



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAHLER'İN U SAYILARI

Büşra CAN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ**

Aralık, 2017

İSTANBUL

Bu çalışma, 22.12.2017 tarihinde aşığıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı,
Matematik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

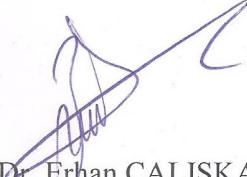
Tez Jürisi



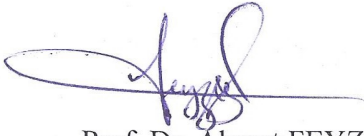
Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



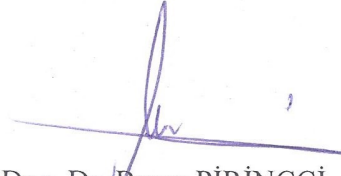
Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Ahmet FEYZİOĞLU
Boğaziçi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Yrd. Doç. Dr. Beran PİRİNÇÇİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca her aşamada benden bilgisini, özverisini ve tecrübesini esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Aralık 2017

Büşra CAN



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	3
2.1. SÜREKLİ KESİRLER.....	3
2.2. U SAYILARI	24
2.2.1. Transandantlık Kriteri	24
2.2.2. Um Kümeleri	30
2.2.3. Kompleks Sayıların Mahler Ve Koksma Sınıflandırmaları	74
2.2.4. Küçük Transandantlık Ölçüsüne Sahip Um Sayıları.....	85
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	98
4. BULGULAR.....	99
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	100
KAYNAKLAR.....	102
ÖZGEÇMİŞ	103

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$	: $\{a_n\}$ reel sayı dizisinin üst limiti
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$	: $\{a_n\}$ reel sayı dizisinin alt limiti
$\max(a_1, \dots, a_n)$	: $a_1, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) reel sayılarının maksimumu
$\min(a_1, \dots, a_n)$	: $a_1, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) reel sayılarının minimumu
$(a_1, \dots, a_n)$	: $a_1, \dots, a_n$ tam sayılarının en büyük ortak böleni
$[a_1, \dots, a_n]$	: $a_1, \dots, a_n$ tam sayılarının en küçük ortak katı
$ \bar{\alpha} $	: α cebirsel sayısının $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerinin mutlak değerlerinin maksimumu
∂P	: P polinomunun derecesi
$H(P)$	: Tam katsayılı P polinomunun yüksekliği
$\partial(\alpha)$	: α cebirsel sayısının derecesi
$H(\alpha)$	: α cebirsel sayısının yüksekliği
$[\xi]$	: ξ reel sayısının tam kısmı, yani ξ den büyük olmayan en büyük tam sayı

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAHLER'İN U SAYILARI

Büşra CAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Gülcan KEKEÇ

Mahler, transandant sayıları birbirine yabancı üç sınıfa ayırmıştır. Bu sınıflardan birisini U sayıları oluşturur. LeVeque, U sınıfını U_m ($m=1,2,\dots$) alt sınıflarına ayırmıştır. U_m sınıfının elemanlarına U_m sayıları denir. Bu tez çalışmasında sürekli kesirlerden yararlanılarak U_m sayıları üzerine derinlemesine bir inceleme yapılmıştır ve küçük transandantlık ölçüsüne sahip U_m ($m=1,2,\dots$) sayılarının varlığından bahsedilmiştir.

Aralık 2017, 111 sayfa.

Anahtar kelimeler: U sayıları, transandant sayılar, Liouville sayıları.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

MAHLER'S U NUMBERS

Büşra CAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gülcan KEKEÇ

Mahler divided the transcendental numbers into three different classes. U numbers are one of these classes. LeVeque divided the U class into U_m ($m = 1, 2, \dots$) subclasses. The elements of U_m are called U_m numbers. In this thesis, an in-depth study is made on the U_m numbers by using continued fractions and it is mentioned that there are U_m ($m=1, 2, \dots$) numbers with small transcendence measure.

December 2017, 111 pages.

Keywords: U numbers, transcendental numbers, Liouville numbers.

1. GİRİŞ

Mahler [4], 1932 yılında transandant sayıları birbirine yabancı üç sınıfa ayırmıştır. Bu sınıflardan birisini U sayıları oluşturur. LeVeque [3], 1953 yılında, U sınıfını U_m ($m = 1, 2, \dots$) alt sınıflarına ayırmıştır ve her bir U_m alt sınıfının boş kümeden farklı olduğunu göstermiştir. U_m sınıfının elemanlarına U_m sayıları denir.

Bu tez çalışmasında U_m sayıları incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde (Bölüm 2.1) sürekli kesirler hakkında bilgi verildikten sonra çalışmanın ikinci bölümünde verilen teoremlerin (Teorem 2.11 ve Teorem 2.12) ispatında kullanılan bazı teoremler (Teorem 2.6 ve Teorem 2.7) ele alınmıştır.

Bölüm 2.2.1 de, kompleks sayılar için bir transandantlık kriteri verilmiştir. Daha sonra Bölüm 2.2.2 de, LeVeque [3] in makalesi derinlemesine incelenmiş ve makalede kapalı olarak verilen teorem ispatları açık hale getirilmiştir. Bu bölümde öncelikle bir L_m - dizisinin tanımı yapılmış ve bir ξ kompleks sayısı için bir L_m - dizisi var ise ξ nin bir transandant sayı olduğu vurgulanmıştır. Daha sonra $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U_m = \left\{ \xi \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \xi \text{ için bir } L_m - \text{dizisi vardır, ancak } \xi \text{ için} \\ 1 \leq n < m \text{ olacak şekilde bir } L_n - \text{dizisi yoktur.} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

kümesi tanımlanmış ve her $m \in \mathbb{N}$ için U_m kümesinin boştan farklı olduğu Teorem 2.15 ile verilmiştir.

Bölüm 2.2.3 te, Mahler ve Koksma sınıflandırmaları hakkında bilgi verilmiştir. Mahler, her bir ξ kompleks sayısı için tek türlü belirli olan $w(\xi)$ ve $\mu(\xi)$ değerlerini tanımlamış ve $w(\xi) = \infty$, $\mu(\xi) < \infty$ olduğu durumda ξ kompleks sayısını bir U sayısı olarak adlandırmıştır. Çalışmanın bu bölümünde U sayılarının oluşturduğu kümenin,

U_m ($m = 1, 2, \dots$) kümelerinin ayrık birleşimi olduğu ve U_1 kümesi ile Liouville sayıları kümesinin tamamen aynı olduğu gösterilmiştir. (Not 2.10, Not 2.11.) Bu sonuçlar literatürde bilinmekte olan sonuçlardır, ancak ispatları kendi bakış açımızla ele aldık.

Son olarak Bölüm 2.2.4 de Alınacak, Avcı, Bugeaud [7] makalesi incelenmiştir. Koksma Sınıflandırmasına göre ξ kompleks sayısı bir U_m sayısı ise $w_m^*(\xi) = \infty$ ve $1 \leq n < m$ için $w_n^*(\xi) < \infty$ dur. Bu bölümde verilen Teorem 2.16 ile $1 \leq n < m$ için küçük $w_n^*(\xi)$ değerine sahip ξ U_m sayılarının varlığı ortaya konulmuştur.



2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde öncelikle Bölüm 2.2.2 de incelediğimiz LeVeque [3] in makalesindeki teoremlerin ispatlarında ihtiyaç duyulduğu için, sürekli kesirler hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra kompleks sayılar için bir transandantlık kriteri verilerek LeVeque [3] in makalesi incelenmeye başlanmıştır. Bu inceleme sırasında makaledeki teoremlerin kapalı olarak verilen ispatları açık hale getirilmiştir. Tanım 2.7 ile U_m ($m \in \mathbb{N}$) kümesi tanımlanmış ve her $m \in \mathbb{N}$ için U_m kümesinin boş kümeden farklı olduğu Teorem 2.15 ile verildikten sonra bölüm 2.2.3 e geçilmiştir.

Bölüm 2.2.3 te, Mahler ve Koksma sınıflandırmaları hakkında bilgi verilmiştir. Mahler $w(\xi) = \infty$, $\mu(\xi) < \infty$ olduğu durumda ξ kompleks sayısını bir U sayısı olarak adlandırmıştır. Çalışmanın bu bölümünde U sayılarının oluşturduğu kümenin, U_m ($m = 1, 2, \dots$) kümelerinin ayrık birleşimi olduğu ve U_1 kümesi ile Liouville sayıları kümesinin tamamen aynı olduğu gösterilmiştir. (Not 2.10, Not 2.11.) Böylece LeVeque [3] U sayılarını U_m alt sınıflarına ayırmıştır.

Son olarak Bölüm 2.2.4 te Alnaçık, Avcı, Bugeaud [7] makalesi incelenmiştir. Bu bölümde verilen Teorem 2.16 ile $1 \leq n < m$ için küçük $w_n^*(\xi)$ değerine sahip $\xi \in U_m$ sayılarının varlığı ortaya konulmuştur.

2.1. SÜREKLİ KESİRLER

Bu bölümde sürekli kesirler hakkında bilgi verilmiş ve LeVeque [3] in makalesindeki teoremlerin ispatlarında ihtiyaç duyulduğu için sürekli kesirlerin yaklaşım kesirlerine ilişkin bazı teoremler verilmiştir. Bu bölümde sürekli kesirler LeVeque [1] in kitabından ve onun bakış açısıyla anlatılmıştır.

Tanım 2.1. (LeVeque, [1]) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Farey dizileri $F_n = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 0 < b \leq n, (a, b) = 1 \right\}$ şeklinde tanımlanır.

Görüldüğü gibi $F_1 = \mathbb{Z}$ ve $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$ dir. Ayrıca $s, s \leq n$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı ise her $r \in \mathbb{Z}$ için $\frac{r}{s} \in F_n$ dir.

Tanım 2.2. (LeVeque, [1]) $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in F_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ve $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ olacak şekilde hiçbir

$x \in F_n$ yoksa, yani $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_n de ardışık ise, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ ye F_n de komşu denir.

Teorem 2.1. (LeVeque, [1]) a) $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_n de komşu ise $|ps - qr| = 1$ dir.

b) Eğer $|ps - qr| = 1$ ise $\max(q, s) \leq n < q + s$ olacak şekildeki $n \in \mathbb{N}$ ler için $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_n de komşudur ve onları ayıran ilk eleman F_{q+s} deki $\frac{p+r}{q+s}$ rasyonel sayıdır. ($\frac{p+r}{q+s}$ rasyonel sayısına, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ nin orta değeri denir.)

İspat. Önce **b)** yi ispatlayalım. $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in F_n$ ve $qr - ps = 1$ olsun. ($qr - ps = -1$ için de benzer şekilde gösterilir.) Bu durumda $\frac{r}{s} = \frac{1}{qs} + \frac{p}{q}$ olur ve $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in F_n$ olduğundan $q, s > 0$ olup, buradan $\frac{1}{qs} > 0$ olur. Böylece $\frac{r}{s} > \frac{p}{q}$ dir.

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right)$$

$$t \longrightarrow f(t) = \frac{p+tr}{q+ts}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu birebirdir. Çünkü,

$$\begin{aligned} t_1, t_2 \in (0, \infty) \text{ için } f(t_1) = f(t_2) &\Rightarrow \frac{p+t_1r}{q+t_1s} = \frac{p+t_2r}{q+t_2s} \\ &\Rightarrow (p+t_1r)(q+t_2s) = (p+t_2r)(q+t_1s) \Rightarrow ps(t_2-t_1) = rq(t_2-t_1) \\ &\Rightarrow (ps-rq)(t_2-t_1) = 0 \quad (ps-rq = -1) \Rightarrow t_1 = t_2. \end{aligned}$$

Ayrıca f örten bir fonksiyondur, yani

$$\forall y \in \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right) \text{ için } \exists t \in (0, \infty) \text{ öyleki } f(t) = y$$

dir. Çünkü, $f(t) = \frac{p+tr}{q+ts} = y$ ise $t = \frac{p-yq}{ys-r}$ olur. Ayrıca $\frac{p}{q} < y < \frac{r}{s}$ olduğundan

$p-yq < 0$ ve $ys-r < 0$ olup, $\frac{p-yq}{ys-r} > 0$ elde edilir. O halde, $t = \frac{p-yq}{ys-r} \in (0, \infty)$ alırsak,

$$f(t) = \frac{p + \frac{p-yq}{ys-r}r}{q + \frac{p-yq}{ys-r}s} = \frac{pys - pr + pr - yqr}{qys - qr + ps - yqs} = \frac{y(ps - qr)}{ps - qr} = y$$

bulunur.

$f(t)$ nin rasyonel olması için gerek ve yeter koşul t nin rasyonel olmasıdır. Dolayısıyla bütün pozitif rasyonel sayılar ile $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ aralığındaki tüm rasyonel sayılar arasında bire-bir eşleşme vardır. Şimdi $t = \frac{u}{v}$, $(u, v) = 1$, $u > 0$, $v > 0$ alalım. $f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vp + ur}{vq + us}$ dir.

$$\left. \begin{array}{l} q(vp + ur) - p(qv + us) = u(qr - ps) = u \\ s(vp + ur) - r(qv + us) = v(ps - qr) = -v \\ (u, v) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (vp + ur, vq + us) = 1.$$

Böylece u ve v tüm aralarında asal pozitif tam sayı çiftlerini gösterirken $f\left(\frac{u}{v}\right)$, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ arasındaki tüm rasyonel sayı değerlerini alır. Ayrıca f monoton artandır. Çünkü, $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} f(t_1) \leq f(t_2) &\Leftrightarrow \frac{p+t_1r}{q+t_1s} \leq \frac{p+t_2r}{q+t_2s} \Leftrightarrow (q+t_2s)(p+t_1r) \leq (p+t_2r)(q+t_1s) \\ &\Leftrightarrow qt_1r + pt_2s \leq qt_2r + pt_1s \Leftrightarrow qr(t_1 - t_2) - ps(t_1 - t_2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(qr - ps)}_{=1}(t_1 - t_2) \leq 0 \Leftrightarrow t_1 - t_2 \leq 0 \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $u = v = 1$ alırsak $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ arasındaki paydası en küçük rasyonel sayıyı

bulmuş oluruz ve bu rasyonel sayı $\frac{p+r}{q+s}$ dir. Dolayısıyla $n < q + s$ olacak şekildeki

n ler için, F_n de, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ arasında hiç rasyonel sayı yoktur. Ayrıca $\max(q, s) < q + s$

olduğundan $\max(q, s) \leq n < q + s$ olacak şekildeki n ler için, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_n de komşudur

ve n leri büyüttükçe, F_n de karşımıza çıkan ilk eleman $\frac{p+r}{q+s} \in F_{q+s}$ dir. Böylece **b)** ispatlanmış olur.

a) $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_n de komşu olsun. $|qr - ps| = 1$ olduğunu tümevarımla gösterelim:

$n = 1$ olsun. $F_1 = \mathbb{Z}$ olduğundan herhangi bir $a \in \mathbb{Z}$ için a ve $a + 1$, F_1 de komşudur ve $|a.1 - (a + 1).1| = 1$ dir, yani $n = 1$ için iddia doğrudur.

$n > 1$ ve $n = m$ için iddia doğru olsun, yani $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_m de komşu ise $|qr - ps| = 1$ olsun.

$n = m + 1$; $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$, F_{m+1} de komşu olsun. $|ad - bc| = 1$ olduğunu göstermeliyiz.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_{m+1}$ olduğundan $0 < b, d \leq m+1$ ($b, d \in \mathbb{Z}$) olup, buradan üç farklı durum elde edilir.

1. Durum: $b, d \leq m$ ise; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_m$ dir. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}, F_{m+1}$ de komşu olduğundan, F_m de de komşudur. Dolayısıyla tümevarım hipotezimiz gereği $|ad - bc| = 1$ dir.

2. Durum: b ve d den yalnızca biri $\leq m$ ise, örneğin $b \leq m$ ve $d > m$ ise; $\frac{a}{b} \in F_m$ ve $\frac{c}{d} \notin F_m$ olur. Teorem 2.1 in **b)** şikkından biliyoruz ki F_m den F_{m+1} e geçişte ortaya çıkan yeni elemanlar, F_m de komşu olan elemanların orta değerleridir. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}, F_{m+1}$ de komşu ve fakat $\frac{c}{d} \notin F_m$ olduğundan; $\frac{c}{d}$ rasyonel sayısı, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{a}{b}$ nin F_m deki komşularından birinin orta değeridir, yani $\frac{x}{y}, \frac{a}{b}$ nin F_m deki bir komşusu olmak üzere $\frac{c}{d} = \frac{a+x}{b+y}$ dir. $\frac{x}{y}$ ve $\frac{a}{b}, F_m$ de komşu olduğundan tümevarım hipotezimizden $|ay - bx| = 1$ dir. Ayrıca F_m in tanımından $(c, d) = 1$ ve $(a+x, b+y) = 1$ olup, buradan $c = a+x$ ve $d = b+y$ dir.

$$|ad - bc| = |a(b+y) - b(a+x)| = |ay - bx| = 1 \Rightarrow |ad - bc| = 1$$

olduğundan istenen elde edilir.

3. Durum: $b > m, d > m$ ise; $b = d = m+1$ olduğundan $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \notin F_m$ ve $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_{m+1}$ dir. Dolayısıyla Teorem 2.1 **b)** den dolayı $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayılarının ikisi de, F_m deki bazı komşu elemanların orta değerleridir. Bu nedenle, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ F_{m+1} de komşu olamaz.

O halde, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}, F_{m+1}$ de komşu ise $|ad - bc| = 1$ dir, yani iddia $m+1$ için de doğrudur. Böylece **a)** nın ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 2.1. (LeVeque, [1]) ξ , bir irrasyonel sayı olsun. Bu taktirde ξ , her $n \in \mathbb{N}$ için F_n de komşu iki elemanın arasında kalır, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\exists \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in F_n$ öyleki $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}, F_n$ de komşu ve $\frac{p}{q} < \xi < \frac{r}{s}$ veya $\frac{r}{s} < \xi < \frac{p}{q}$ dir. ξ , bir rasyonel sayı ise, ξ sonlu sayıda n için F_n de komşu iki elemanın arasında kalır.

İspat. ξ , bir irrasyonel sayı olsun ve ispatı tümevarımla yapalım:

$n = 1$ olsun. $[\xi]$ ve $[\xi] + 1, F_1 = \mathbb{Z}$ de komşu olduğundan ve $[\xi] < \xi < [\xi] + 1$ eşitsizliğinden dolayı $n = 1$ için iddia doğrudur.

$n > 1$ olsun ve n için iddianın doğru olduğunu varsayalım, yani F_n de komşu iki eleman

vardır öyleki ξ bunların arasında kalır.

$n+1$ için de iddianın doğru olduğunu gösterelim. Tümevarım hipotezimizden biliyoruzki $\exists \frac{p_n}{q_n}, \frac{r_n}{s_n} \in F_n$ öyleki $\frac{p_n}{q_n}$ ve $\frac{r_n}{s_n}$, F_n de komşu ve $\frac{p_n}{q_n} < \xi < \frac{r_n}{s_n}$ dir. (Genelliği bozmaksızın $\frac{p_n}{q_n} < \frac{r_n}{s_n}$ kabul edelim.) $\frac{p_n}{q_n}, \frac{r_n}{s_n} \in F_n$ olduğundan $0 < q_n, s_n \leq n$ dir. O halde, iki farklı durum söz konusudur:

1) $q_n + s_n > n+1$ ise:

$\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} \notin F_{n+1}$ dir. O halde, Teorem 2.1b) den, $\frac{p_n}{q_n}$ ve $\frac{r_n}{s_n}$, F_{n+1} de komşudur ve $\frac{p_n}{q_n} < \xi < \frac{r_n}{s_n}$ olduğundan, $n+1$ için iddia doğrudur.

2) $q_n + s_n \leq n+1$ ise:

$\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} \in F_{n+1}$ olur ve Teorem 2.1 b) den dolayı $\frac{p_n}{q_n}$ ve $\frac{r_n}{s_n}$, F_{n+1} de $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ rasyonel sayısı ile ayrılır, yani $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} < \frac{r_n}{s_n}$ dir. O halde, ya $\frac{p_n}{q_n} < \xi < \frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ yada

$\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} < \xi < \frac{r_n}{s_n}$ dir.

i) $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} < \xi < \frac{r_n}{s_n}$ olsun. Tümevarım hipotezimizden $\frac{p_n}{q_n}$ ve $\frac{r_n}{s_n}$, F_n de komşu olduğundan ve Teorem 2.1 a) dan, $|q_n r_n - p_n s_n| = 1$ dir. Öyleyse,

$$|s_n(p_n + r_n) - r_n(q_n + s_n)| = |s_n p_n - r_n q_n| = 1$$

olup, Teorem 2.1b) den $\max(q_n + s_n, s_n) \leq m < q_n + 2s_n$ olacak şekildeki m ler için

$\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ ve $\frac{r_n}{s_n}$, F_m de komşudur. Dolayısıyla, $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ ve $\frac{r_n}{s_n}$, F_{n+1} de komşudur. Böylece,

ξ , F_{n+1} de komşu iki elemanın arasında kalır. O halde, $n+1$ için iddia doğrudur.

ii) $\frac{p_n}{q_n} < \xi < \frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ ise yine i) deki gibi gösterilir. Böylece ξ irrasyonel sayısı için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi $\xi = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ olsun. Bu durumda $\forall n \geq b$ için $\xi \in F_n$ dir. Dolayısıyla ξ bir rasyonel sayı ise sonlu sayıda n için ξ, F_n de komşu iki elemanın arasında kalır.

Sonuç 2.1. (LeVeque, [1]) x bir reel sayı ise her $n \in \mathbb{N}$ için F_n de x 'e en yakın ve tek türlü belirli bir rasyonel sayı vardır.

İspat. $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Önerme 2.1 den $\exists \frac{p}{q}, \frac{r}{s}, F_n$ de komşu öyleki $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ dir. Böylece $\left|x - \frac{p}{q}\right|$ ve $\left|x - \frac{r}{s}\right|$ değerlerinin minimumunu alarak F_n de x 'e en yakın rasyonel sayıyı buluruz. x bir rasyonel sayı ise belli bir n den itibaren F_n de x 'e en yakın rasyonel sayı kendisidir.

Tanım 2.3. (LeVeque, [1]) $\frac{p}{q} \in F_N$ ($N \in \mathbb{N}$) olsun. Her $\frac{r}{s} \in F_N$ için $|qx - p| \leq |sx - r|$ koşulunu sağlayan x reel sayılarının kümesine $R_N(p, q)$ diyelim. O halde,

$$R_N(p, q) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \min_{r/s \in F_N} (|sx - r|) = |qx - p| \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.4. (LeVeque, [1]) $N \in \mathbb{N}$ ve $\frac{p}{q} \in F_N$ olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $x \in R_N(p, q)$ ise $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısına x 'e bir **en iyi yaklaşım** denir.

Not 2.1. (LeVeque, [1]) $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x \in R_N(p, q)$ ise $\frac{p}{q}, F_q$ da x 'e en yakın rasyonel sayıdır.

İspat. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \in R_N(p, q)$ olsun. Bu durumda, her $\frac{r}{s} \in F_N$ için $|qx - p| \leq |sx - r|$ olduğundan, $q \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq s \left|x - \frac{r}{s}\right|$ dir. Dolayısıyla, $s \leq q$ ise $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \left|x - \frac{r}{s}\right|$ olur, yani $\frac{p}{q}, x$ 'e bir en iyi yaklaşım ise, o aynı zamanda paydası $\leq q$ olan rasyonel sayılar arasında x 'e en yakın olandır. O halde $\frac{p}{q}, F_q$ da x 'e en yakın rasyonel sayıdır.

İddia 2.1. (LeVeque, [1]) $R_N(p, q)$ kümesinin elemanları, $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısının F_N deki komşularının (iki komşusu var) oluşturduğu aralığa aittir.

İspat. İddiayı ispatlamak için önce şunu göstermeliyiz: $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}, F_N$ de komşu ve $x \in \left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right]$ olsun. Bu durumda eğer $\frac{t}{u} \neq \frac{p}{q}$ ve $\frac{t}{u} \neq \frac{r}{s}$ ise $x \notin R_N(t, u)$ dur.

1) $x = \frac{p}{q}$ ve herhangi bir $\frac{t}{u} \in F_N$ için $x \in R_N(t, u)$ olsun. Bu durumda, her $\frac{r}{s} \in F_N$ için $|ux - t| \leq |sx - r|$ olur ve $p/q \in F_N$ olduğundan,

$$|ux - t| \leq |qx - p| \Rightarrow |ux - t| \leq |q \frac{p}{q} - p| = 0 \Rightarrow |ux - t| = 0 \Rightarrow x = \frac{t}{u} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{t}{u}$$

elde edilir. Dolayısıyla $p = t$, $q = u$ olur. Çünkü $(p, q) = 1$, $(t, u) = 1$ olduğunu biliyoruz. O halde, $x \in R_N(p, q)$ olur.

2) $x = r/s$ için de aynı işlemler yapılarak $x \in R_N(r, s)$ elde edilir.

3) $\frac{t}{u} < \frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ ($\frac{t}{u} \in F_N$) olmak üzere $x \in R_N(t, u)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $q \leq u$ ise

$$0 < qx - p = q\left(x - \frac{p}{q}\right) < q\left(x - \frac{t}{u}\right) \leq u\left(x - \frac{t}{u}\right) = ux - t$$

çelişkisine düşeriz. Çünkü $x \in R_N(t, u)$ olduğundan $ux - t \leq qx - p$ dir. Dolayısıyla kabulümüzün doğru olması için $q > u$ olmalıdır. Bu durumda, eğer $qx - p > ux - t$ ise

$$x(q - u) > p - t \Rightarrow (q - u > 0) \quad x > \frac{p - t}{q - u} \quad (2.1)$$

olur. Ancak $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, F_N de komşu olduğundan Teorem 2.1 den $|qr - ps| = qr - ps = 1$ dir ve $ur - st > 0$, $ur - st \in \mathbb{Z}$ olduğundan $ur - st \geq 1$ olup, (2.1) kullanılarak,

$$0 < r - sx < r - s\left(\frac{p - t}{q - u}\right) = \frac{(qr - sp) - (ur - st)}{q - u} \leq 0$$

çelişkisine düşeriz. O halde, $x \notin R_N(t, u)$ dır.

4) $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s} < \frac{t}{u}$ ($\frac{t}{u} \in F_N$) ve $x \in R_N(t, u)$ olduğunu kabul edersek 3) dekiye benzer şekilde çelişkiye düşeriz.

O halde, $x \in \left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right]$ ise $x \in R_N(p, q)$ veya $x \in R_N(r, s)$ dir. Böylece $R_N(p, q)$ kümesi, $\frac{p}{q}$ nun F_N deki komşularının oluşturduğu aralık tarafından kapsanır. Çünkü, herhangi bir $x \in$

$R_N(p, q)$ alalım. $\frac{t}{u}$ ve $\frac{r}{s}$, $\left(\frac{t}{u} < \frac{r}{s}\right) \frac{p}{q}$ nun F_N deki komşuları olsunlar, yani $\frac{t}{u} < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

olsun. Bu durumda, $x \leq \frac{t}{u}$ veya $x \geq \frac{r}{s}$ olsa 1), 2), 3) ve 4) den dolayı $x \notin R_N(p, q)$

çelişkisine düşeriz. O halde $x \in \left(\frac{t}{u}, \frac{r}{s}\right)$ olup, $R_N(p, q) \subset \left(\frac{t}{u}, \frac{r}{s}\right)$ elde edilir. Öte yandan,

$x \in R_N(p, q)$ olduğundan

$$|qx - p| \leq |sx - r|$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $x \in R_N(p, q)$ için

- i) $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ ise; $qx - p \leq r - sx$ olduğundan $x \leq \frac{p+r}{q+s}$,
- ii) $\frac{t}{u} < x < \frac{p}{q}$ ise; $-(qx - p) \leq ux - t$ olduğundan $\frac{p+t}{q+u} \leq x$

elde edilir, yani $R_N(p, q) \subseteq \left[\frac{p+t}{q+u}, \frac{p+r}{q+s} \right]$ dir. Ayrıca $\frac{t}{u} < \frac{p+t}{q+u} < \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ olduğundan $x \in \left[\frac{p+t}{q+u}, \frac{p+r}{q+s} \right]$ ise **1), 2), 3)** ve **4)** den dolayı $x \in R_N(p, q)$ dur. Böylece $R_N(p, q) = \left[\frac{p+t}{q+u}, \frac{p+r}{q+s} \right]$ elde edilir.

Not 2.2. (LeVeque, [1]) F_N den F_{N+1} e geçişte ortaya çıkan yeni elemanlar R_N aralıklarının uç noktalarıdır.

Sonuç 2.2. (LeVeque, [1]) $x \in \mathbb{R}$ ise $x \in R_N(a_N, b_N)$ ($N = 1, 2, \dots$) olacak biçimde bir a_N/b_N tek türlü belirli en iyi yaklaşımlar dizisi vardır.

İspat. $x \in \mathbb{R}$ olsun. Önerme 2.1 den her $N \in \mathbb{N}$ için x, F_N de komşu iki elemanın arasında kalır. O halde, Sonuç 2.1 den her $N \in \mathbb{N}$ için $x \in R_N(a_N, b_N)$ olacak şekilde bir a_N/b_N ($N = 1, 2, \dots$) en iyi yaklaşımlar dizisi vardır. x bir irrasyonel sayı ise x 'e en iyi yaklaşımlar dizisi tek türlü belirlidir. Ancak x bir rasyonel sayı ise bir $N \in \mathbb{N}$ için x , iki farklı R_N aralığının ortak bir uç noktasıdır, yani bir $N \in \mathbb{N}$ için $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in F_N$ x 'e en iyi yaklaşımlar dizisindeki birbirinden farklı iki en iyi yaklaşım olmak üzere,

$$|qx - p| = |sx - r| \quad (2.2)$$

olur. Bu durum ileride incelenecektir.

Şimdi $x \in \mathbb{R}$ ve x 'e en iyi yaklaşımlar dizisi $\frac{a_N}{b_N}$ ($N = 1, 2, \dots$) olsun. Biz sadece rasyonel sayılar için ortaya çıkan (2.2) deki durumu göz ardı edelim, yani x 'e en iyi yaklaşımlar dizisinde birbirinden farklı iki en iyi yaklaşım için (2.2) eşitsizliğinin sağlanmadığını kabul edelim. O halde, $\frac{a_N}{b_N}$ ($N = 1, 2, \dots$) dizisi tek türlü belirlidir. $x \in R_N(a_N, b_N)$ ($N = 1, 2, \dots$) olduğundan, aynı olan yaklaşımları sadece bir kez yazarsak, uygun $1 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots$ doğal sayıları için $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}$ ($k = 0, 1, \dots$) dizisi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{N_0}}{b_{N_0}} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_{N_1-1}}{b_{N_1-1}} \neq \frac{a_{N_1}}{b_{N_1}} \\ \frac{a_{N_1}}{b_{N_1}} = \frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} = \dots = \frac{a_{N_2-1}}{b_{N_2-1}} \neq \frac{a_{N_2}}{b_{N_2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tek türlü belirli $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}$ ($k = 0, 1, \dots$) x 'e en iyi yaklaşımlar dizisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1) \quad 0 < b_{N_0} < b_{N_1} < b_{N_2} < \dots \quad (2.4)$$

dir. Çünkü $R_{N_k}(a_{N_k}, b_{N_k})$ nın tanımı gereği $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}} \in F_{N_k}$ ($k = 0, 1, \dots$) olduğundan $0 < b_{N_k} \leq N_k$, $(a_{N_k}, b_{N_k}) = 1$ ($k = 0, 1, \dots$) olduğunu biliyoruz. Öte yandan herhangi bir $k \in \{0, 1, \dots\}$ için $b_{N_k} \geq b_{N_{k+1}}$ olsa $\frac{a_{N_{k+1}}}{b_{N_{k+1}}} \in F_{N_k}$ olur. Ancak $x \in R_{N_{k+1}}(a_{N_{k+1}}, b_{N_{k+1}})$ ve $F_{N_k} \subset F_{N_{k+1}}$ olduğundan

$$\forall \frac{p}{q} \in F_{N_k} \text{ için } |b_{N_{k+1}}x - a_{N_{k+1}}| < |qx - p|$$

olup, buradan $x \in R_{N_k}(a_{N_{k+1}}, b_{N_{k+1}})$ elde edilir. Bu durumda, $x \in R_{N_k}(a_{N_k}, b_{N_k})$ olduğundan, $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}} = \frac{a_{N_{k+1}}}{b_{N_{k+1}}}$ çelişmesine düşülür. O halde her $k = 0, 1, \dots$ için $b_{N_k} < b_{N_{k+1}}$ dir. (x bir rasyonel sayı ise belli bir k dan itibaren $b_{N_k} = b_{N_{k+1}} = \dots$ olur.)

$$2) \quad |b_{N_{k-1}}a_{N_k} - b_{N_k}a_{N_{k-1}}| = 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

dir. Çünkü, herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için $\frac{a_{N_{k-1}}}{b_{N_{k-1}}}$ ve $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}$ x reel sayısına ardışık en iyi yaklaşımlardır. Dolayısıyla (2.3) den, $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}} \in F_{N_k} - F_{N_{k-1}}$ dir. O halde, Not 2.2 den $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}, R_{N_{k-1}}(a_{N_{k-1}}, b_{N_{k-1}})$ aralığının uç noktalarından biridir. Böylece $\frac{a_{N_{k-1}}}{b_{N_{k-1}}}$ ve $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}, F_{N_k}$ da komşudur. Teorem 2.1 den istenen elde edilir. (x bir rasyonel sayı ise belli bir k dan itibaren (2.5) ifadesi daima 0 olur.)

$$3) \quad |b_{N_0}x - a_{N_0}| > |b_{N_1}x - a_{N_1}| > |b_{N_2}x - a_{N_2}| > \dots \quad (2.6)$$

dır. Çünkü $x \in R_{N_k}(a_{N_k}, b_{N_k})$ ($k = 0, 1, \dots$) olduğundan

$$\forall \frac{p}{q} \in F_{N_k} \text{ için } |b_{N_k}x - a_{N_k}| < |qx - p| \quad (2.7)$$

dir. Ayrıca $\frac{a_{N_{k-1}}}{b_{N_{k-1}}} \in F_{N_{k-1}} \subset F_{N_k}$ olduğundan ve (2.7) den $|b_{N_k}x - a_{N_k}| < |b_{N_{k-1}}x - a_{N_{k-1}}|$ ($k = 1, 2, \dots$) elde edilir. (x bir rasyonel sayı ise belli bir k dan itibaren (2.6) ifadesi daima 0 olur.) Böylece **1)**, **2)** ve **3)** ispatlanmış olur.

Şimdi verilen bir $x \in \mathbb{R}$ için x 'e en iyi yaklaşımlar dizisi $\frac{P_k}{Q_k}$ y1 bulmak için bir yöntem geliştirelim. Bunu (2.3) deki (tek türlü belirli) $\frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}$ ($k = 0, 1, \dots$) dizisini kullanarak yapacağız. $x \in \mathbb{R}$, $[x] = \lambda_0$ ve $x' = x - [x]$ olsun. Bu durumda $x' \in (0, 1)$ olur. $P_0 = \lambda_0$, $Q_0 = 1$ alalım.

$x' < \frac{1}{2}$ ise; $F_1 = \mathbb{Z}$ de x 'e en iyi yaklaşım $[x] = \frac{P_0}{Q_0}$ olduğundan, $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_1}{b_1}$ dir ve $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_{N_k}}{b_{N_k}}$ ($k = 1, 2, \dots$) yazarız.

$x' > \frac{1}{2}$ ise; $\frac{P_0}{Q_0}$ x 'e en iyi yaklaşım olmadığından $\frac{P_0}{Q_0} \neq \frac{a_1}{b_1}$ dir ve bu durumda, $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_{N_{k-1}}}{b_{N_{k-1}}}$ ($k = 1, 2, \dots$) yazarız. Böylece $\left\{ \frac{P_k}{Q_k} \right\}$ dizisi, $\frac{P_0}{Q_0}$ hariç, $\left\{ \frac{a_{N_k}}{b_{N_k}} \right\}$ dizisiyle çıkarılır. Ayrıca $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$ alalım. O halde,

$$Q_0 P_{-1} - Q_{-1} P_0 = 1 \quad (2.8)$$

olur. Sonuç olarak,

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_1}{b_1} \text{ ise (2.5) ve (2.8) den,}$$

$$|Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k| = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

$$\frac{P_0}{Q_0} \neq \frac{a_1}{b_1} \text{ ise; } \frac{P_1}{Q_1} = 1 + \frac{P_0}{Q_0}, \quad Q_0 = Q_1 = 1 \text{ alınız. Böylece,}$$

$$|Q_1 P_0 - Q_0 P_1| = 1 \quad (2.10)$$

olur. O halde, (2.5), (2.8) ve (2.10) dan, (2.9) ilişkisi sağlanır. Dolayısıyla (2.9) daima geçerlidir.

Böylece P_k ve Q_k tam sayılarını şu şekilde tanımlayabiliriz: $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_0 = [x]$, $Q_0 = 1$ ve $k \geq 1$ için P_k ve Q_k

$$|qx - p| < |Q_{k-1}x - P_{k-1}| \quad (2.11)$$

eşitsizliğinin çözümleri olan p, q tam sayılarını oluşturur, burada q , verilen bir P_{k-1} , Q_{k-1} ve x için (2.11) eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmalıdır. (Çünkü

$\{P_k/Q_k\}$ dizisi (2.4) ve (2.6) yı sağlar.) Böylece verilen bir x reel sayısı için P_0 ve Q_0 1 kullanarak P_1 ve Q_1 i, P_1 ve Q_1 i kullanarak P_2 ve Q_2 yi bulabiliriz ve böyle devam ederiz. Eğer $k = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha_k = Q_k x - P_k$ yazarsak

$$|qx - p| < |\alpha_{k-1}|$$

eşitsizliğinin minimal çözümünü bulmalıyız. Ancak bu koşulu sağlayan tüm p ve q ları bulmak yerine

$$|P_{k-1}q - Q_{k-1}p| = 1 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

eşitsizliğini sağlayan p ve q tamsayılarını bulmamız yeterlidir. (2.9) dan dolayı, (2.12) nin çözümlerinden birinin $q = Q_{k-2}$ ve $p = P_{k-2}$ olduğunu, yani $k = 1, 2, \dots$ için $|P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1}| = 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca yine (2.9) dan, $|Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k| = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) dir. Dolayısıyla

$$P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1} = \varepsilon (Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$\Rightarrow Q_{k-1}(\varepsilon P_k - P_{k-2}) = P_{k-1}(\varepsilon Q_k - Q_{k-2}) \quad (P_k, Q_k \in \mathbb{Z}, \quad (P_{k-1}, Q_{k-1}) = 1)$$

$$\Rightarrow Q_{k-1} \mid \varepsilon Q_k - Q_{k-2} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z} \ni \varepsilon Q_k - Q_{k-2} = \lambda Q_{k-1} \Rightarrow Q_k = \varepsilon(\lambda Q_{k-1} + Q_{k-2})$$

olur ve yukarıdaki ilk eşitlikte Q_k yı yerine koyarsak $P_k = \varepsilon(\lambda P_{k-1} + P_{k-2})$ bulunur. Dolayısıyla tüm p, q çözümleri

$$q = \varepsilon(\lambda Q_{k-1} + Q_{k-2}), \quad p = \varepsilon(\lambda P_{k-1} + P_{k-2}) \quad (2.13)$$

şeklindedir, burada $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ dir. Böylece,

$$|qx - p| = |\lambda(Q_{k-1}x - P_{k-1}) + (Q_{k-2}x - P_{k-2})| = |\lambda \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}| \quad (2.14)$$

olduğundan P_k ve Q_k ları başka bir şekilde ifade edebiliriz. Eğer $k \geq 1$ ise ve $\ell < k$ için P_ℓ ve Q_ℓ biliniyorsa, P_k ve Q_k (2.13) deki gibidir. Böylece (2.11) eşitsizliğini çözme problemi

$$|\lambda \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}| < |\alpha_{k-1}| \quad ; \quad \varepsilon(\lambda Q_{k-1} + Q_{k-2}) \text{ pozitif ve minimal} \quad (2.15)$$

olacak şekildeki ε ve λ yı bulma problemine dönüşür. Çünkü $q = \varepsilon(\lambda Q_{k-1} + Q_{k-2})$ dır ve biz (2.11) eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif q tam sayısını arıyoruz. $k \geq 1$ için $Q_{k-1} > 0$ olduğundan (2.15) aşağıdakine denktir.

$$\left| \lambda - \left(-\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}} \right) \right| < 1; \quad \varepsilon \left(\lambda - \left(-\frac{Q_{k-2}}{Q_{k-1}} \right) \right) \text{ pozitif ve minimal} \quad (2.16)$$

Şimdi (2.16) yi nasıl çözeceğimizi görmek için $k = 1$ durumuna bakalım. Bu durumda, $\alpha_{-1} = Q_{-1}x - P_{-1} = -1$, $\alpha_0 = Q_0x - P_0 = x - [x]$ olduğundan (2.16) eşitsizliği

$$\left| \lambda - \frac{1}{x - [x]} \right| < 1; \quad \varepsilon\lambda \text{ pozitif ve minimal} \quad (2.17)$$

olur. $x_1 = \frac{1}{x - [x]}$ diyelim. O halde, $x_1 > 1$ dir ve $|\lambda - x_1| < 1$ olduğundan $0 < x_1 - 1 < \lambda < x_1 + 1$ dir. O halde, λ tamsayısının alabileceği her iki değer de pozitifdir. Çünkü, $0 < x_1 - 1 < [x_1] < [x_1] + 1 \leq x_1 + 1$ olduğundan λ , $[x_1]$ veya $[x_1] + 1$ dir. Biz $\varepsilon\lambda$ yı pozitif ve minimal yapan çözümü arıyoruz. Dolayısıyla (2.17) nin çözümü

$$\lambda = \lambda_1 = [x_1], \quad \varepsilon = 1$$

dir. Böylece $P_1 = \lambda_1 P_0 + P_{-1}$, $Q_1 = \lambda_1 Q_0 + Q_{-1}$ dir. O halde,

$$Q_1 P_0 - Q_0 P_1 = (\lambda_1 Q_0 + Q_{-1}) P_0 - Q_0 (\lambda_1 P_0 + P_{-1}) = -(Q_0 P_{-1} - Q_{-1} P_0)$$

dir ve $Q_0 P_{-1} - Q_{-1} P_0 = 1.1 - 0.\lambda_0 = 1$ olduğundan

$$Q_1 P_0 - Q_0 P_1 = -1 \quad (2.18)$$

olur.

Teorem 2.2. (LeVeque, [1]) $x_0 = x \in \mathbb{R}$ ve $x_k = \frac{1}{x_{k-1} - [x_{k-1}]}$ ($1 \leq k < n+1$) olsun. Burada n , $x_n - [x_n] = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük indekstir ve eğer böyle bir n yoksa n sonsuzdur. Bu durumda,

$$1 \leq k < n+1 \text{ için } x_k = -\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}} \quad (2.19)$$

dir ve (2.16) nin çözümü $\lambda = \lambda_k = [x_k]$, $\varepsilon = +1$ dir. Böylece $\{P_k/Q_k\}$ en iyi yaklaşımlar dizisi aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\left. \begin{array}{l} P_{-1} = 1, \quad P_0 = \lambda_0, \quad P_k = P_{k-1}\lambda_k + P_{k-2} \\ Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1, \quad Q_k = Q_{k-1}\lambda_k + Q_{k-2} \end{array} \right\} \quad (1 \leq k < n+1). \quad (2.20)$$

Ayrıca,

$$Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k = (-1)^k \quad (0 \leq k < n+1). \quad (2.21)$$

İspat. (2.17) nin çözümünden ve (2.18) den, $k = 1$ için bütün iddiaların doğru olduğunu ve $k = 0$ için de (2.21) in doğru olduğunu gösterdik. Şimdi $k < n+1$ olsun ve k için

bütün iddiaların doğru olduğunu kabul edelim. $k+1$ için (2.16) yı çözerek teoremdaki tüm iddiaların $k+1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

Eğer n sonlu ise ve $k+1 = n+1$ ise

$$\begin{aligned} x_k - [x_k] = x_k - \lambda_k = 0 &\Rightarrow \left| \lambda_k - \left(-\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}} \right) \right| = 0 \Rightarrow |\lambda_k \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}| = 0 \\ &\Rightarrow |Q_k x - P_k| = 0 \Rightarrow x = P_n / Q_n \end{aligned}$$

olur ve $\{P_k / Q_k\}$ dizisi P_n / Q_n ile sonlanır. Böylece $k = n$ için tüm en iyi yaklaşımlar zaten tamamlanmış olur. Dolayısıyla sadece $k < n$ durumunu düşünmemiz yeterlidir. Şimdi $k < n$ olsun ve k için bütün iddialar doğru olsun. Biz

$$\left| \lambda - \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right) \right| < 1, \quad \varepsilon \left(\lambda - \left(-\frac{Q_{k-1}}{Q_k} \right) \right) \text{ pozitif ve minimal} \quad (2.22)$$

eşitsizliğini çözmeliyiz. Tümevarım hipotezimiz ve x_{k+1} in tanımından,

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} &= -\frac{\alpha_{k-1}}{Q_k x - P_k} = -\frac{\alpha_{k-1}}{(Q_{k-1} \lambda_k + Q_{k-2})x - (P_{k-1} \lambda_k + P_{k-2})} \\ &= -\frac{\alpha_{k-1}}{\lambda_k (Q_{k-1} x - P_{k-1}) + Q_{k-2} x - P_{k-2}} = \frac{\alpha_{k-1}}{-\lambda_k \alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}} = \frac{1}{-\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}} - \lambda_k} \\ &= \frac{1}{x_k - [x_k]} = x_{k+1} > 1 \end{aligned}$$

ve $-\frac{Q_{k-1}}{Q_k} < 0$ olduğundan (2.22) nin çözümü $\lambda = \lambda_{k+1} = [x_{k+1}]$, $\varepsilon = 1$ dir. Böylece $Q_{k+1} = Q_k \lambda_{k+1} + Q_{k-1}$, $P_{k+1} = P_k \lambda_{k+1} + P_{k-1}$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} Q_{k+1} P_k - Q_k P_{k+1} &= (Q_k \lambda_{k+1} + Q_{k-1}) P_k - Q_k (P_k \lambda_{k+1} + P_{k-1}) \\ &= -(Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k) = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

dır. Böylece tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3. (LeVeque, [1]) $\{x_k\}$, $\{\lambda_k\}$, $\{P_k\}$, $\{Q_k\}$ Teorem 2.2 deki gibi tanımlansın. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir:

$$x = \frac{P_{k-1} x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} x_k + Q_{k-2}}, \quad 1 \leq k < n+1, \quad (2.23)$$

$$x = \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_{k-1} + \frac{1}{x_k}}}}, \quad 1 \leq k < n+1, \quad (2.24)$$

$$\frac{P_k}{Q_k} = \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_{k-1} + \frac{1}{\lambda_k}}}}, \quad 0 \leq k < n+1. \quad (2.25)$$

İspat. (2.19) dan ve $\alpha_k = Q_k x - P_k$ ($k = 0, 1, \dots$) olduğundan,

$$\begin{aligned} x_k = -\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}} &= -\frac{Q_{k-2}x - P_{k-2}}{Q_{k-1}x - P_{k-1}} \Rightarrow Q_{k-1}xx_k - P_{k-1}x_k = -Q_{k-2}x + P_{k-2} \\ \Rightarrow x(Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}) &= P_{k-1}x_k + P_{k-2} \Rightarrow x = \frac{P_{k-1}x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Böylece (2.23) ispatlanmış oldu. $\lambda_k = [x_k]$, $\lambda_0 = [x_0] = [x]$ ve $x_k = \frac{1}{x_{k-1} - [x_{k-1}]}$ ($1 \leq k < n+1$) olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x - \lambda_0} \Rightarrow x = \lambda_0 + \frac{1}{x_1} \\ x_2 &= \frac{1}{x_1 - \lambda_1} \Rightarrow x_1 = \lambda_1 + \frac{1}{x_2} \\ &\vdots \\ x_k &= \frac{1}{x_{k-1} - \lambda_{k-1}} \Rightarrow x_{k-1} = \lambda_{k-1} + \frac{1}{x_k} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

olur. $x_1, x_2, \dots, x_k$ değerlerini sırasıyla yerine koyarsak (2.24) elde edilir. (2.25) i elde etmek için (2.26) eşitliklerinde x_k ları 1 den büyük bağımsız değişkenler ve $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ i de sabitler olarak düşünelim. Bu durumda x , (2.24) de daha kısaca verilen, x_k nın bir fonksiyonudur. $P_{k-1}, P_{k-2}, Q_{k-1}, Q_{k-2}$; $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ lere bağlı olduğundan (2.23) ve (2.24) aynı fonksiyonel ilişkinin farklı ifadeleridir. Eğer (2.23) de x_k yerine λ_k konulursa $x = \frac{P_k}{Q_k}$ olur ve bunları (2.24) de yerine koyarsak (2.25) elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Not 2.3. (LeVeque, [1]) x bir rasyonel sayı ise x 'e en iyi yaklaşımlar dizisi için iki farklı durum söz konusudur.

İspat. x bir rasyonel sayı ve $x \in R_{Q_k}(P_k, Q_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olsun. $s > Q_{k-1}$ olacak şekilde bir $\frac{r}{s} \in F_s$ için $x \in R_{s-1}(P_{k-1}, Q_{k-1})$ iken aynı zamanda $x \in R_s(P_{k-1}, Q_{k-1})$ ve $x \in R_s(r, s)$ olabilir. Dikkat edilirse bu durumda,

$$x \in R_s(P_{k-1}, Q_{k-1}) \text{ ve } \frac{r}{s} \in F_s \text{ olduğundan } |Q_{k-1}x - P_{k-1}| \leq |sx - r| \text{ dir ve}$$

$$x \in R_s(r, s) \text{ ve } \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \in F_s \text{ olduğundan } |sx - r| \leq |Q_{k-1}x - P_{k-1}| \text{ olup, buradan}$$

$$|Q_{k-1}x - P_{k-1}| = |sx - r| \quad (2.27)$$

dir. Bu durumda $\frac{r}{s}$ nin x 'e en iyi yaklaşımlar arasına dahil edilip edilmeyeceğinin seçilmesi durumu ortaya çıkar. Bu belirsizlik her x rasyonel sayısı için yalnız bir kez ortaya çıkar. Çünkü, $x \in R_s(P_{k-1}, Q_{k-1})$ ve $x \in R_s(r, s)$ olduğundan

$$x = \frac{P_{k-1} + r}{Q_{k-1} + s}$$

dir. Böylece x ; $F_s, F_{s+1}, \dots$ kümelerinde, $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ ve $\frac{r}{s}$ arasında ortaya çıkan ilk rasyonel sayıdır. Dolayısıyla $k = n$ dir. Eğer $\frac{r}{s}$ en iyi yaklaşımlar arasında gösterilmezse; x 'e en

iyi yaklaşımlar dizisi, $\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}, \frac{P_k}{Q_k} = x$ şeklinde olur. Eğer $\frac{r}{s}$ en iyi yaklaşımlar

arasında gösterilirse; x 'e en iyi yaklaşımlar dizisi, $\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}, \frac{P_k}{Q_k} = \frac{r}{s}, \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = x$ şeklinde olur. Dolayısıyla bir x rasyonel sayısı için iki farklı durum vardır:

1) Eğer $\frac{r}{s}$, x e bir en iyi yaklaşım olarak kabul edilirse; $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = x$ olur ve $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$

x e bir en iyi yaklaşım olduğundan Teorem 2.2 deki tüm eşitlikleri sağlar. Dolayısıyla,

$$x = \frac{P_{k-1} + r}{Q_{k-1} + s} \text{ ve } \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{\lambda_{k+1}P_k + P_{k-1}}{\lambda_{k+1}Q_k + Q_{k-1}} \text{ olduğundan } \lambda_{k+1} = \lambda_{n+1} = 1 \text{ dir. O}$$

halde, (2.25) den,

$$x = \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n + \frac{1}{1}}}} \quad (\lambda_{n+1} = 1)$$

olur.

2) Eğer $\frac{r}{s}$, x' e bir en iyi yaklaşım olarak kabul edilmezse ((2.27) deki eşitlik durumu göz ardı edilirse), $x = \frac{P_k}{Q_k}$ dır ve

$$x = \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + \dots + \frac{1}{(\lambda_n + 1)}}} \quad (2.28)$$

olur.

Biz Teorem 2.2 deki P_k/Q_k en iyi yaklaşımlar dizisini inşa ederken (2.27) deki eşitlik durumunu gözardı ettik. Dolayısıyla bir x rasyonel sayısı için (2.28) deki yazılışı tercih etmiş olduk.

Tanım 2.5. (LeVeque, [1]) $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad (2.29)$$

ifadesine bir sonlu düzgün sürekli kesir denir; a' lar sonlu sayıda olduğu için sonludur, $a_1, a_2, \dots, a_n$ tam sayıları pozitif ve hepsinin payı +1 olduğu için düzgündür. Yazım kolaylığı olması bakımından (2.29) ifadesini $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ ile göstereceğiz. $\frac{p_0}{q_0} = a_0$, $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$, $\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$, ... sayılarına (2.29) sürekli kesrinin yaklaşım kesirleri denir.

Not 2.4. (LeVeque, [1]) x bir sonlu düzgün sürekli kesir olsun, yani $x = [a_0, a_1, \dots, a_n]$; $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda $x = [a_0, a_1, \dots, x_k']$ yazabiliriz, burada $x_k' = [a_k, \dots, a_n]$ veya $x_k' = a_k + \frac{1}{x_{k+1}}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) dir. $x_k' \geq 1$ ($k =$

1, 2, ...) olduğu için

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1'} \Rightarrow x_1' = \frac{1}{x - a_0} = \frac{1}{x - [x]} \quad , \quad a_1 = [x_1'] \\ x_1' &= a_1 + \frac{1}{x_2'} \Rightarrow x_2' = \frac{1}{x_1' - a_1} = \frac{1}{x_1' - [x_1']} \quad , \quad a_2 = [x_2'] \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

olur. Böylece $\{x_k'\}$ dizisi Teorem 2.2 de tanımlanan $\{x_k\}$ dizisiyle aynıdır. O halde, $\{a_k\}$ dizisi, $\{\lambda_k\}$ dizisiyle aynıdır. Bu sayede aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.4. (LeVeque, [1]) Her sonlu düzgün sürekli kesir bir rasyonel sayı belirtir ve sürekli kesrin yaklaşım kesirleri (p_0/q_0 hariç olabilir) bu rasyonel sayıya en iyi yaklaşımlardır. Tersine her rasyonel sayı bir sonlu düzgün sürekli kesre açılabilir ve bu açılım aşağıdaki durum göz ardı edilirse tek türlü belirlidir:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1] \quad ; \quad a_n > 1.$$

İspat. Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 den dolayı herhangi bir rasyonel sayıyı, en iyi yaklaşımlar dizisi sayesinde, bir sonlu düzgün sürekli kesre açabildiğimizi gördük. Ayrıca Not 2.4 den herhangi bir sonlu düzgün sürekli kesrin yaklaşım kesirleri, Teorem 2.2 deki eşitlikleri sağladığından, sürekli kesrin değerine en iyi yaklaşımlardır.

Not 2.5. (LeVeque, [1]) x bir irrasyonel sayı olsun. Bu durumda, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 deki $\{x_k\}$, $\{\lambda_k\}$ ve $\left\{\frac{P_k}{Q_k}\right\}$ dizileri sonsuzdur. Bu durumda, $x = [\lambda_0, \lambda_1, \dots]$ yazarız. Bu yazımdan,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$$

anlaşılmalıdır. Tersine, $[a_0, a_1, \dots]$ keyfi bir sonsuz düzgün sürekli kesir olsun ve $\frac{p_0}{q_0} = a_0$, $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$, $\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$, ... yaklaşım kesirlerinin daima bir ξ irrasyonel sayısına yakınsadığını gösterelim.

$n > 2$ alalım ve $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ olsun. $\frac{p}{q}$ bir rasyonel sayı olduğundan Teorem 2.2 den $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ sayıları tek türlü olarak belirlenir ve $\frac{p}{q}$ nun yaklaşım kesirleri (ki onlar aynı zamanda $[a_0, a_1, \dots]$ sürekli kesrinin de yaklaşım kesirleridir) aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\left. \begin{array}{l} p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_k = p_{k-1}a_k + p_{k-2} \\ q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_k = q_{k-1}a_k + q_{k-2} \end{array} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-2). \quad (2.30)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k &= (q_{k-1}a_k + q_{k-2})p_{k-1} - q_{k-1}(p_{k-1}a_k + p_{k-2}) \\ &= -(q_{k-1}p_{k-2} - q_{k-2}p_{k-1}) = \dots \\ &= (-1)^k (q_0 p_{-1} - q_{-1} p_0) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = (-1)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2) \quad (2.31)$$

olur. n keyfi olarak seçildiğinden her $k \geq 1$ için (2.30) ve (2.31) sağlanır. (2.31) den,

$$\begin{aligned} q_k p_{k-2} - q_{k-2} p_k &= (q_{k-1}a_k + q_{k-2})p_{k-2} - q_{k-2}(p_{k-1}a_k + p_{k-2}) \\ &= a_k(q_{k-1}p_{k-2} - q_{k-2}p_{k-1}) = (-1)^{k-1} a_k \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.32)$$

elde edilir. (2.32) den ve $a_k \in \mathbb{Z}^+$ ($k = 1, 2, \dots$) olduğundan,

$$q_{2k} p_{2k-2} - q_{2k-2} p_{2k} = (-1)^{2k-1} a_{2k} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$q_{2k+1} p_{2k-1} - q_{2k-1} p_{2k+1} = (-1)^{2k} a_{2k+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dir. Böylece

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots, \quad \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \dots$$

elde edilir. Ayrıca (2.31) den,

$$q_{2k+1} p_{2k} - q_{2k} p_{2k+1} = (-1)^{2k+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

dir. Böylece her $\ell \geq k$ için

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2\ell}}{q_{2\ell}} < \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}} \quad \Rightarrow \quad \forall \ell \geq k \quad \text{için} \quad \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}}$$

olur. O halde, $\{p_{2k}/q_{2k}\}$ ve $\{p_{2k+1}/q_{2k+1}\}$ dizileri monoton ve sınırlı olduğundan yakınsaktırlar. (2.31) i yeniden yazarsak,

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k-1} q_k}$$

dır. $q_k = q_{k-1} \underbrace{a_k}_{\geq 1} + \underbrace{q_{k-2}}_{>0} > q_{k-1}$ olduğundan, $1 = q_0 < q_1 < q_2 < \dots$ dir. O halde,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty$ olup, buradan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^{2k}}{q_{2k+1}q_{2k}} \right) = 0$$

elde edilir, yani $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ dır. Sonuç olarak $\left\{ \frac{p_k}{q_k} \right\}$ dizisi yakınsaktır. $\left\{ \frac{p_k}{q_k} \right\}$ dizisinin yakınsadığı reel sayıya ξ dersek,

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_k] = [a_0, a_1, \dots]$$

dır. Yine $\xi_k = [a_k, a_{k+1}, \dots]$ alırsak, rasyonel durumda olduğu gibi

$$\xi = [a_0, a_1, \dots, \xi_k], \quad \xi_1 = \frac{1}{\xi - [a_0]}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\xi_1 - [a_1]}, \quad \dots$$

ve

$$a_0 = [\xi], \quad a_1 = [\xi_1], \quad a_2 = [\xi_2], \quad \dots$$

olur. Böylece $\{a_k\}$ ve $\{\xi_k\}$ dizileri, Teorem 2.2'deki $\{\lambda_k\}$ ve $\{x_k\}$ dizileriyle aynıdır. O halde, $[a_0, a_1, \dots]$ sonsuz düzgün sürekli kesrinin yaklaşım kesirleri $\frac{p_k}{q_k}$ lar, (Teorem 2.2 den) ξ ye en iyi yaklaşımlar olan $\frac{p_k}{q_k}$ larla çakışır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.5. (LeVeque, [1]) Her sonsuz düzgün sürekli kesir bir irrasyonel sayı belirtir ve sürekli kesrin yaklaşım kesirleri, bu irrasyonel sayıya en iyi yaklaşımlardır. Tersine her irrasyonel sayı bir sonsuz düzgün sürekli kesre açılabilir ve bu açılım tek türlü belirlidir.

İspat. Teorem 2.2, Teorem 2.3 ve Not 2.5 den elde edilir.

Teorem 2.6. (LeVeque, [1]) $\frac{p_k}{q_k}$, ξ reel sayısının sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesri ise

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad (2.33)$$

dır.

İspat. $\frac{p_k}{q_k}$, ξ reel sayısının sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesri olsun. Bu du-

rumda $\frac{p_k}{q_k}$, ξ ye bir en iyi yaklaşımdır. Dolayısıyla (2.23) den, $\xi = \frac{p_k \xi_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \xi_{k+1} + q_{k-1}}$

($k = 0, 1, \dots$) dır. O halde, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 den,

$$\begin{aligned} \xi - \frac{p_k}{q_k} &= \frac{p_k \xi_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \xi_{k+1} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k(p_k \xi_{k+1} + p_{k-1}) - (q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})p_k}{q_k(q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})} \\ &= \frac{q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k}{q_k(q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})} = \frac{(-1)^k}{q_k(q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})}$$

elde edilir. $a_{k+1} = [\xi_{k+1}] \leq \xi_{k+1} < [\xi_{k+1}] + 1$ ve $q_{k+1} = q_k a_{k+1} + q_{k-1}$ ($k = 0, 1, \dots$) olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_k(q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})} &< \frac{1}{q_k(q_k a_{k+1} + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \\ \frac{1}{q_k(q_k \xi_{k+1} + q_{k-1})} &> \frac{1}{q_k(q_k([\xi_{k+1}] + 1) + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k(q_k a_{k+1} + q_k + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} \end{aligned}$$

olur. O halde, $\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ dir. Ayrıca $q_k < q_{k+1}$ olduğundan,

$$\left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2} \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.7. (LeVeque, [1]) ξ bir reel sayı ve

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2} \quad (2.34)$$

ise $\frac{p}{q}$, ξ nin sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesridir.

İspat. $\frac{p}{q}$, (2.34) eşitsizliğini sağlayan bir rasyonel sayı olsun. $\frac{p}{q} \in F_q$ olduğunu biliyoruz. $\frac{p}{q}$ nun F_q daki komşuları $\frac{r}{s}$ ve $\frac{t}{u}$ olsun, yani $\frac{t}{u} < \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ olsun. Bu durumda

İddia 2.1 den $R_q(p, q) = \left[\frac{p+t}{q+u}, \frac{p+r}{q+s} \right]$ dur. Ayrıca,

$$\left| \frac{p+r}{q+s} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{qr - ps}{q(q+s)} \right| = \frac{1}{q(q+s)} \geq \frac{1}{2q^2}$$

$$\left(\frac{r}{s} \in F_q \text{ olduğundan } s \leq q; \frac{p}{q} \text{ ve } \frac{r}{s}, F_q \text{ da komşu olduğundan } |qr - ps| = 1 \text{ dir.} \right)$$

dir ve aynı şekilde $\left| \frac{p+t}{q+u} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{2q^2}$ dir. Bundan dolayı eğer (2.34) geçerli ise

ya $\frac{p}{q} < \xi < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ veya $\frac{t}{u} < \frac{p+t}{q+u} < \xi < \frac{p}{q}$ dur. O halde $\xi \in R_q(p, q)$ dur,

yani $\frac{p}{q}$, ξ için bir en iyi yaklaşımdır. Dolayısıyla $\frac{p}{q}$, ξ nin sürekli kesir açılımındaki bir yaklaşım kesiridir.

2.2. U SAYILARI

Bu bölümde öncelikle kompleks sayılar için bir transandantlık kriteri verilmiştir. Daha sonra Bölüm 2.2.2 de LeVeque [3] in makalesi incelenmeye başlanmıştır. Bu inceleme sırasında makaledeki teoremlerin kapalı olarak verilen ispatları açık hale getirilmiştir. Tanım 2.7 ile U_m ($m \in \mathbb{N}$) kümesi tanımlanmış ve her $m \in \mathbb{N}$ için U_m kümesinin boş kümeden farklı olduğu Teorem 2.15 ile verilmiştir.

Bölüm 2.2.3 te, Mahler ve Koksma sınıflandırmaları hakkında bilgi verilmiştir. Mahler $w(\xi) = \infty$, $\mu(\xi) < \infty$ olduğu durumda ξ kompleks sayısını bir U sayısı olarak adlandırmıştır. Çalışmanın bu bölümünde U sayılarının oluşturduğu kümenin, U_m ($m = 1, 2, \dots$) kümelerinin ayrık birleşimi olduğu ve U_1 kümesi ile Liouville sayıları kümesinin tamamen aynı olduğu gösterilmiştir. (Not 2.10, Not 2.11.) Bu sonuçlar literatürde bilinmekte olan sonuçlardır, ancak ispatları kendi bakış açımızla ele aldık.

Bölüm 2.2.4 te, Alnıaçık, Avcı, Bugeaud [7] makalesi incelenmiştir. Bu bölümde verilen Teorem 2.16 ile $1 \leq n < m$ için küçük $w_n^*(\xi)$ değerine sahip ξ U_m sayılarının varlığı ortaya konulmuştur.

2.2.1. Transandantlık Kriteri

Öncelikle bazı tanımları hatırlayalım. ξ kompleks sayısı sıfır polinomdan farklı rasyonel katsayılı bir polinomun kökü ise ξ ye bir cebirsel sayı denir, cebirsel olmayan bir sayıya da bir transandant sayı denir. ξ bir cebirsel sayı ise ξ yi kök olarak kabul eden $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$; $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $a_m > 0$, $(a_0, a_1, \dots, a_m) = 1$ şeklinde tek türlü belirli $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenemez (asal) bir polinom vardır.¹ Bu $f(x)$ polinomuna ξ nin minimal polinomu denir. $f(x)$ in kökleri olan $\xi_1 = \xi, \xi_2, \dots, \xi_m$ kompleks sayıları ise ξ nin eşlenikleri olarak adlandırılır. ξ cebirsel sayısının derecesi, ξ nin minimal polinomunun derecesi olarak tanımlanır ve $\partial(\xi)$ ile gösterilir.

Teorem 2.8. (LeVeque, [2]) $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ kompleks sayılar ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda yalnızca n ve $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ lere bağlı bir $c > 0$ reel sayısı vardır öyleki

$$|a_0 + a_1\vartheta_1 + \dots + a_n\vartheta_n| < \frac{c}{A^{\frac{1}{2}(n-1)}}, \quad A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|) \quad (2.35)$$

¹ $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ notasyonu $a_0, a_1, \dots, a_m$ tam sayılarının en büyük ortak bölenini göstermektedir.

eşitsizliğinin sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümleri vardır.

İspat. $n = 1$ için teorem doğrudur. Çünkü ϑ bir reel sayı ise ϑ için bir en iyi yaklaşımlar dizisi $\frac{p_k}{q_k}$ vardır ve Teorem 2.6 dan dolayı $\left| \vartheta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{2q_k^2}$ dir. Dolayısıyla,

$$|q_k \vartheta - p_k| < \frac{1}{2q_k} < \frac{1}{2} \quad (q_k > 1, k = 2, 3, \dots)$$

dir. O halde, $c = \frac{1}{2}$ alırsak sonsuz sayıda $p, q \in \mathbb{Z}$ için $|q\vartheta - p| < c$ dir, yani sonsuz sayıda $p, q \in \mathbb{Z}$ için $|q\vartheta + p| < c$ dir. Böylece istenen elde edilmiş olur. (ϑ irrasyonel bir sayı ise $\frac{p_k}{q_k}$ dizisi zaten sonsuz elemanlıdır. ϑ rasyonel bir sayı ise $\frac{p_k}{q_k}$ dizisi sonludur. Ancak bu durumda da belli bir p ve q için $|q\vartheta - p| = 0 < c$ dir. Dolayısıyla her $a \in \mathbb{Z}$ için $a|q\vartheta - p| = |aq\vartheta - ap| = 0 < c$ olduğundan yine sonsuz sayıda tam sayı için eşitsizlik gerçekleşir.)

$n > 1$ olsun ve $c' = c'(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) = 1 + |\vartheta_1| + \dots + |\vartheta_n|$ ($\vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in \mathbb{C}$) alalım, $h \geq 2$ bir pozitif tam sayı olsun ve $a'_0, a'_1, \dots, a'_n$, $|a'_k| \leq h$ ($k = 0, 1, \dots, n$) olacak şekildeki tam sayılar olsunlar. Bu durumda, bu $n+1$ tane tam sayının her biri, $2h+1$ tane değerden herhangi birini alabilir. Dolayısıyla,

$$L(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) = a'_0 + a'_1 \vartheta_1 + \dots + a'_n \vartheta_n, \quad |a'_k| \leq h \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

olacak şekildeki $L(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$ noktalarının sayısı $(2h+1)^{n+1} = t$ dir. Bu noktaları keyfi olarak sıraya dizip $L_1, L_2, \dots, L_t$ olarak adlandıırırsak,

$$|L_i(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)| \leq |a'_0| + |a'_1| |\vartheta_1| + \dots + |a'_n| |\vartheta_n| \leq c'h \quad (i = 1, \dots, t)$$

olur ve tüm $L_i(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ ($i = 1, \dots, t$) noktaları kompleks düzlemde merkezi orijin ve bir kenar uzunluğu $2c'h$ olan bir karenin içinde kalır. Bu karenin kenarlarını m tane eşit parçaya bölersek m^2 tane küçük kare elde ederiz. $m = [(2h+1)^{\frac{n+1}{2}}] - 1 \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda $m^2 < t$ olduğundan en az bir tane küçük kare vardır ki $L_1, L_2, \dots, L_t$ noktalarından en az iki tanesini içinde bulundurur, yani iki farklı noktayı içeren en az bir tane küçük kare vardır. Bu küçük karenin içinde kalan birbirinden farklı bu iki noktaya

$$L_1(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = a'_0 + a'_1 \vartheta_1 + \dots + a'_n \vartheta_n \quad \text{ve} \quad L_2(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = \overline{a'_0} + \overline{a'_1} \vartheta_1 + \dots + \overline{a'_n} \vartheta_n$$

diyelim. Bu durumda bu iki nokta arasındaki uzaklık küçük karenin köşegeninin uzunluğundan büyük olamaz. Dolayısıyla,

$$|L_1(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) - L_2(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)| \leq \frac{2\sqrt{2}c'h}{m}$$

dir. Eğer $a_0 = a'_0 - \overline{a'_0}$, ..., $a_n = a'_n - \overline{a'_n}$ alırsak; $|a'_k| \leq h$, $|\overline{a'_k}| \leq h$ ($k = 0, 1, \dots, n$) olduğundan $a_k \leq 2h$ ($k = 0, 1, \dots, n$) ve $\max(|a_0|, \dots, |a_n|) = A \leq 2h$ olur. Dolayısıyla,

$$L(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = L_1(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) - L_2(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = a_0 + a_1 \vartheta_1 + \dots + a_n \vartheta_n$$

$$\Rightarrow |L(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)| \leq \frac{2\sqrt{2}c'h}{[(2h+1)^{\frac{n+1}{2}}] - 1} \leq \frac{4c'h}{(2h)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2c'}{(2h)^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{2c'}{A^{\frac{n-1}{2}}} \quad (2.36)$$

elde edilir. O halde $2c' = c$ alırsak (2.35) in en az bir tane çözümü vardır ve bu çözüm $a_0, a_1, \dots, a_n$ dir. Eğer $L(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = 0$ ise her $a \in \mathbb{Z}$ için $aL(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = L(a\vartheta_1, \dots, a\vartheta_n) = 0$ olacağından (2.35) in sonsuz sayıda tam sayı çözümü vardır. Eğer $L(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \neq 0$ ise bu durumda $|L(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)| > \frac{2c'}{(2h_1)^{\frac{n-1}{2}}}$ olacak şekilde bir $h_1 \in \mathbb{N}$ seçeriz ve yukarıda h için yaptıklarımızın aynısını h_1 için yaparsak, (2.36) eşitsizliğini sağlayan bir $L^{(1)}$ noktası elde etmiş oluruz. Böylece

$$|L^{(1)}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)| \leq \frac{2c'}{(2h_1)^{\frac{n-1}{2}}} < |L(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)|$$

olur, yani (2.35) için (ilk bulduğumuzdan farklı) ikinci bir çözüm bulmuş oluruz. Bu şekilde devam edersek (2.35) için keyfi sayıda çözüm elde edebiliriz. O halde, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.9. (LeVeque, [2]) (Simetrik Fonksiyon Teoremi) $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ in bir simetrik fonksiyonu olsun ve $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in her bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ e göre derecesi g olsun. Bu durumda $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ in elemanter simetrik polinomlarının tam katsayılı ve (total) derecesi g olan bir polinomu olarak gösterilebilir.

Teorem 2.10. (LeVeque, [2]) ξ kompleks sayısının transandant olması için gerek ve yeter koşul her $\omega > 0$ reel sayısı için $\exists n = n(\omega)$ doğal sayısı öyleki

$$0 < |a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n| < A^{-\omega}, \quad A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|) \quad (2.37)$$

eşitsizliğinin sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümünün bulunmasıdır.

İspat. Gereklik. ξ kompleks sayısı transandant olsun ve bir $\omega > 0$ reel sayısı alalım. Bu durumda $n = [2\omega + 4] \in \mathbb{N}$ ve $\vartheta_k = \xi^k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) alarak Teorem 2.8 i uygularsak, n ve ξ ye bağlı $\exists c > 0$ reel sayısı öyleki

$$|a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n| < \frac{c}{A^{\frac{1}{2}(n-1)}}, \quad A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$$

olacak şekilde sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümleri vardır. Dolayısıyla $A > c$ olacak şekilde de sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümleri vardır. Çünkü aksi taktirde $A > c$ olacak şekilde sadece sonlu sayıda çözüm olsaydı, sonsuz sayıda çözüm için $A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|) \leq c$ olurdu. Oysaki bu şekilde yalnızca sonlu sayıda tam sayı bulunabilir. O halde, $A > c$ olacak şekildeki sonsuz sayıdaki $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümleri için

$$0 < |a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n| < \frac{c}{A^{\frac{1}{2}(n-1)}} < \frac{c}{A^{\omega+1}} < \frac{1}{A^\omega}, \quad A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$$

$$\left(n = [2\omega + 4] \Rightarrow n + 1 > 2\omega + 4 \Rightarrow \frac{n-1}{2} > \omega + 1 \Rightarrow \frac{c}{A^{\frac{n-1}{2}}} < \frac{c}{A^{\omega+1}}; \quad \frac{c}{A} < 1 \right)$$

olur, yani (2.37) elde edilir. Böylece teoremin gereklik kısmı ispatlanmış olur.

Yeterlik. ξ bir kompleks sayı olsun ve teoremin yeterlik hipotezi geçerli olsun. Bu durumda, ξ nin transandant olmadığını yani cebirsel olduğunu varsayalım. $\xi = \xi_1$, g . dereceden bir cebirsel sayı ve $f(x)$, ξ nin minimal polinomu olsun. Bu durumda,

$$f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_gx^g \in \mathbb{Z}[x], \quad f_g > 0, \quad (f_0, f_1, \dots, f_g) = 1$$

dır. ξ nin eşlenikleri $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_g$ ve $h(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ($a_n > 0$) kökleri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ olan ve $f(x)$ ile hiç ortak kökü bulunmayan bir polinom olsun. Bu durumda $h(\xi_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, g$ ve $f(\beta_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. $f(x)$ ve $h(x)$ i yeniden yazarsak,

$$f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_gx^g = f_g(x - \xi_1) \dots (x - \xi_g) = f_g \prod_{j=1}^g (x - \xi_j) \in \mathbb{Z}[x], \quad f_g > 0;$$

$$h(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_n(x - \beta_1) \dots (x - \beta_n) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \beta_i) \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0.$$

$$\begin{aligned}
0 < \left| \frac{1}{f_g^n} \prod_{i=1}^n f(\beta_i) \right| &= \left| \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^g (\beta_i - \xi_j) \right| = \left| [(\beta_1 - \xi_1) \dots (\beta_1 - \xi_g)] \dots [(\beta_n - \xi_1) \dots (\beta_n - \xi_g)] \right| \\
&= \left| [(\beta_1 - \xi_1) \dots (\beta_n - \xi_1)] \dots [(\beta_1 - \xi_g) \dots (\beta_n - \xi_g)] \right| \\
&= \left| \prod_{j=1}^g \prod_{i=1}^n (\beta_i - \xi_j) \right| = \left| \frac{1}{a_n^g} \prod_{j=1}^g h(\xi_j) \right|.
\end{aligned}$$

$A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$ alırsak,

$$0 < |h(\xi)| = \frac{\left| \prod_{j=1}^g h(\xi_j) \right|}{\left| \prod_{j=2}^g h(\xi_j) \right|} = \frac{\left| a_n^g \prod_{i=1}^n f(\beta_i) \right|}{f_g^n \prod_{j=2}^g |h(\xi_j)|} = \frac{\left| a_n^g \prod_{i=1}^n f(\beta_i) \right|}{f_g^n \prod_{j=2}^g \left(\frac{|h(\xi_j)|}{A} \right) A^{g-1}} \quad (2.38)$$

elde edilir. (2.38) in payı kısmı yani $\left| a_n^g \prod_{i=1}^n f(\beta_i) \right|$ bir tam sayıdır. Çünkü,

$$\prod_{i=1}^n f(\beta_i) = f(\beta_1) \dots f(\beta_n) = (f_0 + f_1 \beta_1 + \dots + f_g \beta_1^g) \dots (f_0 + f_1 \beta_n + \dots + f_g \beta_n^g)$$

olduğundan, $\prod_{i=1}^n f(\beta_i) \in \mathbb{Z}[\beta_1, \dots, \beta_n]$ dir ve $\prod_{i=1}^n f(\beta_i)$ her bir $\beta_1, \dots, \beta_n$ e göre derecesi g olan simetrik bir polinomdur. $\beta_1, \dots, \beta_n$ in elemanter simetrik polinomlarını $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ile gösterirsek; simetrik fonksiyon teoreminden dolayı, $\prod_{i=1}^n f(\beta_i)$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ in tam katsayılı ve derecesi g olan bir polinomu olarak gösterilebilir. O halde,

$$\prod_{i=1}^n f(\beta_i) = \sum f_{k_1 \dots k_n} \sigma_1^{k_1} \dots \sigma_n^{k_n}; \quad f_{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{Z}; \quad k_1 + \dots + k_n \leq g; \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde dir. Ayrıca $\beta_1, \dots, \beta_n$ ler $h(x)$ polinomunun kökleri olduğundan, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ leri $h(x)$ polinomunun katsayıları cinsinden yazabiliriz.

$$h(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_n (x - \beta_1) \dots (x - \beta_n) = a_n (x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n),$$

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sigma_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \dots, \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, \quad a_n > 0)$$

dir. O halde,

$$\prod_{i=1}^n f(\beta_i) = \sum f_{k_1 \dots k_n} \sigma_1^{k_1} \dots \sigma_n^{k_n} = \sum \pm f_{k_1 \dots k_n} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{k_n}; \quad k_1 + \dots + k_n \leq g$$

olur. Dolayısıyla,

$$a_n^g \prod_{i=1}^n f(\beta_i) = a_n^g \sum \pm f_{k_1 \dots k_n} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{k_n} \in \mathbb{Z}$$

olur. Çünkü $k_1 + \dots + k_n \leq g$ olduğundan her bir terimin paydası en fazla a_n^g kadar olabilir.

$$\left. \begin{array}{l} |a_n^g \prod_{i=1}^n f(\beta_i)| \in \mathbb{Z} \\ a_n > 0, f(\beta_i) \neq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \Rightarrow |a_n^g \prod_{i=1}^n f(\beta_i)| \geq 1$$

olduğundan ve (2.38) den,

$$|h(\xi)| \geq \frac{1}{f_g^n \prod_{j=2}^g \left(\frac{|h(\xi_j)|}{A} \right) A^{g-1}}$$

elde edilir. $|\bar{\xi}| = \max(|\xi_1|, \dots, |\xi_g|) = r$ alırsak,

$$\left| \frac{h(\xi_j)}{A} \right| = \left| \frac{a_0 + a_1 \xi_j + \dots + a_n \xi_j^n}{A} \right| \leq \left| \frac{a_0}{A} \right| + \left| \frac{a_1}{A} \right| |\xi_j| + \dots + \left| \frac{a_n}{A} \right| |\xi_j|^n \leq 1 + r + \dots + r^n.$$

Böylece $f_g^n \prod_{j=2}^g \left(\frac{|h(\xi_j)|}{A} \right) \leq f_g^n (1 + r + \dots + r^n)^{g-1}$ dir. $\frac{1}{f_g^n (1 + r + \dots + r^n)^{g-1}} = A(n, \xi)$

diyelim. ($0 < A(n, \xi) < 1$.) O halde,

$$|h(\xi)| \geq \frac{A(n, \xi)}{A^{g-1}} \quad (2.39)$$

olacak şekilde bir $A(n, \xi) > 0$ reel sayısı vardır. İspatımızın başında n doğal sayısını keyfi olarak almıştık. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ ve ξ, g . dereceden cebirsel sayısı için $\exists A(n, \xi) > 0$ reel sayısı öyleki

$$|h(\xi)| = |a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n| \geq \frac{A(n, \xi)}{A^{g-1}} \quad (2.40)$$

eşitsizliği her $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ için geçerlidir.

Şimdi bir $\omega > 0$ reel sayısı alalım. Teoremimizin hipotezi gereği $\exists n = n(\omega)$ doğal sayısı öyleki

$$0 < |a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n| < A^{-\omega}, \quad A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$$

eşitsizliğinin sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümleri vardır. Dolayısıyla sonsuz

sayıda $A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|)$ tam sayısı vardır. O halde, $A > \frac{1}{A(n, \xi)}$ ($n = n(\omega) \in$

$\mathbb{N}$) olacak şekilde de sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayısı vardır. Çünkü aksi tak-

tirde, $A > \frac{1}{A(n, \xi)}$ olacak şekilde yalnızca sonlu sayıda çözüm olsaydı; sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayı çözümleri için $A = \max(|a_0|, \dots, |a_n|) \leq \frac{1}{A(n, \xi)}$ olurdu. Dolayısıyla sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ için $|a_0| \leq \frac{1}{A(n, \xi)}, \dots, |a_n| \leq \frac{1}{A(n, \xi)}$ olurdu. Ancak bu şekilde yalnızca sonlu sayıda tam sayı var olabileceği için çelişkiye düşeriz. O halde, sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayısı için

$$0 < |a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n| < A^{-\omega} = \frac{1}{A^\omega} = \frac{1}{AA^{\omega-1}} < \frac{A(n, \xi)}{A^{\omega-1}}$$

$$\left(A > \frac{1}{A(n, \xi)} > 1 \Rightarrow \frac{1}{A} < A(n, \xi) \right)$$

dır. Bunu (2.40) ile birleştirirsek, sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayısı için

$$\frac{A(n, \xi)}{A^{g-1}} \leq |a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n| < \frac{A(n, \xi)}{A^{\omega-1}}$$

$$\Rightarrow A^{g-1} > A^{\omega-1} \Rightarrow (A > 1) g > \omega$$

olur. Bu durumda ξ kompleks cebirsel sayısının derecesi g , $\omega > 0$ reel sayısından büyük olmalıdır. Oysaki $\omega > 0$ reel sayısını keyfi büyük alabiliriz. O halde, çelişkiye düşmüş olduk. Dolayısıyla, ξ kompleks sayısı transandant bir sayıdır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

2.2.2. U_m Kümeleri

Bu bölümde, LeVeque [3] in makalesi incelenecektir. Öncelikle tam katsayılı bir $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ polinomunun yüksekliğinin $H(f) = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|)$ şeklinde tanımlandığını hatırlayalım. Görüldüğü gibi $0 \leq H(f) \in \mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.6. (LeVeque [3]) Eğer aşağıdaki iki koşul gerçekleşirse,

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_m^{(n)}x^m \in \mathbb{Z}[x] \quad (m \in \mathbb{N}, a_m^{(n)} \neq 0) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

polinomları, ξ kompleks sayısı için bir Liouville polinomları dizisi veya kısaca bir L_m dizisi oluşturur denir:

Koşul 1: $H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$,

Koşul 2: $0 < |f_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Burada $H(f_n) = \max(|a_0^{(n)}|, \dots, |a_m^{(n)}|)$ ($n = 1, 2, \dots$), ω_n bir pozitif reel sayı dizisi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ dur.

Aşağıdaki not Tanım 2.6 dan elde ettiğimiz bir yorumdur, zaten literatürde bilinmektedir.

Not 2.6. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ polinom dizisi ξ kompleks sayısı için bir L_m dizisi olsun. Bu taktirde,

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $H(f_n) > 1$ dir,
- 2) $\{|f_n(\xi)|\}_{n=1}^{\infty}$ bir sıfır dizisidir,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n) = \infty$ dur,
- 4) ξ bir transandant sayıdır.

İspat. 1) $0 < |f_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $\omega_n > 0$ olduğundan $H(f_n) > 1$ ($n = 1, 2, \dots$) dir.

2) $H(f_n) > 1$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $H(f_n) \in \mathbb{Z}$ olduğundan, $H(f_n) \geq 2$ ($n = 1, 2, \dots$)

dir. O halde, $0 < |f_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(f_n) = \frac{1}{H^{\omega_n}(f_n)} \leq \frac{1}{2^{\omega_n}}$ elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\omega_n}} = 0$ dir. Dolayısıyla, $\{|f_n(\xi)|\}_{n=1}^{\infty}$ bir sıfır dizisidir.

3) $\{H(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ monoton artan tam sayı dizisi sınırlı olamaz. Çünkü sınırlı olsa, yani bir $M > 0$ reel sayısı için $|H(f_n)| = H(f_n) \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) olsa; yüksekliği $\leq M$ ve derecesi m olan ancak sonlu sayıda tam katsayılı polinom var olduğundan, ancak sonlu sayıda $f_n(x)$ polinomu vardır. Dolayısıyla ancak sonlu sayıda (birbirinden farklı) $|f_n(\xi)|$ değeri var olurdu. Oysaki $\{|f_n(\xi)|\}_{n=1}^{\infty}$ nin bir sıfır dizisi oluşturduğunu ve $0 < |f_n(\xi)|$ ($n = 1, 2, \dots$) olduğunu biliyoruz. O halde sonsuz sayıda $|f_n(\xi)|$ değerinin var olduğunu biliyoruz. Çünkü bir sıfır dizisinin terimleri belli bir yerden itibaren sıfır değilse, birbirinden farklı sonsuz sayıda terim içermelidir, yani bir u_n reel sayı dizisi bir sıfır dizisi ise ve her $n \in \mathbb{N}$ için (veya belli bir n_0 dan itibaren) $u_n \neq 0$ ise $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sonsuz sayıda terim içermelidir. Varsayalım ki $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi birbirinden farklı sonlu sayıda terim içersin. Bunları $u_1, u_2, \dots, u_t$ ile gösterelim. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $|u_n| > 0$ olur. $\min(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_t|) = c$ diyelim. c pozitif bir reel sayıdır. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $|u_n| \geq c$ olur. Bu ise $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir sıfır dizisi olmasıyla çelişirdi. Çünkü, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir sıfır dizisi olduğundan belli bir n den itibaren $0 < |u_n| < c$ olmalıdır.

O halde, $\{H(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi monoton artan ve sınırsızdır. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n) = \infty$ dur.

4) Herhangi bir $\omega > 0$ reel sayısı alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğundan, $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0$ için $\omega_n > \omega$ dir. Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için

$$0 < |f_n(\xi)| = |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi + \dots + a_m^{(n)}\xi^m| = H^{-\omega_n}(f_n) = \frac{1}{H^{\omega_n}(f_n)} < \frac{1}{H^{\omega}(f_n)}$$

$$\left(H(f_n) > 1 \ (n = 1, 2, \dots), \ H(f_n) = \max(|a_0^{(n)}|, \dots, |a_m^{(n)}|) \ (n = 1, 2, \dots) \right)$$

dir. Ayrıca 3) ten birbirinden farklı sonsuz sayıda $|f_n(\xi)|$ değeri olduğunu biliyoruz, yani birbirinden farklı sonsuz sayıda $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ vardır. Dolayısıyla, $n(\omega) = m \in \mathbb{N}$ alırsak, her $\omega > 0$ için

$$0 < |a_0 + a_1\xi + \dots + a_m\xi^m| < \frac{1}{H^{\omega}}, \quad H = \max(|a_0|, \dots, |a_m|)$$

olacak şekilde sonsuz sayıda $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde Teorem 2.10 dan ξ , bir transadant sayıdır.

Tanım 2.7. (LeVeque, [3]) $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$U_m = \left\{ \xi \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \xi \text{ için bir } L_m - \text{dizisi vardır, ancak } \xi \text{ için} \\ 1 \leq n < m \text{ olacak şekilde bir } L_n - \text{dizisi yoktur.} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki not Tanım 2.7 nin aşikar bir sonucudur, literatürde bilinmektedir.

Not 2.7. $U_m \ (m \in \mathbb{N})$ kümeleri ikiye ikiye ayrıktır.

İspat. $U_{m_1}, U_{m_2} \ (m_1 \in \mathbb{N}, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \neq m_2)$ alalım. $m_1 < m_2$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $\xi \in \mathbb{C}$ için, $\xi \in U_{m_1} \cap U_{m_2}$ olsa, $\xi \in U_{m_1}$ ve $\xi \in U_{m_2}$ olur. $\xi \in U_{m_1}$ olduğundan, ξ için bir L_{m_1} -dizisi vardır. Ancak, bu $\xi \in U_{m_2}$ olmasıyla çelişir. Çünkü, $\xi \in U_{m_2}$ ise ξ için bir L_{m_2} -dizisi vardır, ancak ξ için bir $L_n \ (1 \leq n < m_2)$ dizisi yoktur. Dolayısıyla, ξ için bir L_{m_1} -dizisi yoktur. O halde, $U_{m_1} \cap U_{m_2} = \emptyset$ olmak zorundadır.

Not 2.8. (LeVeque, [3]) $\xi \in U_m$ olsun. Bu taktirde, ξ için bir L_m -dizisi vardır. Ancak bu L_m -dizisi tek türlü belirli değildir. Çünkü bir L_m - dizisinin her sonsuz alt dizisi de yine bir L_m -dizisidir, yani $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ polinom dizisi $\xi \in \mathbb{C}$ için bir L_m -dizisi ise $\{f_{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ polinom dizisi de ξ için bir L_m - dizisidir.

Tanım 2.8. (LeVeque, [2]) ξ bir reel sayı olsun. Bu durumda $\forall \omega > 0$ reel sayısı için,

$$0 < |q\xi - p| < \frac{1}{q^\omega}, \quad q > 1$$

olacak şekilde bir $p, q \in \mathbb{Z}$ çifti varsa ξ ye bir Liouville sayısı denir.

Dikkat edilirse ξ bir Liouville sayısı ise ξ bir irrasyonel sayıdır. Çünkü ξ bir Liouville sayısı olduğundan, $\forall \omega > 0$ reel sayısı için,

$$0 < |q\xi - p| < \frac{1}{q^\omega}, \quad q > 1$$

olacak şekilde birbirinden farklı sonsuz sayıda $p, q \in \mathbb{Z}$ çifti vardır. Dolayısıyla LeVeque [2] Teorem 5.1 den, ξ bir irrasyonel sayıdır.

Teorem 2.11. (LeVeque, [3]) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ birbirinden farklı kompleks sayılar ve $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_m^{(n)}x^m\}_{n=1}^{\infty}$ polinom dizisi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ in her biri için bir L_m -dizisi olsun. Bu taktirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \alpha_k \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

olacak şekilde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ reel sayıları vardır. Bu reel sayılar ya rasyoneldir ya da Liouville sayısıdır. Ancak $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ den en az biri Liouville sayısıdır. Eğer

$\alpha_k \in \mathbb{Q}$ ise, yeteri kadar büyük n ler için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \alpha_k$ dır. α_k bir Liouville sayısı ise,

yeteri kadar büyük n ler için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}}$, α_k nın sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kes-

ridir. Bu durumda, yeteri kadar büyük n ler için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}}$ ler α_k ya bir en iyi yaklaşım

olduğundan; $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}}, \frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} \left((p_k^{(n)}, q_k^{(n)}) = 1; p_k^{(n)}, q_k^{(n)} \in \mathbb{Z}, q_k^{(n)} > 0 \right)$ şeklinde yazılabilir.

$K = \{k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \mid \alpha_k, \text{ bir Liouville sayısı}\}$ olmak üzere, monoton birleşim

dizisi $\{q^{(n)}\}$ $\left(\{q^{(n)}\} = \{q_k^{(n)} \in \mathbb{Z}^+ \mid k \in K, n \in \mathbb{N}\}, \text{ ayrıca } q_k^{(n)} \text{ ler küçükten büyüğe doğru sıralanacak}\right)$, bir geniş boşluk dizisidir, yani

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q^{(n+1)}}{\log q^{(n)}} = \infty$$

dur.

İspat. Öncelikle $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ in her biri için bir L_m -dizisi olduğundan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ kompleks sayıları transandanttır. $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) polinomlarının kökleri $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}$ olsun.

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_m^{(n)}x^m = a_m^{(n)}(x - \xi_1^{(n)}) \dots (x - \xi_m^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklinde yazalım. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ξ_i ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) için bir L_m -dizisi olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi_i) = 0 \quad \text{dır. Dolayısıyla (uygun bir } i \text{ için)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dir. Çünkü, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_m^{(n)}(\xi_i - \xi_1^{(n)}) \dots (\xi_i - \xi_m^{(n)}) = 0$ olduğundan, $\varepsilon > 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere, yeteri kadar büyük n ler için

$$|f_n(\xi_i)| = |a_m^{(n)}| |\xi_i - \xi_1^{(n)}| \dots |\xi_i - \xi_m^{(n)}| < \varepsilon \quad \left(|a_m^{(n)}| \geq 1\right)$$

dir. O halde, belli bir $n_0 \in \mathbb{N}$ den itibaren $|\xi_i - \xi_1^{(n)}|, \dots, |\xi_i - \xi_m^{(n)}|$ den en az biri $< \varepsilon$ dur. Çünkü hepsi birden $\geq \varepsilon$ olsa belli bir $n_0 \in \mathbb{N}$ den itibaren $|f_n(\xi_i)| \geq \varepsilon^m$

olur. Ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi_i) = 0$ olduğundan belli bir n den itibaren $|f_n(\xi_i)| < \varepsilon^m$ ($\varepsilon^m > 0$)

olmalıdır. Ama sıranın önemi yoktur, yani her defasında $< \varepsilon$ olanı i . sıraya yazabiliriz.

Dolayısıyla belli bir n den itibaren $|\xi_i - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon$ olur. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$

dir. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_1^{(n)} = \xi_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_2^{(n)} = \xi_2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_m^{(n)} = \xi_m$ dir.

$\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}$ köklerinin elemanter simetrik polinomlarını $\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_m^{(n)}$ ile gösterelim ve bunları $f_n(x)$ in katsayıları cinsinden yazalım:

$$\sigma_1^{(n)} = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_m^{(n)} = -\frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}},$$

$$\sigma_2^{(n)} = \xi_1^{(n)}\xi_2^{(n)} + \dots + \xi_1^{(n)}\xi_m^{(n)} + \dots + \xi_{m-1}^{(n)}\xi_m^{(n)} = \frac{a_{m-2}^{(n)}}{a_m^{(n)}},$$

⋮

$$\sigma_{m-1}^{(n)} = \xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} \dots \xi_{m-1}^{(n)} + \dots + \xi_2^{(n)} \dots \xi_m^{(n)} = (-1)^{m-1} \frac{a_1^{(n)}}{a_m^{(n)}},$$

$$\sigma_m^{(n)} = \xi_1^{(n)} \dots \xi_m^{(n)} = (-1)^m \frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}}$$

dır. Dikkat edilirse $k = 0, 1, \dots, m-1$ için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} = (-1)^{m-k} \sigma_{m-k}^{(n)}$ dır. Ayrıca $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) dizileri yakınsak olduğundan $\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_m^{(n)}$ dizileri de yakınsaktır. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ in elemanter simetrik polinomlarını $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ ile gösterelim:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sigma_1^{(n)}) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_1^{(n)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_m^{(n)}) \\ &= -(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m) = -\sigma_1 =: \alpha_{m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{m-2}^{(n)}}{a_m^{(n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_1^{(n)} \xi_m^{(n)} + \dots + \xi_{m-1}^{(n)} \xi_m^{(n)}) \\ &= \xi_1 \xi_2 + \dots + \xi_1 \xi_m + \dots + \xi_{m-1} \xi_m = \sigma_2 =: \alpha_{m-2}, \end{aligned}$$

⋮
⋮

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^{m-1} \sigma_{m-1}^{(n)}) = (-1)^{m-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{m-1}^{(n)}$$

$$= (-1)^{m-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} \dots \xi_{m-1}^{(n)} + \dots + \xi_2^{(n)} \dots \xi_m^{(n)})$$

$$= (-1)^{m-1} (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{m-1} + \dots + \xi_2 \dots \xi_m) = (-1)^{m-1} \sigma_{m-1} =: \alpha_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^m \sigma_m^{(n)}) = (-1)^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_m^{(n)} = (-1)^m \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1^{(n)} \dots \xi_m^{(n)})$$

$$= (-1)^m (\xi_1 \dots \xi_m) = (-1)^m \sigma_m =: \alpha_0$$

dır. O halde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \alpha_0, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \alpha_{m-1}$ dir. Böylece $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ reel

sayılarını elde ettik. Ayrıca $\alpha_k = (-1)^{m-k} \sigma_{m-k}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) dir. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{a_m^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}} + \frac{a_1^{(n)}}{a_m^{(n)}} x + \dots + \frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}} x^{m-1} + x^m \right) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

dir. Şimdi $|\xi_i - \xi_i^{(n)}|$ için bir üst sınır belirleyelim:

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ξ_i ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) için bir L_m -dizisi olduğundan,

$$|f_n(\xi_i)| = H^{-\omega_n^{(i)}}(f_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{(i)} = \infty \quad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklindedir. $|f_n(\xi_i)| = |a_m^{(n)}(\xi_i - \xi_1^{(n)}) \dots (\xi_i - \xi_m^{(n)})| = H^{-\omega_n^{(i)}}(f_n)$ olduğundan,

$$|\xi_i - \xi_i^{(n)}| = \frac{H^{-\omega_n^{(i)}}(f_n)}{|a_m^{(n)}| \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m |\xi_i - \xi_j^{(n)}|} \quad (|f_n(\xi_i)| \neq 0 \Rightarrow |\xi_i - \xi_j^{(n)}| \neq 0) \quad (2.41)$$

elde edilir.

$$|\xi_i - \xi_j^{(n)}| = |\xi_i - \xi_j + \xi_j - \xi_j^{(n)}| \geq |\xi_i - \xi_j| - |\xi_j - \xi_j^{(n)}|. \quad (2.42)$$

$i \neq j$

$i \neq j$ ise $\xi_i \neq \xi_j$ olduğundan, $|\xi_i - \xi_j|$ pozitif ve n e bağlı olmayan bir reel sabittir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_j^{(n)} = \xi_j$ olduğundan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|\xi_j - \xi_j^{(n)}| < \frac{|\xi_i - \xi_j|}{2} \quad (i \neq j) \Rightarrow -|\xi_j - \xi_j^{(n)}| > -\frac{|\xi_i - \xi_j|}{2} \quad (2.43)$$

elde edilir. O halde (2.42) ve (2.43) den,

$$|\xi_i - \xi_j^{(n)}| \geq |\xi_i - \xi_j| - |\xi_j - \xi_j^{(n)}| > |\xi_i - \xi_j| - \frac{|\xi_i - \xi_j|}{2} = \frac{|\xi_i - \xi_j|}{2}$$

$i \neq j$

dır. Dolayısıyla yeteri kadar büyük n ler için $|\xi_i - \xi_j^{(n)}|_{i \neq j} > \frac{|\xi_i - \xi_j|}{2}$ olur, yani yeteri kadar büyük n ler için,

$$|\xi_i - \xi_1^{(n)}| > \frac{|\xi_i - \xi_1|}{2}, \dots, |\xi_i - \xi_{i-1}^{(n)}| > \frac{|\xi_i - \xi_{i-1}|}{2},$$

$$|\xi_i - \xi_{i+1}^{(n)}| > \frac{|\xi_i - \xi_{i+1}|}{2}, \dots, |\xi_i - \xi_m^{(n)}| > \frac{|\xi_i - \xi_m|}{2}$$

dir. O halde,

$$\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m |\xi_i - \xi_j^{(n)}| = |\xi_i - \xi_1^{(n)}| \dots |\xi_i - \xi_{i-1}^{(n)}| |\xi_i - \xi_{i+1}^{(n)}| \dots |\xi_i - \xi_m^{(n)}|$$

$$> \left(\frac{|\xi_i - \xi_1|}{2} \dots \frac{|\xi_i - \xi_{i-1}|}{2} \frac{|\xi_i - \xi_{i+1}|}{2} \dots \frac{|\xi_i - \xi_m|}{2} \right) =: t_i$$

diyelim. $t_i > 0$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$), n e bağılı olmayan bir reel sabittir. Sonuç olarak, yeteri kadar büyük n ler için

$$|\xi_i - \xi_i^{(n)}| = \frac{H^{-\omega_n^{(i)}}(f_n)}{|a_m^{(n)}| \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m |\xi_i - \xi_j^{(n)}|} < \frac{1}{t_i} \frac{H^{-\omega_n^{(i)}}(f_n)}{|a_m^{(n)}|} = \frac{1}{t_i} H^{-\omega_n^{(i)}-1}(f_n) \frac{H(f_n)}{|a_m^{(n)}|} \quad (2.44)$$

olur. Şimdi $\left\{ \frac{H(f_n)}{|a_m^{(n)}|} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini düşünelim.

$$\frac{H(f_n)}{|a_m^{(n)}|} = \frac{\max(|a_0^{(n)}|, \dots, |a_m^{(n)}|)}{|a_m^{(n)}|} = \max\left(\left|\frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}}\right|, \dots, \left|\frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}}\right|, 1\right)$$

dir. $\left\{ \left|\frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}}\right| \right\}, \dots, \left\{ \left|\frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}}\right| \right\}$ rasyonel sayı dizileri yakınsak olduklarından sınırlıdır-

lar. Dolayısıyla $\exists M_0, M_1, \dots, M_{m-1}$ pozitif reel sayıları; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|\frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}}\right| \leq M_0, \dots,$

$\left|\frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}}\right| \leq M_{m-1}$ dir. $\max(M_0, \dots, M_{m-1}, 1) = t$ diyelim, burada $t > 0$, n den ba-

ğımsız bir reel sabittir. O halde,

$$\frac{H(f_n)}{|a_m^{(n)}|} \leq \max(M_0, \dots, M_{m-1}, 1) = t \quad (2.45)$$

dir. (2.44) ve (2.45) i birleştirirsek,

$$|\xi_i - \xi_i^{(n)}| < \frac{1}{t_i} H^{-\omega_n^{(i)}-1}(f_n) \frac{H(f_n)}{|a_m^{(n)}|} \leq \frac{1}{t_i} H^{-\omega_n^{(i)}-1}(f_n) t = t'_i H^{-\omega_n^{(i)}-1}(f_n)$$

elde edilir, burada $\frac{1}{t_i} t = t'_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) dir ve $t'_i > 0$, n den bağımsız bir reel sabittir. Dolayısıyla yeteri kadar büyük n ler için,

$$|\xi_i - \xi_i^{(n)}| < t'_i H^{-\omega_n^{(i)}-1}(f_n) \quad (2.46)$$

bulunur. Ayrıca, $1 + \omega_n^{(i)} \geq \min \left(1 + \omega_n^{(1)}, \dots, 1 + \omega_n^{(m)} \right)$ olduğundan,

$$H^{1+\omega_n^{(i)}}(f_n) \geq H_i^{\min(1+\omega_n^{(i)})}(f_n) \Rightarrow H^{-\omega_n^{(i)}-1}(f_n) \leq H_i^{-\min(1+\omega_n^{(i)})}(f_n)$$

dir. (2.46) dan,

$$\begin{aligned} \left| \xi_1 - \xi_1^{(n)} \right| &< t_1' H^{-\omega_n^{(1)}-1}(f_n) \leq t_1' H_i^{-\min(1+\omega_n^{(i)})}(f_n) \\ \left| \xi_2 - \xi_2^{(n)} \right| &< t_2' H^{-\omega_n^{(2)}-1}(f_n) \leq t_2' H_i^{-\min(1+\omega_n^{(i)})}(f_n) \\ &\vdots \\ \left| \xi_m - \xi_m^{(n)} \right| &< t_m' H^{-\omega_n^{(m)}-1}(f_n) \leq t_m' H_i^{-\min(1+\omega_n^{(i)})}(f_n) \end{aligned}$$

dir, burada $t_1', t_2', \dots, t_m'$; pozitif, n den bağımsız reel sabitlerdir. $c_1 = \max(t_1', t_2', \dots, t_m')$ alınırsa,

$$\left| \xi_i - \xi_i^{(n)} \right| < c_1 (H(f_n))^{-\min(1+\omega_n^{(i)})} \quad (\text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için}) \quad (2.47)$$

dir. Böylece, $\left| \xi_i - \xi_i^{(n)} \right|$ için bir üst sınır belirlemiş olduk. Şimdi $\left\{ \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini inceleyelim. $k = 0, 1, \dots, m-1$ için,

$$\begin{aligned} \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} &= (-1)^{m-k} \sigma_{m-k} - (-1)^{m-k} \sigma_{m-k}^{(n)} = (-1)^{m-k} (\sigma_{m-k} - \sigma_{m-k}^{(n)}) \\ &= (-1)^{m-k} \left(\sum \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{m-k} - \sum \xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)} \right) \\ &= \pm \left(\sum \left((\xi_1 - \xi_1^{(n)}) + \xi_1^{(n)} \right) \dots \left((\xi_{m-k} - \xi_{m-k}^{(n)}) + \xi_{m-k}^{(n)} \right) - \sum \xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)} \right) \\ &= \pm \sum \left(\left((\xi_1 - \xi_1^{(n)}) + \xi_1^{(n)} \right) \dots \left((\xi_{m-k} - \xi_{m-k}^{(n)}) + \xi_{m-k}^{(n)} \right) - \xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)} \right) =: A \end{aligned}$$

diyelim. A daki toplama katılan $\binom{m}{m-k}$ tane terim vardır. Biz sadece bir tane terimi inceleyeceğiz. Diğerleri için de aynı düşünce uygulanır.

$$\begin{aligned} &\left((\xi_1 - \xi_1^{(n)}) + \xi_1^{(n)} \right) \dots \left((\xi_{m-k} - \xi_{m-k}^{(n)}) + \xi_{m-k}^{(n)} \right) - \xi_1^{(n)} \xi_2^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)} \\ &= (\xi_1 - \xi_1^{(n)})(\xi_2 - \xi_2^{(n)}) \dots (\xi_{m-k} - \xi_{m-k}^{(n)}) + (\xi_1 - \xi_1^{(n)})(\xi_2 - \xi_2^{(n)}) \dots \\ &\quad (\xi_{m-k-1} - \xi_{m-k-1}^{(n)}) \xi_{m-k}^{(n)} + \dots + \xi_1^{(n)} (\xi_2 - \xi_2^{(n)}) \dots (\xi_{m-k} - \xi_{m-k}^{(n)}) + \xi_1^{(n)} (\xi_2 - \xi_2^{(n)}) \dots \\ &\quad (\xi_{m-k-1} - \xi_{m-k-1}^{(n)}) \xi_{m-k}^{(n)} + \dots + \xi_1^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)} - \xi_1^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)}. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $\xi_1^{(n)} \dots \xi_{m-k}^{(n)}$ yok oluyor ve geriye kalan ifadede her terim en az bir $(\xi_i - \xi_i^{(n)})$ çarpanı içeriyor. Böylece A toplamındaki her terimdeki çarpanlar bazı $(\xi_i - \xi_i^{(n)})$ ve $\xi_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) lerden oluşur. Oysaki $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) olup, $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsaktır ve dolayısıyla sınırlıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|\xi_1^{(n)}| \leq k_1, \dots, |\xi_m^{(n)}| \leq k_m \quad (2.48)$$

olacak şekilde $k_1, \dots, k_m$ pozitif reel sabitleri vardır. Aynı şekilde $\{|\xi_i - \xi_i^{(n)}|\}_{n=1}^{\infty}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) bir sıfır dizisi olduğundan sınırlıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|\xi_1 - \xi_1^{(n)}| \leq \ell_1, \dots, |\xi_m - \xi_m^{(n)}| \leq \ell_m \quad (2.49)$$

olacak şekilde $\ell_1, \dots, \ell_m$ pozitif reel sabitleri vardır. A daki terimlerin mutlak değerlerinin toplamına B diyelim. Böylece $A \leq B$ dir ve B deki her bir terimdeki çarpanlar bazı $|\xi_i - \xi_i^{(n)}|$ ve $|\xi_i^{(n)}|$ ($i = 1, 2, \dots, m$) lerden oluşur. O halde (2.47) den,

$$\left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| \leq B < c_1 (H(f_n))^{-\min_i (1 + \omega_n^{(i)})} c' \quad (\text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için})$$

dir. Burada c' , (2.48) ve (2.49) daki pozitif, n e bağlı olmayan reel sabitlerin bir takım çarpımlarının toplamıdır. $c_1 c' =: c_2$ diyelim. Böylece c_2 , pozitif, n e bağlı olmayan bir reel sabittir ve yeteri kadar büyük n ler için

$$\left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < c_2 (H(f_n))^{-\min_i (1 + \omega_n^{(i)})} \quad (2.50)$$

dir. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_i (1 + \omega_n^{(i)}) = \infty$ dur. Çünkü, her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{(i)} = \infty$ dur. Ayrıca $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ bir L_m - dizisi olduğundan Not 2.6 dan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $H(f_n) > 1$ dir. Bunlar ve (2.50) eşitsizliğinden dolayı, $\left\{ \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ bir sıfır

dizisidir. Dolayısıyla iki durum söz konusudur:

- 1) Yeteri kadar büyük n ler için $\alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} = 0$ dır, yani belli bir n den itibaren $\alpha_k = \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}}$ dir. Böylece α_k , bir rasyonel sayıdır. O halde, α_k bir rasyonel sayı ise yeteri kadar büyük n ler için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \alpha_k$ dır.

2) Sonsuz sayıda n için $\alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \neq 0$ dır. Bu durumda, α_k bir irrasyonel sayıdır. O halde (2.50) dan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < c_2 (H(f_n))^{-\min_i (1 + \omega_n^{(i)})}$$

dir. Bu durumda α_k irrasyonel sayısının bir Liouville sayısı olduğunu gösterelim:

$\omega > 0$ herhangi bir reel sayı olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_i (1 + \omega_n^{(i)}) = \infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$H(f_n) > 1 \text{ olduğundan } \left\{ \left(\frac{1}{H(f_n)} \right)^{\min_i (1 + \omega_n^{(i)}) - 1 - \omega} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ bir sıfır dizisidir.}$$

Dolayısıyla yeteri kadar büyük n ler için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(H(f_n))^{\min_i (1 + \omega_n^{(i)}) - 1 - \omega}} &< \frac{1}{c_2} \quad (c_2 > 0) \Rightarrow \frac{c_2}{(H(f_n))^{\min_i (1 + \omega_n^{(i)})}} < \frac{1}{(H(f_n))^{1 + \omega}} \\ \Rightarrow 0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| &< \frac{1}{(H(f_n))^{1 + \omega}} \quad (\text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1 \leq |a_m^{(n)}| \leq H(f_n) \right) \quad 0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < \frac{1}{|a_m^{(n)}|^{1 + \omega}} \quad (\text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için})$$

elde edilir. Ayrıca $a_m^{(n)}$ tam sayısını pozitif seçebiliriz. (Negatif ise - yi paya veririz.) O halde, yeteri kadar büyük n ler için,

$$0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < \frac{1}{(a_m^{(n)})^{1 + \omega}}, \quad a_m^{(n)} > 0$$

dir. Şimdi yeteri kadar büyük n ler için $a_m^{(n)} > 1$ olduğunu gösterelim, yani $a_m^{(n)} = 1$ olacak şekilde ancak sonlu sayıda $n \in \mathbb{N}$ vardır. Çünkü aksi takdirde, $a_m^{(n)} = 1$ olacak şekilde sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ olsa; bu n lerin oluşturduğu doğal sayıların alt dizisini

$\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ ile gösterirsek, her $j \in \mathbb{N}$ için $a_m^{(n_j)} = 1$ olur. Ancak, yeteri kadar büyük

$$n \text{ ler için } 0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| \text{ olduğunu ve } \left\{ \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ dizisinin bir sıfır dizisi}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla yeteri kadar büyük j ler için, $0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n_j)}}{a_m^{(n_j)}} \right| =$

$|\alpha_k - a_k^{(n_j)}|$ ve $\{|\alpha_k - a_k^{(n_j)}|\}_{j=1}^{\infty}$ bir sıfır dizisidir. α_k irrasyonel olduğundan

$[\alpha_k] < \alpha_k < [\alpha_k] + 1$ dir. ($[\alpha_k]$ ve $[\alpha_k] + 1$, α_k ya en yakın iki tam sayıdır.)

$\min(|\alpha_k - [\alpha_k]|, |\alpha_k - ([\alpha_k] + 1)|) =: s$ diyelim. ($s > 0$.) O halde, $0 < s \leq |\alpha_k - a_k^{(n_j)}|$

($a_k^{(n_j)} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots$) olur ki bu $\{|\alpha_k - a_k^{(n_j)}|\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir sıfır dizisi olmasıyla

çelişir. Çünkü $\{|\alpha_k - a_k^{(n_j)}|\}_{n=1}^{\infty}$ bir sıfır dizisi olduğundan, yeteri kadar büyük j

ler için $|\alpha_k - a_k^{(n_j)}|$ değerleri her pozitif reel sayıdan, dolayısıyla s den de küçük

kalmalıdır. O halde, $a_m^{(n)} = 1$ olacak şekilde ancak sonlu sayıda $n \in \mathbb{N}$ vardır, yani

belli bir n den itibaren $a_m^{(n)} > 1$ dir. Sonuç olarak yeteri kadar büyük n ler için,

$$0 < \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < \frac{1}{(a_m^{(n)})^{1+\omega}}, \quad a_m^{(n)} > 1$$

elde edilir. O halde, α_k irrasyonel sayısı bir Liouville sayısıdır. Böylece $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$

reel sayıları ya rasyoneldir ya da Liouville sayısıdır. Ancak bunlardan en az biri Liouville

sayısıdır. Çünkü $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ lerin hepsi rasyonel olsa;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{a_m^{(n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0^{(n)}}{a_m^{(n)}} + \frac{a_1^{(n)}}{a_m^{(n)}} x + \dots + \frac{a_{m-1}^{(n)}}{a_m^{(n)}} x^{m-1} + x^m \right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ transandant sayılarından herhangi birini mesela ξ_1 i

alalım. $|f_n(\xi_1)|$ in bir sıfır dizisi olduğunu biliyoruz.

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } a_m^{(n)} > 0 \Rightarrow |a_m^{(n)}| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|a_m^{(n)}|} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

olup, $\left\{ \frac{1}{a_m^{(n)}} \right\}$ bir sınırlı dizidir. Sınırlı bir diziyle bir sıfır dizisinin çarpımı, bir sıfır

dizisi olduğundan $\left\{ \frac{f_n(\xi_1)}{a_m^{(n)}} \right\}$ bir sıfır dizisidir. O halde,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\xi_1)}{a_m^{(n)}} = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_{m-1} \xi_1^{m-1} + \xi_1^m$$

olur. Bu ise ξ_1 in bir transandant sayı olmasıyla çelişir. Böylece, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ in

hepsi rasyonel olamaz, en az biri Liouville sayısıdır.

Ayrıca yeteri kadar büyük n ler için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}}$, α_k ($k = 0, 1, \dots, m-1$) reel sayısının sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesridir. Çünkü, Teorem 2.7 den biliyoruz ki, ξ herhangi bir reel sayı olmak üzere, $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$ ise $\frac{p}{q}$, ξ nin sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesridir ve (2.50) den, yeteri kadar büyük n ler için $\left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < c_2 (H(f_n))^{-\min_i (1+\omega_n^{(i)})}$ olduğunu biliyoruz. Böylece, yeteri kadar büyük n ler için

$$\left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < c_2 (H(f_n))^{-\min_i (1+\omega_n^{(i)})} < \frac{1}{2(H(f_n))^2}$$

elde edilir. Çünkü,

$$\frac{c_2}{(H(f_n))^{\min_i (1+\omega_n^{(i)})}} < \frac{1}{2(H(f_n))^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(H(f_n))^{\min_i (1+\omega_n^{(i)})-2}} < \frac{1}{2c_2} \quad (c_2 > 0 \text{ sabit}) \quad (2.51)$$

olmasıdır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_i (1+\omega_n^{(i)}) = \infty$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ve her $n \in \mathbb{N}$ için $H(f_n) > 1$ olduğundan

$$\left\{ \frac{1}{(H(f_n))^{\min_i (1+\omega_n^{(i)})-2}} \right\} \text{ bir sıfır dizisidir. Dolayısıyla yeteri kadar büyük } n \text{ ler için}$$

(2.51) eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla,

$$\left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < \frac{1}{2(H(f_n))^2} \leq \frac{1}{2|a_m^{(n)}|^2} \quad (1 \leq |a_m^{(n)}| \leq H(f_n))$$

elde edilir. Yine negatifliği paya vererek $a_m^{(n)} > 0$ alabiliriz. O halde, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < \frac{1}{2(a_m^{(n)})^2}$$

dir, yani Teorem 2.7 den yeteri kadar büyük n ler için, $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}}$, α_k nin sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesridir. (Burada α_k rasyonel veya irrasyonel olabilir. α_k rasyonel ise belli bir n den itibaren hep aynı yaklaşım kesri tekrar eder ki bu da α_k nin kendisidir.)

Teorem 2.6 dan biliyoruz ki, eğer $\frac{p_k}{q_k}$ ($k \geq 0$), ξ nin sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesri ise,

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

dir ve bu durumda,

$$q_k(q_k + q_{k+1}) = q_k q_k + q_k q_{k+1} < q_k q_{k+1} + q_k q_{k+1} = 2q_k q_{k+1} \quad (q_k < q_{k+1})$$

olduğundan, $\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} > \frac{1}{2q_k q_{k+1}}$ olur. O halde $\frac{p_k}{q_k}$, ξ nin sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesri ise

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left| \alpha_k - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad (k \geq 0) \quad (2.52)$$

elde edilir.

Şimdi $K = \{ k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \mid \alpha_k, \text{ bir Liouville sayısı} \}$ kümesini düşünelim.

$k \in K$ olmak üzere α_k irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımındaki tüm yaklaşım kesirlerinin oluşturduğu diziyi $\{P_k^{(n)}/Q_k^{(n)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ile gösterelim. O halde, her

$k \in K$ ve yeteri kadar büyük n ler için $\frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} = \frac{P_k^{(v_k(n))}}{Q_k^{(v_k(n))}}$ ($k \in K$) olacak şekilde bir $v_k(n)$

doğal sayısı vardır. (Burada, $n = 1, 2, \dots$ için $(P_k^{(v_k(n))}, Q_k^{(v_k(n))}) = 1$, $Q_k^{(n)} \geq 1$ ve $Q_k^{(n+1)} > Q_k^{(n)}$ olduğunu biliyoruz.) O halde, (2.52) den,

$$\frac{1}{2Q_k^{(n)} Q_k^{(n+1)}} < \left| \alpha_k - \frac{P_k^{(n)}}{Q_k^{(n)}} \right| < \frac{1}{Q_k^{(n)} Q_k^{(n+1)}} \quad (n = 0, 1, \dots; k \in K) \quad (2.53)$$

dır ve (2.50) ile (2.53) ü birleştirirsek, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Q_k^{(v_k(n))} Q_k^{(v_k(n)+1)}} &< \left| \alpha_k - \frac{P_k^{(v_k(n))}}{Q_k^{(v_k(n))}} \right| = \left| \alpha_k - \frac{a_k^{(n)}}{a_m^{(n)}} \right| < c_2 (H(f_n))^{-\min_i (1+\omega_n^{(i)})} \\ \Rightarrow 2Q_k^{(v_k(n))} Q_k^{(v_k(n)+1)} &> \frac{1}{c_2} (H(f_n))^{\min_i (1+\omega_n^{(i)})} = \frac{1}{c_2} (H(f_n))^{1+\min_i (\omega_n^{(i)})} \\ \Rightarrow Q_k^{(v_k(n))} Q_k^{(v_k(n)+1)} &> c_3 H(f_n) (H(f_n))^{\min_i (\omega_n^{(i)})} \geq c_3 |a_m^{(n)}| (H(f_n))^{\min_i (\omega_n^{(i)})} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\frac{1}{2c_2} = c_3 > 0$ bir reel sabitdir. Ayrıca her $k \in K$ ve yeteri kadar büyük n ler için,

$$c_3 |a_m^{(n)}| (H(f_n))^{\min_i (\omega_n^{(i)})} \geq c_3 Q_k^{(v_k(n))} (H(f_n))^{\min_i (\omega_n^{(i)})}$$

$$\left(\begin{array}{l} a_k^{(n)} Q_k^{(v_k(n))} = a_m^{(n)} P_k^{(v_k(n))} \\ (P_k^{(v_k(n))}, Q_k^{(v_k(n))}) = 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \exists t_k \in \mathbb{Z} - \{0\}; \\ a_m^{(n)} = t_k Q_k^{(v_k(n))} \end{array} \right) \Rightarrow |a_m^{(n)}| \geq Q_k^{(v_k(n))}$$

olduğundan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\begin{aligned} Q_k^{(v_k(n))} Q_k^{(v_k(n)+1)} &> c_3 Q_k^{(v_k(n))} (H(f_n))_i^{\min(\omega_n^{(i)})} \\ \Rightarrow Q_k^{(v_k(n)+1)} &> c_3 (|a_m^{(n)}|)_i^{\min(\omega_n^{(i)})} \quad \left(Q_k^{(v_k(n))} > 0, H(f_n) \geq |a_m^{(n)}| \geq 1 \right) \\ &\geq c_3 \left(\max_k (Q_k^{(v_k(n))}) \right)_i^{\min(\omega_n^{(i)})} \quad \left(\forall k \in K \text{ için } |a_m^{(n)}| \geq Q_k^{(v_k(n))} \right) \end{aligned}$$

olur. O halde, her $k \in K$ ve yeteri kadar büyük n ler için,

$$\begin{aligned} Q_k^{(v_k(n)+1)} &> c_3 \left(\max_k (Q_k^{(v_k(n))}) \right)_i^{\min(\omega_n^{(i)})} \\ \Rightarrow \min_{k \in K} (Q_k^{(v_k(n)+1)}) &> c_3 \left(\max_{k \in K} (Q_k^{(v_k(n))}) \right)_i^{\min(\omega_n^{(i)})} \end{aligned} \quad (2.54)$$

elde edilir. Ayrıca $Q_k^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) ler, α_k ($k \in K$) irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımındaki yaklaşım kesirlerinin paydaları olduğundan $n = 1, 2, \dots$ için $Q_k^{(n+1)} > Q_k^{(n)} \geq 1$ dir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(n)} = \infty$ olup, buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(v_k(n))} = \infty$ dur. O halde, $Q_k^{(v_k(n))} \leq \max_{k \in K} (Q_k^{(v_k(n))})$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K} (Q_k^{(v_k(n))}) = \infty$ dur. Öyleyse, yeteri kadar büyük n ler için, $\max_{k \in K} (Q_k^{(v_k(n))}) > \frac{1}{c_3}$ olur. ($c_3 > 0$, n e bağlı olmayan bir

reel sabittir.) Dolayısıyla yeteri kadar büyük n ler için,

$$\begin{aligned} c_3 \left(\max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right) \right)^{\min_i (\omega_n^{(i)})} &= c_3 \max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right) \left(\max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right) \right)^{\min_i (\omega_n^{(i)})-1} \\ &> \left(\max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right) \right)^{\min_i (\omega_n^{(i)})-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu (2.54) ile birleştirirsek,

$$\begin{aligned} \min_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n)+1)} \right) &> \left(\max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right) \right)^{\min_i (\omega_n^{(i)})-1} \\ \Rightarrow \log \min_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n)+1)} \right) &> (\min_i (\omega_n^{(i)}) - 1) \log \max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right) \\ \Rightarrow \frac{\log \min_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n)+1)} \right)}{\log \max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right)} &> \min_i (\omega_n^{(i)}) - 1 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\min_i (\omega_n^{(i)}) - 1) = \infty \right) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \min_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n)+1)} \right)}{\log \max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right)} &= \infty \end{aligned} \quad (2.55)$$

elde edilir. Şimdi $\{Q^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ teoremin ifadesindeki monoton birleşim dizisi olsun, yani

$\{Q^{(n)}\}$, $\{Q_k^{(n)}\}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) dizilerinden oluşur. (Burada istersek $k \in K$ alabiliriz ve yine aynı sonuca ulaşırız.) $\{Q^{(n)}\}$ monoton birleşim dizisi bir geniş boş-

luk dizisidir, yani $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q^{(n+1)}}{\log Q^{(n)}} = \infty$ dur. Çünkü $\min_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n)+1)} \right)$ ve

$\max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right)$, $\{Q^{(n)}\} = \{Q_0^{(1)}, \dots, Q_{m-1}^{(1)}, Q_0^{(2)}, \dots, Q_{m-1}^{(2)}, \dots\}$ dizisine ait iki terimdir.

O halde, $\left\{ \frac{\log \min_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n)+1)} \right)}{\log \max_{k \in K} \left(Q_k^{(v_k(n))} \right)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $\left\{ \frac{\log Q^{(n+1)}}{\log Q^{(n)}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir alt dizi-

sidir. O halde, (2.55) den dolayı $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q^{(n+1)}}{\log Q^{(n)}} = \infty$ dur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.12. (LeVeque, [3]) $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ rasyonel sayılar veya Liouville sayıları (ancak en az biri Liouville sayısı) olmak üzere,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

olsun. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ reel sayılarının sürekli kesre açılımındaki yaklaşım kesirleri dizisi sırasıyla $\{P_0^{(n)}/Q_0^{(n)}\}_{n=1}^\infty, \{P_1^{(n)}/Q_1^{(n)}\}_{n=1}^\infty, \dots, \{P_{m-1}^{(n)}/Q_{m-1}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ olsun. Ayrıca $\{Q_0^{(n)}\}_{n=1}^\infty, \dots, \{Q_{m-1}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ dizilerinden oluşan $\{Q^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ monoton birleşim dizisi bir geniş boşluk dizisi ve bir ξ kompleks sayısı için $f(\xi) = 0$ olsun. Bu takdirde,

$$f_n^*(x) = [q_0^{(n)}, \dots, q_{m-1}^{(n)}] \left(\frac{P_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} + \frac{P_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} x + \dots + \frac{P_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} x^{m-1} + x^m \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

tam katsayılı polinomları ξ için bir L_m -dizisi oluştururlar.² (Burada $\frac{P_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} (k = 0, 1, \dots, m-1)$ rasyonel sayıları $\alpha_k (k = 0, 1, \dots, m-1)$ ların sürekli kesre açılımındaki uygun birer yaklaşım kesridir.) Dolayısıyla, $\xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$ dir.

İspat. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ reel sayılarının hepsinin Liouville sayısı olduğunu kabul edelim. (Eğer rasyonel α_k lar varsa $K = \{k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \mid \alpha_k \text{ Liouville sayısı}\}$ olmak üzere $k \in K$ larla çalışılır ve bu durum daha basittir.) $N, N > \max_k (Q_k^{(1)}) (k \in \{0, 1, \dots, m-1\})$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. $\alpha_k (k \in \{0, 1, \dots, m-1\})$ Liouville sayısı olduğundan irrasyoneldir. Dolayısıyla, $Q_k^{(1)} < Q_k^{(2)} < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(n)} = \infty$ dir. (α_k rasyonel ise $\{Q_k^{(n)}\}$ monoton artan dizisi sonludur.) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(n)} = \infty$ olduğundan $Q_k^{(h_k(N)+1)} > N$ olacak şekilde bir $h_k(N) + 1$ doğal sayısı vardır. ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $Q_k^{(n)} > N$ dir.) $h_k(N) + 1, Q_k^{(n)} > N$ koşuluna uyan n doğal sayılarının en küçüğü olsun. Bu takdirde,

$$Q_k^{(h_k(N))} \leq N < Q_k^{(h_k(N)+1)} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1) \quad (2.56)$$

olur. Burada görüldüğü gibi N e karşılık gelen $h_k(N)$ doğal sayısı tek türlü belirlidir.

² $[q_0^{(n)}, \dots, q_{m-1}^{(n)}]$ notasyonu, $q_0^{(n)}, \dots, q_{m-1}^{(n)}$ tam sayılarının en küçük ortak katını göstermektedir.

O halde,

$$\left. \begin{array}{l} Q_0^{(h_0(N))} \leq N < Q_0^{(h_0(N)+1)} \\ Q_1^{(h_1(N))} \leq N < Q_1^{(h_1(N)+1)} \\ \vdots \\ Q_{m-1}^{(h_{m-1}(N))} \leq N < Q_{m-1}^{(h_{m-1}(N)+1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \max_k \left(Q_k^{(h_k(N))} \right) \leq N < \min_k \left(Q_k^{(h_k(N)+1)} \right)$$

dır. Öte yandan, $\{Q^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ bir geniş boşluk dizisi olduğundan $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q^{(n+1)}}{\log Q^{(n)}} = \infty$

dur. Öyleyse, $\exists \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi öyleki $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log Q^{(n_j+1)}}{\log Q^{(n_j)}} = \infty$ olup, buradan

$$\begin{aligned} & \forall M > 0 \text{ reel sayısı için belli bir } j_0 \in \mathbb{N} \text{ den itibaren } \frac{\log Q^{(n_j+1)}}{\log Q^{(n_j)}} > M \\ & \Rightarrow \log Q^{(n_j+1)} > M \log Q^{(n_j)} \Rightarrow Q^{(n_j+1)} > \left(Q^{(n_j)} \right)^M > Q^{(n_j)} \quad (\forall j \geq j_0) \\ & \Rightarrow Q_0^{(n_j)}, \dots, Q_{m-1}^{(n_j)} \leq \max_k \left(Q_k^{(n_j)} \right) < \left(\max_k \left(Q_k^{(n_j)} \right) \right)^M < Q_0^{(n_j+1)}, \dots, Q_{m-1}^{(n_j+1)} \\ & \Rightarrow \max_k \left(Q_k^{(n_j)} \right) < \left(\max_k \left(Q_k^{(n_j)} \right) \right)^M < \min_k \left(Q_k^{(n_j+1)} \right) \quad (\forall j \geq j_0) \end{aligned}$$

dir. Şimdi bir $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi alalım. N_n reel sayılarını $\{Q_k^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ geniş boşluk dizisindeki boşluklardan bir reel sayı olarak oluşturalım. (2.56) da olduğu gibi,

$$Q_k^{(h_k(N_n))} \leq N_n < Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1, n = 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))} \right) \leq N_n < \min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \right)$$

olur. Böylece $\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))} \right)$ ile $\min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \right)$ arasında çok büyük boşluklar oluşur. O halde, $\exists \{N_n\}$ reel sayı dizisi öyleki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \right)}{\log \max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))} \right)} = \infty. \quad (2.57)$$

$q_k^{(n)} = Q_k^{(h_k(N_n))}$, $p_k^{(n)} = P_k^{(h_k(N_n))}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) alalım. $\Delta_n := [q_0^{(n)}, \dots, q_{m-1}^{(n)}]$ diye-

lim.

$$f_n^*(\xi) = f_n^*(\xi) - \Delta_n f(\xi)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta_n \left(\frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} + \frac{p_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} \xi + \dots + \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \xi^{m-1} + \xi^m \right) - \Delta_n (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{m-1} \xi^{m-1} + \xi^m) \\ &= -\Delta_n \left(\left(\alpha_0 - \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right) + \left(\alpha_1 - \frac{p_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} \right) \xi + \dots + \left(\alpha_{m-1} - \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right) \xi^{m-1} \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

dır. $\frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}}, \alpha_k$ Liouville sayısının sürekli kesre açılımındaki bir yaklaşım kesri olduğundan Teorem 2.6 dan,

$$\left| \alpha_k - \frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} \right| = \left| \alpha_k - \frac{p_k^{(h_k(N_n))}}{q_k^{(h_k(N_n))}} \right| < \frac{1}{Q_k^{(h_k(N_n))} Q_k^{(h_k(N_n)+1)}} = \frac{1}{q_k^{(n)} Q_k^{(h_k(N_n)+1)}} \quad (2.59)$$

$(k = 0, 1, \dots, m-1)$ elde edilir. $q_k^{(n)} \geq 1, Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \geq 1$ olduğundan (2.59) dan,

$$\left| \alpha_k - \frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} \right| - |\alpha_k| < 1 \Rightarrow \left| \frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} \right| < 1 + |\alpha_k| \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

dır. O halde,

$$\begin{aligned} H(f_n^*) &= \max \left(\left| \Delta_n \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right|, \dots, \left| \Delta_n \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right|, |\Delta_n| \right) \quad (\Delta_n > 0) \\ &= \Delta_n \max \left(\left| \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right|, \dots, \left| \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right|, 1 \right) < \Delta_n \max (1 + |\alpha_0|, \dots, 1 + |\alpha_{m-1}|, 1) \\ &= \Delta_n \max_{k \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (1 + |\alpha_k|) \leq \prod_{k=0}^{m-1} q_k^{(n)} \max_{k \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (1 + |\alpha_k|) \\ &\leq c_4 \left(\max_{k \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (q_k^{(n)}) \right)^m \end{aligned}$$

olur, burada $c_4 = \max_k (1 + |\alpha_k|) > 0$, n den bağımsız bir reel sabittir. O halde,

$$H(f_n^*) < c_4 \left(\max_{k \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (q_k^{(n)}) \right)^m$$

dir. (Burada α_k rasyonel ise $k \in K$ alırız. Çünkü α_k rasyonel ise belli bir n den sonra $q_k^{(n)}$ sabit kalır.) (2.58) den,

$$\begin{aligned}
|f_n^*(\xi)| &= \Delta_n \left| \left(\alpha_0 - \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right) + \left(\alpha_1 - \frac{p_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} \right) \xi + \dots + \left(\alpha_{m-1} - \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right) \xi^{m-1} \right| \\
&\leq \Delta_n \left(\left| \alpha_0 - \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right| + \left| \alpha_1 - \frac{p_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} \right| |\xi| + \dots + \left| \alpha_{m-1} - \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right| |\xi|^{m-1} \right) \\
&\leq \Delta_n c_5 \left(\left| \alpha_0 - \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right| + \left| \alpha_1 - \frac{p_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} \right| + \dots + \left| \alpha_{m-1} - \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right| \right) \\
&< \Delta_n c_5 \left(\frac{1}{q_0^{(n)} Q_0^{(h_0(N_n)+1)}} + \frac{1}{q_1^{(n)} Q_1^{(h_1(N_n)+1)}} + \dots + \frac{1}{q_{m-1}^{(n)} Q_{m-1}^{(h_{m-1}(N_n)+1)}} \right) \quad ((2.59) \text{ dan}) \\
&\leq \Delta_n c_5 \left(\frac{1}{Q_0^{(h_0(N_n)+1)}} + \dots + \frac{1}{Q_{m-1}^{(h_{m-1}(N_n)+1)}} \right) \\
&\leq \Delta_n c_5 \left(\frac{1}{\min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)})} + \dots + \frac{1}{\min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)})} \right) \\
&= \Delta_n c_5 m \frac{1}{\min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)})} \leq \frac{c_6 \left(\max_k (q_k^{(n)}) \right)^m}{\min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)})} \\
&\left(q_k^{(n)} \geq 1 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \quad Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \geq \min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)}) \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $c_5 = \max(1, |\xi|, \dots, |\xi|^{m-1}) > 0$, $c_6 = mc_5 > 0$, n den bağımsız reel sabitlerdir. Böylece,

$$|f_n^*(\xi)| < \frac{c_6 \left(\max_k (q_k^{(n)}) \right)^m}{\min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)})}, \quad H(f_n^*) < c_4 \left(\max_{k \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (q_k^{(n)}) \right)^m \quad (2.60)$$

elde edilir. Biz $f_n^*(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) polinomlarının ξ için bir L_m -dizisi olduğunu göstermek istiyoruz. Şimdi $\omega > 0$ herhangi bir reel sayı olsun. Yeteri kadar büyük n ler için,

$$\frac{c_6 \left(\max_k (q_k^{(n)}) \right)^m}{\min_k (Q_k^{(h_k(N_n)+1)})} < \frac{1}{\left(c_4 \left(\max_k (q_k^{(n)}) \right)^m \right)^\omega} \quad (2.61)$$

dir. Çünkü (2.61) in gerçekleşmesi için, yeteri kadar büyük n ler için

$$\begin{aligned} \frac{\left(\max_k \left(q_k^{(n)}\right)\right)^{m(1+\omega)}}{\min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right)} &< \frac{1}{c_6 c_4^\omega} \Leftrightarrow \frac{\min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right)}{\left(\max_k \left(q_k^{(n)}\right)\right)^{m(1+\omega)}} > c_6 c_4^\omega \\ \Leftrightarrow \left(q_k^{(n)} = Q_k^{(h_k(N_n))}\right) \min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right) &> c_6 c_4^\omega \left(\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)\right)^{m(1+\omega)} \end{aligned} \quad (2.62)$$

olmalıdır ve (2.62) yeteri kadar büyük n ler için doğrudur :

(2.57) den, $M > 0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere, yeteri kadar büyük n ler için

$$\begin{aligned} \frac{\log \min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right)}{\log \max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)} > M &\Rightarrow \log \min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right) > \log \left(\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)\right)^M \\ \Rightarrow \min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right) &> \left(\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)\right)^M \end{aligned}$$

geçerlidir. O halde, $m(1+\omega) + \omega > 0$ reel sayısı için de, yeteri kadar büyük n ler için

$$\min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)}\right) > \left(\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)\right)^{m(1+\omega)+\omega} \quad (2.63)$$

dir. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(n)} = \infty$ dur ve $\{h_k(N_n)\}$, doğal sayıların bir alt dizisi olduğundan $\{Q_k^{(h_k(N_n))}\}$, $\{Q_k^{(n)}\}$ in bir sonsuz alt dizisidir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_k^{(h_k(N_n))} = \infty \quad (k = 0, 1, \dots, m-1) &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right) = \infty \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{c_4} > 0, \omega > 0 \text{ reel sabitler}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)}{c_4}\right)^\omega &= \infty \\ \Rightarrow \text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için,} \quad \left(\frac{\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)}{c_4}\right)^\omega &> c_6 \\ \Rightarrow \text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için,} \quad \left(\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))}\right)\right)^\omega &> c_6 c_4^\omega \end{aligned}$$

dur. Bunu (2.63) ile birleştirirsek, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \right) > \left(\max_k \left(Q_k^{(h_k(N_n))} \right) \right)^{m(1+\omega)} c_6 c_4^\omega$$

olur, yani (2.62) elde edilir. Dolayısıyla (2.61) doğrudur. O halde, (2.60) ve (2.61) den,

$$|f_n^*(\xi)| < \frac{c_6 \left(\max_k \left(q_k^{(n)} \right) \right)^m}{\min_k \left(Q_k^{(h_k(N_n)+1)} \right)} < \frac{1}{\left(c_4 \left(\max_k \left(q_k^{(n)} \right) \right)^m \right)^\omega}$$

olur. (2.60) dan, $H(f_n^*) < c_4 \left(\max_{k \in \{0,1,\dots,m-1\}} \left(q_k^{(n)} \right) \right)^m$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse,

$$|f_n^*(\xi)| < \frac{1}{\left(H(f_n^*) \right)^\omega} \quad \left(\begin{array}{l} \omega > 0 \text{ keyfi bir reel sayı ve} \\ \text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için} \end{array} \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak her $\omega > 0$ reel sayısı için, $\exists n_0(\omega) = n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki her $n \geq n_0$ için,

$$|f_n^*(\xi)| < \frac{1}{\left(H(f_n^*) \right)^\omega}$$

dır.

$\xi \in \mathbb{C}$ nin bir transandant sayı olduğunu kabul edelim. Böylece,

$$0 < |f_n^*(\xi)| < \frac{1}{\left(H(f_n^*) \right)^\omega} \quad (\forall \omega > 0 \text{ ve yeteri kadar büyük } n \text{ ler için}) \quad (2.64)$$

dir. Görüldüğü gibi $\{f_n^*(x)\}_{n=1}^\infty$ tam katsayılı bir polinom dizisidir ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\partial f_n^*(x) = m$ dir. Ayrıca $\{H(f_n^*)\}_{n=1}^\infty$ dizisi üstten sınırsızdır. Çünkü $\{H(f_n^*)\}$ üstten sınırlı olsa elimizde sadece sonlu sayıda $f_n^*(x)$ polinomu olurdu. Oysaki teoremin hipotezinden en az bir tane α_k Liouville sayısı olduğundan, en az bir tane sonsuz $\left\{ \frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} \right\}_{n=1}^\infty$

dizisi vardır. Dolayısıyla $f_n^*(x) = \Delta_n \left(\frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} + \frac{p_1^{(n)}}{q_1^{(n)}} x + \dots + \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} x^{m-1} + x^m \right)$ polinomları

sonsuz sayıdadır. O halde, $\limsup_{n \rightarrow \infty} H(f_n^*) = \infty$ dur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & \exists \{H(f_{n_k}^*)\}_{k=1}^\infty \quad \text{alt dizisi öyleki} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H(f_{n_k}^*) = \infty \\ & \Rightarrow \exists \{H(f_{n_{k_j}}^*)\}_{j=1}^\infty \quad \text{alt dizisi öyleki} \quad H(f_{n_{k_1}}^*) \leq H(f_{n_{k_2}}^*) \leq H(f_{n_{k_3}}^*) \leq \dots \end{aligned}$$

dır. $\{H(f_{n_{k_j}}^*)\}_{j=1}^\infty$ dizisi ve buna karşılık gelen $\{|f_{n_{k_j}}^*(\xi)|\}$ dizisi için de (2.64) eşitsizliği geçerli olduğundan biz bu diziyle çalışabiliriz. Ancak notasyon kalabalığı olmaması

için yine $\{H(f_n^*)\}$ ve $\{f_n^*(\xi)\}$ yazalım. O halde, $\forall \omega > 0$ ve yeteri kadar büyük n ler için,

$$0 < |f_n^*(\xi)| < \frac{1}{\left(H(f_n^*)\right)^\omega}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n^*) = \infty$$

olur. Ayrıca

$$H(f_n^*) = \max \left(\left| \Delta_n \frac{p_0^{(n)}}{q_0^{(n)}} \right|, \dots, \left| \Delta_n \frac{p_{m-1}^{(n)}}{q_{m-1}^{(n)}} \right|, |\Delta_n| \right) \geq \Delta_n \quad \left(\Delta_n = [q_0^{(n)}, \dots, q_{m-1}^{(n)}] \right)$$

ve α_k ların en az biri Liouville sayısı olduğundan en az bir $q_k^{(n)}$ için $n = 2$ den itibaren $q_k^{(n)} > 1$ dir. Böylece $H(f_n^*) > 1$ dir. O halde, $\{f_n^*(x)\}$ polinom dizisi, ξ için bir L_m -dizisidir. Böylece $\xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$ dir.

Lemma 2.1. (LeVeque, [3]) $\phi(x), \phi_1(x) \in \mathbb{Z}[x]; \partial\phi = m, \partial\phi_1 = m_1; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathbb{C}$ ϕ nin kökleri, yani $\phi(\xi_1) = \phi(\xi_2) = \dots = \phi(\xi_m) = 0; \phi_1 | \phi$ olsun. Bu takdirde;

$$\text{i)} \quad \max_k (|\xi_k|) = \max (|\xi_1|, \dots, |\xi_m|) \leq 2H(\phi) \quad (2.65)$$

dir.

$$\text{ii)} \quad H(\phi_1) < c_7 H(\phi)^{m_1+1} \quad (2.66)$$

olacak şekilde sadece m_1 e bağlı bir c_7 pozitif reel sabiti vardır.

İspat. i) $\phi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_m \neq 0, |x| > 2$ olsun.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(x)}{a_m} \right| &= \left| x^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} x^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{a_m} x + \frac{a_0}{a_m} \right| \geq |x|^m - \left| \frac{a_{m-1}}{a_m} x^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{a_m} x + \frac{a_0}{a_m} \right| \\ &\geq |x|^m - \left(\left| \frac{a_{m-1}}{a_m} \right| |x|^{m-1} + \dots + \left| \frac{a_1}{a_m} \right| |x| + \left| \frac{a_0}{a_m} \right| \right) \\ &= |x|^m - \frac{1}{|a_m|} (|a_{m-1}| |x|^{m-1} + \dots + |a_1| |x| + |a_0|) \quad (|a_m| \geq 1, |a_0|, \dots, |a_m| \leq H(\phi)) \\ &\geq |x|^m - H(\phi) (1 + |x| + \dots + |x|^{m-1}). \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} &|x| > 2 \text{ olduğundan } 1 + |x| + \dots + |x|^{m-2} = \frac{|x|^{m-1} - 1}{|x| - 1} < |x|^{m-1} - 1 < |x|^{m-1} \\ &\Rightarrow 1 + |x| + \dots + |x|^{m-2} + |x|^{m-1} < 2|x|^{m-1} \\ &\Rightarrow H(\phi) (1 + |x| + \dots + |x|^{m-1}) < 2H(\phi) |x|^{m-1} \end{aligned} \right)$$

Dolayısıyla,

$$\left| \frac{\phi(x)}{a_m} \right| \geq |x|^m - H(\phi) (1 + |x| + \dots + |x|^{m-1}) > |x|^m - 2H(\phi)|x|^{m-1} \quad (|x| > 2)$$

elde edilir. ξ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) için iki durum söz konusudur:

1) $|\xi_k| \leq 2 \leq 2H(\phi)$ ($H(\phi) \geq 1$) dir.

2) $|\xi_k| > 2$ dir. O halde, $0 = \left| \frac{\phi(\xi_k)}{a_m} \right| > |\xi_k|^m - 2H(\phi)|\xi_k|^{m-1}$

$$\Rightarrow |\xi_k|^m < 2H(\phi)|\xi_k|^{m-1} \Rightarrow (|\xi_k| \neq 0) \quad |\xi_k| < 2H(\phi).$$

1) ve 2) den her $k = 1, 2, \dots, m$ için $|\xi_k| \leq 2H(\phi)$ olup, buradan $\max_k (|\xi_k|) \leq 2H(\phi)$ elde edilir. Böylece (2.65) ispatlanmış olur.

ii) $\phi_1 | \phi$ olduğundan, $\exists \phi_2 \in \mathbb{Z}[x]$ öyleki $\phi = \phi_1 \phi_2$ ($\phi_1(x), \phi_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$) dir.

$$\phi_1(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m_1}x^{m_1} \in \mathbb{Z}[x], \quad b_{m_1} \neq 0, \quad \partial \phi_1 = m_1;$$

$$\phi_2(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{m_2}x^{m_2} \in \mathbb{Z}[x], \quad c_{m_2} \neq 0, \quad \partial \phi_2 = m_2$$

olsun. Böylece $m = m_1 + m_2$ dir. $\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$ olduğundan, $a_mx^m = b_{m_1}c_{m_2}x^m$

$$\Rightarrow a_m = b_{m_1}c_{m_2} \Rightarrow |a_m| = |b_{m_1}||c_{m_2}| \Rightarrow |b_{m_1}| \leq |a_m|$$

dir. $\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$ olduğundan ϕ_1 in kökleri aynı zamanda ϕ nin kökleridir. ϕ nin tüm kökleri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ olduğundan bu kökler arasından uygun olan m_1 tanesi ϕ_1 in kökleridir. ϕ_1 in köklerini $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_1}$ ile gösterelim.

$$\phi_1(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m_1}x^{m_1} = b_{m_1}(x - \xi_1)\dots(x - \xi_{m_1}).$$

O halde, ϕ_1 in katsayılarını $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_1}$ in elemanter simetrik polinomları cinsinden ifade edersek,

$$\sigma_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{m_1} = -\frac{b_{m_1-1}}{b_{m_1}} \Rightarrow \left| \frac{b_{m_1-1}}{b_{m_1}} \right| = |\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{m_1}|,$$

$$\sigma_2 = \xi_1\xi_2 + \dots + \xi_1\xi_{m_1} + \dots + \xi_{m_1-1}\xi_{m_1} = \frac{b_{m_1-2}}{b_{m_1}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{b_{m_1-2}}{b_{m_1}} \right| = |\xi_1\xi_2 + \dots + \xi_1\xi_{m_1} + \dots + \xi_{m_1-1}\xi_{m_1}|,$$

$\vdots$

$$\sigma_{m_1-1} = \xi_1 \dots \xi_{m_1-1} + \dots + \xi_2 \dots \xi_{m_1} = (-1)^{m_1-1} \frac{b_1}{b_{m_1}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{b_1}{b_{m_1}} \right| = |\xi_1 \dots \xi_{m_1-1} + \dots + \xi_2 \dots \xi_{m_1}|,$$

$$\sigma_{m_1} = \xi_1 \dots \xi_{m_1} = (-1)^{m_1} \frac{b_0}{b_{m_1}} \Rightarrow \left| \frac{b_0}{b_{m_1}} \right| = |\xi_1 \dots \xi_{m_1}|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H(\phi_1) &= \max(|b_0|, \dots, |b_{m_1}|) = |b_{m_1}| \max\left(1, \left|\frac{b_{m_1-1}}{b_{m_1}}\right|, \dots, \left|\frac{b_1}{b_{m_1}}\right|, \left|\frac{b_0}{b_{m_1}}\right|\right) \\ &\leq |a_m| \max\left(1, |\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{m_1}|, \dots, |\xi_1 \dots \xi_{m_1-1} + \dots + \xi_2 \dots \xi_{m_1}|, |\xi_1 \dots \xi_{m_1}|\right) \\ &\leq H(\phi) \max\left(1, |\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{m_1}|, |\xi_1 \xi_2 + \dots + \xi_1 \xi_{m_1} + \dots + \xi_{m_1-1} \xi_{m_1}|, \right. \\ &\quad \left. \dots, |\xi_1 \dots \xi_{m_1-1} + \dots + \xi_2 \dots \xi_{m_1}|, |\xi_1 \dots \xi_{m_1}|\right) \\ &\quad (\text{ i) den her } k = 1, 2, \dots, m \text{ için } |\xi_k| \leq 2H(\phi) \text{ dir.}) \\ &\leq H(\phi) \max\left(1, \binom{m_1}{1} 2H(\phi), \binom{m_1}{2} (2H(\phi))^2, \dots, \binom{m_1}{m_1-1} (2H(\phi))^{m_1-1}, \binom{m_1}{m_1} (2H(\phi))^{m_1}\right) \\ &= H(\phi) H(\phi)^{m_1} \max\left((H(\phi))^{-m_1}, \binom{m_1}{1} (2H(\phi))^{-m_1+1}, \dots, \binom{m_1}{m_1-1} 2^{m_1-1} (H(\phi))^{-1}, \binom{m_1}{m_1} 2^{m_1}\right) \\ &\quad \left(H(\phi) \geq 1 \Rightarrow H(\phi)^n \geq 1 \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \Rightarrow H(\phi)^{-n} \leq 1\right) \\ &\leq H(\phi)^{m_1+1} \max\left(1, \binom{m_1}{1} 2, \binom{m_1}{2} 2^2, \dots, \binom{m_1}{m_1-1} 2^{m_1-1}, \binom{m_1}{m_1} 2^{m_1}\right) =: H(\phi)^{m_1+1} c \end{aligned}$$

diyelim, burada c , yalnızca m_1 e bağlı pozitif reel sabittir. O halde,

$$H(\phi_1) \leq H(\phi)^{m_1+1} c \Rightarrow H(\phi_1) < \underbrace{(c + 10^{-10000})}_{=: c_7} H(\phi)^{m_1+1} \Rightarrow H(\phi_1) < c_7 H(\phi)^{m_1+1}$$

olur. Böylece, (2.66) ispatlanmış olur.

Teorem 2.13. (LeVeque, [3]) $\xi \in \mathbb{C}$ ve $\xi \in U_m$ olsun. Bu takdirde ξ için herhangi bir L_m -dizisine ait ancak sonlu sayıda $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenebilir polinom vardır.

İspat. $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ tam katsayılı polinomlar dizisi ξ için bir L_m -dizisi olsun. O halde,

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_m^{(n)}x^m \in \mathbb{Z}[x] \quad (n = 1, 2, \dots), \quad m \in \mathbb{N}, \quad a_m^{(n)} \neq 0$$

$$H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots, \quad 0 < |f_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1 \quad (H(f_n) > 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$$

şeklindedir.

$\{f_n(x)\}$ dizisine ait $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenebilir sonsuz sayıda tam katsayılı polinom olduğunu varsayalım. Bu polinomların oluşturduğu $\{f_n(x)\}$ in sonsuz alt dizisini $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ile gösterelim. O halde, bir $\{\phi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tam katsayılı polinom dizisi vardır öyleki

$$\phi_{n_k} \mid f_{n_k}, \quad \phi_{n_k} \in \mathbb{Z}[x], \quad 1 \leq \partial \phi_{n_k} < m = \partial f_{n_k} \quad (2.67)$$

dir. $\partial \phi_{n_k} = m_1$ ($1 \leq m_1 < m$) diyebiliriz. Çünkü ϕ_{n_k} polinomlarının derecesi $[1, m)$ aralığındadır. Bu aralıkta yalnızca sonlu sayıda doğal sayı vardır. Dolayısıyla $[1, m)$ aralığındaki en az bir doğal sayı değerini derece olarak kabul eden sonsuz sayıda ϕ_{n_k} polinomu olmalıdır. Çünkü elimizde sonlu sayıda dereceye karşılık, sonsuz sayıda ϕ_{n_k} polinomu vardır. O halde, $\exists m_1 \in [1, m)$ doğal sayısı öyleki $\partial \phi_{n_k} = m_1$ olacak şekilde sonsuz sayıda $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu sonsuz sayıdaki polinom $\{\phi_{n_k}\}$ nin bir sonsuz alt dizisini oluşturur. Bu alt diziyle çalıştığımızı düşünelim. Ama notasyonu değiştirmeyelim. O halde, $\exists \{\phi_{n_k}\}$ sonsuz alt dizisi öyleki

$$\phi_{n_k} \mid f_{n_k}, \quad 1 \leq \partial \phi_{n_k} = m_1 < m, \quad \phi_{n_k} \in \mathbb{Z}[x]$$

dir. Bu durumda, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_{n_k}(\xi)| = 0$ dır. Çünkü, $\phi_{n_k} \mid f_{n_k}$ olduğundan,

$$\exists \psi_{n_k} \in \mathbb{Z}[x] \ni f_{n_k} = \phi_{n_k} \psi_{n_k}; \quad 1 \leq \partial \psi_{n_k} = m_2 < m$$

dir. O halde, $|f_{n_k}(\xi)| = |\phi_{n_k}(\xi)| |\psi_{n_k}(\xi)|$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(\xi)| = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \text{için} \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall k \geq k_0 \quad \text{için} \quad |f_{n_k}(\xi)| < \varepsilon \\ \Rightarrow |f_{n_k}(\xi)| = |\phi_{n_k}(\xi)| |\psi_{n_k}(\xi)| < \varepsilon \quad (\forall k \geq k_0) \end{aligned}$$

dır. O halde belli bir k dan itibaren $|\phi_{n_k}(\xi)|, |\psi_{n_k}(\xi)|$ değerlerinden en az biri $< \varepsilon$ olmalıdır. Çünkü eğer ikisi birden $\geq \varepsilon$ olsa, belli bir k dan itibaren $|f_{n_k}(\xi)| \geq \varepsilon^2$ olur ki bu da $\{|f_{n_k}(\xi)|\}$ nin bir sıfır dizisi olmasıyla çelişir. O halde, yeteri kadar büyük k lar için, $|\phi_{n_k}(\xi)| < \varepsilon, |\psi_{n_k}(\xi)| < \varepsilon$ değerlerinden en az biri doğrudur. Eğer $|\phi_{n_k}(\xi)| < \varepsilon$ olacak şekilde sadece sonlu sayıda $k \in \mathbb{N}$ varsa, ϕ_{n_k} yerine ψ_{n_k} ile çalışırız. Eğer $|\phi_{n_k}(\xi)| < \varepsilon$ olacak şekilde sonsuz sayıda $k \in \mathbb{N}$ varsa, bu sonsuz sayıdaki $k \in \mathbb{N}$ in oluşturduğu doğal sayıların alt dizisiyle çalışırız. O halde, $\exists \{\phi_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}, \{\psi_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$

nın alt dizisi öyleki her $j \in \mathbb{N}$ için $|\phi_{n_{k_j}}(\xi)| < \varepsilon$ olur. O halde $\lim_{j \rightarrow \infty} |\phi_{n_{k_j}}(\xi)| = 0$ olur. Biz $\{\phi_{n_k}\}$ yerine $\{\phi_{n_{k_j}}\}$ sonsuz alt dizisiyle çalıştığımızı düşünelim. Ama notasyonu değiştirmeyelim. Böylece, $\exists \{\phi_{n_k}\}$ sonsuz alt dizisi öyleki;

$$\phi_{n_k} \mid f_{n_k}, \quad 1 \leq \partial \phi_{n_k} = m_1 < m, \quad \phi_{n_k} \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{ve} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_{n_k}(\xi)| = 0$$

dır. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $|\phi_{n_k}(\xi)| \neq 0$ dır. Çünkü $|f_n(\xi)| \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ ve $\{f_{n_k}\}, \{f_n\}$ in alt dizisidir ve $|f_{n_k}(\xi)| = |\phi_{n_k}(\xi)| |\psi_{n_k}(\xi)|$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $|\phi_{n_k}(\xi)| \neq 0$ dır. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{n_k}, f_{n_k} \in \mathbb{Z}[x] \\ \phi_{n_k} \mid f_{n_k} \\ \partial \phi_{n_k} = m_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Lemma 2.1 den } H(\phi_{n_k}) < c_7 H^{m_1+1}(f_{n_k}) \text{ olacak şekilde} \\ \text{sadece } m_1 \text{ e bağlı bir } c_7 > 0 \text{ reel sabiti vardır.} \end{array}$$

Ayrıca, yeteri kadar büyük n ler için,

$$0 < |\phi_{n_k}(\xi)| < c_8 |f_{n_k}(\xi)|^{\frac{1}{m}} < c_8 \left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{m(m_1+1)}}$$

dir. Çünkü, $|f_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(f_n)$ olduğundan, $c_8 |f_{n_k}(\xi)|^{\frac{1}{m}} = c_8 \left(H^{-\omega_{n_k}}(f_{n_k}) \right)^{\frac{1}{m}}$ dir

ve $H(\phi_{n_k}) < c_7 H^{m_1+1}(f_{n_k})$ olduğundan $\left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{1}{m_1+1}} < H(f_{n_k})$ dır. O halde,

$$H^{-\omega_{n_k}}(f_{n_k}) < \left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{m_1+1}} \Rightarrow c_8 \left(H^{-\omega_{n_k}}(f_{n_k}) \right)^{\frac{1}{m}} < c_8 \left(\left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{m_1+1}} \right)^{\frac{1}{m}}$$

olur. Böylece,

$$0 < |\phi_{n_k}(\xi)| < c_8 \left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{m(m_1+1)}} \quad (c_7, c_8 \text{ n den bağımsız pozitif reel sabitler})$$

elde edilir. Burada $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\phi_{n_k}) = \infty$ dur. Çünkü $\{H(\phi_{n_k})\}$ dizisi sınırlı olamaz. Aksi takdirde, derecesi m_1 olan ve yüksekliği belli bir sayıdan küçük olan ancak sonlu sayıda tam katsayılı polinom var olduğundan, sonlu sayıda ϕ_{n_k} polinomu ve dolayısıyla sonlu sayıda $|\phi_{n_k}(\xi)|$ değeri var olurdu. Ancak,

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } |\phi_{n_k}(\xi)| \neq 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_{n_k}(\xi)| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{|\phi_{n_k}(\xi)|\} \text{ dizisinin birbirinden farklı sonsuz}$$

sayıda terimi vardır. O halde, $\{H(\phi_{n_k})\}$ dizisi (üstten) sınırsızdır. Dolayısıyla

$\limsup_{k \rightarrow \infty} H(\phi_{n_k}) = \infty$ olup, buradan $\lim_{j \rightarrow \infty} H(\phi_{n_{k_j}}) = \infty$ olacak şekilde bir $\{H(\phi_{n_{k_j}})\}$ alt

dizisi vardır. $\{H(\phi_{n_{k_j}})\}$ nin de öyle bir $\{H(\phi_{n_{k_{j_\ell}}})\}$ alt dizisi vardır ki $H(\phi_{n_{k_{j_1}}}) \leq H(\phi_{n_{k_{j_2}}}) \leq \dots$ dir. Biz en son elde ettiğimiz $\{H(\phi_{n_{k_{j_\ell}}})\}$ dizisiyle çalışalım. Ama notasyon kalabalığı olmaması için $\{H(\phi_{n_k})\}$ yazalım. O halde, $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\phi_{n_k}) = \infty$ ve $\{H(\phi_{n_k})\}$ dizisi monoton artandır. Ayrıca belli bir $k \in \mathbb{N}$ den itibaren $H(\phi_{n_k}) > 1$ dir. Yine bu baştaki sonlu sayıdaki k yı atıp diziyi tekrar numaralandırırsak, her $k \in \mathbb{N}$ için $H(\phi_{n_k}) > 1$ olur. Sonuç olarak elimizdeki $\{\phi_{n_k}\}$ dizisi, aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(\phi_{n_k}) = \infty, \quad H(\phi_{n_1}) \leq H(\phi_{n_2}) \leq \dots$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } H(\phi_{n_k}) > 1, \quad 0 < |\phi_{n_k}(\xi)| < c_8 \left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{m(m_1+1)}}.$$

$$\text{Şimdi } c_8 \left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{m(m_1+1)}} = c_8 \left(\left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^2 \right)^{\frac{-\omega_{n_k}}{2m(m_1+1)}}, \quad \frac{\omega_{n_k}}{2m(m_1+1)} =: z_{n_k} \text{ diyelim.}$$

O halde $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = \infty$ dur. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$, $2m(m_1+1) > 0$ dir. Yeteri kadar büyük k lar için,

$$\left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^2 = \frac{H(\phi_{n_k})H(\phi_{n_k})}{c_7^2} > \frac{H(\phi_{n_k})c_7^2}{c_7^2} = H(\phi_{n_k})$$

olduğundan, yeteri kadar büyük k lar için,

$$c_8 \left(\left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^2 \right)^{-z_{n_k}} < c_8 (H(\phi_{n_k}))^{-z_{n_k}} = \frac{c_8}{H^{z_{n_k}-1}(\phi_{n_k})H(\phi_{n_k})} < \frac{c_8}{H^{z_{n_k}-1}(\phi_{n_k})c_8}$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} H(\phi_{n_k}) = \infty \text{ olduğundan yeteri kadar büyük } k \text{ lar için } H(\phi_{n_k}) > c_7^2 \text{ ve yeteri} \\ \text{kadar büyük } k \text{ lar için } H(\phi_{n_k}) > c_8 \text{ dir. } (c_7, c_8 \text{ pozitif } k \text{ dan bağımsız reel sabitler}) \end{array} \right)$$

elde edilir. O halde,

$$0 < |\phi_{n_k}(\xi)| < c_8 \left(\left(\frac{H(\phi_{n_k})}{c_7} \right)^2 \right)^{-z_{n_k}} < \frac{1}{(H(\phi_{n_k}))^{z_{n_k}-1}} \left(\begin{array}{l} \text{yeteri kadar} \\ \text{büyük } k \text{ lar için} \end{array} \right)$$

dir. Yine baştaki sonlu sayıdaki k yı atıp diziyi tekrar numaralandırırsak,

$$\forall k = 1, 2, \dots \text{ için, } \partial \phi_{n_k} = m_1, \quad \phi_{n_k} \in \mathbb{Z}[x], \quad H(\phi_{n_1}) \leq H(\phi_{n_2}) \leq \dots$$

$$0 < |\phi_{n_k}(\xi)| < \frac{1}{(H(\phi_{n_k}))^{z_{n_k}-1}} < 1 \quad (H(\phi_{n_k}) > 1), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (z_{n_k} - 1) = \infty$$

olur. O halde, $\{\phi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ tam katsayılı polinomlar dizisi ξ için bir L_{m_1} -dizisidir. Fakat $m_1 < m$ dir. Bu durum, $\xi \in U_m$ olmasıyla çelişir. O halde, $\{f_n\}$ dizisinin ancak sonlu sayıda terimi indirgenebiliridir.

Teorem 2.14. (LeVeque, [3]) ξ bir kompleks sayı olsun ve $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ polinomlar dizisi aşağıdaki özellikleri gerçeklesin:

- 1) $F_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_{m_n}^{(n)}x^{m_n} = a_{m_n}^{(n)}(x - \xi_1^{(n)})(x - \xi_2^{(n)})\dots(x - \xi_{m_n}^{(n)})$ ($a_{m_n}^{(n)} \neq 0$)
 $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{m_n}^{(n)} \in \mathbb{Z}$; $F_n(x)$ in kökleri öyle sıralanmıştır ki $\xi_1^{(n)} = \xi^{(n)}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),
 ξ ye en yakın köktür ($|\xi - \xi^{(n)}| = |\xi - \xi_1^{(n)}| \leq |\xi - \xi_i^{(n)}|$ ($i = 2, \dots, m_n$)); $H(F_1) \leq H(F_2) \leq \dots$
- 2) $|F_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(F_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$.
- 3) $F_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ler indirgenemez ($\mathbb{Q}$ üzerinde asal) polinomlardır.
- 4) $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $m_n \leq m$ dir.
- 5) Bir $\delta > 0$ reel sayısı için, $H^{\omega_n}(F_n) > H^{\delta}(F_{n+1})$ ($n = 1, 2, \dots$) dir.

Bu taktirde, $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tam katsayılı polinomlar dizisi aşağıdaki anlamda tektir:

$\{f_v\}, \xi$ kompleks sayısı için bir L_r dizisi ($r \in \mathbb{N}$) olsun. Bu taktirde, yeteri kadar büyük v ler için f_v bir F_n polinomu tarafından bölünür. (Belli bir v den itibaren her bir f_v için $\exists F_n$; $F_n \mid f_v$ dür.)

İspat. Öncelikle teoremin hipotezinde verilenleri kullanarak, $|\xi - \xi^{(n)}| < c_9 H^{\frac{-\omega_n}{m}}(F_n)$ ($c_9 > 1$, n den bağımsız bir reel sabit) olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} H^{-\omega_n}(F_n) &= |F_n(\xi)| = |a_{m_n}^{(n)}| |\xi - \xi^{(n)}| |\xi - \xi_2^{(n)}| \dots |\xi - \xi_{m_n}^{(n)}| \quad (|a_{m_n}^{(n)}| \geq 1) \\ &\geq \underbrace{|\xi - \xi^{(n)}| |\xi - \xi^{(n)}| \dots |\xi - \xi^{(n)}|}_{m_n \text{ tane}} = |\xi - \xi^{(n)}|^{m_n} \geq |\xi - \xi^{(n)}|^m \quad (m_n \leq m) \end{aligned} \quad (2.68)$$

olur. Çünkü $0 < |\xi - \xi^{(n)}| < 1$ dir:

Öncelikle 5) den $H(F_n) > 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) dir. Çünkü herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $H(F_n) = 1$ olsa; $H^{\frac{\omega_n}{\delta}}(F_n) > H(F_{n+1})$ olduğundan $1 > H(F_{n+1})$ olurdu. Ancak F_n ($n = 1, 2, \dots$) ler sıfırdan farklı tam katsayılı polinomlar olduğundan daima $H(F_{n+1}) \geq 1$ dir. O halde, $0 < |F_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(F_n) < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğundan $\{|F_n(\xi)|\}$ bir sıfır dizisidir. O halde,

$$0 < |F_n(\xi)| < 1 \Rightarrow 0 < |a_{m_n}^{(n)}| |\xi - \xi^{(n)}| \dots |\xi - \xi_{m_n}^{(n)}| < 1 \quad (|a_{m_n}^{(n)}| \geq 1)$$

olduğundan, $|\xi - \xi^{(n)}|, \dots, |\xi - \xi_{m_n}^{(n)}|$ den en az biri < 1 olmalıdır. Dolayısıyla $0 < |\xi - \xi^{(n)}| < 1$ dir. O halde (2.68) den,

$$H^{-\omega_n}(F_n) \geq |\xi - \xi^{(n)}|^m \Rightarrow |\xi - \xi^{(n)}| \leq H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)$$

$$\Rightarrow |\xi - \xi^{(n)}| < c_9 H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \quad (c_9 > 1 \text{ reel sabit}) \Rightarrow |\xi - \xi^{(n)}| H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n) < c_9$$

olur. $|\xi - \xi^{(n)}| H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n) =: |t_n|$ diyelim. t_n ile $\xi - \xi^{(n)}$ i aynı işaretli alalım. Böylece $(\xi - \xi^{(n)}) H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n) = t_n$ olup, buradan

$$\xi = \xi^{(n)} + t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } |t_n| < c_9) \quad (2.69)$$

elde edilir. Şimdi $\{f_v(x)\}$, ξ için bir L_r dizisi olsun.

$$f_v(x) = d_r^{(v)} x^r + \dots + d_1^{(v)} x + d_0^{(v)} = d_r^{(v)} (x - \vartheta_1^{(v)}) \dots (x - \vartheta_r^{(v)})$$

$d_0^{(v)}, \dots, d_r^{(v)} \in \mathbb{Z}$, $d_r^{(v)} \neq 0$ şeklinde olsun.

$$(a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m_n}} (\vartheta_i^{(v)} - \xi_j^{(n)}) = (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{m_n} (\vartheta_i^{(v)} - \xi_j^{(n)})$$

$$= (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r \frac{F_n(\vartheta_i^{(v)})}{(a_{m_n}^{(n)})} = (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)})$$

$$\Rightarrow (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m_n}} (\vartheta_i^{(v)} - \xi_j^{(n)}) = (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \quad (2.70)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m_n}} (\vartheta_i^{(v)} - \xi_j^{(n)}) = (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{j=1}^{m_n} \prod_{i=1}^r (\vartheta_i^{(v)} - \xi_j^{(n)})$$

$$= \pm (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{j=1}^{m_n} \prod_{i=1}^r (\xi_j^{(n)} - \vartheta_i^{(v)}) = \pm (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{j=1}^{m_n} \frac{f_v(\xi_j^{(n)})}{d_r^{(v)}} = \pm (a_{m_n}^{(n)})^r \prod_{i=1}^{m_n} f_v(\xi_i^{(n)})$$

$$\Rightarrow (a_{m_n}^{(n)})^r (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m_n}} (\vartheta_i^{(v)} - \xi_j^{(n)}) = \pm (a_{m_n}^{(n)})^r \prod_{i=1}^{m_n} f_v(\xi_i^{(n)}) \quad (2.71)$$

dir. (2.70) ve (2.71) den,

$$(d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) = \pm (a_{m_n}^{(n)})^r \prod_{i=1}^{m_n} f_v(\xi_i^{(n)})$$

elde edilir. O halde, eğer F_n ile f_v nün hiç ortak kökü yoksa, yani her $i = 1, 2, \dots, m_n$ için $f_v(\xi_i^{(n)}) \neq 0$ ise aşağıdaki özdeşliği yazabiliriz.

$$0 < |f_v(\xi^{(n)})| = \frac{\left| (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \right|}{\left| (a_{m_n}^{(n)})^r \prod_{i=2}^{m_n} f_v(\xi_i^{(n)}) \right|} = \frac{\left| (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \right|}{\left| (a_{m_n}^{(n)})^r \prod_{i=2}^{m_n} \frac{f_v(\xi_i^{(n)})}{H(f_v)} \right| H^{m_n-1}(f_v)}. \quad (2.72)$$

Burada $\left| (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \right|$ bir tam sayıdır. Çünkü, $\prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \in \mathbb{Z}[\vartheta_1^{(v)}, \dots, \vartheta_r^{(v)}]$ her bir $\vartheta_1^{(v)}, \dots, \vartheta_r^{(v)}$ ye göre derecesi m_n olan simetrik bir polinomdur. Dolayısıyla simetrik fonksiyon teoreminden dolayı,

$$\prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) = \sum a_{k_1, \dots, k_r} \sigma_1^{k_1} \dots \sigma_r^{k_r}; \quad a_{k_1, \dots, k_r} \in \mathbb{Z}, \quad k_1 + \dots + k_r \leq m_n, \quad k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde yazılabilir, burada $\sigma_1, \dots, \sigma_r$; $\vartheta_1^{(v)}, \dots, \vartheta_r^{(v)}$ lerin elemanter simetrik polinomlarıdır. Öte yandan, $\vartheta_1^{(v)}, \dots, \vartheta_r^{(v)}$ nün f_v polinomunun kökleri olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ yi f_v nün katsayıları cinsinden ifade edebiliriz.

$$f_v(x) = d_r^{(v)} x^r + \dots + d_1^{(v)} x + d_0^{(v)} = d_r^{(v)} (x - \vartheta_1^{(v)}) \dots (x - \vartheta_r^{(v)})$$

$$\text{olduğundan } \sigma_1 = (-1) \frac{d_{r-1}^{(v)}}{d_r^{(v)}}, \quad \sigma_2 = (-1)^2 \frac{d_{r-2}^{(v)}}{d_r^{(v)}}, \quad \dots, \quad \sigma_r = (-1)^r \frac{d_0^{(v)}}{d_r^{(v)}} \quad \text{dir. O halde,}$$

$$\prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) = \sum \pm a_{k_1, \dots, k_r} \left(\frac{d_{r-1}^{(v)}}{d_r^{(v)}} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{d_0^{(v)}}{d_r^{(v)}} \right)^{k_r}; \quad k_1 + \dots + k_r \leq m_n$$

olduğundan, $(d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \in \mathbb{Z}$ olur. Çünkü $k_1 + \dots + k_r \leq m_n$ olduğundan her bir terimin paydası en fazla $(d_r^{(v)})^{m_n}$ kadar olabilir. Şimdi (2.72) deki kesrin paydası için

bir üst sınır belirleyelim:

$$\left| \prod_{i=2}^{m_n} \frac{f_v(\xi_i^{(n)})}{H(f_v)} \right| = \prod_{i=2}^{m_n} \left| \frac{f_v(\xi_i^{(n)})}{H(f_v)} \right| \leq \prod_{i=2}^{m_n} \frac{|d_r^{(v)}| |\xi_i^{(n)}|^r + \dots + |d_1^{(v)}| |\xi_i^{(n)}| + |d_0^{(v)}|}{H(f_v)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \prod_{i=2}^{m_n} \frac{H(f_v) |\xi_i^{(n)}|^r + \dots + H(f_v) |\xi_i^{(n)}| + H(f_v)}{H(f_v)} \\
&= \prod_{i=2}^{m_n} \left(1 + |\xi_i^{(n)}| + \dots + |\xi_i^{(n)}|^r\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad |\xi_i^{(n)}| < 2 \quad \text{ise}; \quad \prod_{i=2}^{m_n} \left(1 + |\xi_i^{(n)}| + \dots + |\xi_i^{(n)}|^r\right) &< \prod_{i=2}^{m_n} (1 + 2 + \dots + 2^r) \\
&= \prod_{i=2}^{m_n} \left(\frac{2^{r+1} - 1}{2 - 1}\right) < \prod_{i=2}^{m_n} 2^{r+1} = (2^{r+1})^{m_n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad |\xi_i^{(n)}| \geq 2 \quad \text{ise}; \quad 1 + |\xi_i^{(n)}| + \dots + |\xi_i^{(n)}|^{r-1} &= \frac{|\xi_i^{(n)}|^r - 1}{|\xi_i^{(n)}| - 1} \leq |\xi_i^{(n)}|^r - 1 < |\xi_i^{(n)}|^r \\
\Rightarrow \prod_{i=2}^{m_n} \left(1 + |\xi_i^{(n)}| + \dots + |\xi_i^{(n)}|^r\right) &\leq \prod_{i=2}^{m_n} 2 |\xi_i^{(n)}|^r \\
&\leq \prod_{i=2}^{m_n} 2 \left(\max_{i \in \{1, 2, \dots, m_n\}} |\xi_i^{(n)}|\right)^r = \left(2 \left(\max_{i \in \{1, 2, \dots, m_n\}} |\xi_i^{(n)}|\right)^r\right)^{m_n-1}
\end{aligned}$$

O halde, **i)** ve **ii)** den,

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{i=2}^{m_n} \frac{f_v(\xi_i^{(n)})}{H(f_v)} \right| &\leq \prod_{i=2}^{m_n} \left(1 + |\xi_i^{(n)}| + \dots + |\xi_i^{(n)}|^r\right) \\
&\leq \max \left(2^{(r+1)(m_n-1)}, \left(2 \left(\max_{i \in \{1, 2, \dots, m_n\}} |\xi_i^{(n)}|\right)^r\right)^{m_n-1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{m_n}^{(n)}$; F_n tam katsayılı polinomunun kökleri olduğundan Lemma 2.1 den,

$$\max(|\xi_1^{(n)}|, \dots, |\xi_{m_n}^{(n)}|) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m_n\}} (|\xi_i^{(n)}|) \leq 2H(F_n)$$

elde edilir. O halde,

$$\left(2 \left(\max_i |\xi_i^{(n)}|\right)^r\right)^{m_n-1} \leq (2(2H(F_n))^r)^{m_n-1} = (2^{r+1}(H(F_n))^r)^{m_n-1} \leq (2^{r+1}H^r(F_n))^{m-1}$$

dir. (4) den, her $n \in \mathbb{N}$ için $m_n \leq m$ dir.) Aynı şekilde,

$$2^{(r+1)(m_n-1)} \leq 2^{(r+1)(m-1)}(H^r(F_n))^{m-1} = (2^{r+1}H^r(F_n))^{m-1} \quad (H^r(F_n) \geq 1)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\left| \prod_{i=2}^{m_n} \frac{f_v(\xi_i^{(n)})}{H(f_v)} \right| \leq (2^{r+1}H^r(F_n))^{m-1}$$

olur. O halde, $F_n(\vartheta_i^{(v)}) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, r)$ ise (2.72) den $(F_n(\vartheta_i^{(v)}) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, r)$ ise F_n ve f_v nün hiç ortak kökü olamayacağından $f_v(\xi_i^{(n)}) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m_n)$ dir.), aşağıdakini ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} |f_v(\xi^{(n)})| &= \frac{\left| (d_r^{(v)})^{m_n} \prod_{i=1}^r F_n(\vartheta_i^{(v)}) \right|}{\left| (a_{m_n}^{(n)})^r \prod_{i=2}^{m_n} \frac{f_v(\xi_i^{(n)})}{H(f_v)} \right| H^{m_n-1}(f_v)} \geq \frac{1}{(H(F_n))^r (2^{r+1} H^r(F_n))^{m-1} H^{m-1}(f_v)} \\ &= \frac{(2^{r+1})^{-m+1}}{(H^r(F_n))^m H^{m-1}(f_v)} = \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_n) H^{m-1}(f_v)}. \end{aligned}$$

Burada, $(2^{r+1})^{-m+1} =: c_{10} > 0$, n e bağılı olmayan bir reel sabittir. O halde,

$$|f_v(\xi^{(n)})| \geq \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_n) H^{m-1}(f_v)} \quad (2.73)$$

elde edilir. $\{f_v\}$, ξ için bir L_r -dizisi olduğundan,

$$0 < |f_v(\xi)| = H^{-\gamma_v}(f_v) < 1, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \gamma_v = \infty \quad (\forall v \in \mathbb{N} \text{ için } H(f_v) > 1) \quad (2.74)$$

şeklindedir. (2.69) dan,

$$\xi = \xi^{(n)} + t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } |t_n| < c_9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_v(\xi)| &= |f_v(\xi^{(n)} + t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))| \\ &= \left| d_r^{(v)}(\xi^{(n)} + t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^r + \dots + d_1^{(v)}(\xi^{(n)} + t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + d_0^{(v)} \right| \\ &= \left| d_r^{(v)} \left(\binom{r}{0} (\xi^{(n)})^r + \binom{r}{1} (\xi^{(n)})^{r-1} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots + \binom{r}{r-1} (\xi^{(n)}) (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{r}{r} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^r \right) + d_{r-1}^{(v)} \left(\binom{r-1}{0} (\xi^{(n)})^{r-1} + \binom{r-1}{1} (\xi^{(n)})^{r-2} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{r-1}{r-2} (\xi^{(n)}) (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + d_1^{(v)}(\xi^{(n)} + t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + d_0^{(v)} \right| \\ &= \left| f_v(\xi^{(n)}) + d_r^{(v)} \left(\binom{r}{1} (\xi^{(n)})^{r-1} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots + \binom{r}{r-1} (\xi^{(n)}) (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{r}{r} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^r \right) + d_{r-1}^{(v)} \left(\binom{r-1}{1} (\xi^{(n)})^{r-2} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \binom{r-1}{r-2} (\xi^{(n)}) (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} (t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \Big) + \dots + d_1^{(v)} t_n H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \Big|$$

$$\leq |f_v(\xi^{(n)})| + |d_r^{(v)}| \Big(\binom{r}{1} |\xi^{(n)}|^{r-1} |t_n| (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots \\ + \binom{r}{r-1} |\xi^{(n)}| |t_n|^{r-1} (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} + \binom{r}{r} |t_n|^r (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^r \Big) \\ + |d_{r-1}^{(v)}| \Big(\binom{r-1}{1} |\xi^{(n)}|^{r-2} |t_n| (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots + \binom{r-1}{r-2} |\xi^{(n)}| |t_n|^{r-2} (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-2} \\ + \binom{r-1}{r-1} |t_n|^{r-1} (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \Big) + \dots + |d_1^{(v)}| |t_n| H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)$$

$$\left(\begin{array}{l} |t_n| < c_9 \quad (\forall n \in \mathbb{N}); \quad |d_r^{(v)}|, \dots, |d_0^{(v)}| \leq H(f_v); \quad |\xi - \xi^{(n)}| < c_9 H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \\ \text{ve } H(F_n) > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n}{m} = \infty \text{ olduğundan } \{H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)\} \text{ bir sıfır dizisi} \\ \Rightarrow \{|\xi - \xi^{(n)}|\} \text{ bir sıfır dizisi} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^{(n)} = \xi \Rightarrow \{\xi^{(n)}\} \text{ sınırlıdır.} \\ \Rightarrow \exists c > 0 \text{ reel sabit öyleki } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |\xi^{(n)}| \leq c \text{ dir.} \\ 0 < H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) < 1 \Rightarrow (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^2, \dots, (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^r \leq H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \end{array} \right)$$

$$< |f_v(\xi^{(n)})| + H(f_v) \Big(\binom{r}{1} c^{r-1} c_9 (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots + \binom{r}{r-1} c c_9^{r-1} (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \Big) \\ + \binom{r}{r} c_9^r (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^r + H(f_v) \Big(\binom{r-1}{1} c^{r-2} c_9 (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)) + \dots \\ + \binom{r-1}{r-2} c c_9^{r-2} (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} c_9^{r-1} (H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n))^{r-1} \Big) + \dots + H(f_v) c_9 H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n)$$

$$= |f_v(\xi^{(n)})| + H(f_v) H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \Big(\binom{r}{1} c^{r-1} c_9 + \dots + \binom{r}{r-1} c c_9^{r-1} + \binom{r}{r} c_9^r \Big) \\ + H(f_v) H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \Big(\binom{r-1}{1} c^{r-2} c_9 + \dots + \binom{r-1}{r-2} c c_9^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} c_9^{r-1} \Big) + \dots + H(f_v) H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) c_9 \\ = |f_v(\xi^{(n)})| + H(f_v) H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \Big(\binom{r}{1} c^{r-1} c_9 + \dots + \binom{r}{r-1} c c_9^{r-1} \\ + \binom{r}{r} c_9^r + \binom{r-1}{1} c^{r-2} c_9 + \dots + \binom{r-1}{r-2} c c_9^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} c_9^{r-1} + \dots + c_9 \Big)$$

elde edilir.

$$\binom{r}{1} c^{r-1} c_9 + \dots + \binom{r}{r-1} c c_9^{r-1} + \binom{r}{r} c_9^r + \binom{r-1}{1} c^{r-2} c_9 + \dots + \binom{r-1}{r-2} c c_9^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} c_9^{r-1} + \dots + c_9$$

ifadesine c_{11} diyelim, $c_{11} > 0$, n ve v den bağımsız bir reel sabittir. Böylece,

$$|f_v(\xi)| < |f_v(\xi^{(n)})| + c_{11} H(f_v) H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall v \in \mathbb{N} \text{ için})$$

$$\text{elde edilir. O halde, } |f_v(\xi)| - |f_v(\xi^{(n)})| < c_{11} H(f_v) H^{-\frac{\omega_n}{m}}(F_n) \quad \text{olduğundan,}$$

$$(|f_v(\xi)| - |f_v(\xi^{(n)})|)H^{-1}(f_v)H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n) < c_{11}$$

olur. $(|f_v(\xi)| - |f_v(\xi^{(n)})|)H^{-1}(f_v)H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n) := |t_{n,v}|$ diyelim. Böylece,

$$|f_v(\xi)| = |f_v(\xi^{(n)})| + |t_{n,v}|H(f_v)H^{\frac{-\omega_n}{m}}(F_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall v \in \mathbb{N} \text{ için } |t_{n,v}| < c_{11}) \quad (2.75)$$

olur. $0 < |F_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(F_n)$ ve $\{|F_n(\xi)|\}$ nin bir sıfır dizisi olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\{H(F_n)\}$ dizisi sınırlı olamaz. Çünkü, $\{H(F_n)\}$ sınırlı olsa, sonlu sayıda birbirinden farklı $F_n(x)$ ($\partial F_n = m_n$) tam katsayılı polinomu olurdu. O halde birbirinden farklı ancak sonlu sayıda $|F_n(\xi)|$ değeri olurdu. Bu ise $0 < |F_n(\xi)|$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $\{|F_n(\xi)|\}$ nin bir sıfır dizisi olmasıyla çelişir. Çünkü sonlu sayıdaki $|F_n(\xi)| > 0$ değerlerinin minimumuna s dersek, her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < s \leq |F_n(\xi)|$ olur. Oysaki $\{|F_n(\xi)|\}$ bir sıfır dizisi olduğundan yeteri kadar büyük n ler için $|F_n(\xi)| < s$ olmalıdır. O halde, $\{H(F_n)\}$ sınırlı olamaz.

$$\left. \begin{array}{l} H(F_1) \leq H(F_2) \leq \dots \\ \{H(F_n)\} \text{ sınırsızdır.} \\ H(F_n) \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H(F_n) = \infty$$

dir. Şimdi $H(f_v) \geq H(F_1)$ olacak şekildeki $v \in \mathbb{N}$ leri düşünelim. $\lim_{n \rightarrow \infty} H(F_n) = \infty$ olduğundan yeteri kadar büyük $t \in \mathbb{N}$ ler için $H(F_t) > H(f_v)$ dir. $n+1$, $H(F_t) > H(f_v)$ olan $t \in \mathbb{N}$ lerin en küçüğü olsun. Böylece $k < n+1$, $k \in \mathbb{N}$ ler için $H(F_k) \leq H(f_v)$ dir, yani yeteri kadar büyük v ler için (belli bir v den itibaren her v için) $\exists n \in \mathbb{N}$ öyleki;

$$H(F_n) \leq H(f_v) < H(F_{n+1})$$

dir. Burada yeteri kadar büyük her v ye uygun (tek türlü belirli) bir $n \in \mathbb{N}$ karşılık getiriyoruz. Dolayısıyla artık n i v nün bir fonksiyonu olarak düşüneceğiz. $\varepsilon > 0$ bir reel sayı olsun.

$$H(f_v) < H^{\frac{\omega_n}{m^2(r+1)+\varepsilon}}(F_n) \quad (2.76)$$

eşitsizliği ya doğrudur ya da yanlıştır. Şimdi bu iki durumu inceleyelim:

1) (2.76) eşitsizliği sonsuz sayıda $v \in \mathbb{N}$ için geçerli olsun. (2.76) eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıdaki v ye karşılık gelen f_v polinomları, $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ polinomlar dizisinin bir alt dizisini oluşturur. Biz notasyon değiştirmeden bu alt diziyle çalışalım. Zaten buradaki F_n polinomları da $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir alt dizisini oluşturur. Çünkü sadece yeteri kadar büyük v lere karşılık getirdiğimiz n lerle çalışıyoruz.

O halde bu v ler için,

$$\frac{c_{10}}{H^{rm}(F_n)H^{m-1}(f_v)} \geq \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(f_v)} \quad (2.77)$$

dir. Çünkü $H(F_n) \leq H(f_v) < H(F_{n+1})$ ($rm, c_{10} > 0$) dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} H(f_v) < H^{\frac{\omega_n}{m^2(r+1)+\varepsilon}}(F_n) &\Rightarrow H(F_n) > H^{\frac{m^2(r+1)+\varepsilon}{\omega_n}}(f_v) \\ \Rightarrow H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n) > H^{m(r+1)+\frac{\varepsilon}{m}}(f_v) &\Rightarrow \frac{c_{11}H(f_v)}{H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n)} < \frac{c_{11}H(f_v)}{H^{m(r+1)+\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} \\ &\Rightarrow \frac{c_{11}H(f_v)}{H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n)} < \frac{c_{11}}{H^{rm+m-1+\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

elde edilir. Şimdi (2.75) ile başlayalım:

$$\begin{aligned} |f_v(\xi)| &= |f_v(\xi^{(n)})| + t_{n,v}H(f_v)H^{\frac{-\omega_n}{m}}(F_n) = ||f_v(\xi^{(n)})| + t_{n,v}H(f_v)H^{\frac{-\omega_n}{m}}(F_n)| \\ ((2.73), (2.75) \text{ den}) &\geq |f_v(\xi^{(n)})| - \frac{|t_{n,v}|H(f_v)}{H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n)} > \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_n)H^{m-1}(f_v)} - \frac{c_{11}H(f_v)}{H^{\frac{\omega_n}{m}}(F_n)} \\ ((2.77), (2.78) \text{ den}) &> \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(f_v)} - \frac{c_{11}}{H^{rm+m-1+\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} = \frac{1}{H^{rm+m-1}(f_v)} \left(c_{10} - \frac{c_{11}}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} \right) \end{aligned}$$

ve yeteri kadar büyük v ler için $c_{10} - \frac{c_{11}}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} > \frac{c_{10}}{2}$ dir. Çünkü,

$$c_{10} - \frac{c_{11}}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} > \frac{c_{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{c_{10}}{2} > \frac{c_{11}}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} \Leftrightarrow \frac{c_{10}}{2c_{11}} > \frac{1}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)}$$

dir ve $\{f_v\}$, ξ için bir L_r -dizisi olduğundan $\lim_{v \rightarrow \infty} H(f_v) = \infty$ dir. O halde, $\left\{ \frac{1}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} \right\}$ bir sıfır dizisidir. Dolayısıyla, yeteri kadar büyük v ler için, $\frac{1}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} < \frac{c_{10}}{2c_{11}}$ dir. Öyleyse,

$$|f_v(\xi)| > \frac{1}{H^{rm+m-1}(f_v)} \left(c_{10} - \frac{c_{11}}{H^{\frac{\varepsilon}{m}}(f_v)} \right) > \frac{c_{10}/2}{H^{rm+m-1}(f_v)} = \frac{H(f_v)c_{10}/2}{H^{rm+m}(f_v)} \quad (2.79)$$

elde edilir. Ayrıca $\lim_{v \rightarrow \infty} H(f_v) = \infty$ olduğundan, yeteri kadar büyük v ler için

$$H(f_v) > \frac{2}{c_{10}} \text{ olup, buradan } \frac{H(f_v)c_{10}/2}{H^{rm+m}(f_v)} > \frac{1}{H^{rm+m}(f_v)} \text{ elde edilir. O halde, (2.79)}$$

dan, yeteri kadar büyük v ler için,

$$|f_v(\xi)| > \frac{1}{H^{rm+m}(f_v)} \quad (rm+m, v \text{ ye bağılı olmayan bir sabit})$$

elde edilir. Öte yandan, (2.74) den,

$$|f_v(\xi)| = H^{-\gamma_v}(f_v), \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \gamma_v = \infty$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla yeteri kadar büyük v ler için, $\gamma_v > rm + m$ dir.

$$\{f_v\} \text{ bir } L_r \text{ dizisi} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } H(f_v) > 1 \Rightarrow H^{\gamma_v}(f_v) > H^{rm+m}(f_v)$$

$$\Rightarrow |f_v(\xi)| = \frac{1}{H^{\gamma_v}(f_v)} < \frac{1}{H^{rm+m}(f_v)} \quad (\text{yeteri kadar büyük } v \text{ ler için})$$

dir. Fakat bu yeteri kadar büyük v ler için, $|f_v(\xi)| > \frac{1}{H^{rm+m}(f_v)}$ olması ile çelişir. Bu çelişkiye ulaşırken (2.73), (2.74), (2.75), (2.77) ve (2.78) i kullandık. (2.74) ve (2.75) daima vardır. (2.77) de sadece $H(F_n) \leq H(f_v)$ olmasını kullandık. (2.78) de ise (2.76) eşitsizliğini doğru kabul etmemizi kullandık. O halde, yeteri kadar büyük v ler için (2.76) eşitsizliği geçerli ise (2.73) eşitsizliğini ifade edemeyiz, yani yeteri kadar büyük v ler için, $\exists i \in \{1, 2, \dots, r\}$ öyleki $F_n(\vartheta_i^{(v)}) = 0$ olmalıdır. (Burada F_n , yeteri kadar büyük v lere karşılık gelen F_n , yani $H(F_n) \leq H(f_v) < H(F_{n+1})$ deki tek türlü belirli olan F_n dir.) $F_n(\vartheta_i^{(v)}) = 0$ olduğundan, $\vartheta_i^{(v)}, F_n$ in bir köküdür. O halde $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{m_n}^{(n)}$ den birine eşittir, yani $\exists j \in \{1, 2, \dots, m_n\}$; $\vartheta_i^{(v)} = \xi_j^{(n)}$ dir. $\vartheta_i^{(v)}, F_n$ in bir kökü olduğundan, $\xi_j^{(n)}$ de f_v nün bir köküdür. Ancak F_n indirgenemez bir polinom olduğundan $\xi_j^{(n)}$ in minimal polinomudur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} f_v(\xi_j^{(n)}) = 0 \\ F_n, \xi_j^{(n)} \text{ in minimal polinomu} \end{array} \right\} \Rightarrow F_n \mid f_v$$

elde edilir. O halde, yeteri kadar büyük v ler için $\exists F_n$ polinomu öyleki $F_n \mid f_v$ dür.

2) Sonsuz sayıdaki v için (2.76) eşitsizliği yanlış olsun. Burada yine **1)** de yaptığımız gibi f_v dizisinin alt dizisiyle (2.76) eşitsizliğinin yanlış olduğu v lerle çalışıyoruz ve yine bu v lere karşılık gelen n ler ile çalışıyoruz. Bu durumda bu sonsuz sayıdaki v için,

$$H^{\frac{\omega_n}{m^2(r+1)+\varepsilon}}(F_n) \leq H(f_v) < H(F_{n+1}) \quad (2.80)$$

dir. Teoremin hipotezindeki 5. özelliği kullanalım. $\exists \delta > 0$ öyleki $H^{\omega_n}(F_n) > H^\delta(F_{n+1})$ ($n = 1, 2, \dots$) dir. (2.80) den,

$$\frac{1}{H(f_v)} \leq \frac{1}{H^{\frac{\omega_n}{m^2(r+1)+\varepsilon}}(F_n)} = \frac{1}{(H^{\omega_n}(F_n))^{\frac{1}{m^2(r+1)+\varepsilon}}} < \frac{1}{(H^\delta(F_{n+1}))^{\frac{1}{m^2(r+1)+\varepsilon}}}$$

olur. Her iki tarafın γ_v nci kuvvetini alırsak,

$$\frac{1}{H^{\gamma_v}(f_v)} < \frac{1}{H^{\gamma_v \delta / \{m^2(r+1)+\varepsilon\}}(F_{n+1})} \left(\begin{array}{l} \text{yeteri kadar büyük } v \text{ ler ve} \\ \text{onlara karşılık gelen } n \text{ ler için} \end{array} \right) \quad (2.81)$$

olur. (2.80) den,

$$H(f_v) < H(F_{n+1}) \Rightarrow \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_{n+1})H^{m-1}(f_v)} > \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_{n+1})H^{m-1}(F_{n+1})} = \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})}$$

$$\frac{c_{10}}{H^{rm}(F_{n+1})H^{m-1}(f_v)} > \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})} \left(\begin{array}{l} \text{yeteri kadar büyük } v \text{ ler ve} \\ \text{onlara karşılık gelen } n \text{ ler için} \end{array} \right) \quad (2.82)$$

elde edilir ve yine (2.80) den,

$$\frac{c_{11}H(f_v)}{H^{\frac{\omega_{n+1}}{m}}(F_{n+1})} < \frac{c_{11}H(F_{n+1})}{H^{\frac{\omega_{n+1}}{m}-1}(F_{n+1})} \left(\begin{array}{l} \text{yeteri kadar büyük } v \text{ ve} \\ n \text{ ler için} \end{array} \right) \quad (2.83)$$

olur. (2.73) ve (2.75) eşitsizlikleri herhangi bir f_v polinomu ve herhangi bir F_n polinomu için elde edilmişti. Dolayısıyla bu eşitsizliklerde n yerine $n+1$ alabiliriz. c_{10} ve c_{11} , n e bağlı olmayan sabitler olduğundan aynı kalırlar. O halde,

$$|f_v(\xi^{(n+1)})| \geq \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_{n+1})H^{m-1}(f_v)}, \quad (2.84)$$

$$|f_v(\xi)| = |f_v(\xi^{(n+1)})| + t_{n+1,v}H(f_v)H^{-\frac{\omega_{n+1}}{m}}(F_{n+1}) \quad (\forall n, \gamma \in \mathbb{N} \text{ için } |t_{n+1,v}| < c_{11}). \quad (2.85)$$

Şimdi (2.85) ile başlayalım.

$$\begin{aligned} |f_v(\xi)| &= |f_v(\xi^{(n+1)})| + t_{n+1,v}H(f_v)H^{-\frac{\omega_{n+1}}{m}}(F_{n+1}) \\ &= \left| |f_v(\xi^{(n+1)})| + t_{n+1,v}H(f_v)H^{-\frac{\omega_{n+1}}{m}}(F_{n+1}) \right| \quad ((2.84), (2.85) \text{ den}) \\ &\geq |f_v(\xi^{(n+1)})| - |t_{n+1,v}| \frac{H(f_v)}{H^{\frac{\omega_{n+1}}{m}}(F_{n+1})} \geq \frac{c_{10}}{H^{rm}(F_{n+1})H^{m-1}(f_v)} - \frac{c_{11}H(f_v)}{H^{\frac{\omega_{n+1}}{m}}(F_{n+1})} \\ &> \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})} - \frac{c_{11}}{H^{\frac{\omega_{n+1}}{m}-1}(F_{n+1})} \quad ((2.82), (2.83) \text{ den}) \end{aligned}$$

$$> \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})} - \frac{c_{11}}{H^{rm+m}(F_{n+1})}$$

elde edilir. Son eşitsizlik yeteri kadar büyük n ler için doğrudur. Çünkü,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1}}{m} - 1 = \infty \quad \text{olduğundan yeteri kadar büyük } n \text{ ler için } \frac{\omega_{n+1}}{m} - 1 > rm + m$$

dir. Öyleyse, $\frac{1}{H^{\frac{\omega_{n+1}}{m}-1}(F_{n+1})} < \frac{1}{H^{rm+m}(F_{n+1})}$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} |f_v(\xi)| &> \frac{c_{10}}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})} - \frac{c_{11}}{H^{rm+m}(F_{n+1})} = \frac{1}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})} \left(c_{10} - \frac{c_{11}}{H(F_{n+1})} \right) \\ &> \frac{c_{10}/2}{H^{rm+m-1}(F_{n+1})} = \frac{(c_{10}/2)H(F_{n+1})}{H^{rm+m}(F_{n+1})} > \frac{1}{H^{rm+m}(F_{n+1})} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} H(F_{n+1}) = \infty \Rightarrow \left\{ \frac{1}{H(F_{n+1})} \right\} \text{ bir sıfır dizisi} \Rightarrow \text{yeteri kadar büyük} \\ n \text{ ler için, } \frac{1}{H(F_{n+1})} < \frac{c_{10}}{2c_{11}} \left(\frac{c_{10}}{2c_{11}} > 0, n \text{ e bağılı değil} \right) \text{ ve} \\ \text{yeteri kadar büyük } n \text{ ler için, } \frac{1}{H(F_{n+1})} < \frac{c_{10}}{2} \Rightarrow H(F_{n+1}) > \frac{2}{c_{10}} \text{ dur.} \end{array} \right)$$

dir. Burada yeteri kadar büyük v ler için $H(F_n) \leq H(f_v) < H(F_{n+1})$ olacak şekilde uygun bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. O halde, v arttıkça n de artar. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikler yeteri kadar büyük v ler için de geçerlidir. Böylece; yeteri kadar büyük v ler için

$$|f_v(\xi)| > \frac{1}{H^{rm+m}(F_{n+1})}$$

elde edilir. Öte yandan şimdi (2.74) ü kullanalım.

$$|f_v(\xi)| = H^{-\gamma_v}(f_v), \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \gamma_v = \infty$$

dur. (2.81) den dolayı yeteri kadar büyük v ler için

$$|f_v(\xi)| = \frac{1}{H^{\gamma_v}(f_v)} < \frac{1}{H^{\gamma_v \delta / \{m^2(r+1)+\varepsilon\}}(F_{n+1})}$$

olduğunu biliyoruz ve $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\gamma_v \delta}{m^2(r+1)+\varepsilon} = \infty$ olduğundan yeteri kadar büyük v ler için,

$$\frac{\gamma_v \delta}{m^2(r+1)+\varepsilon} > rm + m > 0 \Rightarrow \frac{1}{H^{\gamma_v \delta / \{m^2(r+1)+\varepsilon\}}(F_{n+1})} < \frac{1}{H^{rm+m}(F_{n+1})}$$

dir. O halde, yeteri kadar büyük v ler için $|f_v(\xi)| < \frac{1}{H^{rm+m}(F_{n+1})}$ dir. Fakat bu, yeteri kadar büyük v ler için $|f_v(\xi)| > \frac{1}{H^{rm+m}(F_{n+1})}$ olmasıyla çelişir. Bu çelişkiye ulaşırken (2.74), (2.81), (2.82), (2.83), (2.84) ve (2.85) i kullandık. **1)** deki gibi (2.74) ve (2.85) daima vardır. (2.80) in geçerli olduğu v leri incelediğimiz için (2.81), (2.82) ve (2.83) eşitsizliklerinde (2.80) i kullandık. Bunlarda da sorun yoktur.

O halde sorun (2.84) den kaynaklanır. O halde, (2.80) in geçerli olduğu (2.76) nın yanlış olduğu durumda yeteri kadar büyük v ler için (2.84) eşitsizliğinden bahsedemeyiz. Dolayısıyla yeteri kadar büyük v ler için $\exists i \in \{1, 2, \dots, r\}$ öyleki $F_{n+1}(\vartheta_i^{(v)}) = 0$ dır. Böylece, **1)** deki nedenden dolayı $F_{n+1} \mid f_v$ dır. O halde, **1)** ve **2)** den teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.3. (LeVeque, [3]) $\{F_n\}$, Teorem 2.14 deki gibi tanımlanan tam katsayılı polinom dizisi ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n = \ell$ olsun. Bu takdirde, $\xi \in U_\ell$ dir.

İspat. ξ kompleks sayısı için $\{F_n\}$ dizisi Teorem 2.14 deki gibi olsun ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n = \ell$ olsun. Bu durumda $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ doğal sayı dizisinin $(1 \leq m_n \leq m)$ bir $\{m_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ alt dizisi vardır öyleki $\lim_{j \rightarrow \infty} m_{n_j} = \ell$ dir. O halde, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall j \geq j_0$ için $m_{n_j} = \ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) dir. $\{m_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ dizisinde baştaki sonlu tane terimi atarsak, $\{m_n\}$ doğal sayı dizisinin bir $\{m_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ alt dizisini elde ederiz öyleki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $m_{n_k} = \ell$ dir. Şimdi bu $\{m_{n_k}\}$ dizisine karşılık gelen, $\{F_n\}$ tam katsayılı polinomlar dizisinin $\{F_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ alt dizisini düşünelim. O halde, F_{n_k} lar

$$F_{n_k}(x) = a_0^{(n_k)} + a_1^{(n_k)}x + \dots + a_\ell^{(n_k)}x^\ell \in \mathbb{Z}[x], \quad a_\ell^{(n_k)} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$H(F_{n_1}) \leq H(F_{n_2}) \leq \dots, \quad 0 < |F_{n_k}(\xi)| = H^{-\omega_{n_k}}(F_{n_k}) < 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n_k} = \infty, \quad H(F_{n_k}) > 1$$

olduğunu biliyoruz. O halde, $\{F_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tam katsayılı polinomlar dizisi ξ kompleks sayısı için bir L_ℓ -dizisi oluşturur. ξ için, $1 \leq t < \ell$ olmak üzere, bir L_t -dizisi mevcut değildir. Çünkü $\ell = 1$ için bu doğrudur. $\ell > 1$ olsun ve $1 \leq t < \ell$ olmak üzere $\{f_v\}_{v=1}^\infty$ tam

katsayılı polinomları ξ için bir L_t -dizisi olsun. ($\partial f_v = t$.) Bu durumda Teorem 2.14 den yeteri kadar büyük v ler için $\exists F_n$ polinomu öyleki $F_n \mid f_v$ olur. (Burada n , v ye bağlı olarak değişir.) Böylece yeteri kadar büyük v ler için ve dolayısıyla yeteri kadar büyük n ler için $\partial F_n \leq \partial f_v$ olur, yani yeteri kadar büyük n ler için $m_n \leq t < \ell$ olur. Bu ise $m_n \geq \ell$ olmasıyla çelişir. (Çünkü $\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n = \ell$ olduğundan belli bir n den itibaren $m_n \geq \ell$ dir.) O halde, ξ için bir L_t -dizisi ($1 \leq t < \ell$) yoktur. Dolayısıyla, $\xi \in U_\ell$ dir.

Teorem 2.15. (LeVeque, [3]) $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $U_m \neq \emptyset$ dir.

İspat. $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ bir asal sayı dizisi ve $\left\{ \frac{\log P_{k+1}}{\log P_k} \right\}_{k=1}^\infty$ monoton artan ve sınırsız olsun. Monoton artan ve sınırsız her pozitif reel sayı dizisi ∞ a ıraksar. Dolayısıyla,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log P_{k+1}}{\log P_k} = \infty \text{ dur. O halde,}$$

$$\forall M > 0 \text{ için } \exists k_0(M) = k_0 \in \mathbb{N}; \forall k \geq k_0 \text{ için } \frac{\log P_{k+1}}{\log P_k} > M$$

$$\Rightarrow \log P_{k+1} > M \log P_k = \log P_k^M \Rightarrow P_{k+1} > P_k^M > P_k$$

dır, yani $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi bir geniş boşluk dizisidir.

Şimdi $\sum_{k=1}^\infty 2^{-P_k}$ reel sayı serisini düşünelim. $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{P_k}}$ ($k = 1, 2, \dots$) ve $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}$

geometrik serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testinden $\sum_{k=1}^\infty 2^{-P_k}$ serisi de yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^\infty 2^{-P_k}$ reel sayı serisinin yakınsadığı reel sayıya ζ diyelim.

$$\zeta = \sum_{k=1}^\infty 2^{-P_k}$$

reel sayısı bir Liouville sayısıdır. Çünkü, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\frac{g_n}{h_n} = \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} = \frac{1}{2^{P_1}} + \frac{1}{2^{P_2}} + \dots + \frac{1}{2^{P_n}} = \frac{2^{P_n-P_1} + 2^{P_n-P_2} + \dots + 2^{P_n-P_n}}{2^{P_n}}$$

rasyonel sayısını düşünelim. O halde, $h_n = 2^{P_n} \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $g_n = h_n \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} \in \mathbb{Z}$ tam sayılarını alalım. ($h_n = 2^{P_n} > 1$.)

$$|h_n \zeta - g_n| = \left| h_n \sum_{k=1}^\infty 2^{-P_k} - h_n \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} \right| = h_n \sum_{k=n+1}^\infty 2^{-P_k} = 2^{P_n} \left(\frac{1}{2^{P_{n+1}}} + \frac{1}{2^{P_{n+2}}} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{P_n} \frac{1}{2^{P_{n+1}}} \left(1 + \frac{1}{2^{P_{n+2}-P_{n+1}}} + \frac{1}{2^{P_{n+3}-P_{n+1}}} + \dots \right) \begin{pmatrix} P_{n+2}-P_{n+1} > 1 \\ P_{n+3}-P_{n+1} > 2 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&\leq 2^{P_n-P_{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{1}{2^{P_{n+1}-P_n}} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2^{P_{n+1}-P_n-1}} \\
&\Rightarrow |h_n \zeta - g_n| \leq \frac{1}{2^{P_{n+1}-P_n-1}}
\end{aligned}$$

olur. $\omega > 0$ herhangi bir reel sayı olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P_{n+1}}{\log P_n} = \infty$ olduğundan, yeteri kadar büyük n ler için

$$P_{n+1} > P_n^{\omega+1} = P_n^\omega P_n > \omega P_n + P_n + 1 \Rightarrow P_{n+1} - P_n - 1 > \omega P_n$$

elde edilir. Dolayısıyla her $\omega > 0$ reel sayısı ve yeteri kadar büyük n ler için,

$$|h_n \zeta - g_n| \leq \frac{1}{2^{P_{n+1}-P_n-1}} < \frac{1}{(2^{P_n})^\omega} = \frac{1}{(h_n)^\omega}, \quad h_n > 1 \quad (2.86)$$

dir. Burada ζ , bir irrasyonel sayıdır. Çünkü,

$$\left| \zeta - \frac{g_n}{h_n} \right| < \frac{1}{(h_n)^{\omega+1}} \quad (\forall \omega > 0 \text{ ve yeteri kadar büyük } n \text{ ler için})$$

dir ve $\left\{ \frac{1}{(h_n)^{\omega+1}} \right\}$ bir sıfır dizisidir. O halde, $\left\{ \left| \zeta - \frac{g_n}{h_n} \right| \right\}$ bir sıfır dizisidir. Ayrıca,

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_n}{h_n} &= \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} = \frac{1}{2^{P_1}} + \dots + \frac{1}{2^{P_n}} \\ \frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-P_k} = \frac{1}{2^{P_1}} + \dots + \frac{1}{2^{P_n}} + \frac{1}{2^{P_{n+1}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{g_n}{h_n} < \frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} < \dots$$

dir, yani $\frac{g_n}{h_n}$ ler birbirinden farklı rasyonel sayılardır.

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \left| \zeta - \frac{g_n}{h_n} \right| \right\} \text{ bir sıfır dizisi} \\ &\zeta \in \mathbb{R}, \quad \frac{g_n}{h_n} \text{ rasyonel sayıları birbirinden farklı} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \zeta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

dir. (Çünkü sonsuz sayıda rasyonel sayıyla ancak bir irrasyonel sayıya yaklaşılabilir.)

O halde, yeteri kadar büyük n ler için, $0 < |h_n \zeta - g_n| < \frac{1}{(h_n)^\omega}$, $h_n > 1$ olduğundan ($\forall \omega > 0$ için) ζ bir Liouville sayısıdır.

Şimdi $f_n(x) = h_n x^m - g_n \in \mathbb{Z}[x]$ ($n = 1, 2, \dots$) polinomlarını düşünelim.

$H(f_n) = \max(|g_n|, |h_n|) = \max(g_n, h_n) = h_n$ dir. Çünkü,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} &= \frac{1}{2^{P_1}} + \frac{1}{2^{P_2}} + \dots + \frac{1}{2^{P_n}} = \frac{1}{2^{P_1}} \left(1 + \frac{1}{2^{P_2-P_1}} + \frac{1}{2^{P_3-P_1}} + \dots + \frac{1}{2^{P_n-P_1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{P_1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^{P_1}} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{P_1-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) \\ &< \frac{1}{2^{P_1-1}} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad (P_1 \text{ asal, } P_1 \geq 2) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} < 1 \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Böylece, $g_n = h_n \sum_{k=1}^n 2^{-P_k} < h_n$ olduğundan, $\max(g_n, h_n) = h_n$ olur. Ayrıca,

$$h_{n+1} = 2^{P_{n+1}} > 2^{P_n} = h_n \quad (P_{n+1} > P_n) \Rightarrow h_n < h_{n+1} \Rightarrow H(f_n) < H(f_{n+1})$$

($n = 1, 2, \dots$) dir, yani $H(f_1) < H(f_2) < \dots$ dir.

O halde, $\{f_n(x)\}$ polinom dizisi $\xi = \zeta^{1/m}$ irrasyonel sayısı için bir L_m dizisidir. Çünkü (2.86) dan,

$$0 < |h_n \zeta - g_n| = |h_n (\zeta^{1/m})^m - g_n| = |h_n \xi^m - g_n| = |f_n(\xi)| < \frac{1}{(h_n)^\omega}, \quad h_n > 1$$

($\forall \omega > 0$ ve yeteri kadar büyük n ler için)

dir. Ve bu $\{f_n(x)\}$ dizisi Teorem 2.14 deki hipotezleri sağlar. Çünkü, 1) ve 2) özellikleri $\{f_n(x)\}$, ξ için bir L_m - dizisi olduğundan sağlanır.

3) $f_n(x) = h_n x^m - g_n \in \mathbb{Z}[x]$ polinomları $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenemezdir.

4) $\partial f_n(x) = m$ ($n = 1, 2, \dots$) olduğundan bu özellik kendiliğinden sağlanır.

5) $\exists \delta > 0$ reel sayısı öyleki $H^{\omega_n}(f_n) > H^\delta(f_{n+1})$ dir. Çünkü,

$$H(f_n) = h_n = 2^{P_n}, \quad H(f_{n+1}) = h_{n+1} = 2^{P_{n+1}}$$

$$H^{\omega_n}(f_n) > H^\delta(f_{n+1}) \Leftrightarrow \omega_n \log H(f_n) > \delta \log H(f_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \omega_n \log 2^{P_n} > \delta \log 2^{P_{n+1}} \Leftrightarrow \delta < \frac{\omega_n P_n \log 2}{P_{n+1} \log 2} = \frac{\omega_n P_n}{P_{n+1}}$$

dir. $\omega_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) alabiliriz. ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P_{n+1}}{\log P_n} = \infty$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} =$

∞ dur.) Böylece, $\delta < \frac{P_{n+1}}{P_n} \frac{P_n}{P_{n+1}} = 1$ olur. Dolayısıyla $\delta < 1$ koşuluna uygun herhangi

bir pozitif reel sayı için 5) özelliği geçerlidir. Sonuç olarak, $\{f_n(x)\}$ polinomlar dizisi Teorem 2.14 deki beş özelliği de sağlar. Sonuç 2.3 den, $\xi = \zeta^{1/m} \in U_m$ dir. O halde, $U_m \neq \emptyset$ ($m \in \mathbb{N}$) dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.



2.2.3. Kompleks Sayıların Mahler Ve Koksma Sınıflandırmaları

Mahler [4] 1932 yılında kompleks sayılar kümesini aşağıdaki şekilde dört farklı sınıfa ayırmıştır.

ξ verilen bir kompleks sayı, n ve H da verilen iki doğal sayı olmak üzere,

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{P(x) \in \mathbb{Z}[x], P(\xi) \neq 0 \\ \partial P \leq n, H(P) \leq H}} |P(\xi)| \quad (2.87)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $P(x) \equiv 1$ (2.87) deki minimuma giren polinomlardan biri olduğundan $0 < w_n(H, \xi) \leq 1$ dir. Ayrıca $w_n(H, \xi)$, n in ve H nın bir monoton azalan fonksiyonudur. $H > 1$ olmak üzere,

$$w_n(\xi) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H} \quad \text{ve} \quad w(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(\xi)}{n}$$

diyelim. $0 \leq w_n(\xi) \leq \infty$ ve $0 \leq w(\xi) \leq \infty$ dir. Ayrıca $w_n(\xi)$, n in bir monoton artan fonksiyonudur. Eğer herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $w_n(\xi) = \infty$ ise, böyle n lerin en küçüğüne $\mu(\xi)$ diyelim. O halde, her $n \geq \mu(\xi)$ için $w_n(\xi) = \infty$ ve her $n < \mu(\xi)$ için $w_n(\xi) < \infty$ olur. Eğer her n doğal sayısı için $w_n(\xi) < \infty$ ise $\mu(\xi) = \infty$ dur denir. $w(\xi)$ ve $\mu(\xi)$ değerleri aynı anda sonlu olamaz. Böylece $\xi \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki dört durumdan yalnızca biri geçerlidir. ξ ,

$$w(\xi) = 0, \quad \mu(\xi) = \infty \quad \text{ise bir A-sayısı,}$$

$$0 < w(\xi) < \infty, \quad \mu(\xi) = \infty \quad \text{ise bir S-sayısı,}$$

$$w(\xi) = \infty, \quad \mu(\xi) = \infty \quad \text{ise bir T-sayısı,}$$

$$w(\xi) = \infty, \quad \mu(\xi) < \infty \quad \text{ise bir U-sayısı}$$

olarak adlandırılır. Her bir sayı tipinin oluşturduğu sınıf yine aynı harflerle adlandırılır. O halde, her ξ kompleks sayısı bu dört sınıftan yalnızca birine aittir. A-sınıfı ile cebirsel sayılar kümesi aynıdır. Böylece transandant sayılar S, T ve U gibi üç ayrık sınıfa ayrılır.

Aşağıdaki notlar, literatürde bilinmekte olan sonuçlardır, ancak ispatları kendi bakış açımızla ele aldık.

Not 2.9. $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ dir. Burada U ile U -sayılarının oluşturduğu küme gösterilmektedir.

İspat. $\xi \in U$ olsun. Bu durumda $\mu(\xi) < \infty$ olduğundan her $n \geq \mu(\xi)$ için $w_n(\xi) = \infty$ dur. O halde,

$$\begin{aligned} w_\mu(\xi) = \infty &\Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_\mu(H, \xi)}}{\log H} = \infty \quad (H > 1) \\ &\Rightarrow \exists \{H_\lambda\}_{\lambda=1}^\infty \text{ alt dizisi öyleki } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_\mu(H_\lambda, \xi)}}{\log H_\lambda} = \infty \end{aligned} \quad (2.88)$$

olur. (Burada alt dizi tanımından $H_1 < H_2 < \dots$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda = \infty$ dur.) (2.88) den,

$$\begin{aligned} \forall \omega > 0 \text{ reel sayısı için } \exists \lambda_0 = \lambda_0(\omega) \in \mathbb{N} \ni \forall \lambda \geq \lambda_0 \text{ için } \frac{\log \frac{1}{w_\mu(H_\lambda, \xi)}}{\log H_\lambda} > \omega \\ \Rightarrow \frac{1}{w_\mu(H_\lambda, \xi)} > H_\lambda^\omega > 0 \Rightarrow w_\mu(H_\lambda, \xi) < \frac{1}{H_\lambda^\omega} \quad (\lambda \geq \lambda_0) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} 0 < w_\mu(H_\lambda, \xi) &= \min_{\substack{P(x) \in \mathbb{Z}[x], P(\xi) \neq 0 \\ \partial P \leq \mu, H(P) \leq H_\lambda}} |P(\xi)| = \min_{\substack{a_0, \dots, a_\mu \in \mathbb{Z} \\ \max(|a_0|, \dots, |a_\mu|) \leq H_\lambda}} |a_0 + a_1 \xi + \dots + a_\mu \xi^\mu| < \frac{1}{H_\lambda^\omega} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, her $\lambda \geq \lambda_0$ için

$$\begin{aligned} 0 < |a_0 + a_1 \xi + \dots + a_\mu \xi^\mu| &< \frac{1}{H_\lambda^\omega} \\ a_0, \dots, a_\mu &\in \mathbb{Z} \\ \max(|a_0|, \dots, |a_\mu|) &\leq H_\lambda \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $|a_0 + a_1 \xi + \dots + a_\mu \xi^\mu|$ değeri vardır, yani her $\lambda \geq \lambda_0$ için

$$\begin{aligned} 0 < |a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} \xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)} \xi^\mu| &< \frac{1}{H_\lambda^\omega} \\ a_0^{(\lambda)}, \dots, a_\mu^{(\lambda)} &\in \mathbb{Z} \\ \max(|a_0^{(\lambda)}|, \dots, |a_\mu^{(\lambda)}|) &\leq H_\lambda \end{aligned} \quad (2.89)$$

olacak şekilde bir $\{|a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} \xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)} \xi^\mu|\}_{\lambda=\lambda_0}^\infty$ dizisi vardır. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda = \infty$ olduğundan $\{|a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} \xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)} \xi^\mu|\}_{\lambda=\lambda_0}^\infty$ dizisi bir sıfır dizisidir ve her $\lambda \geq \lambda_0$

için $0 < |a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)}\xi^\mu|$ olduğundan $\{|a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)}\xi^\mu|\}_{\lambda=\lambda_0}^\infty$ dizisinin birbirinden farklı sonsuz sayıda terimi vardır, yani (2.89) eşitsizliğini sağlayan birbirinden farklı sonsuz sayıda $|a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)}\xi^\mu|$ değeri vardır.

Öte yandan, $1 \leq t \leq \mu$ aralığındaki bir t doğal sayısı için $\exists \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ alt dizisi öyleki

$$0 < \left| a_0^{(\lambda_j)} + a_1^{(\lambda_j)}\xi + \dots + a_t^{(\lambda_j)}\xi^t \right| < \frac{1}{H_{\lambda_j}^\omega} \quad (2.90)$$

$$a_0^{(\lambda_j)}, \dots, a_t^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}, \quad a_t^{(\lambda_j)} \neq 0$$

$$\max(|a_0^{(\lambda_j)}|, \dots, |a_t^{(\lambda_j)}|) \leq H_{\lambda_j}$$

($j = 1, 2, \dots$) gerçekleşir. Çünkü, öncelikle (2.89) ifadesinde her $\lambda \geq \lambda_0$ için $a_1^{(\lambda)}, \dots, a_\mu^{(\lambda)}$ tam sayılarının hepsi birden sıfır olamaz, en az biri sıfırdan farklıdır. Aksi taktirde, eğer $a_1^{(\lambda)} = \dots = a_\mu^{(\lambda)} = 0$ olsa,

$$0 < |a_0^{(\lambda)}| < \frac{1}{H_\lambda^\omega} \leq \frac{1}{|a_0^{(\lambda)}|^\omega} \Rightarrow 0 < |a_0^{(\lambda)}|^{1+\omega} < 1 \Rightarrow |a_0^{(\lambda)}| < 1$$

$$a_0^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}$$

$$|a_0^{(\lambda)}| \leq H_\lambda$$

olur. Oysaki $0 < |a_0^{(\lambda)}|, a_0^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}$ olduğundan $|a_0^{(\lambda)}| \geq 1$ dir. Ayrıca $1 \leq t \leq \mu$ aralığındaki her t doğal sayısı için

$$0 < \left| a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + \dots + a_t^{(\lambda)}\xi^t \right| < \frac{1}{H_\lambda^\omega} \quad (\lambda \geq \lambda_0)$$

$$a_0^{(\lambda)}, \dots, a_t^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}, \quad a_t^{(\lambda)} \neq 0$$

$$\max(|a_0^{(\lambda)}|, \dots, |a_t^{(\lambda)}|) \leq H_\lambda$$

olacak şekilde sadece sonlu sayıda $\lambda \in \mathbb{N}$ olsa, bu durum (2.89) eşitsizliğini sağlayan birbirinden farklı sonsuz sayıda $|a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + \dots + a_\mu^{(\lambda)}\xi^\mu|$ teriminin olmasıyla çelişir. O halde, (2.90) geçerlidir.

$$f_j(x) = a_0^{(\lambda_j)} + a_1^{(\lambda_j)}x + \dots + a_t^{(\lambda_j)}x^t; \quad a_0^{(\lambda_j)}, \dots, a_t^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}, \quad a_t^{(\lambda_j)} \neq 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

t . dereceden tam katsayılı polinomlardır. Öyleyse her $\omega > 0$ reel sayısı için $\exists j_0 = j_0(\omega) \in \mathbb{N}$ öyleki her $j \geq j_0$ için (2.90) dan,

$$0 < |f_j(\xi)| = \left| a_0^{(\lambda_j)} + a_1^{(\lambda_j)}\xi + \dots + a_t^{(\lambda_j)}\xi^t \right| < \frac{1}{(H(f_j))^\omega} < 1$$

$$\left(H(f_j) = \max(|a_0^{(\lambda_j)}|, \dots, |a_t^{(\lambda_j)}|) \leq H_{\lambda_j} \Rightarrow \frac{1}{(H_{\lambda_j})^\omega} \leq \frac{1}{(H(f_j))^\omega} \right)$$

elde edilir. Burada $H(f_j) > 1$ ve $H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$ olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü $H(f_j)$ dizisi (üstten) sınırsızdır. Aksi taktirde, sınırlı olsa, yani bir $M > 0$ reel sayısı için $H(f_j) \leq M (j = 1, 2, \dots)$ olsa, yüksekliği $\leq M$ ve derecesi t olan birbirinden farklı sonlu sayıda tam katsayılı polinom olduğundan birbirinden farklı sonlu sayıda $\left\{ \left| a_0^{(\lambda_j)} + a_1^{(\lambda_j)} \xi + \dots + a_t^{(\lambda_j)} \xi^t \right| \right\}$ değeri var olurdu. Ancak $0 < \left| a_0^{(\lambda_j)} + a_1^{(\lambda_j)} \xi + \dots + a_t^{(\lambda_j)} \xi^t \right|$ ve $\left\{ \left| a_0^{(\lambda_j)} + a_1^{(\lambda_j)} \xi + \dots + a_t^{(\lambda_j)} \xi^t \right| \right\}$ bir sıfır dizisidir. O halde, $\limsup_{j \rightarrow \infty} H(f_j) = \infty$ dur. Öyleyse, $H(f_j)$ nin öyle bir $H(f_{j_k})$ alt dizisi vardır ki limiti ∞ dur. $H(f_{j_k})$ dizisinin de terimleri > 1 olan ve monoton artan bir alt dizisi vardır. Biz bu alt diziyle çalıştığımızı düşünebiliriz, yani $1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$ dir. O halde, $\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ tam katsayılı polinomlar dizisi ξ için bir L_t -dizisidir. Böylece, $\xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_t$ dir. $1 \leq t \leq \mu$ olduğuna göre $\xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{\mu}$ dir. Dolayısıyla $\xi \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ dir. O halde,

$$U \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m \quad (2.91)$$

elde edilir.

Şimdi $\xi \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ olsun. Bu taktirde, $\exists m \in \mathbb{N}$ öyleki $\xi \in U_m$ dir. O halde, ξ için bir L_m -dizisi vardır, ancak ξ için $1 \leq t < m$ ($t \in \mathbb{N}$) olmak üzere bir L_t -dizisi yoktur.

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \dots + a_m^{(n)}x^m \quad (a_0^{(n)}, \dots, a_m^{(n)} \in \mathbb{Z}; \quad a_m^{(n)} \neq 0; \quad n = 1, 2, \dots)$$

tam katsayılı polinomları ξ için bir L_m -dizisi oluştursun. O halde,

$$0 < |f_n(\xi)| = |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi + \dots + a_m^{(n)}\xi^m| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$$

$$1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$$

dir. Amacımız $w_m(\xi) = \infty$ olduğunu göstermek, böylelikle $\xi \in U$ olduğunu göstermiş oluruz.

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ bir L_m -dizisi olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n) = \infty$ dur. O halde, $\{H(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $1 < H(f_{n_1}) < H(f_{n_2}) < \dots$ olacak şekilde bir $\{H(f_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Bu alt diziyle çalışalım. (Bir L_m -dizisinin her sonsuz alt dizisi de bir L_m -dizisidir.) $1 < H(f_{n_1}) < H(f_{n_2}) < \dots$, $H(f_n) \in \mathbb{N}$ ($n = 1, 2, \dots$) olduğuna göre $\{H(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{H\}_{H=2}^{\infty}$ doğal sayı dizisinin bir alt dizisidir. Kolaylık olması için $H(f_n) =: H_n$ ($n = 1, 2, \dots$) ile

gösterelim.

$$0 < w_m(H_n, \xi) = \min_{\substack{P(x) \in \mathbb{Z}[x], P(\xi) \neq 0 \\ \partial P \leq m, H(P) \leq H_n}} |P(\xi)| \leq |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi + \dots + a_m^{(n)}\xi^m| = \frac{1}{H_n^{\omega_n}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{w_m(H_n, \xi)} \geq H_n^{\omega_n} > 0 \quad \xRightarrow{H_n > 1} \frac{\log \frac{1}{w_m(H_n, \xi)}}{\log H_n} \geq \omega_n \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_m(H_n, \xi)}}{\log H_n} = \infty \Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_m(H, \xi)}}{\log H} = \infty \Rightarrow w_m(\xi) = \infty$$

elde edilir. O halde, $\xi \in U$ dur. Böylece,

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m \subseteq U \quad (2.92)$$

olur. Dolayısıyla, (2.91) ve (2.92) den $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ elde edilir.

Not 2.10. $\xi \in \mathbb{C}$ olsun. $\xi \in U_m \Leftrightarrow \mu(\xi) = m$.

İspat. Gereklik. $\xi \in U_m$ olsun. Bu durumda Not 2.9 dan, $\xi \in U$ olduğunu ve $\xi \in U$ ise $\xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_\mu$ ($\mu = \mu(\xi)$) olduğunu biliyoruz. O halde, $\exists t \in \{1, \dots, \mu\}$ doğal sayısı öyleki $\xi \in U_t$ dir. Ancak, $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ (ayrık birleşim) olduğundan ξ bir ve yalnız bir U_i ($i \in \mathbb{N}$) kümesine ait olabilir. O halde, $U_t = U_m$ ($t = m$) dir. Buradan

$$m \leq \mu(\xi) \quad (2.93)$$

elde edilir. Yine Not 2.9 dan,

$$\xi \in U_m \Rightarrow w_m(\xi) = \infty \Rightarrow \mu(\xi) \leq m \quad (2.94)$$

dir. O halde (2.93) ve (2.94) den, $\mu(\xi) = m$ elde edilir.

Yeterlik. ξ kompleks sayısı için $\mu(\xi) = m$ olsun. $\mu(\xi) = m < \infty$ olduğundan $\xi \in U$ dur. O halde Not 2.9 dan,

$$\xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_\mu \Rightarrow (\mu = m) \quad \xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$$

dir. $1 \leq t < m$ olmak üzere $\xi \in U_t$ olsa, Not 2.9 dan, $w_t(\xi) = \infty$ olur. Dolayısıyla $\mu(\xi) = \mu \leq t$ olup, buradan $\mu(\xi) < m$ elde edilir. Bu ise $\mu(\xi) = m$ olması ile çelişir. O halde, $\xi \in U_t$ ($1 \leq t < m$) olamaz.

$$\left. \begin{array}{l} \xi \in U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m \\ \xi \notin U_t, \quad 1 \leq t < m \end{array} \right\} \Rightarrow \xi \in U_m$$

elde edilir. Böylece $U_m = \{\xi \in U \mid \mu(\xi) = m\}$ olur.

Not 2.11. $\mathcal{L}$, Liouville sayılarının kümesi olsun. Bu taktirde, $U_1 = \mathcal{L}$ dir.

İspat. $U_1 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi \text{ için bir } L_1 - \text{dizisi vardır}\}.$

1) $\xi \in U_1$ olsun. Bu taktirde, ξ için bir L_1 -dizisi vardır.

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x; \quad a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \in \mathbb{Z}; \quad a_1^{(n)} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

tam katsayılı polinomları ξ için bir L_1 -dizisi olsun. O halde,

$$0 < |f_n(\xi)| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$$

şeklindedir. Biz ξ nin bir Liouville sayısı olduğunu, yani her $\omega > 0$ reel sayısı için,

$$0 < |q\xi - p| < \frac{1}{q^\omega}, \quad q > 1$$

olacak şekilde bir $p, q \in \mathbb{Z}$ çifti olduğunu göstermek istiyoruz. $\omega > 0$ keyfi bir reel sayı olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğundan,

$$\exists n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } \omega_n > \omega$$

dır. Dolayısıyla, her $n \geq n_0$ için

$$0 < |f_n(\xi)| = |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi| = \frac{1}{(H(f_n))^{\omega_n}} < \frac{1}{(H(f_n))^\omega}.$$

O halde, her $n \geq n_0$ için

$$0 < |a_1^{(n)}\xi - a_0^{(n)}| < \frac{1}{(H(f_n))^\omega}$$

olacak şekilde $a_0^{(n)} \in \mathbb{Z}$, $a_1^{(n)} \in \mathbb{Z} - \{0\}$ vardır. Burada $a_1^{(n)} > 0$ kabul edebiliriz. $a_1^{(n)} > 1$ olacak şekilde bir n ($n \geq n_0$) doğal sayısı vardır. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n) = \infty$, $\omega > 0$ olduğundan $\{|a_1^{(n)}\xi - a_0^{(n)}|\}_{n=n_0}^\infty$ bir sıfır dizisidir. Dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1(\varepsilon) = n_1 \in \mathbb{N}$ ($n_1 \geq n_0$) öyleki $0 < |a_1^{(n)}\xi - a_0^{(n)}| < \varepsilon$

$$\Rightarrow 0 < \left| \xi - \frac{a_0^{(n)}}{a_1^{(n)}} \right| < \frac{\varepsilon}{a_1^{(n)}} \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0^{(n)}}{a_1^{(n)}} = \xi \quad (n \geq n_1)$$

$$(a_1^{(n)} > 0, a_1^{(n)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1^{(n)} \geq 1)$$

olur. Dolayısıyla ξ bir irrasyonel sayıdır. Eğer her n ($n \geq n_0$) doğal sayısı için $a_1^{(n)} = 1$ olsa, $0 < |a_1^{(n)}\xi - a_0^{(n)}| = |\xi - a_0^{(n)}|$ ($n \geq n_0$) değerlerinin bir sıfır dizisi oluşturduğunu biliyoruz. Ancak, $\xi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sayısına en yakın iki tam sayı vardır ve bunlar $[\xi]$ ve $[\xi] + 1$ dir. $\min(|\xi - [\xi]|, |\xi - ([\xi] + 1)|) =: c$ diyelim. $c > 0$ dir. O halde, her $n \geq n_0$ için $|\xi - a_0^{(n)}| \geq c$ olur. Oysaki $\{|\xi - a_0^{(n)}|\}_{n=n_0}^\infty$ bir sıfır dizisi olduğundan belli bir n den itibaren her pozitif reel sayıdan, dolayısıyla c den de küçük kalmalıdır. Dolayısıyla çelişkiye düşmüş olduk. O halde, $a_1^{(n)} > 1$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq n_0$) doğal sayısı vardır, yani $\exists n \in \mathbb{N}$ ($n \geq n_0$) öyleki

$$0 < |a_1^{(n)}\xi - a_0^{(n)}| < \frac{1}{(H(f_n))^\omega}; \quad a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \in \mathbb{Z}, \quad a_1^{(n)} > 1 \quad (2.95)$$

dir. Ayrıca,

$$|a_1^{(n)}| \leq \max(|a_0^{(n)}|, |a_1^{(n)}|) = H(f_n) \Rightarrow \frac{1}{(H(f_n))^\omega} \leq \frac{1}{|a_1^{(n)}|^\omega} = \frac{1}{(a_1^{(n)})^\omega}$$

olduğundan ve (2.95) den dolayı, $\omega > 0$ reel sayısı için

$$0 < |a_1^{(n)}\xi - a_0^{(n)}| < \frac{1}{(a_1^{(n)})^\omega}, \quad a_1^{(n)} > 1$$

olacak şekilde bir $a_1^{(n)}, a_0^{(n)}$ tam sayı çifti vardır. Dolayısıyla ξ , bir Liouville sayısıdır. O halde, $U_1 \subseteq \mathcal{L}$ dir.

2) $\xi \in \mathcal{L}$ olsun. $\xi \in U_1$ olduğunu, yani ξ için bir L_1 -dizisinin var olduğunu göstereyim. ξ , bir Liouville sayısı olduğundan, ξ , bir irrasyonel ve transandant sayıdır. $\xi > 0$ kabul edebiliriz. Çünkü ξ bir Liouville sayısı olduğundan $-\xi$ de bir Liouville sayısıdır. Ayrıca ξ için bir L_1 -dizisi varsa, $-\xi$ için de bir L_1 -dizisi vardır:

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x; \quad a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \in \mathbb{Z}, \quad a_1^{(n)} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

tam katsayılı polinomları ξ için bir L_1 -dizisi oluştursun. Bu taktirde ,

$$0 < |f_n(\xi)| = |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$$

şeklindedir. Açık bir şekilde görüldüğü gibi $\{f_n\}$ polinom dizisi $-\xi$ için de bir L_1 -dizisi oluşturur. O halde sadece pozitif ξ ler için bir L_1 -dizisinin var olduğunu göstermemiz

yeterlidir. Ayrıca $\xi < 1$ kabul edebiliriz. Çünkü ξ bir Liouville sayısı olduğundan $\frac{1}{\xi}$ de bir Liouville sayısıdır. Ayrıca ξ için bir L_1 -dizisi varsa, $\frac{1}{\xi}$ için de bir L_1 -dizisi vardır:

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x; \quad a_0^{(n)}, a_1^{(n)} \in \mathbb{Z}, \quad a_1^{(n)} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

tam katsayılı polinomları ξ için bir L_1 -dizisi oluştursun. Bu takdirde,

$$0 < |f_n(\xi)| = |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi| = H^{-\omega_n}(f_n) < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$$

dir. $\xi > 0$ ve $0 < |a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\xi| = \frac{1}{H^{\omega_n}(f_n)}$ olduğundan $0 < |a_0^{(n)}\frac{1}{\xi} + a_1^{(n)}| = \frac{1}{\xi H^{\omega_n}(f_n)}$

$$\Rightarrow 0 < |a_1^{(n)} + a_0^{(n)}\frac{1}{\xi}| = \frac{1}{\xi H^{\omega_n-1}(f_n)} \cdot \frac{1}{H(f_n)} < \frac{1}{\xi H^{\omega_n-1}(f_n)} \cdot \xi$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} H(f_n) = \infty \Rightarrow \left\{ \frac{1}{H(f_n)} \right\}_{n=1}^{\infty}, \text{ bir sıfır dizisi} \\ \Rightarrow (\xi > 0) \quad \exists n_0 = n_0(\xi) \in \mathbb{N} \quad \exists \forall n \geq n_0 \quad \text{için} \quad \frac{1}{H(f_n)} < \xi \text{ olur.} \end{array} \right)$$

elde edilir. O halde, her $n \geq n_0$ için

$$0 < |a_1^{(n)} + a_0^{(n)}\frac{1}{\xi}| < \frac{1}{H^{\omega_n-1}(f_n)} \quad (2.96)$$

olur. $\omega > 0$ keyfi bir reel sayı olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olduğundan $\exists n_1 = n_1(\omega) \in \mathbb{N}$ ($n_1 \geq n_0$) öyleki $\forall n \geq n_1$ için $\omega_n > \omega + 1$ dir. Böylece (2.96) dan,

$$0 < |a_1^{(n)} + a_0^{(n)}\frac{1}{\xi}| < \frac{1}{H^{\omega_n-1}(f_n)} < \frac{1}{H^{\omega}(f_n)} \quad (\forall n \geq n_1 \geq n_0) \quad (2.97)$$

elde edilir. Bu durumda $a_0^{(n)} = 0$ ($n \geq n_1$) olamaz. Aksi takdirde, $a_0^{(n)} = 0$ olsa,

$$0 < |a_1^{(n)}| < \frac{1}{H^{\omega}(f_n)} = \frac{1}{|a_1^{(n)}|^{\omega}} \quad \left(H(f_n) = \max(|a_1^{(n)}|, |a_0^{(n)}|) = |a_1^{(n)}|, a_1^{(n)} \neq 0 \right)$$

$$\Rightarrow 0 < |a_1^{(n)}|^{1+\omega} < 1 \Rightarrow |a_1^{(n)}| < 1$$

olurdu. Bu ise $|a_1^{(n)}| \geq 1$ olması ile çelişir. O halde, $n \geq n_1$ için

$$\{g_n\} = \{a_1^{(n)} + a_0^{(n)}x\}; \quad a_1^{(n)}, a_0^{(n)} \in \mathbb{Z}; \quad a_0^{(n)} \neq 0, \quad n = n_1, n_1 + 1, \dots$$

tam katsayılı polinom dizisi $\frac{1}{\xi}$ için bir L_1 -dizisi oluşturur. Çünkü (2.97) den,

$$0 < |g_n(\frac{1}{\xi})| = |a_1^{(n)} + a_0^{(n)} \frac{1}{\xi}| < \frac{1}{H^\omega(f_n)} = \frac{1}{H^\omega(g_n)} < 1 \quad (n \geq n_1)$$

elde edilir ve $1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$ olduğundan $n \geq n_1$ den itibaren $1 < H(g_{n_1}) \leq H(g_{n_1+1}) \leq \dots$ olur. Böylece $\xi < 1$ olduğunu kabul edebiliriz, yani $\xi \in \mathcal{L}$ için $0 < \xi < 1$ alabiliriz. Şimdi $\omega > 0$ keyfi bir reel sayı olsun. ξ bir Liouville sayısı olduğundan,

$$0 < |q\xi - p| < \frac{1}{q^\omega}, \quad q > 1$$

olacak şekilde bir $p, q \in \mathbb{Z}$ çifti vardır. Herhangi bir ω_n pozitif terimli reel sayı dizisi alalım öyleki $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < |q\xi - p| < \frac{1}{q^{\omega_n}}, \quad q > 1$$

olacak şekilde bir $p, q \in \mathbb{Z}$ çifti vardır. Dolayısıyla,

$$0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}| < \frac{1}{(q^{(n)})^{\omega_n}}, \quad q^{(n)} > 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

olacak şekilde bir $\{(q^{(n)}, p^{(n)})\}_{n=1}^\infty$ ($q^{(n)}, p^{(n)} \in \mathbb{Z}$) dizisi vardır. O halde,

$$0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}| < \frac{1}{(q^{(n)})^{\omega_n}} \leq \frac{1}{2^{\omega_n}} < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$$

olduğundan $\{|q^{(n)}\xi - p^{(n)}|\}_{n=1}^\infty$, bir sıfır dizisidir. Ayrıca $q^{(n)}$ pozitif tam sayı dizisi üstten sınırlı olamaz. Çünkü aksi taktirde, $q^{(n)} \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı var olsa,

$$0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}| < 1 \Rightarrow 0 < \left| \xi - \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} \right| < \frac{1}{q^{(n)}} < 1 \quad (q^{(n)} > 1)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} - \xi \right| \leq \left| \xi - \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} \right| \leq \left| \xi - \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |p^{(n)}| < q^{(n)}(1 + |\xi|) \Rightarrow -q^{(n)}(1 + |\xi|) < p^{(n)} < q^{(n)}(1 + |\xi|)$$

olurdu. Bu durumda, birbirinden farklı sonlu sayıda $q^{(n)}$ tam sayısı olacağından, birbirinden farklı sonlu sayıda $p^{(n)}$ tam sayısı bulunur, yani yalnızca sonlu sayıda $(q^{(n)}, p^{(n)})$ çifti bulunur. Bu ise, $0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}|$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $\{|q^{(n)}\xi - p^{(n)}|\}_{n=1}^\infty$ dizisinin bir sıfır dizisi olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\limsup_{n \rightarrow \infty} q^{(n)} = \infty$ olup, buradan $\lim_{j \rightarrow \infty} q^{(n_j)} = \infty$

olacak şekilde bir $\{q^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Şimdi bu alt diziyle ve buna karşılık gelen $\{|q^{(n_j)}\xi - p^{(n_j)}|\}$ ve ω_{n_j} dizileriyle çalıştığımızı düşünelim, ama yine aynı n notasyonunu kullanalım, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{(n)} = \infty$ olduğunu kabul edelim.

$$1 < q^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad q^{(n)} \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^{(n)} = \infty$$

olduğundan $1 < q^{(1)} \leq q^{(2)} \leq \dots$ olduğunu kabul edebiliriz. (Çünkü $\{q^{(n)}\}$ in böyle bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyle çalıştığımızı düşünüyoruz.) $\{|q^{(n)}\xi - p^{(n)}|\}_{n=1}^{\infty}$, bir sıfır dizisi olduğundan,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } 0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (n \geq n_0) \quad 0 < \left| \xi - \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} \right| < \frac{\varepsilon}{q^{(n)}} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} = \xi$$

dir. $0 < \xi < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} = \xi$ olduğundan $\frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} \quad (n = 1, 2, \dots)$ bir basit kesir olduğunu kabul edebiliriz. O halde, $n = 1, 2, \dots$ için $|p^{(n)}| < |q^{(n)}| = q^{(n)}$ dir. Böylece

$$0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}| < \frac{1}{(q^{(n)})^{\omega_n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty, \quad q^{(n)}, p^{(n)} \in \mathbb{Z}; \quad q^{(n)} > 1$$

$$1 < q^{(1)} \leq q^{(2)} \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^{(n)} = \infty, \quad |p^{(n)}| < q^{(n)}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$f_n(x) = -p^{(n)} + q^{(n)}x; \quad p^{(n)}, q^{(n)} \in \mathbb{Z}; \quad q^{(n)} \neq 0; \quad n = 1, 2, \dots$$

tam katsayılı polinomları ξ için bir L_1 -dizisi oluşturur. Çünkü öncelikle her $n \in \mathbb{N}$ için $|p^{(n)}| < |q^{(n)}| = q^{(n)}$ olduğundan $H(f_n) = \max(|-p^{(n)}|, |q^{(n)}|) = q^{(n)}$ dir. O halde, $1 < q^{(1)} \leq q^{(2)} \leq \dots$ olduğundan $1 < H(f_1) \leq H(f_2) \leq \dots$ elde edilir. Böylece ,

$$0 < |q^{(n)}\xi - p^{(n)}| < \frac{1}{(q^{(n)})^{\omega_n}} \Rightarrow 0 < |f_n(\xi)| < \frac{1}{(H(f_n))^{\omega_n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty$$

olur. Ayrıca $\forall \omega > 0$ reel sayısı için $\exists n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\omega_n > \omega$ olduğundan,

$$0 < |f_n(\xi)| < \frac{1}{(H(f_n))^{\omega_n}} < \frac{1}{(H(f_n))^{\omega}} \quad (n \geq n_0)$$

dır, yani $f_n(x)$ tam katsayılı polinomları ξ için bir L_1 -dizisi oluşturur. Dolayısıyla $\xi \in U_1$ dir. Böylece $\mathcal{L} \subseteq U_1$ elde edilir. **1)** ve **2)** den $\mathcal{L} = U_1$ gösterilmiş olur.

Koksma [5] 1939 yılında kompleks sayılar için başka bir sınıflandırma yapmış ve kompleks sayıları aşağıdaki şekilde dört farklı sınıfa ayırmıştır.

ξ verilen bir kompleks sayı, n ve H da verilen iki doğal sayı olmak üzere,

$$w_n^*(H, \xi) = \min_{\substack{\alpha, \text{ cebirsel}; \alpha \neq \xi \\ \partial(\alpha) \leq n, H(\alpha) \leq H}} |\xi - \alpha|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $w_n^*(H, \xi)$, n in ve H nın bir monoton azalan fonksiyonudur. $H > 1$ olmak üzere,

$$w_n^*(\xi) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{1}{H w_n^*(H, \xi)} \right)}{\log H} \quad \text{ve} \quad w^*(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}$$

diyelim. $0 \leq w_n^*(\xi) \leq \infty$ ve $0 \leq w^*(\xi) \leq \infty$ dir. Ayrıca $w_n^*(\xi), n$ in bir monoton artan fonksiyonudur. Eğer herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $w_n^*(\xi) = \infty$ ise, böyle n lerin en küçüğüne $\mu^*(\xi)$ diyelim. O halde, her $n \geq \mu^*(\xi)$ için $w_n^*(\xi) = \infty$ ve her $n < \mu^*(\xi)$ için $w_n^*(\xi) < \infty$ olur. Eğer her n doğal sayısı için $w_n^*(\xi) < \infty$ ise $\mu(\xi) = \infty$ dur denir. $w^*(\xi)$ ve $\mu^*(\xi)$ değerleri aynı anda sonlu olamaz. Böylece $\xi \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki dört durumdan yalnızca biri geçerlidir. ξ ,

$$w^*(\xi) = 0, \quad \mu^*(\xi) = \infty \quad \text{ise bir } A^* - \text{sayısı,}$$

$$0 < w^*(\xi) < \infty, \quad \mu^*(\xi) = \infty \quad \text{ise bir } S^* - \text{sayısı,}$$

$$w^*(\xi) = \infty, \quad \mu^*(\xi) = \infty \quad \text{ise bir } T^* - \text{sayısı,}$$

$$w^*(\xi) = \infty, \quad \mu^*(\xi) < \infty \quad \text{ise bir } U^* - \text{sayısı}$$

olarak adlandırılır. Her bir sayı tipinin oluşturduğu sınıf yine aynı harflerle adlandırılır. O halde, kompleks sayılar A^*, S^*, T^* ve U^* gibi dört ayrık sınıfa ayrılır. ξ bir U^* -sayısı ve $\mu^*(\xi) = m$ olsun ve böyle ξ sayılarının oluşturduğu kümeyi U_m^* ile gösterelim, yani $U_m^* = \{\xi \in U^* \mid \mu^*(\xi) = m\}$ olsun. Görüldüğü gibi U_m^* kümesi U^* -sınıfının bir alt sınıfıdır ve U^* -sınıfı bu ayrık U_m^* ($m = 1, 2, \dots$) sınıflarının birleşimidir. O halde, $U^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m^*$ ($m \neq n$ için $U_m^* \cap U_n^* = \emptyset$) dir ve U_m^* nin elemanlarına U_m^* -sayıları denir.

1961 yılında Wirsing [6] tarafından bu iki sınıflandırmanın eşdeğer olduğu, yani A^-, S^-, T^-, U^- sınıflarının sırasıyla A^*, S^*, T^*, U^* -sınıflarıyla aynı olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca, her $m = 1, 2, \dots$ için $U_m = U_m^*$ dir. Mahler ve Koksma sınıflandırmaları hakkında daha fazla bilgi edinmek için Bugeaud [8] ya başvurunuz.

2.2.4. Küçük Transandantlık Ölçüsüne Sahip U_m Sayıları

Bu bölümde, Alnıaçık, Avcı, Bugeaud, [7] makalesi incelenmiştir.

Önerme 2.2. (Bugeaud,[8]) $\xi, m \geq 2$ inci dereceden bir reel cebirsel sayı olsun. Bu taktirde,

$$0 < |\xi - \alpha| < K(\xi, m)H(\alpha)^{-m}$$

olacak şekilde bir $K(\xi, m) > 1$ reel sabiti ile sonsuz sayıda m . dereceden reel α cebirsel tam sayısı vardır.

Lemma 2.2. (Güting [9]) α_1 ve α_2 birbirinden farklı iki cebirsel sayı ve $\partial(\alpha_1) = n_1$, $\partial(\alpha_2) = n_2$ olsun. Eğer α_1 ve α_2 eşlenik değillerse

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \min\{n_1, n_2\}^{-1} (n_1 + 1)^{-n_2} (n_2 + 1)^{-n_1} H(\alpha_1)^{-n_2} H(\alpha_2)^{-n_1}$$

dir.

Lemma 2.3. (Alnıaçık, Avcı, Bugeaud, [7]) $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$; M, N ve c herhangi üç pozitif reel sayı; $0 < |\alpha_1 - \alpha_2| < N^{-1}$, $|\alpha_1 - \beta| \geq c^{-1}M^{-1}$; δ herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere, $M \leq c^{-1}\delta(c + \delta)^{-1}N$ olsun. Bu durumda, $|\alpha_2 - \beta| > (c + \delta)^{-1}M^{-1}$ dir.

İspat. $\delta > 0$ bir reel sayı ve $M \leq c^{-1}\delta(c + \delta)^{-1}N$ olsun.

$$|\alpha_2 - \beta| = |\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_1 - \beta| \geq ||\alpha_1 - \alpha_2| - |\alpha_1 - \beta|| \geq |\alpha_1 - \beta| - |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$\geq c^{-1}M^{-1} - N^{-1} \geq c^{-1}M^{-1} - M^{-1}c^{-1}\delta(c + \delta)^{-1}$$

$$(M \leq c^{-1}\delta(c + \delta)^{-1}N \Rightarrow N^{-1} \leq M^{-1}c^{-1}\delta(c + \delta)^{-1})$$

$$= M^{-1}(c^{-1} - c^{-1}\delta(c + \delta)^{-1}) = M^{-1}\left(\frac{1}{c} - \frac{\delta}{c(c + \delta)}\right) = M^{-1}\frac{c}{c(c + \delta)} = M^{-1}(c + \delta)^{-1}$$

$$\Rightarrow |\alpha_2 - \beta| > (c + \delta)^{-1}M^{-1}.$$

Teorem 2.16. (Almaçık, Avcı, Bugeaud, [7]) $m \geq 2$ bir tam sayı olsun. Bu takdirde,

$$w_t^*(\xi) \leq m + t - 1, \quad 1 \leq t < m$$

olacak şekilde sayılamaz sonsuz sayıda ξ U_m sayısı vardır.

İspat. $m \geq 2$ bir tam sayı olsun. $1 \leq t \leq m - 1$ ($t \in \mathbb{N}$) olmak üzere; β_t , t . dereceden bir reel cebirsel sayı olsun. ξ_1 , m . dereceden herhangi bir reel cebirsel sayı olsun. O halde, Lemma 2.2 den dolayı,

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \beta_t| &\geq \frac{1}{\min(t, m)(t+1)^m(m+1)^t H(\xi_1)^t H(\beta_t)^m} = \frac{1}{t(t+1)^m(m+1)^t H(\xi_1)^t H(\beta_t)^m} \\ &\geq \frac{1}{(m+1)(m+1)^m(m+1)^m H(\xi_1)^t H(\beta_t)^m} = \frac{1}{(m+1)^{2m+1} H(\xi_1)^t H(\beta_t)^m} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$|\xi_1 - \beta_t| \geq c_1^{-1} H(\xi_1)^{-t} H(\beta_t)^{-m} \quad (2.98)$$

dir. Burada $c_1 = (m+1)^{2m+1} > 1$ dir. ξ_1 , $m \geq 2$ inci dereceden bir reel cebirsel sayı olduğundan, Önerme 2.2 den dolayı,

$$0 < |\xi_1 - \xi_2| < K(\xi_1) H(\xi_2)^{-m} \quad (2.99)$$

olacak şekilde bir $K(\xi_1) > 1$ reel sabiti ile sonsuz sayıda m . dereceden ξ_2 reel cebirsel tam sayısı vardır.

Lemma 2.3 ü $\xi_1, \xi_2, \beta_t \in \mathbb{R}$ üçlüsüne $M = H(\beta_t)^m > 0$, $N = K(\xi_1)^{-1} H(\xi_2)^m > 0$, $c = c_1 H(\xi_1)^m > 0$ ve $\delta = \frac{1}{2} > 0$ değerleriyle uygulayalım.

$$(2.99) \Rightarrow 0 < |\xi_1 - \xi_2| < K(\xi_1) H(\xi_2)^{-m} = N^{-1}$$

$$(2.98) \Rightarrow |\xi_1 - \beta_t| \geq c_1^{-1} H(\xi_1)^{-t} H(\beta_t)^{-m} \geq c_1^{-1} H(\xi_1)^{-m} H(\beta_t)^{-m} = c^{-1} M^{-1}$$

dir. O halde $\delta = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$M = H(\beta_t)^m \leq c^{-1} \delta (c + \delta)^{-1} N = c_1^{-1} H(\xi_1)^{-m} \frac{1}{2} \left(c_1 H(\xi_1)^m + \frac{1}{2} \right)^{-1} K(\xi_1)^{-1} H(\xi_2)^m$$

$$= c_2^{-1} \frac{1}{2} \left(c_2 + \frac{1}{2} \right)^{-1} K(\xi_1)^{-1} H(\xi_2)^m = c_2^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{2c_2 + 1}{2} \right)^{-1} K(\xi_1)^{-1} H(\xi_2)^m$$

$$= c_2^{-1} (2c_2 + 1)^{-1} K(\xi_1)^{-1} H(\xi_2)^m = (c_2(2c_2 + 1))^{-1} K(\xi_1)^{-1} H(\xi_2)^m$$

ise, yani $H(\beta_t) \leq (c_2(2c_2 + 1))^{\frac{-1}{m}} K(\xi_1)^{\frac{-1}{m}} H(\xi_2) =: A$ ise

$$|\xi_2 - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m} \quad (2.100)$$

dir, burada $c_2 = c_1 H(\xi_1)^m$ dir. Eğer $H(\beta_t) > A$ ise;

$\partial(\beta_t) = t < m = \partial(\xi_2)$ olduğundan β_t ve ξ_2 eşlenik olmayan cebirsel sayılardır. O halde Lemma 2.2 den dolayı,

$$|\xi_2 - \beta_t| > c_1^{-1} H(\xi_2)^{-t} H(\beta_t)^{-m} \quad (2.101)$$

dir.

$$\begin{aligned} H(\beta_t) > A &\Rightarrow H(\beta_t) > (c_2(2c_2 + 1))^{-1/m} K(\xi_1)^{-1/m} H(\xi_2) \\ &\Rightarrow H(\xi_2) < H(\beta_t) (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{1/m} \Rightarrow H(\xi_2)^t < H(\beta_t)^t (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{t/m} \\ &\Rightarrow H(\xi_2)^{-t} > H(\beta_t)^{-t} (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{-t/m} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bunu (2.101) ile birleştirirsek,

$$\begin{aligned} |\xi_2 - \beta_t| &> c_1^{-1} H(\xi_2)^{-t} H(\beta_t)^{-m} > c_1^{-1} H(\beta_t)^{-m} H(\beta_t)^{-t} (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{-t/m} \\ \Rightarrow |\xi_2 - \beta_t| &> c_1^{-1} (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{-t/m} H(\beta_t)^{-m-t} > (H(\beta_t))^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \end{aligned} \quad (2.102)$$

dir. (2.102) eşitsizliği $H(\beta_t) > c_3 = c_3(\xi_1, m)$ ($c_3 > 0$) koşulunu sağlayan $H(\beta_t)$ ler için geçerlidir. (Burada $H > 1$ herhangi bir doğal sayıdır.) Çünkü,

$$\begin{aligned} (2.102) &\Leftrightarrow c_1^{-1} (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{-t/m} H(\beta_t)^{-t-m} > H(\beta_t)^{-t-m} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \\ &\Leftrightarrow c_1^{-1} (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{-t/m} > (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \\ &\Leftrightarrow 0 < c_1 (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{t/m} < \log_H(H^2 H(\beta_t)) \\ &\Leftrightarrow H^2 H(\beta_t) > H^{c_1 (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{t/m}} \Leftrightarrow H(\beta_t) > \frac{H^{c_1 (c_2(2c_2 + 1) K(\xi_1))^{t/m}}}{H^2} =: c_3(\xi_1, m). \end{aligned}$$

Dolayısıyla $H(\beta_t) > c_3(\xi_1, m) = c_3$ ise (2.102) eşitsizliği geçerlidir. Fakat (2.99) gerçekleştirilecek şekilde sonuz sayıda m . dereceden ξ_2 reel cebirsel tam sayısı var olduğundan $H(\xi_2)$ değeri yeteri kadar büyük alınabilir. Böylece $A > c_3 = c_3(\xi_1, m)$ olur. Çünkü,

$$\begin{aligned} A > c_3 &\Leftrightarrow (c_2(2c_2 + 1))^{-1/m} K(\xi_1)^{-1/m} H(\xi_2) > c_3 \\ &\Leftrightarrow H(\xi_2) > (c_2(2c_2 + 1))^{1/m} K(\xi_1)^{1/m} c_3 \end{aligned}$$

dir ve $(c_2(2c_2 + 1))^{1/m} K(\xi_1)^{1/m} c_3$ sadece ξ_1 ve m e bağılı pozitif bir reel sabittir, $H(\xi_2)$ den bağımsızdır. Dolayısıyla, $H(\xi_2) > (c_2(2c_2 + 1))^{1/m} K(\xi_1)^{1/m} c_3$ alabiliriz. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} H(\beta_t) > A \\ A > c_3(\xi_1, m) \end{array} \right\} \Rightarrow H(\beta_t) > c_3(\xi_1, m) \Rightarrow |\xi_2 - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} H(\beta_t) > A &\Rightarrow |\xi_2 - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \\ &> \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1}. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} c_2 = c_1 H(\xi_1)^m, \quad c_1 = (m+1)^{2m+1} \\ H(\xi_1)^m \geq 1 \end{array} \right\} c_2 > 1 \Rightarrow 0 < \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} < 1$$

Ayrıca $H(\beta_t) \leq A$ ise (2.100) den,

$$\begin{aligned} |\xi_2 - \beta_t| &> \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m} > \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \\ \left(\begin{array}{l} H(\beta_t) \geq 1 \Rightarrow H(\beta_t)^{-t} \leq 1, \quad H^2 H(\beta_t) \geq H^2 \Rightarrow \log_H(H^2 H(\beta_t)) \geq \log_H(H^2) = 2 \\ \Rightarrow 0 < (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} < \frac{1}{2} \Rightarrow H(\beta_t)^{-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} < 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ ($\partial(\beta_t) = t$) olan her β_t reel cebirsel sayısı için

$$|\xi_2 - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.103)$$

olur.

İddia: $\forall i \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için ($\partial(\beta_t) = t$),

$$|\xi_{i+1} - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^i}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.104)$$

ve

$$0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| < K(\xi_i) H(\xi_{i+1})^{-m}, \quad H(\xi_{i+1}) > K(\xi_i) H(\xi_i)^i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.105)$$

olacak şekilde m . dereceden $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots$ reel cebirsel tam sayıları vardır, yani m . dereceden reel cebirsel tam sayılardan oluşan bir $\{\xi_i\}_{i=2}^\infty$ dizisi vardır. (Burada $K(\xi_i) > 1$, ($i = 1, 2, \dots$) sadece ξ_i ye bağılı bir reel sabittir.)

İspat: $i = 1$ için iddia doğrudur. Çünkü (2.103) den dolayı $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m - 1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için $|\xi_2 - \beta_t| > (c_2 + \frac{1}{2})^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1}$ dir. Ayrıca başta keyfi olarak aldığımız ξ_1 , m . dereceden ($m \geq 2$) reel cebirsel sayısı için (2.99) dan dolayı, $0 < |\xi_1 - \xi_2| < K(\xi_1) H(\xi_2)^{-m}$ olacak şekilde bir $K(\xi_1)$ reel sabiti ile m . dereceden bir ξ_2 reel cebirsel tam sayısı vardır, aslında bu şekilde sonsuz sayıda ξ_2 reel cebirsel tam sayısı vardır. Dolayısıyla $H(\xi_2)$ keyfi büyük alınabilir. O halde, ξ_2 , $H(\xi_2) > K(\xi_1) H(\xi_1)$ olacak şekilde seçilebilir. ($K(\xi_1)$, sadece ξ_1 e bağlıdır.)

$i = n - 1$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) doğal sayısı için iddia doğru olsun, yani $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m - 1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için

$$|\xi_{i+1} - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^i} \right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

ve

$$0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| < K(\xi_i) H(\xi_{i+1})^{-m}, \quad H(\xi_{i+1}) > K(\xi_i) H(\xi_i)^i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

olacak şekilde m . dereceden $\xi_2, \dots, \xi_n$ reel cebirsel tam sayıları var olsun.

$i = n$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) için iddianın doğru olduğunu, yani $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m - 1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.106)$$

ve

$$0 < |\xi_n - \xi_{n+1}| < K(\xi_n) H(\xi_{n+1})^{-m}, \quad H(\xi_{n+1}) > K(\xi_n) H(\xi_n)^n \quad (2.107)$$

olacak şekilde m . dereceden bir ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayısının var olduğunu gösterelim:

ξ_n , m . dereceden bir reel cebirsel tam sayı olduğundan, Önerme 2.2 den,

$$0 < |\xi_n - \xi_{n+1}| < K(\xi_n) H(\xi_{n+1})^{-m}$$

olacak şekilde bir $K(\xi_n) > 1$ reel sabiti ile m . dereceden bir ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayısı vardır, aslında bu şekilde sonsuz sayıda m . dereceden ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayısı vardır. Dolayısıyla $H(\xi_{n+1})$ keyfi her sayıdan büyük alınabilir. O halde, ξ_{n+1} ,

$$H(\xi_{n+1}) > K(\xi_n) H(\xi_n)^n$$

olacak şekilde seçilebilir. Böylece (2.107) yi göstermiş olduk. Şimdi (2.106) yı gösterelim:

İddiayı $i = n - 1$ için doğru kabul ettiğimizden, $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m - 1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için

$$|\xi_n - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.108)$$

olacak şekilde m . dereceden bir ξ_n reel cebirsel tam sayısı vardır. $c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =: c_4$ diyelim. $\xi_n, \xi_{n+1}, \beta_t \in \mathbb{R}$ üçlüsüne Lemma 2.3 ü, $N = K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m$, $c = c_4$, $M = H(\beta_t)^{m+t} \log_H(H^2 H(\beta_t))$, $\delta = \frac{1}{2^n}$ değerleriyle uygulayalım.

$$(2.107) \Rightarrow 0 < |\xi_n - \xi_{n+1}| < K(\xi_n) H(\xi_{n+1})^{-m} = N^{-1},$$

$$(2.108) \Rightarrow |\xi_n - \beta_t| > c_4^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} = c^{-1} M^{-1}.$$

O halde $\delta = \frac{1}{2^n}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} H(\beta_t)^{m+t} \log_H(H^2 H(\beta_t)) &\leq c_4^{-1} \frac{1}{2^n} \left(c_4 + \frac{1}{2^n}\right)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m \\ &= c_4^{-1} (2^n c_4 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m \end{aligned}$$

ise, yani

$$H(\beta_t)^{m+t} \log_H(H^2 H(\beta_t)) \leq c_4^{-1} (2^n c_4 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m \quad (2.109)$$

ise

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > \left(c_4 + \frac{1}{2^n}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.110)$$

dir. $\partial(\beta_t) = t < m$, $\partial(\xi_n) = m$ olduğundan β_t ve ξ_n eşlenik olmayan cebirsel sayılardır.

O halde Lemma 2.2 den,

$$|\xi_n - \beta_t| \geq c_1^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\beta_t)^{-m} \quad (2.111)$$

dir. Şimdi Lemma 2.3 ü $\xi_n, \xi_{n+1}, \beta_t \in \mathbb{R}$ üçlüsüne $M = H(\beta_t)^m$, $N = K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m$, $c = c_1 H(\xi_n)^t$, $\delta = H(\xi_n)^t$ değerleriyle uygulayalım.

$$(2.107) \Rightarrow 0 < |\xi_n - \xi_{n+1}| < K(\xi_n) H(\xi_{n+1})^{-m} = N^{-1},$$

$$(2.111) \Rightarrow |\xi_n - \beta_t| \geq c_1^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\beta_t)^{-m} = c^{-1} M^{-1}.$$

O halde, $\delta = H(\xi_n)^t$ olduğundan,

$$\begin{aligned} H(\beta_t)^m &\leq c_1^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\xi_n)^t (c_1 H(\xi_n)^t + H(\xi_n)^t)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m \\ &= c_1^{-1} (c_1 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\xi_{n+1})^m \end{aligned}$$

ise, yani

$$H(\beta_t)^m \leq c_1^{-1} (c_1 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\xi_{n+1})^m =: B > 0 \quad (2.112)$$

ise

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > (c_1 H(\xi_n)^t + H(\xi_n)^t)^{-1} H(\beta_t)^{-m} = (c_1 + 1)^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\beta_t)^{-m} \quad (2.113)$$

dir. Eğer β_t cebirsel sayısı,

$$(c_1 + 1)H(\xi_n)^t \leq H(\beta_t) \leq B^{1/m} \quad (2.114)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$0 < H(\beta_t) \leq B^{1/m} \Rightarrow 0 < H(\beta_t)^m \leq B \Rightarrow (2.112)$$

$$\Rightarrow |\xi_{n+1} - \beta_t| > (c_1 + 1)^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\beta_t)^{-m}$$

olur ve

$$(2.114) \Rightarrow 0 < (c_1 + 1)H(\xi_n)^t \leq H(\beta_t) \Rightarrow (c_1 + 1)^{-1} H(\xi_n)^{-t} \geq H(\beta_t)^{-1}$$

olduğundan,

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-1}$$

elde edilir, yani

$$(c_1 + 1)H(\xi_n)^t \leq H(\beta_t) \leq B^{1/m} \Rightarrow |\xi_{n+1} - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-1}. \quad (2.115)$$

Eğer $H(\beta_t) < (c_1 + 1)H(\xi_n)^t$ ise, bu koşulu sağlayan ve $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ ($\partial(\beta_t) = t$) olan tüm β_t reel cebirsel sayıları için (2.109) sağlanır. (Dolayısıyla (2.110) sağlanır.) Çünkü,

$$H(\beta_t) < (c_1 + 1)H(\xi_n)^t \Rightarrow H(\beta_t)^{m+t} < (c_1 + 1)^{m+t} (H(\xi_n)^t)^{m+t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(\beta_t)^{m+t} \log_H(H^2 H(\beta_t)) &< (c_1 + 1)^{m+t} H(\xi_n)^{tm+t^2} \log_H(H^2 H(\beta_t)) \\ &< (c_1 + 1)^{m+t} H(\xi_n)^{tm+t^2} \log_H(H^2 (c_1 + 1)H(\xi_n)^t) \\ &\leq c_4^{-1} (2^n c_4 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m \end{aligned} \quad (2.116)$$

dır. Bu son eşitsizlik yeteri kadar büyük $H(\xi_{n+1})$ değerleri için sağlanır. Çünkü,

$$\begin{aligned} (c_1 + 1)^{m+t} H(\xi_n)^{tm+t^2} \log_H(H^2(c_1 + 1)H(\xi_n)^t) &\leq c_4^{-1} (2^n c_4 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_{n+1})^m \\ \Leftrightarrow H(\xi_{n+1}) &\geq \sqrt[m]{(c_1 + 1)^{m+t} H(\xi_n)^{tm+t^2} \log_H(H^2(c_1 + 1)H(\xi_n)^t) c_4 (2^n c_4 + 1) K(\xi_n)} \\ &=: d = d(\xi_1, \xi_n, m, t) > 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

dir. d , sadece ξ_1 ve ξ_n e bağlı bir pozitif reel sabittir, yani ξ_{n+1} ve $H(\xi_{n+1})$ den bağımsızdır. (2.107) den elimizde sonsuz sayıda ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayısı var olduğundan, $H(\xi_{n+1}) \geq d$ koşulunu sağlayan ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayılarıyla çalışırsak (2.117) sağlanır. Dolayısıyla (2.116) sağlanır. Böylece $H(\beta_t) < (c_1 + 1)H(\xi_n)^t$ ise (2.109) elde edilir. O halde, (2.110) sağlanır, yani

$$H(\beta_t) < (c_1 + 1)H(\xi_n)^t \Rightarrow |\xi_{n+1} - \beta_t| > \left(c_4 + \frac{1}{2^n}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1}. \quad (2.118)$$

Eğer $H(\beta_t) > B^{1/m}$ ise, β_t ve ξ_{n+1} cebirsel sayıları için Lemma 2.2 den dolayı,

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| \geq c_1^{-1} H(\xi_{n+1})^{-t} H(\beta_t)^{-m} \quad (2.119)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H(\beta_t) > B^{1/m} &\Leftrightarrow H(\beta_t)^m > B = c_1^{-1} (c_1 + 1)^{-1} K(\xi_n)^{-1} H(\xi_n)^{-t} H(\xi_{n+1})^m \\ &\Leftrightarrow H(\beta_t) > (c_1 (c_1 + 1) K(\xi_n) H(\xi_n)^t)^{-1/m} H(\xi_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow H(\xi_{n+1}) < (c_1 (c_1 + 1) K(\xi_n) H(\xi_n)^t)^{1/m} H(\beta_t) \\ &\Leftrightarrow H(\xi_{n+1})^{-t} > (c_1 (c_1 + 1) K(\xi_n) H(\xi_n)^t)^{-t/m} H(\beta_t)^{-t}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Son eşitsizlik ve (2.119) u kullanırsak,

$$\begin{aligned} |\xi_{n+1} - \beta_t| &\geq c_1^{-1} H(\xi_{n+1})^{-t} H(\beta_t)^{-m} > c_1^{-1} (c_1 (c_1 + 1) K(\xi_n) H(\xi_n)^t)^{-t/m} H(\beta_t)^{-m-t} \\ &> H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \end{aligned} \quad (2.121)$$

elde edilir. (2.121) eşitsizliği $H(\xi_{n+1})$ in yeteri kadar büyük değerleri için geçerlidir. Çünkü,

$$c_1^{-1} (c_1 (c_1 + 1) K(\xi_n) H(\xi_n)^t)^{-t/m} H(\beta_t)^{-m-t} > H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.122)$$

$$\Leftrightarrow H(\beta_t) > \frac{H^{c_1 (c_1 + 1) K(\xi_n) H(\xi_n)^t)^{t/m}}{H^2} \quad (2.123)$$

dir ve (2.123) eşitsizliği $H(\xi_{n+1})$ in yeteri kadar büyük değerleri için geçerlidir :

(2.120) den, $H(\beta_t) > (c_1(c_1+1)K(\xi_n)H(\xi_n)^t)^{-1/m}H(\xi_{n+1})$ olduğunu ve $H(\xi_{n+1})$ in yeteri kadar büyük değerleri için,

$$(c_1(c_1+1)K(\xi_n)H(\xi_n)^t)^{-1/m}H(\xi_{n+1}) > \frac{H^{c_1(c_1+1)K(\xi_n)H(\xi_n)^t}{}^{t/m}}{H^2} \quad (2.124)$$

olduğunu biliyoruz. Çünkü,

$$(2.124) \Leftrightarrow H(\xi_{n+1}) > \frac{H^{c_1(c_1+1)K(\xi_n)H(\xi_n)^t}{}^{t/m}(c_1(c_1+1)K(\xi_n)H(\xi_n)^t)^{1/m}}{H^2} =: a$$

ve $a = a(\xi_n, \xi_1, m) > 0$ sadece ξ_1 ve ξ_n e bağlı bir pozitif reel sabittir. O halde ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayısı $H(\xi_{n+1}) > a$ olacak şekilde seçilirse (2.124) sağlanır. Dolayısıyla (2.122) ve (2.123) eşitsizlikleri sağlanır. O halde (2.121) sağlanır, yani

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-t}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1}$$

olur. Böylece,

$$H(\beta_t) > B^{1/m} \Rightarrow |\xi_{n+1} - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-t}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.125)$$

elde edilir. Ayrıca, (2.115) den, $(c_1+1)H(\xi_n)^t \leq H(\beta_t) \leq B^{1/m}$ ise

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-1} > (c_4 + \frac{1}{2^n})^{-1}H(\beta_t)^{-m-t}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.126)$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 < (\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1} < 1; \quad t \geq 1 \text{ olduğundan } H(\beta_t)^{-(t-1)} \leq 1 \\ c_4 + \frac{1}{2^n} > 1 \text{ olduğundan } (c_4 + \frac{1}{2^n})^{-1} < 1 \end{array} \right)$$

elde edilir. (2.118) den, $H(\beta_t) < (c_1+1)H(\xi_n)^t$ ise

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > (c_4 + \frac{1}{2^n})^{-1}H(\beta_t)^{-m-t}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.127)$$

ve (2.125) den $H(\beta_t) > B^{1/m}$ ise

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > H(\beta_t)^{-m-t}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1} > H(\beta_t)^{-m-t}(c_4 + \frac{1}{2^n})^{-1}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1} \quad (2.128)$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.126), (2.127) ve (2.128) den dolayı, $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için,

$$|\xi_{n+1} - \beta_t| > (c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n})^{-1}H(\beta_t)^{-m-t}(\log_H(H^2H(\beta_t)))^{-1}$$

olacak şekilde m . dereceden bir ξ_{n+1} reel cebirsel tam sayısı vardır, yani (2.106) gösterilmiş oldu. Böylece iddianın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi, $2 \leq i < j$ koşulunu sağlayan her i, j doğal sayısı için,

$$|\xi_i - \xi_j| \leq 2H(\xi_i)^{-i}$$

olduğunu gösterelim:

$$i < j; \quad i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ni j = i + k$$

$$\Rightarrow |\xi_i - \xi_j| = |\xi_i - \xi_{i+1} + \xi_{i+1} - \xi_{i+2} + \xi_{i+2} - \dots - \xi_{i+k-1} + \xi_{i+k-1} - \xi_{i+k}|$$

elde edilir. (2.105) den dolayı her $i \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} 0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| &< K(\xi_i)H(\xi_{i+1})^{-m} \quad \text{ve} \quad H(\xi_{i+1}) > K(\xi_i)H(\xi_i)^i \\ \Rightarrow H(\xi_{i+1})^{-m} &< K(\xi_i)^{-m}H(\xi_i)^{-im} \Rightarrow 0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| < K(\xi_i)K(\xi_i)^{-m}H(\xi_i)^{-im} \\ \Rightarrow 0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| &< K(\xi_i)^{-m+1}H(\xi_i)^{-im} \quad (K(\xi_i) > 1, m \geq 2 \Rightarrow K(\xi_i)^{m-1} > 1) \\ \Rightarrow 0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| &< H(\xi_i)^{-im} \leq H(\xi_i)^{-i} \quad (i, m \in \mathbb{N} \Rightarrow i \leq im) \end{aligned}$$

dir. O halde, her $i \in \mathbb{N}$ için

$$|\xi_i - \xi_{i+1}| < H(\xi_i)^{-i} \quad (2.129)$$

olur.

$$\begin{aligned} |\xi_i - \xi_j| &= |\xi_i - \xi_{i+1} + \xi_{i+1} - \xi_{i+2} + \xi_{i+2} - \dots - \xi_{i+k-1} + \xi_{i+k-1} - \xi_{i+k}| \\ &\leq |\xi_i - \xi_{i+1}| + |\xi_{i+1} - \xi_{i+2}| + \dots + |\xi_{i+k-1} - \xi_{i+k}| \\ &\leq H(\xi_i)^{-i} + H(\xi_{i+1})^{-(i+1)} + \dots + H(\xi_{i+k-1})^{-(i+k-1)} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} (2.105) \text{ den, } H(\xi_{i+1}) > K(\xi_i)H(\xi_i)^i > H(\xi_i)^i \geq H(\xi_i) \Rightarrow H(\xi_{i+1}) > H(\xi_i) \\ \Rightarrow 1 \leq H(\xi_1) < H(\xi_2) < \dots, \quad (K(\xi_i) > 1, H(\xi_i) \geq 1) \quad (i = 1, 2, \dots) \end{array} \right)$$

$$\leq H(\xi_i)^{-i} + \underbrace{H(\xi_i)^{-(i+1)} + \dots + H(\xi_i)^{-(i+k-1)}}_{(k-1) \text{ tane terim}}$$

$$\left(\begin{array}{l} k = 1 \text{ ise } |\xi_i - \xi_j| = |\xi_i - \xi_{i+1}| < H(\xi_i)^{-i} < 2H(\xi_i)^{-i} \text{ olup istenen elde edilir.} \\ \text{Bu yüzden } k \geq 2 \text{ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece } i + k - 1 \geq i + 1 \text{ dir.} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq H(\xi_i)^{-i} + H(\xi_i)^{-(i+1)} + \dots + H(\xi_i)^{-(i+1)} \\
&= H(\xi_i)^{-i} + (k-1)H(\xi_i)^{-(i+1)} = H(\xi_i)^{-i} + (k-1)H(\xi_i)^{-i}H(\xi_i)^{-1} \\
&\leq H(\xi_i)^{-i} + H(\xi_i)H(\xi_i)^{-i}H(\xi_i)^{-1} = 2H(\xi_i)^{-i}.
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \xi_i \ (i = 1, 2, \dots) \ m. \text{ dereceden bir cebirsel tam sayı olduğundan Önerme 2.1 den,} \\ 0 < |\xi_i - \xi_{i+1}| < K(\xi_i)H(\xi_{i+1})^{-m} \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \text{olacak şekilde bir } K(\xi_i) > 1 \text{ reel sabiti ile sonsuz sayıda birbirinden farklı} \\ m. \text{ dereceden } \xi_{i+1} \text{ reel cebirsel tam sayısı vardır. Dolayısıyla, } H(\xi_{i+1}) \ (i = 1, 2, \dots) \\ \text{keyfi reel sayıdan büyük alınabilir. O halde, } i = 2, 3, \dots \text{ için } H(\xi_i) \geq k-1 \text{ alabiliriz.} \end{array} \right)$$

O halde, $2 \leq i < j$ koşulunu sağlayan her i, j doğal sayısı için,

$$|\xi_i - \xi_j| \leq 2H(\xi_i)^{-i} \quad (2.130)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\{\xi_j\}_{j=2}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. Çünkü,

$$\begin{aligned}
H(\xi_2) < H(\xi_3) < \dots &\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} H(\xi_i) = \infty \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} H(\xi_i)^i = \infty \\
&\Rightarrow \{2H(\xi_i)^{-i}\}_{i=2}^{\infty} \text{ bir sıfır dizisidir.}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists i_0 = i_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ (i_0 \geq 2) \ni \forall i \geq i_0$ için $|2H(\xi_i)^{-i}| = 2H(\xi_i)^{-i} < \varepsilon$ elde edilir. Bunu (2.130) ile birleştirecek,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists i_0 = i_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall j > i \geq i_0 \text{ için } |\xi_i - \xi_j| < \varepsilon$$

olur, yani $\{\xi_j\}_{j=2}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. O halde $\mathbb{R}$ de yakınsaktır. $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j = \xi \in \mathbb{R}$ olsun. (2.130) dan, $2 \leq i < j$ koşulunu sağlayan her i, j doğal sayısı için,

$$\begin{aligned}
|\xi_i - \xi_j| &\leq 2H(\xi_i)^{-i} \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} |\xi_i - \xi_j| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} 2H(\xi_i)^{-i} \\
&\Rightarrow |\xi - \xi_i| \leq 2H(\xi_i)^{-i} \quad (i = 2, 3, \dots)
\end{aligned} \quad (2.131)$$

olur. $1 \leq H(\xi_1) < H(\xi_2) < H(\xi_3) < \dots$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\{\xi_i\}_{i=2}^{\infty}$ reel cebirsel tam sayı dizisi için $1 < H(\xi_2) < H(\xi_3) < \dots$ olduğundan, $\lim_{i \rightarrow \infty} H(\xi_i) = \infty$ dur ve $\{\xi_i\}_{i=2}^{\infty}$ dizisindeki tüm terimler birbirinden farklıdır, yani $i \neq j$ ise $\xi_i \neq \xi_j \ (i, j \in \{2, 3, \dots\})$ dır. Ayrıca $\{\xi_i\}_{i=2}^{\infty}$ dizisindeki tüm terimlerin ξ den farklı olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $\{\xi_i\}_{i=2}^{\infty}$ reel cebirsel tam sayı dizisi aşağıdakileri gerçekler:

a) $\xi_i \neq \xi \ (i = 2, 3, \dots),$

$$\mathbf{b)} \quad 1 < H(\xi_2) < H(\xi_3) < \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} H(\xi_i) = \infty,$$

$$\mathbf{c)} \quad \partial(\xi_i) = m \quad (i = 2, 3, \dots).$$

$1 < H(\xi_i) = H_i \quad (i = 2, 3, \dots)$ diyelim. **b)** den dolayı $\{H_i\}_{i=2}^{\infty}$ dizisi doğal sayıların kesin artan bir alt dizisidir. **a), b), c)** ve (2.131) den,

$$w_m^*(H_i, \xi) = \min_{\substack{\alpha, \text{ reel cebirsel; } \alpha \neq \xi \\ \partial(\alpha) \leq m, H(\alpha) \leq H_i}} |\xi - \alpha| \leq |\xi - \xi_i| \leq \frac{2}{H(\xi_i)^i} = \frac{2}{H_i^i} \Rightarrow 0 < w_m^*(H_i, \xi) \leq \frac{2}{H_i^i}$$

$$\Rightarrow 0 < H_i w_m^*(H_i, \xi) \leq \frac{2}{H_i^{i-1}} \Rightarrow \frac{1}{H_i w_m^*(H_i, \xi)} \geq \frac{H_i^{i-1}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\log \frac{1}{H_i w_m^*(H_i, \xi)}}{\log H_i} \geq (i-1) - \log_{H_i} 2 = (i-1) - \frac{\log 2}{\log H_i}$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{H_i w_m^*(H_i, \xi)}}{\log H_i} = \infty \Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{H w_m^*(H, \xi)}}{\log H} = \infty$$

$$\Rightarrow w_m^*(\xi) = \infty \Rightarrow \xi \in U^* \quad \text{ve} \quad \mu^*(\xi) \leq m \quad (*).$$

(2.104) den dolayı, her $i \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ ($\partial(\beta_t) = t$) olan her β_t reel cebirsel sayısı için,

$$|\xi_{i+1} - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^i}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

olduğunu biliyoruz. Başka bir deyişle $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için,

$$|\xi_i - \beta_t| > \left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

dır. Burada $c_2 = c_1 H(\xi_1)^m$, $c_1 = (m+1)^{2m+1} > 1$ ve $H > 1$ keyfî bir doğal sayıdır.

$$\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{i-2}}\right) = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2}^{i-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |\xi_i - \beta_t| \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\left(c_2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}\right)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \right]$$

$$\Rightarrow |\xi - \beta_t| \geq (c_2 + 1)^{-1} H(\beta_t)^{-m-t} (\log_H(H^2 H(\beta_t)))^{-1} \quad \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi \in \mathbb{R}\right)$$

elde edilir. Böylece $1 \leq \partial(\beta_t) \leq m-1$ olan her β_t reel cebirsel sayısı için,

$$|\xi - \beta_t| \geq \frac{f}{H(\beta_t)^{m+\partial(\beta_t)} \log_H(H^2 H(\beta_t))}$$

dir. Burada $0 < f := (c_2 + 1)^{-1} < 1$ sadece ξ_1 ve m e bağlı bir reel sabittir. $\xi \in U^*$ olduğundan ξ , bir transandant sayı ve β_t bir cebirsel sayı olduğundan $\xi \neq \beta_t$ dir. Daha açık yazarsak, $1 \leq \partial(\alpha) \leq m-1$ olan her α reel cebirsel sayısı için,

$$|\xi - \alpha| \geq \frac{f}{H(\alpha)^{m+\partial(\alpha)} \log_H(H^2 H(\alpha))} \quad (2.132)$$

dır. O halde,

$$w_t^*(H, \xi) = \min_{\substack{\alpha, \text{ reel cebirsel, } \alpha \neq \xi \\ \partial(\alpha) \leq t \leq m-1, H(\alpha) \leq H}} |\xi - \alpha| \quad (H > 1 \text{ herhangi bir doğal sayı}) \quad (2.133)$$

ifadesindeki minimuma katılan tüm α reel cebirsel sayıları için de (2.132) eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

$$H(\alpha) \leq H \Rightarrow H^2 H(\alpha) \leq H^3 \Rightarrow \log_H H^2 H(\alpha) \leq 3,$$

$$\partial(\alpha) \leq t \Rightarrow H(\alpha)^{m+\partial(\alpha)} \leq H(\alpha)^{m+t} \leq H^{m+t}$$

olduğundan (2.133) deki minimuma katılan tüm α reel cebirsel sayıları için,

$$|\xi - \alpha| \geq \frac{f}{H(\alpha)^{m+\partial(\alpha)} \log_H(H^2 H(\alpha))} \geq \frac{f}{3H^{m+t}} \quad \left(\begin{array}{l} \frac{f}{3} > 0, m+t > 0; \xi \text{ den, } \alpha \text{ dan} \\ \text{ve } H \text{ dan bağımsız reel sabitler} \end{array} \right)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} w_t^*(H, \xi) = \min |\xi - \alpha| &\geq \frac{f/3}{H^{m+t}} \Rightarrow w_t^*(H, \xi) H \geq \frac{f/3}{H^{m+t-1}} \\ \Rightarrow \frac{1}{w_t^*(H, \xi) H} &\leq \frac{H^{m+t-1}}{f/3} \Rightarrow \frac{\log \frac{1}{w_t^*(H, \xi) H}}{\log H} \leq m+t-1 - \frac{\log f/3}{\log H} \\ \Rightarrow \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_t^*(H, \xi) H}}{\log H} &\leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \left(m+t-1 - \frac{\log f/3}{\log H} \right) = m+t-1 \\ \Rightarrow w_t^*(\xi) &\leq m+t-1 \quad (**) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, (*) ve (**) dan $\xi \in U_m^*$ dir. $U_m^* = U_m$ olduğundan $\xi \in U_m$ dir, yani ξ bir U_m sayısıdır ve $w_t^*(\xi) \leq m+t-1$ ($t = 1, 2, \dots, m-1$) dir. Bu yöntemle bu şekilde sayılamaz sonsuz sayıda ξ U_m sayısı elde edebiliriz. Çünkü $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi$ ve her adımda ξ_i ($i = 2, 3, \dots$) yi sayılabilir sonsuz şekilde seçebiliriz. Böylece sayılamaz sonsuz sayıda U_m sayısı elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu çalışmada Kaynaklar kısmında belirtilen makale ve kitaplardan yararlanılmıştır. Teorem 2.11 ve Teorem 2.12 nin ispatında sürekli kesirlerden, Bölüm 2.2.3 te verilen notların ispatında Mahler sınıflandırmasından ve çalışmanın son bölümünde verilen teoremin (Teorem 2.16) ispatında Koksma sınıflandırmasından yararlanılmıştır. Tezin yazım aşamasında LaTeX programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

LeVeque [3], her m doğal sayısı için U_m sayıları kümesinin boş kümeden farklı olduğunu göstermiştir. (Teorem 2.15, sayfa 68.) Daha kesin olarak LeVeque, bazı Liouville sayılarının m . dereceden kökü olarak, ξ reel U_m sayısı örneklerini inşa etmiştir. Bu tez çalışmasında LeVeque [3] in makalesi incelenmiş, makaledeki teoremlerin kapalı olarak verilen ispatları, sürekli kesirler, simetrik fonksiyonlar, cebirsel ve transandant sayılar teorisi gibi alanlara ilişkin bilgiler kullanılarak açık hale getirilmiştir.

Bölüm 2.2.3 te Mahler ve Koksma Sınıflandırması hakkında gereken bilgiler verildikten sonra, Mahler Sınıflandırması, Liouville sayıları ve analiz bilgilerimiz ışığında aşağıdaki sonuçlar ispat edilmiştir. Bu sonuçlar literatürde bilinen, bilinmekte olan sonuçlardır, ancak ispatları kendi bakış açımızla ele aldık.

- 1) $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ (Not 2.9, sayfa 74),
- 2) $\xi \in \mathbb{C}$ olsun. $\xi \in U_m \Leftrightarrow \mu(\xi) = m$ (Not 2.10, sayfa 77),
- 3) $U_1 = \mathcal{L}$ (Not 2.11, sayfa 78).

Burada U ile U sayıları kümesi, $\mathcal{L}$ ile Liouville sayıları kümesi ve U_m ($m = 1, 2, \dots$) ile Tanım 2.7 (sayfa 31) de tanımını verilen U_m kümeleri ifade edilmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada U sayıları üzerine derinlemesine bir inceleme ve araştırma yapılmıştır. Tezin U sayıları konusunu öğrenmek ve U sayıları hakkında araştırma yapmak isteyen matematikçilerin başvuracağı temel bir kaynak olması hedeflenmiştir.

Çalışmada LeVeque [3] in makalesi incelenmiş, makaledeki teoremlerin kapalı olarak verilen ispatları açık hale getirilmiştir. Ayrıca U_m ($m = 1, 2, \dots$) sayıları kümesi tanıtılmış ve bu kümenin boş kümeden farklı olduğu Teorem 2.15 ile verilmiştir. Bunun yanında Bulgular kısmında belirtilen Not 2.9, Not 2.10 ve Not 2.11 gösterilmiştir. Bu sonuçlar literatürde bilinen, bilinmekte olan sonuçlardır, ancak ispatları kendi bakış açımızla ele aldık.

Bölüm 2.2.3 te Mahler ve Koksma sınıflandırmaları hakkında bilgi verilmiştir. Koksma sınıflandırmasına göre ξ kompleks sayısı bir U_m sayısı ise $1 \leq n < m$ olacak şekilde her n doğal sayısı için $w_n^*(\xi) < \infty$ dur. Güting [10], aşağıdaki özelliği sağlayan ξ U_m sayılarının varlığını göstermiştir :

$$w_n^*(\xi) \leq m \cdot n + m - 1, \quad 1 \leq n < m. \quad (5.1)$$

Bu çalışmada verilen Alniçık, Avcı, Bugeaud [7] nun ortak çalışması olan Teorem 2.16 ile, $w_n^*(\xi)$ değeri (5.1) de verilen $m \cdot n + m - 1$ den daha küçük olacak şekilde ξ reel U_m sayıları inşa edilmiştir. Teoremin ifadesi şöyledir :

$m \geq 2$ bir tam sayı olsun. Bu takdirde,

$$w_n^*(\xi) \leq m + n - 1, \quad 1 \leq n < m$$

olacak şekilde sayılamaz sonsuz sayıda ξ reel U_m sayısı vardır.

Bu teoremler birlikte $w_n^*(\xi)$ için (5.1) de verilenden daha küçük ve yeni bir üst sınır verilmiştir. Daha sonraki çalışmalarda, $1 \leq n < m$ olmak üzere, $w_n^*(\xi) = n$ olan ξ U_m

sayılarının var olduğunun gösterilmesi beklenir. Bu $m = 2$ için doğrudur, ancak $m \geq 3$ için bu durum hala açık bir problemdir.

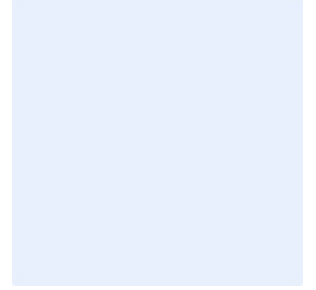


KAYNAKLAR

- [1]. LeVeque W.J., 1956, *Topics in Number Theory Volume I*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [2]. LeVeque W.J., 1956, *Topics in Number Theory Volume II*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [3]. LeVeque W.J., 1953, On Mahler's U-numbers, *J. London Math. Soc.*, 28, 220-229.
- [4]. Mahler K., 1932, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I, II, *J. Reine Angew. Math.* 166, 118-150.
- [5]. Koksma J. F., 1939, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, *Monatsh. Math. Phys.*, 48, 176-189.
- [6]. Wirsing E., 1961, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, *J. Reine Angew. Math.*, 206, 67-77.
- [7]. Alniaçık K., Avcı Y., Bugeaud Y., 2003, On U_m numbers with small transcendence measure, *Acta Math. Hungar.*, 99, (4), 271-277.
- [8]. Bugeaud Y., 2004, *Approximation by Algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, 160 (Cambridge University Press, Cambridge).
- [9]. Güting R., 1967, Polynomials with multiple zeros, *Mathematika*, 14, 181-196.
- [10]. Güting R., 1968, Zur Berechnung der Mahlerschen Funktionen w_n , *J. Reine Angew. Math.*, 232, 122-135.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Büşra CAN
Doğum Yeri	İSTANBUL
Doğum Tarihi	15.03.1992
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	0539 583 66 95
E-Posta Adresi	busracan0315@gmail.com
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2014

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	22.12.2017