

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZGÜN MANYETİK ALAN İÇİNDE DÖNEN BEŞ BOYUTLU
BİR KARA DELİĞİN ELEKTROMANYETİK ENERJİSİ**

ŞABAN YILMAZ

**DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI
FİZİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. REYHAN KAYA**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZGÜN MANYETİK ALAN İÇİNDE DÖNEN BEŞ BOYUTLU BİR
KARA DELİĞİN ELEKTROMANYETİK ENERJİSİ**

Şaban YILMAZ tarafından hazırlanan tez çalışması 22/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Reyhan KAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Reyhan KAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Oya OĞUZ
Haliç Üniversitesi

Prof. Dr. Yasemin YILDIZ YARAR
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Hakkı Tuncay ÖZER
İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Severek ve isteyerek yaptığım bir çalışma oldu. Bu tez çalışması süresince gerekli her türlü desteği veren danışman hocam sayın Doç. Dr. Reyhan KAYA'ya teşekkür ederim. Tez çalışmaları sırasında desteklerini her zaman yanımda hissettiğim, başta ailem olmak üzere babam ve anneme de teşekkür ederim.

Ders döneminde ve tez çalışmasına hazırlık yapmam için destek aldığım sayın Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU ve Prof. Dr. Kubilay KUTLU hocalarıma da teşekkür ederim.

Aralık, 2017

Şaban YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÖZET	x
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
BEŞ BOYUTLU METRİĞİN ELDE EDİLMESİ	4
2.1 Myers-Perry Metriği	4
2.2 Metrik Bileşenleri	5
2.3 Olay Ufku ve Killing Vektörleri	6
BÖLÜM 3	
CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ VE RICCI TANSÖRLERİ.....	8
3.1 Christoffel Sembolleri	8
3.2 Ricci Tansörleri	10
BÖLÜM 4	
ELEKTROMANYETİK ALAN TANSÖRLERİNİN HESAPLANMASI.....	12
4.1 5-Vektör Potansiyeli	12
4.2 Kovaryant EAT	13
4.3 Kontravaryant EAT	14
4.4 EAT'nün Kovaryant Türevi	14

BÖLÜM 5

ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRLERİ.....	15
5.1 Kovaryant EMT.....	15
5.2 Kontravaryant EMT.....	16
5.3 EMT'nün İzi.....	16
5.4 Kontravaryant EMT'nün Kovaryant Türevi	18

BÖLÜM 6

BEŞ BOYUTLU KARA DELİĞİN ENERJİSİ VE YÜKÜ	19
6.1 Beş Boyutlu Kara Delik Elektromanyetik Enerjisi	19
6.2 $b=a$ ve $H=B$ Durumu	23
6.3 $b=0$ ve $H=B$ Durumu	27

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR	33

EK-A

CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ.....	35
-----------------------------	----

EK-B

RICCI TANSÖRLERİ	39
------------------------	----

EK-C

ELEKTROMANYETİK ALAN TANSÖRÜ	41
C-1 Vektör Potansiyeli	41
C-2 Kovaryant EAT	41
C-3 Kontravaryant EAT	42
C-4 EAT'nün Kovaryant Türevi	42

EK-D

ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRLERİ.....	44
D-1 Kovaryant EMT'leri.....	44
D-2 Kontravaryant EMT'leri	53
D-3 Kontravaryant EMT'nün Kovaryant Türevi	54

ÖZGEÇMİŞ	55
----------------	----

SİMGE LİSTESİ

a	Açısal momentum parametresi
b	Açısal momentum parametresi
$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$	Christoffel sembolü
B	Dış manyetik alan
H	Dış manyetik alan
$\xi(\phi)$	Eksenel Killing vektörü
$F_{\mu\nu}$	Elektromanyetik alan tansörü
$T_{\mu\nu}$	Enerji-momentum tansörü
T	Enerji-momentum tansörünün izi
m	Kara deliğin kütlesi
Q	Kara deliğin yükü
∂_{μ}	Kısmi türev
$g_{\mu\nu}$	Metrik tansör
r_H	Olay ufku
$R_{\mu\nu}$	Ricci tansörü
A^{μ}	Vektör potansiyeli
$\xi(t)$	Zamansal Killing vektörü

KISALTMA LİSTESİ

EAT	Elektromanyetik Alan Tansörü
EE	Elektromanyetik Enerji
EMT	Enerji-Momentum Tansörü

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 6. 1	$b=a$ ve $H=B$ için $\zeta(Q/2Bj) - s(a^2/m)$ grafiği.....	25
Şekil 6. 2	$b=0$ ve $H=B$ için $\zeta(Q/Bj) - s(a^2/m)$ grafiği	28

DÜZGÜN MANYETİK ALAN İÇİNDE DÖNEN BEŞ BOYUTLU BİR KARA DELİĞİN ELEKTROMANYETİK ENERJİSİ

Şaban YILMAZ

Fizik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Reyhan KAYA

Zayıf bir yükle yüklenmiş ve iki açısal momentuma sahip, dönen beş boyutlu bir kara delik ele alındı. Bu kara deliğin elektromanyetik alanının enerji momentum tansörü hesaplandı. Daha sonra Komar kütle formülünü kullanarak düzgün manyetik alan içinde dönen beş boyutlu yüklü bir kara deliğin toplam elektromanyetik enerjisi araştırıldı. Sonuç olarak; 5 boyutlu ve zayıf bir yüke sahip kara deliğin elektromanyetik enerjisinin minimum değeri bulundu.

Anahtar Kelimeler: Komar Kütle Formülü, Enerji-Gerilim Tansörü, Beş Boyutlu Kara Delik, Myers-Perry Metriği.

ABSTRACT

ELECTROMAGNETIC ENERGY FOR A FIVE DIMENSIONAL ROTATING BLACK HOLE IN A UNIFORM MAGNETIC FIELD

Şaban YILMAZ

Department of Physics

Dr. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Reyhan KAYA

A weakly charged rotating black hole in five dimensions possesses two equal-magnitude angular momenta is considered. The stress-energy tensor of the electromagnetic field is calculated. Using the Komar mass formula the total electromagnetic energy for a charged five dimensional rotating black hole in a uniform magnetic field is discussed. It is found that the total electromagnetic energy takes the minimum when the five dimensional black hole possesses a non-zero net charge.

Keywords: Komar Mass Formula, Stress-Energy Tensor, Five Dimensional Black Hole, Myers-Perry Metric.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Dört boyutlu Kerr metriğinin çözümü üzerine birçok çalışma yapıldı [1], [2], [3], [4]. Son yıllarda ise Einstein denklemlerinin yüksek boyutlu çözümleri hem fizikte hem de matematikte güçlü bir ilgi görmüştür. Genel görelilikte, kara deliklerin tam çözümleri önemli olduğu kadar yüksek boyutlu karadeliklerin çözümleri de önemlidir. Yüksek boyutlu kara delikler, yeterince iyi bir yaklaşımla, Einstein alan denklemlerinin klasik çözümleriyle tanımlanabilirler. Yüksek boyutta Einstein-Maxwell denklemlerinin statik kara delik çözümleri ilk olarak Tangherlini tarafından hesaplanmıştır [5]. Yine yüksek boyutlu dönen kara delik için ilk genel çözümler ise Myers ve Perry tarafından yapıldı [6]. Myers-Perry çözümünün en önemli sonuçlarından bir tanesi de yüksek enerjili deneylerde oluşturulan laboratuvar kara deliklerini tanımlamasıdır [7]. Yakın zamanda ise lineer çarpıştırıcılar, mini-kara delik üretebilme imkanını ortaya çıkardı [8]. İlk tahminlerimizde bu mini-kara deliklerin de boşluk Einstein denklemlerinin klasik çözümleri ile tanımlanabileceği gösterilmiştir.

Boşluk uzay zamanın Killing vektörleri Maxwell test alanının vektör potansiyellerini verir [9]. Wald, düzgün manyetik alan içerisinde simetri eksenine yönelmiş, durağan ve eksenel simetrik bir kara deliğin çözümlerini elde etti. Düzgün manyetik alan içinde gömülü simetri eksenine üzerinde dönen kara deliğin net yükünü $Q = 2B_0J_H$ olarak hesapladı. Burada B_0 ; manyetik alanın büyüklüğü, J_H kara deliğin açısal momentumudur [10], [11].

Li düzgün manyetik alan içinde yüklü bir Kerr kara deliğinin toplam elektromanyetik enerjisini (EE) hesapladı. Eğer manyetik alan uzayda sonsuza giderse toplam EE nin

iraksayacağını gösterdi. Li, Komar kütle formülünü kullanarak toplam EE'yi hesapladı ve net bir yüke sahip kara delikler için toplam EE'nin minimum değerini gösterdi. Böylece Wald'un bulmuş olduğu toplam EE değerinin minimum değer olmadığını göstererek, minimum enerji durumunun kara deliğin hiç yüke sahip olmadığı durumdan bile yüksek olduğunu buldu [12], [13].

Aliev ve Frolov, Wald yaklaşımını bi-azimutal simetriye ve Myers-Perry uzay zamanı ile aynı yönlü açısıl dönme parametresine sahip düzgün bir manyetik alan içinde dönen beş boyutlu bir kara deliğe uyguladılar. Kara deliğin çok küçük bir yük ile yüklenmiş olduğunu varsayarak Myers-Perry metriğinin elektromanyetik alanının 5-vektör potansiyelini inşa ettiler [14].

1.2 Tezin Amacı

Yüksek boyutlardaki kara deliklerin incelenmesi birkaç nedenden ötürü bilim insanlarının dikkatini çekti. Her şeyden önce yüksek boyutlu kara delikler, insan doğasının özünde bulunan özelliklerle ilgilidir. Dört boyuttaki kara deliklerin, teklik ve termodinamik özellikleri, Hawking'in mini kara deliklerin buharlaşması gibi temel özellikleri iyi bilinirken yüksek boyutlara geçildiğinde neler olacağı konusu hep merak ediliyordu [15], [16], [17], [18], [19]. Yine yüksek boyutlu kara deliklere ilgi duyulmasının nedenlerinden biri de TeV ölçeğine göre yeni bir temel kuantum yerçekimi öngören zar-dünya yerçekimi teorileri olmuştur [20], [21], [22].

Bu çalışmanın amacı zayıf bir manyetik alan içinde dönen ve iki açısıl momentuma sahip beş boyutlu bir kara deliğin Killing vektörlerini kullanarak elektromanyetik alan tansörünü (EAT), EAT kullanarak da enerji-momentum tansörünü (EMT) ve daha sonra ise Komar kütle formülünü kullanarak düzgün manyetik alanda dönen beş boyutlu bir kara deliğin toplam enerjisini hesaplamaktır.

1.3 Hipotez

Başlangıçta genel görelilikte öngörülen yüklü ve dört boyutlu kara delik çözümleri daha sonraları yüksek boyutlu yerçekimi teorilerinin ayrılmaz bir parçası haline geldi.

4 boyutlu yüklü Kerr kara deliğinin minimum enerji değerine karşılık gelen toplam yükünü önce Wald sonra da Li hesapladı [8], [10]. Li, Wald'un bulmuş olduğu minimum enerji değerinden daha düşük bir enerji değeri elde etti. Bu çalışmada

Myers-Perry metriği için düzgün manyetik alan içinde dönen beş boyutlu bir kara deliğin, Christoffel sembollerini, Ricci tansörlerini, 5-vektör potansiyelini, EMA tansörlerini, enerji-momentum tansörlerini hesaplamak ve sahip olduğu minimum enerji değerini, Li ve Wald'un 4 boyutta kullandđđı yöntemlerle bulmak ve elde edilen iki sonucu karşılaştırmaktır.



BÖLÜM 2

BEŞ BOYUTLU METRİĞİN ELDE EDİLMESİ

2.1 Myers - Perry Metriği

Beş boyutlu dönen bir kara deliğin metriğin boşluk uzay zamanda genel asimptotik olarak çözümleri Myers ve Perry tarafından bulundu [6].

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a_i^2)(d\mu_i^2 + \mu_i^2 d\phi_i^2) + 2\mu_i^2 a_i d\phi_i dr + (dt + dr + \mu_i^2 a_i d\phi_i)^2 \mu r^2 / \Pi F \quad (2.1)$$

Burada

$$F = 1 - \mu_i^2 a_i / (r^2 + a_i^2) = 1 - \mu_1^2 a_1 / (r^2 + a_1^2) - \mu_2^2 a_2 / (r^2 + a_2^2)$$

$$\Pi = \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (a_i^2 + r^2)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

$N=4$ ve çift sayıdır.

$$\mu_i^2 = 1$$

$$\mu_1 = \sin\theta$$

$$\mu_2 = \cos\theta \quad (2.2)$$

Açısal momentum parametreleri:

$$a_1 = a,$$

$$a_2 = b. \quad (2.3)$$

$0 \rightarrow 2\pi$ aralığında iki farklı dönme açısı

$$\phi_1 = \phi,$$

$$\phi_2 = \psi \quad (2.4)$$

olarak seçilmiştir.

(2.2) denklemlerinden aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$d\mu_1 = \cos\theta d\theta$$

$$\mu_2 = -\sin\theta d\theta$$

$$F = 1 - a^2 \sin^2\theta / (a^2 + r^2) - b^2 \cos^2\theta / (b^2 + r^2)$$

$$\Pi = (a^2 + r^2)(b^2 + r^2). \quad (2.5)$$

Burada μ kara deliğin fiziksel kütlesi m ile ilgili bir parametredir ($\mu = m$). Yukarıdaki ifadeler (2.1) denkleminde yerine konup gerekli düzenlemeler yaptığımızda 5 boyutta Boyer-Lindquist $(t, r, \theta, \phi, \psi)$ koordinatlarında aşağıdaki metrik denklemini elde edilir [6], [14].

$$ds^2 = -dt^2 + \Sigma d\theta^2 + (a^2 + r^2) \sin^2\theta d\phi^2 + (b^2 + r^2) \cos^2\theta d\psi^2 + m/\Sigma (dt - a \sin^2\theta d\phi - b \cos^2\theta d\psi)^2 + r^2 \Sigma dr^2 / \Delta \quad (2.6)$$

Burada,

$$\Delta = (a^2 + r^2)(b^2 + r^2) - mr^2,$$

$$\Sigma = r^2 + b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta. \quad (2.7)$$

2.2 Metrik Bileşenleri

Metrik determinanı aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\sqrt{-g} = r \Sigma \sin\theta \cos\theta. \quad (2.8)$$

Kovaryant metriğin sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıda verilmiştir

$$g_{tt} = -1 + m/\Sigma$$

$$g_{t\phi} = -m a \sin^2\theta / \Sigma$$

$$g_{t\psi} = -m b \cos^2\theta / \Sigma$$

$$g_{rr} = \Sigma r^2 / \Delta$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma$$

$$g_{\phi t} = -m a \sin^2\theta / \Sigma$$

$$g_{\phi\phi} = (a^2 + r^2)^2 \sin^2\theta + (m a^2 \sin^4\theta) / \Sigma$$

$$\begin{aligned}
g_{\phi\psi} &= mab\cos^2\theta\sin^2\theta/\Sigma \\
g_{\psi t} &= -mb\cos^2\theta/\Sigma \\
g_{\psi\phi} &= mab\cos^2\theta\sin^2\theta/\Sigma \\
g_{\psi\psi} &= \cos^2\theta(b^2+r^2)^2+(\cos^4\theta mb^2)/\Sigma .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Kontravaryant metrik bileşenleri

$$\begin{aligned}
g^{tt} &= -1-m/\Sigma - m^2r^2/\Sigma\Delta \\
g^{t\phi} &= -ma(r^2+b^2)/\Sigma\Delta \\
g^{t\psi} &= -mb(r^2+a^2)/\Sigma\Delta \\
g^{rr} &= \Delta/\Sigma r^2 \\
g^{\theta\theta} &= 1/\Sigma \\
g^{\phi t} &= -ma(r^2+b^2)/\Sigma\Delta \\
g^{\phi\phi} &= 1/\Sigma(1/\sin^2\theta+((r^2+b^2)(b^2-a^2)-mb^2)/\Delta) \\
g^{\phi\psi} &= -mab/\Sigma\Delta \\
g^{\psi t} &= -mb(r^2+a^2)/\Sigma\Delta \\
g^{\psi\phi} &= -mab/\Sigma\Delta \\
g^{\psi\psi} &= 1/\Sigma(1/\cos^2\theta+((r^2+a^2)(a^2-b^2)-ma^2)/\Delta)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak bulunmuştur.

2.3 Olay Ufku ve Killing Vektörleri

Kara delik olay ufku, $g^{rr} = 0$ denklemi ile belirlenen boş bir yüzeydir [14].

$$\Delta = (a^2 + r^2)(b^2 + r^2) - mr^2 = 0 \tag{2.11}$$

Bu denklemin en büyük kökü, kara deliğin dış olay ufkunun yarıçapını verir.

$$r_h = 1/2(m - a^2 - b^2 + \sqrt{(m - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}) \tag{2.12}$$

$$a^2 + b^2 + 2|ab| \leq m$$

Bu yüzden $a^2 + b^2 + 2|ab| \leq m$ koşulu veya $r_h = |ab|$ eşitliği beş boyutlu kara deliğin olay ufkunu belirler.

Öte yandan, iki-kutuplu koordinatlarda $a = b = 0$ için Tangherlini statik çözümünü elde edilir [5]. Genel olarak, metriğin (2.6) iki olan ortogonal 2-dönme düzlemleri φ ve ψ azimuthal açıları tarafından belirlenir. Bu açıların her ikisi de 0 ile 2π arasında değişirken, θ iki dikey 2-düzlem arasındaki açı 0'dan $\pi/2$ 'ye değişir. Sonuç olarak, metrik aşağıdaki belirgin değişmezlik özelliklerini ortaya çıkarmaktadır; Zaman koordinatının eşzamanlı olarak ters çevrilmesi $t \rightarrow -t$ ve açıları $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\psi \rightarrow -\psi$ ve dönüşüm altında

$$a \leftrightarrow b$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi$$

$$\theta \leftrightarrow \pi/2 - \theta \tag{2.13}$$

elde edilir.

Beş boyutlu Myers-Perry metriğinin Killing vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\xi_t = \partial/\partial t$$

$$\xi_\varphi = \partial/\partial \varphi$$

$$\xi_\psi = \partial/\partial \psi. \tag{2.14}$$

CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ VE RICCI TANSÖRLERİ

3.1 Christoffel Sembolleri

Γ , bağıntı veya Christoffel sembolü diye adlandırılır. Christoffel sembolleri bir tansör değildir. Ancak metrik tansörden inşa edilir. Metrik tansör koordinat yüzeyi boyunca sabit olmadığı için bir yerden başka bir yere giderken (kovaryant türev) aradaki geometriden gelen katkı Christoffel sembollerini verir. Kartezyen koordinatlarda metrik tansör sabit olduğu için kovaryant türevi sıfırdır. Bu yüzden Christoffel sembolleri de sıfırdır [23]. Christoffel sembolleri genel halde EK-A da verilmiştir [24]. Nümerik hesaplamalar yapılırken Mathematika programı kullanılmıştır [25]. $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ birinci tip Christoffel sembolü olup son iki indis kendi arasında simetriktir. $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ ise ikinci tip Christoffel sembolü ve yine son iki indis kendi arasında simetriktir. Beş boyutlu Myers-Perry metriği için Christoffel sembolleri

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\beta}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})/2 \quad (3.1)$$

$$\Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = mr(a^2 + r^2)(b^2 + r^2)/\Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma^t_{\theta t} = \Gamma^t_{t\theta} = -(a^2 - b^2)m\sin 2\theta/2\Sigma^2$$

$$\Gamma^t_{\phi r} = \Gamma^t_{r\phi} = -amr(b^2 + r^2)(3a^2 + b^2 + 4r^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\theta)\sin^2\theta/2\Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma^t_{\psi r} = \Gamma^t_{r\psi} = bmr(a^2 + r^2)\cos^2\theta(-a^2 - 3b^2 - 4r^2 + (-a^2 + b^2)\cos\theta)/2\Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma^t_{\psi\theta} = \Gamma^t_{\theta\psi} = -b(b^2 - a^2)m\cos^3\theta\sin\theta/\Sigma^2$$

$$\Gamma^t_{\phi\theta} = \Gamma^t_{\theta\phi} = a(a^2 - b^2)m\sin^3\theta\cos\theta/\Sigma^2$$

$$\Gamma^r_{tt} = m\Delta/r\Sigma^3$$

$$\Gamma^r_{\phi t} = \Gamma^r_{t\phi} = -am\Delta \sin^2\theta / r\Sigma^3$$

$$\Gamma^r_{\psi t} = \Gamma^r_{t\psi} = -bm\Delta \cos^2\theta / r\Sigma^3$$

$$\Gamma^r_{rr} = (2a^2b^2r^2 + a^2r^4 + b^2r^4 - mr^4 + a^2(a^2b^2 - r^4) \cos^2\theta + b^2(a^2b^2 - r^4) \sin^2\theta) / r\Delta\Sigma$$

$$\Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^r_{r\theta} = (-a^2 + b^2) \cos\theta \sin\theta / \Sigma$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\Delta / r\Sigma$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -(2r \sin^2\theta - (2a^2mr \sin^2\theta) / \Sigma^2) \Delta / (2r^2\Sigma)$$

$$\Gamma^r_{\psi\phi} = \Gamma^r_{\phi\psi} = abm\Delta \cos^2\theta \sin^2\theta / r\Sigma^3$$

$$\Gamma^r_{\psi\psi} = -(2r \cos^2\theta - (2b^2mr \cos^2\theta) / \Sigma^2) \Delta / (2r^2\Sigma)$$

$$\Gamma^\theta_{\psi t} = \Gamma^\theta_{t\psi} = -bm(b^2 + r^2) \cos\theta \sin\theta / \Sigma^3$$

$$\Gamma^\theta_{\phi t} = \Gamma^\theta_{t\phi} = am(a^2 + r^2) \cos\theta \sin\theta / \Sigma^3$$

$$\Gamma^\theta_{tt} = -(a^2 - b^2) m \cos\theta \sin\theta / \Sigma^3$$

$$\Gamma^\theta_{rr} = (a^2 - b^2) r^2 \cos\theta \sin\theta / \Delta\Sigma$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = r / \Sigma$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = -(a^2 - b^2) \cos\theta \sin\theta / \Sigma$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -((a^2 + r^2 + (a^2(a^2 - b^2) m \sin^4\theta) / \Sigma^2 + (2a^2m \sin^2\theta) / \Sigma) \cos\theta \sin\theta / \Sigma$$

$$\Gamma^\theta_{\psi\phi} = \Gamma^\theta_{\phi\psi} = -(r^2 \cos^2\theta + a^2 \cos^4\theta - \sin^2\theta(r^2 + b^2 \sin^2\theta)) abm \cos\theta \sin\theta / \Sigma^3$$

$$\Gamma^\theta_{\psi\psi} = ((a^2b^2m + b^4m + a^4(b^2 + r^2)) \cos^4\theta - (b^2m + a^2(b^2 + r^2)) \cos^2\theta (-b^2 - 2r^2 + b^2 \cos 2\theta) + (b^2 + r^2)(r^2 + b^2 \sin^2\theta)^2) \cos\theta \sin\theta / \Sigma^3$$

$$\Gamma\phi_{tt} = \Gamma\phi_{tt} = amr(b^2 + r^2) / \Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma\phi_{\theta t} = \Gamma\phi_{t\theta} = -am \cot\theta / \Sigma^2$$

$$\Gamma\phi_{\phi r} = \Gamma\phi_{r\phi} = (-(2a^2m^2r(b^2 + r^2) \sin^2\theta) / \Sigma^2 + (2a^2b^2m^2r \cos^2\theta \sin^2\theta) / \Sigma^2 + ((b^2m + a^2(b^2 + r^2)) \cot\theta^2 + (b^2 + r^2)(b^2 + (-m + r^2) \csc^2\theta)) (2r \sin^2\theta - (2a^2mr \sin^4\theta) / \Sigma^2)) / 2\Delta\Sigma$$

$$\Gamma\phi_{r\psi} = \Gamma\phi_{\psi r} = -abmrcos^2\theta (a^2 + 3b^2 + 4r^2 + (a^2 - b^2) \cos 2\theta) / 2\Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma\phi_{\theta\phi} = \Gamma\phi_{\phi\theta} = ((3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4 + 4a^2m + 8a^2r^2 + 8b^2r^2 + 8r^4 + 4(a^4 - a^2(m - 2r^2) - b^2(b^2 + 2r^2)) \cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2 \cos 4\theta) \cot\theta / 8\Sigma^2$$

$$\Gamma\phi_{\theta\psi} = \Gamma\phi_{\psi\theta} = abm \cos^2\theta \cot\theta / \Sigma^2$$

$$\Gamma_{rt}^{\Psi} = \Gamma_{tr}^{\Psi} = bmr(a^2 + r^2)/\Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma_{\theta t}^{\Psi} = \Gamma_{t\theta}^{\Psi} = bmr \tan\theta/\Sigma^2$$

$$\Gamma_{\phi r}^{\Psi} = \Gamma_{r\phi}^{\Psi} = abmr(3a^2 + b^2 + 4r^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\theta)\sin^2\theta/2\Delta\Sigma^2$$

$$\Gamma_{r\psi}^{\Psi} = \Gamma_{\psi r}^{\Psi} = -(4b^2m^2r(a^2 + r^2)\cos^2\theta)/\Sigma^2 + (a^2b^2m^2r\sin^2 2\theta)/\Sigma^2 + ((2r\cos^2\theta - (2b^2mrcos^2\theta)/\Sigma^2) \\ (2(a^2 + r^2)(a^2 + (-m + r^2)\sec^2\theta) + 2(a^2(b^2 + m) + b^2r^2)\tan^2\theta))/4\Delta\Sigma$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\Psi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\Psi} = -abm \tan\theta \sin^2\theta/\Sigma^2$$

$$\Gamma_{\theta\psi}^{\Psi} = \Gamma_{\psi\theta}^{\Psi} = -(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4 + 4b^2m + 8a^2r^2 + 8b^2r^2 + 8r^4 + 4(a^4 + 2a^2r^2 + b^2(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + \\ (a^2 - b^2)^2\cos 4\theta)\tan\theta/8\Sigma^2 \quad (3.2)$$

olarak bulunur. Hesaplamalarda Mathematica programı kullanılmıştır [25].

3.2 Ricci Tansörleri

Christoffel sembollerinin türevinden gelen katkı, Riemann eğrilik ($R^{\mu}_{\nu\alpha\sigma}$) tansörünü verir. Christoffel sembolleri, vektörlerin bir noktadan diğer noktaya nasıl taşındığı hakkında bilgi verirken, taşınan vektörlerin son durumunu ise Riemann eğrilik tansörü ile bulunabilir. Riemann eğrilik tansörü anti-simetrik ve 4 bileşenli bir tansördür. Riemann tansörünün daha sadeleştirilmiş haline Ricci tansörleri denilir. Ricci tansörleri ($R_{\nu\mu} = R_{\mu\nu}$) ise 2 bileşenli olup simetrik bir tansördür [23]. Ricci tansörlerinin bileşenlerinin elde edilişi Ek-B'de verilmiştir. μ ve σ , kordinat düzlemi etrafında vektörün dönmesini gösteriyor. ν ve α ise koordinat düzlemi etrafında hareketinin yönünü veriyor [23]. Ricci skalerine ise “eğriliğin ölçüsü” veya “toplam eğrilik” denir ve ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Burada $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\sigma}R_{\mu\alpha\nu\sigma} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}. \quad (3.4)$$

Hesaplamalar sonucunda aşağıdaki Ricci tansörlerinin değerlerinin sıfır olduğu bulundu.

$$R_{tt} = R_{t\phi} = R_{t\psi} = R_{rr} = R_{r\theta} = R_{\theta\theta} = R_{\phi\psi} = R_{\phi\phi} = R_{\psi\psi} = 0. \quad (3.5)$$

Bu sonuca göre beş boyutlu Myers-Perry uzay-zamanının Einstein boşluk uzay-zaman denklemi ile uyumlu olduğunu gösterir:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$



**ELEKTROMANYETİK ALAN TANSÖRLERİNİN
HESAPLANMASI****4.1 5 - Vektör Potansiyeli**

Vektörler sadece uzay-zamana bağlı olmayıp yöne de bağlı olduğu için kovaryant türevleri sıfır olmaz. Elektromanyetik alanın enerjisi ise vektör potansiyelinin kovaryant türevi ile ifade edilir. Minkowski uzayında vektörlerin kovaryant türevi sıfırdır. 5-vektör potansiyelinin 16 tane türevi olup 4 tane bileşeni mevcuttur. Kontravaryant 5-vektör potansiyelini aşağıdaki gibi gösterilir [6]. EK-C-1'de 5 boyutlu vektör potansiyeli ifadesi verilmiştir.

$$A^\mu = \alpha \xi^\mu_{(t)} + \beta \xi^\mu_{(\phi)} + \gamma \xi^\mu_{(\psi)}$$

$$\alpha = -Q/2m + aB/2 + bH/2$$

$$A^\mu = \alpha \xi^\mu_{(t)} + \beta (\xi^\mu_{(\phi)} + a \xi^\mu_{(t)})/2 + \gamma (\xi^\mu_{(\psi)} + b \xi^\mu_{(t)}) \quad (4.1)$$

Burada α , β ve γ keyfi parametrelerdir. Genel anlamda vektör potansiyeli bir test alanı gibi ele alınarak kara deliğin çok küçük elektrik yükü ile yüklenmesi sağlanır.

Hesaplamalar yapıldığında

$$A^t = -Q/2m + aB/2 + bH/2$$

$$A^\phi = B/2$$

$$A^\psi = H/2$$

$$A_t = -Q(m/\Sigma - 1)/2m$$

$$A_\phi = aQ \sin^2 \theta / 2\Sigma$$

$$A_\psi = bQ \cos^2 \theta / 2\Sigma$$

ifadeleri bulunur. (4.2)

4.2 Kovaryant EAT

$F_{\mu\nu}$ anti-simetrik bir tansör olup 6 tane bileşeni vardır. Bu bileşenlerden 3 tanesi elektrik alandan, 3 tanesi de manyetik alandan gelir. Elektrik alan, vektör potansiyelinin sadece zamana bağlı türevinden, manyetik alan ise sadece konuma bağlı türevinden oluşur. $F_{\mu\nu}$ vektör potansiyelinin kendisine değil türevine bağlıdır.

Kovaryant elektromanyetik alan tansör ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (4.3)$$

Yukarıda verilen eşitlikler sadeleştirilirse EAT'nin en son hali aşağıdaki gibi yazılır,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.4)$$

EAT'ün bileşenlerinin elde edilişi ise Ek-C-2'de ayrıntılı olarak verilmiştir. Elde edilen sıfır olan bileşenler ve sıfırdan farklı olan bileşenler aşağıda verilmiştir.

$$F_{tt} = F_{t\phi} = F_{t\psi} = F_{rr} = F_{r\theta} = F_{\theta\theta} = F_{\phi\psi} = F_{\phi\phi} = F_{\psi\psi} = 0, \quad (4.5)$$

$$F_{tr} = -F_{rt} = r(-aBm - bHm + Q + bHm \cos^2 \theta + aBm \sin^2 \theta) / \Sigma^2$$

$$F_{r\phi} = -F_{\phi r} = r \sin^2 \theta (a^2 Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4 B \cos^4 \theta - B(a^2 m - 2b^2 r^2) \sin^2 \theta + b^4 B \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2 B \sin^2 \theta)) / \Sigma^2$$

$$F_{r\psi} = -F_{\psi r} = r \cos^2 \theta (abBm + b^2 Hm - bQ + Hr^4 + a^4 H \cos^4 \theta + b(-aBm + 2bHr^2) \sin^2 \theta + b^4 H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2 m + 2a^2 r^2 + 2a^2 b^2 \sin^2 \theta)) / \Sigma^2$$

$$F_{t\theta} = -F_{\theta t} = (a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + Hmr^2)) \sin 2\theta / 2\Sigma^2$$

$$F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = (r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2 B(-m + r^2)) + a^3(a^3 B + bHm + aBr^2) \cos^4 \theta + (-a^4 Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2 B(b^2 + m)r^2 + 2b^2 Br^4) \sin^2 \theta + (a^4 Bmab^3 Hm + a^2 b^2 B(b^2 + m) + b^4 Br^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3 B(m + 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2 r^2) \sin^2 \theta) \cos \theta \sin \theta) / \Sigma^2$$

$$F_{\theta\psi} = -F_{\psi\theta} = -((-a^3 bBm + a^2 b^2 Hm + b^4 Hm + a^4 H(b^2 + r^2)) \cos^4 \theta + (r^2 + b^2 \sin^2 \theta)(-abBm - b^2 Hm + bQ + b^2 Hr^2 + Hr^4 + b(b^3 H + aBm + bHr^2) \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (-abBm(b^2 + r^2) + 2a^2 Hr^2(b^2 + r^2) + b^2(-b^2 Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2 H(b^2 m + a^2(b^2 + r^2)) \sin^2 \theta)) \cos \theta \sin \theta / \Sigma^2. \quad (4.6)$$

4.3 Kontravaryant EAT

Kontravaryant EAT tansörü aşağıda verilmiştir.

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (4.7)$$

EAT'ün bileşenleri Ek-C-3'de ayrıntılı olarak verildi. Elde edilen sıfır olan bileşenler ve sıfırdan farklı olan bileşenler aşağıda verilmiştir,

$$F^{tt} = F^{\phi t} = F^{t\psi} = F^{rr} = F^{r\theta} = F^{\theta\theta} = F^{\phi\phi} = F^{\psi\psi} = 0 \quad (4.8)$$

$$F^{rt} = -(3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 + r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)m(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 + r^2))\cos 4\theta)/8r\Sigma^3$$

$$F^{\phi r} = (3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(-abHm + a^2B(b^2 + r^2) - b^2B(b^2 - m + r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)(-abHm + a^2B(b^2 + r^2) - b^2B(b^2 - m + r^2))\cos 4\theta)/8r\Sigma^3$$

$$F^{r\psi} = (3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2))\cos 4\theta)/8r\Sigma^3$$

$$F^{\theta t} = -(a^2 - b^2)(aBm + bHm - 2Q + (aB - bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta/4\Sigma^3$$

$$F^{\phi\theta} = (3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B + abHm - a^2B(m - 2r^2) - b^2B(b^2 + 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2B\cos 4\theta)\cot\theta/8\Sigma^3$$

$$F^{\theta\psi} = -(3a^4H + 2a^2b^2H + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + b^2H(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2H\cos 4\theta)\tan\theta/8\Sigma^3. \quad (4.9)$$

4.4 EAT'nün Kovaryant Türevi

EAT'nin kovaryant türevi en genel hali ile aşağıdaki gibi yazıp hesaplama yapıldığında sonucun sıfır olduğu

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (4.10)$$

bulunur. Ayrıntılı hesaplamalar Ek-C-3'de gösterilmiştir. Sonucun sıfır çıkması aynı zamanda Einstein boşluk uzay-zaman denklemleri ile de örtüşmektedir.

BÖLÜM 5

ENERJİ - MOMENTUM TANSÖRLERİ

5.1 Kovaryant EMT

EMT bir alan değil sistemin miktarıdır. Enerji, zaman bileşeninden momentum ise konum bileşeninden kaynaklanır. Enerjinin akışına momentum, momentumun akışına gerilim denir. O yüzden EMT'ye enerji-gerilim tansörü de denir. Enerji ve momentum ayrı ayrı gravitasyonel alan kaynağı olabilir.

Elektromanyetik alanın enerji-momentum tansörü

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad (5.1)$$

şeklinde alınarak

$T_{\mu\nu}$ bileşenleri Ek-D-1'de verildi.

Burada $I = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ olarak alındı.

$$I = g_{\mu\nu} (F_{tr} F^{tr} + F_{t\theta} F^{t\theta} + F_{\phi r} F^{\phi r} + F_{\psi r} F^{\psi r} + F_{\phi\theta} F^{\phi\theta} + F_{\theta\psi} F^{\theta\psi}) / 2 \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} I = & 1/2 (- (-3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + \\ & 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 + \\ & r^2)) \cos 2\theta + (a^2 - b^2)m(a^2Bh + bHr^2 - aB(b^2 + r^2)) \cos 4\theta) (-aBm - bHm + Q + bHm \cos \theta^2 + \\ & aBm \sin \theta^2) / 8\Sigma^5 + \cos \theta^2 (3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + \\ & 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 \\ & - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2)) \cos 2\theta + (a^2 - \\ & b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2)) \cos 4\theta) (abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H \cos \theta^4 \\ & + b(-aBm + 2bHr^2) \sin \theta^2 + b^4H \sin \theta^4 + H \cos \theta^2 (-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2 \sin \theta^2)) / 8\Sigma^5 + ((3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + \\
& 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2 + b^2 + \\
& 2r^2)(-abHm + a^2B(b^2 + r^2) - b^2B(b^2 - m + r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)(-abHm + a^2B(b^2 + r^2) - \\
& b^2B(b^2 - m + r^2))\cos 4\theta \sin^2\theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta \\
& + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B \\
& - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B + abHm - a^2B(m - 2r^2) - \\
& b^2B(b^2 + 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m + r^2)) + a^3(a^3B \\
& + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + m)r^2 + \\
& 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm + Q) + \\
& bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m - 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2)\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + ((3a^4H + 2a^2b^2H + \\
& 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + \\
& b^2H(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + \\
& a^4H(b^2 + r^2))\cos^4\theta + (r^2 + b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + \\
& bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2 + r^2) + 2a^2Hr^2(b^2 + r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + \\
& 2b^2H(b^2m + a^2(b^2 + r^2))\sin^2\theta))/8\Sigma^5 - ((a^2 - b^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + \\
& Hmr^2))(aBm + bHm - 2Q + (aB - bH)m\cos 2\theta)\sin^2 2\theta)/8\Sigma^5.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2 Kontravaryant EMT

Kontravaryant EMT'ün ifadesi

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \tag{5.4}$$

şeklindedir. Kontravaryant EMT,

$$T^{\alpha\sigma} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\sigma}T_{\mu\nu} \tag{5.5}$$

kovaryant EMT kullanılarak (5.1)'de verilen ifade ile bulunur. Kontravaryant EMT'nin bileşenleri Ek-D-2'de verilmiştir.

5.3 EMT'nün İzi

EMT'nün izi aşağıda verilmiştir,

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \tag{5.6}$$

Bu ifade kullanılarak,

$$T = g_{tt}T^{tt} + 2g_{\phi t}T^{\phi t} + 2g_{\psi t}T^{\psi t} + g_{rr}T^{rr} + g_{\theta\theta}T^{\theta\theta} + g_{\phi\phi}T^{\phi\phi} + 2g_{\phi\psi}T^{\phi\psi} + g_{\psi\psi}T^{\psi\psi} \tag{5.7}$$

aşağıdaki açık ifadeler bulunur;

$$\begin{aligned}
T = & -(1/(256\Sigma^4))(35a^8B^2 + 20a^6b^2B^2 + 18a^4b^4B^2 + 20a^2b^6B^2 + 35b^8B^2 + 35a^8H^2 + 20a^6b^2H^2 \\
& + 18a^4b^4H^2 + 20a^2b^6H^2 + 35b^8H^2 - 75a^6B^2m + 3a^4b^2B^2m + 11a^2b^4B^2m - 35b^6B^2m + \\
& 44a^5bBHm - 24a^3b^3BHm + 44ab^5BHm - 35a^6H^2m + 11a^4b^2H^2m + 3a^2b^4H^2m - 75b^6H^2m \\
& + 40a^4B^2m^2 + 8a^2b^2B^2m^2 + 16a^3bBHm^2 + 16ab^3BHm^2 + 8a^2b^2H^2m^2 + 40b^4H^2m^2 + \\
& 96a^5BQ - 96ab^4BQ - 96a^4bHQ + 96b^5HQ - 96a^3BmQ - 32ab^2BmQ - 32a^2bHmQ - \\
& 96b^3HmQ + 64a^2Q^2 + 64b^2Q^2 + 160a^6B^2r^2 + 96a^4b^2B^2r^2 + 96a^2b^4B^2r^2 + 160b^6B^2r^2 + \\
& 160a^6H^2r^2 + 96a^4b^2H^2r^2 + 96a^2b^4H^2r^2 + 160b^6H^2r^2 - 152a^4B^2mr^2 + 16a^2b^2B^2mr^2 - \\
& 120b^4B^2mr^2 + 64a^3bBHmr^2 + 64ab^3BHmr^2 - 120a^4H^2mr^2 + 16a^2b^2H^2mr^2 - 152b^4H^2mr^2 - \\
& 48a^2B^2m^2r^2 - 32abBHm^2r^2 - 48b^2H^2m^2r^2 + 192a^3BQr^2 - 192ab^2BQr^2 - 192a^2bHQR^2 + \\
& 192b^3HQR^2 + 128aBmQr^2 + 128bHmQr^2 - 128Q^2r^2 + 288a^4B^2r^4 + 192a^2b^2B^2r^4 + \\
& 288b^4B^2r^4 + 288a^4H^2r^4 + 192a^2b^2H^2r^4 + 288b^4H^2r^4 - 80a^2B^2mr^4 - 144b^2B^2mr^4 + \\
& 64abBHmr^4 - 144a^2H^2mr^4 - 80b^2H^2mr^4 + 256a^2B^2r^6 + 256b^2B^2r^6 + 256a^2H^2r^6 + \\
& 256b^2H^2r^6 - 64B^2mr^6 - 64H^2mr^6 + 128B^2r^8 + 128H^2r^8 + 4(14a^8(B^2 + H^2) - 14b^8(B^2 + H^2) - \\
& 32b^5HQ + 8a^5B(3bHm + 4Q) + 16(B^2 - H^2)mr^6 + 32b^3HQ(m - 2r^2) - 32bHQR^2(m + 2r^2) + \\
& b^6(H^2(29m - 60r^2) + 2B^2(7m - 30r^2)) + 2a^3B(-16Q(m - 2r^2) + bHm(m + 24r^2)) + 2aB(- \\
& 12b^5Hm + 16b^4Q + 32b^2QR^2 + 16QR^2(m + 2r^2) - b^3Hm(m + 24r^2)) + a^6(4b^2(B^2 + H^2) + \\
& 2H^2(-7m + 30r^2) + B^2(-29m + 60r^2)) + b^4(3B^2r^2(15m - 32r^2) + H^2(-15m^2 + 59mr^2 - \\
& 96r^4)) - 16b^2(Q^2 + B^2r^4(-3m + 4r^2) - H^2r^2(m^2 + 2mr^2 - 4r^4)) + a^4(-32bHQ + 3H^2r^2(- \\
& 15m + 32r^2) + B^2(15m^2 - 59mr^2 + 96r^4) + b^2(12B^2r^2 + H^2(m + 12r^2))) - a^2(4b^6(B^2 + H^2) + \\
& 64bHQR^2 - b^2(B^2 - H^2)m(m - 2r^2) + b^4(12H^2r^2 + B^2(m + 12r^2)) + 16(-Q^2 + H^2r^4(3m - 4r^2) \\
& + B^2r^2(m^2 + 2mr^2 - 4r^4)))cos2\theta + 4(7a^8(B^2 + H^2) + 4a^5B(5bHm + 2Q) - a^6(4b^2(B^2 + H^2) \\
& + H^2(7m - 24r^2) + B^2(13m - 24r^2)) + 4a^3B(2b^3Hm - bHm(m - 12r^2) - 2Q(m - 2r^2)) + \\
& 4abB(5b^4Hm - 2b^3Q - b^2Hm(m - 12r^2) + 2bQ(m - 2r^2) + 2Hmr^2(m + 6r^2)) + b^2(7b^6(B^2 + \\
& H^2) + 8b^3HQ - 8bHQ(m - 2r^2) + 2b^2(3m - 4r^2)(-3B^2r^2 + H^2(m - 3r^2)) - 4mr^2(3B^2r^2 + \\
& H^2(m + 3r^2)) + b^4(H^2(-13m + 24r^2) + B^2(-7m + 24r^2))) - a^4(6b^4(B^2 + H^2) + 8bHQ - \\
& 2(3m - 4r^2)(-3H^2r^2 + B^2(m - 3r^2)) + b^2(3H^2(m + 8r^2) + B^2(m + 24r^2))) - a^2(4b^6(B^2 + H^2) - \\
& 8bHQ(m - 2r^2) + 2b^2(B^2 + H^2)(m^2 + 2mr^2 + 24r^4) + 4mr^2(3H^2r^2 + B^2(m + 3r^2)) + \\
& b^4(3B^2(m + 8r^2) + H^2(m + 24r^2)))cos4\theta + 8a^8B^2cos6\theta - 16a^6b^2B^2cos6\theta + 16a^2b^6B^2cos6\theta \\
& - 8b^8B^2cos6\theta + 8a^8H^2cos6\theta - 16a^6b^2H^2cos6\theta + 16a^2b^6H^2cos6\theta - 8b^8H^2cos6\theta - \\
& 12a^6B^2mcos6\theta + 4a^2b^4B^2mcos6\theta + 8b^6B^2mcos6\theta + 32a^5bBHmcos6\theta - 32ab^5BHmcos6\theta \\
& - 8a^6H^2mcos6\theta - 4a^4b^2H^2mcos6\theta + 12b^6H^2mcos6\theta + 4a^4B^2m^2cos6\theta - 4a^2b^2B^2m^2cos6\theta - \\
& 8a^3bBHm^2cos6\theta + 8ab^3BHm^2cos6\theta + 4a^2b^2H^2m^2cos6\theta - 4b^4H^2m^2cos6\theta + 16a^6B^2r^2cos6\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 48a^4b^2B^2r^2\cos6\theta + 48a^2b^4B^2r^2\cos6\theta - 16b^6B^2r^2\cos6\theta + 16a^6H^2r^2\cos6\theta - 48a^4b^2H^2 \\
& r^2\cos6\theta + 48a^2b^4H^2r^2\cos6\theta - 16b^6H^2r^2\cos6\theta - 20a^4B^2mr^2\cos6\theta + 8a^2b^2B^2mr^2\cos6\theta + \\
& 12b^4B^2mr^2\cos6\theta + 64a^3bBHmr^2\cos6\theta - 64ab^3BHmr^2\cos6\theta - 12a^4H^2mr^2\cos6\theta - \\
& 8a^2b^2H^2mr^2\cos6\theta + 20b^4H^2mr^2\cos6\theta + a^8B^2\cos8\theta - 4a^6b^2B^2\cos8\theta + 6a^4b^4B^2\cos8\theta - \\
& 4a^2b^6B^2\cos8\theta + b^8B^2\cos8\theta + a^8H^2\cos8\theta - 4a^6b^2H^2\cos8\theta + 6a^4b^4H^2\cos8\theta - 4a^2b^6H^2\cos8\theta \\
& + b^8H^2\cos8\theta - a^6B^2m\cos8\theta + a^4b^2B^2m\cos8\theta + a^2b^4B^2m\cos8\theta - b^6B^2m\cos8\theta + \\
& 4a^5bBHm\cos8\theta - 8a^3b^3BHm\cos8\theta + 4ab^5BHm\cos8\theta - a^6H^2m\cos8\theta + a^4b^2H^2m\cos8\theta + \\
& a^2b^4H^2m\cos8\theta - b^6H^2m\cos8\theta).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Hesaplamanın sonucunda 4 boyuttan farklı olarak 5 boyutta EMT'nün izinin sıfırdan farklı olduğu bulundu.

5.4 Kontravaryant EMT'nün Kovaryant Türevi

Buraya kadar yapılan işlemlerin doğru olup olmadığını kontrol etmek için kontravaryant EMT'nün kovaryant türevinin sıfır olması gerekiyor.

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} + T^{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} + T^{\mu\sigma} \Gamma^\nu_{\sigma\nu} = 0 \tag{5.9}$$

BÖLÜM 6

BEŞ BOYUTLU KARA DELİĞİN ENERJİSİ VE YÜKÜ

6.1 Beş Boyutlu Kara Deliğın Elektromanyetik Enerjisi

Beş boyutlu Myers - Perry kara deliğinin toplam kütlesi (enerjisi) Komar kütle formülü ile aşağıda verilmiştir [6].

$$M = \frac{1}{2} \int (3T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T) \eta^\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\nu d\Sigma_\nu + \frac{3}{2} (\Omega_\mu J_\mu + \Omega_\nu J_\nu) + \frac{3}{16\pi} KA \quad (6.1)$$

Burada, A olay ufkunun alanı ve K ise yüzey çekimidir.

Dual baz ifadesi η^μ [14] aşağıda verildi,

$$\eta^\mu = [1/\sqrt{(g_{tt} - (g_{t\psi})^2/g_{\psi\psi} - (\Omega^2_{(\mu)} g_{\phi\phi} g_{\psi\psi} - (g_{\phi\psi})^2)/g_{\psi\psi})}] [(\partial/\partial t)^\mu + \Omega_{(\mu)} (\partial/\partial \phi)^\mu - ((g_{t\psi} + \Omega_\mu g_{\phi\psi}) / g_{\psi\psi}) (\partial/\partial \psi)^\mu]. \quad (6.2)$$

Yukarıdaki denklemden aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$\eta^t = 1/\sqrt{(g_{tt} - (g_{t\psi})^2/g_{\psi\psi} - (\Omega^2_{(\mu)} g_{\phi\phi} g_{\psi\psi} - (g_{\phi\psi})^2)/g_{\psi\psi})}$$

$$\eta^\phi = [1/\sqrt{(g_{tt} - (g_{t\psi})^2/g_{\psi\psi} - (\Omega^2_{(\mu)} g_{\phi\phi} g_{\psi\psi} - (g_{\phi\psi})^2)/g_{\psi\psi})}] \Omega_{(\mu)}$$

$$\eta^\psi = [1/\sqrt{(g_{tt} - (g_{t\psi})^2/g_{\psi\psi} - (\Omega^2_{(\mu)} g_{\phi\phi} g_{\psi\psi} - (g_{\phi\psi})^2)/g_{\psi\psi})}] (-g_{t\psi} + \Omega_\mu g_{\phi\psi}) / g_{\psi\psi}$$

$$\text{Burada kara deliğın açısısal hızı ifadesi } \Omega_{(\mu)} \text{ [14].} \quad (6.3)$$

$$\Omega_{(\mu)} = (g_{t\psi} g_{\phi\psi} - g_{t\phi} g_{\psi\psi}) / (g_{\phi\phi} g_{\psi\psi} - (g_{\phi\psi})^2) \quad (6.4)$$

olarak alındı.

Elektromanyetik alanın toplam enerjisi, kesik küre yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde verilir,

$$E_{EM} = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \varepsilon \alpha h. \quad (6.5)$$

burada ε ,

$$\varepsilon = 1/2[(3T_{tt} - g_{tt}T) + (3T_{t\phi} - g_{t\phi}T)\Omega_\mu + (3T_{t\psi} - g_{t\psi}T)(-g_{t\psi} - \Omega_\mu g_{\phi\psi})/g_{\psi\psi}] \quad (6.6)$$

hacim elemanı,

$$d\Sigma_v = h dV$$

$$dV = dr d\theta d\phi d\psi,$$

$$h = \sqrt{(\Sigma r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\Sigma \Delta + m(\Delta + mr^2)))/\Delta} \quad (6.7)$$

ve α ,

$$\alpha = \eta^t = \sqrt{(\Sigma \Delta + m(\Delta + mr^2))/\Sigma \Delta} \quad (6.8)$$

ve C ,

$$C = \alpha h = r \sin \theta \cos \theta (\Sigma \Delta + m(\Delta + mr^2))/\Delta \quad (6.9)$$

olarak tanımlanmıştır.

Böylece (6.6) ifadesi 5 boyutlu kara delik için hesaplanırsa aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \Delta(35a^8B^2 + 20a^6b^2B^2 + 18a^4b^4B^2 + 20a^2b^6B^2 + 35b^8B^2 + 35a^8H^2 + 20a^6b^2H^2 + \\ & 18a^4b^4H^2 + 20a^2b^6H^2 + 35b^8H^2 - 75a^6B^2m + 3a^4b^2B^2m + 11a^2b^4B^2m - 35b^6B^2m + \\ & 44a^5bBHm - 24a^3b^3BHm + 44ab^5BHm - 35a^6H^2m + 11a^4b^2H^2m + 3a^2b^4H^2m - 75b^6H^2m \\ & + 40a^4B^2m^2 + 104a^2b^2B^2m^2 - 80a^3bBHm^2 - 80ab^3BHm^2 + 104a^2b^2H^2m^2 + 40b^4H^2m^2 + \\ & 96a^5BQ - 96ab^4BQ - 96a^4bHQ + 96b^5HQ - 144a^3BmQ - 176ab^2BmQ - 176a^2bHmQ - \\ & 144b^3HmQ + 256a^2Q^2 + 256b^2Q^2 + 160a^6B^2r^2 + 96a^4b^2B^2r^2 + 96a^2b^4B^2r^2 + 160b^6B^2r^2 + \\ & 160a^6H^2r^2 + 96a^4b^2H^2r^2 + 96a^2b^4H^2r^2 + 160b^6H^2r^2 - 152a^4B^2mr^2 + 16a^2b^2B^2mr^2 - \\ & 120b^4B^2mr^2 + 64a^3bBHmr^2 + 64ab^3BHmr^2 - 120a^4H^2mr^2 + 16a^2b^2H^2mr^2 - 152b^4H^2mr^2 + \\ & 48a^2B^2m^2r^2 - 224abBHm^2r^2 + 48b^2H^2m^2r^2 + 192a^3BQr^2 - 192ab^2BQr^2 - 192a^2bHQr^2 + \\ & 192b^3HQr^2 - 64aBmQr^2 - 64bHmQr^2 + 256Q^2r^2 + 288a^4B^2r^4 + 192a^2b^2B^2r^4 + 288b^4B^2r^4 + \\ & 288a^4H^2r^4 + 192a^2b^2H^2r^4 + 288b^4H^2r^4 - 80a^2B^2mr^4 - 144b^2B^2mr^4 + 64abBHmr^4 - \\ & 144a^2H^2mr^4 - 80b^2H^2mr^4 + 256a^2B^2r^6 + 256b^2B^2r^6 + 256a^2H^2r^6 + 256b^2H^2r^6 - 64B^2mr^6 - \\ & 64H^2mr^6 + 128B^2r^8 + 128H^2r^8 + 4(14a^8(B^2 + H^2) - 14b^8(B^2 + H^2) - 32b^5HQ + \\ & 8a^5B(3bHm + 4Q) + 16(B^2 - H^2)mr^6 + 16bHQr^2(7m - 4r^2) + 32b^3HQ(m - 2r^2) + \\ & b^6(H^2(29m - 60r^2) + 2B^2(7m - 30r^2)) + 2a^3B(-16Q(m - 2r^2) + bHm(-23m + 24r^2)) - \\ & 2aB(12b^5Hm - 16b^4Q + 8Qr^2(7m - 4r^2) + 8b^2Q(9m - 4r^2) + b^3Hm(-23m + 24r^2)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a^6(4b^2(B^2 + H^2) + 2H^2(-7m + 30r^2) + B^2(-29m + 60r^2)) + b^4(3B^2r^2(15m - 32r^2) + H^2(-15m^2 + 59mr^2 - 96r^4)) + 16b^2(2Q^2 + B^2r^4(3m - 4r^2) - 2H^2r^2(m^2 - mr^2 + 2r^4)) + a^4(-32bHQ + 3H^2r^2(-15m + 32r^2) + B^2(15m^2 - 59mr^2 + 96r^4) + b^2(12B^2r^2 + H^2(m + 12r^2))) - a^2(4b^6(B^2 + H^2) - 16bHQ(9m - 4r^2) - b^2(B^2 - H^2)m(49m - 2r^2) + b^4(12H^2r^2 + B^2(m + 12r^2)) + 16(2Q^2 + H^2r^4(3m - 4r^2) - 2B^2r^2(m^2 - mr^2 + 2r^4)))cos2\theta + 4(7a^8(B^2 + H^2) + 4a^5B(5bHm + 2Q) - a^6(4b^2(B^2 + H^2) + H^2(7m - 24r^2) + B^2(13m - 24r^2)) + 4a^3B(2b^3Hm + Q(m + 4r^2) + bHm(-7m + 12r^2)) + 4abB(5b^4Hm - 2b^3Q - bQ(m + 4r^2) + 2Hmr^2(-5m + 6r^2) + b^2Hm(-7m + 12r^2)) + b^2(7b^6(B^2 + H^2) + 8b^3HQ + 4bHQ(m + 4r^2) + 2b^2(3m - 4r^2)(-3B^2r^2 + H^2(m - 3r^2)) - 4mr^2(3B^2r^2 + H^2(-5m + 3r^2)) + b^4(H^2(-13m + 24r^2) + B^2(-7m + 24r^2))) - a^4(6b^4(B^2 + H^2) + 8bHQ - 2(3m - 4r^2)(-3H^2r^2 + B^2(m - 3r^2)) + b^2(3H^2(m + 8r^2) + B^2(m + 24r^2))) - a^2(4b^6(B^2 + H^2) + 4bHQ(m + 4r^2) - 2b^2(B^2 + H^2)(11m^2 - 2mr^2 - 24r^4) + 4mr^2(3H^2r^2 + B^2(-5m + 3r^2)) + b^4(3B^2(m + 8r^2) + H^2(m + 24r^2)))cos4\theta + 8a^8B^2cos6\theta - 16a^6b^2B^2cos6\theta + 16a^2b^6B^2cos6\theta - 8b^8B^2cos6\theta + 8a^8H^2cos6\theta - 16a^6b^2H^2cos6\theta + 16a^2b^6H^2cos6\theta - 8b^8H^2cos6\theta - 12a^6B^2mcos6\theta + 4a^2b^4B^2mcos6\theta + 8b^6B^2mcos6\theta + 32a^5bBHmcos6\theta - 32ab^5BHmcos6\theta - 8a^6H^2mcos6\theta - 4a^4b^2H^2mcos6\theta + 12b^6H^2mcos6\theta + 4a^4B^2m^2cos6\theta - 4a^2b^2B^2m^2cos6\theta - 8a^3bBHm^2cos6\theta + 8ab^3BHm^2cos6\theta + 4a^2b^2H^2m^2cos6\theta - 4b^4H^2m^2cos6\theta + 16a^6B^2r^2cos6\theta - 48a^4b^2B^2r^2cos6\theta + 48a^2b^4B^2r^2cos6\theta - 16b^6B^2r^2cos6\theta + 16a^6H^2r^2cos6\theta - 48a^4b^2H^2r^2cos6\theta + 48a^2b^4H^2r^2cos6\theta - 16b^6H^2r^2cos6\theta - 20a^4B^2mr^2cos6\theta + 8a^2b^2B^2mr^2cos6\theta + 12b^4B^2mr^2cos6\theta + 64a^3bBHmr^2cos6\theta - 64ab^3BHmr^2cos6\theta - 12a^4H^2mr^2cos6\theta - 8a^2b^2H^2mr^2cos6\theta + 20b^4H^2mr^2cos6\theta + a^8B^2cos8\theta - 4a^6b^2B^2cos8\theta + 6a^4b^4B^2cos8\theta - 4a^2b^6B^2cos8\theta + b^8B^2cos8\theta + a^8H^2cos8\theta - 4a^6b^2H^2cos8\theta + 6a^4b^4H^2cos8\theta - 4a^2b^6H^2cos8\theta + b^8H^2cos8\theta - a^6B^2mcos8\theta + a^4b^2B^2mcos8\theta + a^2b^4B^2mcos8\theta - b^6B^2mcos8\theta + 4a^5bBHmcos8\theta - 8a^3b^3BHmcos8\theta + 4ab^5BHmcos8\theta - a^6H^2mcos8\theta + a^4b^2H^2mcos8\theta + a^2b^4H^2mcos8\theta - b^6H^2mcos8\theta)) / ((64\Sigma^3(a^4(b^2 + r^2) + r^2(b^4 + 2r^4 + b^2(m + 3r^2)) + a^2(b^4 + 2b^2(m + 2r^2) + r^2(m + 3r^2)) + (a^2b^2)(a^2(b^2 + r^2) + r^2(b^2 - m + r^2))cos2\theta)). \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ε ifadesi aşağıdaki gibi düzenlenebilir,

$$\varepsilon = (B^2f_0 + Q^2f_1 + BQf_2 + H^2f_3 + BHf_4 + HQf_5) / 8\pi 256\Sigma^4 \quad (6.11)$$

elde edilir. Burada f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 ve f_5 katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
f_0 = & 35a^8 + 20a^6b^2 + 18a^4b^4 + 20a^2b^6 + 35b^8 - 75a^6m + 3a^4b^2m + 11a^2b^4m - 35b^6m + \\
& 40a^4m^2 + 104a^2b^2m^2 + 160a^6r^2 + 96a^4b^2r^2 + 96a^2b^4r^2 + 160b^6r^2 - 152a^4mr^2 + 16a^2b^2mr^2 - \\
& 120b^4mr^2 + 48a^2m^2r^2 + 288a^4r^4 + 192a^2b^2r^4 + 288b^4r^4 - 80a^2mr^4 - 144b^2mr^4 + 256a^2r^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 256b^2r^6 - 64mr^6 + 128r^8 + 4(14a^8 - 14b^8 + 16mr^6 + 2b^6(7m - 30r^2) + a^6(4b^2 - 29m + 60r^2) \\
& + b^4(45mr^2 - 96r^4) + 16b^2(3mr^4 - 4r^6) + a^4(15m^2 - 59mr^2 + 12r^2(b^2 + 8r^2)) - a^2(4b^6 + b^2m(\\
& - 49m + 2r^2) + b^4(m + 12r^2) - 32r^2(m^2 - mr^2 + 2r^4)))\cos 2\theta + 4(7a^8 + 7b^8 - 12b^2mr^4 + a^6(- \\
& 4b^2 - 13m + 24r^2) + b^6(- 7m + 24r^2) - 6b^4(3mr^2 - 4r^4) - a^4(6b^4 - 6m^2 + 26mr^2 - 24r^4 + b^2(m \\
& + 24r^2)) - a^2(4b^6 + 4mr^2(- 5m + 3r^2) + 3b^4(m + 8r^2) + b^2(- 22m^2 + 4mr^2 + 48r^4)))\cos 4\theta + \\
& 8a^8\cos 6\theta - 16a^6b^2\cos 6\theta + 16a^2b^6\cos 6\theta - 8b^8\cos 6\theta - 12a^6m\cos 6\theta + 4a^2b^4m\cos 6\theta + \\
& 8b^6m\cos 6\theta + 4a^4m^2\cos 6\theta - 4a^2b^2m^2\cos 6\theta + 16a^6r^2\cos 6\theta - 4a^4b^2r^2\cos 6\theta + 48a^2b^4r^2\cos 6\theta - \\
& 16b^6r^2\cos 6\theta - 20a^4mr^2\cos 6\theta + 8a^2b^2mr^2\cos 6\theta + 12b^4mr^2\cos 6\theta + a^8\cos 8\theta - 4a^6b^2\cos 8\theta + \\
& 6a^4b^4\cos 8\theta - 4a^2b^6\cos 8\theta + b^8\cos 8\theta - a^6m\cos 8\theta + a^4b^2m\cos 8\theta + a^2b^4m\cos 8\theta - b^6m\cos 8\theta,
\end{aligned}$$

$$f_1 = -128(-2(a^2 + b^2 + r^2) + (a^2 - b^2)\cos 2\theta),$$

$$f_2 = 16a(6a^4 - 6b^4 - 9a^2m - 11b^2m + 12a^2r^2 - 12b^2r^2 - 4mr^2 + 4(2a^4 + 2b^4 - 7mr^2 + 4r^4 - 2a^2(m - 2r^2) + b^2(-9m + 4r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 + m + 4r^2)\cos 4\theta),$$

$$\begin{aligned}
f_3 = & 35a^8 + 20a^6b^2 + 18a^4b^4 + 20a^2b^6 + 35b^8 - 35a^6m + 11a^4b^2m + 3a^2b^4m - 75b^6m + \\
& 104a^2b^2m^2 + 40b^4m^2 + 160a^6r^2 + 96a^4b^2r^2 + 96a^2b^4r^2 + 160b^6r^2 - 120a^4mr^2 + 16a^2b^2mr^2 - \\
& 152b^4mr^2 + 48b^2m^2r^2 + 288a^4r^4 + 192a^2b^2r^4 + 288b^4r^4 - 144a^2mr^4 - 80b^2mr^4 + 256a^2r^6 + \\
& 256b^2r^6 - 64mr^6 + 128r^8 + 4(14a^8 - 14b^8 - 16mr^6 + b^6(29m - 60r^2) + 2a^6(2b^2 - 7m + 30r^2) \\
& + b^4(-15m^2 + 59mr^2 - 96r^4) - 32b^2r^2(m^2 - mr^2 + 2r^4) - a^2(4b^6 + 12b^4r^2 + 48mr^4 - 64r^6 + \\
& b^2m(49m - 2r^2)) + a^4(-45mr^2 + 96r^4 + b^2(m + 12r^2)))\cos 2\theta + 4(7a^8 + a^6(-4b^2 - 7m + \\
& 24r^2) - 3a^4(2b^4 + 6mr^2 - 8r^4 + b^2(m + 8r^2)) + b^2(7b^6 + 4mr^2(5m - 3r^2) + b^4(-13m + 24r^2) + \\
& b^2(6m^2 - 26mr^2 + 24r^4)) - a^2(4b^6 + 12mr^4 + b^4(m + 24r^2) + b^2(-22m^2 + 4mr^2 + 48r^4)))\cos 4\theta + \\
& 8a^8\cos 6\theta - 16a^6b^2\cos 6\theta + 16a^2b^6\cos 6\theta - 8b^8\cos 6\theta - 8a^6m\cos 6\theta - 4a^4b^2m\cos 6\theta + \\
& 12b^6m\cos 6\theta + 4a^2b^2m^2\cos 6\theta - 4b^4m^2\cos 6\theta + 16a^6r^2\cos 6\theta - 48a^4b^2r^2\cos 6\theta + 48a^2b^4r^2\cos 6\theta - \\
& 16b^6r^2\cos 6\theta - 12a^4mr^2\cos 6\theta - 8a^2b^2mr^2\cos 6\theta + 20b^4mr^2\cos 6\theta + a^8\cos 8\theta - 4a^6b^2\cos 8\theta + \\
& 6a^4b^4\cos 8\theta - 4a^2b^6\cos 8\theta + b^8\cos 8\theta - a^6m\cos 8\theta + a^4b^2m\cos 8\theta + a^2b^4m\cos 8\theta - b^6m\cos 8\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & abm(11a^4 - 6a^2b^2 + 11b^4 - 20a^2m - 20b^2m + 16a^2r^2 + 16b^2r^2 - 56mr^2 + 16r^4 + 2(a^2 - \\
& b^2)(12a^2 + 12b^2 - 23m + 24r^2)\cos 2\theta + 4(5a^4 + 5b^4 - 10mr^2 + 12r^4 + b^2(-7m + 12r^2) + \\
& a^2(2b^2 - 7m + 12r^2))\cos 4\theta + 8a^4\cos 6\theta - 8b^4\cos 6\theta - 2a^2m\cos 6\theta + 2b^2m\cos 6\theta + 16a^2 \\
& r^2\cos 6\theta - 16b^2r^2\cos 6\theta + a^4\cos 8\theta - 2a^2b^2\cos 8\theta + b^4\cos 8\theta),
\end{aligned}$$

$$f_5 = 16b(-6a^4 + 6b^4 - 11a^2m - 9b^2m - 12a^2r^2 + 12b^2r^2 - 4mr^2 - 4(2a^4 + 2b^4 - 7mr^2 + 4r^4 - 2b^2(m - 2r^2) + a^2(-9m + 4r^2))\cos 2\theta + (-a^2 + b^2)(2a^2 + 2b^2 + m + 4r^2)\cos 4\theta). \quad (6.12)$$

(6.1.5) toplam elektromanyetik enerji denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$E_{EM} = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \sin\theta \cos\theta (B^2 f_0 + Q^2 f_1 + BQ f_2 + H^2 f_3 + BH f_4 + HQ f_5) / 8\pi 256 \Sigma^4. \quad (6.13)$$

6.3 b=a ve H=B durumu

(6.10) denklemine b=a ve H=B değerleri yerleştirilirse aşağıdaki ifade bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 256a^8B^2 - 128a^6B^2m + 128a^4B^2m^2 - 640a^3BmQ + 512a^2Q^2 + 1024a^6B^2r^2 - 384a^4B^2mr^2 \\ & - 128a^2B^2m^2r^2 - 128aBmQr^2 + 256Q^2r^2 + 1536a^4B^2r^4 - 384a^2B^2mr^4 + 1024a^2B^2r^6 - \\ & 128B^2mr^6 + 256B^2r^8 + 4(-32a^5BQ + 8a^5B(3aBm + 4Q) + 16aBQr^2(7m - 4r^2) + 32a^3BQ(m \\ & - 2r^2) + a^6(B^2(29m - 60r^2) + 2B^2(7m - 30r^2)) + 2a^3B(-16Q(m - 2r^2) + aBm(-23m + 24r^2)) - \\ & 2aB(12a^5Bm - 16a^4Q + 8Qr^2(7m - 4r^2) + 8a^2Q(9m - 4r^2) + a^3Bm(-23m + 24r^2)) + \\ & a^6(8a^2B^2 + 2B^2(-7m + 30r^2) + B^2(-29m + 60r^2)) + a^4(3B^2r^2(15m - 32r^2) + B^2(-15m^2 + \\ & 59mr^2 - 96r^4)) + 16a^2(2Q^2 + B^2r^4(3m - 4r^2) - 2B^2r^2(m^2 - mr^2 + 2r^4)) + a^4(-32aBQ + 3B^2r^2(- \\ & 15m + 32r^2) + B^2(15m^2 - 59mr^2 + 96r^4) + a^2(12B^2r^2 + B^2(m + 12r^2))) - a^2(8a^6B^2 - \\ & 16aBQ(9m - 4r^2) + a^4(12B^2r^2 + B^2(m + 12r^2)) + 16(2Q^2 + B^2r^4(3m - 4r^2) - 2B^2r^2(m^2 - mr^2 + \\ & 2r^4)))) \cos 2\theta + 4(14a^8B^2 + 4a^5B(5aBm + 2Q) - a^6(8a^2B^2 + B^2(7m - 24r^2) + B^2(13m - 24r^2)) + \\ & 4a^3B(2a^3Bm + Q(m + 4r^2) + aBm(-7m + 12r^2)) + 4a^2B(5a^4Bm - 2a^3Q - aQ(m + 4r^2) + 2Bmr^2(- \\ & 5m + 6r^2) + a^2Bm(-7m + 12r^2)) + a^2(14a^6B^2 + 8a^3BQ + 4aBQ(m + 4r^2) + 2a^2(3m - 4r^2)(\\ & - 3B^2r^2 + B^2(m - 3r^2)) - 4mr^2(3B^2r^2 + B^2(-5m + 3r^2)) + a^4(B^2(-13m + 24r^2) + B^2(-7m + \\ & 24r^2))) - a^4(12a^4B^2 + 8aBQ - 2(3m - 4r^2)(-3B^2r^2 + B^2(m - 3r^2)) + a^2(3B^2(m + 8r^2) + \\ & B^2(m + 24r^2))) - a^2(8a^6B^2 + 4aBQ(m + 4r^2) - 4a^2B^2(11m^2 - 2mr^2 - 24r^4) + 4mr^2(3B^2r^2 + B^2(- \\ & 5m + 3r^2)) + a^4(3B^2(m + 8r^2) + B^2(m + 24r^2)))) \cos \theta \end{aligned} \quad (6.14)$$

(6.1.12) denklemine b=a ve H=B değerleri yerleştirilirse,

$$f_0 = 128(2a^8 - mr^6 + 2r^8 - a^6(m - 8r^2) - a^2r^2(m^2 + 3mr^2 - 8r^4) + a^4(m^2 - 3mr^2 + 12r^4))$$

$$f_1 = 128(2a^2 + r^2)$$

$$f_2 = -128am(5a^2 + r^2) \quad (6.15)$$

ifadeleri elde edilir.

(6.9) denklemine b=a ve H=B değerleri yerleştirilirse aşağıdaki ifade bulunur.

$$C = r \sin 2\theta / (256(a^2 + r^2)^3) \quad (6.16)$$

(6.13) integral ifadesinde $R \gg r_H$ olduğunda beş boyutlu kara deliğin enerjisi

$$E_{EM} = E_0 + \frac{Q^2}{m} F_1 + \frac{BQj_H}{m} F_2 \quad (6.17)$$

şeklinde elde edilir. E_{EM} ifadesindeki E_0 , F_1 ve F_2 değerleri aşağıdaki integrallerden hesaplanır,

$$E_0 = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi C f_0 \quad (6.18)$$

$$F_1 = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi C f_1 \quad (6.19)$$

$$F_2 = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi C f_2 \quad (6.20)$$

$R \gg r_H$ durumu için E_0 ifadesi için sadece dış manyetik alandan gelen enerji aşağıdaki gibidir.

$$E_0 = \frac{\pi}{8} B^2 R^4 + O(R^2) \quad (6.21)$$

Kara delik ufkunun yarıçapı (2.12) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$r_H = m/2(-2a^2/m + 1 + \sqrt{(1-4a^2/m)}) \quad (6.22)$$

elde edilir ve $s = a^2/m$ dönüşümü yapılırsa

$$r_H = m/2(1-2s + \sqrt{(1-4s)}) \quad (6.23)$$

ifadesi bulunur.

$R \gg r_H$ durumunda (6.19) ve (6.20) denklemleri hesaplanıp aşağıdaki ifadeleri elde edilir.

F_1 ve F_2 denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$F_1 = F_1(s) = \frac{\pi(1+\sqrt{1-4s}+s)}{4(1+\sqrt{1-4s}-2s)} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (6.24)$$

$$F_2 = F_2(s) = -\frac{\pi(1+\sqrt{1-4s}+4s)}{8(1+\sqrt{1-4s}-2s)} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (6.25)$$

Burada s , $0 \leq s \leq 0.25$ aralığında bir parametredir. s değerleri (6.24) ve (6.25) denklemlerinde yerine yazıldığında $F_1 > 0$ ve $F_2 < 0$ olduğu görülür. (6.17) ifadesinden de görüleceği gibi E_{EM} toplam elektromanyetik alan dış manyetik alan B ile Q yükü tarafından oluşturulan elektromanyetik alanların lineer birleşimidir ve üç bileşenden oluşmaktadır. İlk bileşen olan E_0 , yani dış manyetik alanın enerjisi B^2 ile orantılıdır. İkinci bileşen, Q yükünün oluşturduğu elektromanyetik enerjisi, Q^2 ile orantılıdır.

Üçüncü bileşen, dış manyetik alan B ve Q yükünün etkileşmesinden oluşan enerjidir ve bu enerji BQ ile orantılıdır.

Düzgün manyetik alanda dönen yüklü ve beş boyutlu bir kara deliğin elektromanyetik enerjisinin Q'ya göre türevinin sıfır olduğu yer elektromanyetik enerjiyi en küçük yapan yükün miktarını verir. (6.17) denklemindeki E_{EM} ifadesinden

$$\partial E_{EM}/\partial Q=0, \quad (6.26)$$

$$Q_{Li}=2\zeta(s)B_{jH} \quad (6.27)$$

elde edilir. Buradan

$$\zeta(s)= - F_2/4F_1 \quad (6.28)$$

elde edilir. F_1 (6.24)ve F_2 (6.25) ifadelerinden

$$\zeta(s)=\frac{1+\sqrt{1-4s}+4s}{8(1+\sqrt{1-4s}+s)} \quad (6.29)$$

bulunur. $0 \leq s \leq 0.25$ değerlerini (6.28) denkleminde yerine konulursa aşağıdaki $\zeta(s)$ değerleri elde edilir.

$$\zeta(0.01)=0.126$$

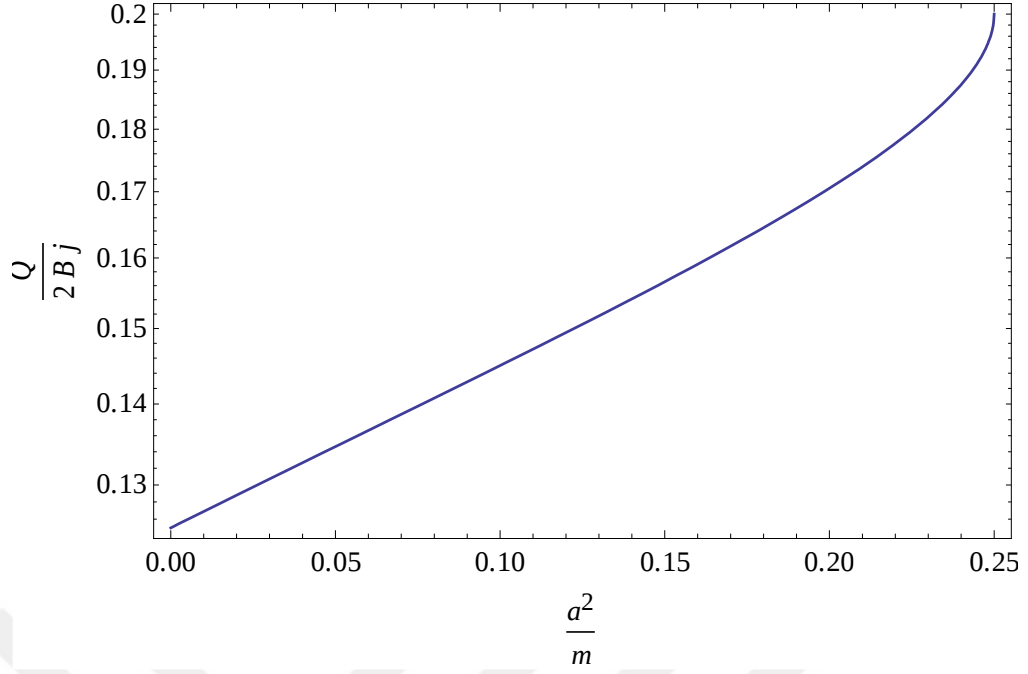
$$\zeta(0.10)=0.145$$

$$\zeta(0.15)=0.156$$

$$\zeta(0.20)=0.17$$

$$\zeta(0.25)=0.20 \quad (6.30)$$

Yukarıdaki değerlere karşılık gelen $\zeta(s)$ 'nin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 6.1 $\zeta(Q/2Bj)$ katsayısının $s(a^2/m)$ parametresine bağlı değişimini ifade eder.

E_{EM} (6.17) ifadesine (6.27) denklemindeki Q_{Li} ifadesi yerleştirilirse minimum elektromanyetik enerji ΔE_{Min} ,

$$\Delta E_{Min} = E_{EM} - E_0 = \frac{Q^2}{m} F_1 + \frac{BQj_H}{m} F_2 \quad (6.31)$$

$$\Delta E_{Min} = (-F_2 F_2 / 4F_1) B^2 j_H^2 / m \quad (6.32)$$

elde edilir. Beş boyutlu kara delik için $s=0.25$ için (6.17) ve (6.32) denklemlerinden

$$Q_{Li} = 0.40 B j_H \quad (6.33)$$

$$\Delta E_{Min} = -0.314 B^2 j_H^2 / m \quad (6.34)$$

bulunur.

Beş boyutlu Myers-Perry metriği için bulunan bu elektromanyetik enerjiyi Wald yaklaşımını kullanarak bulunan Aliev ve Frolov [14] sonuçları ile karşılaştırılacaktır. $b=a$, $H=B$ durumunda düzgün manyetik alan içinde dönen beş boyutlu kara deliğin kazandığı elektrik yükünü Aliev ve Frolov [14], Wald yaklaşımını kullanarak [10]

$$Q_W = amB + bmH = j_{(a)}B + j_{(b)}H \quad (6.35)$$

ifadesini buldu. $b=a$ ve $H=B$ durumunda yukarıdaki ifadeden

$$Q_W = 2amB = 2Bj_H \quad (6.36)$$

elde edilir.

Wald yöntemi kullanılarak bulunan Q_w (6.36) ifadesi (6.31) denkleminde yerleştirilirse

$$\Delta E_{\min} = 2(2F_1 + F_2)B^2 j_H^2 / m$$

$$\Delta E_{\min} = 4.712B^2 j_H^2 / m \quad (6.37)$$

olarak bulunur.

Düzgün manyetik alan içinde dönen beş boyutlu bir kara deliğin Li yöntemiyle ve Wald yöntemiyle bulunan minimum enerji değerleri karşılaştırılırsa, Wald yaklaşımıyla bulunan yukarıdaki denklemdeki $\Delta E_{\min}$ değerinin, Li yaklaşımıyla bulunan (6.34) minimum elektromanyetik enerji değerinden daha fazla olduğu görülür. Hatta Wald durumu yüksüz durum enerjisinden de büyüktür.

6.3 $b=0$ ve $H=B$ durumu

$b=0$ ve $H=B$ durumu için (6.10) denklemi,

$$\begin{aligned} \varepsilon = & (r \cos \theta (r^4 + a^2 (m + r^2) + a^2 (a^2 - m + r^2) \cos^2 \theta) (35a^8 B^2 - 55a^6 B^2 m + 20a^4 B^2 m^2 + \\ & 48a^5 B Q - 72a^3 B m Q + 128a^2 Q^2 + 160a^6 B^2 r^2 - 136a^4 B^2 m r^2 + 24a^2 B^2 m^2 r^2 + 96a^3 B Q r^2 - \\ & 32a B m Q r^2 + 128Q^2 r^2 + 288a^4 B^2 r^4 - 112a^2 B^2 m r^4 + 256a^2 B^2 r^6 - 64B^2 m r^6 + 128B^2 r^8 + \\ & 2a(28a^7 B^2 + 32a^4 B Q - 32a^2 B Q (m - 2r^2) + 16B Q r^2 (-7m + 4r^2) + a^5 B^2 (-43m + 120r^2) + \\ & a^3 B^2 (15m^2 - 104m r^2 + 192r^4) - 16a(2Q^2 + B^2 r^2 (-2m^2 + 5m r^2 - 8r^4))) \cos 2\theta + 4a^2 B (7a^6 B + \\ & 4a^3 Q + 2B m r^2 (5m - 6r^2) + 2a Q (m + 4r^2) + a^4 B (-10m + 24r^2) + a^2 B (3m^2 - 22m r^2 + 24r^4)) \\ & \cos 4\theta + 8a^8 B^2 \cos 6\theta - 10a^6 B^2 m \cos 6\theta + 2a^4 B^2 m^2 \cos 6\theta + 16a^6 B^2 r^2 \cos 6\theta - 16a^4 B^2 m r^2 \\ & \cos 6\theta + a^8 B^2 \cos 8\theta - a^6 B^2 m \cos 8\theta) \sin \theta) / 32 \Sigma^3 (a^4 + 2r^4 + a^2 (m + 3r^2) + a^2 (a^2 - m + \\ & r^2) \cos 2\theta)) \end{aligned} \quad (6.38)$$

şeklinde bulunur. $b=0$ ve $H=B$ durumu için (6.12) denkleminde f_0 , f_1 ve f_2 katsayıları ve (6.9)'den C sabiti aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} f_0 = & 2(35a^8 - 55a^6 m + 20a^4 m^2 + 160a^6 r^2 - 136a^4 m r^2 + 24a^2 m^2 r^2 + 288a^4 r^4 - 112a^2 m r^4 + \\ & 256a^2 r^6 - 64m r^6 + 128r^8 + 2a^2(28a^6 + a^4(-43m + 120r^2) + a^2(15m^2 - 104m r^2 + 192r^4) + \\ & 16(2m^2 r^2 - 5m r^4 + 8r^6)) \cos 2\theta + 4a^2(7a^6 + 2m r^2(5m - 6r^2) + a^4(-10m + 24r^2) + a^2(3m^2 - \\ & 22m r^2 + 24r^4)) \cos 4\theta + 8a^8 \cos 6\theta - 10a^6 m \cos 6\theta + 2a^4 m^2 \cos 6\theta + 16a^6 r^2 \cos 6\theta - \\ & 16a^4 m r^2 \cos 6\theta + a^8 \cos 8\theta - a^6 m \cos 8\theta) \end{aligned}$$

$$f_1 = -128(-2(a^2 + r^2) + a^2 \cos 2\theta)$$

$$f_2 = 16a(6a^4 - 9a^2m + 12a^2r^2 - 4mr^2 + 4(2a^4 - 7mr^2 + 4r^4 - 2a^2(m - 2r^2))\cos 2\theta + a^2(2a^2 + m + 4r^2)\cos 4\theta) \quad (6.39)$$

(6.9) denkleminde $b=0$ ve $H=B$ değerleri yerleştirilirse aşağıdaki ifade bulunur.

$$C = r\Delta \cos \theta \sin \theta (mr^2 (a^2 + r^2) + \Sigma \Delta) / (64\Delta \Sigma^3 (a^4 r^2 + 2r^6 + a^2 r^2 (m + 3r^2) + a^2 \Delta \cos 2\theta)). \quad (6.40)$$

(6.13) integral ifadesinde $R \gg r_H$ olduğunda beş boyutlu kara deliğin enerjisi şeklinde ifade edilebilir. (6.18), (6.19) ve (6.20) denklemlerinde $b=0$ ve $H=B$ değerleri yerleştirilirse aşağıdaki ifade bulunur.

$$E_0 = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi C f_0 \quad (6.41)$$

$$F_1 = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi C f_1 \quad (6.42)$$

$$F_2 = \int_{r_H}^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi C f_2. \quad (6.43)$$

$R \gg r_H$ durumu için (6.41) E_0 ifadesi için yani sadece dış manyetik alandan gelen enerji aşağıdaki gibidir,

$$E_0 = \frac{\pi}{8} B^2 R^4 + O(R^2). \quad (6.44)$$

Kara delik ufkunun yarıçapı (2.13) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$r_H = \sqrt{-a^2 + m} \quad (6.45)$$

elde edilir ve $s=a^2/m$ dönüşümü yapılırsa

$$r_H = m\sqrt{1-s} \quad (6.46)$$

ifadesi bulunur.

$R \gg r_H$ durumunda (6.42) ve (6.43) denklemleri hesaplanıp aşağıdaki ifadeleri elde edilir.

F_1 ve F_2 denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$F_1 = F_1(s) = \pi \frac{s-4}{4(s-1)} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (6.47)$$

$$F_2 = F_2(s) = \frac{\pi((2-3s)s-3(-1+s)\text{Log}[1-s])}{8s^2} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (6.48)$$

Burada s , $0.1 \leq s \leq 0.99$ aralığında bir parametredir. s değerleri (6.47) ve (6.48) denklemlerinde yerine yazıldığında $F_1 > 0$ ve $F_2 < 0$ olduğu görülür. Toplam elektromanyetik alan dış manyetik alan B ile Q yükü tarafından oluşturulan elektromanyetik alanların lineer birleşimidir ve üç bileşenden oluşmaktadır. İlk bileşen olan E_0 , yani dış manyetik alanın enerjisi B^2 , orantılıdır. İkinci bileşen, Q yükünün oluşturduğu elektromanyetik enerji, Q^2 ile orantılıdır. Üçüncü bileşen, dış manyetik alan B ve Q yükünün etkileşmesinden oluşan enerjidir ve bu enerji BQ ile orantılıdır.

Düzgün manyetik alan içinde dönen beş boyutlu kara deliğin kazandığı elektrik yükünü Aliev ve Frolov Wald yaklaşımını kullanarak [10], [14], (6.26) denkleminde ifadesi bulunmuştur. $b=0$ için yukarıdaki bağıntı aşağıdaki gibi bulunur.

$$Q_W = j_H B = a m B \quad (6.49)$$

Düzgün manyetik alanda dönen yüklü ve beş boyutlu bir kara deliğin elektromanyetik enerjisinin Q 'ya göre türevinin sıfır olduğu yer elektromanyetik enerjiyi en küçük yapan yükün miktarını verir [12]. (6.17) ve (6.28) denklemlerinden

$$Q_{Li} = \zeta(s) B j_H \quad (6.50)$$

elde edilir. Burada

$$\zeta(s) = -F_2 / 2F_1 \quad (6.51)$$

şeklinde alınmıştır ve aşağıdaki ifade bulunur.

$$\zeta(s) = \frac{(-1+s)(\pi s(-2+3s)+3(-1+s)\text{Log}[1-s])}{\pi(-4+s)s^2} \quad (6.52)$$

$0.1 \leq s \leq 0.99$ değerlerini (6.52) eşitliğinde yerine koyduğumuzda $\zeta(s)$ değerleri

$$\zeta(0.1) = 2.641$$

$$\zeta(0.3) = 0.88$$

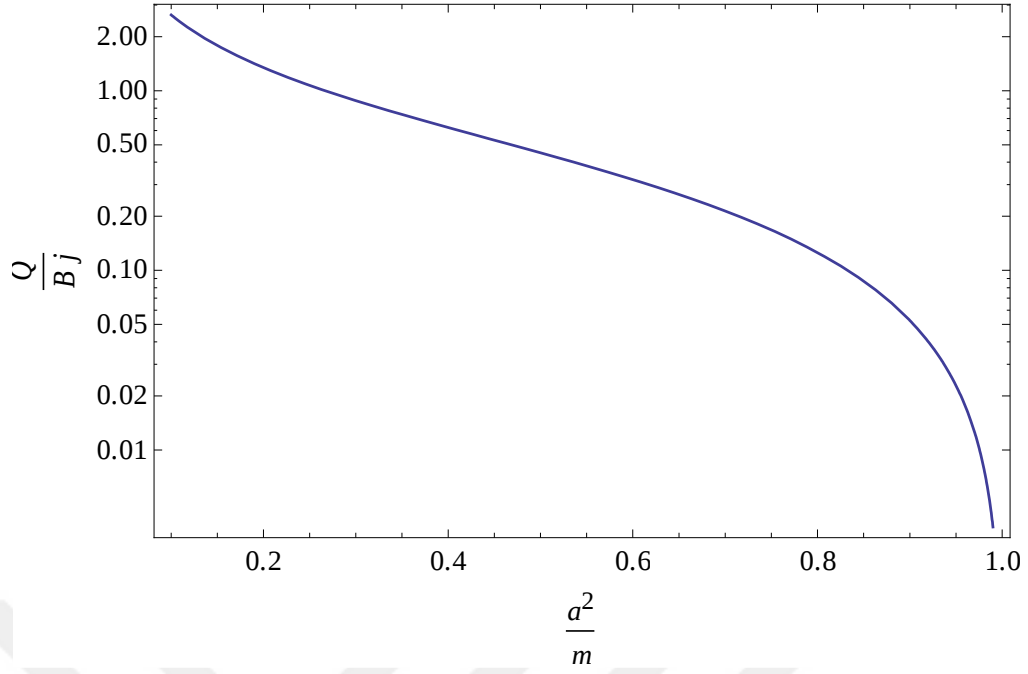
$$\zeta(0.5) = 0.451$$

$$\zeta(0.6) = 0.320$$

$$\zeta(0.75) = 0.167$$

$$\zeta(0.9) = 0.0525 \quad (6.53)$$

Yukarıdaki değerlere karşılık gelen $\zeta(s)$ 'nin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 6.1 $\zeta(Q/Bj)$ katsayısının $s(a^2/m)$ parametresine bağlı değişimini ifade eder.

Minimum elektromanyetik enerji

$$\Delta E_{\text{Min}} = E_{\text{EM}} - E_0 = (-F_2 F_2 / 4 F_1) B^2 j_H^2 / m \quad (6.54)$$

şeklinde elde edilir. Beş boyutlu kara delik için $s=0.9$ alınırsa

$$Q_{\text{Li}} = 0.053 B j_H \quad (6.55)$$

$$\Delta E_{\text{Min}} = -0.017 B^2 j_H^2 / m \quad (6.56)$$

bulunur. Wald yöntemi kullanılarak (6.50) ifadesindeki

$$Q_W = B j_H \quad (6.57)$$

elektromanyetik alanın en düşük enerji durumuna karşılık gelmiyor. Wald yaklaşımı ve yüksüz durum arasındaki enerji farkı

$$\Delta E_W = (F_1 + F_2) B^2 j_H^2 / m$$

$$\Delta E_W = 5.446 B^2 j_H^2 / m \quad (6.58)$$

olarak bulunur. Böylece Wald yöntemi kullanılarak hesaplanan elektromanyetik enerji yüksüz ($Q=0$) durumdan bile daha fazla olduğu görülür.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Düzgün manyetik alan içinde dönen beş boyutlu dönen bir kara deliği Myers-Perry metriği kullanarak tanımlandı. Kara deliğin uzay-zamanının kendisi gibi manyetik alanın konfigürasyonunun iki azimuthal simetriye, manyetik alan ile hizalı iki açısall momentuma ve Myers-Perry çözümü ile tanımlanabilecek kadar yeterince küçük bir elektrik yüküne sahip olmasına izin verildi.

Boyer-Lindquist kordinatlarında 5 boyutlu bir kara delik için Myers - Perry metriğini inşa ederek Christoffel sembollerini ve Ricci tansörlerini hesaplandı. Daha sonra Killing vektörlerini kullanarak Maxwell test alanını tanımlayan 5-vektör potansiyelini, EAT'lerini ve EMT'lerini hesaplandı. Son bölümde ise dış manyetik alanlar eşit alınarak ($H=B$), $b=a$ ve $b=0$ durumları için Komar kütle formülü kullanarak ayrı ayrı kara deliğin sahip olduğu yük miktarı ve minimum elektromanyetik enerji değeri elde edildi.

5 boyutta Li yaklaşımını kullanarak yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen Q yük miktarı ve minimum enerji değeri, 5 boyutta Wald yaklaşımıyla bulunan yük değerinden ve minimum enerji değerinden daha küçük olduğu bulundu.

4 boyutta bir kara deliğin sahip olduğu minimum enerji değerini ve yük miktarını Li ve Wald iki farklı yöntemle hesapladı. Wald enjeksiyon enerjisi yöntemini kullanırken, Li ise Komar kütle formülünü kullandı. Li'nin bulduğu yük değeri Wald'un bulduğu yük değeri ile karşılaştırıldığında Wald'un sonucunun kara deliğinin minimum enerjisine karşılık gelen yük değeri olmadığı, Wald durumunun en küçük enerji durumuna karşılık gelmediği görüldü.

Li, yaklaşımları kullanılarak elde edilen sonuçlara bakıldığında 4 boyutta olduğu gibi 5 boyutta da Wald yaklaşımıyla elde edilen yük ve minimum enerji değerinden daha küçük olduğu bulundu.



KAYNAKLAR

- [1] Kerr Roy P., (1963). “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics”, Physical Review Letters, 11: 237-238
- [2] Carter B., (1971). “Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom”, Physical Review Letters, 26: 331-333
- [3] d’Inverno R., Clarendon Press Oxford (2005). Introducing Einstein’s Relativity.
- [4] Misner C. W., Thorne ve J. A. Wheeler, (1973). Gravitation.
- [5] Tangherlini F. R., (1963). “Schwarzschild Field in N Dimensions and the Dimensionality of Space Problem”, Nuovo Cimento, 27: 636-651.
- [6] Myers R. C. ve Perry M. J., (1986). “Black Holes in Higher Dimensional Space-time”, Annals of Physics (N.Y.), 172: 304-347.
- [7] Giddings S. B. ve S. Thomas, (2002). “High Energy Colliders as Black Hole Factories: The End of Short Distance Physics”, Physical Review D, 65, 056010
- [8] S. Dimopoulos ve Landsberg G., (2001). “Black Holes at the LHC” Physical Review Letters, 87: 161602-161612
- [9] Papapetrou A., (1966). “Champs gravitationnels Stationnaires a Symetrie Axiale”, Annals de Instute Henri Poincare 4: 83-105.
- [10] Wald R. M., (1974). “Black Hole in a Uniform Magnetic Field” Physical Review D, 10: 1680-1685.
- [11] Wald R. M., General Relativity, (1984). The University of Chicago Press, Chicago
- [12] Li ve Xin Li, (2000). “Electromagnetic Energy for a Charged Kerr Black Hole in a Uniform Magnetic Field”, Physical Review D, 61: 0840033.
- [13] Komar A., (1959). “Covariant Conservation Laws in General Relativity”, Physical Review, 113: 934-936
- [14] Aliev A. N. ve Frolov V. P., (2004). “Five Dimensional Rotating Black Hole in a Uniform Magnetic Field: The Gyromagnetic Ratio”, Physical Review D, 69: 084022,

- [15] Hawking S. W., (1975). "Particle Creation by Black Holes", Communications in Mathematical Physics, 43: 199 - 220.
- [16] Robinson D. C., (1975). "Uniqueness of the Kerr Black Hole" Physical Review Letters, 34: 905-912
- [17] Frolov V. P. ve I. D. Novikov, (1998). Black Hole Physics, Basic Concepts and New Developments Kluwer, Dordrecht.
- [18] D'Auria Riccardo, ve Pietro Fre' (1999). "BPS Black Holes in Supergravity", Physics Reports, 316: 1-232.
- [19] Bardeen J. M., (1970). "A Variational Principle for Rotating Stars in General Relativity" Astrophysics Journal, 162: 71-95
- [20] Hamed N. Arkani, Dimopoulos S. ve G. Dvali, (1998). "The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter", Physics Letters B, 429: 263.
- [21] Antoniadis I., Arkani Hamed N., Dimopoulos S. ve Dvali G., (1998). "New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstring at a TEV", Physics Letters B, 436: 257-263.
- [22] Randall Lisa ve Randall Sundrum. (1999). "Large Mass Hierarchy From a Small Extra Dimension ", Physical Review Letters, 83: 3370-3373.
- [23] Susskind Leonard, Special and General Relativity of Lecture, Stanford University. www.youtube.com, 15 Nisan 2011.
- [24] Dirac Paul ve Adrien Maurie, (1975). "General Theory of Relativity", 1902 (Florida State University, Copyright by John Wiley).
- [25] Wolfram Mathematica-8 www.wolfram.com, 20 Mayıs 2010

CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_t g_{t\beta} + \partial_t g_{t\beta} - \partial_\beta g_{tt})$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt}$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_t g_{t\beta} + \partial_t g_{t\beta} - \partial_\beta g_{tt})$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{tt}$$

$$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_r g_{t\beta} + \partial_t g_{r\beta} - \partial_\beta g_{rt})$$

$$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} (g^{tt} \partial_r g_{tt} + g^{t\phi} \partial_r g_{t\phi} + g^{t\psi} \partial_r g_{t\psi})$$

$$\Gamma_{rt}^\phi = \Gamma_{tr}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\beta} (\partial_r g_{t\beta} + \partial_t g_{r\beta} - \partial_\beta g_{rt})$$

$$\Gamma_{rt}^\phi = \Gamma_{tr}^\phi = \frac{1}{2} (g^{\phi t} \partial_r g_{tt} + g^{\phi\phi} \partial_r g_{t\phi} + g^{\phi\psi} \partial_r g_{t\psi})$$

$$\Gamma_{rt}^\psi = \Gamma_{tr}^\psi = \frac{1}{2} g^{\psi\beta} (\partial_r g_{t\beta} + \partial_t g_{r\beta} - \partial_\beta g_{rt})$$

$$\Gamma_{rt}^\psi = \Gamma_{tr}^\psi = \frac{1}{2} (g^{\psi t} \partial_r g_{tt} + g^{\psi\phi} \partial_r g_{t\phi} + g^{\psi\psi} \partial_r g_{t\psi})$$

$$\Gamma_{\theta t}^t = \Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_\theta g_{t\beta} + \partial_t g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta t})$$

$$\Gamma_{\theta t}^t = \Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2} (g^{tt} \partial_\theta g_{tt} + g^{t\phi} \partial_\theta g_{t\phi} + g^{t\psi} \partial_\theta g_{t\psi})$$

$$\Gamma_{\theta t}^\phi = \Gamma_{t\theta}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\beta} (\partial_\theta g_{t\beta} + \partial_t g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta t})$$

$$\Gamma_{\theta t}^\phi = \Gamma_{t\theta}^\phi = \frac{1}{2} (g^{\phi t} \partial_\theta g_{tt} + g^{\phi\phi} \partial_\theta g_{t\phi} + g^{\phi\psi} \partial_\theta g_{t\psi})$$

$$\Gamma^\Psi_{\theta t} = \Gamma^\Psi_{t\theta} = \frac{1}{2}g^{\Psi\beta}(\partial_\theta g_{t\beta} + \partial_t g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta t})$$

$$\Gamma^\Psi_{\theta t} = \Gamma^\Psi_{t\theta} = \frac{1}{2}(g^{\Psi t}\partial_\theta g_{tt} + g^{\Psi\phi}\partial_\theta g_{t\phi} + g^{\Psi\psi}\partial_\theta g_{t\psi})$$

$$\Gamma^r_{\phi t} = \Gamma^r_{t\phi} = \frac{1}{2}g^{r\beta}(\partial_\phi g_{t\beta} + \partial_t g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\phi t})$$

$$\Gamma^r_{\phi t} = \Gamma^r_{t\phi} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{t\phi}$$

$$\Gamma^r_{\psi t} = \Gamma^r_{t\psi} = \frac{1}{2}g^{r\beta}(\partial_\psi g_{t\beta} + \partial_t g_{\psi\beta} - \partial_\beta g_{\psi t})$$

$$\Gamma^r_{\psi t} = \Gamma^r_{t\psi} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{t\psi}$$

$$\Gamma^\theta_{\psi t} = \Gamma^\theta_{t\psi} = \frac{1}{2}g^{\theta\beta}(\partial_\psi g_{t\beta} + \partial_t g_{\psi\beta} - \partial_\beta g_{\psi t})$$

$$\Gamma^\theta_{\psi t} = \Gamma^\theta_{t\psi} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{t\psi}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi t} = \Gamma^\theta_{t\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\beta}(\partial_\phi g_{t\beta} + \partial_t g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\phi t})$$

$$\Gamma^\theta_{\phi t} = \Gamma^\theta_{t\phi} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{t\phi}$$

$$\Gamma^r_{\psi t} = \Gamma^r_{t\psi} = \frac{1}{2}g^{r\beta}(\partial_\psi g_{t\beta} + \partial_t g_{\psi\beta} - \partial_\beta g_{\psi t})$$

$$\Gamma^r_{\psi t} = \Gamma^r_{t\psi} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{t\psi}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{r\beta}(\partial_r g_{r\beta} + \partial_r g_{r\beta} - \partial_\beta g_{rr})$$

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr}$$

$$\Gamma^\theta_{rr} = \frac{1}{2}g^{\theta\beta}(\partial_r g_{r\beta} + \partial_r g_{r\beta} - \partial_\beta g_{rr})$$

$$\Gamma^\theta_{rr} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{rr}$$

$$\Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^r_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{r\beta}(\partial_r g_{\theta\beta} + \partial_\theta g_{r\beta} - \partial_\beta g_{r\theta})$$

$$\Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^r_{r\theta} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_\theta g_{rr}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\beta}(\partial_r g_{\theta\beta} + \partial_\theta g_{r\beta} - \partial_\beta g_{r\theta})$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{r\beta}(\partial_\theta g_{\theta\beta} + \partial_\theta g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta\theta})$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\beta}(\partial_\theta g_{\theta\beta} + \partial_\theta g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta\theta})$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^t_{\phi r} = \Gamma^t_{r\phi} = \frac{1}{2}g^{t\beta}(\partial_\phi g_{r\beta} + \partial_r g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\phi r})$$

$$\Gamma^t_{\phi r} = \Gamma^t_{r\phi} = \frac{1}{2}(g^{tt}\partial_r g_{\phi t} + g^{t\phi}\partial_r g_{\phi\phi} + g^{t\psi}\partial_r g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\beta}(\partial_\phi g_{r\beta} + \partial_r g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\phi r})$$

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{2}(g^{\phi t}\partial_r g_{\phi t} + g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} + g^{\phi\psi}\partial_r g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^\psi_{\phi r} = \Gamma^\psi_{r\phi} = \frac{1}{2}g^{\psi\beta}(\partial_\phi g_{r\beta} + \partial_r g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\phi r})$$

$$\Gamma^\psi_{\phi r} = \Gamma^\psi_{r\phi} = \frac{1}{2}(g^{\psi t}\partial_r g_{\phi t} + g^{\psi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} + g^{\psi\psi}\partial_r g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^t_{\psi r} = \Gamma^t_{r\psi} = \frac{1}{2}g^{t\beta}(\partial_\psi g_{r\beta} + \partial_r g_{\psi\beta} - \partial_\beta g_{\psi r})$$

$$\Gamma^t_{\psi r} = \Gamma^t_{r\psi} = \frac{1}{2}(g^{tt}\partial_r g_{\psi t} + g^{t\phi}\partial_r g_{\psi\phi} + g^{t\psi}\partial_r g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^\phi_{\psi r} = \Gamma^\phi_{r\psi} = \frac{1}{2}g^{\phi\beta}(\partial_\psi g_{r\beta} + \partial_r g_{\psi\beta} - \partial_\beta g_{\psi r})$$

$$\Gamma^\phi_{\psi r} = \Gamma^\phi_{r\psi} = \frac{1}{2}(g^{t\phi}\partial_r g_{\psi t} + g^{\phi\phi}\partial_r g_{\psi\phi} + g^{\phi\psi}\partial_r g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^t_{\theta\phi} = \Gamma^t_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{t\beta}(\partial_\theta g_{\phi\beta} + \partial_\phi g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta\phi})$$

$$\Gamma^t_{\theta\phi} = \Gamma^t_{\phi\theta} = \frac{1}{2}(g^{tt}\partial_\theta g_{\phi t} + g^{t\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} + g^{t\psi}\partial_\theta g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\beta}(\partial_\phi g_{\theta\beta} + \partial_\theta g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\theta\phi})$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}(g^{\phi t}\partial_\theta g_{\phi t} + g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} + g^{\phi\psi}\partial_\theta g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^\psi_{\theta\phi} = \Gamma^\psi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\psi\beta}(\partial_\phi g_{\theta\beta} + \partial_\theta g_{\phi\beta} - \partial_\beta g_{\theta\phi})$$

$$\Gamma^\psi_{\theta\phi} = \Gamma^\psi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}(g^{\psi t}\partial_\theta g_{\phi t} + g^{\psi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} + g^{\psi\psi}\partial_\theta g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^t_{\theta\psi} = \Gamma^t_{\psi\theta} = \frac{1}{2}g^{t\beta}(\partial_\theta g_{\psi\beta} + \partial_\psi g_{\theta\beta} - \partial_\beta g_{\theta\psi})$$

$$\Gamma^t_{\theta\psi} = \Gamma^t_{\psi\theta} = \frac{1}{2}(g^{tt}\partial_\theta g_{\psi t} + g^{t\phi}\partial_\theta g_{\psi\phi} + g^{t\psi}\partial_\theta g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\theta\psi} = \Gamma^{\Phi}_{\psi\theta} = \frac{1}{2} g^{\Phi\beta} (\partial_{\theta} g_{\psi\beta} + \partial_{\psi} g_{\theta\beta} - \partial_{\beta} g_{\theta\psi})$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\theta\psi} = \Gamma^{\Phi}_{\psi\theta} = \frac{1}{2} (g^{\Phi t} \partial_{\theta} g_{\psi t} + g^{\Phi\phi} \partial_{\theta} g_{\psi\phi} + g^{\Phi\psi} \partial_{\theta} g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^{\Psi}_{\theta\psi} = \Gamma^{\Psi}_{\psi\theta} = \frac{1}{2} g^{\Psi\beta} (\partial_{\psi} g_{\theta\beta} + \partial_{\theta} g_{\psi\beta} - \partial_{\beta} g_{\theta\psi})$$

$$\Gamma^{\Psi}_{\theta\psi} = \Gamma^{\Psi}_{\psi\theta} = \frac{1}{2} (g^{\Psi t} \partial_{\theta} g_{\psi t} + g^{\Psi\phi} \partial_{\theta} g_{\psi\phi} + g^{\Psi\psi} \partial_{\theta} g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_{\phi} g_{\phi\beta} + \partial_{\phi} g_{\phi\beta} - \partial_{\beta} g_{\phi\phi})$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\phi\phi}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_{\phi} g_{\phi\beta} + \partial_{\phi} g_{\phi\beta} - \partial_{\beta} g_{\phi\phi})$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_{\theta} g_{\phi\phi}$$

$$\Gamma^r_{\phi\psi} = \Gamma^r_{\psi\phi} = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_{\phi} g_{\psi\beta} + \partial_{\psi} g_{\phi\beta} - \partial_{\beta} g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^r_{\phi\psi} = \Gamma^r_{\psi\phi} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\psi\phi}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\psi} = \Gamma^{\theta}_{\psi\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_{\phi} g_{\psi\beta} + \partial_{\psi} g_{\phi\beta} - \partial_{\beta} g_{\phi\psi})$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\psi} = \Gamma^{\theta}_{\psi\phi} = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_{\theta} g_{\psi\phi}$$

$$\Gamma^r_{\psi\psi} = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_{\psi} g_{\psi\beta} + \partial_{\psi} g_{\psi\beta} - \partial_{\beta} g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^r_{\psi\psi} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\psi\psi}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\psi\psi} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_{\psi} g_{\psi\beta} + \partial_{\psi} g_{\psi\beta} - \partial_{\beta} g_{\psi\psi})$$

$$\Gamma^{\theta}_{\psi\psi} = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_{\theta} g_{\psi\psi}.$$

RICCI TANSÖRLERİ

$$R_{tt} = \partial_r \Gamma_{tt}^r + \partial_\theta \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{tr}^\theta \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tr}^\psi \Gamma_{tt}^\psi - \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{r\phi}^\phi - \Gamma_{\phi t}^r \Gamma_{tt}^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^\theta \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{t\phi}^\theta \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\psi r}^\psi - \Gamma_{t\psi}^r \Gamma_{tt}^\psi + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{\psi\theta}^\psi - \Gamma_{t\psi}^\theta \Gamma_{tt}^\psi - \Gamma_{\phi t}^\theta \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{t\theta}^\psi \Gamma_{tt}^\psi$$

$$R_{t\phi} = \partial_r \Gamma_{t\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{t\phi}^\theta + \Gamma_{t\phi}^r (\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\psi r}^\psi) + \Gamma_{t\phi}^\theta (\Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\psi\theta}^\psi) - \Gamma_{\phi r}^t \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{\phi\theta}^t \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{tr}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{tr}^\psi \Gamma_{\psi\phi}^r - \Gamma_{t\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \Gamma_{t\theta}^\psi \Gamma_{\psi\phi}^\theta - \Gamma_{t\psi}^r \Gamma_{\phi r}^\psi - \Gamma_{t\psi}^\theta \Gamma_{\psi\phi}^\theta$$

$$R_{t\psi} = \partial_r \Gamma_{t\psi}^r + \partial_\theta \Gamma_{t\psi}^\theta + \Gamma_{t\psi}^r (\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi) + \Gamma_{t\psi}^\theta (\Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\phi) - \Gamma_{\psi r}^t \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{\psi\theta}^t \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{tr}^\psi \Gamma_{\psi\psi}^r - \Gamma_{t\theta}^\psi \Gamma_{\psi\psi}^\theta - \Gamma_{t\phi}^\psi \Gamma_{\phi\psi}^r - \Gamma_{t\phi}^\theta \Gamma_{\phi\psi}^\theta$$

$$R_{rr} = -\partial_r \Gamma_{rr}^t - \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\phi r}^\phi - \partial_r \Gamma_{\psi r}^\psi - \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{rr}^r (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\psi r}^\psi) + \Gamma_{rr}^\theta (\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\psi\theta}^\psi) - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^t - 2\Gamma_{\phi r}^t \Gamma_{rr}^\phi - 2\Gamma_{\psi r}^t \Gamma_{rr}^\psi - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^\theta - 2\Gamma_{\phi\psi}^\theta \Gamma_{rr}^\psi - \Gamma_{\psi r}^\psi \Gamma_{rr}^\psi$$

$$R_{r\theta} = -\partial_r \Gamma_{r\theta}^t - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r - \partial_r \Gamma_{rr}^\theta - \partial_\theta \Gamma_{\psi r}^\psi - \partial_\theta \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\theta r}^r (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\psi r}^\psi) + \Gamma_{\theta r}^\theta (\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{\psi\theta}^\psi) - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta t}^r - \Gamma_{\phi\theta}^t \Gamma_{r\theta}^\phi - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\theta t}^\phi - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \Gamma_{\psi\theta}^\psi \Gamma_{r\phi}^\psi - \Gamma_{\psi r}^\psi \Gamma_{\psi\theta}^\psi - \Gamma_{\psi r}^\theta \Gamma_{\psi\theta}^\theta - \Gamma_{\psi r}^\psi \Gamma_{\phi\theta}^\psi$$

$$R_{\theta\theta} = -\partial_r \Gamma_{t\theta}^\theta + \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta r}^r - \partial_\theta \Gamma_{\psi\theta}^\psi - \partial_\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^r (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\psi r}^\psi) + \Gamma_{\theta\theta}^\theta (\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{\psi\theta}^\psi) - 2\Gamma_{\phi\theta}^t \Gamma_{\theta t}^\phi - 2\Gamma_{\psi\theta}^t \Gamma_{\theta t}^\psi - 2\Gamma_{\psi\theta}^\psi \Gamma_{\phi\theta}^\psi - \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{t\theta}^t - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\psi\phi}^\psi \Gamma_{\psi\theta}^\psi - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\phi$$

$$R_{\phi\psi} = -\partial_r \Gamma_{\phi\psi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\psi}^\theta + \Gamma_{\phi\psi}^r (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{rr}^r) + \Gamma_{\phi\psi}^\theta (\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{r\theta}^r) - \Gamma_{\phi\theta}^t \Gamma_{t\psi}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^r \Gamma_{\psi r}^\psi - \Gamma_{\psi t}^r \Gamma_{\phi r}^\psi - \Gamma_{\psi\theta}^\psi \Gamma_{t\psi}^\theta - \Gamma_{\psi\phi}^\psi \Gamma_{\psi\psi}^\psi - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\psi\psi}^\psi - \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\psi\theta}^\psi - \Gamma_{\phi r}^\psi \Gamma_{\psi\psi}^r - \Gamma_{\phi t}^\theta \Gamma_{\theta\psi}^\theta$$

$$R_{\phi\phi} = -\partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^r (\Gamma_{tr}^t - \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\psi r}^\psi + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{rr}^r) + \Gamma_{\phi\phi}^\theta (\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{\psi\theta}^\psi + \Gamma_{r\theta}^r) - 2\Gamma_{\phi t}^r \Gamma_{\phi r}^r - 2\Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta - 2\Gamma_{\phi r}^\psi \Gamma_{\phi\psi}^\psi - 2\Gamma_{\phi\psi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta$$

$$\begin{aligned}
R_{\psi\psi} = & -\partial_r \Gamma_{\psi\psi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\psi\psi}^\theta + \Gamma_{\psi\psi}^r (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{\psi r}^\psi + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{rr}^r) + \Gamma_{\psi\psi}^\theta (\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\psi\theta}^\psi \\
& + \Gamma_{r\theta}^r) - 2\Gamma_{\psi t}^r \Gamma_{\psi r}^t - 2\Gamma_{\theta\psi}^t \Gamma_{t\psi}^\theta - 2\Gamma_{\phi\psi}^r \Gamma_{\phi\psi}^r - 2\Gamma_{\theta\psi}^\theta \Gamma_{\psi\phi}^\theta.
\end{aligned}$$



ELEKTROMANYETİK ALAN TANSÖRÜ

C-1 Vektör Potansiyeli

$$A_t = g_{tt}A^t + g_{\phi t}A^\phi + g_{t\psi}A^\psi$$

$$A_\phi = g_{\phi\phi}A^\phi + g_{\phi t}A^t + g_{\phi\psi}A^\psi$$

$$A_\psi = g_{\psi\psi}A^\psi + g_{\psi t}A^t + g_{\psi\phi}A^\phi$$

C-2 Kovaryant EAT

$$F_{tt} = -F_{tt} = \partial_t A_t - \partial_t A_t = 0$$

$$F_{t\theta} = -F_{\theta t} = \partial_t A_\theta - \partial_\theta A_t$$

$$F_{t\phi} = -F_{\phi t} = \partial_t A_\phi - \partial_\phi A_t = 0$$

$$F_{t\psi} = -F_{\psi t} = \partial_t A_\psi - \partial_\psi A_t = 0$$

$$F_{rr} = \partial_r A_r - \partial_r A_r = 0$$

$$F_{r\theta} = -F_{\theta r} = \partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r = 0$$

$$F_{r\phi} = -F_{\phi r} = \partial_r A_\phi - \partial_\phi A_r = \partial_r A_\phi$$

$$F_{r\psi} = -F_{\psi r} = \partial_r A_\psi - \partial_\psi A_r = \partial_r A_\psi$$

$$F_{\theta\theta} = \partial_\theta A_\theta - \partial_\theta A_\theta = 0$$

$$F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = \partial_\theta A_\phi - \partial_\phi A_\theta = \partial_\theta A_\phi$$

$$F_{\theta\psi} = -F_{\psi\theta} = \partial_\theta A_\psi - \partial_\psi A_\theta = \partial_\theta A_\psi$$

$$F_{\phi\phi} = \partial_\phi A_\phi - \partial_\phi A_\phi = 0$$

$$F_{\phi\psi} = -F_{\psi\phi} = \partial_{\phi}A_{\psi} - \partial_{\psi}A_{\phi} = 0$$

$$F_{\psi\psi} = \partial_{\psi}A_{\psi} - \partial_{\psi}A_{\psi} = 0$$

C-3 Kontravaryant EAT

$$F^{tt} = F^{t\phi} = F^{t\psi} = F^{rr} = F^{r\theta} = F^{\theta\theta} = F^{\phi\phi} = F^{\psi\psi} = F^{\phi\psi} = 0$$

$$F^{tr} = -F^{rt} = g^{tt}g^{rr}F_{tr} + g^{t\phi}g^{rr}F_{\phi r} + g^{t\psi}g^{rr}F_{\psi r}$$

$$F^{t\theta} = -F^{\theta t} = g^{tt}g^{\theta\theta}F_{t\theta} + g^{t\phi}g^{\theta\theta}F_{\phi\theta} + g^{t\psi}g^{\theta\theta}F_{\psi\theta}$$

$$F^{r\phi} = -F^{\phi r} = g^{\phi\phi}g^{rr}F_{\phi r} + g^{t\phi}g^{rr}F_{tr} + g^{\phi\psi}g^{rr}F_{\psi r}$$

$$F^{r\psi} = -F^{\psi r} = g^{\psi\psi}g^{rr}F_{\psi r} + g^{\psi\phi}g^{rr}F_{\phi r} + g^{t\psi}g^{rr}F_{tr}$$

$$F^{\theta\phi} = -F^{\phi\theta} = g^{\phi t}g^{\theta\theta}F_{\theta t} + g^{\theta\phi}g^{\theta\theta}F_{\theta\phi} + g^{\phi\psi}g^{\theta\theta}F_{\psi\theta}$$

$$F^{\psi\theta} = -F^{\theta\psi} = g^{\psi\psi}g^{\theta\theta}F_{\psi\theta} + g^{t\psi}g^{\theta\theta}F_{\phi t} + g^{\phi\psi}g^{\theta\theta}F_{\phi\theta}$$

C-4 EAT'nün Kovaryant türevi

$$\nabla_t F^{tt} = 0$$

$$\nabla_t F^{tr} = 0$$

$$\nabla_t F^{t\theta} = 0$$

$$\nabla_t F^{t\phi} = F^r\phi\Gamma_{rt}^t + F^{tr}\Gamma_{rt}^{\phi} + F^{\theta\phi}\Gamma_{\theta t}^t + F^{t\theta}\Gamma_{\phi t}^{\theta}$$

$$\nabla_t F^{t\psi} = \partial_t F^{t\psi} + F^{t\psi}\Gamma_{tt}^t + F^{tt}\Gamma_{tt}^{\psi} + F^{r\psi}\Gamma_{rt}^t + F^{tr}\Gamma_{rt}^{\psi} + F^{\theta\psi}\Gamma_{\theta t}^t + F^{t\theta}\Gamma_{\psi t}^{\theta} + F^{\phi\psi}\Gamma_{\phi t}^t + F^{t\phi}\Gamma_{\psi t}^{\phi} + F^{\psi\psi}\Gamma_{\psi t}^t + F^{t\psi}\Gamma_{\psi t}^{\psi}$$

$$\nabla_r F^{rt} = \partial_r F^{rt} + F^{tt}\Gamma_{tr}^r + F^{rt}\Gamma_{tr}^t + F^{\theta t}\Gamma_{\theta r}^t + F^r\phi\Gamma_{\phi r}^t + F^{r\psi}\Gamma_{\psi r}^t$$

$$\nabla_r F^{rr} = 0$$

$$\nabla_r F^{r\theta} = 0$$

$$\nabla_r F^{r\phi} = \partial_r F^{r\phi} + F^{rt}\Gamma_{tr}^{\phi} + F^r\phi\Gamma_{rr}^r + F^{\theta\phi}\Gamma_{\theta r}^t + F^r\phi\Gamma_{\phi r}^{\phi}$$

$$\nabla_r F^{r\psi} = \partial_r F^{r\psi} + F^{rt}\Gamma_{tr}^{\psi} + F^{r\psi}\Gamma_{rr}^r + F^{\theta\psi}\Gamma_{\theta r}^t + F^r\phi\Gamma_{\phi r}^{\psi} + F^{r\psi}\Gamma_{\psi r}^{\psi}$$

$$\nabla_{\theta} F^{\theta t} = \partial_{\theta} F^{\theta t} + F^{\theta t}\Gamma_{t\theta}^t + F^{rt}\Gamma_{r\theta}^t + F^{\theta t}\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} + F^{\phi t}\Gamma_{\phi\theta}^t + F^{\theta\phi}\Gamma_{\phi\theta}^t + F^{\theta\psi}\Gamma_{\psi\theta}^t$$

$$\nabla_{\theta} F^{\theta r} = 0$$

$$\nabla_{\theta} F^{\theta\theta} = 0$$

$$\nabla_{\theta} F^{\theta\theta} = \partial_{\theta} F^{\theta\phi} + F^{\theta t} \Gamma_{t\theta} + F^r \phi \Gamma_{r\theta}^{\theta} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} + F^{\theta\psi} \Gamma_{\psi\theta} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\phi\theta}$$

$$\nabla_{\theta} F^{\theta\psi} = \partial_{\theta} F^{\theta\psi} + F^{\theta t} \Gamma_{t\theta}^{\psi} + F^{r\psi} \Gamma_{r\theta}^{\theta} + F^{\theta\psi} \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} + F^{\theta\psi} \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\phi\theta}$$

$$\nabla_{\phi} F^{\phi t} = F^{rt} \Gamma_{r\phi} + F^{\phi r} \Gamma_{r\phi}^t + F^{\theta t} \Gamma_{\theta\phi} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\theta\phi}^t$$

$$\nabla_{\phi} F^{\phi r} = 0$$

$$\nabla_{\phi} F^{\phi\theta} = 0$$

$$\nabla_{\phi} F^{\phi\phi} = 0$$

$$\nabla_{\phi} F^{\phi\psi} = F^{r\psi} \Gamma_{r\phi} + F^{\phi r} \Gamma_{r\phi}^{\psi} + F^{\theta\psi} \Gamma_{\theta\phi} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\theta\phi}^{\psi}$$

$$\nabla_{\psi} F^{\psi t} = F^{rt} \Gamma_{r\psi} + F^{\psi r} \Gamma_{r\psi}^t + F^{\theta t} \Gamma_{\theta\psi} + F^{\phi\psi} \Gamma_{\phi\psi}^t$$

$$\nabla_{\psi} F^{\psi r} = 0$$

$$\nabla_{\psi} F^{\psi\theta} = 0$$

$$\nabla_{\psi} F^{\psi\phi} = F^{r\phi} \Gamma_{r\psi}^{\psi} + F^{\psi r} \Gamma_{r\psi}^{\phi} + F^{\theta\phi} \Gamma_{\theta\psi}^{\psi} + F^{\phi\psi} \Gamma_{\phi\psi}^{\phi}$$

$$\nabla_{\psi} F^{\psi\psi} = 0$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \nabla_t F^{t\phi} + \nabla_t F^{t\psi} + \nabla_r F^{rt} + \nabla_r F^{r\phi} + \nabla_r F^{r\psi} + \nabla_{\theta} F^{\theta t} + \nabla_{\theta} F^{\theta\phi} + \nabla_{\theta} F^{\theta\psi} + \nabla_{\phi} F^{\phi t} + \nabla_{\phi} F^{\phi\psi} + \nabla_{\psi} F^{\psi t} + \nabla_{\psi} F^{\psi\phi}$$

ENERJİ-MOMENTUM TANSÖRLERİ

D-1 Kovaryant EMT'leri

$$\begin{aligned}
T_{tt} = & \frac{1}{4\pi} (\Delta(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta)^2)/\Sigma^5 + (4(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + \\
& r^2) + b(bQ + Hmr^2))^2\sin^22\theta)/16\Sigma^5 - 1/2(-1 + m/\Sigma(-((-3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - \\
& 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + \\
& 8Qr^4 + 4m(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 + r^2))\cos2\theta + (a^2-b^2)m(a^2bH + bHr^2 - \\
& aB(b^2+r^2))\cos4\theta)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^6H + \\
& 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + \\
& 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2+b^2+2r^2) \\
& (a^4H+abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2))\cos2\theta + (a^2-b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - \\
& r^2))\cos4\theta)(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + \\
& H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + ((3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm \\
& - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 \\
& + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos2\theta \\
& + (a^2-b^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos4\theta)\sin^2\theta(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + \\
& a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta))/8\Sigma^5 \\
& + (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + \\
& 4(a^4B + abHm - a^2B(m - 2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos2\theta + (a^2-b^2)^2B\cos4\theta)(r^2(a(-bHm + Q) + \\
& Br^4 + a^2B(-m+r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + \\
& 2a^2B(b^2 + m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta \\
& (a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + ((3 \\
& a^4H + 2a^2b^2H + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H -
\end{aligned}$$

$$abBm + 2a^2Hr^2 + b^2H(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2 + r^2))\cos^4\theta + (r^2 + b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-a b B m (b^2 + r^2) + 2 a^2 H r^2 (b^2 + r^2) + b^2 (-b^2 H m + b Q + 2 H m r^2) + 2 b^2 H (b^2 m + a^2 (b^2 + r^2))\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 - ((a^2 - b^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + Hmr^2))(aBm + bHm - 2Q + (aB - bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/8\Sigma^5$$

$$T_{i\phi} = T_{\phi i} = \frac{1}{4\pi}(1/\Sigma^5 \Delta \sin^2\theta)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta)(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)) + (2(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + Hmr^2))\cos\theta\sin\theta(r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m + r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m - 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2)\sin^2\theta))\sin 2\theta)/4\Sigma^5 + (1/(2\Sigma))a\sin^2\theta(-((-3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 + r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)m(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 + r^2))\cos 4\theta)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - r^2))\cos 4\theta)(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta - b^4H\sin^4\theta H\cos^2\theta (-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + ((3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(-abHm + a^2B(b^2 + r^2) - b^2B(b^2 - m + r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)(-abHm + a^2B(b^2 + r^2) - b^2B(b^2 - m + r^2))\cos 4\theta)\sin^2\theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B + abHm - a^2B(m - 2r^2) - b^2B(b^2 + 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m + r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta (a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m - 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2)\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + ((3a^4H + 2a^2b^2H + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + b^2H(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2 + r^2))\cos^4\theta + (r^2 + b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2 + r^2) +$$

$$2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm+bQ+2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+ r^2)) \sin^2\theta))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ + Hmr^2))(aBm + bHm - 2Q + (aB - bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/8\Sigma^5$$

$$\begin{aligned} T_{i\psi}=T_{\psi t}=\frac{1}{4\pi} & ((1/\Sigma^5\Delta\cos\theta^2)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta)(abBm + b^2Hm - \\ & bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2 \\ & \sin^2\theta)) - (2(a^2(bHm-Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ + Hmr^2))\cos\theta\sin\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + \\ & b^4Hm + a^4H(b^2+r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + \\ & aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + \\ & 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta))/4\Sigma^5 + (1/(2\Sigma))bm\cos^2\theta(-((-3a^3b^2Bm + 3a^4b^2Bm + 3 \\ & a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q-3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2- 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + \\ & 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2+b^2+2r^2)(a^2bH + bHr^2- aB(b^2+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)m(a^2bH + bHr^2- \\ & aB(b^2+r^2))\cos 4\theta)(-aBm - bHm+Q+bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^6H + 2a^4b^2H \\ & + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + \\ & 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(a^4H + \\ & abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 4\theta) \\ & (abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(- \\ & b^2m+2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + (((3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - \\ & 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + \\ & 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2)-b^2B(b^2-m+r^2))\cos 2\theta + (a^2- \\ & b^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 4\theta)\sin^2\theta(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + \\ & a^4B\cos^4\theta - B(a^2m-2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B \sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + \\ & (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B \\ & + abHm - a^2B(m-2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm+Q) + Br^4 + \\ & a^2B(-m+r^2)) + a^3(a^3B+bHm+aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + \\ & m) r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm + \\ & Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2)\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + (((3a^4H + 2a^2b^2H \\ & + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + \\ & b^2H(-b^2+m-2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2+ \\ & r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) \\ & + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2 \\ & (b^2+r^2))\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ + Hmr^2))(aBm + bHm - \\ & 2Q + (aB - bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/\Sigma^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{rr} = & \frac{1}{4\pi} (1/\Sigma) (-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta)^2/\Sigma^4 - (4bmr^2(a^2+r^2)\cos^2\theta(- \\
& aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta)(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(- \\
& aBm + 2bHr^2) \sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta)))/2\Delta\Sigma^5 - (4amr^2(b^2 \\
& + r^2)\sin^2\theta(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta)(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + \\
& a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)))/2\Delta\Sigma^5 \\
& -(4abmr^2\cos^2\theta\sin^2\theta(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + \\
& b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta)) (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - \\
& B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)))/2\Delta\Sigma^5 + (2r^2((b^2m \\
& + a^2(b^2+r^2))\cot^2\theta + (b^2+r^2)(b^2+(-m+r^2)\csc^2\theta))\sin^4\theta(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - \\
& B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta))^2)/2\Delta\Sigma^5 - (1/2\Delta r^2\Sigma(\\
& - ((-3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + \\
& 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2+b^2+2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2 \\
& + r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)m(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 4\theta)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + \\
& aBm\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta (3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + \\
& 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 \\
& - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(a^4H+abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(a^4H \\
& +abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 4\theta)(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + \\
& 2bHr^2) \sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + ((3a^4b^2B + 2a^2b^4B \\
& + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + \\
& 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(-abHm + \\
& a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 4\theta) \\
& \sin^2\theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m-2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(- \\
& bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + \\
& 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B + abHm - a^2B(m-2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - \\
& b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m+r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (- \\
& a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2+m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + \\
& a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + \\
& 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + (((3a^4H + 2a^2b^2H + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + \\
& 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + b^2H(-b^2+m-2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - \\
& b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2+r^2)) \cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm \\
& -b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + \\
& 2a^2Hr^2(b^2 + r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2) \\
& (a^2(bHm-Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ + Hmr^2))(aBm + bHm - 2Q + (aB - bH)m\cos 2\theta)
\end{aligned}$$

$$\sin 2\theta^2) / 8\Sigma^5) + (r^2 \cos^4 \theta (abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H \cos^4 \theta + b(-aBm + 2bHr^2) \sin^2 \theta + b^4H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2 \sin^2 \theta))^2 (2(a^2 + r^2)(a^2 + (-m + r^2) \sec^2 \theta) + 2(a^2(b^2 + m) + b^2r^2) \tan^2 \theta)) / 2\Delta \Sigma^5$$

$$\begin{aligned} T_{r\theta} = T_{\theta r} = & -\frac{1}{4\pi} (2amr(b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta (-aBm - bHm + Q + bHm \cos^2 \theta + aBm \sin^2 \theta) (r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m + r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2) \cos^4 \theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + m)r^2 + 2b^2Br^4) \sin^2 \theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m - 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2) \sin^2 \theta))) / 2\Delta \Sigma^5 - (2abmr \cos^3 \theta \sin \theta (abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H \cos^4 \theta + b(-aBm + 2bHr^2) \sin^2 \theta + b^4H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2 \sin^2 \theta)) (r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m + r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2) \cos^4 \theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + m)r^2 + 2b^2Br^4) \sin^2 \theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m - 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2) \sin^2 \theta))) / 2\Delta \Sigma^5 + (2r \cos \theta ((b^2m + a^2(b^2 + r^2)) \cot^2 \theta + (b^2 + r^2)(b^2 + (-m + r^2) \csc^2 \theta)) \sin^3 \theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B \cos^4 \theta - B(a^2m - 2b^2r^2) \sin^2 \theta + b^4B \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B \sin^2 \theta)) (r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m + r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2) \cos^4 \theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2 + m)r^2 + 2b^2Br^4) \sin^2 \theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2 + m) + b^4Br^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m - 2r^2) + 2aB(a^2(b^2 + m) + b^2r^2) \sin^2 \theta))) / 2\Delta \Sigma^5 + (2bmr(a^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta (-aBm - bHm + Q + bHm \cos^2 \theta + aBm \sin^2 \theta) ((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2 + r^2)) \cos^4 \theta + (r^2 + b^2 \sin^2 \theta) (-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2) \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (-abBm(b^2 + r^2) + 2a^2Hr^2(b^2 + r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2 + r^2)) \sin^2 \theta))) / 2\Delta \Sigma^5 + (2abmr \cos \theta \sin^3 \theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B \cos^4 \theta - B(a^2m - 2b^2r^2) \sin^2 \theta + b^4B \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B \sin^2 \theta)) ((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2 + r^2)) \cos^4 \theta + (r^2 + b^2 \sin^2 \theta) (-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2) \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (-abBm(b^2 + r^2) + 2a^2Hr^2(b^2 + r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2 + r^2)) \sin^2 \theta))) / 2\Delta \Sigma^5 + (2r(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + Hmr^2)) (-1 - (2m(a^2 + r^2)(b^2 + r^2)) / 2\Delta \Sigma) (-aBm - bHm + Q + bHm \cos^2 \theta + aBm \sin^2 \theta) \sin 2\theta) / 4\Sigma^4 - (4bmr(a^2 + r^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + Hmr^2)) \cos^2 \theta (abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H \cos^4 \theta + b(-aBm + 2bHr^2) \sin^2 \theta + b^4H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2 \sin^2 \theta)) \sin 2\theta) / 2\Delta \Sigma^5 - (4amr(b^2 + r^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2 + r^2) + b(bQ + Hmr^2)) \sin^2 \theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B \cos^4 \theta - B(a^2m - 2b^2r^2) \sin^2 \theta + b^4B \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B \sin^2 \theta)) \sin 2\theta) / 2\Delta \Sigma^5 - (r \cos^3 \theta \sin \theta (abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H \cos^4 \theta + b(-aBm + 2bHr^2) \sin^2 \theta + b^4H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2 \sin^2 \theta))) / 2\Delta \Sigma^5$$

$$+ b^4 H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2 m + 2a^2 r^2 + 2a^2 b^2 \sin^2 \theta) ((-a^3 b B m + a^2 b^2 H m + b^4 H m + a^4 H (b^2 + r^2)) \cos^4 \theta + (r^2 + b^2 \sin^2 \theta) (-ab B m - b^2 H m + b Q + b^2 H r^2 + H r^4 + b(b^3 H + a B m + b H r^2) \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (-ab B m (b^2 + r^2) + 2a^2 H r^2 (b^2 + r^2) + b^2 (-b^2 H m + b Q + 2H m r^2) + 2b^2 H (b^2 m + a^2 (b^2 + r^2)) \sin^2 \theta)) (2(a^2 + r^2)(a^2 + (-m + r^2) \sec^2 \theta) + 2(a^2 (b^2 + m) + b^2 r^2) \tan^2 \theta)) / 2\Delta \Sigma^5$$

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} (2\cos^2 \theta ((b^2 m + a^2 (b^2 + r^2)) \cot^2 \theta + (b^2 + r^2)(b^2 + (-m + r^2) \csc^2 \theta)) \sin^2 \theta (r^2 (a(-b H m + Q) + B r^4 + a^2 B (-m + r^2)) + a^3 (a^3 B + b H m + a B r^2) \cos^4 \theta + (-a^4 B m + a^3 (-b H m + Q) - ab H m r^2 + 2a^2 B (b^2 + m) r^2 + 2b^2 B r^4) \sin^2 \theta + (a^4 B m - ab^3 H m + a^2 b^2 B (b^2 + m) + b^4 B r^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2 (-b H m + Q) + b H m r^2 + 2a B r^4 - a^3 B (m - 2r^2) + 2a B (a^2 (b^2 + m) + b^2 r^2) \sin^2 \theta))^2) / 2\Delta \Sigma^5 + (4ab m \cos^2 \theta \sin^2 \theta (r^2 (a(-b H m + Q) + B r^4 + a^2 B (-m + r^2)) + a^3 (a^3 B + b H m + a B r^2) \cos^4 \theta + (-a^4 B m + a^3 (-b H m + Q) - ab H m r^2 + 2a^2 B (b^2 + m) r^2 + 2b^2 B r^4) \sin^2 \theta + (a^4 B m - ab^3 H m + a^2 b^2 B (b^2 + m) + b^4 B r^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2 (-b H m + Q) + b H m r^2 + 2a B r^4 - a^3 B (m - 2r^2) + 2a B (a^2 (b^2 + m) + b^2 r^2) \sin^2 \theta)) ((-a^3 b B m + a^2 b^2 H m + b^4 H m + a^4 H (b^2 + r^2)) \cos^4 \theta + (r^2 + b^2 \sin^2 \theta) (-ab B m - b^2 H m + b Q + b^2 H r^2 + H r^4 + b(b^3 H + a B m + b H r^2) \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (-ab B m (b^2 + r^2) + 2a^2 H r^2 (b^2 + r^2) + b^2 (-b^2 H m + b Q + 2H m r^2) + 2b^2 H (b^2 m + a^2 (b^2 + r^2)) \sin^2 \theta))) / (2\Delta \Sigma^5) - (8am(b^2 + r^2)(a^2 (b H m - Q) - a B m (b^2 + r^2) + b(b Q + H m r^2)) \cos \theta \sin \theta (r^2 (a(-b H m + Q) + B r^4 + a^2 B (-m + r^2)) + a^3 (a^3 B + b H m + a B r^2) \cos^4 \theta + (-a^4 B m + a^3 (-b H m + Q) - ab H m r^2 + 2a^2 B (b^2 + m) r^2 + 2b^2 B r^4) \sin^2 \theta + (a^4 B m - ab^3 H m + a^2 b^2 B (b^2 + m) + b^4 B r^2) \sin^4 \theta + a \cos^2 \theta (a^2 (-b H m + Q) + b H m r^2 + 2a B r^4 - a^3 B (m - 2r^2) + 2a B (a^2 (b^2 + m) + b^2 r^2) \sin^2 \theta)) \sin 2\theta) / 8\Delta \Sigma^5 + (8bm(a^2 + r^2)(a^2 (b H m - Q) - a B m (b^2 + r^2) + b(b Q + H m r^2)) \cos \theta \sin \theta ((-a^3 b B m + a^2 b^2 H m + b^4 H m + a^4 H (b^2 + r^2)) \cos^4 \theta + (r^2 + b^2 \sin^2 \theta) (-ab B m - b^2 H m + b Q + b^2 H r^2 + H r^4 + b(b^3 H + a B m + b H r^2) \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta (-ab B m (b^2 + r^2) + 2a^2 H r^2 (b^2 + r^2) + b^2 (-b^2 H m + b Q + 2H m r^2) + 2b^2 H (b^2 m + a^2 (b^2 + r^2)) \sin^2 \theta)) \sin 2\theta) / 8\Delta \Sigma^5 + (4(a^2 (b H m - Q) - a B m (b^2 + r^2) + b(b Q + H m r^2))^2 (-1 - (2m(a^2 + r^2)(b^2 + r^2)) / (\Delta \sin 2\theta)) / 8\Sigma^3 - 1/2\Sigma(-((3a^3 b^2 B m + 3ab^4 B m + 3a^4 b H m - 3a^2 b^3 H m + 8a^2 b^2 Q - 3a^3 B m r^2 + 3ab^2 B m r^2 + 3a^2 b H m r^2 - 3b^3 H m r^2 + 8a^2 Q r^2 + 8b^2 Q r^2 + 8Q r^4 + 4m(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^2 b H + b H r^2 - a B (b^2 + r^2)) \cos 2\theta + (a^2 - b^2)m(a^2 b H + b H r^2 - a B (b^2 + r^2)) \cos 4\theta) (-a B m - b H m + Q + b H m \cos^2 \theta + a B m \sin^2 \theta)) / ((8\Sigma^5 + (\cos^2 \theta (3a^6 H + 2a^4 b^2 H + 3a^2 b^4 H + 3a^3 b B m - 3ab^3 B m - 3a^4 H m + 3a^2 b^2 H m - 8a^2 b Q + 11a^4 H r^2 + 10a^2 b^2 H r^2 + 3b^4 H r^2 - 8a^2 H m r^2 - 8b Q r^2 + 16a^2 H r^4 + 8b^2 H r^4 - 8H m r^4 + 8H r^6 + 4(a^2 + b^2 + 2r^2)(a^4 H + ab B m - b^2 H r^2 - a^2 H (b^2 + m - r^2)) \cos 2\theta + (a^2 - b^2)(a^4 H + ab B m - b^2 H r^2 - a^2 H (b^2 + m - r^2)) \cos 4\theta) (ab B m + b^2 H m - b Q + H r^4 + a^4 H \cos^4 \theta + b(-a B m + 2b H r^2) \sin^2 \theta + b^4 H \sin^4 \theta + H \cos^2 \theta (-b^2 m + 2a^2 r^2 + 2a^2 b^2 \sin^2 \theta))) / 8\Sigma^5 + ((3a^4 b^2 B + 2a^2 b^4 B + 3b^6 B + 3a^2 b^2 B m - 3b^4 B m - 3a^3 b H m + 3ab^3 H m - 8ab^2 Q + 3a^4 B r^2 + 10a^2 b^2 B r^2 + 11b^4 B r^2 - 8b^2 B m r^2 - 8a Q r^2 + 8a^2 B r^4$$

$$\begin{aligned}
& + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 2\theta + \\
& (a^2-b^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 4\theta \sin^2\theta (a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + \\
& a^4B\cos 4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + \\
& (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B \\
& + abHm - a^2B(m-2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm+Q) + Br^4 + a^2B \\
& (-m+r^2)) + a^3(a^3B+bHm+aBr^2)\cos 4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm+Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2+m)r^2 \\
& + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm + Q) + \\
& bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + ((3a^4H + 2a^2b^2H + \\
& 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + \\
& b^2H(-b^2+m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2 + \\
& r^2))\cos 4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) \\
& + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2 \\
& (b^2+r^2))\sin^2\theta))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ+Hmr^2))(aBm + bHm - \\
& 2Q + (aB-bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/8\Delta^5 + (\cos^2\theta\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2+ \\
& r^2))\cos 4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) \\
& + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+ \\
& r^2))\sin^2\theta))^2(2(a^2 + r^2)(a^2+(-m+r^2)\sec^2\theta) + 2(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\tan^2\theta))/2\Delta\Sigma^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\Phi\Phi} = & \frac{1}{4\pi} (1/\Sigma^5\Delta\sin^4\theta)(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos 4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B \\
& \sin^4\theta + a\cos^4\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta))^2 + (1/\Sigma^5\cos^2\theta\sin^2\theta(r^2(a(-bHm+Q) + Br^4 + \\
& a^2B(-m+r^2)) + a^3a^3B + bHm + aBr^2)\cos 4\theta + (-a^4Bm + 3a^2(-bHm+Q) - abHmr^2 + 2a^2B \\
& (b^2+m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m)+b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm \\
& +Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\sin^2\theta))^2 - 1/2(a^2\sin^2\theta + r^2\sin^2\theta \\
& + (a^2m\sin^4\theta)/(r^2+a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta))(-((3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + \\
& 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2 + \\
& b^2 + 2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)m(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 4\theta)(- \\
& aBm - bHm + Q + bHm\cos 4\theta + aBm\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + \\
& 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - \\
& 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 \\
& - a^2H(b^2 + m-r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 4\theta)(abBm + \\
& b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos 4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 \\
& + 2a^2b^2\sin^2\theta)))/8\Sigma^5 + ((3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - 3a^3bHm + \\
& 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(-abHm \\
& + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 4\theta)\sin^2\theta(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - \\
& 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^4B + \\
& 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B + abHm - \\
& a^2B(m - 2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm+Q) + Br^4 + a^2B(-m+r^2)) \\
& + a^3(a^3B + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm+Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2+m)r^2 + \\
& 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm+Q) + \\
& bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + ((3a^4H + 2a^2b^2H + \\
& 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + \\
& b^2H(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2 - b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2 \\
& + r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2) \\
& \sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + \\
& a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2)(a^2(bHm - Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ+Hmr^2))(aBm + bHm - \\
& 2Q + (aB-bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/8\Sigma^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\Phi\psi} = & \frac{1}{4\pi} (1/\Delta\Sigma^5\cos^2\theta\sin^2\theta(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta \\
& + b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta))(a^2Bm + abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - \\
& B(a^2m-2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + 2ab^2B\sin^2\theta)) - (1/\Sigma^5\cos^2\theta\sin^2\theta \\
& (r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m+r^2)) + a^3(a^3B+bHm+aBr^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm + \\
& Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2+m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m) + \\
& b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm+Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2) \\
& \sin^2\theta))((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2+r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + \\
& bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + \\
& b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta)) - (1/(2\Sigma))abm\cos^2\theta\sin^2\theta(-((- \\
& 3a^3b^2Bm + 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2 - \\
& 3b^3Hmr^2 + 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2+b^2+2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 2\theta + \\
& (a^2-b^2)m(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 4\theta)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta))/ \\
& 8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ \\
& + 11a^4Hr^2 + 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + \\
& 4(a^2+b^2+2r^2)(a^4H+abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - \\
& a^2H(b^2+m-r^2))\cos 4\theta)(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + \\
& b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta))) /8\Sigma^5 + ((3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + \\
& 3a^2b^2Bm - 3b^4Bm - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - \\
& b^2B(b^2-m+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 4\theta)\sin^2\theta(a^2Bm + \\
& abHm - aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m - 2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^4\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + \\
& 2ab^2B\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 + \\
& 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B+abHm-a^2B(m-2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(- \\
& bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m+r^2)) + a^3(a^3B + bHm+a Br^2)\cos^4\theta + (-a^4Bm + a^3(-bHm+Q) - \\
& abHmr^2 + 2a^2B(b^2+m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + a^2b^2B(b^2+m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + \\
& a\cos^2\theta(a^2(-bHm+Q) + bHmr^2+2aBr^4 -a^3B(m-2r^2) + 2aB(a^2(b^2+m)+b^2r^2)\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + \\
& ((3a^4H + 2a^2b^2H + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - \\
& abBm + 2a^2Hr^2 + b^2H(-b^2+m-2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2H\cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + \\
& b^4Hm + a^4H(b^2+r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + \\
& aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) + \\
& 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2)(a^2(bHm-Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ+Hmr^2)) \\
& (aBm + bHm - 2Q + (aB-bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/8\Sigma^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\psi\psi} = & \frac{1}{4\pi} (1/\Delta\Sigma^5\cos^4\theta(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm+2bHr^2)\sin^2\theta + \\
& b^4H\sin^4\theta + H\cos^2\theta(-b^2m+2a^2r^2+2a^2b^2\sin^2\theta))^2 + (1/\Sigma^5\cos^2\theta\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + \\
& b^4Hm + a^4H(b^2+r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - b^2Hm + bQ + bHr^2 + Hr^4 + b(b^3H + \\
& aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2(b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ + 2Hmr^2) \\
& + 2b^2H(b^2m + a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta))^2 - 1/2(b^2\cos^2\theta + r^2\cos^2\theta + (b^2m\cos^4\theta)/(\Sigma)(-((3a^3b^2Bm + \\
& 3ab^4Bm + 3a^4bHm - 3a^2b^3Hm + 8a^2b^2Q - 3a^3Bmr^2 + 3ab^2Bmr^2 + 3a^2bHmr^2 - 3b^3Hmr^2 + \\
& 8a^2Qr^2 + 8b^2Qr^2 + 8Qr^4 + 4m(a^2+b^2+2r^2)(a^2bH + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)m(a^2bH \\
& + bHr^2 - aB(b^2+r^2))\cos 4\theta)(-aBm - bHm + Q + bHm\cos^2\theta + aBm\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta \\
& (3a^6H + 2a^4b^2H + 3a^2b^4H + 3a^3bBm - 3ab^3Bm - 3a^4Hm + 3a^2b^2Hm - 8a^2bQ + 11a^4Hr^2 + \\
& 10a^2b^2Hr^2 + 3b^4Hr^2 - 8a^2Hmr^2 - 8bQr^2 + 16a^2Hr^4 + 8b^2Hr^4 - 8Hmr^4 + 8Hr^6 + 4(a^2+b^2+2r^2) \\
& (a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2+m-r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(a^4H + abBm - b^2Hr^2 - a^2H(b^2 + m - \\
& r^2))\cos 4\theta)(abBm + b^2Hm - bQ + Hr^4 + a^4H\cos^4\theta + b(-aBm + 2bHr^2)\sin^2\theta + b^4H\sin^4\theta + \\
& H\cos^2\theta(-b^2m + 2a^2r^2 + 2a^2b^2\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + ((3a^4b^2B + 2a^2b^4B + 3b^6B + 3a^2b^2Bm - \\
& 3b^4Bm - 3a^3bHm + 3ab^3Hm - 8ab^2Q + 3a^4Br^2 + 10a^2b^2Br^2 + 11b^4Br^2 - 8b^2Bmr^2 - 8aQr^2 + \\
& 8a^2Br^4 + 16b^2Br^4 - 8Bmr^4 + 8Br^6 + 4(a^2+b^2+2r^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2 - \\
& m+r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)(-abHm + a^2B(b^2+r^2) - b^2B(b^2-m+r^2))\cos 4\theta)\sin^2\theta(a^2Bm + abHm - \\
& aQ + Br^4 + a^4B\cos^4\theta - B(a^2m-2b^2r^2)\sin^2\theta + b^4B\sin^2\theta + a\cos^2\theta(-bHm + 2aBr^2 + \\
& 2ab^2B\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + (\cos^2\theta(3a^4B + 2a^2b^2B + 3b^4B - 4a^2Bm - 4abHm + 8aQ + 8a^2Br^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8b^2Br^2 + 8Br^4 + 4(a^4B + abHm - a^2B(m-2r^2) - b^2B(b^2+2r^2))\cos 2\theta + (a^2- \\
& b^2)^2B\cos 4\theta)(r^2(a(-bHm + Q) + Br^4 + a^2B(-m+r^2)) + a^3(a^3B + bHm + aBr^2)\cos^4\theta + (- \\
& a^4Bm + a^3(-bHm + Q) - abHmr^2 + 2a^2B(b^2+m)r^2 + 2b^2Br^4)\sin^2\theta + (a^4Bm - ab^3Hm + \\
& a^2b^2B(b^2+m) + b^4Br^2)\sin^4\theta + a\cos^2\theta(a^2(-bHm + Q) + bHmr^2 + 2aBr^4 - a^3B(m-2r^2) + \\
& 2aB(a^2(b^2+m) + b^2r^2)\sin^2\theta))/8\Sigma^5 + ((3a^4H + 2a^2b^2H + 3b^4H - 4abBm - 4b^2Hm + 8bQ + \\
& 8a^2Hr^2 + 8b^2Hr^2 + 8Hr^4 + 4(a^4H - abBm + 2a^2Hr^2 + b^2H(-b^2 + m - 2r^2))\cos 2\theta + (a^2-b^2)^2H \\
& \cos 4\theta)\sin^2\theta((-a^3bBm + a^2b^2Hm + b^4Hm + a^4H(b^2+r^2))\cos^4\theta + (r^2+b^2\sin^2\theta)(-abBm - \\
& b^2Hm + bQ + b^2Hr^2 + Hr^4 + b(b^3H + aBm + bHr^2)\sin^2\theta) + \cos^2\theta(-abBm(b^2+r^2) + 2a^2Hr^2 \\
& (b^2+r^2) + b^2(-b^2Hm + bQ+2Hmr^2) + 2b^2H(b^2m+a^2(b^2+r^2))\sin^2\theta))/8\Sigma^5 - ((a^2-b^2)(a^2(bHm- \\
& Q) - aBm(b^2+r^2) + b(bQ+Hmr^2))(aBm+bHm-2Q+(aB - bH)m\cos 2\theta)\sin 2\theta^2)/8\Sigma^5
\end{aligned}$$

D-2 Kontravaryant EMT'leri

$$T^{tt} = g^{tt}g^{tt}T_{tt} + g^{tt}g^{t\phi}T_{t\phi} + g^{tt}g^{t\psi}T_{t\psi} + g^{t\phi}g^{tt}T_{\phi t} + g^{t\psi}g^{tt}T_{\psi t} + g^{t\phi}g^{t\psi}T_{\phi\psi} + g^{t\psi}g^{t\phi}T_{\psi\phi} + g^{t\psi}g^{t\psi}T_{\psi\psi} + g^{t\phi}g^{t\phi}T_{\phi\phi}$$

$$T^{tr} = g^{\mu t}g^{\nu r}T_{\mu\nu}$$

$$T^{tr} = g^{tt}g^{rr}T_{tr} + g^{t\phi}g^{rr}T_{\phi r} + g^{t\psi}g^{rr}T_{\psi r}$$

$$T^{t\theta} = g^{\mu t}g^{\nu\theta}T_{\mu\nu}$$

$$T^{t\theta} = g^{tt}g^{\theta\theta}T_{t\theta} + g^{t\phi}g^{\theta\theta}T_{\phi\theta} + g^{t\psi}g^{\theta\theta}T_{\psi\theta}$$

$$T^{t\phi} = g^{\mu t}g^{\nu\phi}T_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}
T^{t\phi} = & g^{tt}g^{t\phi}T_{tt} + g^{tt}g^{\phi\phi}T_{t\phi} + g^{tt}g^{\psi\phi}T_{t\psi} + g^{t\phi}g^{t\phi}T_{\phi t} + g^{t\phi}g^{\phi\phi}T_{\phi\phi} + g^{t\phi}g^{\psi\phi}T_{\phi\psi} + g^{t\phi}g^{t\psi}T_{\psi t} + \\
& g^{t\psi}g^{\phi\phi}T_{\psi\phi} + g^{t\psi}g^{\psi\psi}T_{\psi\psi}
\end{aligned}$$

$$T^{t\psi} = g^{\mu t}g^{\nu\psi}T_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}
T^{t\psi} = & g^{tt}g^{t\psi}T_{tt} + g^{tt}g^{\phi\psi}T_{t\phi} + g^{tt}g^{\psi\psi}T_{t\psi} + g^{t\phi}g^{t\psi}T_{\phi t} + g^{t\phi}g^{\psi\phi}T_{\phi\phi} + g^{t\phi}g^{\psi\psi}T_{\phi\psi} + g^{t\psi}g^{t\psi}T_{\psi t} + \\
& g^{t\psi}g^{\psi\phi}T_{\psi\phi} + g^{t\psi}g^{\psi\psi}T_{\psi\psi}
\end{aligned}$$

$$T^{rr} = g^{\mu r}g^{\nu r}T_{\mu\nu}$$

$$T^{rr} = g^{rr}g^{rr}T_{rr}$$

$$T^{r\theta} = g^{\mu r}g^{\nu\theta}T_{\mu\nu}$$

$$T^{r\theta} = g^{rr}g^{\theta\theta}T_{r\theta}$$

$$T^{r\phi} = g^{\mu r}g^{\nu\phi}T_{\mu\nu}$$

$$T^r\phi = g^{rr}g^{t\phi}T_{rt} + g^{rr}g^{\phi\phi}T_{r\phi} + g^{rr}g^{\phi\psi}T_{r\psi}$$

$$T^{r\psi} = g^{\mu r}g^{\nu\psi}T_{\mu\nu}$$

$$T^{r\psi} = g^{rr}g^{t\psi}T_{rt} + g^{rr}g^{\phi\psi}T_{r\phi} + g^{rr}g^{\psi\psi}T_{r\psi}$$

$$T^{\theta\theta} = g^{\mu\theta}g^{\nu\theta}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\theta\theta} = g^{\theta\theta}g^{\theta\theta}T_{\theta\theta}$$

$$T^{\theta\phi} = g^{\mu\theta}g^{\nu\phi}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\theta\phi} = g^{\theta\theta}g^{t\phi}T_{\theta t} + g^{\theta\theta}g^{\phi\phi}T_{\theta\phi} + g^{\theta\theta}g^{\psi\phi}T_{\theta\psi}$$

$$T^{\theta\psi} = g^{\mu\theta}g^{\nu\psi}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\theta\psi} = g^{\theta\theta}g^{t\psi}T_{\theta t} + g^{\theta\theta}g^{\phi\psi}T_{\theta\phi} + g^{\theta\theta}g^{\psi\psi}T_{\theta\psi}$$

$$T^{\phi\phi} = g^{\mu\phi}g^{\nu\phi}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\phi\phi} = g^{t\phi}g^{t\phi}T_{tt} + g^{t\phi}g^{\phi\phi}T_{t\phi} + g^{t\phi}g^{\phi\psi}T_{t\psi} + g^{\phi\phi}g^{t\phi}T_{t\phi} + g^{\phi\phi}g^{\phi\phi}T_{\phi\phi} + g^{\phi\phi}g^{\psi\phi}T_{\phi\psi} + g^{\psi\phi}g^{t\phi}T_{t\psi} + g^{\psi\phi}g^{\phi\phi}T_{\phi\psi} + g^{\psi\phi}g^{\psi\phi}T_{\psi\psi}$$

$$T^{\phi\psi} = g^{\mu\phi}g^{\nu\psi}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\phi\psi} = g^{t\phi}g^{t\psi}T_{tt} + g^{t\phi}g^{\phi\psi}T_{t\phi} + g^{t\phi}g^{\psi\psi}T_{t\psi} + g^{\phi\phi}g^{t\psi}T_{t\phi} + g^{\phi\phi}g^{\phi\psi}T_{\phi\phi} + g^{\phi\phi}g^{\psi\psi}T_{\phi\psi} + g^{\psi\phi}g^{t\psi}T_{t\psi} + g^{\psi\phi}g^{\phi\psi}T_{\phi\psi} + g^{\psi\phi}g^{\psi\psi}T_{\psi\psi}$$

$$T^{\psi\psi} = g^{\mu\psi}g^{\nu\psi}T_{\mu\nu}$$

$$T^{\psi\psi} = g^{t\psi}g^{t\psi}T_{tt} + g^{t\psi}g^{\phi\psi}T_{t\phi} + g^{t\psi}g^{\psi\psi}T_{t\psi} + g^{\phi\psi}g^{t\psi}T_{t\phi} + g^{\phi\psi}g^{\phi\psi}T_{\phi\phi} + g^{\phi\psi}g^{\psi\psi}T_{\phi\psi} + g^{\psi\psi}g^{t\psi}T_{t\psi} + g^{\psi\psi}g^{\phi\psi}T_{\phi\psi} + g^{\psi\psi}g^{\psi\psi}T_{\psi\psi}$$

Kontravaryant EMT'nün izi aşağıdaki gibi bulunur.

$$T = g_{tt}T^{tt} + g_{rr}T^{rr} + g_{\theta\theta}T^{\theta\theta} + g_{\phi\phi}T^{\phi\phi} + g_{\psi\psi}T^{\psi\psi} + 2g_{t\phi}T^{t\phi} + 2g_{t\psi}T^{t\psi} + 2g_{\phi\psi}T^{\phi\psi}$$

D-3 Kontravaryant EMT'nün Kovaryant Türevi

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = -\partial_r\Gamma^{\theta}_{t\theta} + \partial_t\Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^r_{\theta r} - \partial_\theta\Gamma^{\psi}_{\psi\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^r_{\theta\theta}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^{\theta}_{\theta r} + \Gamma^{\phi}_{\phi r} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^{\psi}_{\psi r}) + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}(\Gamma^t_{t\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^r_{\theta r} + \Gamma^{\psi}_{\psi\theta}) - 2\Gamma^t_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta t} - 2\Gamma^{\psi}_{\theta t}\Gamma^t_{\psi\theta} - 2\Gamma^{\psi}_{\theta\psi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} - \Gamma^t_{t\theta}\Gamma^t_{t\theta} - \Gamma^r_{rt}\Gamma^r_{rt} - \Gamma^{\psi}_{\psi\phi}\Gamma^{\phi}_{\psi\theta} - \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_r T^{rr} + \partial_\theta T^{\theta\theta} + T^{rr}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^{\theta}_{r\theta} + \Gamma^{\phi}_{r\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi r} + 2\Gamma^r_{rr} + \Gamma^{\psi}_{\psi r}) + T^{t\phi}(2\Gamma^r_{\phi t} + 2\Gamma^{\theta}_{\phi t}) + T^{t\psi}(2\Gamma^r_{\psi t} + 2\Gamma^{\theta}_{\psi t}) + T^{\theta\theta}(\Gamma^t_{\theta t} + \Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{r\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + 2\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} + \Gamma^{\psi}_{\psi\theta}) + T^{\phi\psi}(2\Gamma^r_{\phi\psi} + 2\Gamma^{\theta}_{\phi\psi}) + T^{\psi\psi}(2\Gamma^r_{\psi\psi} + 2\Gamma^{\theta}_{\psi\psi}) = 0$$

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Şaban YILMAZ
Doğum Tarihi ve Yeri :15.07.1982 / KAHRAMANMARAŞ
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta :sabanyilmazz@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Fizik	Erciyes Üniversitesi	2007
Lisans	Fizik	Erciyes Üniversitesi	2005
Lise	Meslek Lisesi	İmam Hatip Lisesi	1999

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009-2013	Birgül Dersanesi	Fizik Öğretmeni
2013-Halen	Hacı Naciye Ateş Anadolu Lisesi	Fizik Öğretmeni

YAYINLARI

Makale

1. E. Albayrak and S. Yilmaz, The spin-1 and spin - 3/2 model on a bilayer Bethe lattice with crystal field, Journal of Physics: Condensed Matter: 19, (2007) 376212.
2. E. Albayrak, S. Yilmaz and S. Akkaya, A study of the bilayer Bethe lattice for spin-3/2 Ising model, Journal of Magn. Materials 310 (2007) 98.
3. E. Albayrak, S. Yilmaz and S. Akkaya, The spin - 3/2 bilayer Bethe lattice with crystal field, Physica A 381, (2007) 189.
4. E. Albayrak, S. Yilmaz and T. Bulut, Critical and compensation temperatures of the Ising bilayer system consisting of spin-1/2 and spin-1 atoms, Journal of Istatistical Physics 310 (5) (2007) 967.
5. E. Albayrak and S. Yilmaz, Spin-1/2 and spin-1 Ising model with crystal field on a bilayer Bethe lattice, Physica A, 387 (2008) 1173.
6. Erhan Albayrak, S. Akkaya and S. Yilmaz, Spin-2 Ising model on the bilayer Bethe lattice, International Journal of Modern Physics B, 22 (2008) 4189.
7. Erhan Albayrak, S. Akkaya and S. Yilmaz, The crystal field effects on the phase diagrams of the spin-2 bilayer Bethe lattice, International Journal of Modern Physics B, 22 (2008) 4877.

Bildiri

1. 13. İFG Kongresi Sözlü Sunum, Bethe kafesi üzerinde spin-3/2 Ising modelin kesin faz diyagramları, Boğaziçi Üniversitesi 2006 İstanbul
2. Türk Fizik Derneği Kongresi Sözlü Sunum, Bethe Kafesi üzerinde ve kristal alan varlığında spin-3/2 Ising model kesin faz diyagramları, İnönü Üniversitesi Malatya – Türkiye 2007
3. Turkish Physical Society 32nd International Physics Congress, Ş. Yılmaz, R. Kaya, Electromagnetic Energy for a Five Dimensional Black Hole in a Uniform Magnetic Field, Book of Abstracts, Page: 253, Bodrum-TURKEY 2016

Proje

1. İki Tabakalı Bethe Kafesinde Spin-3/2 Ising Modelinin Kristal Alan Varlığında ve Yokluğundaki Kesin Faz Diyagramları adlı Rektörlük projesi. 2005-2007 Erciyes Üniversitesi Kayseri