliği keşfederek, bilişsel becerileri değerlendirmek için esnek soru sorma metodu olarak ortaya çıkmıştır (Clements, 2000). Bu araştırma kapsamında yapılan klinik görüşmeler de her bir öğrencinin geliştirdiği Gİ'ye yönelik tasarlanmış ve gerçekleştirilmiştir.

Öğrencilerin tüm sürece yönelik ve Gİ'nin matematik sınıflarında kullanımına yönelik görüşlerini almak için öğrencilerin her biriyle **yarı yapılandırılmış görüşme** yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler, araştırılacak alanların tanımlanmasına yardımcı olan birkaç ana sorudan oluşur ve aynı zamanda araştırmacının, bir fikir veya yanıtı daha ayrıntılı olarak inceleyebilmesi için bu soruların dışına çıkmasına izin verir

(Gill et al., 2008). Bu süreçte araştırmacı görüşmenin ana eksenini oluşturacak 4 soru belirlemiştir (EK-4). Öğrencilerin bu sorulara verdiklerini yanıtları detaylandırabilmek ve görüşmenin içeriğini esnetebilmek için bu görüşme yöntemi seçilmiştir.

3.6 Verilerin Analizi

Öğretim deneyinden elde edilen verilerin analizi, geriye dönük (retrospective) ve ileriye dönük (prospective) analiz olmak üzere iki şekilde yapılmaktadır. İleriye dönük analiz, araştırmacının süreç içerisinde uygulamaları devamlı şekilde analiz etmesi ve bunun sonucunda öğretim ve öğrenmenin daha iyi hale getirilmesi için alternatif öğrenme yollarını ortaya koymasısıdır (Cobb et al., 2003). Geriye dönük analiz ise, çalışma sonunda toplanan bütün verilerin analiz edilerek ortaya konulan sonuçların güvenilir ve tutarlı olduğunun gösterilmesidir (Cobb, 2000; Cobb et al.; 2003). Bu çalışmada da veri toplama sürecinde bahsedildiği gibi yapılan her uygulama sonrası ileriye dönük analizler yapılmış, bir sonraki uygulamaya bu analizler ışığında devam edilmiştir. Yapılan video kayıtlarının analizinde, Lesh ve Lehrer (2000) tarafından öğretim deneyi için önerilen teleskobik analiz (telescoping analysis) yöntemi rehber olarak alınmıştır. Lesh ve Lehrer (2000) bu analiz sürecini altı aşamalı (Yorumlama aşaması 1-2-3-4-5-6) olarak tanımlamıştır. Bu aşamalar sırasıyla 1-gözlemcinin araştırma sırasında tuttuğu notlar ve kaybolabilecek verilerin toplanması, 2-video kayıtlarının ön incelemesi (sonraki bölüm için), 3-tüm kayıtların, verilerin transkript edilmesi ve 4-ardından özetlenmesi, 5-çalışma gruplarının bir veya birden fazla problemi çözme bölümündeki davranışlarının incelenmesi, 6-sonraki çalışmalar için kullanılabilecek dikkat çeken bölümlerin ek analizlerinin yapılması olarak belirtilmiştir.

Araştırma süreci boyunca yapılan görüşmeler ve alınan video kayıtları transkript edilmiş, yazılı dokümanlar incelenmiş, bilgisayar ortamına aktararak veri seti oluşturulmuştur. Tüm süreçte kullanılan veri toplama araçları ve veri analiz yöntemleri özetlenerek Tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 1
Veri Toplama Aşamaları Kullanılan Araçlar ve Veri Analiz Yöntemleri

Aşamalar	Veri Toplama Aracı	Veri Analiz Yöntemi
Algı Belirleme, Odak grup görüşmesi ve Planlama	Gİ Çözüm Kağıtları Video Kayıt	Gİ Algı Değerlendirme Kriterleri Betimsel analiz
I. Öğretim Bölümü	Video Kayıt	Betimsel analiz
I. Gİ Geliştirme	Gİ Çözüm Kağıtları	Betimsel analiz
I. Klinik Görüşme	Ses Kaydı	Betimsel analiz
II. Öğretim Bölümü	Video Kayıt Gİ Çözüm Kağıtları	Betimsel analiz
II. Gİ Geliştirme	Gİ Çözüm Kağıtları	Betimsel analiz
II. Klinik Görüşme	Ses Kaydı	Betimsel analiz
Sürece ve Gİ'ye Yönelik Görüş Alma	Ses Kaydı	İçerik Analizi

İlk olarak algı belirleme aşamasında kullanılan Gİ çözüm kağıtlarının (EK-1) analizi için araştırmacı tarafından Gİ algı değerlendirme kriterleri oluşturulmuştur. Literatürde Gİ'lerin algılanıp algılanmadığını belirlemeye yönelik herhangi bir değerlendirme aracı olmadığı için araştırmacılar tarafından, kullanılan Gİ'lerdeki kritik noktalar belirlenerek her bir Gİ için 2 tane kriter belirlenmiştir. Ardından öğrencilerin yanıtları bu kriterlere göre değerlendirilmiştir. Belirlenen kriterler ve açıklamaları şu şekildedir:

Birinci Gİ için;

1-İfade-alan ilişkisini kurma: Verilen özdeşliğin, şekildeki alanlardan yola çıkılarak doğrulandığını farkedilmesi beklenmektedir.

2-Alanların dönüşümü açıklama: İlk adımda verilen karelerin alanları toplamının, son adımda dikdörtgene dönüştürülerek eş alanların elde edildiğini açıklanması beklenmektedir.

İkinci Gİ için;

1-Trigonometrik oranları yerleştirme: Şekildeki trigonometrik ifadeleri, 1 olarak verilen sabitten ve açılardan yararlanarak şekle yerleştirilmesi beklenmektedir.

2-Hedeflenen ifadeye ulaşma: Şekilden $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşması beklenmektedir.

Üçüncü Gİ için;

1-Adımlar arası geçişleri açıklama: Birinci adımdan itibaren küplerin biraraya getirilişi, üç özdeş şeklin birleştirilmesi, üçüncü adımda fazlalık olan parçanın ikiye bölünerek simetriği yönünde şeklin üzerine eklenmesi ve son olarak düzgün prizma elde edildiğini ifade edilmesi beklenmektedir.

2-İfade-hacim ilişkisini kurma: Verilen özdeşliğin sağ tarafındaki ifadenin, son adımda oluşturulan prizmanın hacminden yola çıkılarak elde edildiğinin açıklanması beklenmektedir.

Kriterleri sağlayan yanıtlar 1, sağlamayanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bu kriterlerin ait olduğu Gİ'ler detaylı olarak bulgularda açıklanmıştır.

Algı aşamasının ardından yapılan odak grup görüşmesi transkript elimiş, satır satır numaralandırılarak kodlanmış ve görüşme içeriğini oluşturan temalar belirlenerek analiz edilmiştir. İkinci aşamada yapılan 1. ve 2. öğretim bölümlerinin video kayıtları transkript edilerek bu kayıtlar üzerinde **betimsel analiz** yapılmıştır. Öğretim bölümleri sonunda öğrencilerin geliştirdikleri Gİ'ler için önce araştırmacı tarafından ön analiz yapılmış ardından öğrencilerle yapılan klinik görüşmelerin ilgili bölümleriyle birleştirilerek analiz edilmiştir. Gİ'lerin analizinden öğrencilerin Gİ geliştirme sürecindeki düşünceleri betimlenmiş, bu süreçte yaptıkları hatalar, karşılaştıkları zorluklar üzerine temalar oluşturulmuştur. Ardından sürece dair yapılan, yarı yapılandırılmış görüşmeler **içerik analizine** tabi tutulmuştur. Geriye dönük analiz aşamasında, öğretim deneyinin ilgili kayıtlarının tamamının tekrar incelenmiş genel değerlendirme yapılarak analiz süreci tamamlanmıştır.

Geçerlilik ve Güvenirlik

Araştırmanın geçerliliği ve güvenilirliğinin sağlanması için birden fazla veri toplama aracından (yazılı doküman, görüşme kaydı, video kaydı) yararlanılmıştır. Bu şekilde veri çeşitlemesi yapılmıştır. Çalışmadan elde edilen veriler, hem araştırmacı hem de

danışman öğretim üyesi tarafından incelenmiş, video ve ses kayıtları birebir transkrip edilerek güvenilirlik sağlanmıştır.



BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

4.1 Birinci Alt Probleme Ait Bulgular

Araştırmanın ilk alt problemi: Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispatlara dair algıları nasıldır? (örneklerini anlayıp açıklayabilme) şeklindedir.

Öğretim deneyinin planlanması ve katılımcıların görsel ispata dair algılarının belirlenmesi amacıyla çalışmanın ilk aşamasında öğrencilere cebirsel özdeşlikler, trigonometri ve tamsayıların toplamı konularıyla ilgili 3 tane Gİ ve cebirsel ifadesi verilmiştir (EK-1). Öğrencilere, şekillerle ifadelerin arasındaki ilişkilerin ne olduğu sorulmuştur. Bu aşamada öğrencilerin algılarına müdahale etmemek için Gİ ile ilgili herhangi bir açıklama yapılmamış, araştırmacı tarafından ispat ve görsel ispat kelimeleri kullanılmamıştır. Verilen ifadelerin ardından uygulamaya dahil olan tüm öğrencilerle odak grup görüşmesi gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde, önce öğrencilerden açıklamaları istenilen Gİ'lere yönelik verdikleri cevapların analizlerine akabinde uygulama sonrası yapılan odak grup görüşmesine yönelik analizlere yer verilmiştir. Bu bölümde yapılan analizler, öğretim deneyi sürecinin planlamasında rol oynadığı için ileriye dönük analiz (prospective) aşamasının bir parçasını oluşturmaktadır. Bölüm sonunda ileriye dönük çıkarımlara, bir sonraki aşama için alınan notlara yer verilecektir.

4.1.1 Gİ Çözümleme Kağıtlarından Elde Edilen Bulgular

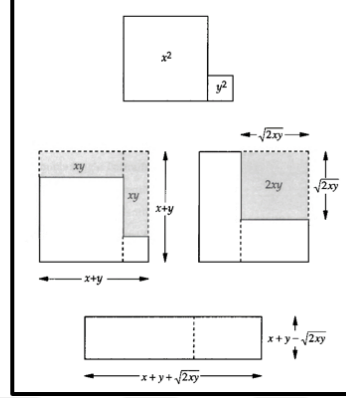
Bu bölümde ilk önce, öğrencilerin her soru için verdiği yanıtlar değerlendirilip, en son bütünleştirilerek sunulmuştur. Bu aşamada öğrencilere verilen birinci ifade ve Gİ cebirsel bir özdeşliktir (Şekil 14). Bu ispatta verilen özdeşlik, kare ve dikdörtgenin alanından yararlanılarak oluşturulmuştur.

Şekil 14

Algı Aşamasında Verilen Birinci Görsel İspat

- 1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$



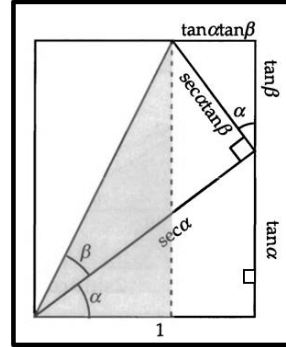
İkinci Gİ ise trigonometriyle ilgilidir. Trigonometride, $\tan(a+b)$ 'nin açılımını gösteren bir görsel ispat verilmiştir (Şekil 15). Bu ispat kenar uzunluklarının oranlarından yararlanılarak oluşturulmuştur.

Şekil 15

Algı Aşamasında Verilen İkinci Görsel İspat

- 2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



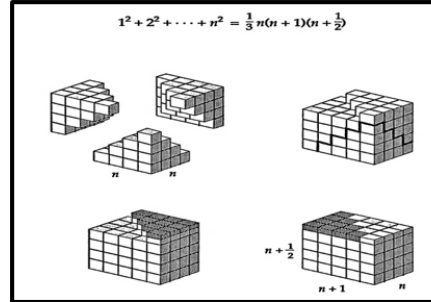
Üçüncü Gİ ise tam sayıların karelerinin toplamının ifade edildiği bir ispattır (Şekil 16). Bu ispat birim küplerden yararlanılarak oluşturulmuştur.

Şekil 16

Algı Aşamasında Verilen Üçüncü Görsel İspat

3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



Öğrencilerin verilen Gİ'lere yönelik yaptıkları açıklamaları değerlendirebilmek için her Gİ'ye yönelik iki kriter belirlenmiş ve öğrencilerin yanıtları bu kriterlere göre değerlendirilmiştir. Belirlenen kriterler ve açıklamaları şu şekildedir:

Birinci Gİ için:

1-İfade-alan ilişkisini kurma: Verilen özdeşliğin, şekildeki alanlardan yola çıkılarak doğrulandığını fark edilmesi beklenmektedir.

2-Alanların dönüşümünü açıklama: İlk adımda verilen karelerin alanları toplamının, son adımda dikdörtgene dönüştürülerek eş alanların elde edildiğini açıklanması beklenmektedir.

İkinci Gİ için:

1-Trigonometrik oranları yerleştirme: Şekildeki trigonometrik ifadeleri, 1 olarak verilen sabitten ve açılardan yararlanarak şekle yerleştirilmesi beklenmektedir.

2-Hedeflenen ifadeye ulaşma: Şekilden $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşması beklenmektedir.

Üçüncü Gİ için:

1-Adımlar arası geçişleri açıklama: Birinci adımdan itibaren küplerin biraraya getirilişi, üç özdeş şeklin birleştirilmesi, üçüncü adımda fazlalık olan parçanın ikiye bölünerek simetriği yönünde şeklin üzerine eklenmesi ve son olarak düzgün prizma elde edildiğini ifade edilmesi beklenmektedir.

2-İfade-hacim ilişkisini kurma: Verilen özdeşliğin sağ tarafındaki ifadenin, son adımda oluşturulan prizmanın hacminden yola çıkılarak elde edildiğinin açıklanması beklenmektedir.

Gİ değerlendirme kriterlerini sağlayan yanıtlar 1, sağlamayan yanıtlar ise 0 olarak kodlanmıştır (Tablo 2).

Tablo 2
Gİ Değerlendirme Kriterlerine Göre Yapılan Puanlama

Gİ	Kriterler	İrem	Görkem	Deniz	Emre	Efe	Yiğit	Toplam
1.Gİ	İfade-alan ilişkisini kurma	1	1	1	1	1	1	6
	Alanların dönüşümünü açıklama	1	1	1	1	1	1	6
2.Gİ	Trigonometrik oranları yerleştirme	0	0	1	1	0	0	2
	Hedeflenen ifadeye ulaşma	0	1	1	1	0	1	4
3.Gİ	Adımlar arası geçişleri açıklama	0	1	0	1	0	0	2
	İfade-hacim ilişkisini kurma	0	1	0	1	0	0	2

Tablo 2'ye bakıldığında öğrencilerin en yüksek puanı 1.Gİ'de aldıkları görülmektedir. Öğrencilerin tümü bu Gİ için belirlenen kriterleri sağlayan açıklamalar yapmıştır, dolayısıyla öğrencilerin cebirsel özdeşliklere yönelik Gİ'yi algılayabildikleri söylenebilir. Trigonometriyle ilgili verilen 2.Gİ'de ise öğrenciler hedeflenen ifadeye ulaşma konusunda kısmen başarılı olsalar da, trigonometrik oranları yerleştirme konusunda uygun açıklamaları yapamamışlardır. Öğrencilerin en çok zorlandıkları ise 1'den n'e kadar olan sayıların kareleri toplamının gösterildiği 3.Gİ olmuştur. Tüm Gİ'lerde tam puan alan tek öğrenci Emre olmuştur. Öğrencilerin yanıtları ve nasıl değerlendirildikleri açıklamalarla birlikte aşağıda sunulmuştur.

İrem, 1. Gİ'ye yönelik: *“Şekilde alanları tek tek hesaplamış ve daha sonra koyu renkli kutucukların alanı tamamından çıkarılmış. En üstteki kutuların alanları toplamı ayrı ayrı hesaplanıp toplandıktan sonra farklı bir form ile ifade edilmesi hedeflenmiş ve bu bağlamda da önceki alan hesaplarından yararlanılarak tek bir eşitlik elde*

edilmiştir.” şeklinde bir açıklama yapmıştır (Şekil 17). Bu açıklamadan, *alanları tek tek hesaplamış ve farklı bir form ile ifade edilmiş* ifadelerini kullandığı görülmektedir. Bu nedenle İrem’in yanıtı *ifade-alan ilişkisini kurma* ve *alanların dönüşümünü* *açıklama* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

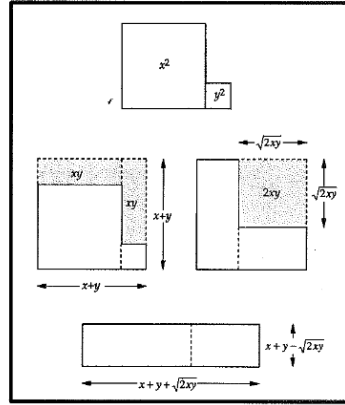
Şekil 17

İrem’in Birinci Soruya Yanıtı

- 1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

Şekilde alanların tamamını tek tek hesaplamış ve daha sonra aynı şekli farklı kutucuklara bölerek tamamında göstermiş. Enişte alttaki kutucukta alanların tamamını aynı eylem hesaplayıp topladıkları sonra farklı bir formel ile ifade edilmiş. İfade edilen ve bu bağlamda da örnekte aynı hesaplamadan yapılabilecek tek bir eşitlik elde edilmiştir.



Görkem açıklamasında, $x^2 + y^2$ 'nin kapladığı alanın bir çok yolla elde edilebileceğini ifade etmiştir (Şekil 18). Şekil üzerinde de çizimler yaparak özdeş alanların nasıl elde edildiğini göstermiştir. Bu nedenle Görkem'in yanıtı *ifade-alan ilişkisini kurma* ve *alanların dönüşümünü* *açıklama* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 18

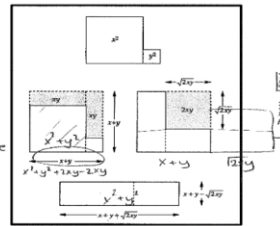
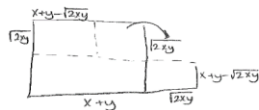
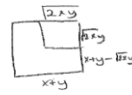
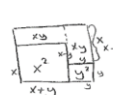
Görkem'in Birinci Soruya Yanıtı

- 1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

$x^2 + y^2$ 'nin kapladığı alanı şekilde de görüldüğü gibi birçok yolla elde edebiliriz.

⇒ Alan sayısal bir değer olduğundan birçok şekilde asıl sayıların tüm karakteri bulunabilir.



$$(x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$$

Deniz'in birinci soruya yanıtına bakıldığında bu şekli ispat olarak nitelendirdiği görülmektedir. Bu ispatı kendisinin yapamayacağını ifade etmiş ancak verilen diyagramla kolaylıkla kavradığını belirtmiştir. Alandan yola çıkıldığını yazılı olarak ifade etmemiş olsa da verilen Gİ'deki alan parçalanışlarını ve birleştirilişlerini algılayabildiği şekil üzerinde yaptığı çizimden görülmektedir (Şekil 19). Açıklamasında *"kalan parçalar yanyana getirilip genel bir denklem elde edilmiş"* ifadesini kullanmıştır. Bu açıklamasından ve şekil üzerinde üçüncü adımda belirttiği dikdörtgenlerin altına x^2+y^2 yazdığından dolayı Deniz'in yanıtı *ifade-alan ilişkisini kurma* ve *alanların dönüşümünü açıklama* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

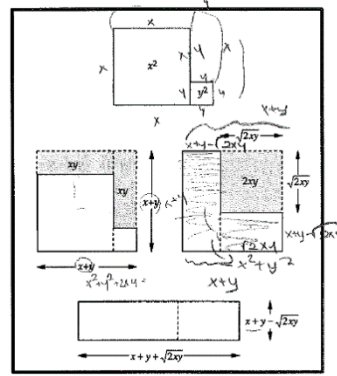
Şekil 19

Deniz'in Birinci Soruya Yanıtı

1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy})^2 + (x - \sqrt{2xy})^2$$

Şekilde x^2+y^2 yi bulabilmek için $(x+y)^2$ den yola çıkılmış.
 $x+y$ nin karesine eşit olan şekilde $2xy$ işaretlenmiş ve x^2+y^2 ydnz bırakılmış.
kalan parçalar yan yana getirilip genel bir denklem elde edilmiş. İlk kısımda böyle bir ispat benim yapmam zor olabilirdi ancak bu şekilde gösterildiğinde mantığını kolaylıkla kavradım.



$$x+y+\sqrt{2xy} \cdot x+y-\sqrt{2xy} = x^2+y^2$$

Emre'nin 1. Gİ'ye yönelik sözel açıklama yapmak yerine şekil üzerindeki dönüşümleri çizerek göstermeyi tercih ettiği görülmektedir. Emre 2. adımdaki alanların değerlerini karelerin içine yazmış, 3. adımda oluşturulan dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını ve daha sonra dikdörtgenlerin uc uca eklenişini çizerek göstermiştir (Şekil 20). 2. adımdan 3. adıma geçişteki taralı alanların aynı alan olduklarını da ifade etmiştir. Bu nedenle Emre'nin yanıtı *ifade-alan ilişkisini kurma* ve *alanların dönüşümünü açıklama* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 20

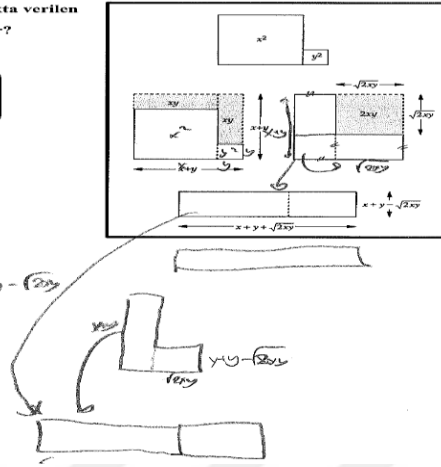
Emre'nin Birinci Soruya Yanıtı

1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

$$xy + xy = 2xy$$

aynı alan



Efe, 1.Gİ'yi ispat yöntemi olarak nitelendirmiştir (Şekil 21). Verilen şekildeki adımları numaralandırmış, taralı şekillerin birleştirildiğini ifade etmiştir. 2 numara olarak adlandırdığı parçadaki dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını belirtmiş ve açıklamasında ilk şekille en sondaki şeklin alanlarının özdeş olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle Efe'nin yanıtı *ifade-alan ilişkisini kurma ve alanların dönüşümünü açıklama* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 21

Efe'nin Birinci Soruya Yanıtı

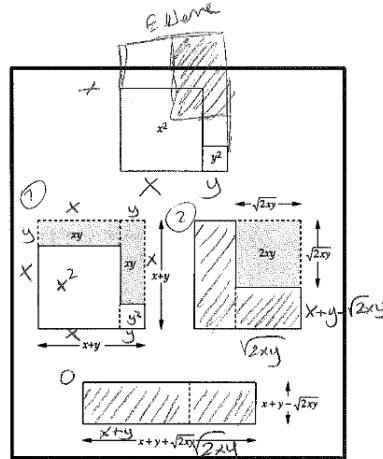
1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

ispat yöntemi

Taralı şekiller birleştirilmiş

ilk şekille alttaki şeklin alanları aynı



Yiğit'in 1. Gİ'ye yönelik yaptığı açıklamada, cebirsel doğrulama yoluna gittiği görülmektedir (Şekil 22). Yiğit, cebirsel doğrulamada elde ettiği $(x+y)^2 - 2xy$ ifadesini

şekille ilişkilendirmiş ve ifade alan ilişkisini kurarak 3.adımda dikdörtgenleri tarayarak x^2+y^2 olarak ifade ettiği görülmektedir. Bu nedenle Yiğit'in yanıtı *ifade-alan ilişkisini kurma ve alanların dönüşümünü açıklama* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 22

Yiğit'in Birinci Soruya Yanıtı

1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

$$1) x^2 + y^2 \rightarrow (x+y)^2 - 2xy$$

$$x = (\sqrt{x})^2$$

$$y = (\sqrt{y})^2$$

$$x^2 + y^2 = ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2)^2 - \frac{2(\sqrt{xy})^2}{(\sqrt{2})^2}$$

$$((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy})^2 - (\sqrt{2xy})^2$$

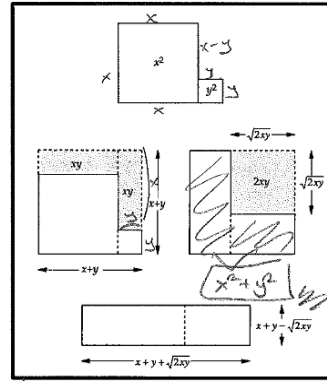
iki kare farkı

$$((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} - \sqrt{2xy}) \rightarrow (x + y - \sqrt{2xy})$$

$$((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy})$$

$$x + y + 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy}$$

$$(x + y + \sqrt{2xy})(x + y - \sqrt{2xy})$$



1) Kenarları x, y olan iki karenin birleştirilmesiyle oluşan şeklin alanı hesapları

$$(x+y)^2 - 2xy$$

Kullanılıyor

1. Gİ'ye yönelik genel değerlendirme:

- Tüm öğrencilerin açıklamalarının verilen kriterleri sağladığı görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin cebirsel özdeşliğe yönelik Gİ'yi algılayabildikleri söylenebilir.
- Deniz'in yanıtından bu Gİ'yi ispat olarak, Efe'nin de ispat yöntemi olarak ifade ettiği görülmüştür.
- İrem'in şekil üzerinde hiç çizim yapmadan açıklama yapmayı tercih eden tek öğrenci olduğu, Emre'nin de sözel ifade kullanmadan çizimle

açıklama yapmayı tercih eden tek öğrenci olduğu, Yiğit'in de cebirsel doğrulama yapmaya çalışan tek öğrenci olduğu görülmüştür.

İkinci Gİ için belirlenen kriterler:

1-Trigonometrik oranları yerleştirme: Şekildeki trigonometrik ifadeleri, 1 olarak verilen sabitten ve açılardan yararlanarak şekle yerleştirilmesi beklenmektedir.

2-Hedeflenen ifadeye ulaşma: Şekilden $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşılması beklenmektedir.

İrem 2.Gİ'ye yönelik, “Anladım, daha önce yaptığımız bir ispata çok benziyor. Harf vererek denkleştirdim. Gayet anlaşıldı. Başka nasıl açıklayacağımı bilemiyorum.” şeklinde bir açıklama yapmıştır (Şekil 23). İrem'in bu Gİ'yi ispat olarak nitelendirdiği görülmektedir ve daha önce yaptıkları bir ispata benzediğini ifade etmiştir. İrem'in trigonometrik oranları sabitten yararlanarak değil, rastgele harf vererek ve üçgenlerde pisagor bağıntısı uygulayarak yerleştirdiği görülmektedir. Burada İrem'in oranları elde etmekten çok harflerle ifade ettiği görülmektedir. Ve İrem'in taralı üçgende, $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşabildiğini gösteren herhangi bir açıklaması yoktur. Bu nedenle İrem'in yanıtı *trigonometrik oranları yerleştirme* ve *hedeflenen ifadeye ulaşma* kriterlerini sağlamamış olarak değerlendirilmiştir.

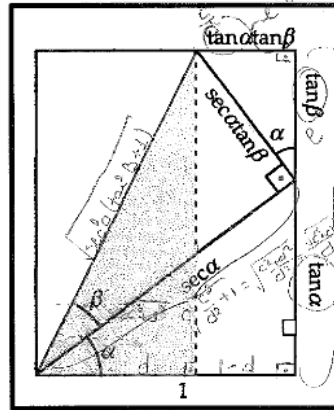
Şekil 23

İrem'in İkinci Soruya Yanıtı

2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Alınan, diğer bir adan, trigonometri bir ispatı çok benzer. Harf vererek denkleştirdim. Gayet anlaşıldı. Başka nasıl açıklayacağımı bilemiyorum.



Görkem'in 2.Gİ'ye yönelik yanıtına bakıldığında $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına taralı üçgenden değil, Z kuralından yararlanarak en soldaki üçgende yerleştirerek elde ettiğini görüyoruz (Şekil 24). Açılımda $\tan \beta$ yerine, β açısının verildiği üçgeni kullanarak $\frac{\sec \alpha \tan \beta}{\sec \alpha}$ oranını yazdığı görülmüştür. Görkem sabit olarak verilen 1 kenarından yararlanarak oranlara ulaşmamıştır. Bu nedenle Görkem'in yanıtı *trigonometrik oranları yerleştirme* kriterini sağlamamış olarak, *hedeflenen ifadeye ulaşma* kriterini ise sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

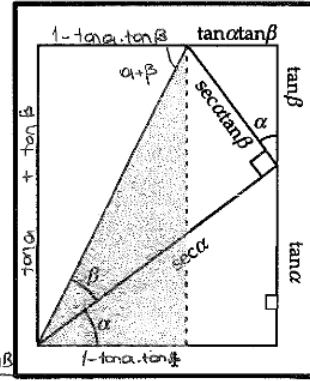
Şekil 24

Görkem'in İkinci Soruya Yanıtı

2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\tan \alpha + \frac{\sec \alpha \tan \beta}{\sec \alpha}}{1 - \tan \alpha \frac{\sec \alpha \tan \beta}{\sec \alpha}}$$



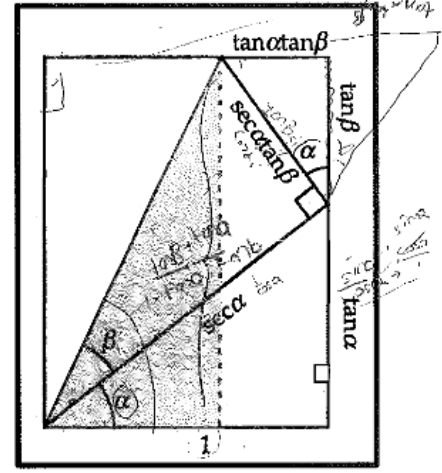
açıların toplamından Z kuralı ile $\alpha + \beta$ elde edildikten sonra kenarların karşılıklı olarak yerleştirilmesiyle kısa yoldan bulunur. Ayrıştırma aynı ayrı toplamlarıyla da olur.

Deniz'in 2. Gİ için yaptığı açıklamaya bakıldığında, şekildeki trigonometrik oranların bulunuşunu ve alınan 1 sabitini, birim çember yardımıyla trigonometrik oranların elde edilmesine benzettği görülmektedir (Şekil 25). Deniz $\tan \alpha$ 'nın yerleştirilmesiyle, diğer oranların elde edildiğini ifade etmiştir. Şekil üzerine yazdığı ifadelerle de bu oranları elde ettiği görülmüştür. Taralı üçgende inilen dikme üzerine de yazdığı oranla, $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşabildiği görülmektedir. Bu nedenle Deniz'in yanıtı *trigonometrik oranları yerleştirme* ve *hedeflenen ifadeye ulaşma* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 25
Deniz'in İkinci Soruya Yanıtı

2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



Görsef incelediğimde formülün geldiği yeri anladım. Birim çembere yerleştirir gibi bir kareye 1 verip tan vb değerleri yazdığımızda sırayla diğer değerleri elde edebiliyoruz. Bu sistemi payet çıkartıcı buldum.

$\tan \alpha$ nin yerleştirilmesiyle geri kalan oranların rahatlıkla yazılabileceğini düşünüyorum.

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

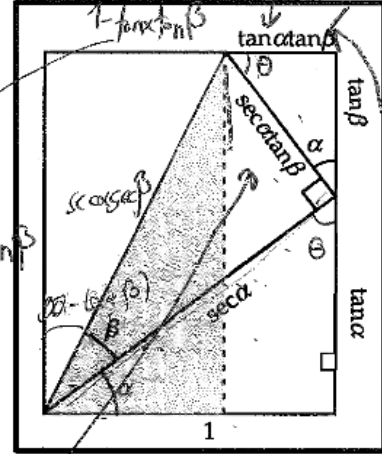
Emre 1. Gİ'deki açıklamasında olduğu gibi 2.Gİ'de de, sözel açıklama yerine çizimle ve ok işaretleri yardımıyla tüm trigonometrik oranların çıkarılışını ifade etmeyi tercih ettiği görülmüştür (Şekil 26). Emre, $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ise taralı üçgenden yararlanarak değil $\tan(90 - (\alpha + \beta))$ 'nin yani $\cot(\alpha + \beta)$ 'nin $1/\tan(\alpha + \beta)$ oranına özdeş olduğundan yararlanarak ulaşmıştır. Bu nedenle Emre'nin yanıtı *trigonometrik oranları yerleştirme ve hedeflenen ifadeye ulaşma* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 26
Emre'nin İkinci Soruya Yanıtı

2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)}$$



$$\frac{x}{\sec \alpha} = \tan \beta$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha} = \frac{x}{\tan \beta \sec \alpha}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{x}{\tan \alpha \tan \beta}$$

Efe'nin verdiği yanıtta, verilen Gİ'ye ispat dediği ve çeşitli sayısal değerlerden yola çıkarak denemeler yaptığı görülmektedir (Şekil 27). Efe'nin trigonometrik oranları elde etmek için yaptığı herhangi bir açıklamaya ya da çizime rastlanmamıştır. Hedeflenen ifadeye taralı üçgende pisagor yapılarak ulaşılabileceğini ifade etmiştir. Ancak bu doğru bir açıklama değildir. Taralı üçgende pisagor uygulanarak yalnızca hipotenüsün uzunluğu bulunabilir. İstenilen $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşılmıştır. Bu nedenle Efe'nin yanıtı *trigonometrik oranları yerleştirme ve hedeflenen ifadeye ulaşma* kriterlerini sağlamamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 27

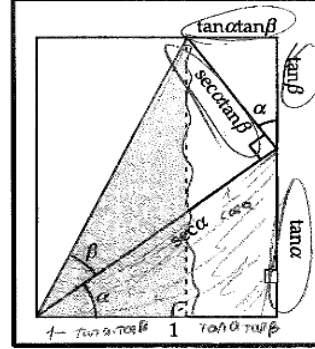
Efe'nin İkinci Soruya Yanıtı

2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

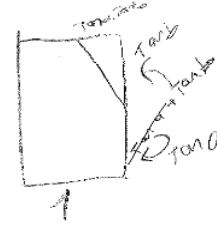
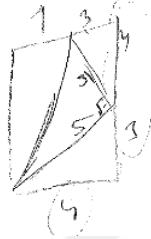
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

ispat

tarafı eşgende
Pisagor



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$



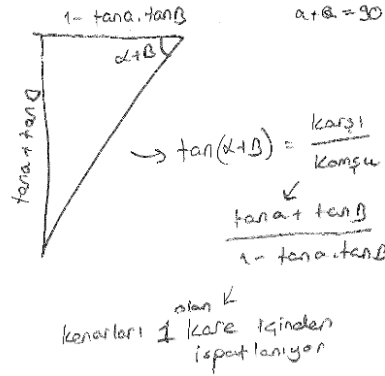
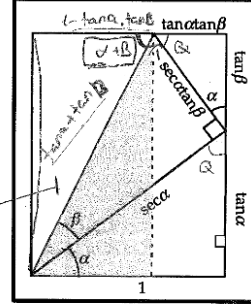
Yiğit'in 2. Gİ'ye yönelik verdiği yanıtta α ve β açılarının verildiği üçgenlerdeki diğer açılar isimlendirilerek en soldaki üçgende $\alpha + \beta$ açısını elde ettiği görülmektedir (Şekil 28). Yiğit $\alpha + \beta$ açısını oluşturduğu üçgenden yararlanarak $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımına ulaşmıştır. Ancak Yiğit'in yanıtında şekilde verilen trigonometrik oranların nasıl oluşturulduğuna dair bir açıklama yer almamaktadır. Bu nedenle Yiğit'in yanıtı *trigonometrik oranları yerleştirme* kriterini sağlamamış olarak, *hedeflenen ifadeye ulaşma* kriterini ise sağlamış olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca Yiğit'in "kenarları 1 olan kare için ispatlanıyor" şeklinde bir ifadesi yer almaktadır. Yiğit'in burada $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ oranının paydasındaki ifadenin dikdörtgenin 1 olan kenar uzunluğundan yararlanılarak bulunduğunu kastettiği düşünülmektedir.

Şekil 28

Yiğit'in İkinci Soruya Yanıtı

2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



2.Gİ'ye dair genel değerlendirme:

- Öğrencilerin $\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımının gösterildiği bu Gİ'yi algılamada 1. Gİ'ye göre daha çok zorlandıkları görülmüştür. Deniz ve Emre iki kriteri de sağlayan açıklamalar yapmış, Görkem ve Yiğit ise yalnızca *hedeflenen ifadeye ulaşma kriterini* sağlayan açıklamalar yapmıştır. İrem ve Efe'nin ise iki kriteri de sağlayan açıklamalar yapamadıkları, verilen Gİ'yi algılamada yetersiz kaldıkları görülmüştür.
- İrem, Efe ve Yiğit'in yanıtlarında ispat ifadesinin geçtiği görülmüştür.
- Efe'nin açıklamasında sayısal değerler vererek denemeler yaptığı görülmüştür.
- İrem, daha önce sınıfta yaptıkları bir ispata benzediğini ifade etmiş, bu durum bir sonraki adımda yapılacak odak grup görüşmesinde sorulması için araştırmacı tarafından not alınmıştır.

Üçüncü Gİ için belirlenen kriterler;

1-Adımlar arası geçişleri açıklama: Birinci adımdan itibaren küplerin biraraya getirilişi, üç özdeş şeklin birleştirilmesi, üçüncü adımda fazlalık olan parçanın ikiye bölünerek simetriği yönünde şeklin üzerine eklenmesi ve son olarak düzgün prizma elde edildiğini ifade edilmesi beklenmektedir.

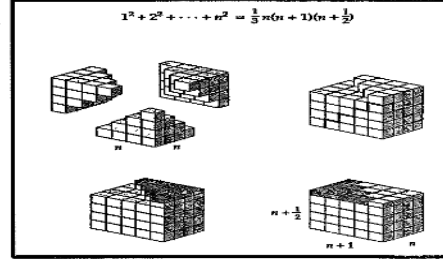
2-İfade-hacim ilişkisini kurma: Verilen özdeşliğin sağ tarafındaki ifadenin, son adımda oluşturulan prizmanın hacminden yola çıkılarak elde edildiğini açıklanması beklenmektedir.

İrem'in 3.Gİ'ye yönelik açıklaması: *“Kutucuklar kare ve alanları tek tek hesaplanıp toplandığında her şekil için farklı değerler elde ediliyor. Fakat bunun tek nedeni şekillerin boyutu değil aynı zamanda rengi. Koyu çizgiler birleşme yerlerini ifade ediyor ve koyu renkliler de farklı yüzeyler olduğunu anlatıyor. Yüzeyler aynı değil, 2.şekilin üstü ile 3 farklı ve yönleri birbirini tamamlıyor. Tam olarak nasıl ifade edeceğimi bilmiyorum ama formül görsel ile anlaşılıyor. Yazı yani formülle uzun uzun açıklanması gerekenler şekil ile başarı ile ispatlanıp anlatılmış. Kim bulduysa eline sağlık”* (Şekil 29). İrem'in açıklamasından, küplerle oluşturulan şekillerin alanlarıyla ilişki kurduğu görülmektedir. Ancak verilen ifade, en son adımda oluşturulan prizmanın hacmiyle elde edilmektedir. İrem'in bu durumu algılayamadığı görülmektedir. Ayrıca İrem yüzeylerin rengine dikkat çekmiş, farklı yüzeylerin koyu renklerle gösterildiğini belirtmiştir. Birleştirilme yerlerinin koyu çizgilerle gösterilmesi konusunda doğru bir yorum yapmış olsa da, Gİ'deki koyu yüzey fazlalık olan ve ikiye bölünerek şeklin üzerine katlanan parçayı göstermektedir. İrem'in bu adımlara yönelik açıklaması hatalı ve yetersiz görülmüştür. Bu nedenle İrem'in yanıtı *adımlar arası geçişleri açıklama* ve *ifade-hacim ilişkisini kurma* kriterlerini sağlamamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 30
Görkem'in Üçüncü Soruya Yanıtı

3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



Köpler baştan sayıldığında; en tepede bir, altında 4, altında 9, onun altında da 16 tane vardır. Belli bir sayı yani n 'e kadar bu devam ettiririnde bunları saymak zorlaşır için bir düzen şekil yani 3 boyutlu bir dikdörtgen elde etmek istenmiştir. Başta n/n olan taban 220m gibi tepeye doğru azalarak gitmektedir. Bunlar birleştirilmek istendiğinde

olmaktadır. Tabanı dengeler ama en tepede farklılık oluşmuştur. Alt kattaki alan kadar farklı üst öste

Bunu baş alan kısmıyla eşit miktarlarda yani $\frac{1}{2}$ oranda ayırıldığında dikdörtgen şeklindeki 3 boyutlu cisimimiz tamamlanmış oluyor.

En başa dönecek olursak $\frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+\frac{1}{2})$ denkleminde; $\frac{1}{3}$ olan 3 boyutlu yapmak için 3 adet birleştirildi; n olan n boyutlu sayı; $(n+1)$ olan n boyutlu sayı; $(n+\frac{1}{2})$ olan n boyutlu sayı. En üst katman şekli tamamlanarak tamamlanmış olur. İkinci katmanda birleştirildi. Ortaya çıkarmıştır. Böylelikle tamamlanmıştır.

Deniz, 3.Gİ'ye yönelik sadece "Açıklayamıyorum. Tebrik ediyorum." ifadelerini kullanmıştır. Bunun yanında Deniz'in şekil üzerinde sayısal hesaplamalarla küpleri saydığı görülmektedir (Şekil 31). Deniz hiçbir açıklama yapmadığı için yanıt adımlar arası geçişleri açıklama ve ifade-hacim ilişkisini kurma kriterlerini sağlamamış olarak değerlendirilmiştir.

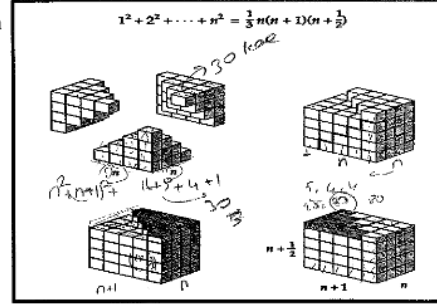
Şekil 31

Deniz'in Üçüncü Soruya Yanıtı

3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

Açıklayamıyorum.
Tebrik ediyorum. :)



$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2 = 5 \cdot 12 \cdot 3 = 180 \text{ kare}$$

$$= 30$$

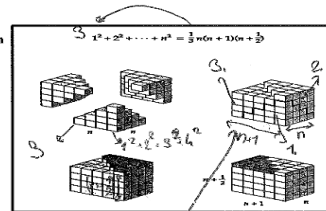
Emre'nin 3.Gİ'ye yönelik yanıtında, küplerin nasıl birleştirildiğini gösterdiği, şekillerin birleştirilmesinden sonra kalan parçanın yarısının simetriğine yapıştırılıp dikdörtgenler prizması elde edildiğini açıkladığı ve bu prizmanın boyutlarını hem şekil üzerinde hem de açıklamasında belirterek hacminin 3'te 1'in istenen ifadeye eşit olduğuna dair açıklama yaptığı görülmektedir (Şekil 32). Bu nedenle Emre'nin yanıtı *adımlar arası geçişleri açıklama* ve *ifade-hacim ilişkisini kurma* kriterlerini sağlamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 32

Emre'nin Üçüncü Soruya Yanıtı

3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



Örneğin bir küp
bu şekil
3 x $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$ - form küp gibi
Bu 3te ortan kısmın yarısı simetriğini veritip
yeni dikdörtgen prizma
boyutları $(n \cdot \frac{1}{2}), (n \cdot 1), n$
3
3 tane bu ifadeden son şekle eşit halinde

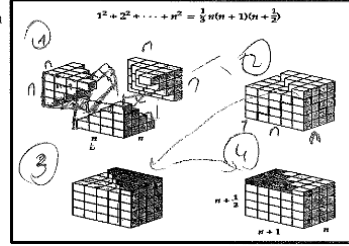
Efe'nin verilen Gİ'yi ispat olarak nitelendirdiği görülmektedir (Şekil 33). Fakat, “tam kare formülü ama şeklin nasıl sağladığı konusunda bir fikrim yok” şeklinde açıklama yapmıştır. Verilen Gİ'ye dair “3 parça olduğu için 3 e bölüyor olabiliriz” şeklindeki çıkarımı doğrudur. Ancak Efe'nin Gİ'yi tam olarak algılayamadığı ve açıklayamadığı görülmektedir. Bu nedenle yanıtı *adımlar arası geçişleri açıklama ve ifade-hacim ilişkisini kurma* kriterlerini sağlamamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 33

Efe'nin Üçüncü Soruya Yanıtı

3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



'spat

Tam kare formülü
aynı
şeklin
sağladığı
konusunda
fikir yok

3 parça olduğu
için 3'e
bölüp
olabiliriz

aynı
kuvvet
birlikte
küp oluşmamış

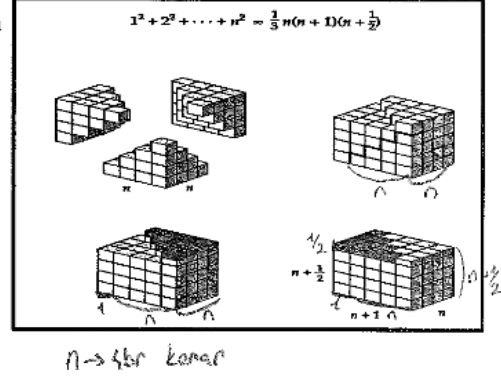
Küpün
kesilmiş
parçaları

Yiğit 3. Gİ'ye yönelik hiçbir açıklama yapmadığı için yanıtı *adımlar arası geçişleri açıklama ve ifade-hacim ilişkisini kurma* kriterlerini sağlamamış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 34
Yiğit'in Üçüncü Soruya Yanıtı

3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$



3.Gİ'ye yönelik genel değerlendirme:

- Öğrencilerin en çok bu Gİ'yi algılamakta zorlandıkları görülmüştür. Belirtilen kriterleri sağlayan açıklamaları yalnızca Gökem ve Emre yapabilmıştır.
- İrem ve Efe'nin bu Gİ'yi ispat olarak nitelendirdikleri görülmüştür.
- Deniz'in sayısal hesaplamalar yaparak şekil üzerindeki küpleri saydığı görülmüştür.

Bu sürecin ardından yapılacak odak grup görüşmesi için araştırmacı tarafından alınan notlar şu şekildedir:

- Öğrencilerden bazılarının yanıtlarında ispat nitelendirmesi olduğu için, verilen şekillerin ne olduğunun, ispat olup olmadıklarının tartışılması.
- İrem'in yanıtından trigonometriyle ilgili verilen Gİ'ye benzer bir Gİ'yle daha önce karşılaşıp karşılaşmadıklarının tartışılması.
- Tüm öğrencilerin, verilen tüm Gİ'ler için belirlenen kriterleri sağlayacak açıklamaları birbirlerinden duymalarını sağlayacak şekilde görüşmenin yönetilmesi.

4.1.2 Odak Grup Görüşmesinden Elde Edilen Bulgular

Bu bölümde, Gİ çözüm kâğıtlarının uygulanmasının ardından öğrencilerle yapılan odak grup görüşmesine yönelik bulgular sunulmuştur. Odak grup görüşmesinin tamamı araştırmacı tarafından transkript edilmiş, satır satır numaralandırılmıştır.

Transkript metni 116 satırdan oluşmuştur (EK-5). Odak grup görüşmesinde tartışılan konular temalarına göre 3 bölüme ayrılmıştır. Bu bölümler ve ilgili bölümlerin yer aldığı diyalogların transkript metnindeki satır numaraları şu şekildedir:

- 1- Uygulanan Gİ'lere ve bunları geliştirebilmeye yönelik düşüncelerin, anlamaya dair zorlukların tartışıldığı bölüm [(1-15), (105-116)].
- 2- Gİ'lerin ispat olup olmadığına yönelik tartışmanın yapıldığı bölüm [16-35].
- 3- Verilen Gİ'lerin çözümlenmesine yönelik tartışmanın yapıldığı bölüm [36-104].

Belirtilen 3 bölüme yönelik bulgular betimsel olarak yorumlanarak sunulmuştur. 1. bölümde, öğrenciler, verilen ifadelerle ilk karşılaştıklarında, hayranlık duyduklarını [(2), (10)], anlamaya çalıştıklarını [(3)], anladıklarını fakat sözel olarak nasıl ifade edecekleri konusunda zorlandıklarını [(7)] anlatan açıklamalarda bulunmuşlardır. Bir öğrenci de başlangıçta sistemi yanlış anladığını bu yüzden cebirsel ispat yapmaya çalıştığını daha sonra şekli farkedince şaşırdığını ifade etmiştir [(15)]. Öğrencilerin söylemlerinden bu aşamada yaşadıkları temel iki zorluk olduğu söylenebilir:

- 1- Şeklin nasıl oluşturulduğunu sözel olarak açıklama
- 2- Cebirsel ispat yapmaya çalışma

Öğrenciler bu diyagramları kendilerinin geliştiremeyeceklerini düşündükleri, özellikle 3. Gİ (EK-1) tarzı 3 boyutlu bir diyagramı geliştirmekte çok zorlanacaklarını ifade ettikleri görülmüştür [(10), (13), (14), (115)].

Öğrencilere, verilen diyagramların Gİ olduğu söylenmemiştir. Gİ çözüm kâğıtlarında bazı öğrencilerin ispat kelimesini kullandığı görülmüştür. 2. bölümde araştırmacı, öğrencilerin bu konuda düşüncelerini öğrenmek için bu yönde bir tartışma başlatmıştır (Tablo 3).

Tablo 3
Odak Grup Görüşmesi'nin 2. Bölümü

16	A	Peki bu ifadeleri çözümlerken ispat dediniz bunlara. Gerçekten ispat mı bunlar? Siz bu sene ispat konusunu gördünüz mantık ünitesinde. Görsel olarak bir şekilde, diyagramla ispat yapılabilir miyim?
17	Y	Bütün denemelerde yanlış yaptım ispatla ilgili soruları ben hocam.
18	E1	Evet, ben de <i>[E1'i onaylıyor]</i> .
19	G	Bence yapılabilir.

20	D	Olabilir.
21	İ	Bu şekillerle yapmış bence işte.
22	Y	Evet, [<i>İrem'i onaylıyor.</i>].
23	A	İspat yani size göre bunlar?
24	D	İspat değil tam olarak bence de ifade etme şekli olabilir.
25	E2	İspat değil de buluş bunlar bence.
26	İ	Öğretme amacıyla kullanmışsınız burada bence daha çok.
27	G	Bence ispatta sayısal bir şey olmalı, bilimsel gerçekliğe daha yakın olmalı. Bunlar sadece onların bir gösterim şekli.
28	A	Görkem'e katılıyor musunuz?
29	İ	Ama mesela trigonometrik olanda daha farklı nasıl yapacaksın ki [<i>Görkem'e soruyor</i>] Uzun uzun yazmak lazım. Burda görsel olarak neden öyle olduğu direk görünüyor.
30	E1	Bir ifadenin geometrik yorumu mu acaba?
31	E2	Sıfırdan bir şeyi yapmıyor ama.
32	Y	İspat bence bunlar.

Öğrencilerin verilen Gİ'lerin ispat olup olmadığı konusunda farklı düşüncelerinin olduğu görülmektedir. İrem ve Yiğit verilen diyagramların ispat olduğunu belirtmiştir. Ayrıca İrem, verilen diyagramların öğretim amacıyla kullanıldığını söylemiştir. Deniz ise bu diyagramları ifade etme şekli olarak, Emre de bir ifadenin geometrik yorumu olarak nitelendirmiştir. Görkem, ispatta sayısal bir şeyler olması gerektiğini ve bilimsel gerçekliğe daha yakın olması gerektiğini ifade etmiştir. Efe ise Gİ çözüm kâğıdında ispat yazmasına rağmen görüşmede, verilen şekillerin ispat değil buluş olduğunu belirtmiş ve sıfırdan bir şey yapılmadığı için bunların ispat olduğu fikrine karşı çıkmıştır. Görüşmede geçen bu tartışma bölümünde, öğrencilerin, ispata ve bu diyagramların ne olduğu üzerine yeniden düşüncelerini sağlamak amaçlanmıştır.

Görüşmenin 3.bölümünde ise Gİ çözüm kâğıtlarında verilen ifadeler üzerinde tartışma yapılmıştır. Araştırmacı, öğrencilerden her Gİ'yi açık bir şekilde ifade eden bir açıklama yapılmadan bir sonraki Gİ'ye geçmemiştir. Bu sayede tüm öğrencilerin verilen tüm Gİ'leri algılamaları sağlanması amaçlanmıştır. 1. Gİ için uygun açıklama Emre isimli öğrenciden gelmiştir [(37)]. Araştırmacı, öğrencilerin verilen şeklin genellenebilirliği üzerine düşüncelerini sağlamak amacıyla, şeklin x'in y'den büyük olduğu durumlar için çizildiğine dikkat çekmiş ve eşitlik durumunda şeklin nasıl olacağını sormuştur. Bu bölümde geçen tartışmalardan bir kesit Tablo 4'te sunulmuştur.

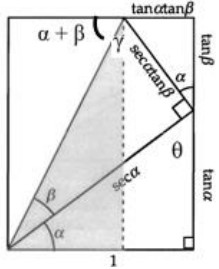
Tablo 4
1.Gİ'ye Yönelik Yapılan Tartışma Bölümü

36	A	Birinci ifadeye yönelik yorumlar yapmaya başladınız. Verilen ifadeleri tartışalım şimdi biraz da. İlk örnekte ne yapmış? Mantığı ne burda şeklin?				
37	E1	Alan aynı kalacak şekilde önce bir kare haline getirmiş, karenin kenarlarını bulmuş alandan daha sonra geri kalan parçayı, uzunlukları uc uca ekleyip dikdörtgen oluşturmuş ordan tekrar alanı hesaplamış. <i>[Diğer öğrenciler de aralarda evet diyerek E1'in dediklerini onaylıyor]</i>				
38	A	Peki bu şekilde x'i y'den büyük almış gibi görünüyor. Eğer bu tüm değerler için geçerli bir ifadeyse x'i y'den küçük ya da eşit alsak yine aynı şekilde yapabilir miydik?				
39	G	Yapabiliriz bence.				
40	Y	Orda $x - \sqrt{2xy}$ ve $x + \sqrt{2xy}$ onlar için bozabilir miydi diye düşünüyorum ama x ve y pozitif olarak alındığında sıkıntı yok.				
41	D	Üstü y'ye tamamlayacak bu sefer.				
42	E1	Eşit olduğunda bu sefer yukardan alıcaktı parçaları yine olurdu şu şekilde <i>[Kâğıda parmağıyla çizerek gösteriyor]</i> : <table border="1" style="margin: 10px auto;"><tr><td style="padding: 10px;">xy</td><td style="padding: 10px;">xy</td></tr><tr><td style="padding: 10px;">x²</td><td style="padding: 10px;">y²</td></tr></table>	xy	xy	x ²	y ²
xy	xy					
x ²	y ²					
43	İ	Evet <i>[E1'i onaylıyor]</i> . Sonuçta kare olarak aldığımız için sıkıntı oluşturmaz yine bu şekilde çizebiliriz. <i>[Diğer öğrenciler de onaylıyor]</i>				

Tablo 4'te geçen diyaloglara bakıldığında öğrencilerin eşitlik durumunda da şeklin nasıl olabileceğini açıklayabildikleri görülmektedir. Çizilen diyagram üzerinde farklı durumlar göz önünde bulundurulmuş ve doğru açıklama Emre isimli öğrenci tarafından yapılmış *[(37)]*, diğer öğrenciler tarafından Emre'nin açıklaması onaylanmıştır. Ardından 2. Gİ'ye yönelik tartışma başlatılmıştır (Tablo 5).

Tablo 5
2.Gİ'ye Yönelik Yapılan Tartışma Bölümünden Bir Kesit

44	A	Peki, ikinci ifadeye geçelim <i>[tan(α + β)'nin açılımının verildiği ifadeyi kastediyor]</i> . Burada ne yapmış? E2 sen çok görüş belirtmedin açıklayabilir misin?
45	E2	İşte önce sabitler almış, bir dikdörtgen çizmiş.
46	A	Sabiti nereden almış, bu şekilde yazılan bütün değerler sabit mi? Kafama göre alabilir miyim tan α tan β diye?

47	E2	Bence büyük dikdörtgeni sabit olarak almış sonra 1 ve oradan $\tan \alpha$ $\tan \beta$ diye ayırmış. Sonra iki tane pisagordan üçgenin kenarlarını bulmuş ve üçüncü pisagordan da <i>[taralı üçgeni gösteriyor]</i> ifade gelir.
48	A	Gelir mi pisagordan ifade? Başka açıklamasını yapmak isteyen var mı bu şeklin?
49	E1	Ben şöyle düşündüm. Dikdörtgenin alt kenarını 1 kabul etmiş, işlem kolaylığı olsun diye.
50	İ	Evet, farketmezdi 30 da diyebilirdi o kenara.
51	E1	Evet, yani $(\tan \alpha)/30$ olurdu $(\sec \alpha)/30$ olurdu bu sefer farketmezdi yine de aynı şey gelirdi. Sonra α dediği yerden $\tan \alpha$ 'yı ve oranları yazmış aynı şekilde β olan üçgen için de. Sonra yukarıdaki üçgende sinüs değerini sağlaması için $(\sec \alpha \cdot \tan \beta \cdot \sin \alpha)$ oluyor bu da $(\tan \alpha \cdot \tan \beta)$ olmuş. Daha sonra aynı üçgende tanjant değerinden diğer kenarı bulmuş. Sonra bunla bunu toplamış <i>[dikdörtgenin uzun kenarını gösteriyor]</i> , burası da 1 olduğu için <i>[1 olan kenarı gösteriyor]</i> , geriye $(1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta)$ kalır, burdan da tekrar tanjant almış bir daha <i>[taralı üçgeni gösteriyor]</i> , oradan bulmuş.
52	Y	Ben farklı bir şekilde yaptım.
53	A	Nasıl yaptın?
54	Y	Bu açıya θ dedim <i>[kalemle gösteriyor]</i> O zaman $\alpha + \theta = 90$ olur. Buradan üstteki üçgenin α açısı da gelmiş olur. Daha sonra içteki üçgende şu açıya γ dersek $\beta + \gamma = 90$ olur. Ve şu üçgende <i>[en soldaki üçgeni gösterek]</i> direk $\alpha + \beta$ 'yi görmüş oluruz oranları yazarız. <i>Yiğit'in açıları yerleştirme şekli:</i>
		
55	G	Z kuralı mı yapmış? <i>[Araştırmacıya soruyor.]</i>
56	A	Evet, aslında Z kuralından da aynı açıları elde edebiliriz. Ama Yiğit Emre'nin açıklamasına ek olarak sağ üstteki üçgende α açısını nasıl yerleştirildiğini de açıklamış oldu.
57	Y	Evet, hocam benim ana üçgenim soldaki beyaz üçgeni oranları oradan buldum.

2.Gİ'ye yönelik tartışma Efe isimli öğrencinin düşünceleri alınarak başlanmıştır. Efe'nin görüşmede sessiz kaldığı farkedilmiş, görüşmeye katılımını sağlamak için 2. Gİ'yi açıklamasına yönelik soru ona yöneltilmiştir. Efe, şekilden ifadeye pisagor bağıntısından ulaşılabilceğini düşünmüştür. Efe'nin Gİ'yi tam olarak algılayamadığı görülmüştür. Araştırmacı soruyu diğer öğrencilere de yöneltmiş,

Emre'nin açıklamasına ek olarak Yiğit'in yaptığı açıklamayla birlikte Gİ'nin doğru çözümlemesi yapılmıştır [(49), (51), (54)]. Emre, alınan sabiti, oranların nasıl yerleştirildiğini ve ifadeye nasıl ulaşıldığını açıklamıştır. Yiğit de açılarının nasıl yerleştirildiğini açıklayarak hedeflenen ifadeye, şekil üzerinde verilen başka bir üçgenden ulaştığını belirtmiştir. Ardından öğrencilere aynı şekil üzerinden $\tan(\alpha - \beta)$ açılımına ulaşıp ulaşılamayacağı sorulmuştur. Bu soru üzerine öğrenciler farklı şekillerde akıl yürütmüşler, ancak doğru açıklamaya tam olarak ulaşamamışlardır [(58-68)]. İrem bu ifade için kâğıdında ve uygulama sırasında daha önce yaptıkları bir ispata benzediğini ifade etmiştir. Araştırmacı bu konu hakkında daha fazla bilgi almak için sorular sormuştur. Öğrenciler, bu şeklin bir benzeri üzerinde öğretmenlerin sinüs ve kosinüs toplam-fark formüllerini çıkarılışını gösterdiğini belirtmişlerdir [(69-74)]. Ardından, 3. ve son Gİ'ye yönelik tartışmaya geçilmiştir [(78-104)]. Öğrencilerin bu Gİ'yi çok beğendiklerini ifade ettikleri görülmüştür. Bu Gİ'yle ilgili düşüncelerini açıklaması için soru Deniz'e yöneltilmiştir. Uygulama sırasında Deniz'in kâğıdına bu ifadeyle anlıyorum ama açıklayamıyorum yazdığı görülmüş bu nedenle ne anladığını öğrenebilmek için görüşmeye Deniz'le başlanmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Deniz görüşmede de Gİ'yi açıklayamamış ardından Gökçe söz hakkı isteyerek doğru açıklamayı yapmıştır [(84), (93)]. Verilen şeklin genellenebilirliği üzerine düşünmelerini sağlamak amacıyla sorular sorulmuş, öğrenciler şeklin $n=4$ için oluşturulduğunu ama n 'in artmasıyla şeklin bozulmayacağını düşündüklerini söylemişlerdir. Yiğit'in ifadeyi görünce aklına alan geldiğini belirtmesiyle, 2 boyutta da bu Gİ'nin oluşturulup oluşturulamayacağı tartışılmıştır [(85-92)]. Öğrenciler genel olarak 2 boyutta da çizilebileceğini düşünmüşlerdir. Yiğit çember üzerinde de bu tarz diyagramların oluşturulmasının ilginç olabileceğini dile getirmiştir [(113)].

Sonuç olarak odak grup görüşmesinde, tüm öğrencilerin verilen Gİ'leri anlamaları sağlanmış, şekillerin genellenebilirlikleri farklı durumlar için nasıl olacakları konusunda bakış açıları geliştirilmeye çalışılmıştır. Hem Gİ çözümleme kâğıtlarında hem de odak grup görüşmesi performanslarına bakıldığında öğrencilerin cebirsel özdeşlikle ilgili verilen Gİ'yi daha rahat algılayıp açıklayabildikleri gözlenmiştir. Bu nedenle birinci öğretim bölümüne bu ifadelerle başlanmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Trigonometrik ifadelerin Gİ'lerine aşina olmalarının, öğrencilerin Gİ geliştirme süreçlerinde etkili olabileceği düşünüldüğü ve bu etkinin

sonuçları ön görülemediği için trigonometri konusunun öğretim deneyi sürecinden çıkarılmasının uygun olacağı karar verilmiştir. Öğrencilerin bu bölümdeki performansları göz önünde bulundurularak, birinci öğretim bölümünde farklı geometrik şekillerle oluşturulmuş Gİ örneklerinin (Yiğit'in belirttiği çember gibi) incelenerek sınıf tartışması yapılması planlanmıştır.

4.2 İkinci ve Üçüncü Alt Probleme Yönelik Bulgular

Bu bölümde kullanılan yöntem gereği ikinci ve üçüncü alt problemlere yönelik bulgular bir arada verilmiştir.

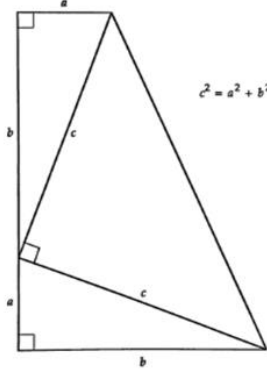
4.2.1 Birinci Öğretim Sürecinden Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin görsel ispata dair algılarını belirlemek amacıyla yapılan ilk uygulama ve sonrasında tüm öğrencilerin verilen Gİ örneklerini anlamalarını sağlamak ve Gİ'lere yönelik (geliştirmeye, ispat olup olmadıklarına, anlama sürecinde yaşadıkları zorluklara) düşüncelerini öğrenmek amaçlı yapılan odak grup görüşmesi sonrasında birinci öğretim bölümü planlanmıştır. Öğrencilerin ilk aşamada cebirsel özdeşlikle ilgili verilen Gİ'yi algılamakta daha başarılı oldukları görülmüş, bu nedenle ilk Gİ geliştirme süreçlerine bu tarz ifadelerle başlanmasının daha uygun olacağı düşünülmüştür.

Birinci öğretim aşaması planırlarken süreç sonunda gerçekleştirilmesi beklenen hedefler: öğrencilerin görsel ispatların yapılarını anlamalarını sağlamak, farklı görsel ispat örnekleri görerek algılarında sınırlandırma yapmadan süreç sonunda cebirsel özdeşliklerle ilgili görsel ispat geliştirebilmelerine yardımcı olacak perspektifi kazandırmaya çalışmaktır. Bu bölümün bundan sonraki kısmında, öğretim sürecinde yaşananlara yönelik bulgulara yer verilecektir. Başlangıçta tahtaya araştırmacı tarafından aşağıda verilen şekil çizilmiş (Şekil 35) ve öğrencilere bu şekilden yararlanarak pisagor bağıntısının elde edilip edilemeyeceği sorulmuştur.

Şekil 35

Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan İlk Gİ



İlk olarak İrem isimli öğrenci şekil üzerinde açılarının yerleştirilmesiyle ifadeye ulaşılabilirliğini düşündüğünü ifade etmiştir. İrem'in bu düşüncesi üzerine gerçekleşen diyaloglar şu şekilde olmuştur:

Araştırmacı: Pisagor bağıntısını bu şekilden yararlanarak ulaşabilir miyiz?

İrem: Açıları yazsak çıkar bence.

Araştırmacı: Nasıl yazalım? Ortadaki üçgende 45-45 diye mi?

İrem: α - β şeklinde yerleştirelim.

[Araştırmacı tarafından açılar İrem'in dediği şekilde, şekil üzerine yerleştirilir.]

Araştırmacı: İrem bu şekilde pisagor bağıntısını elde edebileceğimizi söyledi.

Peki, burdan sonra ne yapacağız? [Soruyu sınıfa yöneltir]

Emre: Nasıl gelecek ki burdan İrem? Sanmıyorum.

İrem: Sinüs alan falan yapsak?

Emre: Yok burdan gelmez.

Daha sonra Görkem, tartışmayı başka bir yöne çekecek dik indirme fikrini sunmuştur.

Görkem: Ben dik indiririm.

Araştırmacı: Nerden indirelim diki?

Görkem: Şimdi hocam $a^2 + b^2 = c^2$ olduğundan.

Araştırmacı: Bu eşitliği bilmiyorum henüz ama amacım bunu elde etmek. O yüzden bunu kullanamam.

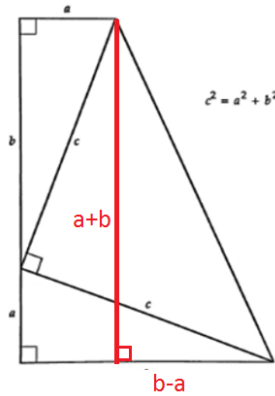
Görkem: Sağ üst köşeden diki indirelim hocam.

Araştırmacı: Evet sonra?

Görkem: Kenarlarını yazalım o üçgenin.

[Araştırmacı tarafından istenilen noktadan dik indirilir ve Görkem'in dediği şekilde harflendirme yapılır (Şekil 36).]

Şekil 36
Görkem'in Çözüm İçin Önerdiği Yol



Araştırmacı: Gelip göstermek ister misin? [Görkem tahtaya gelir.]

Görkem: İşte hocam burdan hipotenüsleri eşit ya ordan gelir.

Araştırmacı: Ama sen burda yine pisagor bağıntısından buluyorsun hipotenüslerini, ulaşmak istediğimiz ifadeyi kullanmış oluyorsun.

Görkem: Nasıl bilmiyoruz hocam? Bir türlü anlayamadım şunu.

Deniz: Hiç mi kullanamıyoruz pisagoru?

Araştırmacı: Bu ifadeyi hiç öğrenmemişiz gibi düşünmeniz lazım, bu şekilden yararlanarak pisagorun ifadesine ulaşacağım.

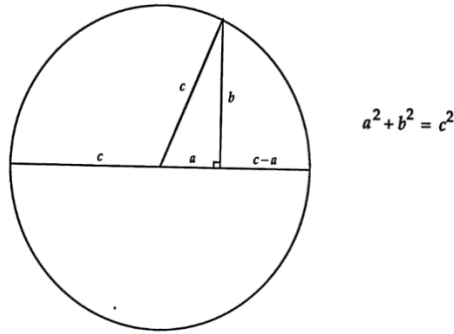
Yukarıda sunulan diyalogdan, Görkem'in ve Deniz'in, formal ispat yaparken de öğrencilerin sıkça düştüğü bir hataya düştükleri ispatlanması yani ulaşılması gereken ifadeyi kullanarak görsel ispatı çözümlemeye çalıştığı görülmektedir. Öğrencilerin ilk Gİ'de en zorlandıkları kısım bu olmuş, araştırmacı tarafından bu durum birkaç kez açıklanmıştır. Ardından Görkem: "Benzerlikten gelir mi acaba?" şeklinde bir fikir sunmuş, Deniz: "Eş üçgenler zaten nasıl gelecek?" diye belirtmiş ardından İrem de, "Gelmiyor diğer üçgen için ben de denedim" [Görkem'in indirdiği dikle oluşturduğu üçgeni kastederek] şeklinde belirterek tartışmayı sonlandırmıştır. Daha sonra Efe'den "Toplam alanları eşitlesek hocam?" şeklinde bir öneri gelmiştir. Araştırmacı Efe'yi

tahtaya çağırması hangi alanları nasıl eşitleyebileceğimizi sormuş ve göstermesini istemiştir. Efe, üçgenlerin alanlarını yamuğun alanına eşitleyerek istenilen ifadeye ulaşmıştır. Böylece verilen ilk Gİ için, öğrenciler tarafından açılar kullanma, sinüs alan, şekil üzerinde ek çizim yapma ve benzerlikten yararlanma ihtimalleri üzerine düşünülmüş ve nihai sonuca ulaşılmıştır.

Araştırmacı 2.Gİ'nin şeklini tahtaya çizmiş, verilen şekilden yine pisagor bağıntısının nasıl elde edilebileceğini sormuştur (Şekil 37).

Şekil 37

Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan İkinci Gİ



Şeklin tahtaya çizilmesinden sonra öğrenciler ilk olarak, “*Bu herhangi bir kiriş mi? Çap mı oluyor yani çizilen doğru? Merkez belli mi?*” şeklinde sorular yöneltmişlerdir. Bunun üzerinde araştırmacı şekilde merkezi belirterek, isimlendirmiştir. Bu Gİ üzerine yapılan tartışmalardan bir kesit aşağıda sunulmuştur:

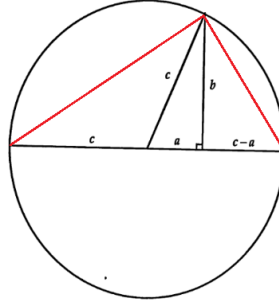
Deniz: Alandan mı çıkar acaba yine?

Araştırmacı: Nasıl çıkar?

Efe: Yok ya öyle gelmez. Hocam üçgen oluştursak bir tane üst tarafa?

[Araştırmacı Efe’yi tahtaya çağırır ve düşündüğünü göstermesini ister, Efe tahtaya Şekil 38’daki gibi üçgen çizer.]

Şekil 38
Efe'nin Çözüm İçin Yaptığı Çizim



Efe: Burdan öklidi uygulusak direkt geliyor hocam.

Araştırmacı: Peki öklid bağıntısını nasıl elde ediliyor açıklayabilir misin?

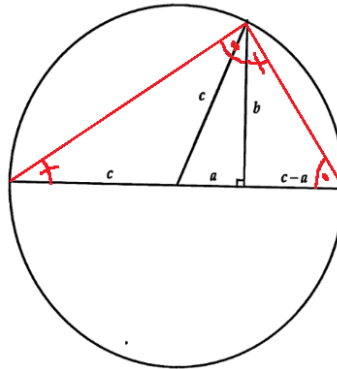
Emre: Pisagordan geliyor o da. Olmaz, kullanamayız.

Efe: O zaman benzerlik yapalım hocam.

Araştırmacı: Yap bakalım.

[Efe aşağıda verilen Şekil 39'taki gibi açları yerleştirir.]

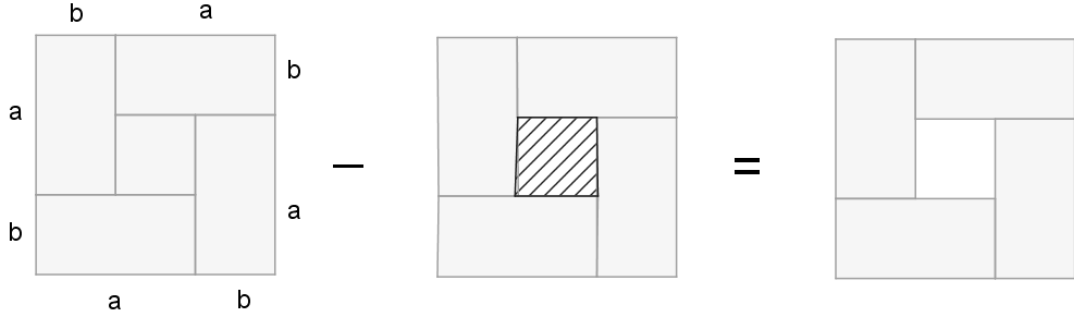
Şekil 39
Efe'nin Çözüm İçin Yaptığı Çizim



Efe açları yerleştirdikten sonra $\frac{b}{c-a} = \frac{c+a}{b}$ benzerliğini oluşturmuş ve buradan içler dışlar çarpımı yaparak pisagor bağıntısına ulaşmıştır. Bu bölümde tartışmaya sunulan 3. Gİ'de araştırmacı sadece şekli çizmiş ve öğrencilere bu şeklin hangi ifadenin doğrulaması olduğunu sormuştur (Şekil 40)

Şekil 40

Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan Üçüncü Gİ



Araştırmacı ilk adımda kenar uzunluklarını yazmış 2. ve 3. adımda kenar uzunluklarını yazmamış, öğrencilerin anlamasını beklemiştir. Öğrenciler başlangıçta, “Tamamı mı $(a+b)$ ’nin karesi oluyor? Hepsi aynı mı?” gibi sorular sormuşlardır. Araştırmacı 2 şeklin de özdeş olduğunu belirtmiş ve dikkatli bir şekilde şekil üzerinde düşünmelerini istemiştir.

Efe: Taralı yer çıkarılıyor mu?

Araştırmacı: Evet

Emre: $(a-b)$ ’nin karesi falan mı acaba?

Yiğit: Ben gösterebilir miyim hocam?

[Araştırmacı Yiğit’i tahtaya çağırır]

Yiğit ilk şekli göstererek, alanın $(a+b)^2$ ’nin açılımından $a^2+2ab+b^2$ olacağını söylemiştir. İkinci şekildeki taralı alanı x olarak adlandırır. 3. Şekli göstererek bu şeklin de ab çarpımından oluşan 4 tane dikdörtgenin alanını verdiğini belirtmiştir. Sonuç olarak $a^2+2ab+b^2-x=4ab$ eşitliğinden cebirsel işlemler yaparak x alanını $a^2-2ab+b^2$ olduğunu bulmuştur. Araştırmacı, “Şekil üzerinden adım adım ifadeyi toparlayacak olursak sonuç olarak neye ulaşıyoruz?” şeklinde bir soru yöneltmiştir.

İrem: Yiğit’in bulduğu x alanı $(a-b)$ ’nin karesi olmuş oldu.

Araştırmacı: Evet diğer ifadeleri de şekil üzerinden düşündüğümüzde sonuç olarak nasıl bir eşitliğe ulaşıyoruz?

Yiğit: O zaman hocam, $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ olmuş olur.

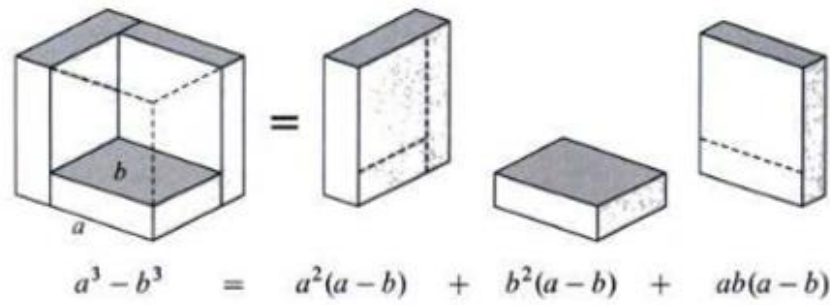
Araştırmacı: Evet, güzel. Bunu işlem yapmadan da şekil üzerinden görebilirdiniz.

Deniz: Aaa evet, kenarları yazınca çıkıyor.

Öğrenciler hedeflenen ifadeye kısmen cebirsel yoldan ulaşmışlar araştırmacının yardımıyla Gİ'nin şeklinden ifadesini bulma sürecini tamamlamışlardır. Son Gİ, 3 boyutlu şekillerden oluşturulduğu için bilgisayar ortamında öğrencilere gösterilmiştir (Şekil 41).

Şekil 41

Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan Dördüncü Gİ



Gİ'nin gösterilmesinin hemen ardından Emre, *çok kolaymış hocam bu baya açık olmuş* şeklinde bir yorumda bulunmuştur. Ardından Deniz, taralı alanların ne ifade ettiğini sormuştur.

Emre: Bir kenarı a olan küpten, bir kenarı b olan küp çıkarılmış, kalan parçalar ilk şekildeki gibi bölünmüş. Sonra bunların hacimlerini veren çarpımları altına yazmış. Taralı alanlar da ayrılan şekillerin taban alanlarına karşılık geliyor. Öyle değil mi hocam?

Emre verilen Gİ'yi doğru bir şekilde açıklamıştır. Ardından tüm öğrencilerin tartışılan Gİ'yi anladığından emin olunduktan sonra birinci öğretim bölümü sonlandırılmış ve birinci Gİ geliştirme bölümüne geçilmiştir.

Birinci Öğretim Bölümünün Sonunda Öğrencilerin Geliştirdiği Görsel İspatlara Yönelik Bulgular

Birinci öğretim bölümü sonunda öğrencilere cebirsel özdeşliklerle ilgili 4 tane ifade verilmiş bunlardan istedikleri herhangi ikisine yönelik Gİ geliştirmeleri istenmiştir (Gİ ifadesi kullanılmamış, verilen ifadenin doğrulamasını gösteren bir diyagram oluşturun denilmiştir). Ardından araştırmacı tarafından geliştirdikleri Gİ'lerin ön analizi yapılmış, bu Gİ'ler üzerine her öğrenciyle klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu bölümde geliştirilen Gİ'lere ve yapılan klinik görüşmelere yönelik analizler birlikte verilmiştir.

Birinci öğretim bölümünün sonunda Gİ'lerini geliştirmeleri için öğrencilere verilen ifadeler:

$$1- a^2 + ab = (a + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$$

2- $a > b > 0$ ve $x > y > 0$ için;

$$(ax - by) = \frac{1}{2}(a + b)(x - y) + \frac{1}{2}(a - b)(x + y)$$

$$3- n^3 - 1 = (n - 1) \cdot [n(n + 1) + 1]$$

$$4- (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$$

şeklindedir.

Öğrencilerin bildiği ortak bir bilgisayar yazılımı olmadığı için, Gİ'leri kalem kâğıt kullanarak geliştirmişlerdir. Çizim açısından kolaylık sağlaması için öğrencilere hem noktalı hem kareli hem de çizgisiz kâğıt verilmiş, hangi kâğıt türünü kullanacakları kişisel tercihlerine bırakılmıştır. Çizimler el ile yapıldığı için geliştirilen Gİ'lerin okuyucu için görsel açıdan anlaşılabilirliğinin sağlanması amacıyla araştırmacı tarafından bu Gİ'ler, GeoGebra (GGB) yazılımı yardımıyla bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Bu bölümde öğrencilerin çizimleri ve GGB versiyonları birlikte verilmiştir.

1.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği Görsel İspatlar

$$a^2 + ab = (a + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$$

Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler İrem, Yiğit, Emre, Görkem ve Deniz olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

İrem'in 1. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 42 ve Şekil 43'deki gibidir.

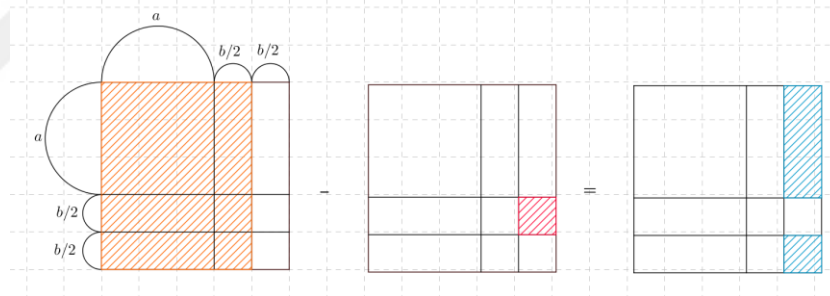
Şekil 42

İrem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 43

İlayda'nın 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



İrem, Gİ'sini 3 adımdan oluşturmuştur ve çiziminde noktalı kâğıt kullanmayı tercih etmiştir. İlk adımda bir kenarı $(a+b)$ olan bir kare oluşturduğu, daha sonra bu karenin kenarlarını a ve $b/2$, $b/2$ olacak şekilde böldüğü ve büyük karenin alanını parçaladığı görülmektedir. Bu şekilde alanı a^2 olan bir kare, alanı $a(b/2)$ olan 4 tane dikdörtgen ve alanı $(b/2)^2$ olan 4 tane kare elde etmiştir. İlk adımda şekilde görüldüğü gibi alanı a^2 olan bölgeyi, alanı $a(b/2)$ olan 3 bölgeyi ve alanı $(b/2)^2$ olan 2 bölgeyi taradığı görülmektedir. İkinci adımda ise alanı $(b/2)^2$ bölgeyi taramış ve ilk adımdaki çiziminden bu bölgeyi çıkardığını belirtmek için iki şekil arasına eksi işaretini koymuştur. En son adımda ise, alanı $a(b/2)$ olan dikdörtgensel bölgeyi ve alanı $(b/2)^2$ olan karesel bölgeyi tarayarak ilk iki şeklin sonucunu son şekle eşitlemiştir. İrem'in

şekli oluşturma mantığı doğru gibi görünse de yaptığı taramanın hatalı olduğu görülmektedir. Gİ'nin istenilen ifadeyi verebilmesi için taradığı bölgeleri yeniden düzenlemesi gerekmektedir. Yapılan bu inceleme sonrası İrem'e Gİ'yi nasıl geliştirdiğini açıklaması, yaptığı hatayı farketmesi ve bu hatayı nasıl giderebileceğine ulaşmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?

İ: Önce tüm alanları oluşturabileceğim bir kare çizdim, parçaladım.

A: Neden kare olarak düşündün?

İ: İfade kare alındığı için kare olur diye düşündüm.

A: Birimlerden yararlandın mı oluştururken?

İ: Evet hocam, kareleri ona göre oluşturdum.

A: Peki sonra belli alanları taramışsın bunları neye göre taradın?

İ: İfadeye ulaşmak için taradım, sırayla.

A: İlk şekildeki alttaki alan ve son şekildeki taradığın bölge neyi ifade ediyor tam olarak, açabilir misin?

İ: Burda aslında kalan şekli göstermek için taramıştım en sonda.

A: Peki ilk taradığın alandan mı $(b/2)^2$ 'yi çıkardın?

İ: Evet öyle olacaktı ama yanlış yapmışım hocam burda, şimdi farkediyorum.

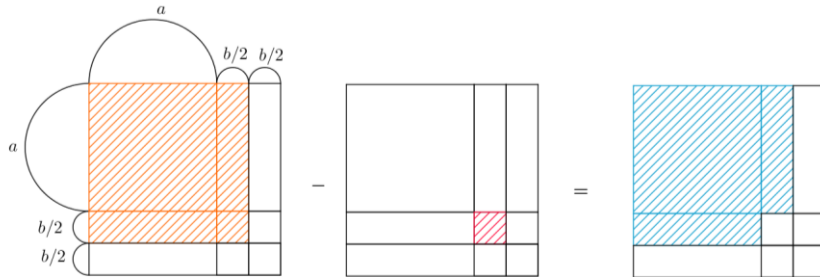
A: Ne yapabilirsin düzeltmek için?

İ: $(b/2)^2$ 'lik alanı dışardan çıkarmam, içerden çıkarırım. En sonda da ilk taradığım alandan çıkardığımda kalan alanı tararım.

İrem, oluşturduğu Gİ'de yaptığı hatayı fark edip, görüşme sırasında nasıl giderilebileceğini bulmuştur. İrem'in tarif ettiği Gİ'nin son versiyonu Şekil 44'da verilmiştir.

Şekil 44

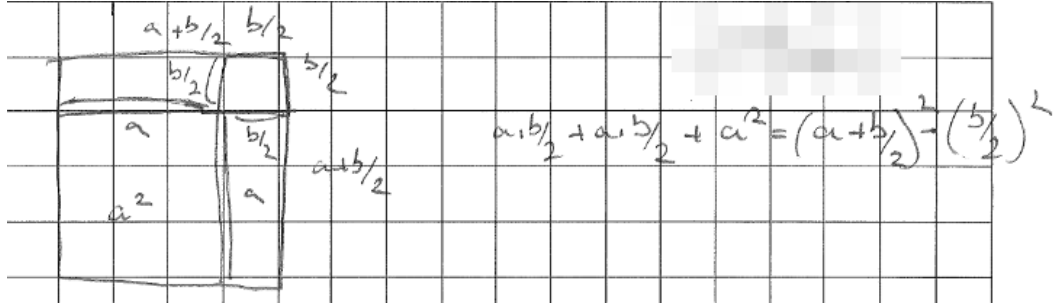
İrem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



Yiğit'in 1. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 45 ve Şekil 46'deki gibidir.

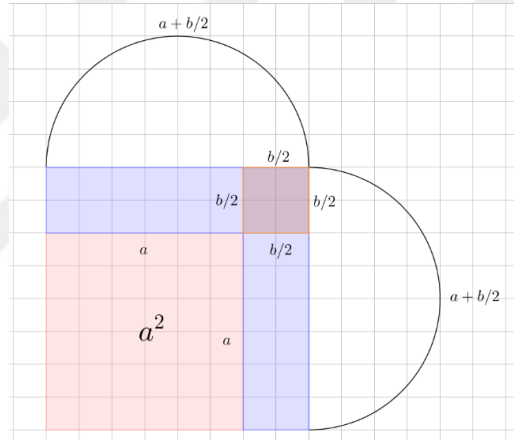
Şekil 45

Yiğit'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 46

Yiğit'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Yiğit'in Gİ'sini, bir kenarı $a + (b/2)$ uzunluğunda olan bir kareden ve bu karenin iç bölgesini parçalara ayırarak oluşturduğu görülmektedir. Yiğit, çiziminde kareli kâğıt kullanmayı tercih etmiştir. Ayırdığı parçalarla, alanı a^2 olan 1 tane kare, alanı $a(b/2)$ olan 2 tane dikdörtgen, alanı $(b/2)^2$ olan bir kare elde etmiştir. Bu sayede verilen ifadenin içerisinde yer alan tüm parçaları elde edebilecek bir yapı oluşturmuştur. Ancak oluşturduğu Gİ'ye bakıldığında hangi ifadenin Gİ'si olduğu açıkça anlaşılmamaktadır. Hangi parçanın çıkarılıp hangi parçanın elde edildiği açık değildir. Yapılan bu inceleme sonrası Yiğit'e Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklaması ve anlaşılabilirlik problemini nasıl giderebileceğine ulaşmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?

Y: Kareyi oluşturmak için ne yapmam gerekiyorsa onu yaptım, yani ifadede verilen kareleri oluşturmak için. Önce $a+(b/2)$ olan kareyi çizdim ordan böldüm.

A: Birimlerden yararlandın mı? Kareli kâğıt kullanmışsın.

Y: Evet birimlere dikkat ederek çizdim.

A: Peki dışardan ifadeyi bilmeyen biri baksa anlayabilir mi bu şeklin bu ifadenin doğrulaması olduğunu?

Y: Ben açıklayabilirim nasıl olduğunu.

A: Burda parçalamışsın bırakmışsın alanları. Ne yaptığın tam olarak anlaşılıyor gibi. Daha anlaşılır hale getirmek için ne yapabilirsin?

Y: Yazıyla anlatabilirim.

A: Başka türlü olmaz mı? Geçen ders incelediğimiz örnekleri düşün mesela.

Y: Parça parça çizebilirdim. Birinci aşama ikinci aşama olarak, sırayla çıkarılan ifadeyi adım adım gösterebilirdim.

A: Tam olarak nasıl yapacağını tarif edebilir misin ya da çizebilir misin?

Y: Üç tane bu kareden çizerdim hocam [bir kenarı $a+b/2$ olan kareyi gösteriyor], köşeden şunu çıkarırdım [kenarı $b/2$ olan kareyi göstererek] ikinci adımda, üçüncü de de kalan parçanın alanları toplamı gelirdi.

Yiğit, görüşme sırasında anlaşılabilirlik sorununa çözüm getirebilmiştir. Yiğit'in tarif ettiği Gİ'nin son versiyonu Şekil 47'de verilmiştir.

Şekil 47

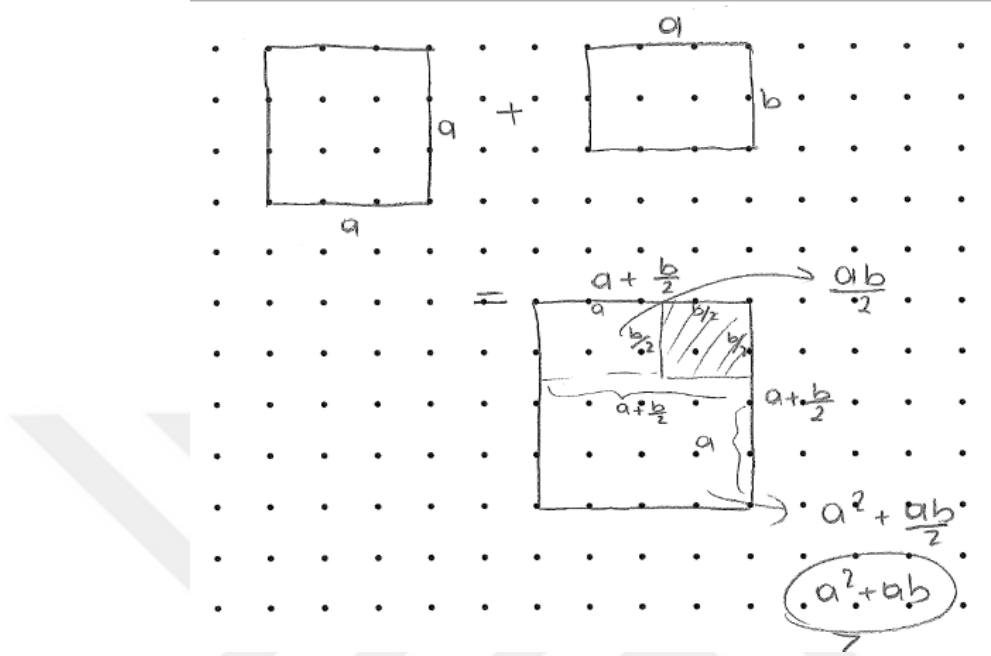
Yiğit'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ab + a^2$$

Görkem'in 1. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 48 ve Şekil 49'deki gibidir.

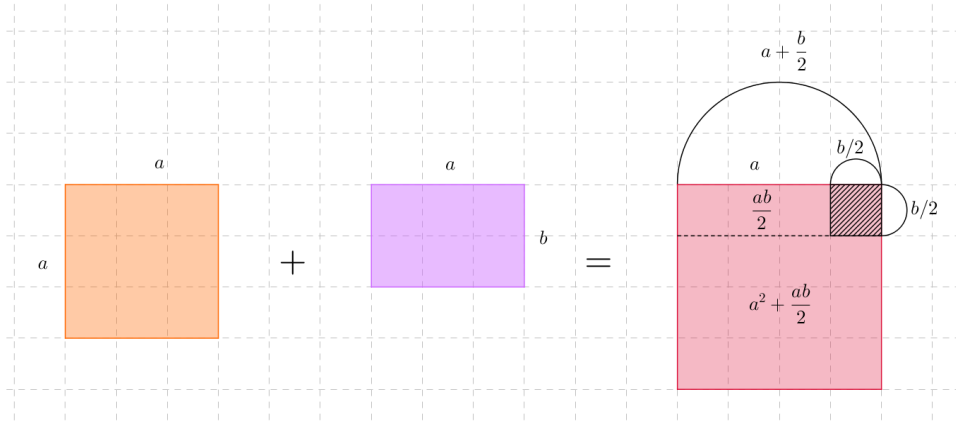
Şekil 48

Görkem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 49

Görkem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Görkem, Gİ'sini 3 adımda oluşturmuştur. Eşitliğin sol tarafında yer alan $a^2 + ab$ ifadesini bir kenarı a uzunluğunda olan bir kare ile kenarları a ve b uzunluklarında olan bir dikdörtgen oluşturup bunların birleşiminden eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Görkem, çiziminde noktalı kâğıt kullanmayı tercih etmiştir. Oluşturduğu Gİ'de, kenarı a uzunluğunda olan kareyi $a=3$ birim olarak

çizdiği, dikdörtgen için de $a=3$ ve $b=2$ birim olarak çizdiği görülmektedir. Ancak son adımda oluşturduğu şekilde bu birimlere uygun bir çizim yapmadığı görülmektedir. Büyük kareyi bir kenarı $a+b/2$ olacak şekilde oluşturmuş (yani 4 birim) fakat çıkarmak için taradığı karenin bir kenarının $b/2$ uzunluğunda olmadığı görülmektedir. Bunun yanında son şeklin, ilk iki adımdaki kare ve dikdörtgenin birleşiminden nasıl oluştuğu da net olarak anlaşılmamaktadır. Yapılan bu inceleme sonrası Görkem'le Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına, birimlerden yararlandıysa sondaki şekli oluşturma mantığındaki hatayı farkedip gidermesine ve anlaşılabilirlik problemini nasıl giderebileceğine ulaşmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?*

G: *Şimdi ifadede kare olduğu için, ben de kare üzerinde daha iyi görebilirim diye düşündüm. İki tane şekil çizdim bir a^2 ve bir de ab şeklinde.*

A: *Peki bu kare ve dikdörtgeni oluştururken birimleri kullandın mı, yoksa rastgele mi çizdin?*

G: *Birimleri kullandım yani a 'ya özgü 3 birim b 'ye özgü 2 birim almaya dikkat ettim ilk iki şekilde parselleri aklımda canlandırmak için.*

A: *Peki son şekil de buna uygun mu çizim yaptın?*

G: *Son şekilde $(b/2)^2$ çıkarmışım, bişeyler yapmışım ama ne yapmışım tam olarak? [çizimini inceliyor]*

G: *Ya ben aslında öyle yapmadım, önce a birimleri çizdim sonra yanına $b/2$ 'leri çizdim, ama burda bir yanlışlık olmuş.*

A: *Bir problem var gibi görünüyor hem çiziminde hem anlaşılmasında.*

G: *Evet ya anlaşılmıyor. Ben aklımda direk birleştirip çizmeye çalışmışım, yanlış çizmişim o yüzden.*

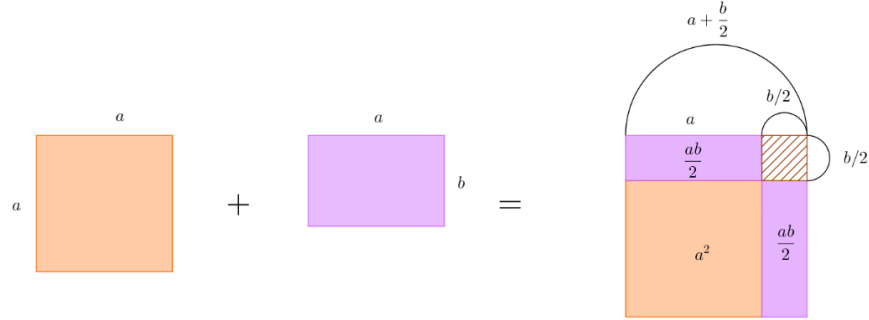
A: *O zaman şimdi gördün hatanı. Gidermek için ne yapabilirsin?*

G: *Birebir çizdim işte yine a 'ya 3 birim b 'ye 2 birim olacak şekilde, başta ilk iki şekilde öyle tanıtmıştım şekilleri. Sonra burda $b/2$ ye 1,5 birim yapmışım, 1 birim yapmam gerekiyordu, onu düzeltirim. Bir de şu dikdörtgenleri işaretlerim [alanı $a(b/2)$ olanı gösteriyor.]*

Görkem, görüşme sırasında hatasını farketmiştir. Bu hatayı gidermeye ve anlaşılabilirlik sorununu gidermeye yönelik açıklama yapmıştır. Görkem'in görüşmede tarif ettiği Gİ'nin son versiyonu Şekil 50'de verilmiştir.

Şekil 50

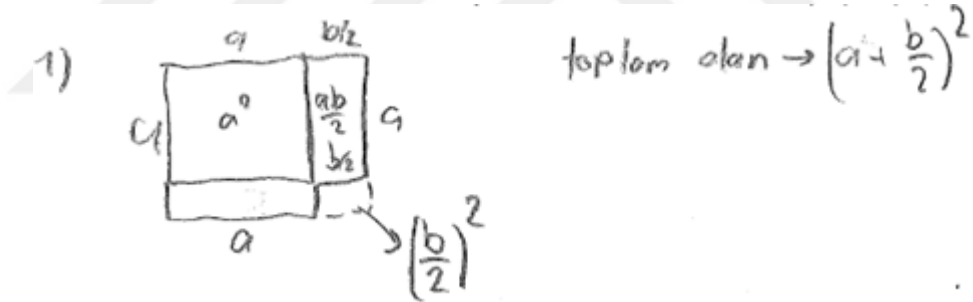
Görkem'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



Emre'nin 1. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 51 ve Şekil 52'deki gibidir.

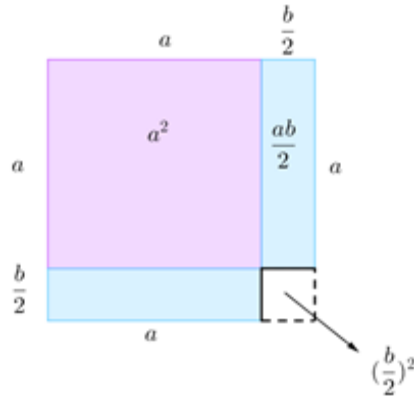
Şekil 51

Emre'nin 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 52

Emre'nin 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Emre'nin Gİ'sini Yiğit'in Gİ'siyle benzer mantıkla, bir kenarı $a+b/2$ uzunluğunda olan bir kareden ve bu karenin iç bölgesini parçalara ayırarak oluşturduğu görülmektedir. Emre, çizim yaparken çizgisiz kâğıt kullanmayı tercih etmiştir. Ayırdığı parçalarla, alanı a^2 olan 1 tane kare, alanı $a(b/2)$ olan 2 tane dikdörtgen, alanı $(b/2)^2$ olan bir kare elde etmiştir. Bu sayede verilen ifadenin içerisinde yer alan tüm parçaları elde edebilecek bir yapı oluşturmuştur. Toplam alandan $(b/2)^2$ 'lik alanı çıkardığını göstermek için, çıkardığı parçanın kenarlarını kesik noktalarla çizmiş ve ok işareti kullanmıştır. Emre'nin Gİ'sinde bir hata görülmemektedir. Emre'yle yapılan görüşme Gİ'sini geliştirirken nasıl düşündüğünü açıklamasına ve Gİ'sini daha anlaşılır hale getirmeye yönelik düşüncesini öğrenmeye yönelik yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?*

E: *Kare vardı ifadede, ben de direk kare çizdim, geldi.*

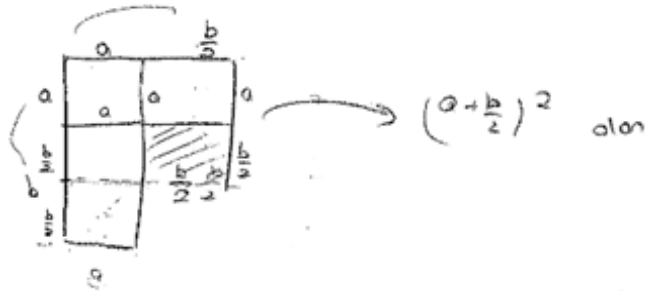
A: *Peki herhangi biri baktığında dışardan, anlayabilir mi bu şeklin bu ifadenin doğrulaması olduğunu? Daha anlaşılır hale getirebilir miydin?*

E: *Çok kötü çizmişim aslında. Önce 2 tane çizdim kareden, sonra şurayı işaretlerdim (alanı $(b/2)^2$ olan kareyi gösteriyor.) sonra bunu çıkarttığımı gösterirdim, sonra 3.yü çizer orda da toplamını yazardım şekilleri üst üste eklerdim.*

Emre, görüşme sırasında anlaşılabilirlik konusunda 3 adımda çizerek gösterebileceğini ifade etmiştir. Emre'nin tarif ettiği Gİ şekli Yiğit'in de görüşme sırasında ulaştığı şekille aynı olmuştur (Şekil 47). Deniz'in 1. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 53 ve Şekil 54'deki gibidir.

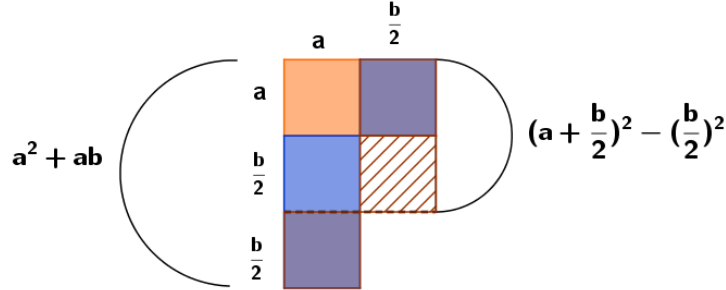
Şekil 53

Deniz'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 54

Deniz'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Deniz Gİ'sini tek şekilden oluşturmuş ve çizgisiz kâğıt kullanmıştır. Deniz'in geliştirdiği Gİ'ye bakıldığında, görsel olarak özdeş görünen 5 tane kareden oluştuğu görülmektedir. Görsel olarak aynı görünseler de Deniz aslında 3 farklı alan ölçüsüne sahip şekiller oluşturmuştur. Alanı a^2 , $a(b/2)$ ve $(b/2)^2$ olan şekillerdir. Deniz $(a+b/2)^2$ alanını belirtmiş, bu alandan $(b/2)^2$ lik alanı çıkardığını belirtmek için şekil üzerinde tarama yaptığı görülmektedir. Deniz, alanı $(a+b/2)^2$ olan büyük karenin altına alanı $a(b/2)$ bir kare daha çizmiştir. Bu sayede tüm şeklin sol tarafında alt alta yer alan 3 karenin, alanı $(a+b/2)^2$ olan büyük kareden $(b/2)^2$ lik alanı çıkardığında geriye kalan 3 kareye özdeş olduğunu göstermiştir. Tüm şeklin sol tarafında alt alta yer alan 3 karenin alanları toplamıyla eşitliğin sol tarafında yer alan a^2+ab 'yi elde etmiş, alanı $(a+b/2)^2$ olan büyük kareden $(b/2)^2$ lik alanı çıkardığında geriye kalan 3 karenin alanıyla da eşitliğin sağ tarafında yer alan $(a+b/2)^2 - (b/2)^2$ 'yi elde etmiştir. Deniz'in Gİ'sinde doğruluk açısından bir sıkıntı görülmemektedir. Yapılan bu inceleme sonrası Deniz'le Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına, yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?

D: Direkt ifadeyi çıkarmaya çalıştım, şöyle komple $(a+b/2)$ 'nin karesi oluyor. Sonra burdan da gördüğünüz taralı şekli çıkardığımız geri kalan burasıyla birlikte eş oluyor.

A: Eş olan kısımların neresi olduğu tam olarak anlaşılıyor mu?

D: Burdan böyle hareket etmiş aşağıya gelmiş oluyor, hayali bir şekil aslında.

A: Peki herhangi biri baktığında dışardan, anlayabilir mi bu şeklin bu ifadenin doğrulanması olduğunu?

D: Sanmıyorum, görsel olarak aklımda canlandırdığımı tam yansıtamıyorum gibi.

A: Aslında gayet güzel açıkladın daha anlaşılabilir hale de getirebilir misin?

D: Bilmiyorum ki ayrı ayrı mı çizseydim?

A: Olabilir, nasıl çizebilirdin?

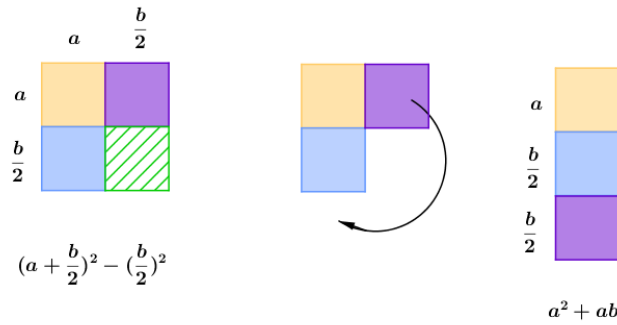
D: Parça parça önce bunlar var sonra buna eşit oluyor gibi ayrı ayrı çizebilirim belki. Peki, hocam bu olmuş mu mantıklı mı yaptığım?

A: Evet gayet mantıklı.

Deniz'in açıklamasında tarif ettiği hareketli olarak yapmak istediği Gİ, GGB ortamında adımlanarak çizilmiş, Şekil 55'de gösterilmiştir.

Şekil 55

Deniz'in 1. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



2.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği Görsel İspatlar

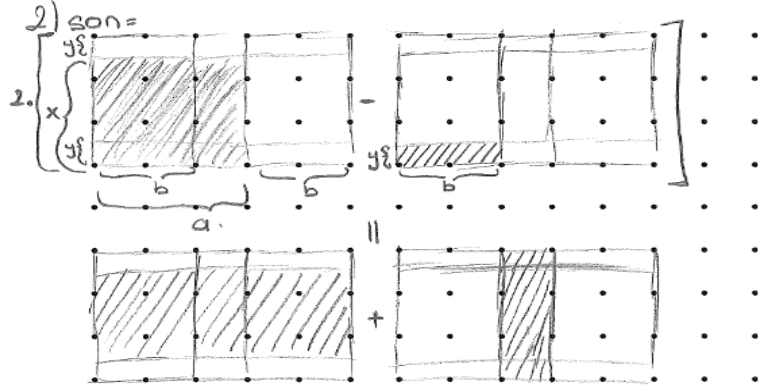
$a > b > 0$ ve $x > y > 0$ için;

$$(ax - by) = \frac{1}{2}(a + b)(x - y) + \frac{1}{2}(a - b)(x + y)$$

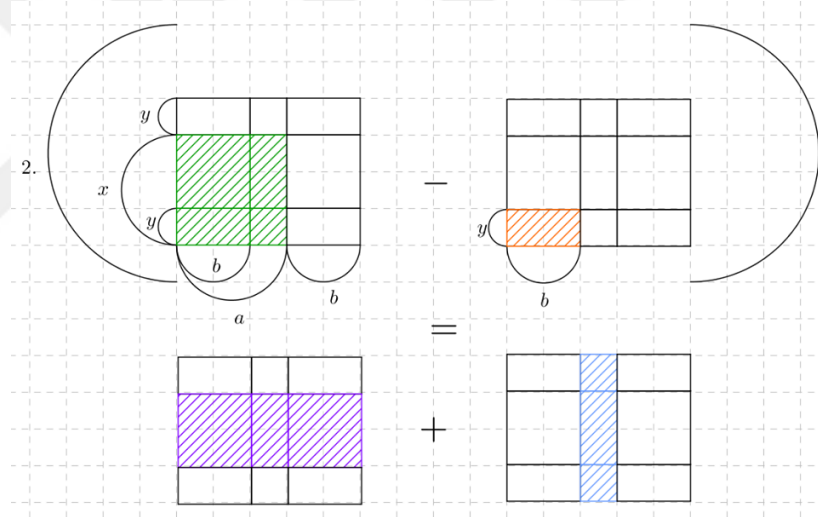
Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler İrem, Efe, Emre ve Deniz olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

İrem'in 2. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 56 ve Şekil 57'deki gibidir.

Şekil 56
İrem'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 57
İrem'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



İrem, Gİ'sini 4 adımdan oluşturmuştur ve çiziminde noktalı kâğıt kullanmayı tercih etmiştir. İrem 1. Gİ'de olduğu gibi ifadenin tüm bileşenleri elde etmek için temel bir şekil oluşturup parçalara ayırmayı tercih ettiği, tüm işlemleri bu şeklin üzerinde taramalar yaparak gösterdiği görülmektedir. İrem eni $y+x+y$ uzunluğunda olan, boyu $a+b$ olacak şekilde bir döküörtgen oluşturmuştur. İlk adımda şekil üzerinde, ax alanını oluşturacak bir tarama yapmış, ikinci şekilde ise by alanını oluşturacak şekilde bir tarama yapmıştır. İlk iki şekilden eşitliğin sol tarafında yer alan $(ax-by)$ ifadesine ulaşmıştır. Üçüncü ve dördüncü adımlarda ise şekil üzerinde $(a+b)(x-y)$ ve $(a-b)(x+y)$ alanlarını elde edecek şekilde tarama yaptığı görülmektedir. Ancak Gİ'si

oluşturulması istenen ifade, $\frac{1}{2}(a+b)(x-y) + \frac{1}{2}(a-b)(x+y)$ şeklindedir. İrem'in Gİ'sinde $\frac{1}{2}$ çarpanı görülmemektedir. İrem'in ilk iki şekli parantez içine alarak geliştirdiği Gİ'nin sol tarafına 2 ile çarptığını belirten 2. yazdığı görülmektedir. İrem'in Gİ'si oluşturması istenen ifadeyi 2'yle genişlettiği anlaşılmakta fakat oluşturduğu Gİ'de ilk iki adımda oluşturduğu şekille son iki adımda oluşturduğu şekillerin birbirine eşit olduğu görsel olarak anlaşılmamakta ve hatalı görünmektedir. Yapılan bu inceleme sonrası İrem'e Gİ'yi nasıl geliştirdiğini açıklaması ve anlaşılabilirlik problemini nasıl giderebileceğine ulaşmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?*

İ: *Önce çarpımları sağlayacak şekilde bu şekli oluşturdum sonra taradım alanları.*

A: *Peki ifadede yer alan $\frac{1}{2}$ ler nerede?*

İ: *$\frac{1}{2}$ ler yok. Hepsini 2'yle genişlettim ondan bunu elde ettim zaten.*

A: *Anlaşıyor mu şekilden bu iki şeklin sonuçlarındaki alanların eşit olduğu?*

İ: *Çok değil ama işte aslında bu alanlardan 2 tane var [üstteki ilk iki adımı gösteriyor]*

A: *Görsel olarak bu alanların eşitliğini daha anlaşılır bir şekilde görebilmek için ne yapabilirim?*

İ: *Sayı falan verince görülüyor aslında. Başka da ne yapılabilir bilmiyorum.*

A: *Sayı vermek dışında, şekil olarak ne yapabilirim? Eğer $\frac{1}{2}$ 'yi kullansaydın alanlar nasıl olurdu?*

İ: *Yarısı olacaktı alanlar.*

A: *Evet, üstteki şekillerden 2 tane olmasına gerek kalmayacaktı yani. Yarısını şekil üzerinde gösterdiğinde üstteki iki adımla alttaki iki adımın sonucunun eşitliği nasıl gösterebilirdin?*

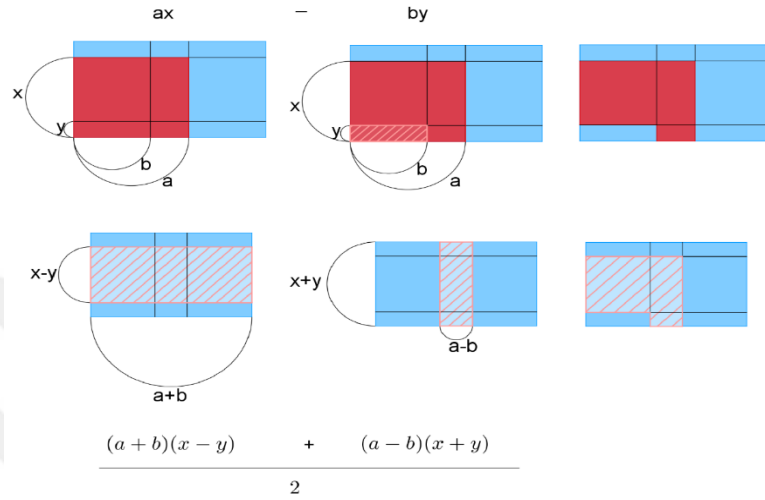
İ: *Birer tane daha çizebilirdim alanlar çıkarılınca kalanı gösteren ama yer yoktu burda, olabildiğince küçültmeye çalıştım şekli ama bir tane daha çizebilirdim yanına. O zaman olurdu.*

İrem, araştırmacının da yardımıyla ifadenin verilen halinin Gİ'sini nasıl oluşturabileceğine yönelik aynı şekilden ilk iki adımın yanına ve son iki adımın yanına

çizim yaparak çıkarılan alanların son halini gösterebileceğine yönelik bir açıklama yapmıştır. İrem'in görüşmede tarif ettiği Gİ'nin son versiyonu Şekil 58'te verilmiştir.

Şekil 58

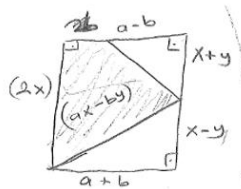
İrem'in 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



Efe'nin 2. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 59 ve Şekil 60'daki gibidir.

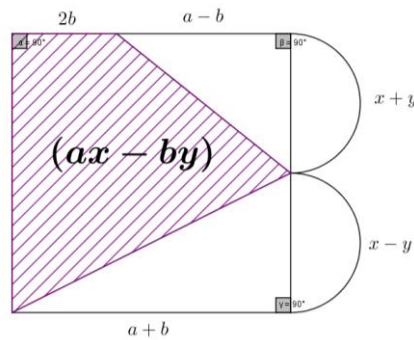
Şekil 59

Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 60

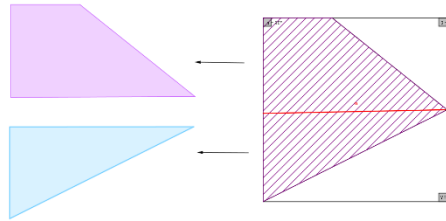
Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Efe'nin 2. İfade için geliştirdiği Gİ'nin tek adımdan oluştuğu görülmektedir. Efe çiziminde çizgisiz kâğıt kullanmayı tercih etmiştir. Efe, bir kenarı $2x$ uzunluğunda, diğer kenarı $a+b$ uzunluğunda bir dikdörtgen oluşturmuştur. $2x$ uzunluğunda olan kenarı $x+y$ ve $x-y$ uzunluklarına bölmüş, $a+b$ uzunluğundaki üst kenarı da $2b$ ve $a+b$ uzunluklarına bölmüştür. Bu sayede kenar uzunlukları $a-b$ ve $x+y$ olan bir dik üçgen ve kenar uzunlukları $x-y$ ve $a+b$ olan bir dik üçgen elde etmiştir. Oluşturduğu bu dikdörtgenden, dik üçgenler haricinde kalan kısmı taramış ve $ax-by$ olarak ifade etmiştir. Dik üçgenlerin alanı eşitliğin sağ tarafında yer alan $\frac{1}{2}(a+b)(x-y) + \frac{1}{2}(a-b)(x+y)$ ifadesini oluşturmaktadır. Ancak taranan bölgenin alanı $ax-by$ değildir. Araştırmacı tarafından Efe'nin taradığı bölge bir yamuk ve dik üçgene bölünerek alan hesaplanmıştır (Şekil 61). Tüm karenin alanı $2x(a+b)$ 'dir. Bu alandan, taralı bölgenin alanı çıkarıldığında $ax-by$ ifadesine ulaşılmaktadır. Efe'nin Gİ'sinde taralı bölgenin içine yazdığı $ax-by$ ifadesi dışında bir hata görülmemektedir. Ancak oluşturduğu şeklin görsel olarak daha açıklayıcı ve anlaşılabilir hale getirileceği düşünülmüştür.

Şekil 61

Efe'nin Klinik Görüşmede Taralı Alanı Hesaplamak İçin Kullandığı Parçalama



Efe'nin, bu şekilde düşünerek mi taralı alanın içine $ax-by$ yazdığı konusunda tereddüte düşülmüştür. Çünkü Efe bu ifade için farklı bir Gİ oluşturma girişiminde daha bulunmuştur (Şekil 63). Efe'nin Gİ'sini tamamlayamamış olduğunu düşündüğü konusunda tahmin yürütülmüştür. Efe'yle Gİ'yi nasıl geliştirdiğini açıklaması ve anlaşılabilirlik problemini nasıl giderebileceğine ulaşmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?*

E: *Üçgenler var burda $\frac{1}{2}$ dediği için ifadede bunları üçgen olarak aldım.*

Amacımız da $ax-by$ 'yi bulmak. Ben de dedim bir şekilden 2 tane üçgen

çıkarmamız gerekiyor. Sonra da böyle bir şekil kalıyor [taralı bölgeyi işaret ederek].

A: Bu taralı alana $ax-by$ demişsin, ama işlemleri yapınca bu alan $ax-by$ çıkmıyor.

E: Evet çıkmıyor, tam doğru değil zaten. Ben de çıkmadığı için başka bir şekilde daha denedim.

A: Bunun tam doğru olmadığını düşünüyorsun yani?

E: Evet yarı yarıya doğru gibi.

A: Neden hata çıkıyor sence, bakıldığında fikir doğru görünüyor.

E: Fikir doğru bence de, nerde yanlış yaptığımı bilmiyorum.

A: Taralı bölgenin alanını nasıl hesaplarsın?

E: Tüm şekilden üçgenlerin alanını çıkararak.

A: Sen de belirtmiştin burdan $ax-by$ çıkmıyor taralı alan. Hesaplayalım, $(2x)(a+b) - [\frac{1}{2}(a+b)(x-y) + \frac{1}{2}(a-b)(x+y)] = 3ax+2b$ olur. Bulmak istediğin şey taralı bölgenin üçgenlerin alanına eşit olması mı? $ax-by$ ifadesini elde etmeye çalışıyorum unutma.

E: Ben burda iki farklı şey mi bulmuş oluyorum yani?

A: Hangi alanları birbirine nasıl eşitleyeceğin konusunda kafan karışmış gibi görünüyor biraz, dikkatlice tekrar düşün.

E: Evet, mantiken çıkması gerekiyor ama kafam karıştı hangisini neye eşitliyorum.

A: Ne yaptığını tekrar ben açıklayayım sen de bulmaya çalış, şimdi ilk başta üçgenlerin alanlarını hesaplayarak sağ taraftaki ifadeyi elde etmiş oldun. Tüm kareden de taralı bölgeyi çıkarman gerekiyor ki yine üçgenlerin alanını elde edebilesin. Şimdi ne yapman gerekiyor?

E: Anladım üçgenlerin alanını iki farklı yoldan hesaplamış olacağız.

A: Evet, güzel. Nasıl bulursun taralı alanı?

E: Şöyle bölerim yamuk ve üçgene bunların alanlarını hesaplarım [Şekil 61'deki gibi bölüyor].

A: Hesaplayalım ne çıkıyor.

E: [Hesaplıyor.] *Yamuğun alanı:* $\frac{1}{2}(2b + a + b)$, *üçgenin alanı:* $\frac{1}{2}(x - y)(a + b)$ bunların toplamını tüm karenin alanından çıkarırsak $(2x)(a+b) - [\frac{1}{2}(2b + a + b) + \frac{1}{2}(x - y)(a + b)] = ax - by$ olur.

A: *Evet ulaştın gördüğün gibi. Şimdi, çizimin anlaşılır mı sence?*

E: *Siz anlamışsınız hocam işte ne güzel.*

A: *Evet ama ben üzerinde baya inceleme yaptım, dışardan bakan biri bu ifadenin doğrulaması olduğunu görebilir mi?*

E: *Biraz uzun bakınca, deneyince görebilir.*

A: *Daha anlaşılır hale getirmek için ne yapabilirsin?*

E: *Bilmiyorum, ayrı ayrı çizebiliriz belki.*

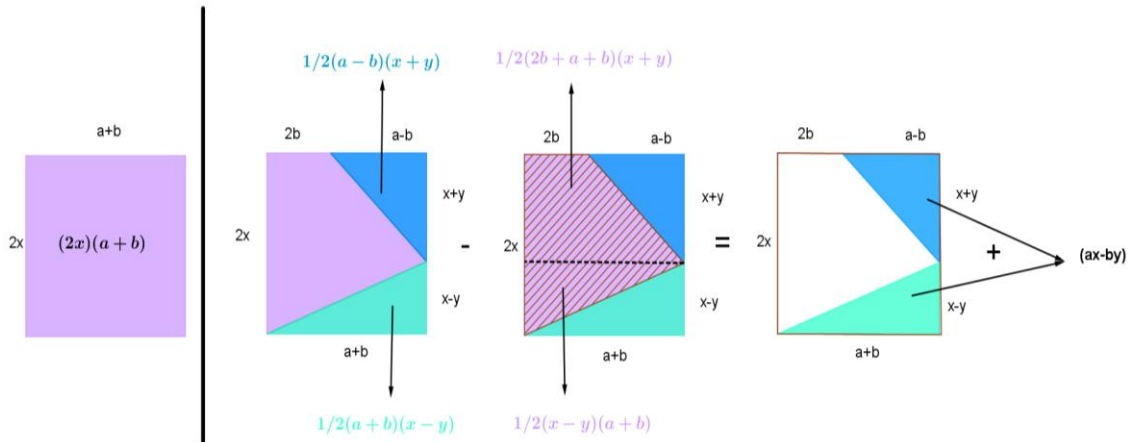
A: *Nasıl çizeriz?*

E: *İşte tüm kareden, taralı alanın çıkarıldığını gösteririz. Üçgenleri çizeriz. Eşitlik koyarız.*

Efe'nin başlangıçta Gİ fikrini bulduğu, ancak hangi şekillerin alanlarını birbirine eşitleyeceği konusunda sıkıntı yaşadığı, Gİ'sini hatalı bulduğu ve sonlandıramadığı görülmüştür. Ege'nin geliştirdiği Gİ'nin doğruluğunun tam olarak anlaşılabilmesi için bir takım cebirsel işlemler yapmak da gerekmektedir. Efe görüşme sırasında araştırmacının da yardımıyla, hatasını farkedip gerekli cebirsel işlemleri yaparak Gİ'sini tamamlamıştır. Anlaşılabilirlik konusunda söylediği adımlama, araştırmacı tarafından GGB ortamında düzenlenerek Şekil 62'de gösterilmiştir.

Şekil 62

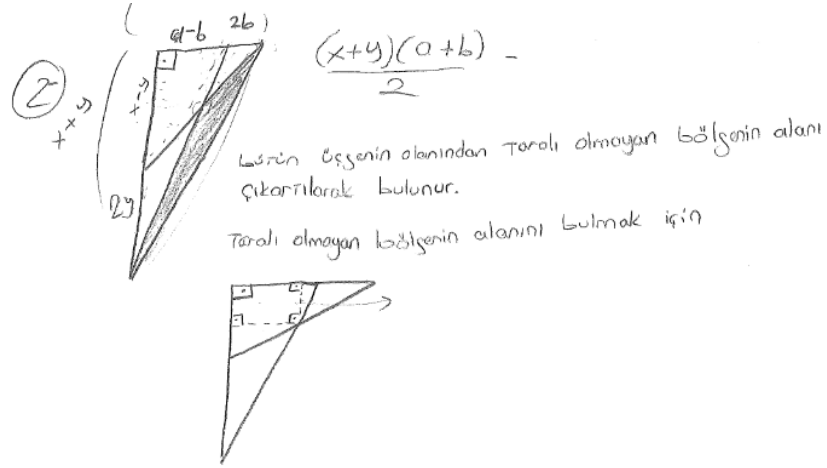
Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



Efe, 2. İfade için geliştirdiği Gİ'nin tam doğru olmadığını düşünerek başka bir Gİ denemesi daha yapmıştır. Bu deneme ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 63 ve Şekil 64'deki gibidir.

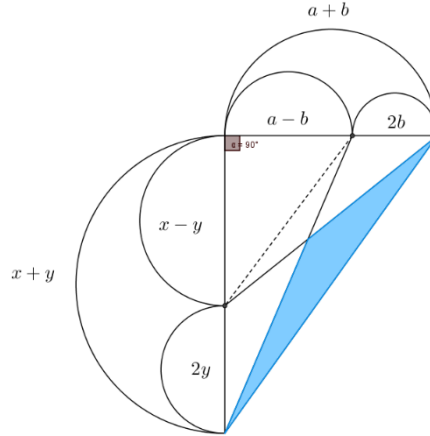
Şekil 63

Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesi



Şekil 64

Efe'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesinin GGB Versiyonu



Efe'nin yaptığı bu Gİ denemesinde, kenarları $x+y$ ve $a+b$ uzunluğunda olacak şekilde bir dik üçgen oluşturduğu görülmektedir. Bu üçgenin $a+b$ uzunluğundaki kenarını $a-b$ ve $2b$ uzunluklarına, $x+y$ uzunluğundaki kenarını da $x-y$ ve $2y$ uzunluklarına bölmüştür. Bu sayede, eşitliğin sağ tarafında verilen $\frac{1}{2}(a+b)(x-y)$ üçgeninin alanına ve $\frac{1}{2}(a-b)(x+y)$ üçgeninin alanına ulaşmıştır. Efe şeklin yanına “bütün üçgenin alanından taralı olmayan üçgenin alanı çıkarılarak bulunur”.

şeklinde bir yazı yazmıştır. Tüm şeklin alanı $\frac{1}{2}(a + b)(x + y)$ olmaktadır. Bu alandan taralı olmayan üçgenlerin alanları toplamının çıkarılması istenilen ifadeyi nasıl vereceği anlaşılamamaktadır. Taralı olmayan üçgenlerin alanı hesaplanırken iki üçgenin kesişim bölgesi de tam hesaplanamadığı için ifadeye ulaşamayacağı düşünülmüştür (Şekil 64). Efe'nin bu Gİ'yi nasıl oluşturduğunu açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Bu ifade için çizdiğin diğer şeklin tam olmadığını düşündüğün için bunu oluşturduğunu söylemiştin. Peki, bu şekli oluştururken nasıl düşündün?*

E: *Yine az önceki mantıkla $\frac{1}{2}$ olduğu için üçgen kullanabilirim dedim, uzunlukları yerleştirdim.*

A: *Tüm alandan taralı bölgeyi çıkararak bulunur demişsin? Nasıl gelecek ifade?*

E: *Evet ben de sıkıntı yaşadım taralı olmayan bölgenin alanını bulurken, Menalaus falan kullanmayı düşündüm, dikdörtgene parçalayayım dedim ama olmadı tam bulamadım.*

A: *Gelir miydi sence bulsaydın? Hangi bölgeyi hangi bölgeye neden eşitliyorsun burda?*

E: *Gelir gibi. Ama bilmiyorum.*

A: *Başlangıç ifaden $\frac{1}{2}(a + b)(x + y)$ burda. Bu alandan çıkararak nasıl elde edecektin?*

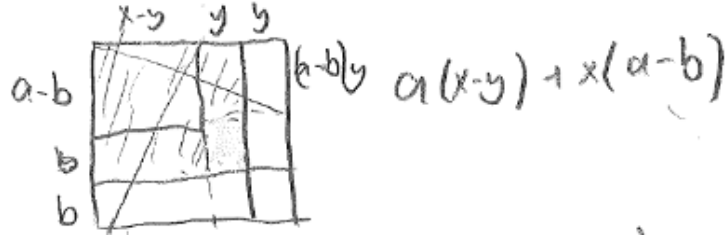
E: *Olmazmış hocam burdan, diğer taraftan da üçgenlerinki çıkarmam gerekiyor sağlaması için $[\frac{1}{2}(a + b)(x - y) - \frac{1}{2}(a - b)(x + y)]$ ifadesini kastediyor]. Olmamış.*

Efe, bu denemesinde farklı ihtimalleri göz önünde bulundurarak alternatif yollar denemiştir. Ancak Gİ'si oluşturulacak ifadenin bileşenleri elde etme konusunda sıkıntılar yaşamıştır. Görüşme sırasında bir sonraki aşama için faydalı olabileceği düşünüldüğü için, hata yaptığı ve gözden kaçırmış olabileceği düşünülen noktaları farketmesi amaçlanmıştır.

Emre'nin 2. İfade için yaptığı Gİ denemesi ve GGB versiyonu Şekil 65'de ve Şekil 66'de verilmiştir.

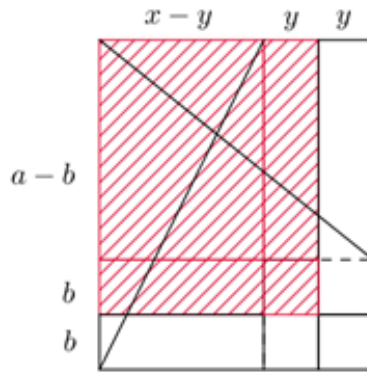
Şekil 65

Emre'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesi



Şekil 66

Emre'nin 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemenin GGB Versiyonu



Emre'nin 2. İfade için çizdiği şekil incelendiğinde verilen ifadeye ulaşamadığı görülmüş, bu denemesinde nasıl düşündüğünü açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Bu ifade için bir deneme yapmışsın ama sonuca ulaşamamışsın sanırım, nasıl düşündün?*

E: *Üçgen denedim $\frac{1}{2}$ ' yi görünce ama gelmedi. Uğraştım ama çıkaramadım, olmadı.*

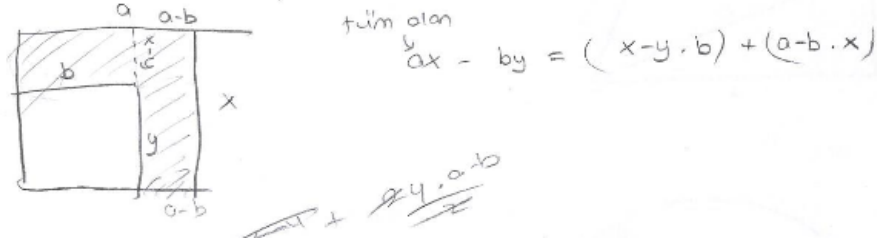
A: *Başka türlü yapılabilir miydi peki?*

E: *Belki köşegen falan çizilebilirdi ama bilmiyorum.*

Deniz'in 2. İfade için yaptığı Gİ denemesiyle GGB versiyonu Şekil 67 ve Şekil 68'de verilmiştir.

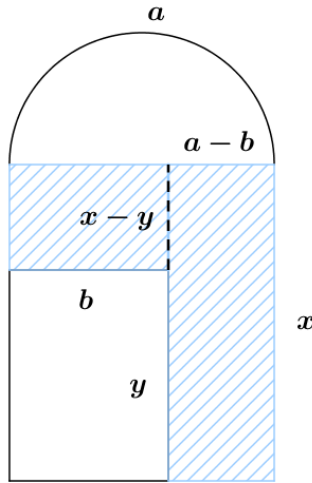
Şekil 67

Deniz'in 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesi



Şekil 68

Deniz'in 1. Aşama 2. İfade İçin Yaptığı 2. Gİ Denemesinin GGB Versiyonu



Deniz'in 2. İfade için çizdiği şekil incelendiğinde verilen ifadeye ulaşamadığı görülmüş, bu denemesinde nasıl düşündüğünü açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

D: Burda işte bu alanı verecek şekilde kareyi oluşturdum. Tüm alan ax oluyor. İçinden by 'yi çıkardığımızda kalan alanı dikdörtgene böldüm. Ordan geldi.

A: Ulaştıydın mi yani ifadeye bu şekilden?

D: Evet olmamış mı?

A: Sağ taraftaki ifadeye bak bakalım tam olarak nasıl?

D: Aaaa ben başka bir şey bulmuşum, olmamış. Çizime başlayınca kaptırmışım hocam, neyi çizdiğimi unutmuşum.

Deniz'in verilen ifadenin Gİ'sini geliştirdiğini düşündüğü görülmüştür. Hangi ifadenin Gİ'sini geliştirdiğini unuttuğunu ifade etmiş, görüşme sırasında Gİ'sinin ifadeyi sağlamadığını fark etmiştir.

3.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği Görsel İspatlar

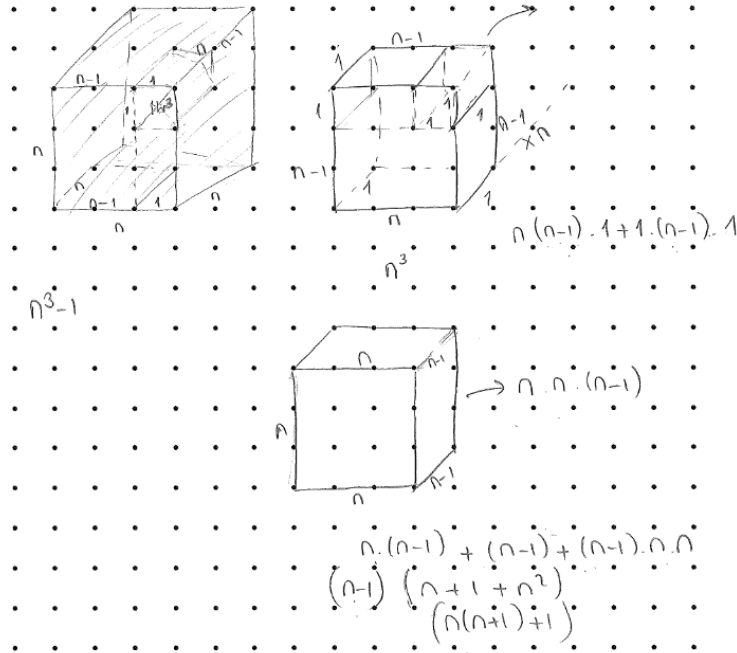
$$n^3 - 1 = (n - 1) \cdot [n(n + 1) + 1]$$

Bu aşamada öğrencilerin geliştirdiği tüm Gİ'ler 3 boyutlu yapıda oluşturulduğu için, öğrencilerin çizim aşamasında daha fazla zorlandığı gözlenmiş, bu nedenle Gİ'lerin GGB versiyonları araştırmacı tarafından öğrencilerin açıklamalarıyla revize edilerek çizilmiştir. Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler Görkem, İrem ve Deniz olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

Görkem'in 3. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 69 ve Şekil 70'deki gibidir.

Şekil 69

Görkem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Görkem, Gİ'sini 3 adımdan oluşturmuştur. Önce bir ayrıtı n uzunluğunda bir küp çizmiş bu küpten bir ayrıtı 1 birim olan bir küp çıkararak eşitliğin sol

tarafındaki. $n^3 - 1$ ifadesini elde etmiştir. Ardından, 2 ve 3. şekildeki ayrıtların uzunluklarına bakıldığında, 1 br^3 'ü çıkardığı yerin arkasından büyük küpü böldüğü anlaşılmaktadır. Son olarak Gökçe yaptığı parçalamadan sonra elde ettiği prizmaların hacimlerini yazarak eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi elde etmiştir. Yapılan inceleme sonrası Görkem'le Gİ'yi nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve parçalamadaki anlaşılabilirlik sıkıntısını gidermesine yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?

G: Önce burda n 'e n 'lik bir küp almışım, bu küpten 1 'lik bir küp çıkarmışım küplü ifade olduğu için. Sonra 1 'lik çıkardığım bölümden büyük küpü bölmüşüm tam olarak hesaplayabilmek için. Arkasında kalan da zaten bu şekilde bir prizma oluyor. Sonrasında işte bu böldüğüm parçaların hacimlerini hesaplayınca bundan $n.(n-1).1 + 1.(n-1).1$ geliyor, bundan da $n.n.(n-1)$ geliyor. İkisini toplayınca $(n-1)(n+1+n^2)$ geldi, yazdığım gibi paranteze alınca da son ifadeye ulaşmış oluyoruz.

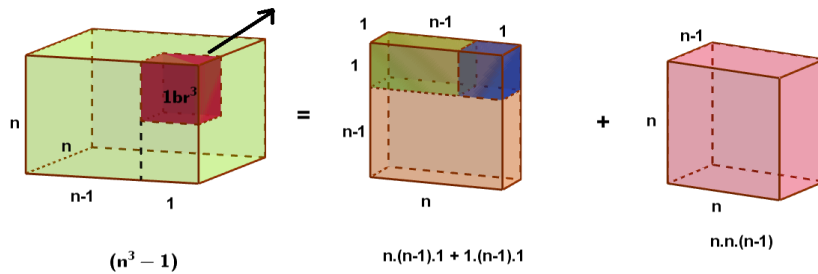
A: Anlaşılır mı peki senin çizdiğin şekil, daha anlaşılır hale getirebilir misin?

G: Yani evet ayrı ayrı arka arkaya çizebilirdik böldüğümüzü eşit olduğunu uzunlukları da kenarlara yazınca görünürdü.

Görkem Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamış, daha anlaşılır hale getirmek için şekilleri arka arkaya çizerek ve uzunlukları yerleştirerek çizim yapılabileceğini belirtmiştir. Görkem'in tarif ettiği Gİ'nin son versiyonu GGB ortamında çizilerek Şekil 70'de sunulmuştur.

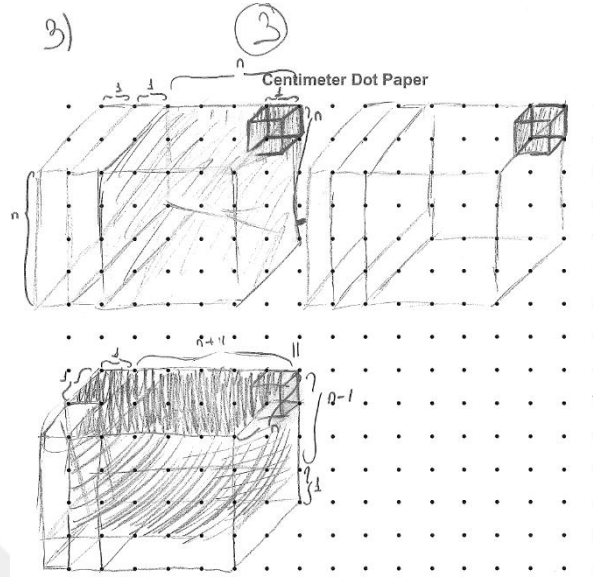
Şekil 70

Görkem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



İrem'in 3. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 71 ve Şekil 72'deki gibidir.

Şekil 71
İrem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



İrem'in Gİ'si 3 adımdan oluşmaktadır. İrem ilk iki ifade için geliştirdiği Gİ'lerdeki gibi yine temel bir şekil oluşturmuş tüm adımlarda bu şekil üzerinde taramalar yaparak ifadeye ulaşmaya çalışmıştır. İlk adımda bir ayrıtı n uzunluğunda bir küp çizmiş bu küpün yanına taban ayrıtları 1 'e n , yüksekliği n olan 2 tane dikdörtgenler prizması çizmiştir. Çizdiği küpten bir ayrıtı 1 birim olan bir küp çıkardığını göstermek için 2. adımı çizmiş eşitliğin sol tarafındaki $n^3 - 1$ ifadesini elde etmiştir. Ancak son adımdaki şekilde ne yaptığı tam olarak anlaşılmamaktadır. $n^3 - 1$ için oluşturduğu şekli parçalayıp küpün yanına çizdiği dikdörtgenler prizmalarına ekleyerek özdeş bir hacim oluşturmaya çalıştığı düşünülmektedir. Bu mantıkta bir hata görünmemektedir. Ancak çizimde eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye nasıl ulaştığı anlaşılmamaktadır. İrem'le Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve çizimdeki problemi giderip gideremeyeceğini öğrenmeye yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?*

İ: *Bunda bi eksiklik olabilir, çizemedim çünkü 3 boyutlu olduğu için tam olarak. Şurada 1lik kısmı burdan elde etmişim [İlk iki şekilde taradığı bir kenarı 1 birim olan küpü işaret ediyor.].*

A: *Evet sonra alttaki parçayı yana eklemişsin burda sanırım.*

İ: *Hayır aslında onu eklemedim.*

A: Ne yaptın peki burda öyle görünüyor.

İ: Burada çıkardığım 1'lik kısım aslında alttan da çıkarılabilir yani farketmiyor. Şekil düzgün olsun diye onu çıkarıp yana eklemiştım. Anlaşılmamış burda hiç ama.

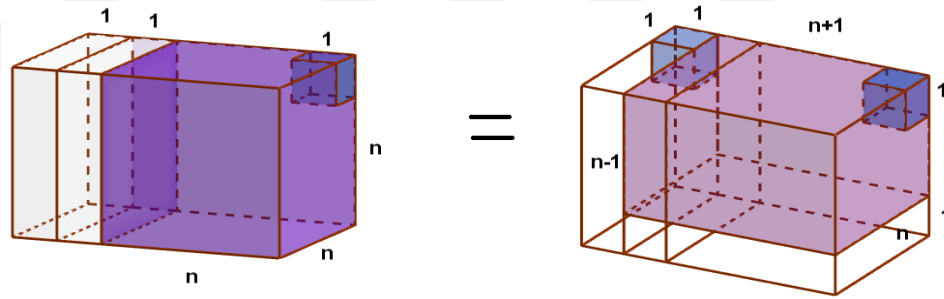
A: Peki çıkar mı burdan istenilen ifade?

İ: Düzgün çizebilseydim hacimlerden çıkardı ama tam ulaşamadım.

İrem'in düşündüğünü çizimine aktarma konusunda sıkıntı yaşadığı görülmektedir. Çiziminin anlaşılmadığını kendisi de ifade etmiştir.

Şekil 72

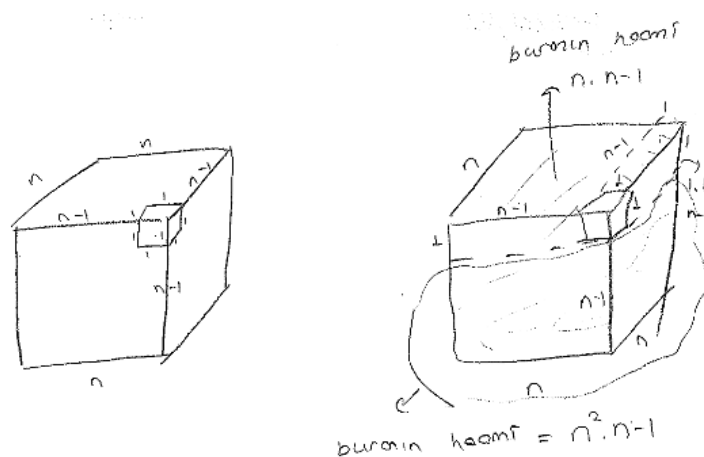
İrem'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Deniz'in 3. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 73 ve Şekil 74'deki gibidir.

Şekil 73

Deniz'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Deniz, Gİ'sini 2 adımdan oluşturmuştur. Önce Görkem'in yaptığı gibi bir ayrıtı n uzuluğunda bir küp çizmiş bu küpten bir ayrıtı 1 birim olan bir küp çıkararak eşitliğin

sol tarafındaki $n^3 - 1$ ifadesini elde etmiştir. Ardından 2. şekildeki çizdiği noktali çizgilere bakıldığında, 1 br^3 'ü çıkardığı yerin solunda, arkasından ve altından şekli parçaladığı görülmektedir. Oluşturduğu bu prizma parçalarının hacimlerini yazarak eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi elde etmiştir. Yapılan inceleme sonrası Deniz'le Gİ'yi nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve parçalamadaki anlaşılabilirlik sıkıntısını gidermesine yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?

D: Küp dediği için önce n 'lik bir küp oluşturayım dedim. Sonra 1 'lik küpü çıkardım ve parçalara böldüm. 3 parça olarak düşündüm burda, şimdi şurda bir parça (1 br^3 lük parçanın solunda kalan bölgeyi gösteriyor), şurda bir parça (1 br^3 lük parçanın arkasında kalan bölgeyi gösteriyor) bir de şurda bir parça oluyor (1 br^3 lük parçanın altında kalan bölgeyi gösteriyor). Sonra hacimlerini bulduğumuzda alttakinin $n^2(n-1)$, şunun (1 br^3 lük parçanın arkasında kalan bölgeyi gösteriyor) $n-1$, buranın da parça (1 br^3 lük parçanın solunda kalan bölgeyi gösteriyor) $n(n-1)$ olur. Toplayınca bunları geliyor ifade.

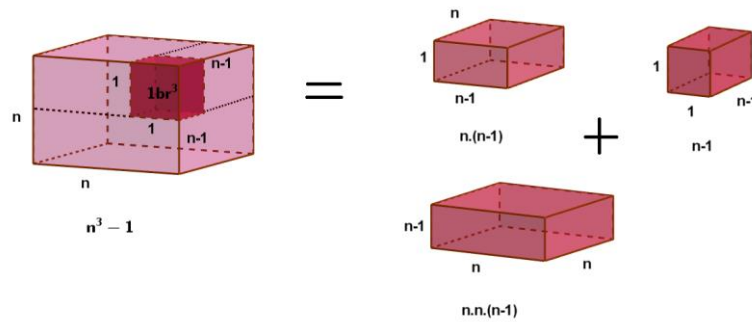
A: Peki az önceki parçalanışların daha anlaşılır olması için ne yapabilirsin?

D: Parçaları ayrı ayrı çizebilirim. Aslında elimde olsa böyle bir küp rahat rahat parçalayıp göstersem çok kolay olurdu.

Deniz, Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamış, daha anlaşılır hale getirmek için parçaları ayrı ayrı çizme önerisinde bulunmuştur. Deniz'in tarif ettiği Gİ'nin son versiyonu GGB ortamında çizilerek Şekil 73'da sunulmuştur.

Şekil 74

Deniz'in 1. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



4.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği İspatlar

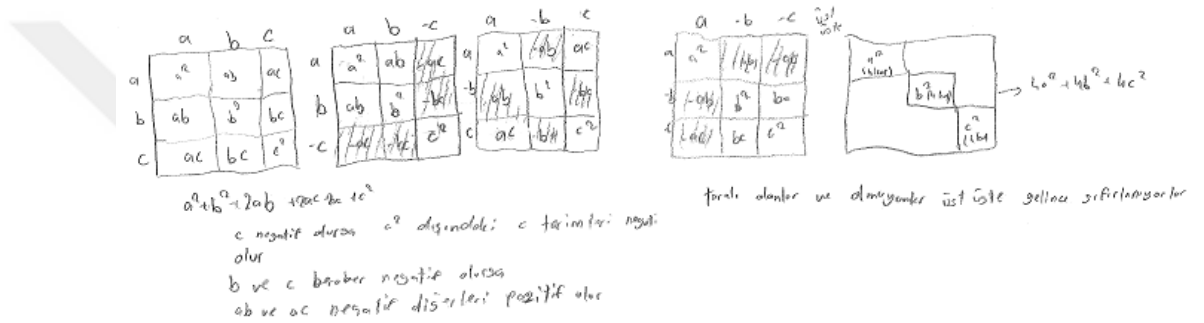
$$(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$$

Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler Emre, Efe, Görkem ve Yiğit olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

Emre'nin 4. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 75 ve Şekil 76'deki gibidir.

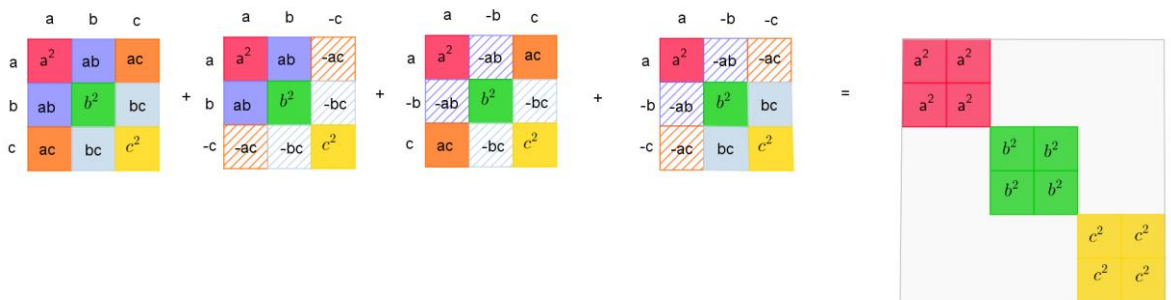
Şekil 75

Emre'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 76

Emre'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Emre Gİ'sini 5 adımda oluşturmuştur. Verilen ifadede, eşitliğin sol tarafındaki karesi alınan üçlü terimleri $((a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2)$ gösterecek şekilde kareler oluşturmuştur. Burada dikkat çeken nokta, geometrik olarak çizdiği bir uzunluğa negatif değer atamasıdır. Yazılı olarak kâğıtta yaptığı açıklamada, c 'nin b'nin negatif olduğu durumları belirtmiş ve taralı olan alanların taralı olmayan alanlarla üst üste gelmesiyle bu alanların birbirlerini sıfırladığını ifade etmiştir.

Böylece son şekilde 4 tane a^2 lik alan, 4 tane b^2 lik alan ve 4 tane c^2 lik alan kalmıştır. Bu alanlar verilen ifadede eşitliğin sağ tarafında verilen tarafından $(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$ ifadesini göstermektedir. Emre'nin Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve uzunluğu negatif olarak çizerken ne düşündüğünü öğrenmeye yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu diyagramı geliştirirken?

E: Ben bu ifadeyi açtım, geometrik olarak açtım yani cebirsel olarak açmakta kendime güvenemedim. Sonra baktım c 'nin önünde eksi varsa bütün c 'li terimler negatif olacak, bunda arttıyorsa bunda çıkartıyordur [1. ve 2. kareyi göstererek], bunda arttıyorsa bunda çıkartıyordur [3. ve 4. kareyi göstererek] şeklinde düşündüm. c ve b de eksi olanlarda bu sefer c ve b 'yi birlikte içeren terimler pozitif olacak dedim. Bunları yanyana açtım, pozitif ve negatif olanları. Tarananlar çıkartıyor şeklinde düşündüm. Üst üste gelince hepsi bu sondaki şekil oluşmuş oldu.

A: Peki burda uzunlukları negatif olarak mı aldın?

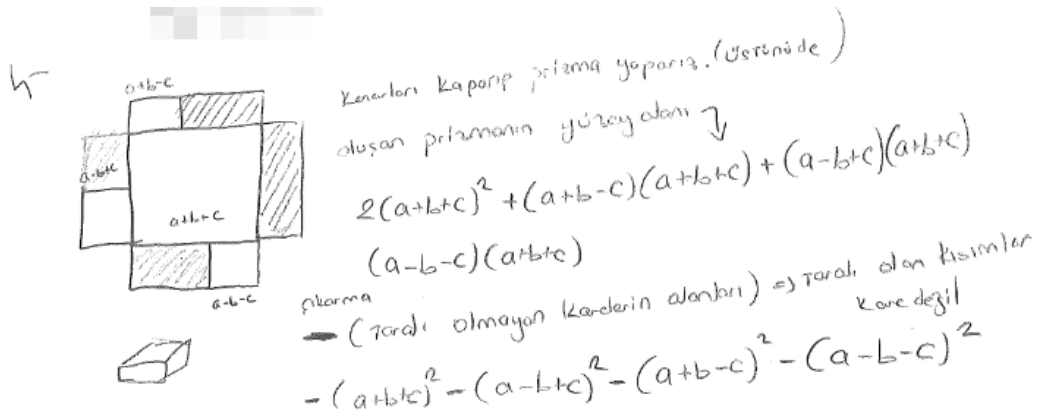
E: Yok burda aslında uzunluk bir sayı değil, $-c$ diye bir değişken var. Cebirsel ispatın geometrik yorumu gibi oldu bu bence.

Emre Gİ'sini nasıl oluşturduğunu açık bir şekilde ifade etmiştir. Geliştirdiği Gİ için, cebirsel ispatın geometrik yorumu nitelendirmesini yapmıştır.

Efe'nin 4. İfade için geliştirdiği ispat ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 77 ve Şekil 78'deki gibidir.

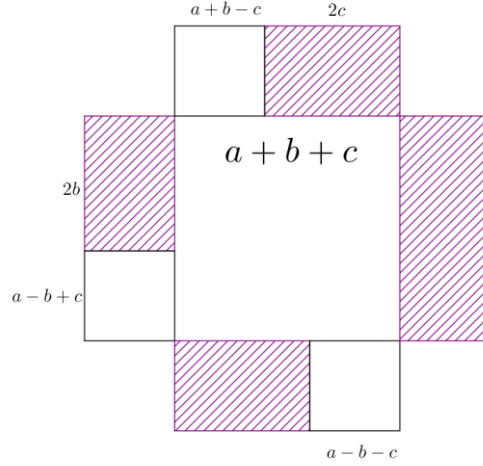
Şekil 77

Efe'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 78

Efe'nin 1. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Efe'nin 4. İfade için Gİ'sini bir prizmanın açılımından yararlanarak geliştirdiği görülmektedir. Prizmanın yüzeyleri üzerinde, bir kenarı $(a-b-c)$, $(a-b+c)$ ve $(a+b-c)$ uzunluklarında kareler oluşturmuştur. Prizmanın taban ayrıtını da $(a+b+c)$ uzunluğunda olacak şekilde çizmiştir. Bu şekilde ifade de eşitliğin sol tarafında verilen terimleri elde etmeye çalışmıştır. Açıklamasında da, yüzlerini katlayıp üstünü de kapatarak bir prizma oluşturduğunu ve prizmanın yüzey alanından taralı olmayan karelerin alanlarını çıkararak ifadeye ulaşılabilceğini belirtmiştir. Ancak Efe'nin çiziminde ayrıtlar için belirttiği uzunluklar farklıdır ve bu şekilde üzeri kapatılarak bir prizma oluşturulması mümkün görünmemektedir. Efe'nin ulaşması gereken eşitlik taralı olmayan bölgelerin (karelerin) alanlarının $(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$ olduğudur. Ancak Efe'nin çizimindeki varsayımsal prizmasının tüm yüzey alanlarından, oluşturduğu karelerin alanlarının çıkarılmasıyla taralı bölgelerin alanları elde edilmiş olacaktır. Buradan istenilen ifadeye ulaşamayacağı görülmektedir. Dolayısıyla Gİ için Efe'nin prizma açılımını düşünmesi farklı bir fikir olsa da Gİ'si temelde hatalı görünmektedir. Bu yüzden Efe'nin Gİ'sini geliştirirken nasıl düşündüğünü açıklamasına ve yaptığı hatayı farketmesine yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Burada prizma açılımı çizmişsin, nereden geldi bu aklına nasıl düşündün?

E: Ben önce bu kareleri çizdim sonra ekledim taralı alanları, sonra dedim bunları kapatsam prizma olabilir diye. Çünkü böyle bakınca bütün bir şekil olmuyordu o yüzden ekleyip kapatayım dedim.

A: Peki ekleyip kapattığında nasıl bu eşitlikleri elde edebileceğini düşündün?

E: İşte tüm prizmadan bunları (taralı alanları) çıkardığımız zaman diye düşündüm.

A: Sence prizma olur mu bu şekli kapatınca?

E: Olur, üstüne de ekliyoruz sonuçta.

A: Burada yükseliği $(a-b-c)$ almışsın, burada $(a-b+c)$ burada da $(a+b-c)$ olarak almışsın. Kapatınca nasıl olacak?

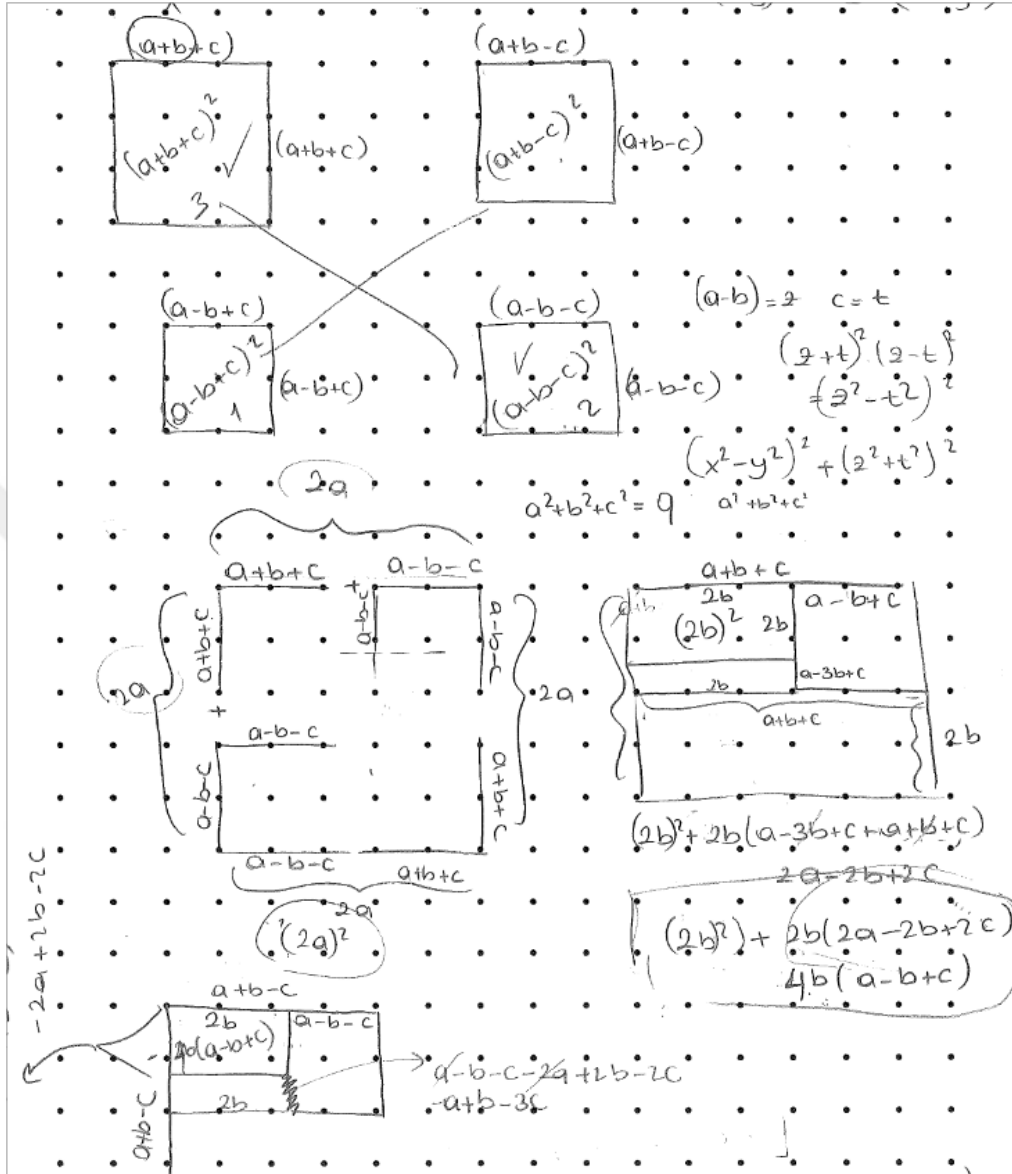
E: Aaa evet olmuyormuş ya. Olmamış hocam bu.

Efe 2. ifade için geliştirdiği Gİ'lerde olduğu gibi bu Gİ'de de hangi alanları neden çıkardığı konusunda zorlandığı ve benzer hatayı yaptığı görülmektedir.

Görkem'in 4. İfade için yaptığı Gİ denemesi Şekil 79'de verilmiştir.

Şekil 79

Görkem'in 1. Aşama 4. İfade İçin Yaptığı Gİ Denemesi



Görkem'in Gİ'sini tamamlayamadığı görülmektedir. Bu denemesinde nasıl düşündüğünü anlatmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur.

A: Gördüğüm kadarıyla bu ifade için denemeler yapmışsın ama bir sonuca ulaşamamışsın, nasıl düşündün açıklar mısın?

G: Muhtemelen ben burada kenar olarak a 'ları b 'leri ve c 'leri yakalamaya çalışmışım alanda. Şey yapmaya çalıştım aslında bir kenarı $2a$ olacak parselleri seçmeye çalıştım. Tamam $(2a)^2$ oldu, bundan 2 tane kullandım [bir kenar

Yiğit'in eşitliğin sol tarafındaki ifadeler için kareler oluşturduğu bunları birleştirmeye çalıştığı ancak eşitliğin sağ tarafındaki ifadeye ulaşamadığı görülmektedir. Bu Gİ denemesinde nasıl düşündüğünü anlatmasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Bu ifade için uğraşmışsın ama sonuca ulaşamamışsın. Nasıl düşündün neden olmadı?*

Y: *Şimdi şurada (eşitliğin sol tarafını gösteriyor) elimizde 4 kare var ama oluşturmamız gerek 3 kare var. Yani içerde oluşturmamız gerekseydi kareleri olabilirdi belki ama ben şekli tutturamadım bi türlü burda asıl problem o.*

A: *Yani illa ayrı ayrı 4 kareyi birleştirip 3 kare elde etmen gerekiyordu öyle mi?*

Y: *Evet hocam belki içinden çıkararak yapabilirdim ama olmadı.*

A: *Sayılar yazmışsın çiziminin üzerine birimlerden yararlandın mı burda?*

Y: *Evet hocam sayı vererek denemiştım başta şekilleri doğru tutturmak için.*

Yiğit ifadede eşitliğin sol ve sağ tarafında farklı sayıda kare içeren ifade olduğunu belirtmiş, bu nedenle uygun şekilde birleştirme yapamadığını ifade etmiştir. Şekilleri doğru bir şekilde birleştirebilmek için sayılar vererek denemeler yaptığı görülmüştür.

Tablo 6'da her öğrencinin hangi ifadenin Gİ'sini geliştirmeye çalıştığı gösterilmektedir. Bu tablodaki veriler yalnızca öğrencilerin hangi ifadeler üzerinde çalıştıklarını belirtmektedir.

Tablo 6

Öğrencilerin 1.Gİ Geliştirme Aşamasında Üzerinde Çalıştıkları İfadeler

	1.İfade	2.İfade	3.İfade	4.İfade
İrem	√	√	√	
Görkem	√		√	√
Deniz	√	√	√	
Emre	√	√		√
Efe		√		√
Yiğit	√			√

Tablo 3'e bakıldığında Efe ve Yiğit'in 2 tane ifadenin Gİ'sini geliştirmeye çalıştıkları diğer öğrencilerin 3 tane ifadenin Gİ'sini geliştirmeye çalıştığı

görülmektedir. Öğrencilerle yapılan klinik görüşmelerde ilk olarak geliştirmek için seçtikleri ifadeleri seçme nedenleri sorulmuştur. Buna yönelik verdikleri cevaplar aşağıda sunulmuştur:

İrem: Sırayla başladım, hepsini denemek isterdim ama sürem ilk 3'üne yetti.

Görkem: Kâğıdı aldığımda ilk 3 boyutlu olanı yani küplü ifadeyi yani küplü ifadeyi geliştirmeye çalıştım.

Araştırmacı: Neden?

Görkem: Küpte daha iyiyim diye düşünüyorum, 3 boyutlu düşünmem daha gelişmiş. Mesela üçgenli bir soru vardı. Nasıl yapsam diye düşündüm, öyle mi böyle mi yapsam diye.

Araştırmacı: 2. İfadeyi mi kastediyorsun? Neden üçgenli olduğunu düşündün?

Görkem: Evet 2. İfade. Birkaç tane üçgenin birleşiminden oluşturabilirdi. Birşeyle birşeyi çarpıp 2'ye bölüyoruz ya o yüzden belli zaten üçgenli olur bu diye düşündüm.

Araştırmacı: Başka türlü olamaz mıydı?

Görkem: Benim aklıma sadece üçgen geldi. Belki çember falan da olabilirdi ama yapamadım hiç bişey. Sonra 1'yi yaptım kolay göründü. Sonra 4'le uğraştım ama çıkaramadım.

Deniz: Önce 2.'den başladım nedenini bilmiyorum, gözüme güzel göründü. Sonra ilk ifadeye baktım sonra 3.'yü çizdim. 4.'ye bakamadım uzun görünüyordu daha zor geliştirilir diye düşündüm.

Emre: Sırayla başladım uğraşmaya aslında 1.'yi yaptım, 2.'de tam sonuca ulaşamadım, 3.'yü 3 boyutlu olduğu için çizemeyeceğimi düşündüm o yüzden 4'ü yaptım.

Araştırmacı: 3.'nün 3 boyutlu olduğunu ve bu yüzden çizemeyeceğini söyledin. Nasıl olmalıydı tarfi edebilir misin? Ya da başka türlü olamaz mıydı?

Emre: Kesinlikle 3 boyutlu olacağını düşünüyorum, n^3 var ifadede. O yüzden n 'lik bir küp alıp köşesinden 1'lik bir küp çıkarıp kalanları bölerek bulabilirdim gibi, denemek lazım, büyük ihtimalle çıkar.

Efe: 2 ve 4 daha ilgi çekici geldi bana o yüzden onlarla uğraştım. 1 ve 3 daha kolay geliştirilebilir gibiydi.

Araştırmacı: 1. ve 3. ifadeler için geliştirseydin nasıl geliştirirsin peki?

Efe: 1. için kare çizdim yine kare olduğundan çıkarılanı alandan çıkarırdım. bu tarz bişey yapardım. 3. için küp çizebilirdim, 3 boyutlu bir şekil çizmemiz gerekir diye düşünüyorum.

Araştırmacı: Başka türlü olamaz mıydı 3. 'ü?

Efe: Bilmiyorum, şuan aklıma başka bir şey gelmedi.

Yiğit: Hocam ilk başta 4. 'ye başlamıştım direk, dedim bu zor galiba bunu yaparsam zaten diğerlerini de yaparım bir şekilde. Uğraştım baya baktım 4 olmayınca zaman da az kalmıştı, 1 'i yapayım dedim. 1 kolay olduğu için.

Araştırmacı: Peki 2. ve 3. ifadeler üzerinde uğraşsaydın nasıl geliştirirdin?

Yiğit: 2.si için üçgen olması gerekir diye düşünüyorum $\frac{1}{2}$ olduğu için, 3. de kesin küp çizdim n^3 olduğundan. İçinden küp çıkarırdım heralde. Ama onu çizmem zor olurdu 3 boyutlu olduğu için.

Öğrencilerin yanıtlarına bakıldığında 3. ifade için Gİ geliştirmeyen Emre, Efe ve Yiğit'in bu ifadenin 3. dereceden bir üs içermesinden dolayı, 3 boyutlu bir şekille doğrulanacağını düşündükleri görülmüştür. Emre ve Yiğit bu konudaki açıklamalarında kesinlik ifadesi kullanmışlardır. 2. İfade için Gİ geliştirmeyen Görkem ve Yiğit de bu ifadenin içerisinde $\frac{1}{2}$ çarpanı yer almasından dolayı Gİ'sinin üçgenden oluşacağını düşündüklerini belirtmişlerdir. Bazı ifade yapılarının, öğrencilerin Gİ'lerin şekillerindeki düşüncelerini sınırlandırdığı söylenebilir. Deniz ise 4. ifadenin uzun olmasından dolayı Gİ'sinin daha zor geliştirileceğini düşünmüştür. Genel olarak öğrencilerin hangi Gİ'yi geliştireceklerine karar vermelerinde: ifadelerin veriliş sırası, ifadenin Gİ'siyle ilgili yaptıkları ön çıkarımlar, ifadenin ilgi çekici gelmesi, ifadenin uzun/kısa olmasından dolayı zor/kolay olduğunu düşünmeleri gibi etmenlerin etkili olduğu görülmüştür.

1. Gİ Geliştirme Aşamasında Belirlenen Hatalar ve Zorluklar

Gİ geliştirme sürecinde yapılan hatalar ve karşılaşılan zorluklar ön analizler ve öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler doğrultusunda belirlenmiştir. Bu hata ve zorluklar *Gİ'lerin anlaşılabilirliği* ve *Gİ geliştirme süreci* olarak iki ana temaya ayrılmış bu temalar altında 11 alt tema belirlenmiştir (Tablo 7). Bu bölümde belirlenen temaların açıklamaları ve örnekleri sunulmuştur.

Tablo 7
1. Gİ Geliştirme Sürecinde Belirlenen Hatalar ve Zorluklar

Temalar	Alt Temalar	Öğrenciler
Gİ'nin Anlaşılabilirliği	Tarama Yapmama	Yiğit [1.1]
	Hatalı Tarama Yapma	İrem [1.1], İrem [1.2]
Gİ Geliştirme Süreci	Adımlama Yapmama	Yiğit [1.1], Efe [1.2], Deniz [1.1]
	Hatalı Birleştirme	Görkem [1.1]
Gİ Geliştirme Süreci	Geliştirilen Gİ ifadesini unutma	Deniz [1.2]
	Oluşturulan Çizimden İfadeye Ulaşamama	Efe [1.2], Efe [1.4]
Gİ Geliştirme Süreci	Zihindeki Kâğıda Yansıtamama	Deniz [1.1], Görkem [1.4]
	Üç Boyutlu Çizim	İrem [1.3], Emre [1.3], Yiğit [1.3]
Gİ Geliştirme Süreci	Gİ'lerin Tek Şekilde Oluşturulabileceğini Düşünme	Emre [1.3], Yiğit [1.3], Görkem [1.2]
	Kağıt Yetersizliği	İrem [1.2]
Gİ Geliştirme Süreci	Kontrol Etmeme	Efe [1.4], Deniz [1.2], Görkem [1.1], İrem [1.1]

Gİ'nin anlaşılabilirliği: Bu tema altında öğrencilerin geliştirdikleri Gİ'lerin anlaşılması aşamasında gözlemlenen hata ve zorluklar kategorize edilmiştir.

-Tarama yapmama: Şekil üzerinde gösterilmek istenilen alanı taramama.

-Hatalı tarama yapma: Şekil üzerinde gösterilmek istenilen alandan başka alanı tarama.

-Adımlama yapmama: Gİ üzerinde göstermek istediği tüm işlemleri tek şekil üzerinde göstermeye çalışma.

-Hatalı birleştirme: Oluşturulan şekil parçalarını birleştirirken hata yapma.

-Geliştirilen Gİ ifadesini unutma: Öğrencinin hangi ifadenin Gİ'sini geliştirdiğini unutarak şeklini oluşturması.

Gİ geliştirme süreci: Bu tema altında öğrencilerin Gİ geliştirme sürecinde yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar kategorize edilmiştir.

-Oluşturulan Çizimden İfadeye Ulaşamama: Öğrencinin Gİ'nin şeklini oluşturduktan sonra hedeflenen ifadeye ulaşamaması (oluşturduğu şekil üzerinde hangi parçanın çıkarılıp hangi parçanın elde edileceği konusunda sıkıntı yaşaması).

-Zihindeki Kâğıda Yansıtamama: Öğrencinin klinik görüşmede açıkladığı düşüncesini çizimine aktarmada yaşadığı zorluk.

-Üç Boyutlu Çizim: 3 boyutlu şekil kullanmayı gerektiren Gİ'lerin çiziminde yaşanan zorluk.

-Gİ'lerin Tek Şekilde Oluşturulabileceğini Düşünme: Öğrencinin ifadenin yapısından dolayı Gİ'sinin tek şekilde oluşturulabileceğini düşünmesi.

-Kâğıt Yetersizliği: Kâğıdın sınırlı alana sahip olmasından dolayı ek çizim yapmama.

-Kontrol Etmeme: Oluşturduğu Gİ'nin ifadeyi sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeme.

Belirlenen temalar ve alt temaların açıklamaları verilmiştir. Temalardaki hataların ve zorlukların hangi öğrencinin görüldüğü Tablo 7'de verilmiştir. Öğrencilerin en fazla üç boyutlu çizim konusunda zorlandıkları ve geliştirdikleri Gİ'leri kontrol etmedikleri için hataya düştükleri görülmüştür.

4.2.1 İkinci Öğretim Sürecinden Elde Edilen Bulgular

İkinci Öğretim Süreci

Birinci Gİ geliştirme aşamasının ardından ikinci öğretim süreci planlanmıştır. Öğrencilerin, algı aşaması, birinci öğretim bölümü ve birinci Gİ geliştirme sürecini deneyimledikten sonra Gİ'leri anlama konusunda ilerleme kaydettikleri görülmüştür. Geliştirdikleri Gİ'lerin bazılarının anlaşılabilirliklerinde (adımlama yapmama, tarama yapmama, hatalı tarama yapma vb.) gibi problemler olduğu görülmüştür. Bu nedenle bu aşamada Gİ'si verilen ifadeleri nasıl doğruladıklarının tartışılmasının yanı sıra Gİ'nin olduğu, görsel ispatların yapıları, anlaşılabilirlikleri ve genellenebilirlikleri üzerine de tartışmalar yapılması planlanmıştır. Tartışmaya sunulan Gİ sayısı da ilk aşamaya

göre arttırılmıştır. İkinci Gİ geliştirme aşamasının eşitsizlikler ve tam sayıların toplamı konularıyla ilgili olması planlandığından ikinci öğretim bölümünde bu konularla ilgili Gİ'ler üzerine tartışılmıştır.

İkinci öğretim bölümü; araştırmacının öğrencilere, bu zamana kadar inceledikleri ve geliştirmeye çalıştıkları diyagramların görsel ispat/sözsüz ispat (proofs without words) şeklinde adlandırıldıklarını anlatmasıyla başlamıştır. Araştırmacı bu ispatların matematikçiler tarafından uzun yıllardır geliştirildiğinden ve bu Gİ'lerin derlemelerinin olduğu kitapların varlığından bahsetmiştir. Daha sonra araştırmacı tarafından öğrencilere, “*Bu zamana kadar birçok örneğini gördünüz. Sizce nedir görsel ispat bir tanımlama yapmak istesek nasıl tanımlardınız?*” şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Aşağıda bu soru üzerine sınıfta geçen diyaloglardan bir kesit sunulmuştur:

Görkem: Karmaşık bir denklemin öğrencide akılda kalacak şekilde gösterilmesidir.

Araştırmacı: Sadece gösterilmesi mi peki?

Yiğit: İspatlanması.

Emre: Bir matematiksel ifadenin, sayısal veya cebirsel ifadeler kullanılmadan geometrik şekillerle doğruluğunun kanıtlanması ya da ifade edilmesi.

Efe: Evet şekiller kullanılarak yaptığımız ispatlar.

İrem: Kelime ve sayı kullanmadan bir şeyi ispatlamak.

Araştırmacı: Kelime ve sayı kullanmıyorsak nasıl oluşturuyoruz peki bu ispatları?

Yiğit: Çember, dikdörtgen, kare, 3 boyutlu şekiller kullanılarak oluşturabiliyoruz.

Öğrencilerin verdiği yanıtlara bakıldığında genel olarak Gİ'nin ne olduğunu anladıkları söylenebilir. En kapsamlı tanımı Emre'nin yaptığı görülmektedir. Görkem'in tanımında “*öğrencide akılda kalacak şekilde*” ifadesini kullanarak, Gİ'nin öğretimsel yönüne vurgu yaptığı anlaşılmaktadır. Görkem'in bu ifadesine ek olarak; *aslında öğrenciye bunu direkt versek kendi anlasa çok daha kolay olur*” şeklinde bir açıklama daha yapmıştır. Bunun üzerine araştırmacı Görkem'e, bu açıklamasını, görsel ispat geliştirmenin zor olduğunu düşündüğü için mi yaptığını sormuştur. Görkem bu soruyu, “*Evet hocam anlaması geliştirmekten çok daha kolay*” şeklinde

yanıtlamıştır. İrem'in tanımı üzerine araştırmacı Gİ oluşturulurken kullanılan şekillerin farklılıklarına dikkat çekmek için bu ispatların nasıl oluşturulduğunu sormuştur. Yiğit de Gİ çiziminde kullanılan geometrik şekillerden birçoğunu belirtmiştir.

Bu tartışmadan sonra 1'den n 'e kadar olan sayıların toplamını gösteren ilk Gİ örneği sınıf tartışmasına sunulmuştur (EK-3). Öğrencilerin bu Gİ'yi, zorlanmadan anlayabildikleri görülmüştür. Bunun üzerine araştırmacı Gİ'nin genellenebilirliğine dikkat çekmek için sorular yöneltmiştir. Öğrenciler nihayetinde verilen Gİ'nin genellenebilir olduğu sonucuna varmışlardır. Aşağıda Gİ üzerine yapılan tartışmadan bir kesit sunulmuştur:

Araştırmacı: Ne yapmış bu Gİ'de?

Efe: Burası 1'den n 'e kadar gidiyor.

Emre: 6, n olmuş burda.

Araştırmacı: Burada 6'ya kadar göstermiş ya mesela, ben bu sayıyı daha da arttırabilir miyim?

Emre: Kâğıt yetmez tabi ama büyütebiliriz, devam eder böyle şeklin yapısını bozmaz.

İrem: Devam edebilir istediğimiz kadar, zaten başlangıçları belli.

Görkem: n 'e kadar boncuk koymuş alt alta. n 'e $n+1$ olmuş. Ya bu şeye benziyor hocam bir tane küplü olan bakmıştık ya ona [Algı aşamasında kullanılan 3.Gİ'yi kastediyor].

Araştırmacı: Hangi açıdan benziyor?

Görkem: Onda da üzüm gibi aşağıya doğru kareleri ekliyorduk, bunda da boncukları aynı şekilde eklemiş ve birleştirmiş.

Öğrencilerin şeklin genellenebilirliği konusunda hem fikir oldukları görülmektedir. Görkem bu Gİ'yi, algı aşamasında incelenen 1'den n 'e kadar olan sayıların kareleri toplamı için oluşturulmuş Gİ'ye benzetmiştir. Öğrencilerin incelenen Gİ'lerin oluşturulma mantıkları arasında benzerlik kurmaları, Gİ'lerin yapılarını anlama konusunda ilerleme kaydettiklerini göstermektedir. Bu tartışmaların ardından 1'den n 'e kadar olan sayıların kareleri toplamını gösteren 2. Gİ örneğine geçilmiştir (EK-3).

2.Gİ örneğini ilk gördüklerinde öğrencilerin bu Gİ'yi çok beğendiklerini gösteren söylemleri olmuştur. Efe, Gİ'nin nasıl oluşturulduğunu açıklarken, Deniz, şekillerin birleştirilmesindeki mantığı anlayamadığını ifade etmiştir. Bunun üzerine araştırmacı diğer öğrencilerin bunu açıklamalarını istemiştir. Son olarak da ifadeyle hacim ilişkisini kurup kuramadıklarını anlamak amacıyla sorular yöneltilmiş ve öğrencilerin bu Gİ'yi anladıkların emin olunduktan sonra bir sonraki Gİ'ye geçilmiştir. Aşağıda bu Gİ'nin sınıf tartışması süresince geçen diyaloglardan bir kesit sunulmuştur:

Araştırmacı: Ne yapmış bu Gİ'de?

Efe: Bu efsane olmuş hocam.

Emre: Çok güzel hocam ya.

Efe: Burda ilk şekilde kareler toplamını yapmış 4-9 diye gidiyor, sonra altta da yapmış. Sonra bunları 3 farklı şekilde birleştirmiş. Sonra bunun simetriğini almış üstüne koymuş.

Deniz: Nasıl böyle koymuş gerçi tam anlamadım ben hocam?

Araştırmacı: Deniz'in sorusunu yanıtlamak isteyen var mı?

Emre: Şimdi eğer böyle birleştirirse dikdörtgenin tam yarısı olacak yani prizma elde edicek.

Yiğit: Alan kullanmış burda.

Araştırmacı: Nasıl alan kullanmış?

İrem: Alan değil hacim kullanmış.

Araştırmacı: Son çarpım ifadesi ne oluyor burda yani?

Deniz: Hacmi oluyor prizmanın.

Efe: Hatta burda bölü 6'yı da açıklamış oluyor.

Yiğit: 6'ya bölüme getirmek için napmış önce?

Emre: 3 tane olunca böyle [sondan bir önceki adımı gösteriyor], 6 tane olunca böyle prizma oluyor vay be [son adımı gösteriyor]!

[Görkem de açıklama yapmak istediğini ifade ediyor]

Görkem: Şimdi önce küplerin görüntülerini çok farklı şekilde değerlendirmiş.

Üzümsel bir şey yapmak istemiş, bu şekilleri elde etmiş. Pürüzsüz bir 3 boyutlu cisim elde etmek için bu şekilde tamamlamış.

Yukarıdaki diyaloglardan tüm öğrencilerin Gİ'yi anlayıp açıklamaya çalıştığı görülmektedir. Yiğit'in Gİ'de alan kullanıldığını söylemesi üzerine araştırmacı bu

düşüncesini açıklamasını istemiş ve İrem hacim kullanıldığını belirterek Yiğit'in hatasını düzeltmiştir. Böylece öğrencilerin sorularını birbirlerinin cevaplamaları sağlanmış, Gİ'yi tüm öğrencilerin araştırmacının açıklama yapmadan anlaması sağlanması amaçlanmıştır. Ardından geometrik ortalamanın, aritmetik ortalamadan küçük ya da eşit olduğunu yarım çember üzerinde gösterildiği 3. Gİ'ye geçilmiştir (EK-3). Araştırmacı tarafından öğrencilerden bu eşitsizliği yorumlamaları istenmiş ve bu soruya Görkem ve Emre'den iki farklı yanıt gelmiştir. Görkem, *"Karesini alıp düzenlediğimizde bir sayının karesinin her zaman 0 ya da büyük eşit olduğunu gösterir."* şeklinde bir yorum da bulunmuş, araştırmacının, *"İfade üzerinde cebirsel düzenleme yapmadan yorum yapmak istesek nasıl yorumlarız?"* sorusu üzerine Emre, *"biri iki sayının ortalaması, diğeri de geometrik ortalaması oluyor. Yani aritmetik ortalamasının geometrik ortalamadan büyük ya da eşit olduğunu gösteriyor."* şeklinde bir yorum yaparak hedeflenen açıklamayı yapmıştır. Ardından Gİ'nin eşitsizliği nasıl doğruladığı, küçük veya eşit olduğu durumunun her koşulda nasıl sağlandığı üzerine sınıf tartışması yapılmıştır. Tartışmanın bu bölümde geçen diyaloglardan bir kesit aşağıda sunulmuştur:

Araştırmacı: Nasıl sağlıyor Gİ, eşitsizliği?

Deniz: Çok güzel olmuş bu da ya. Ben direkt bakınca, öklidi gördüm burda zaten.

İrem: Çapı gören açıdan gelecek.

Deniz ve İrem'in açıklamaları eşitsizlikte verilen $\sqrt{ab}$ ifadesine ulaştıklarını göstermektedir.

Araştırmacı: Peki ifadedeki küçük ya da eşit olması durumu nasıl sağlanıyor? Her zaman sağlanıyor mu?

Emre: En uzun kiriş çaptır o yüzden. Çemberi tamamlarsak bu da bir kiriş olacaktır. Çaptan başka bir kiriş o yüzden her zaman küçük olacaktır. a ve b nin eşit olma koşulunda da eşit gelecek.

Yiğit: Şimdi biz bir yay etrafında şu noktayı şurdan şuraya kadar gezdirebiliyoruz [$\sqrt{ab}$ nin çembere değdiği noktayı gösteriyor]. Yani olabileceği maksimum uzunluk çap.

Küçük veya eşitlik durumunun nasıl sağlandığını Emre ve Yiğit açıklamıştır. Emre'nin çemberi tamamlama ve Yiğit'in $\sqrt{ab}$ doğru parçasını çember üzerinde hareket ettirme düşüncesi, verilen Gİ şekli üzerinde olası durumlar için

manipölasyonlar yaparak çıkarımlar yapabildiklerini göstermektedir. Ayrıca öğrenciler bu Gİ’de, birinci öğretim aşamasında sunulan çemberle oluşturulmuş Gİ’deki gibi “*Bu çemberin merkezi neresi? Şekilde gördüğümüz çap mı?*” gibi sorular yöneltmemişlerdir. Buradan da öğrencilerin, Gİ’leri algılama konusunda ilerleme kaydettikleri söylenebilir.

4. Gİ örneğinde, Guha eşitsizliği (Guha's Inequality) olarak geçen, 4 değişkenden oluşan bir eşitsizliğin Gİ’si verilmiştir (EK-3). İlk verilen eşitsizlik ifadesinin Gİ’si yarım çemberden oluşturulmuşken bu Gİ, iki dikdörtgenin alanları kullanılarak oluşturulmuştur. Bu Gİ’nin seçilmesinin bir amacı da öğrencilerin karışık ve uzun görünen ifadelerin Gİ’lerinin oldukça basit bir şekilde oluşturabildiğini görmelerini sağlamaktır. Bu Gİ için de, verilen ifadeyi nasıl doğruladığının tartışılmasının yanında, şeklin anlaşılabilirliği konusuna dikkat çekmek için alanların nasıl tarandığına araştırmacı tarafından dikkat çekilmiştir. Aşağıda bu Gİ’nin sınıf tartışması süresince geçen diyaloglardan bir kesit sunulmuştur:

Araştırmacı: Ne yapmış bu Gİ’de sizce?

Görkem: Burda x ’i y ’den büyük alarak alan oluşturmuş hocam. Eşit de olabilirdi.

Efe: Bişey farketmezdi. İfadede x ve y yer değiştirmiş burda, altta da aynısını yapmış [Gİ’yi göstererek] o yüzden. Zaten burda diyo x büyük y diye şekilde de öyle almış.

Deniz: Ordaki boşluk mu arta kalan fazlalık, büyük olmasını sağlayan?

Emre: Evet diğer alanların hepsi var o boşluk olan kısım büyüklüğü sağlıyor.

Deniz: Şey örneğine benzemiş hocam bu hani bir çikolatayı kesiyor da aynıymış gibi görünüyor hiç bitmiyor, fazlalık oluşuyor, onun gibi buradaki fazla alan da.

Araştırmacı: Burda şekildeki alanların anlaşılır olması için ne yapmış?

Emre: Farklı şekillerde taramış alanları.

Yukarıda geçen diyalogta, Görkem şeklin x ’in y ’den büyük olduğu durum için çizildiğini belirtmiş, eşitlik durumu ihtimalini de göz önünde bulundurmıştır. Deniz ise Gİ’yi sonsuz çikolata örneğine benzetmiştir. Öğrencilerin Gİ’ler üzerinde farklı durumları göz önünde bulundurabildikleri ve çeşitli benzetmeler yapabildikleri görülmektedir. Şekilde anlaşılabilirliği nasıl sağladığına yönelik araştırmacının sorusunu Emre yanıtlamıştır. Bu Gİ’nin ardından, yine tam sayıların toplamıyla ilgili bu

bölümde tartışılan 1. ve 2. Gİ'den farklı yapıda bir Gİ örneği verilmiştir (EK-3). Bu Gİ örneğinde verilen ifade dikdörtgenin alanının 3'te 2'sini oluşturan koyu renkli gösterilmiş alandan bulunmaktadır. Dikdörtgenin içine hangi alanı ifade ettiğine dair sayılar yazılmış, genel toplamaların ve çarpımların aynı şekilde ifade edildiği şekillerin içerisine üç nokta koyularak belirtilmiştir. Bu Gİ üzerine yapılan sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur:

Araştırmacı: Bu Gİ nasıl oluşturulmuş?

Deniz: 1+2 dediği burda kare sayısı mı?

Araştırmacı: Öyle de düşünebilir, küçük karelere bölmüş gibi.

Efe: Bu 3.4 dediği koyu alanların tamamı mı?

Araştırmacı: Evet, koyu dikdörtgenler $n(n+1)$ formunda.

[İrem açıklama yapmak istediğini belirtiyor]

İrem: Burası 1, burası 2 oluyor [Şekildeki 1 ve 1.2'lik alandan oluşan en küçük dikdörtgeni gösteriyor]. Şu kenar $n+2$ 'yi veriyor. Aşağısı da n çarpı $n+1$ bölü 2'ye denk geliyor. Baktığımızda bu koyu taralı alan bu küçük dikdörtgenin 3'te ikisi oluyor. Tüm alan $(n+2)(n)(n+1)/2$ olur. Bunun 3'de 2'si de koyu alanı yani $n.(n+1)$ 'i verir.

Araştırmacı: İrem, küçük dikdörtgenden yola çıkarak tüm şekle genelledi ifadeyi, sizce de genellebilir miyiz bu şekilde?

Emre: Genellebiliriz hocam mantıklı İrem'in söylediği.

Bu Gİ'de tam sayıların toplamıyla ilgili diğer Gİ'lerde olduğu gibi birim kareler ya da birim küpler kullanılmamıştır. Deniz'in "1+2 kare sayısı mı?" sorusundan Gİ'yi alışkın olduğu formda yorumladığı düşünülmektedir. İrem ise Gİ'nin açıklamasını en küçük dikdörtgen yola çıkarak yapmıştır. Belirli bir sayıya kadar oluşturulan Gİ örneklerinden dolayı bu eğilimin olduğu düşünülmektedir. Araştırmacı son olarak öğrencilere, "Gördüğünüz gibi birçok farklı şekilde görsel ispat oluşturulabiliyor, sizce bir sınıflama yapabilir miyiz?" şeklinde bir soru yöneltmiştir. Yiğit ve Emre ve Gökçe'den bu soruya yönelik açıklama gelmiştir. Yanıtları aşağıda sunulmuştur:

Yiğit: Bence evet. 3 boyutlu olanlar 2 boyutlu olanlar.

Emre: Benim farkettiğim 1 boyutlu var, 2 boyutlu var 3 boyutlu var. 1 boyuttakiler uzunlukla alakalı, 2 boyuttakiler alanla alakalı diğeri de hacimle alakalı oluyor.

Gökçe: Evet tek boyutlu olanlar da var, benzerlik falan kullandığımız.

Emre, Yiğit'in açıklamasına “1 boyut” kategorisini de ekleyerek detaylandırmış, Gökçe de, Yiğit'in ifade etmediği tek boyutlu kategorisini Emre'nin söylemesi üzerine benzerliğin kullanıldığı Gİ'leri hatırlayarak onaylamıştır. Bu açıklamalar üzerine araştırmacı Alsina ve Nelsen'in (2006) Math Made Visual kitabında yer alan, sayıların Gİ'lerde nasıl ifade edildiğine yönelik 4 kategoriye açıklamıştır. Bunlar; 1-sayıların grafiksel nesnelerle temsil edilmesi (nokta, küre vb.), 2- sayıların doğru parçalarıyla temsil edilmesi, 3- sayıların düzlemsel şekillerin alanlarıyla temsil edilmesi, 4- sayıların nesnelerin hacimleriyle temsil edilmesi, olarak belirtilmiştir. Her Gİ'nin ardından araştırmacı, Gİ'yi anlamayan öğrencinin kalmadığından emin olmak için, “Bu Gİ'yi anlamayan ya da ek sorusu olan var mı?” şeklinde soru yöneltmiştir. Tüm öğrencilerin tartışılan Gİ'yi anladığından emin olunduktan sonra diğer Gİ'ye geçilmiştir. Böylece ikinci öğretim bölümü tamamlanmış ardından ikinci Gİ geliştirme bölümüne geçilmiştir.

İkinci Öğretim Bölümünün Sonunda Öğrencilerin Geliştirdiği Görsel İspatlara Yönelik Bulgular

İkinci öğretim bölümü sonunda öğrencilere tamsayıların toplamı ve eşitsizlik konularıyla ilgili 4 tane ifade verilmiş bunlardan istedikleri herhangi ikisine yönelik Gİ geliştirmeleri istenmiştir. Ardından araştırmacı tarafından geliştirdikleri Gİ'lerin ön analizi yapılmış, bu Gİ'ler üzerine her öğrenciyle klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu bölümde geliştirilen Gİ'lere ve yapılan klinik görüşmelere yönelik analizler birlikte verilmiştir.

$$1- 3(1^2+2^2+...+n^2)=(2n+1)(1+2+...+n)$$

$$2- x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$3- 1+3+5+...+ (2n-1)=n^2$$

$$4- \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

1.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği İspatlar

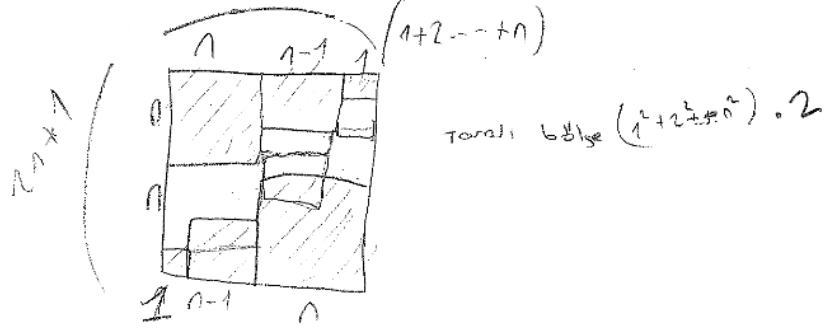
$$3(1^2+2^2+...+n^2)=(2n+1)(1+2+...+n)$$

Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler Efe, Emre, Görkem ve Yiğit olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

Efe'nin 1. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 81 ve Şekil 82'deki gibidir.

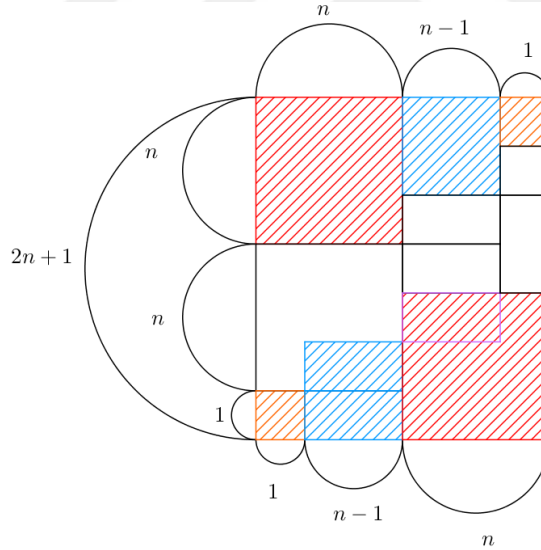
Şekil 81

Efe'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 82

Efe'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Efe'nin 1. İfade için geliştirdiği Gİ'nin tek adımdan oluştuğu ve çizimini çizgisiz kâğıt üzerine yapmış olduğu görülmektedir. Efe, eşitliğin sağ tarafındaki çarpımı elde edebilecek şekilde bir kenarı $(2n+1)$ uzunluğunda diğer kenarı $(1+2+\dots+n)$ uzunluğunda olan bir dikdörtgen oluşturmuştur. Bu dikdörtgenin alt ve üst tabanına bir kenarı 1'den n 'e kadar artan kareler yerleştirmiştir. Bu sayede eşitliğin sol tarafında verilen 1'den n 'e kadar olan sayıların kareleri toplamından 2 tane elde etmiştir. Ancak istenen 3 tane bu toplamdan elde etmesidir. Dikdörtgenin içerisinde

geriye kalan alandan yine bu toplamın elde edilebileceğini göstermek için dikdörtgenin alt tarafında oluşturduğu karelerden parçalar taşıyarak yukarıdaki karelere yapıştırmayı düşündüğü görülmektedir. Ancak Efe'nin çiziminde bu taşıma işleminin nasıl olduğu tam olarak anlaşılamamaktadır. Efe'yle yapılan görüşme, Gİ'sini geliştirirken nasıl düşündüğünü açıklamasına ve Gİ'sini daha anlaşılır hale getirmek için çözüm üretmesini sağlamaya yönelik yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Bu görsel ispatı geliştirirken nasıl düşündün açıklayabilir misin?*

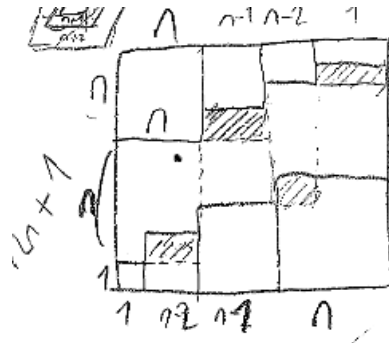
E: *Kareler toplamını yerleştirebileceğim bir dikdörtgen oluşturmaya çalıştım. İlk başta dizilimleri farklı yapmıştım aslında daha düzenli yapabilir miyim diye baktım. Ama olmadı. Bu iki ifade eşitse bu alanların da eşit olması gerekir diye düşündüm, sonra bu şekilde çizip taşıma yapılırsa yine kareleri elde ederiz dedim. Kötü çiziyorum biraz ama.*

A: *Burada yaptığın taşıma pek anlaşılmıyor daha anlaşılır hale getirebilir miydin?*

E: *Bilmiyorum hocam, kesikli falan çizip üstte eklediğim yeri tarayabiliriz. Kağıdımın bir yerinde yapmaya çalışmıştım (Şekil 83'deki çizimini gösteriyor). Sonra temize geçirirken daha sade olsun dedim.*

Şekil 83

Efe'nin 2 Aşama 1. Gi İçin Yaptığı Diğer Çizim



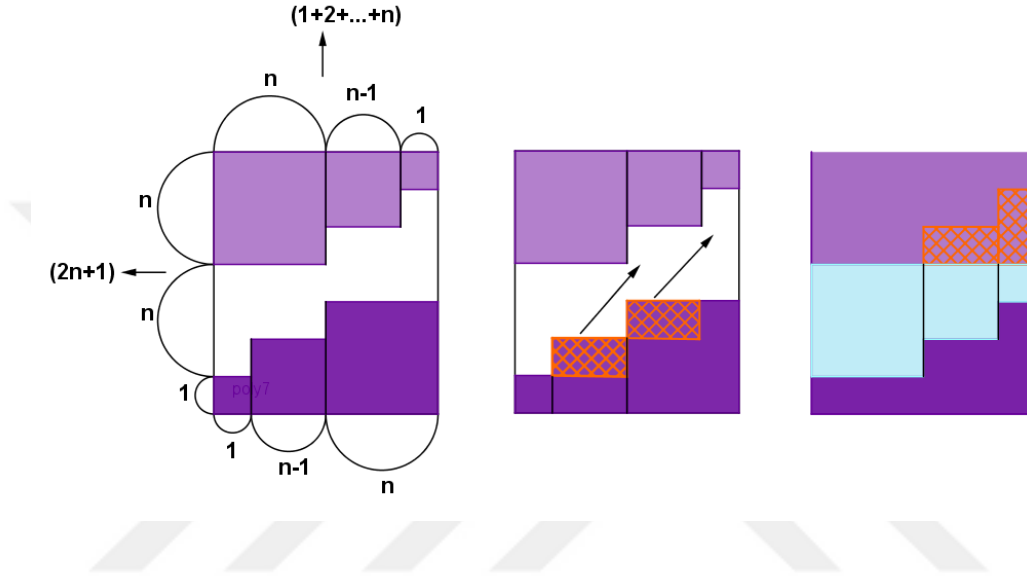
A: *Burda taşıma şekli anlaşılıyor biraz daha. Ama kalan alanın 1'den n' kadar sayıların toplamı olduğu tam görünmüyor. Onu nasıl gösterebilirdin?*

E: *Bir tane daha çizip taşınmış halini gösterebiliriz.*

Efe Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamış, anlaşılabilirlik konusunda dikdörtgenden bir tane daha çizerek kalan şeklin istenilen alana eşit olduğunu $[(1^2+2^2+\dots+n^2)'ye]$ gösterilebileceğini ifade etmiştir. Araştırmacı tarafından Efe'nin Gİ'si düzenlenerek GGB ortamına aktarılmıştır (Şekil 84).

Şekil 84

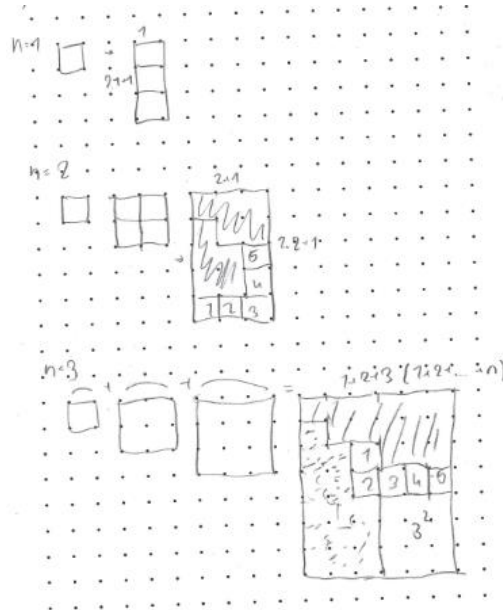
Efe'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Emre'nin 1. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 85 ve Şekil 86'deki gibidir.

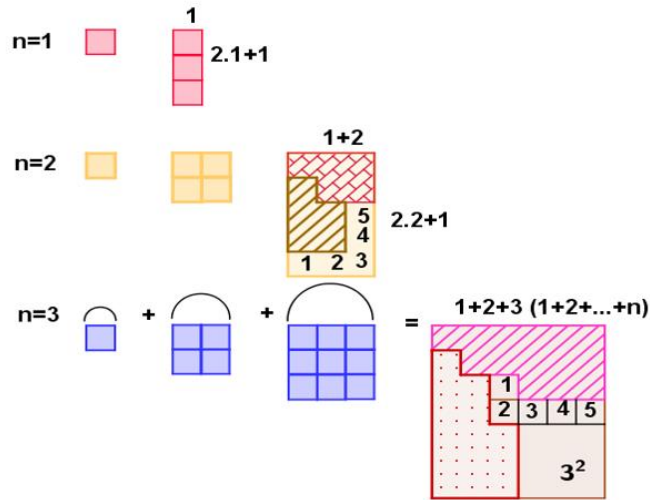
Şekil 85

Emre'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 86

Emre'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu

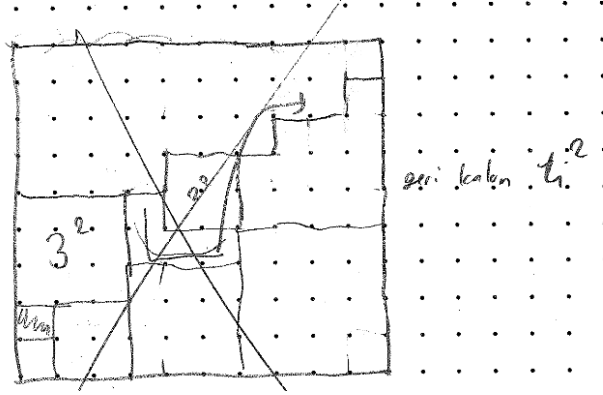


Emre'nin 1. İfade için geliştirdiği Gİ'sinde tümevarımsal bir yaklaşım sergilediği görülmektedir. Emre'nin çiziminde noktalı kâğıt kullanmayı tercih ettiği tek Gİ bu olmuştur. Emre ilk önce $n=1$ için, eşitliğin sol tarafındaki ifadede yola çıkarak sağ tarafındaki ifadeyi elde edecek şekilde bir dikdörtgen oluşturmuştur. Oluşturduğu dikdörtgenin bir kenarına $(2.1+1)$ diğer kenarına 1 yazmış, dikdörtgeninin alanı yoluyla $n=1$ için $(2n+1)(1+2+\dots+n)$ çarpımını elde etmiştir. Aynı prosedürü $n=2$ için ve $n=3$ için uygulamıştır. Dikdörtgenin içindeki alanların farklı sayıların karelerini temsil ettiğini göstermek için de parçaları farklı bir şekilde taramıştır. Emre'yle Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına, neden bu çizimde noktalı kâğıt kullandığını öğrenmeye ve n 'i belli bir sayıya kadar göstermesiyle Gİ'sinin genellenebilirliği konusunda ne düşündüğünü öğrenmeye yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Bu görsel ispatı geliştirirken nasıl düşündün açıklayabilir misin?

E: 1'den n 'e kadar sayıların karelerinin toplamının 3 katını almış ve böyle bir çarpım elde etmiş. Ben de önce 1 için nasıl oluyor, 2 için nasıl oluyor diye deneyeyim dedim. Sonra 3 için çizdim o da oldu. Dedim 4'te de oluyorsa genellenebileceğim bir şekil bulabilirim dedim. Ama 4 için çizemedim aynı şekilde. Burada denemiştım [Şekil 87'yi gösteriyor].

Şekil 87
Emre'nin $n=4$ İçin Yaptığı Gİ Denemesi



A: O zaman bu geliştirdiğin ispatın genellenebilirliğini düşürür mü? Neden olmadı sence?

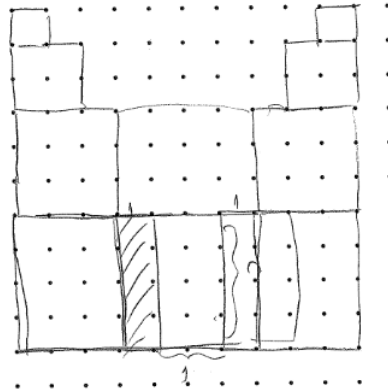
E: Şekil bozuldu karelerin toplamını birleştirerek içine yerleştiremedim. Genelleyemiyoruz bunu, ilk 3 terim için sağlıyor sadece.

A: Noktalı kâğıt kullanmışsın bunda, birimlerden mi yararlandın?

E: Evet hocam sırayla 1 birim 2 birim için çizdim hata yapmayayım diye.

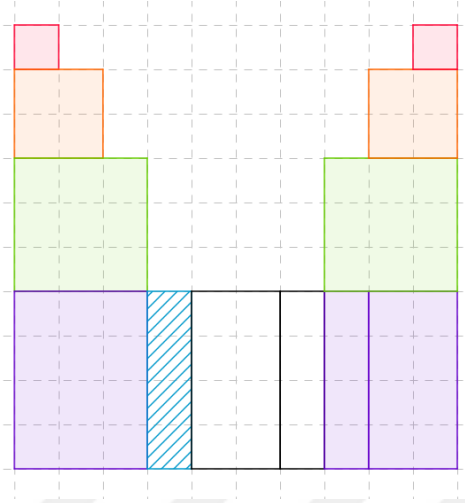
Emre Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamış, $n=4$ için de Gİ'yi oluşturmayı denediğini ancak başarılı olamadığını bu durumda Gİ'sinin her n için genellebilir olmadığını ifade etmiştir. Bu ifadenin Gİ'sini geliştirirken $n=4$ birim alan Görkem ve Yiğit'in de aynı sıkıntıyı yaşadığı, Gİ'lerini bu yüzden tamamlayamadıkları görülmüştür (Şekil 88 ve Şekil 89).

Şekil 88
Görkem'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesi



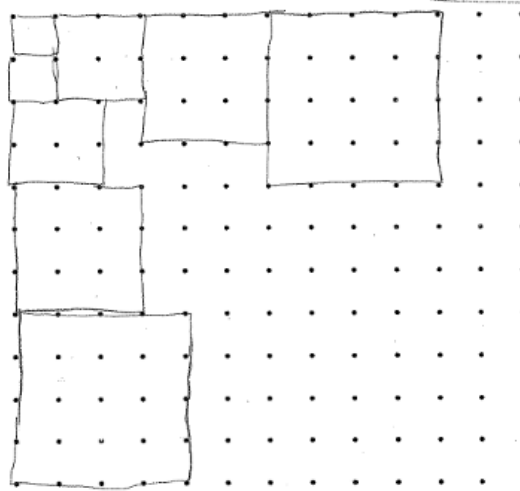
Şekil 89

Görkem'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesinin GGB Versiyonu



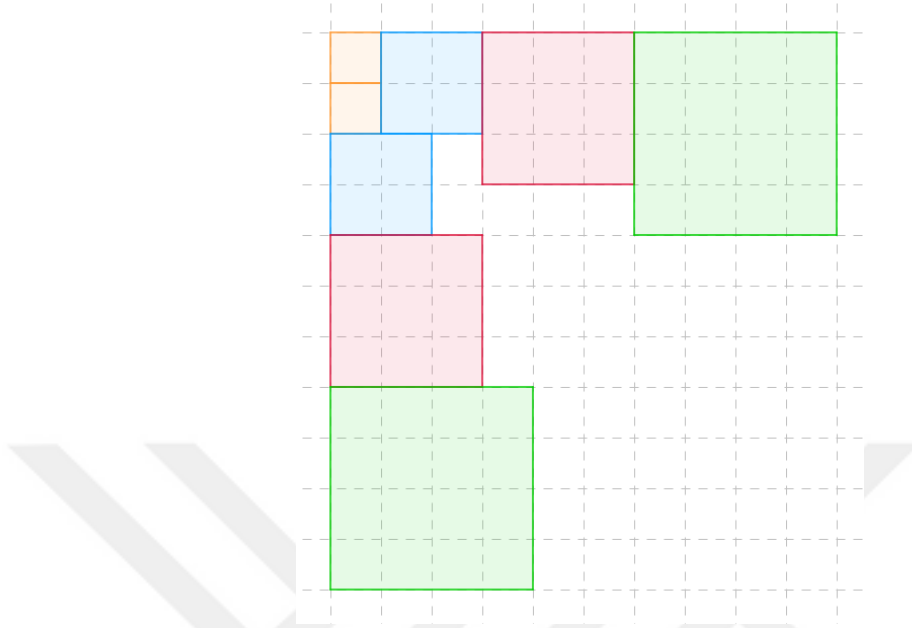
Şekil 90

Yiğit'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesi



Şekil 91

Yiğit'in 2. Aşama 1. İfade Yaptığı Gİ Denemesinin GGB Versiyonu



Görkem ve Yiğit'in 1. İfadenin Gİ'si için deneme yaptıkları ancak sonuca ulaşamadıkları görülmüştür (Şekil 88, Şekil 89, Şekil 90, Şekil 91). Bunun nedeninin Emre'nin Gİ'sinde karşılaştığı sorunla aynı olduğu görülmektedir. Noktalı kağıt kullanarak ilk 4 terim için kareler oluşturup bu kareleri birleştirerek bir dikdörtgenin içine bu birleşimden 3 parça yerleştirmeye çalışmışlardır. Ancak bu şekilde düzgün bir yerleştirme mümkün görünmemektedir. Görkem ve Yiğit'le, yaptıkları Gİ denemelerinde nasıl düşündüklerini anlatmalarına yönelik görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: 1. İfadenin ispatı için uğraşmışsın sanırım. Nasıl düşündün neden olmadı?

G: Burda aslında önce hani incelediğimiz üzüm salkımı şeklindeki ispat gibi düşünüyim dedim, uğraştım baya ama bir türlü kareleri birleştirip şu taraftaki ifadeye $[(2n+1)(1+2+...+n)]$ çarpımını gösteriyor]ulaşamadım. Neden olmadığını bilmiyorum.

A: Ne yapmaya çalışıyordun burda birleştirerek?

G: Bir kenarı $2n+1$ olsun diye düzenlemeye çalışıyordum. Dikdörtgen olunca oradan gelir belki diye ama yapıştıramadım.

A: 1. İfadenin ispatı için uğraşmışsın sanırım. Nasıl düşündün neden olmadı?

Y: 1'in karesi, 2'nin karesi, 3'ün karesi, 4'ün karesi yaptım. Bundan 3 tane yapıp $(2n+1)(1+2+...+n)$ çarpımını elde ederim bir şekilde dedim Mantıklı geldi ama yerleştiremedim olacak gibi değildi. Bıraktım ben de böyle.

A: Ama senin oluşturmaya çalıştığın şeklin kenarları zaten sağlamıyor gibi görünüyor. Bir kenarı 1'den n'e kadar olan sayıların toplamı tamam, ama diğer kenar $2n+1$ değil. Bunu rastgele mi çizdin?

Y: Doğru söylüyorsunuz hocam ondan olmamış olabilir, sanki uğraşsam biraz daha çıkarabilir gibiyim.

A: Ondan olmamış demiyorum ama nasıl birleştirme yaptığını anlayamadım tam olarak o yüzden sordum.

Y: Rastgele yapmışım burda çıkarabilir miyim diye denemişim.

Görkem'in görüşmede verilen ifadeyi 2. öğretim bölümünde incelenen tam sayıların kareleriyle ilgili tartışılan Gİ'yi düşünerek geliştirmeye çalıştığı sonra da dikdörtgen oluşturmaya hedeflediği, kenarları bilinçli olarak seçtiği görülmektedir. Ancak Yiğit, denemesinde bir kenarı $2n+1$ olacak şekilde bir çizim yapmamış ve yaptığı çizimin rastgele olduğunu ifade etmiştir.

2.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği İspatlar

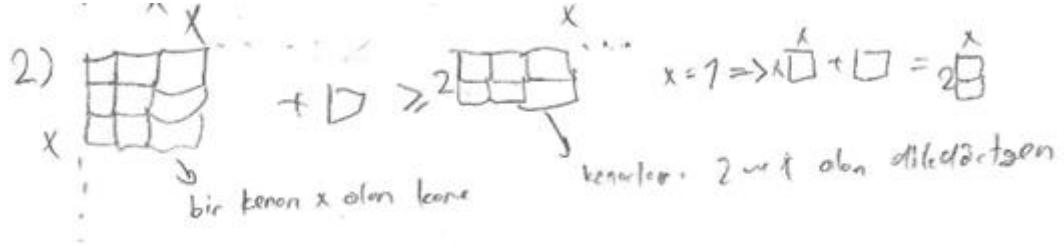
$$x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler Emre, Deniz, İrem ve Görkem olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamaları ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

Emre'nin 2. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 92 ve Şekil 93'deki gibidir.

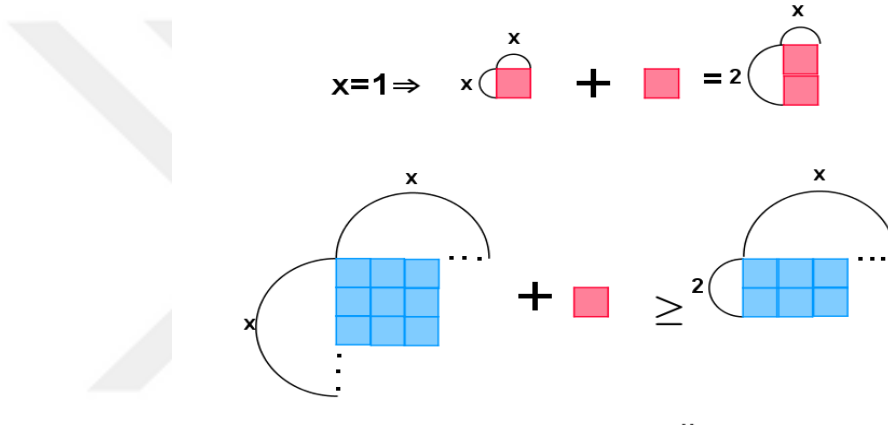
Şekil 92

Emre'nin 2. Aşama 1. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 93

Emre'nin 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Emre, verilen 2. İfade üzerinde cebirsel düzenleme yaparak $x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ ifadesi yerine bu ifadeyle özdeş $x \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$ ifadesi için Gİ geliştirmiştir. x 'in 2'den büyük olduğu durumlar için bir kenarı x olacak bir kare oluşturduğu görülmektedir. Yaptığı kare çiziminde, x 'i sınırlandırmamak için karenin kenarlarının artabildiğini göstermek için üç nokta koyduğu anlaşılmaktadır. Böylece x^2 terimini elde etmiştir. Oluşturduğu bu karenin yanına, bir kenarı 1 birimlik bir kare eklemiş ve eşitsizliğin sol tarafındaki ifadeyi göstermiştir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki $2x$ ifadesi için de, bir kenarı 2 birim uzunluğunda diğer kenarı x uzunluğunda bir dikdörtgen oluşturduğu görülmektedir. Yine uzunluğu x birim olan kenarın, uzunluğunun artabildiğini gösteren üç noktayı kullanmıştır. Böylece oluşturduğu görsel yapıda x büyüdükçe, alanı x^2 olan kare enine ve boyuna genişlerken, alanı $2x$ olan dikdörtgen yalnızca boyuna genişlediğinden, eşitsizliğin doğruluğu sağlanmış olmaktadır. Emre x 'in 1'e eşit olduğu durum için de Gİ'sinin nasıl olacağını ayrıca göstermiştir. Bu durumda da eşitlik durumu olduğu görülmektedir. Emre'nin Gİ'sinde görsel yapı için

istisnai durumu da ($x=1$ için) göz önünde bulundurarak genelleme fikrini bu şekilde yansıtması dikkat çekicidir. Emre'yle Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve ifade üzerinde cebirsel düzenleme yapmaya niye ihtiyaç duyduğunu öğrenmeye yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

E: Önce $1/x$ 'li terimi nasıl ifade etsem diye düşünüyordum sonra düzenleyince daha kolay olacağını farkettim. Sonra kolay oldu. x için çok büyük bir kare oluşturmak istedim ama yer yoktu kağıdımda ben de küçük çizip nokta nokta koyarak büyüdüğünü göstereyim dedim. x , 1 olunca eşitlik geliyordu onu da çizdim sonra.

A: Çizimini genellemek için 3 nokta koyduğunu sanmıştım.

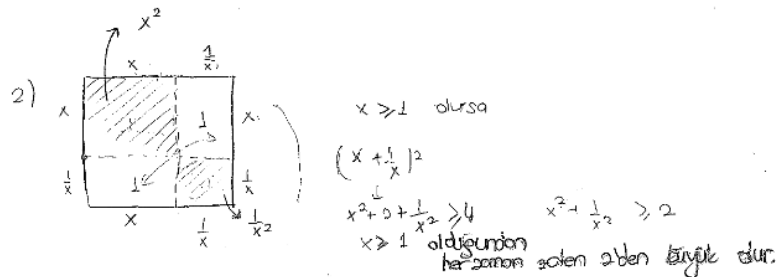
E: Başta dediğim gibi büyük bir kare çizip gösterebilseydim belki koymazdım nokta ama sonra küçük çizdim daha güzel oldu, genellemiş de oldum.

Emre kesirli bir ifade olan $\frac{1}{x}$ 'i göstermekte zorlanacağı için ifadeyi düzenlediğini ve geliştirdiği Gİ'nin bu halini de çok büyük bir kare çizemediği fikrinden yola çıkarak oluşturduğunu belirtmiştir.

Deniz'in 2. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 94 ve Şekil 95'deki gibidir.

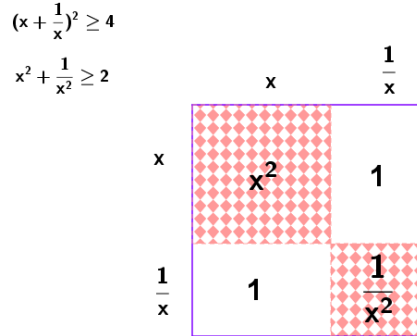
Şekil 94

Deniz'nin 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 95

Deniz'in 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Deniz'in verilen ifadenin karesini alarak $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ eşitsizliğine ulaştığı ve bu eşitsizlik için Gİ geliştirdiği görülmektedir. Bir kenarı $x + \frac{1}{x}$ olan bir kare oluşturmuş ve eşitsizliğin sol tarafında verilen alanları taramıştır. Deniz'le Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve $x=1$ durumu için çizdiği şeklin geçerli olup olmadığını sorgulamaya yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

D: Şimdi direkt bunun karesini almayı düşündüm, böyle bir kare olsaydı onun karesi nasıl olurdu diye düşündüm ve bu şekli çizdim. Böyle açtım ifadeyi karesini almışım gibi aynen kâğıda döktüm.

A: Peki bu şekilden istediğimiz eşitsizliği açıkça görebiliyor muyuz?

D: Çizimden kaynaklı bir sıkıntı mı var?

A: Sıkıntı var demiyorum açıkça görülebiliyor mu burdan $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 'nin 2'den büyük ya da eşit olduğu?

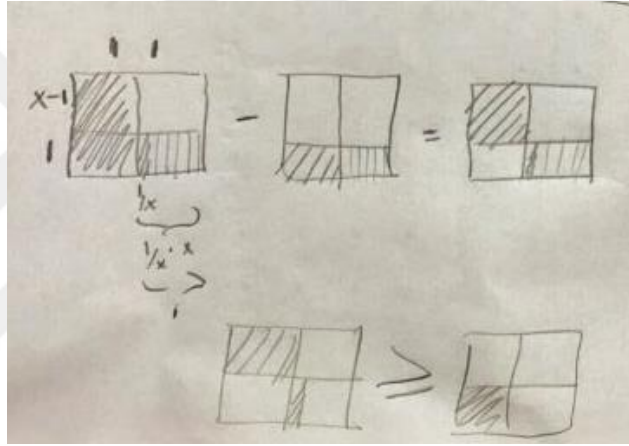
D: Eşitlik durumu da var doğru o görünmüyor burdan ama buralar 2 gelicek zaten her zaman [alanı 1 olan dikdörtgenleri gösteriyor], diğer alanlar x , 1 olduğunda eşit olacak diğer türlü büyük olacak.

Deniz de Emre gibi verilen ifade üzerinde cebirsel düzenleme yaparak Gİ'sini geliştirmiştir. Bunu yapmaktaki amacının kare oluşturmak olduğunu belirtmiştir. Karesini aldığı ifadenin açılımı verecek şekilde kenar uzunluklarını ve alanları şekil üzerine yerleştirmiştir. Deniz'in bu Gİ'deki düşünme şeklinin Emre'nin 1. Aşama'da 4. İfade için geliştirdiği Gİ'deki (Şekil 76) düşünme şekliyle benzerlik gösterdiği görülmektedir.

İrem'in 2. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 96 ve Şekil 97'deki gibidir.

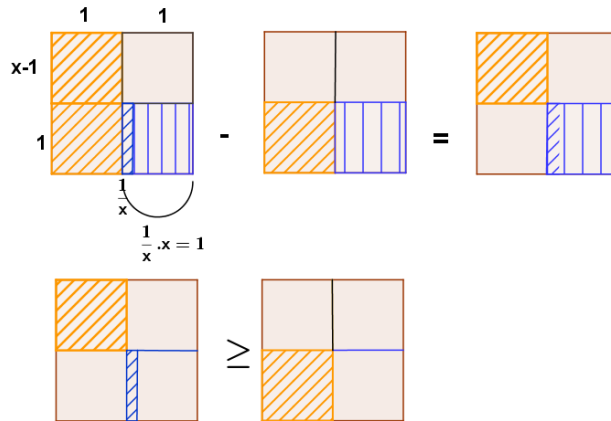
Şekil 96

İrem'in 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 97

İrem'in 2. Aşama 2. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



İrem'in 1. Gİ geliştirme bölümünde yaptığı gibi bu Gİ'de de ana bir şekil oluşturup tüm adımları bu şekil üzerinden göstermeye çalıştığı görülmektedir. İrem'in ölçekli kağıt kullanmayarak çizdiği tek Gİ budur. İrem'in bir kenarı x uzunluğunda diğer kenarı 2 birim uzunlukta bir dikdörtgen oluşturduğu görülmektedir. Bu dikdörtgenin x uzunluğundaki kenarını $x-1$ 'e 1 şeklinde, 2 birim uzunluğundaki kenarını ise 1'e 1 uzunluğuna bölmüştür. Bu dikdörtgeni bölgelere ayırdığı ve sağ altta kalan bölgeyi x parçaya bölerek ve $\frac{1}{x}$ 'lik alanı taradığı görülmektedir. İlk adımda

$x + \frac{1}{x}$ 'lik alanı taramış, 2. adımda alanı 1'lik olan bölgeyi tarayarak çıkardığını göstermiştir. Kalan alan $x - 1 + \frac{1}{x}$ olmuştur. Son olarak İrem, bulduğu $x - 1 + \frac{1}{x}$ 'lik alanının 1'den büyük olduğunu göstermiştir. Bu durumda İrem, $x + \frac{1}{x}$ 'in 2'den büyük olduğunu göstermek yerine, $x + \frac{1}{x} - 1$ 'in, 1'den büyük ya da eşit olduğunu göstermiştir. İrem' le Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına ve ifade üzerinde cebirsel düzenleme yapmaya niye ihtiyaç duyduğunu öğrenmeye yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?*

İ: *En başta x , 1'den büyük ya da eşittir demiştik. O yüzden ben bir kenar x , diğer kenarı 2 aldım. x 'in içinden 1'lik bir bölüm ayırdım. Ondan sonra 2'lik bölümü $1-1$ diye ayırdım. 1'liklerden birine $\frac{1}{x}$ tane x 'lik tabana ayırdım. Daha sonra burdan 1'lik kısmı çıkardım. Ondan sonra geriye $(x - 1 + \frac{1}{x})$ kaldı. Ben de dedim ki $(x - 1 + \frac{1}{x})$, 1'den büyüktür. Yani $x + \frac{1}{x}$ 2'den büyüktür ya da eşittir oldu.*

A: *Neden direkt olarak $x + \frac{1}{x}$ 'in 2'den büyük ya da eşit olduğunu göstermedin de 1 çıkararak yaptın?*

İ: *Bilmiyorum o an bu şekilde yapmak daha kolay gelmişti.*

İrem, Gİ'sini geliştirirken nasıl düşündüğünü açıklamış, neden ifadeyi düzenlediği konusunda an bu şekilde yapmanın ona daha kolay geldiğini belirtmiştir. İrem, $\frac{1}{x}$ ifadesini, alanı 1 br^2 lik olan bir kareyi x parçaya ayırarak elde etmiştir. İrem'in

yaklaşımı da bu ifade için geliştirilen diğer Gİ'lerde görülmeyen farklı bir yaklaşım olarak değerlendirilmiştir.

Görkem, bu ifade için Gİ geliştirmemiş Şekil 98'deki yanıtı vermiştir. Görüşmede neden ifadeyi bu şekilde düzenleyip bıraktığı, Gİ geliştirmediği sorulmuştur. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

Şekil 98

Görkem'in 2. Aşama 2. İfade İçin Yanıtı

$$\begin{aligned}
 x^2 + 1 &\geq 2x \\
 x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\
 (x-1)^2 &\geq 0
 \end{aligned}
 \rightarrow \text{kareler her zaman sıfırdan büyük ve eşit olur.}$$

A: 2. ifade için ispat geliştirdim demiştin. Ama hiçbir çizim yapmamışsın neden yapmadın?

G: İfade çok açık geldi, düzenleyince $(x-1)$ 'in karesi geldi bu da kare ifadesi olduğu için her zaman 0'dan büyük olur zaten. O yüzden bişey çizmedim.

Görkem'in açıklamasından, Gİ'si geliştirilecek ifadenin açık olduğunu düşündüğü ve için çizim yapmadığı anlaşılmaktadır.

3.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği İspatlar

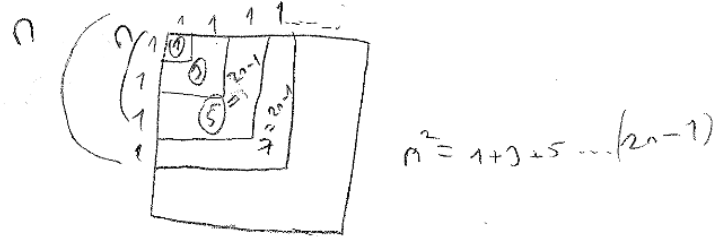
$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

Bu ifade için tüm öğrenciler Gİ geliştirmeye çalışmışlardır. Bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sırasıyla sunulmuştur.

Efe'nin 3. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 99 ve Şekil 100'deki gibidir.

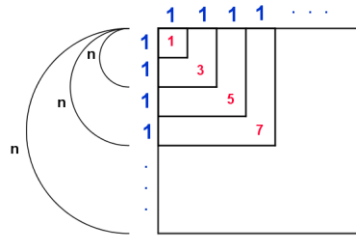
Şekil 99

Efe'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 100

Efe'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Efe'nin Gİ'sinde kenarları 1-1-1... şeklinde artan kareler oluşturduğu görülmektedir. Bu karelerin kenar uzunluklarının artışıyla alanlarındaki değişimi göstermiş ve bu değişimi tek sayıların toplamıyla ilişkilendirerek Gİ'sini oluşturmuştur. Efe'nin Gİ'sini genelleme amacıyla kenarların istenilen miktarda uzunluğunun artabileceğini göstermek için üç nokta koyduğu düşünülmektedir. Efe, n birim uzunlukta aldığı karenin içine yazdığı tek sayının $2n-1$ olduğunu belirtmiş ve bu toplamın sonucunun karenin alanını veren n^2 bağıntısıyla elde edilebileceğini göstermiştir. Efe'yle Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

E: Tek sayıların toplamı n^2 kareyi verdiği için kare oluşturdum, 1'den başlayarak arttıkça nasıl olduğunu gösterdim, hemen çıktı zaten.

A: Peki burda karelerin içine yazdığın sayıları sağladığını nereden anlıyoruz.

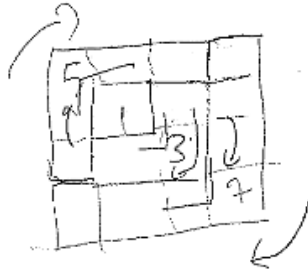
E: Aslında mesela 3 olanın içinde 3 kare var 1'le birleşince 4 oluyor. Ama böyle daha sade oldu çizim, onları çizmedim.

Yapılan görüşmede Efe, Gİ'sinin çiziminin sade olmasını istediği için karelerini birim karelere bölmediğini ifade ettiği görülmüştür.

Görkem'in 3. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 101 ve Şekil 102'deki gibidir.

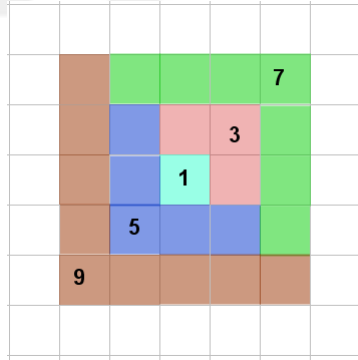
Şekil 101

Görkem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 102

Görkem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Görkem'in Gİ'sini ilk 4 terim için geliştirdiği görülmektedir. 1 br²'lik kareden başlayarak sağ tarafına 3 tane 1 br²'lik kare eklediği, aynı şekilde sol tarafına 5 tane 1 br²'lik kare eklerken devam ettiği bu şekilde toplamı kareye tamamlayarak Gİ'sini oluşturduğu anlaşılmaktadır. Görkem'le Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına yönelik ve artan terimler için genellebilirliğiyle ilgili ne düşündüğünü öğrenmeye bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

G: Şimdi önce bu 1. terim, bu 2. terim böyle böyle n. terime gidiyor. Şimdi $(2n-1)$. terimle öncekilerin toplamı n^2 'yi verecekti. 1'i çizdim. 3'ü ekledim, sonra bir böyle bir böyle [Ok işaretlerini gösteriyor.] sarmal şekilde kareleri ekledim hep kare oluyor toplamları da n^2 'yi veriyor.

A: Peki burda 7'ye kadar çizmişsin sence 7'den sonrakiler için de bu şekilde bu yapı korunur mu?

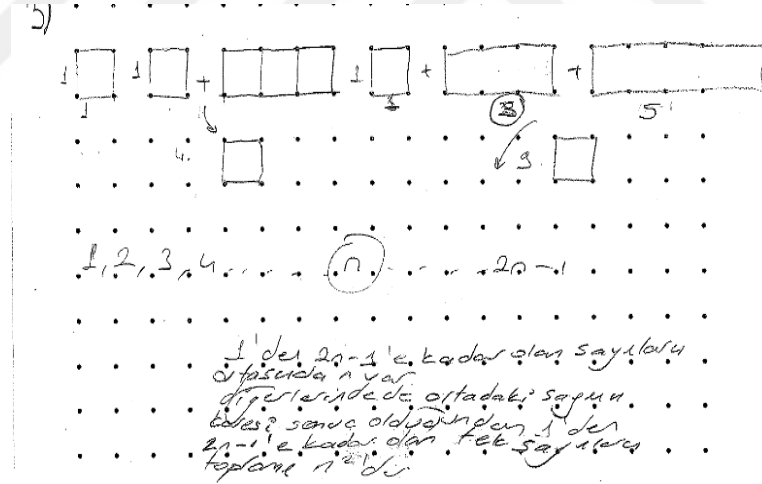
G: Evet hocam aynı devam eder bu şekilde bozulmaz.

Görkem görüşmede Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamış ve bu Gİ'nin tüm terimler için genellenebileceğini de ifade etmiştir.

İrem'in 3. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 103 ve Şekil 104'teki gibidir.

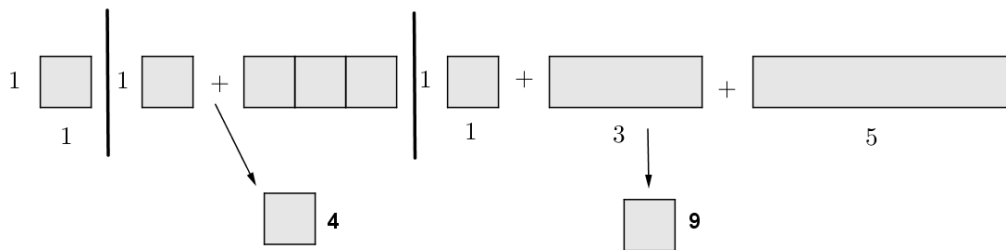
Şekil 103

İrem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 104

İrem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyon



İrem, bu ifade için ilk 3 terimin toplamını sırayla adımlayarak göstermiştir. Ancak görsel olarak n^2 ifadesine nasıl ulaştığı açık değildir. İrem çiziminin altına “1’den $2n-1$ ’e kadar olan sayıların ortalaması n olur. Diğerlerinde de ortadaki sayının karesi sonuç olduğundan $2n-1$ ’e kadar olan tek sayıların toplamı n^2 olur.” şeklinde bir açıklama yapmıştır. Buradan İrem’in belirlediği terime kadar olan sayıların ortancasını bulduğu, bu sayıların toplamından ortancanın karesine ulaşarak n^2 ifadesini elde ettiği anlaşılmaktadır. Örneğin ilk iki terim olan 1 ile 3’ün ortancası 2 olduğundan bu iki sayının toplamının 2’nin karesi yani 4 olacağını göstermiştir. Ancak 4 için de 1 birimkarelik bir kare çizmiştir. Aynı işlemi $1+3+5$ için de göstermiştir. Ancak bir sonraki terimde görselin nasıl olacağını anlayabilmek için her adımda cebirsel işlem yapmak (ortancayı hesaplama) ve her adım için farklı büyüklükte kareler çizmek gerekmektedir. Tek sayıların toplamında ilk n terimin toplamı n^2 ’ye eşit olmaktadır. İrem aslında ortanca bulma işlemiyle terim sayısını elde etmiş ve bu sayede n^2 ifadesine ulaşmıştır. İrem’in bu işlemi bilinçli olarak mı yaptığı yoksa denerken rastgele mi elde ettiği bilinmemektedir. Yapılan inceleme sonrası İrem’le, Gİ’sini nasıl geliştirdiğini açıklamasına, artan terimler için genellenebilirliğiyle ilgili ne düşündüğünü öğrenmeye ve 4 - 9 için çizdiği 1 birimkarelik karelerin daha anlaşılır hale getirilmesi için nasıl çizilebileceğini açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

İ: Şimdi burada önce küçük küçük kareler yaptım, 1 için 1 oldu. $1+3$ için 4 tane 1’in karesini kullandım. Bu da aslında ortadaki sayının karesi oluyor. 1’den $2n-1$ ’e kadar olan sayılara tam olarak baktığımızda ortasında n var. O zaman onun da karesi alınmış oluyor.

A: Peki bu şekilden bunu görebiliyo muyum?

İ: Açıklama yapmam gerekti o yüzden zaten, tam anlatabilmek için.

A: Çizdiğin şeklin genellenebilirliğiyle ilgili ne düşünüyorsun?

İ: Burda 1’den $2n-1$ ’e kadar yazdım ortadakinin n olduğunu gösterdim.

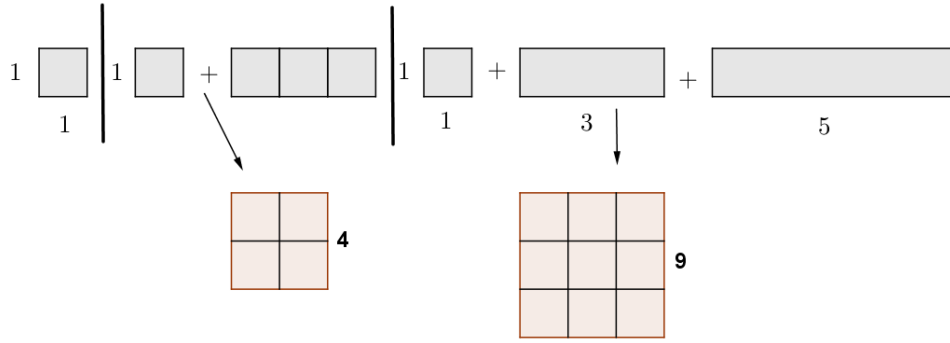
A: Görsel olarak genel bir yapı oluşturamıyorsun yani? Peki, 4 ve 9’u daha anlaşılır çizebilir miydin?

İ: Her adım için artacağından 1 kareyle göstermişim, karesi olacak ortadakinin diye. Ama 4 kare 9 kare çizebilirdim.

İrem, Gİ'sini daha anlaşılır hale getirmek için açıklama yazma ihtiyacı duyduğunu belirtmiştir. Görüşmede, İrem'in genelleştirme düşüncesini göz önünde bulundurduğu ve Gİ'sinin altına şeklinde genel ifadeyi temsilen $1 \dots n \dots (2n-1)$ şeklinde belirttiği anlaşılmıştır. İrem'in 4 ve 9 için çizdiği 1 birimlik kareleri 4 birimlik ve 9 birimlik karelere dönüştürülebileceğini bu sayede daha anlaşılır olacağını belirtmiştir. İrem'in görüşmede tarif ettiği Gİ'nin son hali Şekil 105'de verilmiştir.

Şekil 105

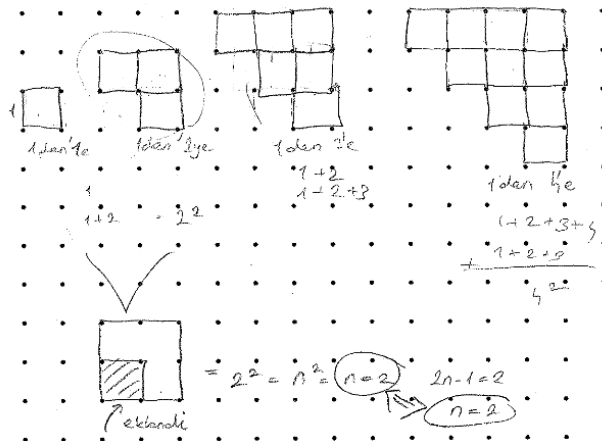
İrem'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin Düzenlenmiş Hali



Yiğit'in 3. İfade için geliştirmeye çalıştığı Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 106 ve Şekil 107'deki gibidir.

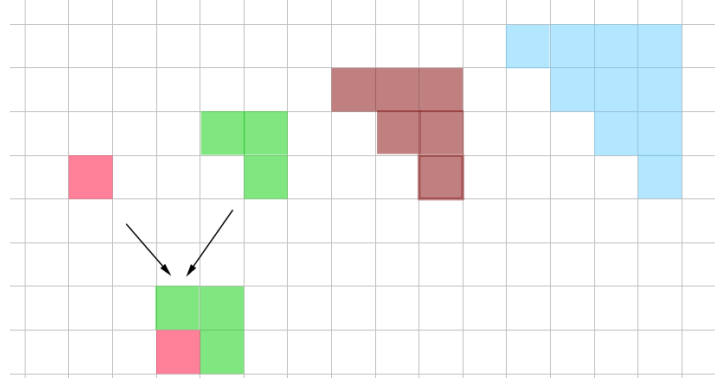
Şekil 106

Yiğit'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 107

Yiğit'in 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Yiğit'in tek sayıların toplamını değil, başka bir ifadenin Gİ'si olabilecek bir çizim yaptığı görülmektedir. Yiğit, sırasıyla 1-3-7-11 tane birim karelerden oluşan yapılar çizdiği anlaşılmaktadır. İlk iki şekli birleştirerek 1 ve 3'ün toplamından 4 kare elde etmiş ve n^2 ifadesine ulaştığını göstermiştir. Ancak bir sonraki adımına bakıldığında 5 kare oluşturup, elde ettiği bu 4 kareyi birleştirmesi gerekirken, Yiğit, 7 karelik bir yapı oluşturmuş şeklinin altına $1+2+3$ yazmıştır. Tek sayıların toplamı yerine ardışık sayıların toplamını oluşturmuştur. Yiğit'in Gİ'sinde hata yaptığı ve verilen ifadeye ulaşamadığı görülmüş, bu denemesinde nasıl düşündüğünü açıklamasına ve hatasını farketmesine yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

Y: 1'den 1'e kadar olan sayıların toplamı, 1'den 2'ye kadar olan sayıların toplamı 1'den 3'e böyle istediğimiz kadar çeşitlendiriyoruz. Sonra şunu şuraya eklediğimiz zaman bir kare oluşuyor. Aynı şekil bununla bu da olabilir, ekleyip ekleyip devam edebiliriz yani. İlki için gösterdim eklediğim yeri tarayarak gösterdim.

A: Peki senin oluşturduğun görsel ispat verilen ifadeyi karşılıyor mu? Tek sayıların toplamı verilmiş burda.

Y: Aaa doğru ben ikili gruplardan kare oluşturunca oldu diye düşünmüştüm, hangi ifade için geliştirdiğimi unutmuşum.

A: Peki doğrusunu yapabilir miydin? Nasıl yapabilirdin?

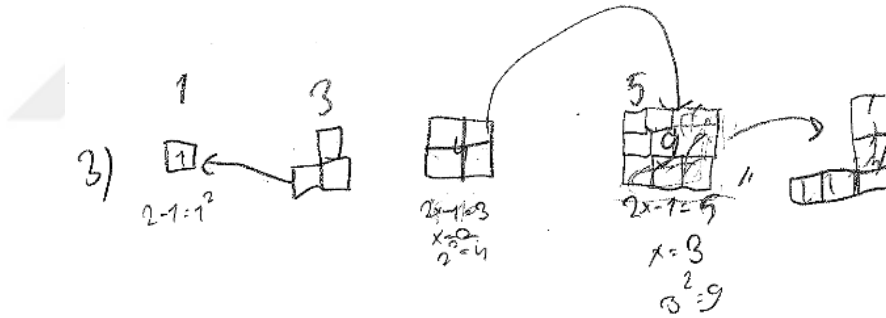
Y: Yapabilirdim gibi ama biraz düşünmem lazım.

Yiğit'in görüşme sırasında verilen ifadenin Gİ'sini geliştirmediğini farketmesi sağlanmıştır. Yiğit'in Gİ'sini geliştirirken, hangi ifadenin Gİ'sini geliştirdiğini unuttuğu n^2 ifadesine ulaşmak için kare oluşturmaya odaklandığı anlaşılmıştır. Deniz'in 1. Aşamada 2. İfade için yaptığı Gİ denemesindekiyle aynı hataya düştüğü görülmektedir (Şekil 68). Yiğit istenilen ifade için de Gİ geliştirebileceğini ifade etmiş, ancak görüşme sırasında açıklayamamıştır.

Emre'nin 3. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 108 ve Şekil 109'deki gibidir.

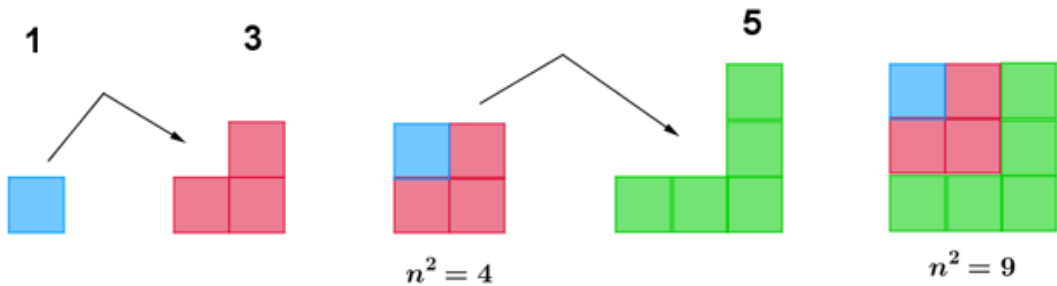
Şekil 108

Emre'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 109

Emre'nin 2. Aşama 3. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Emre'nin Gİ'sine bakıldığında, 1 için 1 kare, 3 için 3 kare, 5 için 5 kare oluşturduğu, kareleri bir sonraki sayının üzerine oturtarak tam kare elde ettiği görülmektedir. Emre'nin bu ifade için geliştirdiği Gİ'nin, Görkem'in Gİ'siyle (Şekil 100) benzer bir yapıda olduğu görülmektedir. Emre, Görkem'den farklı olarak Gİ'sinde adımlama yapmış ve oluşturduğu toplamlarda şekilleri aynı yönde oturtmuştur. Emre'yle bu Gİ'yi nasıl oluşturduğunu açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?

E: 1'i çizdim, 3'ü çizdim kafes şeklinde üzerine oturttum direkt çıktı hocam, kolay oldu baya. Sonra bir sonraki için de aynı şekilde devam edebildiğimizi gösterebilmek için onu da çizdim. Bu şekilde devam edebiliyoruz her seferinde, bozulmaz bu yapı.

Emre Gİ'sini nasıl geliştirdiğini açıklamış ve oluşturduğu yapılar için kafes benzetmesini kullanmıştır. Ayrıca Emre bu Gİ'yi kolay bir şekilde geliştirdiğini ifade etmiştir.

4.İfade İçin Öğrencilerin Geliştirdiği İspatlar

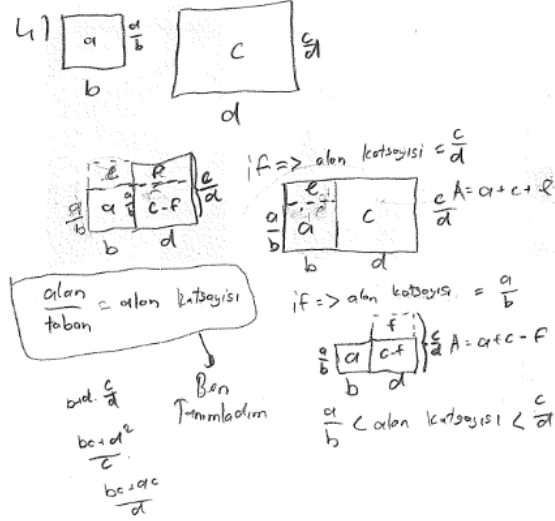
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Bu ifadeye yönelik Gİ geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrenciler Emre ve Görkem olmuştur. Sırasıyla bu öğrencilerin Gİ'leri, bu Gİ'lere yönelik açıklamalar ve Gİ'ler üzerine yapılan klinik görüşmeler sunulmuştur.

Emre'nin 4. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 110 ve Şekil 111'deki gibidir.

Şekil 110

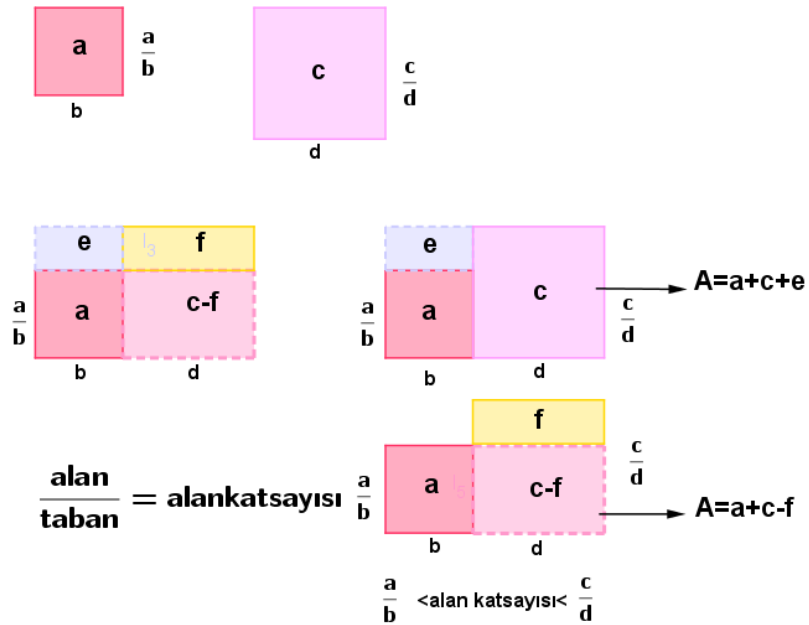
Emre'nin 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Alan katsayısı düzgün şekillerde yüksekliğe eşittir
 yükseklik $\frac{c}{d}$, taban $b+d$ olursa şekildaki gibi $a+b+c+e$ olur
 yükseklik $\frac{a}{b}$, taban $b+d$ olursa şekildaki gibi $a+b+c-f$ olur
 $a+c$ bu iki ifadenin ortasındadır bu nedenle indeks bu iki
 yükseklik ortasında olacaktır

Şekil 111

Emre'nin 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Emre, bu GI'sinde ilk önce verilen ifadenin öncülünü ($\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$) sağlayacak şekilde kenar uzunlukları $\frac{a}{b}$ ve b uzunluğunda bir dikdörtgen, kenar uzunlukları $\frac{c}{d}$ ve d uzunluğunda bir dikdörtgen oluşturmuştur. Bu dikdörtgenlerin alanlarını içine yazarak ifade etmiştir. Daha sonra Emre'nin alan katsayısı diye bir kavram tanımladığı görülmektedir. Alan katsayısını, alanın taban uzunluğuna oranı olarak tanımlamıştır. Emre, başlangıçta oluşturduğu iki dikdörtgeni birleştirmiş, bu şekli düzgün bir dikdörtgene tamamlayacak şekilde alanlar eklemiştir. Oluşturduğu dikdörtgenlerden birinde yüksekliği $\frac{a}{b}$ uzunluğunu ön plana çıkaracak şekilde bir alan parçalaması yapmış, diğerinde yüksekliği $\frac{c}{d}$ uzunluğunu ön plana çıkaracak şekilde bir parçalama yapmıştır. Bu şekilde yüksekliği $\frac{a}{b}$ olan dikdörtgenin alanı $a+c$ toplamı kadar olurken, yüksekliği $\frac{c}{d}$ olan dikdörtgenin alanı $a+c$ toplamı kadar olmuştur. Başlangıçta birleştirdiği dikdörtgenlerin alanları toplamı $a+c$ ve taban uzunlukları toplamı $b+d$ olduğundan, tanımladığı alan katsayısıyla verilen ifadedeki $\frac{a+c}{b+d}$ oranını elde etmiştir. Yazarak yaptığı açıklamada alan katsayısının düzgün şekillerde yüksekliğe eşit olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle $a+c$ alanının büyüklüğünün oluşturduğu düzgün dikdörtgenlerin alanları arasında olduğunu ifade etmiştir. Emre'yle GI'sini nasıl oluşturduğunu açıklamasına, yeni bir kavram tanımlamaya neden ihtiyaç duyduğunu açıklamasına yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: *Nasıl düşündün bu görsel ispatı geliştirirken açıklayabilir misin?*

E: *Verilen ifadeleri sağlayacak şekilde alanlar oluşturdum. Sonra alan katsayısı diye bir şey tanımladım.*

A: *Açıklayabilir misin biraz bunu? İfade rasyonel olduğu için mi yeni bir şey tanımlama ihtiyacı hissettin?*

E: *Yani böyle bir şey oluşturdum gidişata uygun, böyle bir şey varsa da adını bilmediğim için tanımlama ihtiyacı hissettim. Çünkü ortadaki ifadeyi bir şekilde elde etmem gerekiyordu. Aslında aralıklı ifadelerin görsel ispatları hakkında pek bir bilgim yok. Aklıma geleni yazdım sadece, önce ekledim ve çokgene tamamladım sonra çıkardım ve böyle bir sonuç elde ettim. Bu nedir*

bilmiyorum yani tanımsız fikirlerim olabilir. Bilmiyorum aslında bu ispat mı? Olmayabilir de.

A: Burada iki dikdörtgeni birleştirdiğinde düzgün bir şekil çıkmıyor ve bu şeklin alanı için kısa kenar çarpı uzun kenar diyemiyoruz, sen de sanırım bu tarz şekillerde tabanla alan katsayısını çarpıldığında alanın elde edebilmek için böyle bir şey tanımladın, doğru mu düşünüyorum?

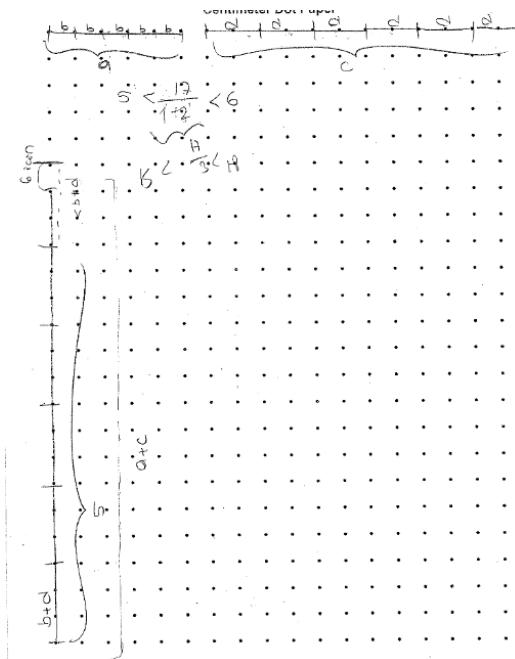
E: Evet hocam. Düzgün dik şekillerde zaten kenarlar çarpımıyla alanı buluyoruz. Benim de aklıma böyle bir fikir geldi o an yazdım.

Emre'nin Gİ'sinin ispat olup olmadığı konusunda emin olmadığı, eşitsizliklerle ilgili ifadelerin Gİ'leriyle ilgili kendini yetersiz hissettiği görülmüştür. Emre, Gİ geliştirme aşamasında yeni bir kavram tanımlayan tek öğrenci olmuştur.

Görkem'in 4. İfade için geliştirdiği Gİ ve GGB ortamında çizilmiş hali Şekil 112 ve Şekil 113'deki gibidir.

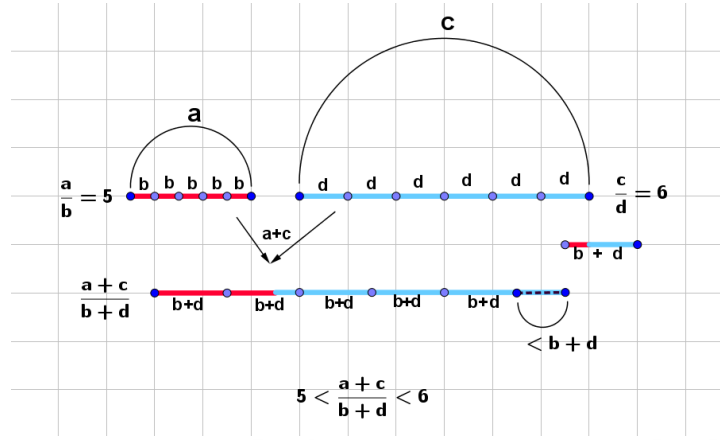
Şekil 112

Görkem'in 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ



Şekil 113

Görkem'in 2. Aşama 4. İfade İçin Geliştirdiği Gİ'nin GGB Versiyonu



Görkem'in başlangıçta a birim uzunluğunda ve c birim uzunluğunda doğru parçaları çizdiği görülmektedir. Ardından Görkem, a birim uzunluğundaki doğru parçasını b parçaya bölmüş ve $\frac{a}{b}$ ifadesini elde etmiştir. Aynı şekilde c birim uzunluğundaki doğru parçasını d parçaya bölmüş ve $\frac{c}{d}$ ifadesini elde etmiştir. Son olarak Görkem, a ve c doğru parçalarını birleştirmiş, $b+d$ parçaya ayırmıştır. Görkem'in bu çizimleri yaparken noktalı kâğıt kullandığı ve $a=5$, $b=1$, $c=12$, $d=2$ birim olarak oluşturduğu görülmektedir. İlk iki çizimden $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ öncülünü elde etmiştir. Son çizimde oluşturduğu doğru parçasını $b+d$ parçaya böldüğünde, $\frac{a}{b} = 5$ ve $\frac{c}{d} = 6$ olduğu için tam 6 parça oluşturamadığını ancak 5 parçadan da fazlalık bir parça olduğunu göstermiştir. Görkem'in Gİ'sini belirli bir sayı için oluşturduğu görülmektedir. Görkem'le Gİ'sini nasıl oluşturduğunu açıklamasına ve yaptığı çizimin genellenebilirliği konusunda ne düşündüğünü öğrenmeye yönelik bir görüşme yapılmıştır. Görüşmenin bu bölümü aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl düşündün bu Gİ'yi oluştururken?

G: Benim aklımda şey vardı burda, böyle yemek gibi a 'yı b 'ye parçalayacağız. c 'yi d 'ye parçalayacağız ve birleştirip istenileni elde edeceğiz.

A: Belirli bir sayı vererek yapmışsın burda, peki sence bütün sayılar için sağlar mı?

G: *Olur bence. Sonuçta biz bişey var onu bölüyoruz, diğer tarafta da bişey var onu bölüyoruz. Mesela şey gibi düşünelim bir ekmeği 3 kişi paylaşıyor, bir keki de 4 kişi paylaşıyor diyelim. Ekmeğin kekten küçük olduğunu biliyoruz. Biz bu 7 kişiye ekmekle kekin birleşiminden bölüp versek daha az doyarlar yani.*

A: *İlginç bir metafor oldu.*

Görkem, Gİ için yaptığı çizimin genellenebilir olduğunu düşündüğünü belirtmiş ve bu düşüncesini pasta ve ekmek metaforu kullanarak açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Öğrencilerin Gİ'leri üzerine yaptıkları açıklamaların zenginleştiği görülmektedir.

Bu aşamada öğrencilerin hangi ifadelerin Gİ'lerini geliştirmeye çalıştıkları Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8
Öğrencilerin 2.Gİ Geliştirme Aşamasında Üzerinde Çalıştıkları İfadeler

	1.İfade	2.İfade	3.İfade	4.İfade
İrem		√	√	
Görkem	√	√	√	√
Deniz	√	√	√	
Emre	√	√	√	√
Efe	√		√	
Yiğit	√		√	

2.Gİ geliştirme aşamasında Görkem ve Emre tüm ifadeler için Gİ geliştirmeye çalışmışlardır. Deniz 3 ifade için, İrem, Efe ve Yiğit 2 ifade için Gİ geliştirmeye çalışmışlardır. Tek sayıların toplamıyla ilgili olan 3. İfade için tüm öğrencilerin Gİ geliştirmeye çalıştıkları görülmüştür. İrem, Efe, Yiğit ve Deniz'e Gİ'sini geliştirmeye çalıştıkları ifadeleri nasıl seçtikleri sorulmuştur, yanıtları aşağıda sunulmuştur.

İrem: *Aslında 1.'yi geliştirmek istedim ama şekli tutturamadım, denememi sildim o yüzden devam ettirmedim. Sonra sırayla baktım, 4. 'ye sürem yetmedi.*

Deniz: *Sırayla uğraştım, 4. için süre kalmadı, zaten onu nasıl yapacağım konusunda pek fikrim de yoktu.*

Efe: Kesirli ifdelerin Gİ'lerini nasıl geliştireceğimi tam kestiremedim, o yüzden 1'le 3'ü yaptım.

Yiğit: 2.'yi de yapmak istemiştin ama 1/x'i nasıl çizeceğimi bilemedim, değişti. O yüzden 1 ve 3'e baktım. 1, olmadı zaten, 3'ü yaptım.

Öğrencilerin genel olarak kesirli ifade içerdiği için 2. ve 4. ifadenin Gİ'sini geliştirmeyi tercih etmedikleri görülmektedir. İrem başlangıçta 1. İfade için uğraştığı belirtmiş fakat yaptığı denemeyi sildiğini belirtmiştir.

2. Gİ Geliştirme Aşamasında Belirlenen Hatalar ve Zorluklar

2. Gİ geliştirme sürecinde yapılan hatalar ve karşılaşılan zorluklar ön analizler ve öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler doğrultusunda belirlenmiştir. Ortaya çıkan yeni temalar, 1. Gİ geliştirme sürecinde belirlenen hata ve zorluklar için oluşturulmuş tabloya eklenmiştir (Tablo 9). Bu sayede 1. aşamada yapılan hata ve zorluklarla karşılaştırılabileceği düşünülmüştür.

Tablo 9

1. Gİ ve 2. Gİ Geliştirme Süreçlerinde Belirlenen Hatalar ve Zorluklar

Temalar	Alt Temalar	Öğrenciler
Gİnin Anlaşılabilirliği	Tarama Yapmama	-
	Hatalı Tarama Yapma	-
	Adımlama Yapmama	-
	Hatalı Birleştirme	-
	Geliştirilen Gİ ifadesini unutma	Yiğit [2.3]
Gİ Geliştirme Süreci	Oluşturulan Çizimden İfadeye Ulaşamama	-
	Zihindekini Kâğıda Yansıtamama	-
	Üç Boyutlu Çizim	-
	Gİ'lerin Tek Şekilde Oluşturulabileceğini Düşünme	-
	Kâğıt Yetersizliği	Emre [2.2]
	Kontrol Etmeme	Yiğit [2.3]
	İfadenin Açık Olduğunu Düşünme	Görkem [2.2]
	Kesirli İfadelerin Çizimi	Efe [2.2], Efe [2.4], Yiğit [2.2], Emre [2.2]
	Belirli Bir Sayı İçin Çizim Oluşturma	Görkem [2.1], Yiğit [2.1], Emre [2.1]

1. Gİ geliştirme sürecine ek olarak 2. Gİ geliştirme sürecindeki hata ve zorluklara *ifadenin açık olduğunu düşünme, kesirli ifadelerin çizimi ve belirli bir sayı için çizim oluşturma* temaları eklenmiştir.

İfadenin Açık Olduğunu Düşünme: Öğrencinin Gİ'si oluşturulacak ifadenin doğruluğunun açık olduğunu düşünmesi ve Gİ'sini oluşturmaya ihtiyaç duymaması.

Kesirli İfadelerin Çizimi: Kesirli ifadeler için çizim yapmakta zorlanma.

Belirli Bir Sayı İçin Çizim Oluşturma: Verilen ifadenin Gİ'si için ölçekli kâğıtta belirli bir değer için çizim yaptığı için sonuca ulaşamama.

Tablo 6'ya bakıldığında öğrencilerin 1. Gİ geliştirme aşamasındaki hata ve zorluklarının büyük ölçüde giderdikleri görülmektedir. 1. aşamada en çok yapılan kontrol etmeme hatasını, bu aşamada yalnızca Yiğit 3. İfade için geliştirdiği Gİ'de yapmıştır. Deniz'in 1. aşamada düştüğü geliştirilen Gİ ifadesini unutma hatasına bu aşamada Yiğit'in 3. İfadenin Gİ'sini oluştururken düştüğü görülmektedir. Yiğit verilen ifadenin Gİ'sini geliştirmediğini klinik görüşme sırasında farketmiş ve kare oluşturmaya odaklandığı için hangi ifadenin Gİ'sini geliştirdiğini unuttuğunu söylemiştir. 2. Gİ geliştirme aşamasında yapılan bir diğer hata ifadenin doğruluğunu açık olduğu düşünüldüğü için Gİ'sini geliştirmeye ihtiyaç duyulmamasıdır. Görkem, bu aşamada verilen 2. ifade üzerinde cebirsel düzenleme yaparak bir sayının karesinin 0'dan büyük ya da eşit olacağı ifadesine ulaşmıştır. Bu ifadenin doğruluğunun çok açık olduğunu ifade etmiş bu nedenle herhangi bir çizim yapmadığını belirtmiştir. Bu aşamada öğrencilerin en çok zorlandıkları durumlardan biri kesirli ifadelerin çizimi olmuştur. Öğrencilere Gİ'lerini geliştirmeye çalıştıkları ifadeleri neden seçtikleri sorulduğunda, Efe ve Yiğit kesirli ifadelerin Gİ'lerini nasıl çizeceklerini bilmediklerini bu yüzden bu tarz ifadelerin Gİ'lerini geliştirmeye çalışmadıklarını ifade etmişlerdir. Diğer zorlanılan bir durum ise bu aşamada verilen 1. ifadenin Gİ'sini $n=4$ için geliştirmeye çalışmaları olmuştur. Emre ilk 3 terim için de geliştirdiği için Gİ'sini oluşturabilmiş, fakat Görkem ve Yiğit sadece $n=4$ için çizimlerini oluşturmaya çalıştıkları için uygun birleştirme yapamamışlar ve Gİ'lerini oluşturamamışlardır.

4.4 Dördüncü Alt Probleme Yönelik Bulgular

Bu bölümde, öğrencilerin deneyimledikleri tüm sürece ve Gİ'nin matematik sınıflarında kullanımına dair görüşlerini belirlemek amacıyla yapılan, yarı yapılandırılmış görüşmeye dair bulgular sunulmuştur. Görüşmede temel olarak 4 tane soru sorulmuş, fakat kimi öğrencilerin yanıtlarıyla sorular çeşitlenmiştir (EK-4). Sorulan 4 soru için öğrencilerin verdiği yanıtlardan temalar belirlenmiştir. Bu temalar ve öğrencilerin yanıtlarının hangi temada yer aldığı Tablo 10'da belirtilmiştir.

Tablo 10
Öğrencileri Görüşleri

Sorular ve Temalar	Öğrenciler
1) İlk yaptığımız çalışmadan itibaren bu süreç senin için nasıl geçti?	
Eğlenceli, Yararlı, İlgi Çekici	İrem, Emre, Efe, Deniz, Yiğit
Fen Bilimleri'nde Yardımcı	İrem
Matematiksel Becerileri Geliştirme	İrem, Emre, Yiğit
Formüllerin İspatlarını Öğrenme/ İspat Öğrenimi	İrem, Görkem, Deniz
2) Görsel ispat geliştirme konusunda ilerleme kaydettiğini düşünüyor musun?	
Henüz Değil/ Fark Görememe	Emre, Efe
İlerleme Kaydettiğine İnanma	İrem, Yiğit, Deniz
Kesinlikle İlerleme Kaydettiğini Düşünme	Görkem
3) Görsel ispat geliştirirken zorlandığın noktalar nelerdi?	
Üç Boyutlu Çizim	Emre, Yiğit, Deniz
Zihindekileri Kâğıda Yansıtma	İrem, Emre
Verilen İfadeleri Görsele Dönüştürme	İrem
Farklı Yollardan İspatlamaya Çalışma	Görkem
Verilen İfadelerin Uzun Olması	Deniz
Zorluk Yok	Efe
4) Görsel ispatların matematik derslerinde kullanımı hakkında ne düşünüyorsun?	
Kesinlikle Kullanılmalı	İrem, Görkem, Deniz, Yiğit
Belirli Sınıflarda Kullanılmalı	Emre, Efe

Sürecin nasıl geçtiğine yönelik sorulan 1. soru için ortaya çıkan temalardan ilki *eğlenceli, yararlı, ilgi çekici* temasıdır. Öğrenciler süreçte eğlendiklerini, yapılan uygulamaların yararlı olduğunu ve ilgilerini çektiğini anlatan ifadeler kullanmışlardır. Bu tema altında değerlendirilen öğrenci yanıtlarından örnekler sunulmuştur:

“...hem eğlenceli hem yararlı buldum süreci”

“İlk yaptığımız çalışmadan itibaren bu süreç benim için güzel geçti, gayet eğlenceliydi, kafa yorduk.”

İlk soru için ortaya çıkan bir diğer tema *Fen Bilimleri’nde yardımcı* temasıdır. İrem adlı öğrenci Gİ’lerin Fen Bilimleri konusunda kendisine yardımcı olacağını ifade etmiştir. Araştırmacı İrem’in yanıtı üzerine bu düşüncesini açıklamasını istemiştir. İrem’in bu soruya verdiği yanıttan bir kesit aşağıda verilmiştir:

“...bu görsel ispat yönteminin diğer fen bilimleri konusunda da bana yardımcı olacağına inanıyorum... Kimya ve fizikte de yararlı olabileceğine inanıyorum. Çünkü direkt bu bu diye gösteriyorlar ve formülleri ezberletiyorlar. Ama mesela fizikteki optikte bu kuralların nasıl çıkarıldığı görsel ispatla açıklanabilir diye düşünüyorum.” İrem, Gİ’lerin kimya fizikte de kullanılabileceğini düşündüğünü belirtmiştir. Gİ’lerden formüllerin, kuralların çıkarılışını açıklamak konusunda yararlanılabileceğini düşündüğünü ifade etmiştir.

İlk soru için belirlenen bir diğer tema da *matematiksel becerileri geliştirme* temasıdır. Öğrenciler Gİ’lerin uzlamsal düşünmelerini ve matematiksel ifadelere bakış açılarını geliştirdiğini belirten ifadeler kullanmışlardır. Bu tema altında değerlendirilen yanıtlardan örnekler sunulmuştur.

“Matematiği kavramamı kolaylaştırmasının yanı sıra düşünce yapımın değiştiğini düşünüyorum. Daha uzlamsal bir düşünce yeteneği kazandığımı düşünüyorum.”

“Matematiksel ifadeler üzerine farklı düşünmek ve düşünceyi geliştirmek açısından ciddi mesafe katettiğimi düşünüyorum.”

İlk soru için belirlenen son tema, *formüllerin ispatlarını öğrenme/ ispat öğrenimi* temasıdır. Bu tema altında değerlendirilen yanıtlarda öğrenciler, matematiksel ifadelerin/formüllerin ispatlarını oluşturan düşüncenin nereden geldiğini öğrendiklerini belirten yorumlarda bulunmuşlardır.

“Bu süreç içerisinde birçok formülün ispatlanışını ve nereden gelmiş olduğunu öğrenmiş bulunmaktayım. Özellikle 3 boyutlu olanlar, sizin gösterdiğiniz, tartıştığımız ifadeler zihnimde daha iyi canlandı, kalıcılaştı.”

“Bir de mesela bir şeyi görüyoruz ama onun bazen nerden geldiğini bilemiyoruz. Böyle şeyleri görmek güzel oluyor bence.”

Görkem, Gİ’ler sayesinde ifadelerin zihninde daha iyi canlandığını ve kalıcılaştığını belirtmiştir.

Gİ geliştirme konusunda öğrencilerin ilerleme kaydedip kaydetmeme konusunda ne düşündüklerinin sorulduğu 2. soruda, 3 tema ortaya çıkmıştır. Öğrencilerden 2’si Gİ geliştirme konusunda ilerleme kaydettiklerini düşünmediklerini belirtmişlerdir. 3 öğrenci, Gİ geliştirme konusunda ilerleme kaydettiklerine inandıklarını belirtmiştir. 1 öğrenci de kesinlik içeren ifade kullanmış ve Gİ geliştirme konusunda kesinlikle ilerleme kaydettiğini düşündüğünü belirtmiştir. Her bir tema için örnek yanıtlar sırasıyla aşağıda sunulmuştur.

“Görsel ispat geliştirme konusunda ilerleme kaydettiğime inanıyorum.”

“Görsel ispat geliştirmek bana kalırsa bu aşamada benim daha başarabileceğim bir şey değil.”

“Evet, bu yolda ilerleme kaydettiğimi kesinlikle düşünüyorum.”

Gİ geliştirmenin henüz başarabileceği bir şey olmadığını ifade eden öğrenciye araştırmacı tarafından geliştirdiklerinin Gİ olmadığını mı düşündüğü sorulmuştur. Emre bu soruyu, *“Yani optimal bir çözüm olmadı bence. Kolay olan birkaçı dışında verdiğiniz ifadelerin daha basit ve kısa, şık ispatları olabileceğini düşünüyorum.”* şeklinde yanıtlamıştır. Emre’nin Gİ’lerin daha kısa ve şık versiyonlarının oluşturulabileceğini düşündüğü için kendini yetersiz gördüğü anlaşılmaktadır. Deniz, Gİ geliştirme ilerleme kaydettiğine inandığını ifade etse de birçok farklı formda ve farklı yöntemlerle oluşturulmuş Gİ’ler olabileceğini belirtmiş, bu nedenle Gİ geliştirme performansının değişkenlik gösterebileceğini eklemiştir.

3. soruda öğretim deneyi süresince öğrencilerde gözlenen zorluklar dışında, öğrencilerin kendilerinin zorlandıkları durumlarla ilgili düşüncelerin öğrenilmesi amacıyla, görsel ispat geliştirirken zorlandıkları noktaların neler olduğu sorulmuştur. Öğrencilerin verdiği yanıtlardan 6 tema oluşturulmuştur. Bu temalardan ilki *üç boyutlu çizim* temasıdır. Öğrenciler üç boyutlu Gİ’lerin çiziminde zorlandıklarını ifade

etmişlerdir. Bu tema altında değerlendirilen cevaplardan bölümler aşağıda sunulmuştur:

“Sanırım en çok üç boyutlularda zorlandım... Hem çizimi hem de anlamam gerekiyor çizmem için canlandırmam gerekiyor. Bir de böyle mesela uzunlukları tutmayınca çizdiklerimin, bu benim sinirimi bozdu. Aslında çizimim iyidir ama zorlandım çizerken yine de.”

“...küplü ifadelerde zorlandım. O ifadelerde üç boyutlu kullanmam gerektiğini düşündüm. O da çizim ve düşünce olarak sıkıntı yarattı.”

Emre, küplü ifadelerin Gİ'lerinin üç boyutlu olması gerektiğini düşündüğünden dolayı bu tür ifadelerin Gİ'lerinin çizimi konusunda zorlandığını ifade etmiştir. Zorluklar konusunda ortaya çıkan bir diğer tema *verilen ifadeleri görsele dönüştürme* temasıdır. İrem'in aşağıda verilen yanıtı bu tema altında değerlendirilmiştir.

“Mesela en başta bize verilen denklemin formülünün nereden geldiğini biliyoruz, yani bunu bulmak için hangi işlemleri uygulamamız gerektiğini biliyoruz ama bunu görsele dönüştürmeye çalıştığımız zaman aslında diğer formülleri de kullanmaya çalıştım. Ama o diğer formüller dediğim formüller aslında bize verilen görselle anlatmamız istenilen ilk denklemden formülden geliyordu. Bunu kullanmadan yapmak beni çok zorladı.”

İrem, verilen ifadelerin hangi cebirsel işlemler uygulanarak elde edildiğini bildiğini fakat bu işlemleri yapmadan ifadeleri görsel olarak ifade etmekte zorlandığını belirtmiştir. 3. soruya yönelik belirlenen bir diğer tema ise *farklı yollardan ispatlamaya çalışma* temasıdır. Bu tema Görkem'in yanıtından oluşturulmuştur.

“...bir formüle baktığımda hangisi olduğunu az çok anlayabiliyordum ama başka şekillerde geliştirmeye çalışıyordum genelde, farklı yollardan. Bu konuda zorlanmadım diyemem...”

Görkem, verilen ifadenin Gİ'lerini farklı yollardan geliştirmeye çalıştığı için zorlandığını ifade etmiştir. Görkem'in farklı yollardan kastettiği ifadenin Gİ'si için düşündüğü ilk geometrik şekilden farklı geometrik şekiller kullanarak Gİ'ler oluşturmaktır. Zorluklar konusunda belirlenmiş bir diğer tema *verilen ifadenin uzun olması* temasıdır. Deniz, Gİ'si oluşturulması için verilen ifadenin uzun olmasının, bu

ifadenin Gİ'sini oluşturma da zorlaştıracağına yönelik bir önyargı oluşturduğunu ifade etmiştir. Deniz'in bu temada değerlendirilmiş yanıtı:

“Çok uzun ifadeler de beni strese soktu. Eğer ifade uzunsu biraz daha zorlar diye bir düşünce oluşuyordu hemen. Belki öyle değildir ama.”

şeklindedir. Deniz'in yaşadığı zorluk duyuşsal bir zorluktur. Bu zorluğu, Gİ geliştirme aşamasından çok hangi ifadenin Gİ'sini geliştirmeye karar verme aşamasında yaşadığı düşünülmektedir. Gİ geliştirme sürecinde zorluk yaşamadığını belirten tek öğrenci Efe olmuştur. Efe'nin yanıtı *zorluk yok* temasında değerlendirilmiştir.

“Zorlandığım noktalar yok aslında, bu iş ilham meselesi benim için. Sadece kafama fikir gelirse yapıyorum. Gelmezse olmuyor.”

Efe'nin Gİ geliştirmeye farklı bir açıdan yaklaştığı görülmektedir. Gİ geliştirmesinin ilhama bağlı olduğunu düşündüğü için geliştirme süreciyle ilgili bir zorluk belirtmediği görülmüştür.

Son olarak öğrencilere Gİ'lerin matematik sınıflarında kullanılmasıyla ilgili ne düşündükleri sorulmuştur. Bu soru için *kesinlikle kullanılmalı* ve *belirli sınıflarda kullanılmalı* şeklinde iki tema belirlenmiştir. Öğrencilerin çoğunluğunun Gİ'lerin matematik sınıflarında kesinlikle kullanılması gerektiğini düşündükleri görülmüştür.

“Geometri konusunda kesinlikle başarısız olan bir öğrenci olarak söylüyorum ki, bu ispatların matematik derslerinde kullanımı başta geometri olmak üzere bütün hepsinde yararlı olacaktır...”

“Bu ispat yönteminin sınıflarda matematik derslerinde veya labratuvar dersi gibi uygulamalı ders olarak koyulması gerekiyor bence...”

“Kesinlikle kullanılması lazım. Çünkü dediğim gibi önceden de, bir sürü şey öğreniyoruz bir sürü formül... Sırf ezberleyip geçenler olabilir. Onlar için bu şekilde modellemeler çok faydalı olur diye düşünüyorum. Bence anaokulunda bile kullanılabilir. Çünkü hani yine küplerle çok basit şeyleri, diyelim bir artı biri bile gösterebilsek bişeydir bence.”

“Matematik derslerinde kesinlikle kullanılmalı, dikkat çekiciler çünkü...”

İrem, kendini geometri konusunda başarısız gördüğünü Gİ'lerin öncelikle geometride kullanılmasının yararlı olduğunu söylemiştir. Bu düşüncesinin nedenini *“ezbere dayalı olan bu sistemi daha az ezbere bağlı hale getirmenin bir yolunun da görsel ispat*

yöntemi olduğuna inanıyorum. Çünkü birkaç sefer sonra herkesin gözünde, en azından bende oluyor görsel hafıza olduğu için, gözümün önünde canlanıyor şekil ve formülün nereden geldiğini tık tık tık buluyorum.” şeklinde açıklamıştır. Görkem ise Gİ’ye yönelik ayrıca uygulamalı bir ders koyulmasını önermiştir. Ezberlemeye karşı olduğunu, Gİ’lerin formülleri hikâyeleştirdiğini ifade etmiş bu sayede akılda kalıcılığı sağladığını söylemiştir.

“Temelini bilmediğim hiçbir formülü de ezberleme taraftarı değilim veya sözel derslerim de hikâyeleştirilmediği sürece aklımda kalmıyor. Görsel ispatlar da bu formülleri hikâyeleştirmiş oldu benim için.”

Deniz de açıklamasında, İrem ve Görkem’in düşüncesine paralel olarak formüllerin nereden geldiğini öğrenme ve akılda kalıcılığı sağlama noktasına vurgu yapmıştır. Deniz ayrıca Gİ’lerin küçük yaş gruplarında (anaokulu gibi) da uygulanabileceğini belirtmiştir. Emre ve Efe’nin Gİ’lerin matematik sınıflarında kullanımıyla ilgili düşüncelerinin belirli sınıflarda kullanılmasına yönelik olduğu görülmüştür.

“Herkes değil belki seçilmiş belli bir sınıfa verilirse güzel olur.

“...öğrenciden öğrenciye değişir. Bazı öğrencilerin daha çok ilgisini çekebilir. Farklı gruplarda denenebilir, ne kadar faydalı olduğunu o zaman görebiliriz.”

Emre’ye Gİ’lerin seçilmiş belirli bir sınıfa verilmesine yönelik düşüncesinin nedeni sorulmuş ve bu soruyu, *“Zira mevcut sınav sistemi içinde matematiğe merakı olmayan öğrencilerin memnun kalacağını düşünmüyorum, zaman kaybı olacağını düşünebilirler.”* şeklinde cevaplamıştır. Efe de Gİ’lerin bazı öğrenciler için daha ilgi çekici olabileceğini belirtmiş ve özellikle geometri dersinde kullanılmasını önerdiğini ifade etmiştir.

Genel olarak, çalışmaya katılan öğrencilerin Gİ geliştirme sürecini yararlı buldukları, süreçten keyif aldıkları ve bu sürecin matematiksel becerilerini geliştirdiğini düşündükleri görülmüştür. Bu ispatları geliştirirken güçlük çektikleri noktaların: üç boyutlu şekillerin çizimine, zihindekileri çizimlerine aktarmaya, verilen ifadeyi görsele dönüştürmeye, farklı yollardan Gİ’yi oluşturmaya çalışmaya ve verilen ifadelerin uzunluğuna yönelik olduğu görülmüştür. Öğrencilerden bazıları Gİ’lerin matematik sınıflarında kesinlikle kullanılması gerektiğini ifade etmiş, bazıları da belirli seviyede öğrencilere uygulanmasının daha uygun olacağını söylemişlerdir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Fen Lisesi' öğrencilerinin Gİ geliştirme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda bir öğretim deneyi uygulaması gerçekleştirilmiştir. Öğretimin içeriğinin planlanması için başlangıçta, öğrencilerin Gİ'ye dair algılarını belirlemek amacıyla ön uygulama yapılmıştır. Bu uygulamanın çıktılarından birinci öğretim bölümü planlanmış ve ardından uygulanmıştır. Birinci öğretim bölümünün ardından cebirsel özdeşliklerle ilgili birinci Gİ geliştirme bölümü gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı tarafından öğrencilerin geliştirdikleri Gİ'lerin ön analizi yapılmış ve ardından tüm öğrencilerle geliştirdikleri ya da geliştirmeye çalıştıkları Gİ'lere yönelik klinik görüşme yapılmıştır. Bu sürecin çıktıları doğrultusunda ikinci öğretim bölümü planlanmış ve uygulanmıştır. Akabinde tam sayıların toplamı ve eşitsizliklerle ilgili ikinci Gİ geliştirme bölümü gerçekleştirilmiştir. Birinci bölümde olduğu gibi yine araştırmacı tarafından geliştirilen Gİ'lerin ön analizleri yapılmış ve her öğrenciyle klinik görüşmeler yapılmıştır. Son olarak sürece dair ve Gİ'nin matematik sınıflarında kullanımına dair öğrencilerin görüşleri alınmış ve süreç tamamlanmıştır. Araştırma boyunca bir sonra aşama için devamlı olarak ileriye dönük analizler yapılmıştır. Biten bölümün ardından ise geriye dönük analizler yapılarak nihai bulgulara ulaşılmıştır. Bu bölümde araştırma sürecinden elde edilen bulgular doğrultusunda ulaşılan sonuçlar ve öneriler sunulacaktır.

5.1. Algı Aşamasına Dair Sonuçlar

Öğrenciler Gİ'ye yönelik algılarını belirlemek amacıyla uygulanan Gİ çözüm kağıtları, Gİ değerlendirme rubriği oluşturularak analiz edilmiştir. Bu aşamada öğrencilerin rubrikte en yüksek puan adıkları Gİ'nin cebirsel özdeşliklerle ilgili olan Gİ olduğu görülmüştür. Bu durumunun nedeninin, 7. sınıftan itibaren, MEB kitaplarından bu konuyla ilgili basit düzeylerde de olsa Gİ'lere yer verilmesinin olabileceği düşünülmektedir. Öğrencilerin trigonometriyle ilgili verilen Gİ'de cebirsel özdeşlikle ilgili verilen Gİ kadar puan alamadıkları görülmüştür. Özellikle

trigonometrik oranların yerleştirilişini açıklama konusunda zorlanmışlardır. Bu aşamada öğrencilerin en az puan aldığı Gİ, 1'den n'e kadar sayıların karelerinin toplamının gösterildiği Gİ olmuştur. Bunun nedeninin, bu Gİ'nin 3 boyutlu şekiller konullanılarak ve diğer Gİ'lere göre daha fazla adım içermesinin olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerden bazılarının çözümleme kağıdına cebirsel doğrulamalar ve sayısal denemeler yaptığı görülmüştür. Bu durum Gülşen (2012)'nin öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmada da rastlanan bir durumdur. Öğretmen adaylarının da hem Gİ'yi yorumlarken hem de Gİ'yi tamamlarken cebire eğilim gösterdikleri, şekil yerine cebirsel işlemler yoluyla sonuca ulaşmak istedikleri görülmüştür. Bu aşamanın sonunda yapılan odak görüşmesinde, öğrencilerin çözüm kağıdında Gİ'leri ispat olarak nitelendirmelere rastlandığı için verilen şekillerin ne olduğu konusunda düşünceleri alınmıştır. Öğrencilerin kimisi bu diyagramların ispat olduğunu düşünürken kimisinin bu konuda ifade etme şekli, bir ifadenin geometrik yorumu, buluş, öğretim amacı giden şekiller gibi nitelendirmeler yapmışlardır. Bir öğrenci spatın daha bilimsel daha sayısal veriler içermesi gerektiğini düşündüğü için bu şekillerin ispat olmadığını belirtmiştir. Gİ'nin epistemolojik yapısından kaynaklı literatürde bir çok araştırmacının düştüğü ikileme (Miller, 2012; Hanna, 2000, Nelsen, 1993) öğrencilerin de düştükleri görülmektedir. Öğrencilerin bu bölümde verilen Gİ'lerin genellenebilirliği ve alternatif durumlar için şekillerin yapılarındaki değişimler için doğru çıkarımlara ulaştığı görülmüştür. Bu bölümde öğrenciler bu tarz diyagramları geliştiremeyeceklerini düşündüklerini ifade etmişlerdir.

5.2. Birinci Öğretim Deneyi ve Birinci Gİ Geliştirme Sürecine Dair Sonuçlar

Birinci öğretim bölümünde cebirsel özdeşliklerle ilgili 4 Gİ örneği sınıf tartışmasına sunulmuştur. Bu bölümde öğrencilerin en çok zorlayan durum, ispatlanması yani ulaşılması gereken ifadeyi kullanarak görsel ispatı çözümlemeye çalışmaları olmuştur. Bu hata, formal ispat yaparken de öğrencilerin sıkça düştükleri bir hatadır. Öğrencilerin, verilen teoremi bilmelerine rağmen, ispat yaparken doğru kullanamadıkları ortaya koyan çalışmalar yapılmıştır (Selden ve Selden, 2007; Weber, 2001). Bu bölümdeki Gİ örneklerinin 3 tanesinde, ifadeye şekilden nasıl ulaşıldığı tartışılmış, 1 tanesinde verilen şeklin hangi ifadenin Gİ'si olduğu tartışılmıştır.

Öğrencilerin bu Gİ'de şekilden çok cebirsel hesaplamalar yaparak ifadeye ulaşma eğilimi gösterdikleri görülmüştür. Genel olarak bu bölümde tartışılan Gİ'lerin şekilleri anlamaya çalışırken şekle yönelik araştırmacıya; *Verilen herhangi bir giriş mi? Çemberin merkezi belli mi? Hepsi aynı şekil mi?* gibi bir çok soru yöneltmişlerdir. Gİ'lerin çizimi olabildiğince sade yapıldığından şekiller üzerinde köşeler, merkezler, dik açılar vs. isimlendirilmemekte, bunları farketmek okuyucuya bırakılmaktadır. Araştırmacı da olabildiğince harflendirme yapmamış, gerekli açıklamaları sözel olarak belirtmiştir. Birinci öğretim bölümü aşaması bu açıdan öğrenciler için Gİ'lerin yapılarına biraz daha alıştıkları bölüm olmuştur.

Birinci Gİ geliştirme aşamasında öğrencilerden bazıları ölçekli kağıt kullanmayı tercih etmiş, bazıları da ölçeksiz kağıt kullanmayı tercih etmiştir. Ölçekli kağıt kullanan öğrenciler çizim için kolaylık sağladığı ve birimlerden yararlandıkları için bu kağıt türlerini kullandıklarını belirtmişlerdir. Ölçeksiz kağıt kullananlar ise kendilerini birimle sınırlandırmak istemedikleri için bu kağıt türünü kullandıklarını belirtmişlerdir. Bu aşamanın sonunda öğrencilerin bu süreçte yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Bu süreçte belirlenen hata ve zorluklar Gİ'lerin anlaşılabilirliği ve Gİ geliştirme süreci olarak iki ana temaya ayrılmış bu temalar altında 11 alt tema belirlenmiştir. Gİ'lerin anlaşılabilirliği temasının alt temaları, tarama yapmama, hatalı tarama yapma, adımlama yapmama, hatalı birleştirme, geliştirilen Gİ ifadesini unutmama şeklindedir. Gİ geliştirme süreci teması altındaki alt temalar, oluşturulan çizimden ifadeye ulaşamama, zihnindekini kağıda yansıtamama, üç boyutlu çizim, Gİ'lerin tek şekilde oluşturulabileceğini düşünme, kağıt yetersizliği, kontrol etmeme olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin en fazla üç boyutlu çizim konusunda zorlandıkları ve geliştirdikleri Gİ'leri kontrol etmedikleri için hataya düştükleri görülmüştür. Bu hatalardan çoğunun yapılan klinik görüşmeler sırasında öğrenciler tarafından giderilebildiği görülmüştür. Çizim konusunda yaşanan sıkıntıların, uygun bir bilgisayar yazılımı kullanılarak giderilebileceği düşünülmektedir.

5.3. İkinci Öğretim Deneyi ve İkinci Gİ Geliştirme Sürecine Dair Sonuçlar

İkinci öğretim bölümünde tam sayıların toplamı ve eşitsizlikler konusuna yönelik Gİ'lerin tartışılmasının yanı sıra, Gİ'nin olduğu, görsel ispatların yapıları,

anlaşılabilirlikleri ve genellenebilirlikleri üzerine de tartışmalar yapılmıştır. Öğrencilerin bu öğretim bölümünde, Gİ'yi anlama ve açıklamaya yönelik ilerleme kaydettikleri görülmüştür. Birinci öğretim bölümünde olduğu gibi şekli anlamak için araştırmacıya sorular sormamışlar, birinci öğretim bölümünden daha kısa bir zamanda Gİ'leri çözümlemişlerdir. Gİ'leri 1 boyutlu (uzunlukların kullanıldığı), 2 boyutlu (alanın kullanıldığı) ve 3 boyutlu (hacimin kullanıldığı) şeklinde ayırarak kendi gözlemledikleri sınıflamalarını oluşturmuşlardır.

İkinci Gİ geliştirme bölümünde ise, öğrencilerin birinci Gİ geliştirme bölümüne göre genel olarak daha başarılı oldukları görülmüştür (daha fazla ifadenin Gİ'sini hatasız geliştirebilme, ilk aşamada yaptıkları hataları yapmama, Gİ'nin genellebilirliğini göz önünde bulundurma). Gİ'lerini geliştirirken farklı akıl yürütmeler (tümevarımsal akıl yürütme, yeni bir kavram tanımlama, olası tüm durumlar için şekil oluşturma gibi) sergiledikleri gözlenmiştir. İkinci öğretim aşamasında Gİ'lerin anlaşılabilirliği ve genellenebilirliği üzerine yapan tartışmaların yansımaları öğrencilerin bu aşamada geliştirdikleri Gİ'lerde görülmüştür. Örneğin ikinci aşamada verilen Gİ'deki alanların nasıl tarandığı üzerine bir tartışma yapılmıştır, ikinci Gİ geliştirme aşamasında Emre adlı öğrenci 1 ifade için geliştirdiği Gİ'de alanları farklı şekilde taradığı görülmüştür, bu durum birinci aşamada geliştirilen Gİ'lerde görülmemiştir. Birinci öğretim bölümünde yapılan hataların büyük çoğunluğu bu aşamada giderilebilmiştir. Bu bölümde ilk defa karşılaşılan zorluk ve hatalar: ifadenin açık olduğunu düşünme, kesirli ifadelerin çizimi ve belirli bir sayı için çizim oluşturma şeklinde olmuştur.

5.4. Sürece Yönelik Görüşlere Dair Sonuçlar

Çalışmaya katılan öğrenciler Gİ geliştirme sürecini yararlı buldukları, süreçten keyif aldıkları ve bu sürecin matematiksel becerilerini geliştirdiğini düşündüklerini ifade etmişlerdir. Uğurel ve arkadaşlarının (2016) yaptıkları çalışmada öğrenciler görsel ispat geliştirken eğlendiklerini ve keyif aldıklarını belirtmişlerdir. Benzer şekilde Demircioğlu ve Polat (2015)'ın öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada da öğretmen adayları görsel ispatların zevkli ve merak uyandırıcı olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla görsel ispatın duyuşsal açıdan öğrencilerde olumlu tutumlar oluşturduğu söylenebilir.

. Öğrencilerin Gİ geliştirirken güçlük çektikleri noktaların: üç boyutlu şekillerin çizimine, zihindekileri çizimlerine aktarmaya, verilen ifadeyi görsele dönüştürmeye, farklı yollardan Gİ'yi oluşturmaya çalışmaya ve verilen ifadelerin uzunluğuna yönelik olduğu görülmüştür. Üç boyutlu şekillerin çizimi ve zihindekileri çizimlerine aktarma temalarının birinci ve ikinci Gİ geliştirme sürecinde belirlenen temalarla ortak temaların olduğu görülmüştür. Öğrencilerin çoğu Gİ geliştirme konusunda ilerleme kaydettiklerini düşündüklerini belirtmişlerdir. 2 öğrenci, Gİ geliştirme becerilerinde fark göremediğini söylemiştir. Bu öğrencilerin iki aşama da Gİ geliştirmede oldukça başarılı performanslar sergiledikleri görülmüştür. Kendilerini başarısız görmelerinin nedeni olarak geliştirdikleri Gİ'lerin optimal çizimler olmadığını, daha şık Gİ'lerin geliştirilebileceğini düşünmeleridir. Gİ geliştirme konusunda daha düşük performans gösteren öğrencilerin ilerleme kaydettiğini düşünmelerini göz önünde bulundurularak, Gİ'lerin daha düşük düzeydeki öğrencilerde duyuşsal anlamda pozitif yönde daha etkili olduğu söylenebilir.

Öğrencilerden bazıları Gİ'lerin matematik sınıflarında kesinlikle kullanılması gerektiğini ifade etmiş, bazıları da belirli seviyede öğrencilere uygulanmasının daha uygun olacağını düşündüklerini belirtmişlerdir.

Sonuç olarak yapılan öğretim deneyinin amacına ulaştığı söylenebilir. Öğrencilerin belirli bir sistematığa oturtarak Gİ'ler geliştirebildikleri, ortak hatalar yaptıkları ve küçük müdahalelerle bu hatalarını giderebildikleri görülmüştür. Süreç sonunda öğrencilerin belirli Gİ geliştirmeyi keyifli buldukları ve bu konuda ilerleme kaydettikleri söylenebilir.

5.5. Öneriler

Gİ'lerin matematik derslerinde kullanımının yaygınlaştırılması önerilmektedir. Gİ'lerin hem öğrencilerin ispatı anlamadaki hem de matematiğin formal yapısını kavramadaki ve formal dili kullanmadaki zorlukların giderilmesi açısından gerekli ve yararlı olacağı düşünülmektedir. Öğrencilerin Gİ geliştirirken çizim yapmakta zorlandıkları görülmüştür bu sıkıntının giderilebilmesi için öğrencilere çizim yapmalarını kolaylaştıracak bir yazılım öğretilbilir ve öğrencilerin bu yazılım aracılığıyla geliştirdikleri Gİ'ler incelenebilir. Gİ'lerin değerlendirilmesinin bir formaliteye oturtulması için çalışmaların yapılması önerilmektedir. Gİ'yi matematik

sınıflarında kullanacak öğretmenlerle Gİ'lere yönelik hizmet içi çalışmalar yapılmasını öğretmenlerin hem geliştirme hem uygulama sürecine dahil olduğu çalışmaların yapılması önerilmektedir. Ayrıca farklı örneklem gruplarıyla, daha fazla oturumdan oluşan çalışmaların yapılması önerilmektedir.



KAYNAKÇA

Alsina, C. ve Nelsen, R. B. (2006). **Math made visual. Creating images for understanding mathematics.** The Mathematical Association of America, Washington, DC.

Alsina, C. ve Nelsen, R. B. (2009). **When Less is More. Visualizing Basic Inequalities. Dolciani mathematical expositions.** The Mathematical Association of America, Washington, DC.

Alsina, C. ve Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. **European Journal of Pure and Applied Mathematics**, 3(1), 118-127.

Alsina, C. ve Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. **European Journal of Pure and Applied Mathematics**, 3(1), 118-127.

Bardelle, C. (2010). **Visual proofs: an experiment.** In V. Durand-Guerrier et al (Eds), Proceedings of CERME6. Lyon, France. INRP, 251-260
Bell, C. J. (2011). Proofs without Words: A Visual Application of Reasoning and Proof, *Mathematics Teacher*, 9(104), 690-695.

Bowling, A. (2002). **Research Methods in Health: Investigating Health and Health Services.** Philadelphia, PA: McGraw-Hill House.

Borwein, P. ve Jörgenson, L. (1997). **Visible structures in number theory.** Retrieved from
<http://www.maa.org/sites/default/files/images/images/upload_library/22/Ford/Borwein897-910.pdf> on 10th of April, 2017.

Brieske, T. (1984). Visual Thinking about Rotations and Reflections. **College Mathematics Journal**, 15(5), pp. 406-10.

- Brown, J. (1997). Pictures and Proofs, **The British Journal for the Philosophy of Science**, 48, pp. 161-180.
- Burton, D. M. (2007). **The History of Mathematics: An Introduction**. New York: McGraw-Hill.
- Casselmann, B. (2000). Pictures and proofs. **Notices of the American Mathematical Society**, 47(10), 1257-1266.
- Cobb, P. (2000). **Conducting teaching experiment in collaboration with teachers**. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Cobb, P. ve Bowers, J (1999). Cognitive and situated perspectives in theory and practice. **Educational Researcher**, 28(2), 4-15.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., ve Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, 32(1), 9-13.
- Cobb, P., ve Steffe, L. P. (2010). **The constructivist researcher as teacher and model builder**. In *A journey in mathematics education research* (pp. 19-30). Springer Netherlands
- Cobb, P., ve Steffe, L. (2011). **A journey in mathematics education research**. Netherlands: Springer.
- Creswell, J.W. (2009). **Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches**. (3rd ed.). Los Angeles (CA): Sage Publications.

- Czarnocha, B. (2016). **How to approach a teaching experiment?** In B. Czarnocha, W. Baker, O. Dias, V. Prabhu (Eds.), *The Creative Enterprise of Mathematics Teaching Research*, pp. 163-170. Sense Publishers.
- Caglayan, G. (2015). Math majors' visual proofs in a dynamic environment: the case of limit of a function and the ϵ - δ approach. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 46(6), 797-823.
- Çekmez, E. (2016). Deneysel Doğrulamadan Formel İspata Uzanan Süreçte Dinamik Geometri Yazılımlarının Potansiyeli. **Turkish Journal of Computer and Mathematics Education**, Vol, 7(1), 24-34.
- Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2015). **Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının “Sözsüz İspat” Yöntemine Yönelik Görüşleri**. *International Journal of Social Science*, doi: <http://dx.doi.org/10.9761/JASSS3171>, 41 , p. 233-254.
- Di Martino, P. ve Maracci, M. (2009). **The Secondary- Tertiary Transition: Beyond The Purely Cognitive**. *Proceedings of 33rd Conference of the International Group For the Psychology of Mathematics Education*. (19-24 July 2009). Greece: Thessaloniki.
- De Villiers, M. (1998). An Alternative Approach To Proof In Dynamic Geometry. **Designing Learning Environments For Developing Understanding Of Geometry And Space**, 369-394.
- De Villiers, M. (2004). The Role And Function Of Quasi-Empirical Methods In Mathematics. **Canadian Journal of Math, Science ve Technology Education**, Sayı.4(3). s.397-418.
- Derek, M. (2011). Teaching And Learning Of Proof In The College Curriculum.

Yüksek Lisans Tezi, San Jose State University: The Faculty of the Department of Mathematics.

Dreyfus, T. (1991). **On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education.** In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference, 1*, 33-48.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J. ve Rebello, N. S. (2004, September). **The Teaching Experiment- What it is and what it isn't.** In 2003 Physics Education Research Conference. Vol. 720, pp. 157-160.

Gülşen, İ. (2012). Matematik Öğretmen Adaylarının Görsel Akıl Yürütme Durumlarının İncelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü: Ankara.

Gill, P., Stewart, K., Treasure, E. ve Chadwick, B. (2008). Methods of data collection in qualitative research: interviews and focus groups. **British dental journal**, 204(6), 291-295.

Hanna, G. (2000a). Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, 44, 5- 23.

Hanna, G. (2000b). **Proof and its classroom role: A survey.** In M.J. Saraiva et al (Eds.), *Proceedings of Conference en el IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matematica.* pp. 75 -104. Funado.

Hanna, G. ve Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. **Explanation and Proof in Mathematics.** s.85-100.

Hanna, G. ve Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: A brief survey of Philosophical perspectives. **International Reviews on Mathematical Education, ZDM**, 39, 73-78.

Hanna, G. ve Jahnke, H. N. (1996). **Proof and proving**. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 877–908.

Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H.N., Lin, F.L., Selden, A., Tall, D. ve Yevdokimov, O. (2009). **Discussion Document**. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the 19th International Commission on Mathematical Instruction: Proof and Proving in Mathematics Education (vol. 1). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan: ICMI Study Series 19, Springer.

Hemmi, K. (2010). Three Styles Characterizing Mathematicians' Pedagogical Perspectives on Proof. **Educational Studies in Mathematics**, 75, s. 271-291.

Hoyles, C. ve Jones, K. (1998). **Proof in Dynamic Geometry Contexts**. In: C. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Dordrecht: Kluwer. Pp. 121-128. ISBN: 0792349903

Isaacs, R. "Two Mathematical Papers without Words". **Mathematics Magazine**, Vol. 48, No. 4 (Sep., 1975), p. 198)

İpek, S. (2010). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Dinamik Geometri Yazılımları Kullanarak Gerçekleştirdikleri Geometrik ve Cebirsel İspat Süreçlerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Mathematical Association of America (MAA). Doyle T., Kutler L., Miller R. ve Schueller A., 'Proofs Without Words and Beyond – Introduction'.

<<http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-introduction> > (05 Nisan 2017a)

Mathematical Association of America (MAA). Hawes, S. M., Kolpas, S., ‘Oliver Byrne: The Matisse of Mathematics - Using Byrne's Euclid in a Geometry Class’ <<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/oliver-byrne-the-matisse-of-mathematics-using-byrnes-euclid-in-a-geometry-class> > (6 Nisan 2017b)

Mathematical Association of America (MAA). Doyle, T., Kutler, L., Miller, R., Schueller, A. ., ‘Proofs Without Words and Beyond – Why We Write Proofs’ <<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/oliver-byrne-the-matisse-of-mathematics-using-byrnes-euclid-in-a-geometry-class> > (6 Nisan 2017c)

"News and Letters," **Mathematics Magazine**, Vol. 49, No. 1 (Jan., 1976), pp. 49-52.

Karrass, M. (2012). Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-service Mathematics Teachers. Yayınlanmamış doktora tezi. Columbia University: New York.

Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (2000). **Teaching Experiments**. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp.192-195). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Knuth, E. (2002) Proof as a tool for learning mathematics. **Mathematics Teacher**, 95(7), 486-490.

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, 16.

Kadunz G. ve Yerushalmy M. (2015). **Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics**. In: Cho S. (eds) The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham.

Kitzinger, J. (1994). The methodology of focus groups: the importance of **interaction** between research participants. *Sociology of health & illness*, 16(1), 103-121.

Krueger, R.A. (1994). **Focus Groups: A Practical Guide For Applied Research**. London: SAGE.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proof. **American Mathematical Monthly**. Sayı.90(3). s.174-185.

Lesh, R. ve Lehrer, R., (2000). **Iterative Refinement Cycles for Videotape Analyses of Conceptual Change**. In Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh (eds) *Handbook of research design in mathematics and science education*, 665708. USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Lin, F. L. ve Yang, K.L. (2007). The Reading Comprehension Of Geometric Proofs:The Contribution Of Knowledge And Reasoning. **International Journal of Science and Mathematics Education**. Sayı.5. s.729-754

Maanen, J. V. (2006). Diagrams and mathematical reasoning: Some points, lines and figures. **Journal of British Society for the History of Mathematics**, 21(2), 97-101.

Mancosu, P. (2005) **Visualization in Mathematics Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics**, Mancosu et all. (Eds.) 13-30. Springer: Netherlands.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. **Educational Studies in Mathematics**, 27(3), 249-266.

Miller, R. L. (2012). **On Proofs Without Words**, Retrieved on: 10 November-2015, at

<<http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf>

>

Nelsen. R. (1993). **Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking.**

Mathematical Association of America, Washington.

Nelsen. R. (2001). **Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking.**

Mathematical Association of America, Washington.

Nelsen. R. (2015). **Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual**

Thinking. Mathematical Association of America, Washington.

Patton, M. Q. (1990). **Qualitative Evaluation And Research Methods** (2nd. Ed.).

Newbury Park, CA: Sage.

Reid, D. A. ve Knipping, C. (2010). **Proof in mathematics education.** Research,

Learning and Teaching, Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Selden, J. ve Selden, A. (1995). Unpacking The Logic Of Mathematical Statements.

Educational Studies in Mathematics, Sayı.29 (2), s.123-151.

Steffe, L. P. ve Thompson, P. W. (2000). **Teaching experiment methodology:**

Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Strausova, I. ve Hasek, R. (2012). “Dynamic visual proofs” using DGS. **The**

Electronic Journal of Mathematics and Technology, 7(2), 130-143.

Tekin, B. ve Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik Fonksiyonların Toplam ve

Fark Formüllerinin Ortaöğretim Düzeyinde Görselleştirilmesi. **Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi**, 5, 24-37.

Thornton, S. (2008). **A Picture is Worth a Thousand Words**. Retrieved from <http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF> on 10th of April 2017.

Uğurel, I., Morali, H. S., Karahan, Ö. ve Boz, B. (2016). Mathematically Gifted High, School Students' Approaches to Developing Visual Proofs (VP) and Preliminary Ideas about VP. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology**, 4(3), 174-197.

Weber, K. ve Mejia-Ramos, J. P. (2011). Why And How Mathematicians Read Proofs: An Exploratory Study. **Educational Studies in Mathematics**. Sayı.76(3). s.329-344.

Yang, K.L. ve Lin, F.L. (2008). A Model Of Reading Comprehension Of Geometry Proof. **Educational Studies in Mathematics**. Sayı.67. s.59–76.

Yang, K. L. (2012). Structures of Cognitive and Metacognitive Reading Strategy Use For Reading Comprehension of Geometry Proof. **Educational Studies in Mathematics**. Sayı.80. s.307-326.

Yates, R. C. (1941). "The Trisection Problem," **National Mathematics Magazine**, Vol. 15, No. 6, pp. 278-293.

Zengin, Y. (2017). The effects of GeoGebra software on pre-service mathematics teachers' attitudes and views toward proof and proving. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 1-21.

EKLER

EK-1: Algı Aşamasında Kullanılan Gİ Çözüm Kağıtları

Ad:

Soyad:

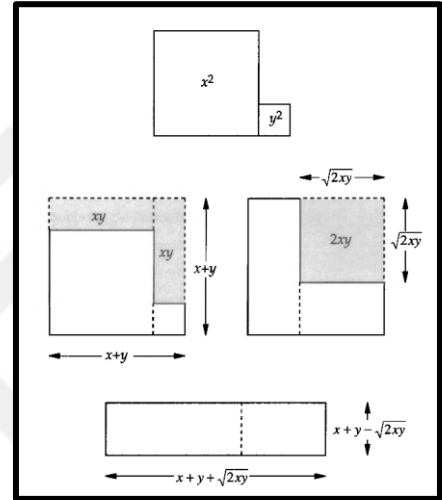
UYGULAMA-1

1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen

ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?

Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$



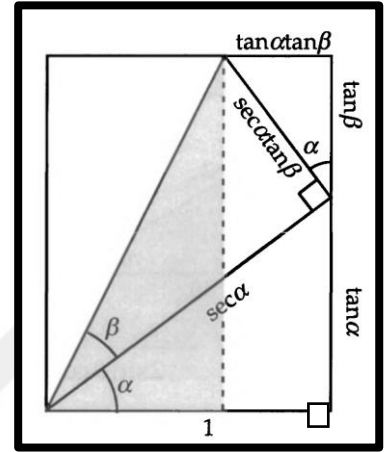
EK-1

Ad:

Soyad:

- 2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



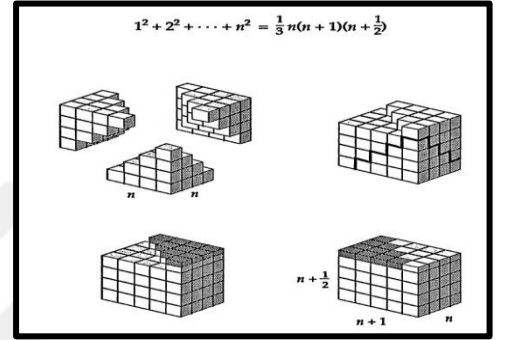
EK-1

Ad:

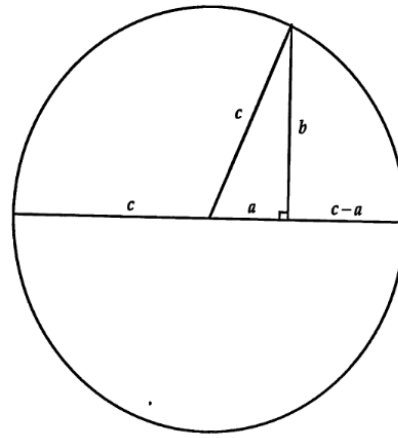
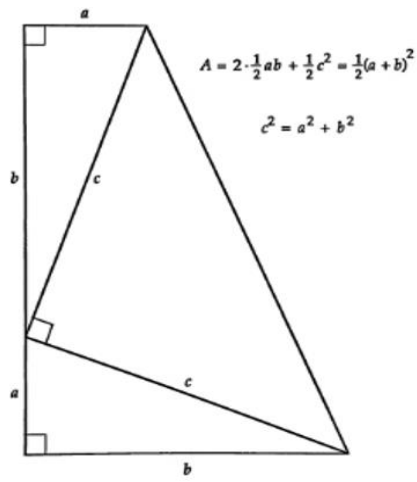
Soyad:

- 3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır?
Düşüncelerinizi yazınız.

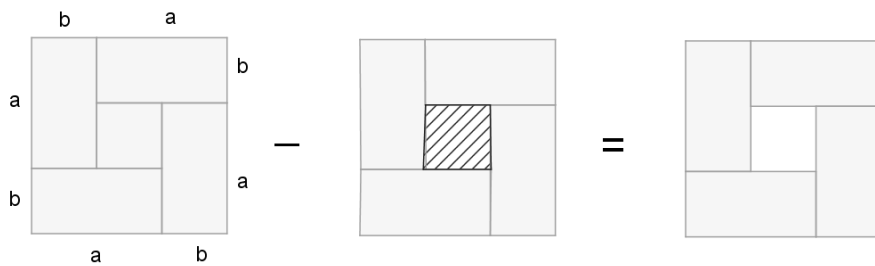
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



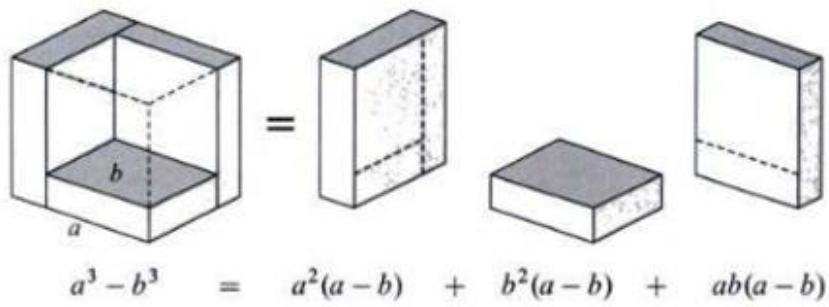
EK-2: Birinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan Örnekler



$$a^2 + b^2 = c^2$$

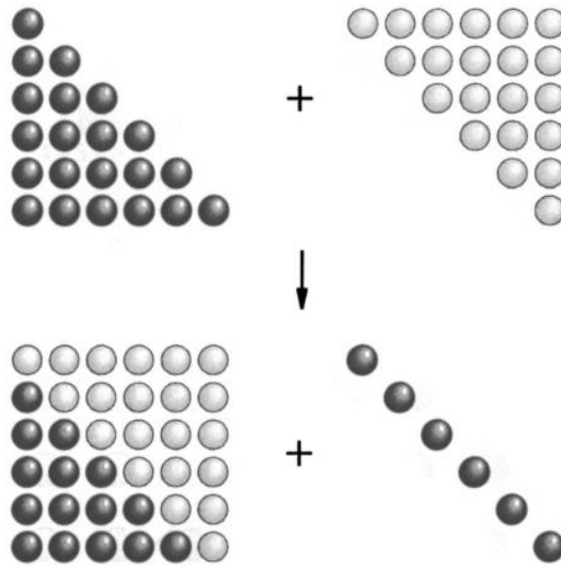
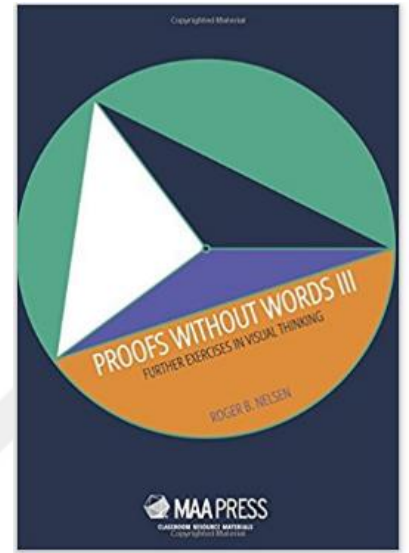
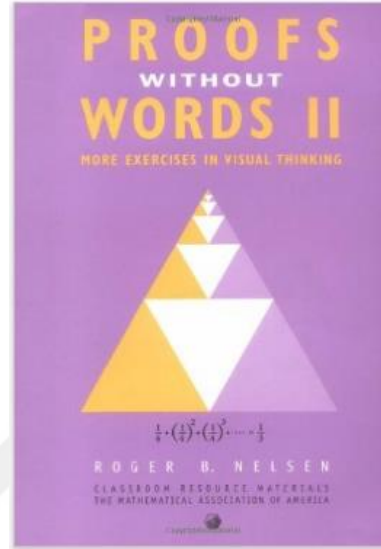
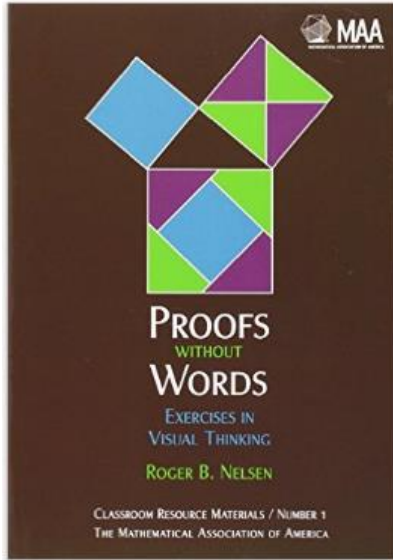


$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$



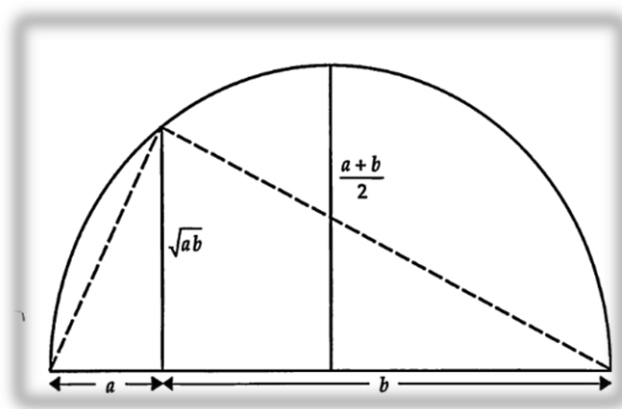
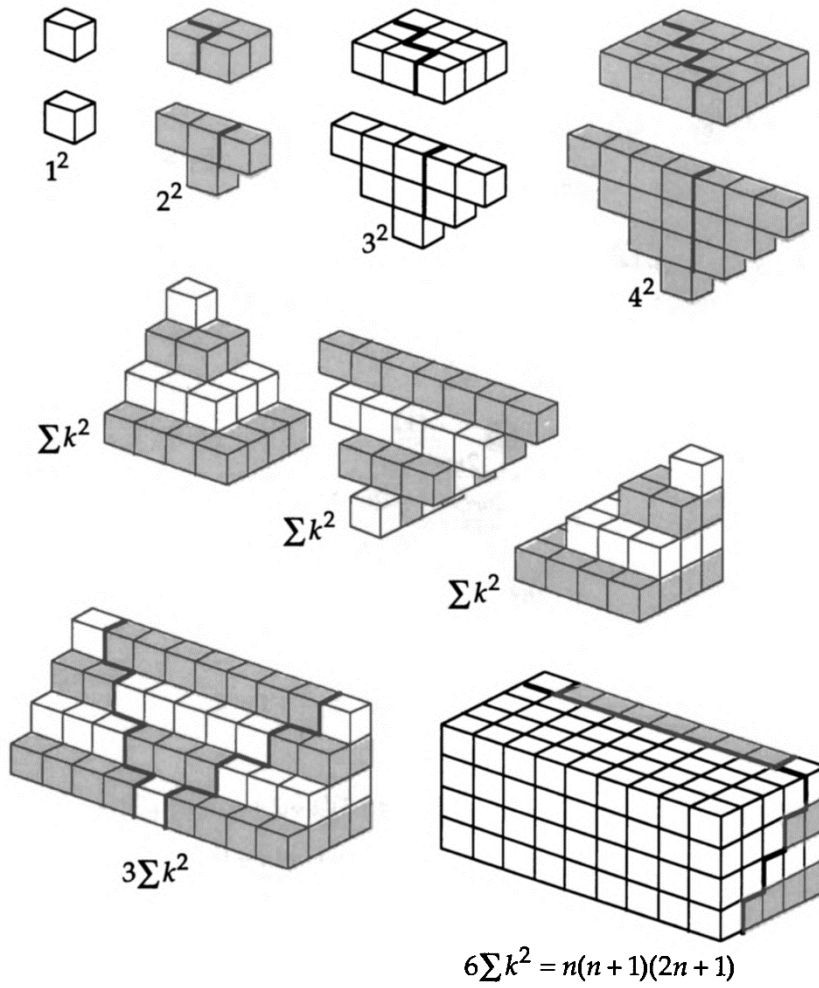
$$a^3 - b^3 = a^2(a-b) + b^2(a-b) + ab(a-b)$$

EK-3: İkinci Öğretim Bölümünde Sınıf Tartışmasına Sunulan Örnekler



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

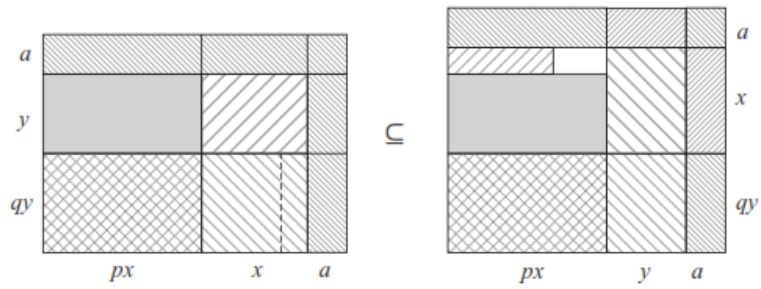
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



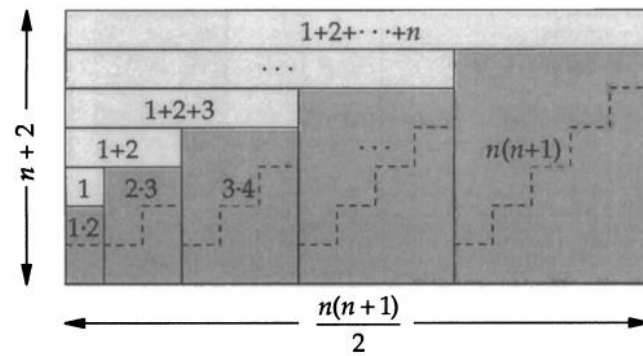
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

This inequality states that if $a \geq 0$, $p \geq q > 0$ and $x \geq y > 0$, then

$$(px + y + a)(x + qy + a) \geq [(p + 1)x + a][(q + 1)y + a].$$



$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$



EK-4 :Son Görüş Bölümünde Yapılan Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

- 1- İlk yaptığımız çalışmadan itibaren bu süreç senin için nasıl geçti?
- 2- Görsel ispat geliştirme konusunda ilerleme kaydettiğini düşünüyor musun?
- 3- Görsel ispat geliştirirken zorlandığınız noktalar nelerdi?
- 4- Görsel ispatların matematik derslerinde kullanımı hakkında ne düşünüyorsunuz?



EK-5

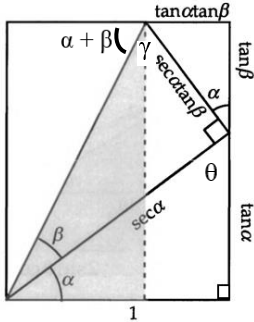
Odak Grup Görüşmesinin Transkript Metni

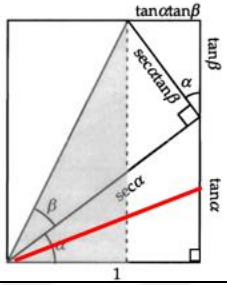
Süre: 20 dk.

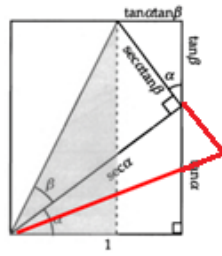
Kişiler: Araştırmacı [A], Emre [E1], Deniz [D], Görkem [G], Yiğit [Y], İrem [İ], Efe [E2]

1	A	Evet arkadaşlar, öncelikle az önceki uygulamada neler yaptınız? Nasıl geçti sizin için? İlk karşılaştığınızda naptınız bu ifadelerle?
2	E1	Voov dedim ben.
3	D	Anlamaya çalıştım bir süre.
4	A	Peki zorlandın mı anlamaya çalışırken?
5	D	İlk başta tanıdık olmadığımız şeyler biraz zorlandım ama sonrasında anlayabildim rahat.
6	A	Peki sen zorlandın mı? [<i>Görkem'e öğrenciye soruyor</i>]
7	G	Bende anlaması kolay oldu ama anladığım şeyi ifade etmekte zorlandım, nasıl dile döneceğimi bilemedim. Mesela biliyor olabilirsin ama karşımdakine bunu gerçek ifadelerle nasıl anlatabileceğimi düşündüm.
8	A	Sözel olarak ifade etmekte zorlandın yani daha çok?
9	G	Evet hocam.
10	E1	Ben voov dedim, baktım ve gerçekten öyleydi. Çok rahat bir şekilde görünüyordu açıkça. Ama yani ben düşünsem düşünsem, yıllarca düşünsem aklıma gelmeyecek fikirler. Üç boyutlu olan mesela müthişti.
11	G	Evet katılıyorum bu şekilleri kim bulmuş?
12	A	Matematikçiler. Peki siz bu diyagramları oluşturamayacağınızı mı düşünüyorsunuz?
13	E1	Ben çok zorlanırdım yani böyle bir şekil oluşturmakta. Heralde yapamazdım.
14	İ	Evet özellikle sonuncusunda [<i>1'den n'e kadar olan sayıların kareleri toplamı olan Gİ'yi kastediyor.</i>] çok zorlanırdım ben de yapamazdım. İlk ikisi belki yapılabilirdi.
15	Y	Ben sistemi yanlış anlamışım başta. Ben yandaki şekil hiç olayda yok zannediyordum, ilişki göremedim. Cebirsel olarak açıklamaya çalıştım ilk ifadeyi x^2+y^2 'li olanı. Sonra bir döndüm baktım şekle ve şaşırdım kaldım.
16	A	Peki bu ifadeleri çözümlerken ispat dediniz bunlara. Gerçekten ispat mı bunlar? Siz bu sene ispat konusunu gördünüz mantık ünitesinde. Görsel olarak bir şekilde, diyagramla ispat yapılabilir miyim?
17	Y	Bütün denemelerde yanlış yaptım ispatla ilgili soruları ben hocam.
18	E1	Evet ben de [<i>E1'i onaylıyor</i>].
19	G	Bence yapılabilir.
20	D	Olabilir.
21	İ	Bu şekillerle yapmış bence işte.

22	Y	Evet [<i>İrem'i onaylıyor.</i>].				
23	A	İspat yani size göre bunlar?				
24	D	İspat değil tam olarak bence de ifade etme şekli olabilir.				
25	E2	İspat değil de buluş bunlar bence.				
26	İ	Öğretme amacıyla kullanmışsınız burada bence daha çok.				
27	G	Bence ispatta sayısal bir şey olmalı, bilimsel gerçekliğe daha yakın olmalı. Bunlar sadece onların bir gösterim şekli.				
28	A	Görkem'e katılıyor musunuz?				
29	İ	Ama mesela trigonometrik olanda daha farklı nasıl yapacaksın ki [<i>Görkem'e soruyor</i>] Uzun uzun yazmak lazım. Burda görsel olarak neden öyle olduğu direk görünüyor.				
30	E1	Bir ifadenin geometrik yorumu mu acaba?				
31	E2	Sıfırdan bir şeyi yapmıyor ama.				
32	Y	İspat bence bunlar.				
33	A	Peki diyelim ki ispat, ya da geometrik ifade şekli. Bu üç örneğin de doğrulama veya ifade etme derecesi aynı mı? Bu açıdan düşündünüz mü?				
34	Y	Mesela birincisinde x^2+y^2 'li olanda başka türlü nasıl olabilirdi düşünüyorum, bir kare oluşturulabilir karenin içinden bir kare daha çıkartıp (duraksıyor). Yine aynı şey oluyor gerçi.				
35	İ	Aslında orda [<i>Yiğit'e cevap veriyor</i>] farklı şekillerden yine aynı veriyi elde etmiş daha sonra tek bir denkleme indirgemiş.				
	NOT	Araştırmacının sorusunun cevabını düşünürken öğrenciler 1. soruya yönelik yorumlar yapmaya başlayınca görüşmenin odağı soruların tartışılmasına kaydırılmıştır.				
36	A	Birinci ifadeye yönelik yorumlar yapmaya başladınız. Verilen ifadeleri tartışalım şimdi biraz da. İlk örnekte ne yapmış? Mantiği ne burda şeklin?				
37	E1	Alan aynı kalacak şekilde önce bir kare haline getirmiş, karenin kenarlarını bulmuş alandan daha sonra geri kalan parçayı, uzunlukları uc uca ekleyip dikdörtgen oluşturmuş ordan tekrar alanı hesaplamış. [<i>Diğer öğrenciler de aralarda evet diyerek E1'in dediklerini onaylıyor</i>]				
38	A	Peki bu şekilde x 'i y 'den büyük almış gibi görünüyor. Eğer bu tüm değerler için geçerli bir ifadeyse x 'i y 'den küçük ya da eşit alsak yine aynı şekilde yapabilir miydik?				
39	G	Yapabiliriz bence.				
40	Y	Orda $x-\sqrt{2xy}$ ve $x+\sqrt{2xy}$ onlar için bozabilir miydi diye düşünüyorum ama x ve y pozitif olarak alındığında sıkıntı yok.				
41	D	Üstü y 'ye tamamlayacak bu sefer.				
42	E1	Eşit olduğunda bu sefer yukardan alıcaktı parçaları yine olurdu şu şekilde [<i>Kağıda parmağıyla çizerek gösteriyor</i>]: <table><tr><td>xy</td><td>xy</td></tr><tr><td>x^2</td><td>y^2</td></tr></table>	xy	xy	x^2	y^2
xy	xy					
x^2	y^2					

43	İ	Evet [E1'i onaylıyor]. Sonuçta kare olarak aldığımız için sıkıntı oluşturmaz yine bu şekilde çizebiliriz. [<i>Diğer öğrenciler de onaylıyor</i>]
44	A	Peki ikinci ifadeye geçelim [$\tan(\alpha + \beta)$ 'nin açılımının verildiği ifadeyi kastediyor]. Burada ne yapmış? E2 sen çok görüş belirtmedin açıklayabilir misin?
45	E2	İşte önce sabitler almış, bir dikdörtgen çizmiş.
46	A	Sabiti nereden almış, bu şekilde yazılan bütün değerler sabit mi? Kafama göre alabilir miyim $\tan a \tan b$ diye?
47	E2	Bence büyük dikdörtgeni sabit olarak almış sonra 1 ve oradan $\tan \alpha \tan \beta$ diye ayırmış. Sonra iki tane pisagordan üçgenin kenarlarını bulmuş ve üçüncü pisagordan da [<i>taralı üçgeni gösteriyor</i>] ifade gelir.
48	A	Gelir mi pisagordan ifade? Başka açıklamasını yapmak isteyen var mı bu şeklin?
49	E1	Ben şöyle düşündüm. Dikdörtgenin alt kenarını 1 kabul etmiş, işlem kolaylığı olsun diye.
50	İ	Evet farketmezdi 30 da diyebilirdi o kenara.
51	E1	Evet yani $(\tan \alpha)/30$ olurdu $(\sec \alpha)/30$ olurdu bu sefer farketmezdi yine de aynı şey gelirdi. Sonra α dediği yerden $\tan \alpha$ 'yı ve oranları yazmış aynı şekilde β olan üçgen için de. Sonra yukarıdaki üçgende sinüs değerini sağlaması için $(\sec \alpha \cdot \tan \beta \cdot \sin \alpha)$ oluyor bu da $(\tan \alpha \cdot \tan \beta)$ olmuş. Daha sonra aynı üçgende tanjant değerinden diğer kenarı bulmuş. Sonra bunla bunu toplamış [<i>dikdörtgenin uzun kenarını gösteriyor</i>], burası da 1 olduğu için [1 olan kenarı gösteriyor], geriye $(1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta)$ kalır, burdan da tekrar tanjant almış bir daha [<i>taralı üçgeni gösteriyor</i>], oradan bulmuş.
52	Y	Ben farklı bir şekilde yaptım.
53	A	Nasıl yaptın?
54	Y	Bu açıya θ dedim [<i>kalemle gösteriyor</i>] O zaman $\alpha + \theta = 90$ olur. Buradan üstteki üçgenin α açısı da gelmiş olur. Daha sonra içteki üçgende şu açıya γ dersek $\beta + \gamma = 90$ olur. Ve şu üçgende [<i>en soldaki üçgeni göstererek</i>] direk $\alpha + \beta$ 'yi görmüş oluruz oranları yazarız. [<i>Yiğit'in açıları yerleştirme şekli</i>] 
55	G	Z kuralı mı yapmış? [<i>Araştırmacıya soruyor.</i>]

56	A	Evet aslında Z kuralından da aynı açılar elde edebiliriz. Ama Yiğit Emre'nin açıklamasına ek olarak sağ üstteki üçgende α açısını nasıl yerleştirildiğini de açıklamış oldu.
57	Y	Evet hocam benim ana üçgenim soldaki beyaz üçgeni oranları oradan buldum.
58	A	Peki bu şekilde $\tan(\alpha - \beta)$ 'yi bulabilir miydik?
59	İ	Bilmem ki bulabilir miydik acaba?
60	E2	α 'dan β 'yi çıkarmamız gerekirdi bir yerde.
61	A	Evet peki nasıl çıkartabilirdim şekilde bunu nasıl gösterebilirdim?
62	D	Şuradan bir çizgi çekebilirdik β olacak şekilde [Parmağıyla işaret ederek]. Ama buradan nasıl gelirdi bilmiyorum.
63	G	Evet hocam böyle çizebiliriz. [Deniz'in de tarif ettiği şekilde aşağıdaki gösterilen doğruyu çiziyor.] 
64	İ	Şu $(\alpha + \beta)$ 'nin diğer tarafındaki üçgenden bulabiliriz.
65	A	Senin yaptığın $\tan(90 - (\alpha + \beta))$ oluyor sanırım, yani kotanjant için bulmuş oluyorsun.
66	İ	Evet ama burdan işlemle de $\tan(\alpha - \beta)$ 'yi bulamaz mıyız?
67	Y	Şimdi hocam şuradan çizsek uzatsak üçgeni, bir üçgen daha yapsak? [Eliyle çizimini tarif ediyor]
68	A	Boş kağıda çizip gösterebilsen daha iyi olur. Bir dene istersen.
69	A	Daha önce böyle bir şekille karşılaştık dediniz uygulamayı yaparken. Derste mi görmüştünüz?
70	E1	Evet hocamız yapmıştı derste.
71	A	Yine $\tan(\alpha + \beta)$ için mi yapmıştı?
72	İ	Toplam farkın tamamını çıkarmıştık sanırım.
73	E1	Yok sinüsleri yapmıştı sanırım sadece.
74	İ	Ama zaten sinüsten diğerlerini de bulabilirdik.
75	G	Yiğit'in dediği şu hocam. Benim bu kenara çektiğimi o uzatarak çekmiş [Yiğit çizimini tamamladığı kağıdı gösteriyor].
76	Y	Evet hocam şu şekilde çizdim, ama çıkarabilir miyiz burdan bilmiyorum, biraz daha uğraşmam lazım.



77	G	tan α 'nın oradan kalan uzunluğu bulmak zor.
78	A	Şimdilik, diğer ifadeleri çıkarmak ödev kalsın düşünmek için size. Şimdi son ifadeye geçelim, çok beğendiğiniz. Deniz sen anladım ama açıklayamıyorum yazmışsın kağıdına, sözlü olarak açıklamaya çalışmak ister misin?
79	D	Yani açıklayamadım aslında.
80	A	Ne yapmışız burda?
81	D	Çok mantıklı burdan baktığımız zaman gerçekten. Ama bu nerden akla geldi, nasıl bu yarımı burdan aldı falan filan onları pek şey yapamadım.
82	G	Ben anlatabilir miyim hocam?
83	A	Anlat bakalım.
84	G	Şimdi muhtemelen 1'den başlayıp n'e kadar yapmaya çalışmış ilk başta 1 tane sonra ikinci katmanda 4 tane yani kareleri alarak aşağı doğru devam etmiş en aşağıdaki de n^2 oluyor. Şimdi biz burda neyi bulmaya çalışıyoruz en sondukinde hacmini sanırım.
85	Y	Benim aslında kareleri görünce direkt alan gelmişti aklıma.
86	E2	Ben de alandan düşünmüştüm.
87	A	Yiğit dedi ki benim aklıma alan geldi bu ifadeyi görünce, peki biz aynı ifadenin alanlı versiyonunu çizebilir miydik?
88	E1	Evet hocam çizebilirdik bence.
89	İ	Evet bence de.
90	E1	Zaten ikinci boyuttan başlayarak üçüncü boyuta çıkmışız.
91	G	Amaç da o zaten bence iki boyuttan üç boyuta çıkarak daha belirgin hale getirmek şekli.
92	A	Yani daha belirgin hale getirmek amaçlı üç boyutlu şekil kullanmış öyle mi?
93	G	Evet düzgün bir cisim elde etmeye çalışmış, aynı üç şekli bir araya getirerek. Zaten en sonunda da o yüzden üçe bölüyoruz. Bunları birleştirdiğimizde cismin bir kenarı n diğeri de eklediğimiz için $n+1$ oluyor. Yukarıda da 1 katman fazladan kalıyor. Bunu da ortadan ikiye bölüp katladığımızda da cuk oturuyor üstüne. Bir prizma elde etmiş oluyoruz oradan da hacmini buluyoruz. Daha sonra da bütün hacmi üçe bölüyoruz.
94	E1	Ben de üç parça çarpım olduğu için hacim yapardım.
95	A	Herkes bunu anlayabildi mi?
96		[Herkes evet diyerek onaylıyor.]
97	E2	Evet ben de anladım üç parça olduğu için üçe bölüyor en son. Asıl soru bu nerden aklına gelmiş hocam?
98	D	Evet gerçekten nasıl düşünmüş bunu.

99	Y	Benim de az önce sorduğunuz kare kısmı aklıma takıldı mesela.
100	A	Düşünmeniz için bir ödev daha kalsın size iki boyutta yapabilir miydik sorusu. Peki bu şekilde n'i kaç almış mesela?
101	İ	Ben hesaplamıştım incelerken 4.
102	A	Peki $n=5$ için alsam da aynı şekilde elde edebilir miydim? Şekil bozulur mu?
103	G	Yok bozulmaz. Yine aynı şekilde devam ederdik.
104	E1	$n=4$ için oluyorsa 5 içinde hemen altına ekleriz aynı şekilde olur bence de.
105	A	Peki hoşunuza gitti mi bu uygulama?
106	G	Ben en çok bunu beğendim [<i>1'den n'e kadar olan sayıların kareleri toplamını kastediyor</i>].
107	E1	Evet ben de.
108	A	Diğerlerini beğenmediniz mi?
109	G	Trigonometrik olanı az çok biliyoduk.
110	A	Anladım o çok şaşırtmadı sizi.
111	Y	Evet α - β için olanda düşünürdük biraz daha.
112	D	Böyle formüllerin nerden geldiğini görmek çok güzel oldu hocam.
113	Y	Mesela çemberde falan da ilginç olabilir bunlar bence.
114	A	Evet güzel olabilir, peki siz geliştirmek ister miydiniz bu diyagramlardan?
115	G	İsterdik tabii ki ama sanmıyorum çok zor.
116	E1	Çok zor hocam.



T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 12018877-604.01.02-E.8987003

14.06.2017

Konu : Nurefşan ŞADAN'ın
Araştırma İzni

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİNE
(Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü)

- İlgi : a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 07/03/2012 tarihli ve B.08.0.YET.00.20.00.0/3616 sayılı yazısı (Genelge 2012/13)
b) 31/05/2017 tarihli ve 1041 sayılı yazınız.
c) 13/06/2017 tarihli ve 8893364 sayılı Valilik Onayı.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans öğrencisi Nurefşan ŞADAN'ın "Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması " konulu tez çalışması için kullanacağı ölçekleri, Müdürlüğümüz Gaziemir İlçesine bağlı Özel Rota Koleji Fen Lisesi'nde uygulama isteği ilgi (c) Valilik Onayı ile uygun görülmüştür.

Araştırmacı tarafından yapılan araştırmanın tamamlanmasından itibaren en geç iki hafta içinde Araştırmanın Teslimine İlişkin Taahhütname Tutanağı doldurulup, araştırmanın CD'ye aktarılması sağlanarak Müdürlüğümüze gönderilmesi gerekmektedir.

Bilgilerinize ve gereğini arz ederim.

Mehmet Fatih VARGELOĞLU

Müdür a.

Müdür Yardımcısı

Ek:

- 1- Valilik Onayı (1 sayfa)
- 2- Araştırma Değerlendirme Formu,
Anket Formları (7 sayfa)
- 3- Taahhüt Formu (1 sayfa)

Aslı ile Aynısı
5070 sayılı yasa ile
elektronik olarak imzalanmıştır
...1.6.2017...2897...



T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 12018877-604.01.02-E.8893364

13/06/2017

Konu :Nurefşan ŞADAN'ın
Araştırma İzni

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 07/03/2012 tarihli ve B.08.0.YET.00.20.00.0/3616 sayılı yazısı (Genelge 2012/13)
b)Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 31/05/2017 tarihli ve 1041 sayılı yazısı.

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans öğrencisi Nurefşan ŞADAN'ın "Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması " konulu tez çalışması için kullanacağı ölçekleri, Müdürlüğümüz Gaziemir İlçesine bağlı Özel Rota Koleji Fen Lisesi'nde uygulama isteği ilgi (b) yazı ile belirtilmektedir.

Söz konusu ölçeklerin uygulanmasının, yukarıda adı geçen okulda 2016-2017 Eğitim öğretim yılında eğitim öğretimi aksatmayacak ve eğitim kurumu yöneticilerinin uygun gördüğü şekilde yapılması Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde olurlarınıza arz ederim.

Ömer YAŞI
Millî Eğitim Müdürü

Ek:
Araştırma Değerlendirme Formu,
Anket Formları (7 sayfa)

OLUR
13/06/2017
Ahmet Ali BARIŞ
Vali a.
Vali Yardımcısı

T.C.
İZMİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN	
Adı Soyadı	Nurefşan ŞADAN
Kurumu / Üniversitesi	Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği
Araştırma yapılacak iller	İzmir
Araştırma yapılacak eğitim kurumu ve kademesi	(Gaziemir) Özel Rota Koleji Fen Lisesi
Araştırmanın konusu	Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması
Üniversite / Kurum onayı	---
Araştırma/proje/ödev/tez önerisi	Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması- Yüksek Lisans Tez
Veri toplama araçları	Ek 1 (3 sayfa) Ek 2 : Öğretim Aşamasında Kullanılacak Olası Örnekler (2 sayfa) Ek 3 (Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları) Not. Görüşmeler ses kayıt cihazı ve video kamera kullanılarak, öğretim uygulaması ise video kamerayla kayıt altına alınacaktır.
Görüş istenilecek Birim/Birimler	-----
KOMİSYON GÖRÜŞÜ	
İlgi: Milli Eğitim Bakanlığı'nın 07/03/2012 tarihli ve 3616 sayılı Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri Konulu, 2012/13 Sayılı Genelgesi. Genelge gereğince; araştırma başvurusu olması gereken nitelikler açısından incelenmiş olup, araştırmanın 2016-2017 öğretim yılında eğitim öğretimi aksatmayacak ve eğitim kurumları yöneticilerinin uygun gördüğü şekli ile yapılmasına oybirliği ile karar verilmiştir	
Komisyon Kararı	Oybirliği ile alınmıştır.
Muhalef üyenin Adı ve Soyadı: ----	Gerekçesi; -----

KOMİSYON

08./06/2017

(Başkan)
M. Fatih VARGELOĞLU
Müdür Yardımcısı

Üye
Dr. Resti YAVUZ
Öğretmen

Üye
Nurdan MARAL
Öğretmen

Üye
Emre BAYRAK
Öğretmen

Üye
Gökçe GÖÇERİ
Öğretmen

(Zapıt)

EK-1

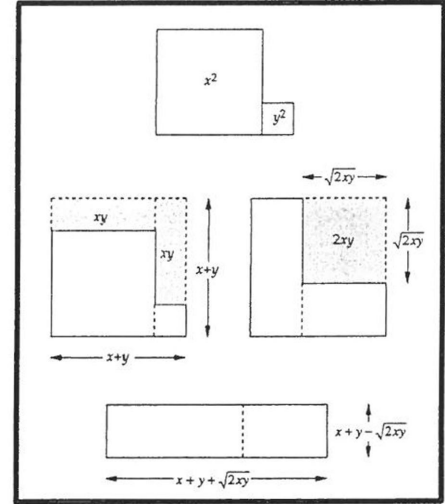
Ad:

Soyad:

UYGULAMA-1

- 1- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

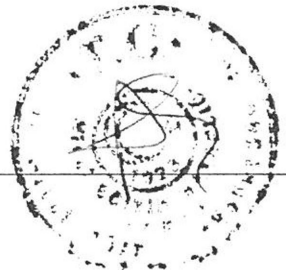
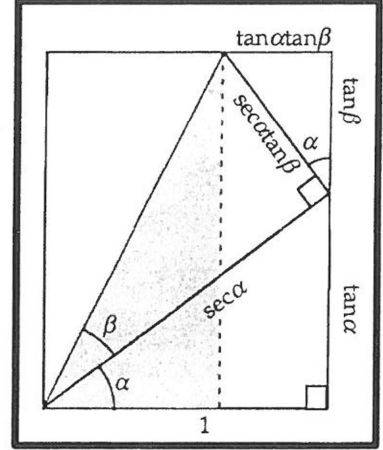


Ad:

Soyad:

- 2- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

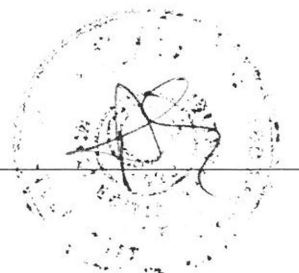
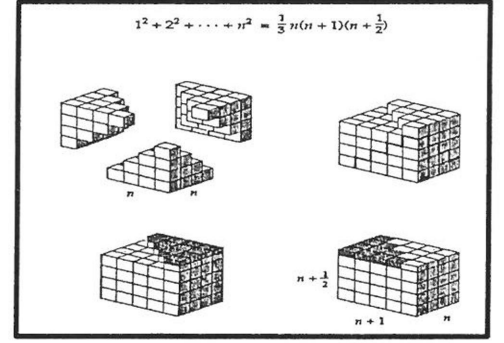


Ad:

Soyad:

- 3- Yandaki şekille, alttaki kutucukta verilen ifade arasında nasıl bir ilişki vardır? Düşüncelerinizi yazınız.

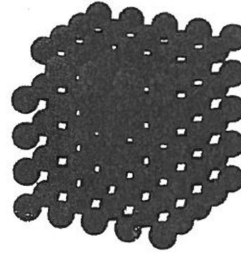
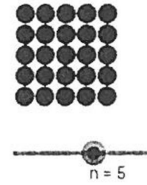
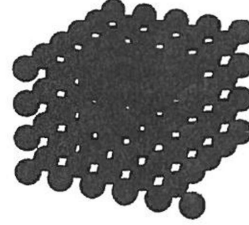
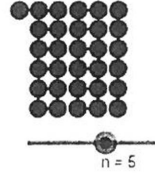
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



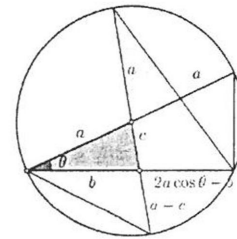
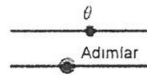
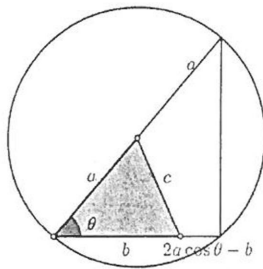
EK-2

ÖĞRETİM AŞAMASINDA KULLANILACAK OLASI ÖRNEKLER

1-) $n^3 - 1 = (n - 1) \cdot [n(n + 1) + 1]$



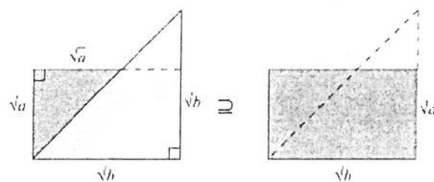
2-) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$



3-)

$$a, b > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

I.

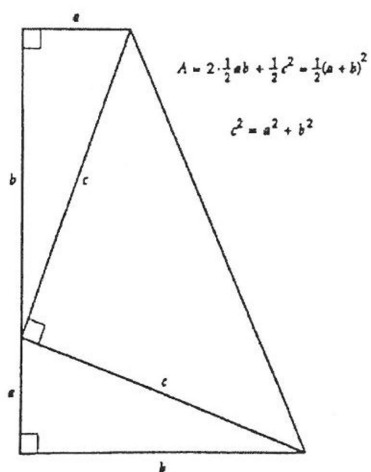


$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

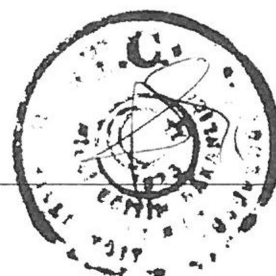
—Edwin Beckenbach & Richard Bellman

(Nelsen, 2015: 93)

4-)



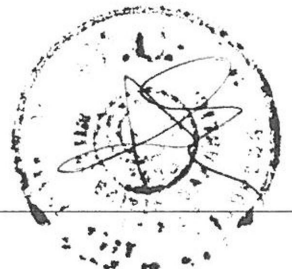
(Nelsen, 1993: 7)



EK-3

Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

- 1- Görsel ispat geliştirme süreci sizin için nasıl geçti?
- 2- Görsel ispat geliştirirken zorlandığınız noktalar nelerdi?
- 3- Görsel ispatı birlikte mi yoksa bireysel mi geliştirmeyi tercih edersiniz?
- 4- Görsel ispatların matematik derslerinde kullanımı hakkında ne düşünüyorsunuz?



Tarih: 10/07/2017

Tez Başlığı:

Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Süreçlerinin İncelenmesi Üzerine Bir Öğretim Deneyi Çalışması

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 171 sayfalık kısmına ilişkin, 10/07/2017 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı %2 dir**.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ✓

Filtreleme Tipi 1 (Maksimum %15) ✓

Filtreleme Tipi 2 (Maksimum %30) □

☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça hariç, ☒ Alıntılar dâhil, ☒ Altı (6) kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça dâhil, ☐ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ✓	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ✓	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Nurefşan ŞADAN
Öğrenci No : 2015950110
Anabilim Dalı : Matematik Ve Fen Bilimleri Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı
Programı : Matematik Öğretmenliği
Statüsü : Yüksek Lisans ✓ Doktora □

ÖĞRENCİ

DANIŞMAN

(Adı Soyadı, İmza, Tarih)

(Unvan, Adı Soyadı, İmza, Tarih)

Nurefşan Şadan

Doç. Dr. Işıkhan Uğurel

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (□) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.