



**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**SANSÜRLÜ ÖRNEKLEMLER VE
İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI**

Yener ÜNAL

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

**Ekim-2017
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Yener ÜNAL tarafından hazırlanan “Sansürlü Örneklemeler ve İstatistiksel Sonuç Çıkarımı” adlı tez çalışması 02/10/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

Danışman

Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ

Üye

Prof. Dr. Coşkun KUŞ

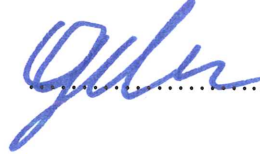
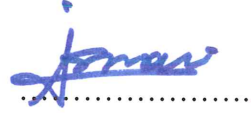
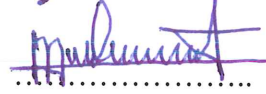
Üye

Doç. Dr. İsmail KINACI

Üye

Yrd. Doç. Dr. Aydın KARAKOCA

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.



Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Yener ÜNAL

02/10/2017

ÖZET**DOKTORA TEZİ****SANSÜRLÜ ÖRNEKLEMLER VE İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI****Yener ÜNAL****Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı****Danışman: Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ****2017, 74 Sayfa****Jüri****Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ****Prof. Dr. Coşkun KUŞ****Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU****Doç. Dr. İsmail KINACI****Yrd. Doç. Dr. Aydın KARAKOCA**

Bu tez çalışmasında, ilerleyen tür tip-I aralık sansür şemasının yeni bir modifikasyonu olan Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansür şeması tanıtılmıştır. Weibull ve geliştirilmiş ters üstel dağılımları için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve part-time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürlü örnekleme dayalı için en çok olabilirlik tahminleri ve çeşitli kayıp fonksiyonları altında Bayes tahminleri elde edilmiştir. Her bölümdeki simülasyon çalışmaları ile farklı durumlar için tam örneklem, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şemaları altında en çok olabilirlik tahmin edicisinin yan, varyans ve hata kareler ortalaması açısından performansı incelenmiştir. Ayrıca en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin tahmini riskler açısından karşılaştırılmaları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Aralıklı sansürleme, Bayes tahmini, en çok olabilirlik tahmini, geliştirilmiş ters üstel dağılımı, part-time operatör, weibull dağılımı.

ABSTRACT**Ph.D THESIS****CENSORED SAMPLE AND STATISTICAL INFERENCE****Yener ÜNAL**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN STATISTICS**

Advisor: Assoc.Prof.Dr. Muhammet BEKÇİ**2017, 74 Pages****Jury****Assoc.Prof.Dr. Muhammet BEKÇİ****Prof. Dr. Coşkun KUŞ****Assoc.Prof.Dr. Buğra SARAÇOĞLU****Assoc.Prof.Dr. İsmail KINACI****Asst. Prof. Dr. Aydın KARAKOCA**

In this thesis, “progressive type-I interval censoring with part time operator” is introduced which is a new modification of progressive type-I interval censoring. Maximum likelihood and Bayes estimators for parameters of weibull distribution and generalized inverted exponential distribution in case of progressive type-I interval censoring sample data and progressive type-I interval censoring with part time operator sample censoring. With simulation studies in all sections, the performance of maximum likelihood estimation in point of bias, variance and mean square error for complete, progressive type-I interval censoring and part time operator censored samples. The comparison between Bayes and maximum likelihood estimates in point of estimated risks for various situations through the simulation study is provided.

Keywords: Bayes estimates, generalized inverted exponential distribution, interval censoring, maximum likelihood estimation, part time operator, weibull distribution.

ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana öneren ve çalışmalarım süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ, tez izleme komitesi üyeleri hocalarım Prof. Dr. Coşkun KUŞ ve Doç. Dr. İsmail KINACI'ya, manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan eşime ve tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Yener ÜNAL
KONYA-2017



İÇİNDEKİLER

ÖZET	1
ABSTRACT.....	2
ÖNSÖZ	3
İÇİNDEKİLER.....	4
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	6
1. GİRİŞ.....	7
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	10
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	15
3.1. İlerleyen Tür Tip-I Aralık Sansürleme	15
3.2. Tahmin.....	17
3.2.1. En çok olabilirlik tahmini	17
3.2.2. Bayes tahmini ve bazı kayıp fonksiyonları.....	18
3.2.2.1 Tierney-Kadane Yaklaşımı	21
4. PART-TIME OPERATÖRLÜ İLERLEYEN TÜR TİP-I ARALIK SANSÜRLEME.....	24
5. BAZI DAĞILIMLAR İÇİN EN ÇOK OLABİLİRLİK VE BAYES TAHMİNLERİNİN ELDE EDİLMESİ.....	26
5.1. Weibull Dağılımı	26
5.1.1. Weibull dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini	26
5.1.2. Weibull dağılımı için part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini.....	27
5.1.3. Weibull dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini	29

5.1.3.1 İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini	30
5.1.4. Weibull dağılımı için Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini.....	35
5.1.4.1. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini	36
5.1.5. Weibull dağılımı için simulasyon çalışması	41
5.1.5.1. Weibull dağılımı için en çok olabilirlik tahmini simulasyon çalışması. 41	
5.1.5.2. Weibull dağılımı için Bayes simulasyon çalışması	44
5.2. Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılımı	47
5.2.1. GTÜ dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini	47
5.2.2. GTÜ dağılımı için part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini	49
5.2.3. GTÜ dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini	50
5.2.3.1 İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini	51
5.2.4. GTÜ dağılımı için Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini.....	56
5.2.4.1. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini	57
5.2.5. GTÜ dağılımı için simulasyon çalışması.....	63
5.2.5.1. GTÜ dağılımı için en çok olabilirlik tahmini simulasyon çalışması	63
5.2.5.2. GTÜ dağılımı için Bayes tahmini simulasyon çalışması.....	66
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	70
6.1 Sonuçlar	70
6.2 Öneriler	71
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

Θ : Parametre Uzayı

$\mathbb{R}^p$: p Boyutlu Uzay

Kısaltmalar

MSE/HKO : Hata Kareler Ortalaması

MLE/ EÇÖ : En çok olabilirlik tahmin edicisi

o.y.f : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

o.o.yf. : Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

d.f : Dağılım fonksiyonu

Var: Varyans

Wd : Üstel Power dağılımı

GTÜ : Genelleştirilmiş ters üstel dağılımı

MSE : Mean Squares Error – Hata Kareler Ortalaması

BS : Karesel kayıp fonksiyonu altında yaklaşık bayes tahmini

BL : LINEX kayıp fonksiyonu altında yaklaşık bayes tahmini

BGE : Genel entropy kayıp fonksiyonu altında yaklaşık bayes tahmini

SELF : Karesel Hata Kayıp Fonksiyonu

LİNEX : (Lineer – Exponential)

1. GİRİŞ

Yaşam analizi; ölüm, bozulma, çürüme gibi başarısızlık olarak adlandırılan olayların meydana gelmesine kadar geçen sürede elde edilen verilerin analizidir. Yaşam analizinde en önemli unsur ömür kavramıdır. Ömür, elektronik parçalarda dayanma süresi, canlılarda yaşam süresidir. Bir elektrik lambasının anahtarı için ömür, açma kapama sayısı olarak alındığında kesikli bir rasgele değişken olurken, canlılarda yaşam süresi olarak alındığında ise sürekli rasgele değişken olmaktadır.

Dayanma veya yaşam süresi, başka bir ifadeyle bozulmanın gerçekleştiği zamana kadar geçen süre T ile gösterilsin. Buna göre

$$R(t) = P(T > t), t \geq 0$$

fonksiyonuna güvenilirlik fonksiyonu denir. Bir sistemin t anındaki güvenilirliği $R(t)$, bu sistemin t anında görev yapabilir olmasının olasılığıdır. Yani güvenilirlik $[0, 1]$ aralığında bir sayıdır. Başka bir ifadeyle sistemin t anına kadar bozulmamış olması olasılığı veya sistemin en az t kadar yaşaması olasılığıdır.

Endüstriyel yaşam testleri ve tıbbi sağ kalım analizlerinde, çoğunlukla ilgi konusu nesne kaybolabilir (bozulma, ölme, çürüme...) veya deneyden geri çekilebilir ya da nesne ömrü ancak belirli bir aralıkta bilinebilir. Dolayısıyla elde edilen örneğe, sansürlü bir numune (veya tamamlanmamış bir numune) adı verilir. Sansür oluşmasına etki eden çeşitli nedenler vardır. Aslında klinik araştırmalarda sansür denetimi araştırmacılar tarafından kontrol edilebilir veya kontrol edilemez. Örneğin, zamandan ve masraftan tasarruf etmek amacıyla çalışma, çalışılan tüm deneklerin tedaviye cevap vermesinden önce sonlandırılabilir. Bu durumda, sansür araştırmacılar tarafından uygulanmaktadır. Öte yandan, bazı deney birimleri çalışmadan erken çık(ı)ldığı veya planlanan tedavi özel nedenlerden dolayı uygulanamadığı için birimlerin kesin yaşam zamanı tam olarak gözlenememektedir. Bu durumda ise sansür araştırmacılar tarafından değil kendiliğinden oluşmaktadır.

Veri toplama sürecine bağlı olarak birçok sansürleme yöntemi mevcuttur. En yaygın sansür planları, tip-I sansür, tip-II sansür ve ilerleyen tür sansürlemedir. Tip-I sansürleme, yaşam testi önceden planlanmış bir zamanda sona erer. Tip-II sansürlemede, belirli sayıdaki birimin yaşam zamanına ulaşıldığında yaşam testi sona erer. Aralık sansürleme, birimlerin sürekli olarak gözlemlenemediği durumlarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tip sansürleme yaşam zamanı çalışmalarıyla ilgili olmasına

rağmen ağırlıklı olarak birimleri insanlar veya hayvanlar olan kliniksel biyolojik çalışmalarda kullanılmaktadır.

Aggarwala (2001), ilerleyen tür sansürleme ve tip-I sansürlemeyi birleştirerek yeni bir sansürleme şeması olan ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şemasını elde etmiştir. İlerleyen tür tip-I aralık sansürlemede önceden belirlenmiş iki zaman arasında gözlemler elde edilir ve yine önceden belirlenmiş zaman noktalarında sistemden birimlerin çekilmesine izin verilir. İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme şu şekilde tanımlanır: Aynı yaşam zamanı dağılımına sahip n birimin $t_0 = 0$ anında bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünölsün. Birimler önceden belirlenmiş k adet gözlem zamanları olan $t_1, t_2, \dots, t_k$ anında kontrol edilsin. Bu sansürleme şemasında, $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere, t_i kontrol zamanını, q_i , $(t_i, t_{i-1}]$ aralığında bozulan toplam birim sayısını ve r_i , t_i anında deneyden çıkarılacak birim sayısını göstermektedir. Bu sansürleme şemasında gözlemlenen yaşam zamanı verileri $D = \{q_i, r_i, t_i\}$ şeklinde gösterilir ($i = 1, 2, \dots, k$).

Bu tez çalışmasında, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şemasına alternatif olarak yeni bir sansürleme şeması önerilmiştir. Part-Time çalışma esasına dayalı bu sansürleme şeması Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme olarak adlandırılmıştır. Önerilen bu şemada, bazı durumlarda araştırmacı şartları gereği sadece belirli aralıklarla deneyin başında durup birimlerin kesin bozulma zamanlarını gözlemlerken kalan aralıklarda ise belirlenen zaman noktalarında gelerek sadece bozulan birim sayısını elde etmektedir. Bu sansür şemasında, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şemasına göre daha çok örneklem ve bilgi elde edildiği için yapılan tahminlerin daha küçük hata kareler ortalamasına(hko) sahip olması beklenmektedir. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şu şekilde tanımlanır: Bağımsız ve aynı yaşam zamanı dağılımına sahip n birimin $t_0 = 0$ anında bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünölsün. Aralık sayısı k çift ya da tek sayıda olabilir. Bu tez çalışmasında k aralık sayısının çift olduğu durumlar ele alınmıştır. Operatör (t_0, t_1) aralığında bozulan d_1 birimin kesin bozulma zamanlarını kaydeder ve t_1 anında önceden belirlenen p_1 oranıyla hesaplanan r_1 birim rasgele seçilerek deneyden çıkartılır. Operatör (t_1, t_2) aralığında deneyin başından ayrılır ve t_2 anında gelerek yalnızca (t_1, t_2) aralığında bozulan birim sayısı d_2 değerini belirler. Bununla birlikte

çalışan r_2 birim sistemden rasgele seçilerek çıkartılır. Operatör (t_2, t_3) aralığında deneyin başında kalarak, bozulan d_3 sayıdaki birimin kesin bozulma zamanlarını kaydeder ve t_3 anında çalışan r_3 birimi rasgele seçerek sistemden ayırır. Operatör (t_3, t_4) aralığında deneyin başından ayrılır ve t_4 anında gelerek (t_3, t_4) aralığında bozulan birim sayısı d_4 değerini belirler. Diğer aralıklarda olduğu gibi çalışan r_4 birim sistemden rasgele seçilerek çıkartılır. Bu şekilde t_k zamanına kadar işlemler devam eder. Bu işlemler sonunda $Z = \{d_i, r_i, x_j, t_i; i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}\}$ değerleri gözlemlenir. Burada, d_i bozulma sayılarını, r_i sansürlenene birim sayılarını, x_j bozulma zamanlarını ve t_i kontrol zamanlarını gösteren rasgele değişkenlerdir.

Bu tez çalışmasının Giriş bölümünde güvenilirlik analizi ve sansürleme şemaları hakkında kısaca bilgi verilmiştir. İkinci Bölümde, bugüne kadar literatürde yer alan bazı çalışmalar kısaca özetlenmiştir. Üçüncü Bölümde, çalışmanın temelini oluşturan sansürleme yöntemleri ve tahmin yöntemleri anlatılmıştır. Dördüncü Bölümde, part-time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme tanıtılmıştır. Beşinci Bölümde, Weibull dağılımı ve Genelleştirilmiş Ters Üstel (GTÜ) dağılımı için en çok olabilirlik (eço) ve Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Ayrıca tam örneklem, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve part-time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme yöntemleri için MATLAB programıyla simulasyon çalışması yapılmıştır. Bu üç şema için en çok olabilirlik tahmin edicileri ve Thierney Kadane yaklaşımı ile çeşitli kayıp fonksiyonları altında Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen tahminlere ait yan değerleri, varyans değerleri ve hata kareler ortalamaları karşılaştırılmıştır. Sonuç bölümünde ise tüm sonuçlar değerlendirilerek part-time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürlemenin gerekliliği ve performansı vurgulanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Sansürlü örneklem, yaşam testleri deneylerinde yer alan tüm birimlerin bozulma zamanlarının istemli veya istemsiz bir şekilde gözlemlenemediği durumlarda ortaya çıkan bir yöntemdir. Yıllardır birçok araştırmacı tarafından sansürlü örneklemde sonuç çıkarma çalışmaları yapılmaktadır. Yaşam zamanları; normal, üstel, gamma, Rayleigh, Weibull, log-normal, ters Gaussian, logistic, Laplace ve Pareto gibi dağılımlara sahip birimler için farklı sansürleme yöntemlerinin kullanıldığı birçok çalışma literatürde yer almaktadır.

Bu bölümde ağırlıklı olarak ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında yer alan en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerinin yapıldığı çalışmalara ağırlıklı olarak yer verilmiştir.

Cohen (1965), yaşam zamanı testleri için yaygın olarak kullanılan iki parametrelili Weibull dağılımıyla ilgilenmiştir. Weibull dağılımı parametreleri için tam örneklem, tip-I sansürleme, tip-II sansürleme ve ilerleyen tür sansürleme şemaları altında en çok olabilirlik tahminlerini elde etmiştir. Elde edilen tahmin ediciler için asimptotik varyans-kovaryans matrisini hesaplamıştır. Sayısal bir örnekle sonuçları değerlendirmiştir.

Tse ve ark. (2000), Weibull dağılımı için rasgele ayırmalı ilerleyen tür tip-II sansürleme altında en çok olabilirlik tahmininde bulunmuşlardır. Sistemden çıkarılacak parça sayısını binom dağıldığını varsaymışlardır. Optimal örneklem planını belirleyerek testin sonlandırılması için beklenen süreyi elde etmişlerdir. Farklı parametreler ve örneklem büyüklükleri için simülasyon çalışması yaparak tahmin edicilere ait asimptotik özellikleri kıyaslamışlardır.

Aggarwala (2001), tip-I sansürleme ile ilerleyen tür sansürlemeyi birleştirerek ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme adı altında yeni bir sansürleme şeması elde etmiştir. Bu yeni sansürleme yöntemi için olabilirlik fonksiyonunu oluşturmuştur. Üstel Dağılım için ilerleyen tür tip-I sansürleme altında en çok olabilirlik parametre tahmininde bulunarak istatistiksel sonuç çıkarımları geliştirmiştir. Bununla birlikte simülasyon algoritmasını önererek sayısal bir örnek sunmuştur.

Xiang ve Tse (2005), özellikle klinik çalışmalarda uygulanabilecek yeni bir sansürleme şeması geliştirmişlerdir. Hastaların sabit aralıklarla düzenli olarak muayene edildiği bu sansürleme şemasının adını rasgele ayırmalı ilerleyen tür tip-II

aralık sansürleme olarak belirlemişlerdir. Weibull dağılımı parametreleri için en çok olabilirlik tahmininde bulunarak asismptotik varyanslarını incelemişlerdir.

Yang ve Tse (2005), üstel dağılım için rasgele ayırmalı ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında optimal hızlandırılmış yaşam testi planını araştırmışlardır. En çok olabilirlik tahmin edicilerini ve Fisher bilgi matrisini elde etmişlerdir. Tahmin edicilerin asimptotik varyanslarını minimize etmek için farklı kombinasyonlarda hızlandırılmış yaşam testi planları oluşturmuşlardır. Bu planlar, optimal gözlem aralığı sayısını, sistemden çıkarılacak parçalar için optimal oranı belirlemeyi içermektedir. Oluşturulan hızlandırılmış yaşam testi planlarına ait istatistiksel çıkarımları sayısal bir örnekle değerlendirmişlerdir.

Ashour ve Afify (2007), üstelleştirilmiş Weibull ailesi için rasgele ayırmalı ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında istatistiksel sonuç çıkarımında bulunmuşlardır. Bozulma zamanlarında sistemden çıkarılacak birim sayısını binom dağılım ile belirlemişlerdir. Bilinmeyen parametreler için en çok olabilirlik tahmin edicileri ve tahmin edicilere ait asimptotik varyansları elde etmişlerdir. Ayrıca deneyin tamamlanması için beklenen süreyi hesaplama formülünü vermişlerdir. Bir örnekle sounuçları değerlendirmişlerdir.

Ng ve Wang (2009), iki parametrelili Weibull dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında farklı tahmin metodlarını çalışmışlardır. Orta nokta tahmin yöntemi, en çok olabilirlik tahmin yöntemi, momentler yöntemi ve olasılık grafiği (pp) yöntemiyle parametre tahmininde bulunmuşlardır. İlerleyen tür tip-I sansürleme altında Monte Carlo simulasyon methoduyla elde edilen tahmin değerlerinin yan değerlerini ve hata kareler ortalamasını karşılaştırmışlardır. Ayrıca miyelom hastalarından elde edilen gerçek veriler üzerinden bir çalışma yaparak elde ettikleri sonuçları değerlendirmişlerdir.

Lin ve ark. (2009), iki parametrelili lognormal dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında optimal aralık uzunluğu ve aralık sayısını belirlemişlerdir. Aralık uzunluğu ve sayısının en çok olabilirlik tahmin edicileri üzerindeki asimptotik etkilerini belirlemeyi amaçlamışlardır.

Abouammoh ve Alshingiti (2009), çalışmalarında ters üstel dağılımının genelleştirilmiş versiyonunu sunmuşlardır. Bu yaşam zamanı dağılımı çeşitli şekillerdeki bozulma oranlarını ve yaşlanma kriterlerini modelleme yeteneğine sahiptir. Genelleştirilmiş ters üstel dağılımı için istatistiksel ve güvenilirlik özelliklerini elde

etmişlerdir. En çok olabilirlik ve en küçük kareler methodlarıyla parametre tahmininde bulunmuşlardır. Elde edilen tahminlerin özelliklerini değerlendirmişlerdir.

Chen ve Lio (2010), iki parametrelili genelleştirilmiş üstel dağılım için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik yöntemi, momentler yöntemi ve olasılık grafiği üzerinden parametre tahmininde bulunmuşlardır. Bu yöntemler için simülasyon çalışması sonucunda elde edilen hata kareler ortalaması ve yan değerleri karşılaştırılmıştır. Ayrıca miyelom hastalarından elde edilen gerçek veriler üzerinden bir çalışma yapmışlardır.

Ding ve ark. (2010), yaşam sürelerinin Weibull dağılımdan geldiğini varsaydıkları birimler için rasgele ayırmalı ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında hızlandırılmış yaşam testi örneklem planlarını tasarlamışlardır. Uygun model geliştirilerek örneklem planını elde etmişlerdir. Deney sabit ve yüksek bir stres altında gerçekleştirilmiştir. Optimal stres seviyesi ile en çok olabilirlik tahmin edicilerine ait asimptotik varyansı minimize etmeyi amaçlamışlardır.

Singh ve ark. (2011), üstelleştirilmiş gamma dağılımı parametreleri için Bayes tahmin edicilerini ve ilişkili güvenilirlik fonksiyonlarını genel entropi kayıp fonksiyonu (GELF) ile karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında sansürlü örnekleme göre elde etmişlerdir. Bununla birlikte tip-II sansürlü örneklem altında üstelleştirilmiş gamma dağılımı parametreleri en çok olabilirlik tahmin edicilerini de elde ederek Bayes tahmin edicileri ile karşılaştırmışlardır.

Lin ve Lio (2012), ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini ve model seçimi üzerinde çalışmışlardır. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methodu üzerinden genelleştirilmiş üstel dağılımı ve Weibull dağılımı için Bayes tahminlerini elde etmişlerdir. Bu ilişkili iki dağılım için gerçek veriler kullanarak simülasyon sonuçları üzerinden Bayesci yaklaşımı değerlendirmişlerdir.

Singh ve ark. (2013), ters Weibull dağılımı parametreleri için tam örneklem, tip-I ve tip-II sansürlü örneklemlere göre genel entropi kayıp fonksiyonu (GELF) ile karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Tam örneklem ve tip-I, tip-II sansürleme yöntemlerine göre elde edilen Bayes tahmin edicilerine ait riskler Monte Carlo simülasyonu çalışması ile karşılaştırılmıştır. Tüberküloz bakterilerinin enjekte edildiği kobay hayvanlarının yaşam sürelerini gösteren gerçek bir veri seti ile çalışmalarını örneklendirmişlerdir.

Peng ve Yan (2013), genelleştirilmiş üstel dağılım parametreleri için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes parametre tahmini, en çok olabilirlik tahmini ve güvenilirlik fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Karesel hata kayıp fonksiyonu ve LINEX kayıp fonksiyonu altında Lindley yaklaşımını kullanarak elde ettikleri Bayes tahmini sonuçlarını Monte Carlo simülasyonu üzerinden elde ettikleri en çok olabilirlik yöntemi tahmin sonuçları ile kıyaslamışlardır.

Singh ve ark. (2014), genelleştirilmiş Lindley dağılım için tam örneklem olarak karesel hata kayıp fonksiyonu ve genel entropi kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmininde bulunmuşlardır. Tip-II sansürleme altında en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde ederek asimptotik özelliklerini değerlendirmişlerdir. Monte Carlo simülasyonu ile en çok olabilirlik tahmin edicileri ve Bayes tahmin edicilerine ait riskleri karşılaştırmışlardır. Ayrıca gerçek veriler üzerinden sayısal bir örnek sunmuşlardır.

Kaushik ve ark. (2015), Weibull dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik ve Bayes tahmininde bulunmuşlardır. Genel entropi kayıp fonksiyonu (GELF) ile karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methodu ile Bayes tahminlerini elde etmişlerdir. Sistemden kaldırılacak birimlerin oranını önceden belirlemeyip, Beta-binom dağılımı olasılık yoğunluk fonksiyonu ile belirlemişlerdir. En çok olabilirlik yöntemi ile Bayes yönteminden elde edilen tahmin edicilere ait hata kareler ortalamalarını miyelom hastalarından elde edilen gerçek veriler üzerinden simülasyon çalışması ile karşılaştırmışlardır.

Ahmadi ve Yousefzadeh (2015), ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında iki parametrelili genelleştirilmiş yarı normal dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahmini problemiyle ilgilenmişlerdir. En çok olabilirlik tahmin yöntemi, orta nokta tahmin yöntemi, momentler yöntemi ve olasılık grafik yöntemi olmak üzere farklı bir çok tahmin yöntemini kullanmışlardır. Bayes tahmini için Lindley yaklaşımı altında LINEX, karesel kayıp fonksiyonu ve genel entropi gibi simetrik ve asimetrik kayıp fonksiyonlarını hesaplamışlardır. Monte Carlo simülasyonu ile farklı tahmin methodlarının performanslarını kıyaslamışlardır. Gerçek bir veri seti ile çalışmalarını örneklemiştirler.

Dey ve ark. (2016), çalışmalarında çeşitli şekillerde başarısızlık oranlarını ve yaşlanma kriterlerini modelleyebilen genelleştirilmiş ters üstel dağılımını ele

almışlardır. İki temel amaçlı çalışmalarında ilk olarak ilerleyen tür tip-II sansürlü örneklem kullanarak, en çok olabilirlik tahminlerini ve hata kareler kayıp fonksiyonu altında Bayes tahminlerini elde etmişlerdir. İkinci amaçları kapsamında en çok olabilirlik tahmini, en iyi yansız tahmini, medyan tahmini ve Bayes tahminini kullanarak gelecek gözlemleri tahmin etmişlerdir. Gerçek iki veri setini kullanarak Monte Carlo simülasyonu ile tahmin edicilere ait çeşitli özellikleri kıyaslayarak çalışmalarını sonlandırmışlardır.

Singh ve Triphathi (2016), ters Weibull dağılımı bilinmeyen parametreleri için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında parametre tahmininde bulunmuşlardır. Orta nokta tahmin edicisi ile birlikte en çok olabilirlik tahmin edicisini elde edebilmek için EM algoritmasını önermişlerdir. Ayrıca karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Bayes tahmin edicilerini elde ederek simülasyon çalışması ile diğer tahmin edicilerle kıyaslamışlardır. Bununla birlikte çeşitli gözlem aralığı zamanları için beklenen Fisher bilgi matrisini ve optimal sansürleme şemalarını elde etmişlerdir. Gerçek bir veri seti ile çalışmalarını örneklendirmişlerdir.

Literatürde bir çok çalışma yaşam testleri için örneklem sayısı, aralık sayısı ve aralık uzunluğu gibi değişkenler için optimal değerleri belirlemeyi içermektedir.

Yang ve ark. (2008), lognormal dağılımı için optimal yaşam testi planını oluşturmuşlardır. Wu ve ark. (2008), maliyet kısıtı altında ilerleyen tür grup sansürleme için uygun yaşam testi planlamasını incelerken, Lu ve Tsai (2009), aralık sansürleme altında gamma dağılımı için yaşam testi planlaması yapmışlardır. Wu ve Huang (2014), ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında risk hesaplamaları için uygun yaşam testi planlarını belirlemişlerdir.

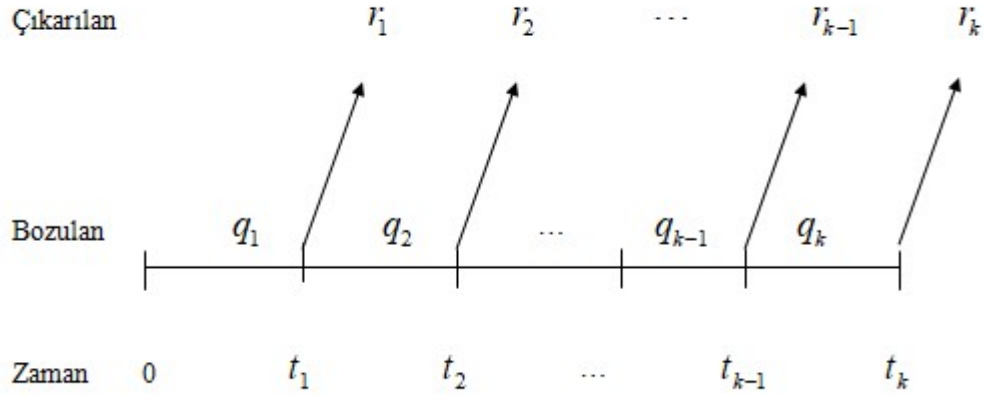
3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez içerisinde sıklıkla kullanılmış olan tanımlar ve temel kavramlar kısaca tanıtılmıştır.

3.1. İlerleyen Tür Tip-I Aralık Sansürleme

DeneySEL birimlerin sürekli olarak gözlemlenemediği uygulamalarda aralıklı sansürleme yapılması durumu ortaya çıkar. Bu tip sansürleme yaşam zamanı çalışmalarıyla ilgilenmesine rağmen esas olarak kesikli aralıklarla takip edilen ve ilgili olayların zaman zaman gerçekleştiği bilindiği, (örneğin üç aylık check-uplar) deneySEL birimleri insanlar ya da hayvanlar olan klinikSEL biyolojik çalışmalarla dikkat çekmiştir. Aralık sansürlemede veriler şu şekilde elde edilir: Bağımsız ve aynı yaşam zamanı dağılımına sahip n birim $t_0 = 0$ anında bir yaşam testine yerleştirilir. Birimler önceden belirlenmiş k adet gözlem zamanları olan $t_1, t_2, \dots, t_k$ anında kontrol edilir ve bozulan birim sayısı kaydedilir. Bu tür sansürlemeler tip-I aralık sansürleme olarak adlandırılır. İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme, tip-I aralık sansürleme ve ilerleyen tür sansürlemenin birleştirilmesinden oluşmaktadır.

İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme şu şekilde tanımlanır: aynı yaşam zamanı dağılımına sahip n birimin $t_0 = 0$ anında bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünölsün. Birimler önceden belirlenmiş k adet gözlem zamanları olan $t_1, t_2, \dots, t_k$ anında kontrol edilsin. Bu sansürleme şemasında $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere, t_i kontrol zamanını, q_i , $(t_i, t_{i+1}]$ aralığında bozulan toplam birim sayısını ve r_i, t_i anında deneyden çıkarılacak (sansürlenecek) birim sayısını göstermektedir. Burada r_i , t_i kontrol zamanında bozulmayan birim sayısının önceden belirlenmiş yüzdelerinin $(p_1, p_2, \dots, p_k = 1)$ alınmasıyla belirlenir. Kontrol zamanında bozulmayan birim sayısı Y_i ve $r_i \leq Y_i$ olmak üzere deneyden çıkarılacak birim sayısı $r_i = p_i \times Y_i$ olarak hesaplanır. Alternatif olarak r_i değeri negatif olmayan tam sayılar olarak da önceden belirlenebilir. Bu sansürleme şemasında gözlemlenen yaşam zamanı verileri $D = \{q_i, r_i, t_i\}$ şeklinde gösterilir ($i = 1, 2, \dots, k$). Burada örneklem büyüklüğü olan $n = \sum_{i=1}^k (q_i + r_i)$ şeklindedir.



Şekil 3.1. İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme şeması

Şekil 3.1'de ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şeması gösterilmektedir. Burda r_i önceden belirlenen p_i oranı ile sistemden çıkarılan sansürlenmiş birim sayısını, q_i ; aralıklarda bozulan birim sayısını ve k aralık sayısını ifade etmektedir. (t_{i-1}, t_i) zaman aralıkları bu tez çalışmasında eşit olarak alınmıştır.

n özdeş birimin $t_0 = 0$ sistemde konmasıyla başlayan ve $D = \{q_i, r_i, t_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ yaşam verilerinin elde edildiği ilerleyen tür tip-I aralık sansürlemede, θ parametre vektörü olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır (Aggarwala, 2001):

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &\propto \underbrace{[F(t_1; \theta) - F(t_0; \theta)]^{q_1} [1 - F(t_1; \theta)]^{r_1}}_{\text{aralık 1}} \\
 &\times \underbrace{[F(t_2; \theta) - F(t_1; \theta)]^{q_2} [1 - F(t_2; \theta)]^{r_2}}_{\text{aralık 2}} \\
 &\times \dots \times \underbrace{[F(t_{k-1}; \theta) - F(t_{k-2}; \theta)]^{q_{k-1}} [1 - F(t_{k-1}; \theta)]^{r_{k-1}}}_{\text{aralık (k-1)}} \\
 &\times \underbrace{[F(t_k; \theta) - F(t_{k-1}; \theta)]^{q_k} [1 - F(t_k; \theta)]^{r_k}}_{\text{aralık k}}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Eşitlik (3.1) düzenlendiğinde aşağıdaki eşitliği elde edilir.

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto \left[\prod_{i=1}^k [F(t_i; \boldsymbol{\theta}) - F(t_{i-1}; \boldsymbol{\theta})]^{q_i} [1 - F(t_i; \boldsymbol{\theta})]^{r_i} \right] \quad (3.2)$$

Burada $t_0 = 0$. Eğer $r_1 = r_2 = \dots = r_{k-1} = 0$ alınırsa, Eşitlik (3.2) de verilen olabilirlik fonksiyonun tip-I aralık sansürleme için karşılık gelen olabilirlik fonksiyonuna indirgendiği görülür. Parametreler için en çok olabilirlik tahmini Eşitlik (3.2)'de verilen olabilirlik fonksiyonun maksimize edilmesiyle elde edilir.

3.2. Tahmin

Dağılımı bilinen fakat parametreleri bilinmeyen bir kitlenin parametrelerinin tahmin edilmesi istatistik biliminin en önemli problemlerindendir. Kitle parametreleri, kitleden alınan bir örneklem yardımıyla oluşturulan istatistiklerle tahmin edilir. Bu şekilde elde edilen tahminlere nokta tahmini denir. Ancak çoğu zaman nokta tahmini tek başına yeterli olmayabilir. Kitle parametresini belli bir olasılıkla içinde barındıran aralık şeklindeki bir tahmine de ihtiyaç duyulur. Burada aralığın alt ve üst sınırları yine örneklemin birer fonksiyonudur (istatistiğidir). Literatürde, dağılımların parametrelerini tahmin etmek için çeşitli tahmin yöntemleri geliştirilmiştir. Bu çalışmada, bu tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemlerine yer verilecektir.

3.2.1. En çok olabilirlik tahmini

En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri elde etme yöntemleri arasında en popüler olanıdır. Olabilirlik ilkesine dayalı bu yöntem ile elde edilen tahmin ediciler, tahmin edicilerde aranan özelliklerin bir çoğunda iyi sonuçlar vermekle birlikte maximizasyon problemlerinin çözümünde sıkıntılar çekilmektedir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\cdot | \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ ($\mathbb{R}^p$, p boyutlu reel uzay) olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere bu rasgele değişkenlerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n | \boldsymbol{\theta}) = f(x_1 | \boldsymbol{\theta}) f(x_2 | \boldsymbol{\theta}) \dots f(x_n | \boldsymbol{\theta}) \quad (3.3)$$

olarak gösterilebilir. Burada, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ 'dir. Eşitlik (3.3) ile verilen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $\boldsymbol{\theta}$ 'nın bir fonksiyonu olarak ele alındığında ortak o.y.f.'na olabilirlik fonksiyonu adı verilmekte ve

$$L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\boldsymbol{\theta}) \quad (3.4)$$

şeklinde gösterilmektedir (Casella ve Berger, 2002). Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ değeri, $\boldsymbol{\theta}$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Yani, $\boldsymbol{\theta}$ 'nın EÇÖ tahmin edicisi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{E\check{C}O} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.5)$$

dır. Logaritma fonksiyonunun monotonluğu göz önüne alınarak, olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine olabilirlik fonksiyonunun logaritması olan

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.6)$$

maksimize edilebilir.

3.2.2. Bayes tahmini ve bazı kayıp fonksiyonları

Bayes tahmininde, diğer yöntemlerin aksine, parametrelere bir olasılık dağılımına(önsel dağılım) sahip rasgele değişkenler olarak bakılır.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(.|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ ($\mathbb{R}^p$, p boyutlu reel uzay) olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere, $\boldsymbol{\theta}$ bilindiğinde örneklemin geldiği olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ olsun. Bayes yönteminde $\boldsymbol{\theta}$ parametresinin Bayes tahmin edicisini bulmak için öncelikle $\boldsymbol{\theta}$ 'nın önsel dağılımı $\pi(\boldsymbol{\theta})$ belirlenir. Buradan $X_1, X_2, \dots, X_n$ ve $\boldsymbol{\theta}$ 'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&= f(x_1|\boldsymbol{\theta}) f(x_2|\boldsymbol{\theta}) \dots f(x_n|\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \\
&= L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) \pi(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak yazılabilir. (3.9) eşitliği ile verilen ortak o.y.f.'den, X 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $m(x)$,

$$m(x) = \int_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) \pi(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \int_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \tag{3.8}$$

elde edilir. X bilindiğinde $\boldsymbol{\theta}$ 'nın koşullu olasılık fonksiyonu veya diğer bir deyişle $\boldsymbol{\theta}$ 'nın sonsal dağılımı $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) &= \frac{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{m(x)} \\
&= \frac{L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) \pi(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) \pi(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olacaktır. Burada, $d\boldsymbol{\theta} = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_p$ şeklindedir. Karesel kayıp fonksiyonu düşünüldüğünde $\boldsymbol{\theta}$ 'nın sonsal dağılım altında beklenen değeri, $\boldsymbol{\theta}$ 'nın Bayes tahmin edicisini verecektir. Sonuç olarak $\boldsymbol{\theta}$ 'nın Bayes tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{Bayes}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}_{Bayes} &= E(\boldsymbol{\theta}|X_1, X_2, \dots, X_n) \\
&= \int_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \boldsymbol{\theta} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak elde edilir (Roussas, 1973).

Belirsizlik durumunda karar verme aşamasında beklenen bir kayıp söz konusudur. Bu kayıplar altında en iyi olana karar vermek gerekir. Bayes tahmin edicileri farklı kayıp fonksiyonları altında elde edilir. Tahmin problemlerinde en çok kullanılan kayıp fonksiyonu, karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF)'dur. Bunun nedeni karesel hata kayıp fonksiyonu altında kolayca yansız ve minimum varyanslı tahmin edicilerin elde edilebilmesidir. Simetrik bir kayıp fonksiyonu olması nedeniyle aynı

büyükliklerin az ya da çok tahminine eşit derecede ağırlık vermesi bu kayıp fonksiyonun sınırlı kullanılmasına neden olur. Karesel hata kayıp fonksiyonu;

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2 \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır.

Karesel hata kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicisi;

$$\begin{aligned} u(\hat{\theta})_{SELF} &= E_{\theta}(u(\theta)|X) \\ &= \int_{\theta \in \Theta} u(\theta) \pi(\theta|x) d\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Burada $u(\theta)$ parametrelerin herhangi bir fonksiyonudur.

Bazı durumlarda gerçek değerin olduğundan daha düşük ya da daha yüksek tahmin edilmesi farklı ölçüde kayıplara neden olmaktadır. Bu durumlarda karesel hata kayıp fonksiyonlarının kullanılması uygun olmadığı için tahmin problemlerinde asimetrik kayıp fonksiyonları tercih edilir. Literatürde bir çok asimetrik kayıp fonksiyonu tanımlanmıştır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılan Varian (1975) tarafından önerilen LINEX kayıp fonksiyonudur. Fakat birçok yazar tarafından, LINEX kayıp fonksiyonunun ölçek parametresinin tahmini için uygun olmadığı sadece şekil parametresinin tahmini için uygun olduğu vurgulanmıştır. Bu nedenle LINEX kayıp fonksiyonuna en uygun alternatif olarak Calabria ve Pulcini (1994) tarafından Genel Entropy Kayıp Fonksiyonu (GELF) önerilmiştir. Genel Entropy Kayıp Fonksiyonu (GELF);

$$L(\theta, \hat{\theta}) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^C - C \ln \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) - 1 \quad (3.13)$$

Burada C sabiti şekil parametresi ve kayıp fonksiyonunun simetriden ayrımını yansıtan kayıp parametresidir. $C > 0$ olduğu durumlarda $(\hat{\theta} > \theta)$ pozitif hata ortaya çıkarken, $C < 0$ olduğu durumlarda $(\hat{\theta} < \theta)$ negatif hata ortaya çıkar ve her iki durumda da ciddi sorunlar oluşur. Genel entropy kayıp fonksiyonu altında θ 'nın Bayes tahmin edicisi;

$$\hat{\theta}_{GELF} = [E_{\theta}(\theta^{-C} | \mathbf{X})]^{(-1/C)} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada $E_{\theta}(\cdot)$ mevcut ve sonlu olan sonsal dağılımın beklenen değeridir. Ayrıca genel entropy kayıp fonksiyonunda $C = -1$ alındığında karesel hata kayıp fonksiyonuna eşit olur. $u(\theta)$ parametrelerin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere $u(\theta)$ 'nın Bayes tahmin edicisi;

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{GELF} &= [E_{\theta}([u(\theta)]^{-C} | \mathbf{X})]^{(-1/C)} \\ &= \left(\int_{\theta \in \Theta} u(\theta^{-C}) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right)^{(-1/C)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

şeklindedir.

3.2.2.1 Tierney-Kadane Yaklaşımı

İki integralin oranı şeklinde ifade edilen Bayes tahmin edicisinin elde edilmesinde genellikle güçlükler ortaya çıkmaktadır. Bu amaçla Tierney ve Kadane (1986) tarafından sunulan yaklaşım ile Bayes tahmin edicisinin yaklaşık değeri elde edilir. Tierney-Kadane yaklaşımı olarak adlandırılan bu yöntemin aşamaları kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, parametre vektörünü

$L(\theta)$, olabilirlik fonksiyonunu

$\ell(\theta)$, olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını

$u(\theta)$, θ 'nın rasgele seçilmiş fonksiyonunu

Θ , θ parametre uzayını

temsil etsin. $\pi(\theta)$, ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $G(\theta) = \ln \pi(\theta)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \delta(\theta) &= \frac{1}{n} \ln[L(\theta) \pi(\theta)], \\ &= \frac{1}{n} [G(\theta) + \ell(\theta)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\delta^*(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{n} \ln[L(\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) u(\boldsymbol{\theta})], \\
&= \frac{1}{n} \ln u(\boldsymbol{\theta}) + \delta(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta})$ ve $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta^*})$, $\delta(\boldsymbol{\theta})$ ve $\delta^*(\boldsymbol{\theta})$ fonksiyonlarını sırasıyla maximize eden değerler olmak üzere,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{TK} = \sqrt{\frac{|\Sigma_{\theta}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta^*}) - \delta(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta}) \right\} \right] \tag{3.18}$$

Burada

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cccc} -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \theta_2^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \theta_2 \partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \theta_p \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \theta_p^2} \end{array} \right)^{-1}_{\theta=\hat{\theta}_{\delta}}$$

$\delta_{\theta_i}^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \ln[L(\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) u(\theta_i)]$, $i = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere

$$\Sigma_{\theta_i}^* = \left(\begin{array}{cccc} -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial^2 \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial^2 \theta_2^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial \theta_2 \partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial \theta_p \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \delta_{\theta_i}^*}{\partial^2 \theta_p^2} \end{array} \right)^{-1}_{\theta=\hat{\theta}_{\delta^*}}$$

şeklindedir (Singh ve Tripathi, 2016).

$u(\boldsymbol{\theta})$ fonksiyonunun karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini aşağıdaki gibidir.

$$u(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{SELF} = E_{u(\boldsymbol{\theta})}(u(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{X}) \quad (3.19)$$

$$u(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta^*}) - \delta(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta}) \right\} \right] \quad (3.20)$$

$u(\boldsymbol{\theta})$ fonksiyonunun genel entropy kayıp fonksiyonu (GELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini aşağıdaki gibidir.

$$u(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{GELF} = [E_{\theta}([u(\boldsymbol{\theta})]^{-C} | \mathbf{X})]^{(-1/C)} \quad (3.21)$$

$$u(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta^*}) - \delta(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{(-1/C)} \quad (3.22)$$

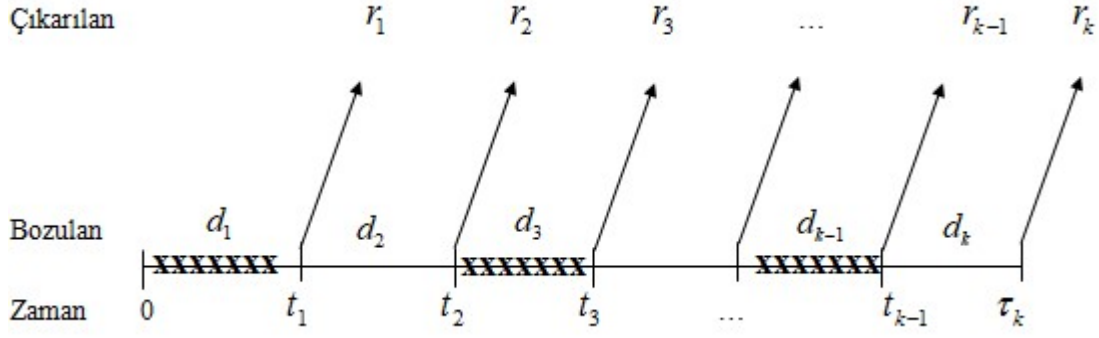
Burada $\delta^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \ln[u(\boldsymbol{\theta})]^{-C} + \delta(\boldsymbol{\theta})$ şeklindedir.

4. PART-TIME OPERATÖRLÜ İLERLEYEN TÜR TİP-I ARALIK SANSÜRLEME

Bu tez çalışmasında ilerleyen tür tip-I aralık sansürlemenin yeni bir modifikasyonu olan Part-Time operatörü tanıtılmıştır. Bu yeni şema Part-Time çalışarak bir yaşam zamanı testi gerçekleştirmeyi içermektedir. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şu şekilde tanımlanır: Bağımsız ve aynı yaşam zamanı dağılımına sahip n birimin $t_0 = 0$ anında bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünölsün. Aralık sayısı k çift ya da tek sayıda olabilir. Bu çalışmada k aralık sayısının çift olduğu durumlar ele alınmıştır. Operatör (t_0, t_1) aralığında bozulan d_1 birimin kesin bozulma zamanlarını kaydeder ve t_1 anında önceden belirlenen p_i oranıyla hesaplanan r_1 birim rasgele seçilerek deneyden çıkartılır. Operatör (t_1, t_2) aralığında deneyin başından ayrılır ve t_2 anında gelerek yalnızca (t_1, t_2) aralığında bozulan birim sayısı d_2 değerini belirler. Bununla birlikte çalışan r_2 birim sistemden rasgele seçilerek çıkartılır. Operatör (t_2, t_3) aralığında deneyin başında kalarak, bozulan d_3 sayıdaki birimin kesin bozulma zamanlarını kaydeder ve t_3 anında çalışan r_3 kadar birimi rasgele seçerek sistemden ayırır. Operatör (t_3, t_4) aralığında deneyin başından ayrılır ve t_4 anında gelerek yalnızca (t_3, t_4) aralığında bozulan birim sayısı d_4 değerini belirler. Diğer aralıklarda olduğu gibi çalışan r_4 birim sistemden rasgele seçilerek çıkartılır. Bu şekilde t_k zamanına kadar işlemler devam eder.

Böylece, $Z = \{d_i, r_i, x_j, t_i; i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}\}$ değerleri gözlemlenir. Burada, bozulma sayıları d_i , sansürlenene birim sayıları r_i ve bozulma zamanları olan x_j rasgele değişkenlerdir. Genellikle sistemden çıkarılacak birim sayısı $r_i, i = 1, 2, \dots, k$, bozulamayan birimlerin önceden belirlenmiş $p_1, p_2, \dots, p_k$ oranları alınarak hesaplanır. Sistemden çıkarılacak birim sayısı $r_i = \lfloor (m_i - d_i)p_i \rfloor$ olup burada

$$m_i = n - \sum_{j=1}^{i-1} d_j - \sum_{j=1}^{i-1} r_j, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad i\text{'nci adımda bozulmayan birim sayısıdır.}$$



Şekil 3.2. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I sansürleme şeması

Aralık sayısı k çift alındığında, Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında θ parametre vektörü için olabilirlik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
 L(\theta) \propto & \underbrace{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_{d_1})[1-F(t_1, \theta)]^{r_1}}_{\text{aralık 1}} \\
 & \times \underbrace{[F(t_2, \theta) - F(t_1, \theta)]^{d_2}[1-F(t_2, \theta)]^{r_2}}_{\text{aralık 2}} \\
 & \times \underbrace{f(x_{d_1+1})f(x_{d_1+2})\dots f(x_{d_1+d_3})[1-F(t_3, \theta)]^{r_3}}_{\text{aralık 3}} \\
 & \times \underbrace{[F(t_4, \theta) - F(t_3, \theta)]^{d_4}[1-F(t_4, \theta)]^{r_4}}_{\text{aralık 4}} \\
 & \times \dots \times \underbrace{[F(t_k, \theta) - F(t_{k-1}, \theta)]^{d_k}[1-F(t_k, \theta)]^{r_k}}_{\text{aralık k}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Eşitlik (3.3) düzenlendiğinde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
 L(\theta) \propto & \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} f(x_i) \right] \times \left[\prod_{i=1}^{k/2} [F(t_{2i}, \theta) - F(t_{2i-1}, \theta)]^{d_{2i}} \right] \\
 & \times \left[\prod_{i=1}^k [1-F(t_i, \theta)]^{r_i} \right]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Parametreler için en çok olabilirlik tahmini Eşitlik (4.2)'de verilen olabilirlik fonksiyonun maksimize edilmesiyle elde edilebilir.

5. BAZI DAĞILIMLAR İÇİN EN ÇOK OLABİLİRLİK VE BAYES TAHMİNLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde Weibull dağılımı ve genelleştirilmiş ters üstel dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicileri elde edilecektir.

5.1. Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı güvenilirlik analizinde yaşam zamanı dağılımı olarak kullanılan en popüler dağılımlardan biridir. X rasgele değişkeni, β şekil parametrelili ve λ ölçek parametrelili Weibull dağılımına sahip olsun. X , rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x; \lambda, \beta) = \frac{\beta}{\lambda^\beta} x^{\beta-1} e^{-(x/\lambda)^\beta}, \quad x > 0, (\lambda > 0, \beta > 0)$$

$$F(x; \lambda, \beta) = 1 - e^{-(x/\lambda)^\beta}, \quad x > 0, (\lambda > 0, \beta > 0)$$
(5.1)

şeklinde tanımlanmaktadır.

5.1.1. Weibull dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini

Yaşam zamanlarının λ ve β parametrelili Weibull dağılımına sahip olduğu n özdeş birimin $t_0 = 0$ anında sisteme konmasıyla başlayan ve $D = \{q_i, r_i, t_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ örnekleminin elde edildiği ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında, Eşitlik (3.2)'de verilen olabilirlik fonksiyonuna göre olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta; D) \propto \prod_{i=1}^k \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{q_i} \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{r_i}$$
(5.2)

olarak elde edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$\ell(\theta; D) = \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) - \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (4.3) log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\theta; D)$ 'nın parametrelere göre türevleri,

$$\frac{\partial \log \ell(\theta; D)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^k q_i \frac{\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \frac{\beta}{\lambda} e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \frac{\beta}{\lambda} e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}} + r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \log \ell(\theta; D)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^k q_i \frac{\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}} - r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\lambda}\right) \quad (5.5)$$

olarak elde edilir.

Elde edilen bu türevler sıfıra eşitlenerek λ ve β parametreleri için tahmin değerleri elde edilir. Fakat analitik olarak çözümler elde edilemediğinden Newton-Raphson sayısal yöntemiyle tahmin değerleri bulunur (Singh ve Tripathi, 2016).

5.1.2. Weibull dağılımı için part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini

Yaşam zamanlarının λ ve β parametrelili Weibull dağılımına sahip olduğu n özdeş birimin $t_0 = 0$ anında sisteme konmasıyla başlayan ve $Z = \{d_i, r_i, x_j, t_i; i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})\}$ örnekleminin elde edildiği part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında, olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$L(\theta) \alpha \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta} \right] \left[\prod_{i=1}^{k/2} \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{d_{2i}} \right] \left[\prod_{i=1}^k \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{r_i} \right] \quad (5.6)$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) = & \left[(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln \left(\frac{\beta}{\lambda} \right) \right] + \left[\left(\sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} (\beta-1) \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) - \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta \right) \right] \\ & + \left[\sum_{i=1}^2 d_{2i} \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta} \right)^{d_{2i}} \right] - \left[\left(\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (5.7) log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\boldsymbol{\theta})$ 'nın parametrelere göre türevleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} = & \left[-\frac{(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})}{\lambda} - \frac{(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})(\beta-1)}{\lambda} \right. \\ & - \sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \left(-\frac{\left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta}{\lambda} \right) + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \frac{\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta \frac{\beta}{\lambda} e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - \left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta \frac{\beta}{\lambda} e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta}} \\ & \left. + \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \left(\frac{\beta}{\lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} = & \left[\frac{(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})}{\beta} + \sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) - \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) \right. \\ & + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \frac{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right) e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} + \left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right) e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta}} \\ & \left. + \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Elde edilen bu türevler sıfıra eşitlenerek λ ve β parametreleri için tahmin değerleri elde edilir. Fakat analitik olarak çözümler elde edilemediğinden Newton-Raphson sayısal yöntemiyle tahmin değerleri bulunur.

5.1.3. Weibull dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini

Bu bölümde, λ ve β parametrelili Weibull dağılımının bilinmeyen parametreleri için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında karesel hata kayıp fonksiyonlu ve genel entropi kayıp fonksiyonlu Bayes tahmin edicileri elde edilecektir. Bağımsız λ ve β parametreleri için sırasıyla Gamma (a,b) ve Gamma (c,d) önsel dağılımları,

$$\pi_1(\lambda | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda), \lambda > 0, a > 0, b > 0 \quad (5.10)$$

$$\pi_2(\beta | c, d) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \beta^{c-1} \exp(-d\beta), \beta > 0, c > 0, d > 0 \quad (5.11)$$

şeklindedir, burda $\Gamma(.)$ in the Gamma fonksiyonudur. λ ve β parametrelerine ait ortak önsel dağılım,

$$\pi(\lambda, \beta) = \pi_1(\lambda | a, b) \pi_2(\beta | c, d) \quad (5.12)$$

$$\pi(\lambda, \beta) = \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \lambda^{a-1} \beta^{c-1} \exp(-(b\lambda + d\beta)) \quad (5.13)$$

olarak elde edilir.

$D = \{q_i, r_i, t_i\}, i = 1, 2, \dots, k$, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında $W(\lambda, \beta)$ dağılımdan elde edilmiş sansürlenmiş veriler olmak üzere λ ve β için ortak sonsal dağılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\pi(\lambda, \beta | D) = \frac{\pi_1(\lambda | a, b) \times \pi_2(\beta | c, d) \times L(\lambda, \beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi_1(\lambda | a, b) \times \pi_2(\beta | c, d) \times L(\lambda, \beta) d\lambda d\beta} \quad (5.14)$$

Eşitlik (5.3)'te verilen olabilirlik fonksiyonu yardımıyla;

$$\pi(\lambda, \beta | D) = \frac{\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \lambda^{a-1} \beta^{c-1} \exp(-(b\lambda + d\beta)) \left[\prod_{i=1}^k \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{q_i} \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{r_i} \right]}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \lambda^{a-1} \beta^{c-1} \exp(-(b\lambda + d\beta)) \left[\prod_{i=1}^k \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{q_i} \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{r_i} \right] d\lambda d\beta} \quad (5.15)$$

$u(\lambda, \beta)$, parametre kümesinin bir fonksiyonu olmak üzere, Bayes tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty u(\lambda, \beta) \pi(\lambda, \beta | D) d\lambda d\beta \quad (5.16)$$

şeklindedir. Bu Bayes tahminleri açık olarak elde edilememekle birlikte Tierney Kadane methodu (1986) yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir.

5.1.3.1 İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini

Tierney Kadane yaklaşım formülleri;

$$\begin{aligned} \delta(\theta) &= \frac{1}{n} \ln[L(\theta) \pi(\theta)], \\ &= \frac{1}{n} [G(\theta) + \ell(\theta)] \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \delta^*(\theta) &= \frac{1}{n} \ln[L(\theta) \pi(\theta) u(\theta)], \\ &= \frac{1}{n} \ln u(\theta) + \delta(\theta) \end{aligned} \quad (5.18)$$

fonksiyonları sırasıyla elde edilir. Burada $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, parametre vektörünü, $L(\theta)$ olabilirlik fonksiyonu, $\ell(\theta)$, olabilirlik fonksiyonunun logaritması ve $G(\theta) = \ln \pi(\theta)$ olarak alınır.

$$G(\lambda, \beta) = \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\lambda) + (c-1) \ln(\beta) - (b\lambda + d\beta), \quad (5.19)$$

$$\ell(\lambda, \beta; t) = \left[\sum_{i=1}^k q_i \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) - r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right] \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \delta(\lambda, \beta) = & \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\lambda) + (c-1) \ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) - r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

$u(\theta) = \lambda$ ve $u(\theta) = \beta$ olduğu durumlarda sırasıyla

$$\begin{aligned} \delta_\lambda^*(\lambda, \beta) = & \frac{1}{n} \ln \lambda + \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\lambda) + (c-1) \ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) - r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \delta_\beta^*(\lambda, \beta) = & \frac{1}{n} \ln \beta + \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\lambda) + (c-1) \ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) - r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

olarak elde edilir.

$u(\theta) = \lambda$ ve $u(\theta) = \beta$ fonksiyonlarının karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\lambda}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_\lambda^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_\lambda^*(\hat{\lambda}_{\delta_\lambda^*}, \hat{\beta}_{\delta_\lambda^*}) - \delta(\hat{\lambda}_\delta, \hat{\beta}_\delta) \right\} \right] \quad (5.24)$$

$$\hat{\beta}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_\beta^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_\beta^*(\hat{\lambda}_{\delta_\beta^*}, \hat{\beta}_{\delta_\beta^*}) - \delta(\hat{\lambda}_\delta, \hat{\beta}_\delta) \right\} \right] \quad (5.25)$$

$u(\boldsymbol{\theta}) = \lambda$ ve $u(\boldsymbol{\theta}) = \beta$ fonksiyonlarının genel entropy kayıp fonksiyonu (GELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\lambda}_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\lambda}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\lambda}^*(\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*}) - \delta(\hat{\lambda}_{\delta}, \hat{\beta}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{(-1/C)} \quad (5.26)$$

$$\hat{\beta}_{SELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\beta}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\beta}^*(\hat{\lambda}_{\delta_{\beta}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\beta}^*}) - \delta(\hat{\lambda}_{\delta}, \hat{\beta}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{-1/C} \quad (5.27)$$

Burada $\delta^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \ln[u(\boldsymbol{\theta})]^{-C} + \delta(\boldsymbol{\theta})$ şeklindedir.

$(\hat{\lambda}_{\delta}, \hat{\beta}_{\delta}), (\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*})$ ve $(\hat{\lambda}_{\delta_{\beta}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\beta}^*}), \delta(\lambda, \beta), \delta_{\lambda}^*(\lambda, \beta)$ ve $\delta_{\beta}^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonlarını sırasıyla maximize eden değerler olmak üzere, Σ ve $\Sigma_{\lambda}^*, \Sigma_{\beta}^*, \delta(\lambda, \beta), \delta_{\lambda}^*(\lambda, \beta)$ ve $\delta_{\beta}^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonlarının ikinci türevlerini içeren Hessian matrisinin tersinin eksili halidir.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \beta \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}_{\delta}, \beta=\hat{\beta}_{\delta}}$$

$$\Sigma_{\lambda}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \beta \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \beta=\hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*}}$$

$$\Sigma_{\beta}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial \beta \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial^2 \beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}_{\delta_{\beta}^*}, \beta=\hat{\beta}_{\delta_{\beta}^*}}$$

Eşitlik (5.21)'te verilen $\delta(\lambda, \beta)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} = & \frac{1}{n} \left[\sum_i^k \frac{q_i}{e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}} \left(\frac{\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} \left(-\beta - 1 + \beta \left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta\right)}{\lambda^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \left(\beta + 1 - \beta \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta\right)}{\lambda^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{q_i \left(\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^2}{\lambda \left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^2} + \sum_i^k \left(-\frac{r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta (\beta^2 + \beta)}{\lambda^2} \right) - \frac{a-1}{\lambda^2} \right] \quad (5.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2} = & \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)} \left(\begin{aligned} & -\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} \\ & + \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \end{aligned} \right) \\
& - q_i \left(\frac{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}}{\left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^2} \right)^2 \\
& + \sum_i^k \left(-r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^2 \right) - \frac{c-1}{\beta^2} \right] \quad (5.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta} = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda} \right. \\ & - \frac{\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda} \\ & \left. - \frac{\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda} \right) \\ & - \frac{\left(q_i \left(\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) \left(-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right) }{\left(e^{-\left(\frac{t_{i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^2} \right) \\ & + \sum_i^k \left(\frac{r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \left(\ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right) \beta + 1 \right)}{\lambda} \right) \right] \end{aligned}
\end{aligned}
\tag{5.30}$$

Eşitlik (5.22)'te verilen $\delta_\lambda^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} - \frac{1}{n \lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial^2 \beta^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2}$$

Eşitlik (5.23)'te verilen $\delta_\beta^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_\beta^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\beta^*}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\beta^*}{\partial^2 \beta^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2} - \frac{1}{n \beta^2}$$

5.1.4. Weibull dağılımı için Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini

Bu bölümde, λ ve β parametrelili Weibull dağılımının bilinmeyen parametreleri için Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında karesel hata kayıp fonksiyonlu ve genel entropi kayıp fonksiyonlu Bayes tahmin edicileri elde edilecektir. Bağımsız λ ve β parametreleri için sırasıyla Gamma (a,b) ve Gamma (c,d) önsel dağılımları.

$$\pi_1(\lambda | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda), \lambda > 0, a > 0, b > 0 \quad (5.31)$$

$$\pi_2(\beta | c, d) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \beta^{c-1} \exp(-d\beta), \beta > 0, c > 0, d > 0 \quad (5.32)$$

şeklindedir, burda $\Gamma(.)$ in the Gamma fonksiyonudur. λ ve β parametrelerine ait ortak önsel dağılım

$$\pi(\lambda, \beta) = \pi_1(\lambda | a, b) \pi_2(\beta | c, d) \quad (5.33)$$

$$\pi(\lambda, \beta) = \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \lambda^{a-1} \beta^{c-1} \exp(-(b\lambda + d\beta)) \quad (5.34)$$

olarak elde edilir.

$Z = \{d_i, x_i, r_i, t_i\}, i = 1, 2, \dots, k$, Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında $W(\lambda, \beta)$ dağılımdan elde edilmiş sansürlenmiş veriler olmak üzere λ ve β için ortak sonsal dağılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\pi(\lambda, \beta | Z) = \frac{\pi_1(\lambda | a, b) \times \pi_2(\beta | c, d) \times L(\lambda, \beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi_1(\lambda | a, b) \times \pi_2(\beta | c, d) \times L(\lambda, \beta) d\lambda d\beta} \quad (5.35)$$

Eşitlik (5.7)'te verilen olabilirlik fonksiyonu yardımıyla $\pi(\lambda, \beta | Z)$ sonsal dağılımının açık hali aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\pi(\lambda, \beta) \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta} \right] \left[\prod_{i=1}^{k/2} \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{d_{2i}} \right] \left[\prod_{i=1}^k \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{r_i} \right]}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\lambda, \beta) \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta} \right] \left[\prod_{i=1}^{k/2} \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{d_{2i}} \right] \left[\prod_{i=1}^k \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{r_i} \right] d\lambda d\beta} \quad (5.36)$$

$u(\lambda, \beta)$, parametre kümesinin bir fonksiyonu olmak üzere, Bayes tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty u(\lambda, \beta) \pi(\lambda, \beta | \mathbf{x}) d\lambda d\beta \quad (5.37)$$

şeklindedir. Bu Bayes tahminleri açık olarak elde edilememekle birlikte Tierney Kadane methodu (1986) yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir.

5.1.4.1. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini

$G(\boldsymbol{\theta}) = \ln \pi(\boldsymbol{\theta})$ olmak üzere, $G(\alpha, \lambda)$ ve $\ell(\boldsymbol{\theta}; D)$ fonksiyonları;

$$G(\lambda, \beta) = \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\lambda) + (c-1) \ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \ell(\lambda, \beta; Z) = & \left[(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln \left(\frac{\beta}{\lambda} \right) + \left(\sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} (\beta-1) \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) - \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta \right) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)^{d_{2i}} - \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

şeklindedir.

$\delta(\boldsymbol{\theta})$, $\delta^*(\boldsymbol{\theta})$ fonksiyonları Eşitlik (5.17) ve Eşitlik (5.18)'e göre sırasıyla elde edilir.

$$\begin{aligned}
\delta(\lambda, \beta) = & \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1)\ln(\lambda) + (c-1)\ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \right. \\
& + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln \left(\frac{\beta}{\lambda} \right) + \left(\sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} (\beta-1) \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) - \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta \right) \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta} \right)^{d_{2i}} - \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right]
\end{aligned} \quad (5.40)$$

$u(\theta) = \lambda$ ve $u(\theta) = \beta$ olduğu durumlarda sırasıyla

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda^*(\lambda, \beta) = & \frac{1}{n} \ln \lambda + \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1)\ln(\lambda) + (c-1)\ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \right. \\
& + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln \left(\frac{\beta}{\lambda} \right) + \sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} (\beta-1) \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) - \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta} \right)^{d_{2i}} - \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right]
\end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
\delta_\beta^*(\lambda, \beta) = & \frac{1}{n} \ln \beta + \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1)\ln(\lambda) + (c-1)\ln(\beta) - (b\lambda + d\beta) \right. \\
& + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln \left(\frac{\beta}{\lambda} \right) + \sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} (\beta-1) \ln \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) - \left(\frac{x_i}{\lambda} \right)^\beta \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda} \right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda} \right)^\beta} \right)^{d_{2i}} - \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^\beta \right]
\end{aligned} \quad (5.42)$$

olarak elde edilir.

$u(\theta) = \lambda$ ve $u(\theta) = \beta$ fonksiyonlarının karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\lambda}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_\lambda^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_\lambda^*(\hat{\lambda}_{\delta_\lambda^*}, \hat{\beta}_{\delta_\lambda^*}) - \delta(\hat{\lambda}_\delta, \hat{\beta}_\delta) \right\} \right] \quad (5.43)$$

$$\hat{\beta}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_\beta^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_\beta^*(\hat{\lambda}_{\delta_\beta^*}, \hat{\beta}_{\delta_\beta^*}) - \delta(\hat{\lambda}_\delta, \hat{\beta}_\delta) \right\} \right] \quad (5.44)$$

$u(\boldsymbol{\theta}) = \lambda$ ve $u(\boldsymbol{\theta}) = \beta$ fonksiyonlarının genel entropy kayıp fonksiyonu (GELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\lambda}_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\lambda}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\lambda}^*(\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*}) - \delta(\hat{\lambda}_{\delta}, \hat{\beta}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{(-1/C)} \quad (5.45)$$

$$\hat{\beta}_{SELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\beta}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\beta}^*(\hat{\lambda}_{\delta_{\beta}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\beta}^*}) - \delta(\hat{\lambda}_{\delta}, \hat{\beta}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{-1/C} \quad (5.46)$$

Burada $\delta^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \ln[u(\boldsymbol{\theta})]^{-C} + \delta(\boldsymbol{\theta})$ şeklindedir.

$(\hat{\lambda}_{\delta}, \hat{\beta}_{\delta}), (\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*})$ ve $(\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*}), \delta(\lambda, \beta), \delta_{\lambda}^*(\lambda, \beta)$ ve $\delta_{\beta}^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonlarını sırasıyla maximize eden değerler olmak üzere, Σ ve $\Sigma_{\lambda}^*, \Sigma_{\beta}^*, \delta(\lambda, \beta), \delta_{\lambda}^*(\lambda, \beta)$ ve $\delta_{\beta}^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonlarının ikinci türevlerini içeren Hessian matrisinin tersinin eksili halidir.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \beta \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}_{\delta}, \beta=\hat{\beta}_{\delta}}$$

$$\Sigma_{\lambda}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \beta \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}, \beta=\hat{\beta}_{\delta_{\lambda}^*}}$$

$$\Sigma_{\beta}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial \beta \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta_{\beta}^*}{\partial^2 \beta^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\lambda=\hat{\lambda}_{\delta_{\beta}^*}, \beta=\hat{\beta}_{\delta_{\beta}^*}}$$

Eşitlik (5.40)'te verilen $\delta(\lambda, \beta)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} = & \frac{1}{n} \left[\frac{(d_1 + d_3 + \dots + d_k)(2 - \beta)}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}} \left(\frac{\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta (\beta^2 + \beta)}{\lambda^2} \right) \right. \\
& + \sum_{i=1}^{k/2} \left(\frac{d_{2i}}{e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta}} \right) \left(- \frac{\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} \left(\beta - 1 + \beta \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \right)}{\lambda^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \left(\beta + 1 - \beta \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \right)}{\lambda^2} \right) \right. \\
& \left. - d_{2i} \left(\frac{\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda \left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)} \right)^2 - \sum_i^k \left(\frac{r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta (\beta^2 + \beta)}{\lambda^2} \right) - \frac{a-1}{\lambda^2} \right] \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2} = & \frac{1}{n} \left[- \frac{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}} \left(\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^2 \right) \right. \\
& + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{n_{2i}}{\left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)} \left(- \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right) \right. \\
& \left. - d_{2i} \left(\frac{- \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta}}{\left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)^2} \right)^2 \right. \\
& \left. - \sum_i^k \left(r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^2 \right) - \frac{c-1}{\beta^2} \right] \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta} = & \frac{1}{n} \left[-\frac{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}}{\lambda} - \sum_{i=1}^{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}} \left(-\frac{\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)(\beta-1)}{\lambda} \right) \right. \\
& + \sum_{i=1}^{k/2} \frac{d_{2i}}{\left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)} \left(-\frac{\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda} \right. \\
& \quad - \frac{\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda} \\
& \quad \left. \left. - \frac{\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^{2\beta} \ln\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right) \beta e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta}}{\lambda} \right) \right. \\
& \left. - d_{2i} \left(\frac{\left(\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \beta e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right) \left(-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} + \left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right) e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)}{\left(e^{-\left(\frac{t_{2i-1}}{\lambda}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\lambda}\right)^\beta} \right)^2} \right) \right. \\
& \left. + \sum_i^k \left(\frac{r_i \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta \left(\ln\left(\frac{t_i}{\lambda}\right) \beta + 1 \right)}{\lambda} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{5.49}$$

Eşitlik (5.41), verilen $\delta_\lambda^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonuna ait kısmı türevler;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial^2 \lambda^2} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} - \frac{1}{n\lambda^2} \\
\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \lambda \partial \beta} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta} \\
\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial^2 \beta^2} &= \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2}
\end{aligned}$$

Eşitlik (5.42), verilen $\delta_\beta^*(\lambda, \beta)$ fonksiyonuna ait kısmı türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_\beta^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\beta^*}{\partial \lambda \partial \beta} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\beta^*}{\partial^2 \beta^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \beta^2} - \frac{1}{n\beta^2}$$

5.1.5. Weibull dağılımı için simülasyon çalışması

Bu bölümde, Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve tam örneklem durumunda Weibull dağılımı için elde edilen eço ile Bayes tahmin edicileri simülasyon çalışması ile karşılaştırılacaktır.

5.1.5.1. Weibull dağılımı için en çok olabilirlik tahmini simülasyon çalışması

$\lambda = 2, \beta = 1$ parametrelili Weibull dağılımı kullanılarak; Part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve tam örneklem durumunda, $p=0.1$ alınarak 10.000 deneme üzerinden Monte Carlo simülasyonu ile EÇO tahmin değerleri elde edilmiştir. Örneklem büyüklüğü n için sırasıyla 50, 100, 250 ve 500; aralık sayısı k için 4 ve 6; herbiri eşit uzunlukta olmak üzere, t ile gösterilen aralık uzunluğu sırasıyla 0.25-0.5-0.75 değerleri alınarak simülasyon çalışması yapılmıştır. Elde edilen ortalama tahmin değerleri, tahminlere ait yan değerleri ortalaması, varyansları ve hata kareler ortalamaları (MSE) Çizelge 5.1' de sunulmuştur.

Çizelge 5.1. WD için en çok olabilirlik tahmini simülasyon sonuçları

$\lambda : 2, \beta : 1$				p=0.1 and 10,000 tekrar							
				Ortalama Tahmin		Ortalama Yan		Ortalama Var.		MSE	
n	k	t	Method	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
50	4	0.25	Tam örneklem	1.9983	1.0294	-0.0017	0.0294	0.0860	0.0140	0.0860	0.0149
			Part-Time	2.0898	1.0630	0.0898	0.0630	0.4723	0.0597	0.4804	0.0637
			Aralık	2.2238	1.0474	0.2238	0.0474	0.9613	0.0813	1.0113	0.0835
50	6	0.25	Tam örneklem	2.0019	1.0277	0.0019	0.0277	0.0865	0.0136	0.0864	0.0144
			Part-Time	2.0772	1.0400	0.0772	0.0400	0.3005	0.0414	0.3064	0.0430
			Aralık	2.1264	1.0291	0.1264	0.0291	0.4260	0.0530	0.4419	0.0538
50	4	0.5	Tam örneklem	2.0100	1.0316	0.0100	0.0316	0.0888	0.0142	0.0888	0.0152
			Part-Time	2.0613	1.0329	0.0613	0.0329	0.1936	0.0315	0.1974	0.0326
			Aralık	2.0883	1.0222	0.0883	0.0222	0.2425	0.0483	0.2502	0.0487
50	6	0.5	Tam örneklem	2.0127	1.0291	0.0127	0.0291	0.0899	0.0139	0.0900	0.0147
			Part-Time	2.0405	1.0280	0.0405	0.0280	0.1374	0.0241	0.1391	0.0248
			Aralık	2.0443	1.0230	0.0443	0.0230	0.1454	0.0332	0.1473	0.0337
50	4	0.75	Tam örneklem	2.0062	1.0295	0.0062	0.0295	0.0889	0.0137	0.0889	0.0146
			Part-Time	2.0258	1.0304	0.0258	0.0304	0.1225	0.0233	0.1231	0.0242
			Aralık	2.0279	1.0253	0.0279	0.0253	0.1308	0.0385	0.1316	0.0392
50	6	0.75	Tam örneklem	2.0081	1.0291	0.0081	0.0291	0.0864	0.0138	0.0865	0.0146
			Part-Time	2.0206	1.0255	0.0206	0.0255	0.1045	0.0187	0.1049	0.0193
			Aralık	2.0165	1.0234	0.0165	0.0234	0.1079	0.0285	0.1082	0.0290
100	4	0.25	Tam örneklem	2.0036	1.0129	0.0036	0.0129	0.0444	0.0064	0.0444	0.0065
			Part-Time	2.0634	1.0275	0.0634	0.0275	0.2535	0.0270	0.2575	0.0277
			Aralık	2.1246	1.0190	0.1246	0.0190	0.4043	0.0380	0.4198	0.0384
100	6	0.25	Tam örneklem	2.0032	1.0137	0.0032	0.0137	0.0441	0.0065	0.0441	0.0067
			Part-Time	2.0423	1.0210	0.0423	0.0210	0.1494	0.0200	0.1511	0.0204
			Aralık	2.0608	1.0164	0.0608	0.0164	0.1764	0.0255	0.1801	0.0258
100	4	0.5	Tam örneklem	2.0030	1.0130	0.0030	0.0130	0.0443	0.0064	0.0443	0.0066
			Part-Time	2.0271	1.0144	0.0271	0.0144	0.0882	0.0148	0.0889	0.0150
			Aralık	2.0398	1.0080	0.0398	0.0080	0.0998	0.0232	0.1013	0.0232
100	6	0.5	Tam örneklem	2.0054	1.0131	0.0054	0.0131	0.0443	0.0065	0.0444	0.0067
			Part-Time	2.0203	1.0121	0.0203	0.0121	0.0659	0.0117	0.0663	0.0118
			Aralık	2.0218	1.0088	0.0218	0.0088	0.0675	0.0161	0.0680	0.0162
100	4	0.75	Tam örneklem	2.0032	1.0140	0.0032	0.0140	0.0454	0.0065	0.0454	0.0067
			Part-Time	2.0122	1.0141	0.0122	0.0141	0.0602	0.0110	0.0604	0.0112
			Aralık	2.0122	1.0115	0.0122	0.0115	0.0619	0.0187	0.0621	0.0188
100	6	0.75	Tam örneklem	2.0019	1.0149	0.0019	0.0149	0.0444	0.0064	0.0444	0.0066
			Part-Time	2.0075	1.0140	0.0075	0.0140	0.0528	0.0089	0.0529	0.0090
			Aralık	2.0055	1.0132	0.0055	0.0132	0.0540	0.0137	0.0540	0.0139

250	4	0.25	Tam örneklem	2.0035	1.0055	0.0035	0.0055	0.0174	0.0025	0.0174	0.0025
			Part-Time	2.0301	1.0105	0.0301	0.0105	0.0900	0.0103	0.0909	0.0104
			Aralık	2.0523	1.0067	0.0523	0.0067	0.1195	0.0151	0.1222	0.0151
250	6	0.25	Tam örneklem	2.0014	1.0057	0.0014	0.0057	0.0182	0.0025	0.0182	0.0025
			Part-Time	2.0212	1.0065	0.0212	0.0065	0.0537	0.0075	0.0541	0.0076
			Aralık	2.0304	1.0030	0.0304	0.0030	0.0602	0.0100	0.0611	0.0100
250	4	0.5	Tam örneklem	2.0015	1.0064	0.0015	0.0064	0.0174	0.0025	0.0174	0.0025
			Part-Time	2.0102	1.0070	0.0102	0.0070	0.0317	0.0056	0.0318	0.0056
			Aralık	2.0135	1.0055	0.0135	0.0055	0.0334	0.0088	0.0336	0.0089
250	6	0.5	Tam örneklem	2.0008	1.0064	0.0008	0.0064	0.0178	0.0025	0.0178	0.0025
			Part-Time	2.0057	1.0068	0.0057	0.0068	0.0258	0.0045	0.0258	0.0046
			Aralık	2.0065	1.0051	0.0065	0.0051	0.0261	0.0064	0.0262	0.0064
250	4	0.75	Tam örneklem	2.0028	1.0064	0.0028	0.0064	0.0177	0.0025	0.0177	0.0025
			Part-Time	2.0078	1.0062	0.0078	0.0062	0.0232	0.0042	0.0233	0.0042
			Aralık	2.0081	1.0048	0.0081	0.0048	0.0235	0.0071	0.0236	0.0071
250	6	0.75	Tam örneklem	2.0042	1.0059	0.0042	0.0059	0.0181	0.0025	0.0181	0.0025
			Part-Time	2.0058	1.0058	0.0058	0.0058	0.0209	0.0035	0.0209	0.0036
			Aralık	2.0053	1.0057	0.0053	0.0057	0.0213	0.0054	0.0213	0.0055
500	4	0.25	Tam örneklem	2.0024	1.0029	0.0024	0.0029	0.0089	0.0012	0.0089	0.0012
			Part-Time	2.0121	1.0065	0.0121	0.0065	0.0423	0.0051	0.0425	0.0051
			Aralık	2.0220	1.0048	0.0220	0.0048	0.0525	0.0074	0.0529	0.0075
500	6	0.25	Tam örneklem	2.0002	1.0031	0.0002	0.0031	0.0090	0.0012	0.0090	0.0012
			Part-Time	2.0073	1.0044	0.0073	0.0044	0.0259	0.0038	0.0260	0.0038
			Aralık	2.0106	1.0035	0.0106	0.0035	0.0283	0.0050	0.0284	0.0050
500	4	0.5	Tam örneklem	2.0009	1.0028	0.0009	0.0028	0.0089	0.0012	0.0089	0.0012
			Part-Time	2.0053	1.0032	0.0053	0.0032	0.0159	0.0028	0.0159	0.0028
			Aralık	2.0071	1.0023	0.0071	0.0023	0.0166	0.0043	0.0166	0.0043
500	6	0.5	Tam örneklem	2.0009	1.0023	0.0009	0.0023	0.0090	0.0012	0.0090	0.0012
			Part-Time	2.0039	1.0019	0.0039	0.0019	0.0125	0.0022	0.0126	0.0022
			Aralık	2.0042	1.0012	0.0042	0.0012	0.0126	0.0031	0.0126	0.0031
500	4	0.75	Tam örneklem	2.0012	1.0026	0.0012	0.0026	0.0088	0.0012	0.0088	0.0012
			Part-Time	2.0037	1.0025	0.0037	0.0025	0.0117	0.0021	0.0117	0.0021
			Aralık	2.0037	1.0008	0.0037	0.0008	0.0118	0.0037	0.0119	0.0037
500	6	0.75	Tam örneklem	2.0020	1.0033	0.0020	0.0033	0.0091	0.0012	0.0091	0.0012
			Part-Time	2.0036	1.0028	0.0036	0.0028	0.0107	0.0017	0.0107	0.0018
			Aralık	2.0031	1.0025	0.0031	0.0025	0.0109	0.0027	0.0109	0.0027

Çizelge 5.1 incelendiğinde örneklem büyüklüğü n , aralık sayısı k ve aralık uzunluğu t 'nin tüm kombinasyonlarında, Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık

sansürleme şemasından elde edilen varyans, hata kareler ortalaması ve λ parametresinin yan değerlerinin, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme şemasından elde edilen değerlere göre daha küçük olduğu görülmektedir. β parametresi yan değerleri ise ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve Part-Time operatörlü sansürlemede birbirine oldukça yakın değerler almıştır. Tüm şemalar için, k ve t sabitken örneklem büyüklüğü n arttıkça, yan değerlerinin, varyans değerlerinin ve MSE değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bununla birlikte yine tüm şemalar için; n ve k sabitken aralık uzunluğu t arttıkça yan değerlerinin, varyansların ve MSE değerlerinin azaldığı görülür. n ve t sabitken aralık sayısı k arttıkça, yan değerlerinin, varyansların ve MSE değerlerinin azaldığı görülür. Simülasyon çalışmasından çıkarılabilecek en önemli sonuç; yeni bir sansürleme şeması olarak sunulan part time operatörlü sansürleme yönteminin, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme yöntemine göre daha iyi performans göstermesidir. Tüm n , k , ve t durumlar için yan değerleri, varyansları ve MSE değerleri Part-Time operatörlü sansürleme yönteminde daha düşük olarak elde edilmiştir.

5.1.5.2. Weibull dağılımı için Bayes simülasyon çalışması

λ parametresi için önsel dağılım parametreleri $a = 2$, $b = 2$ ve β parametresi için önsel dağılım parametreleri $c = 2$, $d = 2$ alınarak $n = 50, 100, 250, 500$ alınarak farklı aralık uzunlukları ($t=0.5-0.75-1$) için Part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve tam örneklem durumunda, $p=0.1$ alınarak 10.000 deneme üzerinden mle, SELF ve GELF Bayes tahminlerine ait ortalama risk değerleri Çizelge 5.2' de sunulmuştur.

Çizelge 5.2. WD $C = \pm 1.5$ değerleri için SELF, GELF ve Mle tahmin sonuçlarına ait ortalama risk değerleri

a=2, b=2, c=2, d=2			C=1.5						C=-1.5					
			Tam Örneklem		Part-Time		Aralık		Tam Örneklem		Part-Time		Aralık	
N	t	Method	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
50	0.5	MLE	0.0974	0.0204	0.1328	0.0278	0.1545	0.2604	0.1492	0.0192	0.1558	0.0244	0.2123	0.2892
		SELF	0.0597	0.0174	0.0705	0.0222	0.0745	0.0543	0.0679	0.0167	0.0781	0.0210	0.0822	0.0747
		GELF	0.0636	0.0177	0.0758	0.0226	0.0834	0.0516	0.0697	0.0167	0.0802	0.0210	0.0841	0.0654
50	0.75	MLE	0.1106	0.0203	0.1334	0.0247	0.1424	0.3989	0.1480	0.0199	0.1498	0.0229	0.2159	0.4007
		SELF	0.0604	0.0174	0.0662	0.0221	0.0758	0.0757	0.0693	0.0175	0.0766	0.0192	0.0867	0.1178
		GELF	0.0662	0.0176	0.0724	0.0213	0.0865	0.0701	0.0711	0.0175	0.0789	0.0191	0.0891	0.0946
50	1	MLE	0.1280	0.0209	0.1266	0.0258	0.1538	0.5398	0.1313	0.0186	0.1316	0.0230	0.1717	0.5592
		SELF	0.0693	0.0173	0.0729	0.0204	0.0884	0.0927	0.0668	0.0157	0.0714	0.0181	0.0869	0.1638
		GELF	0.0744	0.0176	0.0791	0.0206	0.1001	0.0828	0.0685	0.0158	0.0733	0.0182	0.0891	0.1182
100	0.5	MLE	0.0760	0.0097	0.0972	0.0132	0.1169	0.1635	0.0961	0.0102	0.1097	0.0144	0.1635	0.1691
		SELF	0.0368	0.0091	0.0476	0.0119	0.0498	0.0411	0.0434	0.0095	0.0524	0.0125	0.0547	0.0591
		GELF	0.0401	0.0093	0.0504	0.0121	0.0542	0.0358	0.0446	0.0095	0.0537	0.0126	0.0559	0.0485
100	0.75	MLE	0.0741	0.0093	0.0978	0.0115	0.1083	0.0242	0.0804	0.0092	0.0968	0.0111	0.1238	0.2583
		SELF	0.0408	0.0086	0.0468	0.0105	0.0522	0.0530	0.0419	0.0085	0.0466	0.0103	0.0514	0.0908
		GELF	0.0436	0.0086	0.0498	0.0106	0.0559	0.0421	0.0432	0.0085	0.0479	0.0103	0.0527	0.0664
100	1	MLE	0.0733	0.0085	0.0864	0.0102	0.1139	0.3491	0.1318	0.0089	0.0957	0.0104	0.1195	0.3667
		SELF	0.0452	0.0080	0.0495	0.0100*	0.0612	0.0626	0.0459	0.0083	0.0499	0.0097	0.0622	0.1295
		GELF	0.0499	0.0081	0.0549	0.0097	0.0693	0.0508	0.0468	0.0083	0.0509	0.0096	0.0634	0.0879

250	0,5	MLE	0.0407	0.0038	0.0563	0.0050	0.0683	0.1004	0.0608	0.0039	0.0523	0.0050	0.0702	0.1049
		SELF	0.0257	0.0037	0.0318	0.0048	0.0329	0.0275	0.0258	0.0038	0.0313	0.0048	0.0326	0.0417
		GELF	0.0272	0.0037	0.0339	0.0048	0.0352	0.0199	0.0263	0.0038	0.0319	0.0048	0.0331	0.0317
250	0,75	MLE	0.0465	0.0035	0.0508	0.0043	0.0554	0.1599	0.0386	0.0034	0.0597	0.0042	0.0664	0.1619
		SELF	0.0279	0.0034	0.0332	0.0041	0.0364	0.0436	0.0253	0.0033	0.0304	0.0040	0.0341	0.0723
		GELF	0.0301	0.0034	0.0363	0.0041	0.0401	0.0293	0.0257	0.0033	0.0311	0.0040	0.0347	0.0498
250	1	MLE	0.0350	0.0031	0.0412	0.0038	0.0520	0.2091	0.0359	0.0034	0.0553	0.0043	0.0770	0.2321
		SELF	0.0260	0.0030	0.0297	0.0037	0.0353	0.0522	0.0252	0.0033	0.0302	0.0041	0.0364	0.1118
		GELF	0.0281	0.0031	0.0321	0.0037	0.0387	0.0350	0.0256	0.0033	0.0308	0.0041	0.0372	0.0697
500	0,5	MLE	0.0463	0.0017	0.0404	0.0022	0.0489	0.0658	0.0281	0.0019	0.0358	0.0027	0.0453	0.0704
		SELF	0.0175	0.0016	0.0219	0.0022	0.0225	0.0237	0.0158	0.0018	0.0200	0.0026	0.0201	0.0317
		GELF	0.0183	0.0016	0.0235	0.0022	0.0241	0.0149	0.0159	0.0018	0.0202	0.0026	0.0203	0.0223
500	0,75	MLE	0.0410	0.0034	0.0518	0.0041	0.0563	0.1484	0.0313	0.0018	0.0311	0.0022	0.0418	0.1177
		SELF	0.0245	0.0330	0.0296	0.0040	0.0324	0.0370	0.0143	0.0017	0.0183	0.0021	0.0203	0.0663
		GELF	0.0256	0.0330	0.0311	0.0040	0.0346	0.0263	0.0146	0.0017	0.0187	0.0021	0.0208	0.0427
500	1	MLE	0.0255	0.001621	0.0329	0.001877	0.0433	0.14789	0.023178	0.0017	0.033071	0.0020	0.048593	0.1511
		SELF	0.0165	0.001593	0.0194	0.001857	0.0237	0.05177	0.014319	0.0017	0.017074	0.0020	0.02202	0.0966
		GELF	0.0182	0.001596	0.0214	0.001867	0.0260	0.028627	0.014613	0.0016	0.017398	0.0020	0.022468	0.0575

Çizelge 5.2 incelendiğinde n ve t 'nin tüm durumları için tam örneklem ile Part-Time operatörlü sansürleme durumunda, karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Bayes tahmininden elde edilen risk değerlerinin daha küçük olduğu görülmektedir. İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme şemasında ise $\hat{\lambda}$ risk değerlerinin karesel hata kayıp fonksiyonu altında en küçük çıktığı görülürken, $\hat{\beta}$ risk değerlerinin genel entropi kayıp fonksiyonu altında en küçük değerleri aldığı görülmektedir. Ayrıca Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme risk değerleri, ilerleyen tür tip-I aralık sansürlmeye göre daha düşük elde edilmiştir.

5.2. Genelleştirilmiş Ters Üstel Dağılımı

Tek parametrelili üstel dağılım, matematiksel formu ve özelliklerinden dolayı güvenilirlik çalışmalarında yaşam zamanı modeli olarak en yaygın olarak kullanılan dağılımlardandır. X rasgele değişkenin üstel dağılıma sahip olduğu bir durumda, $T = \frac{1}{X}$ rasgele değişkeni ters üstel dağılıma sahiptir. Abouammoh ve Alshingiti (2009) tarafından çeşitli bozulma oranlarını ve yaşlandırma kriterlerini modelleme imkanına sahip ters üstel dağılımın genelleştirilmiş versiyonu olan 2 parametrelili GTÜ dağılımı önerilmiştir. X , rasgele değişkeni, α ve λ parametrelili GTÜ dağılımına sahip olsun. X , rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda}{x^2} e^{-\lambda/x} \left(1 - e^{-\lambda/x}\right)^{\alpha-1}, \quad x > 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (5.50)$$

$$F(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda/x})^\alpha, \quad (5.51)$$

5.2.1. GTÜ dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini

Yaşam zamanlarının α ve λ parametrelili GTÜ dağılımına sahip olduğu n özdeş birimin $t_0 = 0$ anında sisteme konmasıyla başlayan ve $D = \{q_i, r_i, t_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$

örneklemenin elde edildiği ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında, olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$L(\theta; D) \alpha \left[\prod_{i=1}^k \left[\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \right]^{q_i} \times \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right)^{r_i} \right] \quad (5.52)$$

olarak elde edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$\ell(\theta; D) = \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \quad (5.53)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (5.53) log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\theta)$ 'nın parametrelere göre türevleri,

$$\frac{\partial \ell(\theta; D)}{\partial \alpha} = \left[\sum_{i=1}^k q_i \frac{\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha \ln \left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \ln \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha}{\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha} + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right] \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial \log L(\theta; D)}{\partial \lambda} = \left[\sum_{i=1}^k q_i \frac{\frac{\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{i-1}}}{t_{i-1} \left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)} - \frac{\left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_i}}{t_i \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)}}{\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha} + \sum_{i=1}^k r_i \frac{\alpha e^{-\lambda/t_i}}{t_i \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)} \right] \quad (5.55)$$

olarak elde edilir.

Elde edilen bu türevler sıfıra eşitlenerek α ve λ parametreleri için tahmin değerleri elde edilir. Fakat analitik olarak çözümler elde edilemediğinden Newton-Raphson sayısal yöntemiyle tahmin değerleri bulunur.

5.2.2. GTÜ dağılımı için part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında en çok olabilirlik tahmini

Yaşam zamanlarının α ve λ parametreli GTÜ dağılımına sahip olduğu n özdeş birimin $t_0 = 0$ anında sisteme konmasıyla başlayan ve $Z = \{d_i, r_i, x_i, t_i; i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})\}$, örnekleminin elde edildiği part time operatörlü ilerleyen tür tip-I sansürleme altında, olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla;

$$L(\theta; Z) \propto \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{\alpha \lambda}{x_i^2} e^{-\lambda/x_i} (1 - e^{-\lambda/x_i})^{\alpha-1} \right] \left[\prod_{i=1}^{k/2} \left[(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right]^{d_{2i}} \right] \left[\prod_{i=1}^k \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right)^{r_i} \right] \quad (5.57)$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \ell(\theta; Z) = & \left[(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\alpha) + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\lambda) - 2 \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(x_i) \right. \\ & - \lambda \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \left(\frac{1}{x_i} \right) + (\alpha - 1) \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(1 - e^{-\lambda/x_i}) \\ & \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left((1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.58)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (5.58) log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\theta)$ 'nın parametrelere göre türevleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \alpha} = & \left[\frac{(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})}{\alpha} + \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(1 - e^{-\lambda/x_i}) \right. \\ & + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \frac{(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \ln(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}}) - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})}{(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha} \\ & \left. + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \lambda} = & \left[\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1})}{\lambda} + \sum_i^{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{e^{-\lambda/x_i}}{x_i(1 - e^{-\lambda/x_i})} \right) \right. \\
& + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \frac{\frac{(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i-1}})}{t_{2i-1}(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})} - \frac{(1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i}})}{t_{2i}(1 - e^{-\lambda/t_{2i}})}}{(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha} \\
& \left. + \sum_{i=1}^k r_i \frac{\alpha(1 - e^{-\lambda/t_i})}{t_i(1 - e^{-\lambda/t_i})} \right] \quad (5.60)
\end{aligned}$$

Elde edilen bu türevler sıfıra eşitlenerek α ve λ parametreleri için tahmin değerleri elde edilir. Fakat analitik olarak çözümler elde edilemediğinden Newton-Raphson sayısal yöntemiyle tahmin değerleri bulunur.

5.2.3. GTÜ dağılımı için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini

Bu bölümde, α ve λ parametrelili GTÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında karesel hata kayıp fonksiyonlu ve genel entropi kayıp fonksiyonlu Bayes tahmin edicileri elde edilecektir. Bağımsız λ ve β parametreleri için sırasıyla Gamma (a, b) ve Gamma (c, d) önsel dağılımları.

$$\pi_1(\alpha | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \alpha^{a-1} \exp(-b\alpha), \quad \alpha > 0, a > 0, b > 0 \quad (5.61)$$

$$\pi_2(\lambda | c, d) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \lambda^{c-1} \exp(-d\lambda), \quad \lambda > 0, c > 0, d > 0 \quad (5.62)$$

şeklindedir, burda $\Gamma(\cdot)$ in the Gamma fonksiyonudur. α ve λ parametrelerine ait ortak önsel dağılım

$$\pi(\alpha, \lambda) = \pi_1(\alpha | a, b) \pi_2(\lambda | c, d) \quad (5.63)$$

$$\pi(\alpha, \lambda) = \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \alpha^{a-1} \lambda^{c-1} \exp(-(b\alpha + d\lambda)) \quad (5.64)$$

olarak elde edilir.

$D = \{q_i, r_i, t_i; i = 1, 2, \dots, k\}$, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında $GT\ddot{U}(\alpha, \lambda)$ dağılımdan elde edilmiş sansürlenmiş veriler olmak üzere α ve λ için ortak sonsal dağılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\pi(\alpha, \lambda | D) = \frac{\pi_1(\alpha | a, b) \times \pi_2(\lambda | c, d) \times L(\alpha, \lambda)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi_1(\alpha | a, b) \times \pi_2(\lambda | c, d) \times L(\alpha, \lambda) d\lambda d\beta} \quad (5.65)$$

Eşitlik (5.53)'de verilen olabilirlik fonksiyonu yardımıyla $\pi(\alpha, \lambda | D)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \alpha^{a-1} \lambda^{c-1} \exp(-(b\alpha + d\lambda)) \left[\prod_{i=1}^k \left[\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha \right]^{q_i} \times \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha}\right)^{r_i} \right]}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \alpha^{a-1} \lambda^{c-1} \exp(-(b\alpha + d\lambda)) \left[\prod_{i=1}^k \left[\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha \right]^{q_i} \times \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha}\right)^{r_i} \right] d\alpha d\lambda} \quad (5.66)$$

$u(\alpha, \lambda)$, parametre kümesinin bir fonksiyonu olmak üzere, Bayes tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty u(\alpha, \lambda) \pi(\alpha, \lambda | D) d\alpha d\lambda \quad (5.67)$$

şeklinde. Bu Bayes tahminleri açık olarak elde edilememekle birlikte Tierney Kadane methodu (1986) yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir.

5.2.3.1 İlerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini

$G(\theta) = \ln \pi(\theta)$ olmak üzere, $G(\alpha, \lambda)$ ve $\ell(\theta; D)$ fonksiyonları;

$$G(\alpha, \lambda) = \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda), \quad (5.68)$$

$$\ell(\theta; D) = \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \quad (5.69)$$

şeklinde elde edilir.

$\delta(\theta)$, $\delta^*(\theta)$ fonksiyonları Eşitlik (5.17) ve Eşitlik (5.18)'e göre sırasıyla elde edilir.,

$$\delta(\alpha, \lambda) = \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right\} \quad (5.70)$$

$u(\theta) = \alpha$ ve $u(\theta) = \lambda$ olduğu durumlarda sırasıyla

$$\delta_\alpha^*(\alpha, \lambda) = \frac{1}{n} \ln \alpha + \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right\} \quad (5.71)$$

$$\delta_\lambda^*(\alpha, \lambda) = \frac{1}{n} \ln \lambda + \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^k q_i \ln \left(\left(1 - e^{-\lambda/t_{i-1}} \right)^\alpha - \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right\} \quad (5.72)$$

olarak elde edilir.

$u(\theta) = \alpha$ ve $u(\theta) = \lambda$ fonksiyonlarının karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\alpha}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_\alpha^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_\alpha^*(\hat{\alpha}_{\delta_\alpha^*}, \hat{\lambda}_{\delta_\alpha^*}) - \delta(\hat{\alpha}_\delta, \hat{\lambda}_\delta) \right\} \right] \quad (5.73)$$

$$\hat{\lambda}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_\lambda^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_\lambda^*(\hat{\alpha}_{\delta_\lambda^*}, \hat{\lambda}_{\delta_\lambda^*}) - \delta(\hat{\alpha}_\delta, \hat{\lambda}_\delta) \right\} \right] \quad (5.74)$$

$u(\boldsymbol{\theta}) = \alpha$ ve $u(\boldsymbol{\theta}) = \lambda$ fonksiyonlarının genel entropy kayıp fonksiyonu (GELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\alpha}_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\alpha}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\alpha}^*(\hat{\alpha}_{\delta_{\alpha}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\alpha}^*}) - \delta(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{-1/C} \quad (5.75)$$

$$\hat{\lambda}_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\lambda}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\lambda}^*(\hat{\alpha}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}) - \delta(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{(-1/C)} \quad (5.76)$$

$(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}), (\hat{\alpha}_{\delta_{\alpha}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\alpha}^*})$ ve $(\hat{\alpha}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}), \delta(\alpha, \lambda), \delta_{\alpha}^*(\alpha, \lambda)$ ve $\delta_{\lambda}^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonlarını sırasıyla maximize eden değerler olmak üzere, Σ ve $\Sigma_{\alpha}^*, \Sigma_{\lambda}^*$, $\delta(\alpha, \lambda), \delta_{\alpha}^*(\alpha, \lambda)$ ve $\delta_{\lambda}^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonlarının ikinci türevlerini içeren Hessian matrisinin tersinin eksili halidir.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}_{\delta}, \lambda=\hat{\lambda}_{\delta},}$$

$$\Sigma_{\alpha}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_{\alpha}^*}{\partial^2 \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\alpha}^*}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\alpha}^*}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \delta_{\alpha}^*}{\partial^2 \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}_{\delta_{\alpha}^*}, \lambda=\hat{\lambda}_{\delta_{\alpha}^*}}$$

$$\Sigma_{\lambda}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \lambda^2} & -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \alpha \partial \lambda} & -\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}_{\delta_{\lambda}^*}, \lambda=\hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}}$$

Eşitlik (5.70)'te verilen $\delta(\alpha, \lambda)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \alpha} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^k q_i \frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^2 - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_i})^2}{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. - q_i \frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}) - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_i})^2}{\left((1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \right)^2} \right) - \frac{a-1}{\alpha^2} \right] \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k q_i l_{1i} - q_i l_{2i} \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k r_i \frac{\left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)}{t_i \left(1 - e^{-\lambda/t_i} \right)} \right) \quad (5.78)$$

Burada l_{1i} ve l_{2i} fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$l_{1i} = \left[\left(\frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{i-1}} \ln(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})}{t_{i-1} (1-e^{-\lambda/t_{i-1}})} + \frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha e^{-\lambda/t_{i-1}}}{t_{i-1} (1-e^{-\lambda/t_{i-1}})} \right) \right. \\ \left. \frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha}{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha} \right] \\ - \left[\frac{(1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_i} \ln(1-e^{-\lambda/t_i}) - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha e^{-\lambda/t_i}}{t_i (1-e^{-\lambda/t_i})} \right. \\ \left. \frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha}{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha} \right] \quad (5.79)$$

$$l_{2i} = \left[\frac{\left((1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}) - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_i}) \right)}{\left((1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \right)^2} \right] \\ \times \left[\frac{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{i-1}}}{t_{i-1} (1-e^{-\lambda/t_{i-1}})} \frac{(1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_i}}{t_i (1-e^{-\lambda/t_i})} \right] \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \lambda} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^k q_i (l_{3i} + l_{4i} - l_{5i}) + \sum_{i=1}^k \left(-\frac{r\alpha (e^{-\lambda/t_i})}{t_i^2 (1-e^{-\lambda/t_i})} - \frac{r\alpha (e^{-\lambda/t_i})^2}{t_i^2 (1-e^{-\lambda/t_i})^2} \right) \right) - \frac{c-1}{\lambda^2} \right] \quad (5.81)$$

Burada l_{3i} , l_{4i} ve l_{5i} fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$l_{3i} = \left[\frac{\frac{\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha \alpha^2 \left(e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^2}{t_{i-1}^2 \left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^2} - \frac{\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha \alpha \left(e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)}{t_{i-1}^2 \left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)} - \frac{\left(\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha \alpha \left(e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)\right)^2}{t_{i-1}^2 \left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^2}}{\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha} - \frac{\frac{\left(\left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha \alpha^2 \left(e^{-\lambda/t_i}\right)^2\right)}{t_i^2 \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^2} + \frac{\left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha \alpha \left(e^{-\lambda/t_i}\right)}{t_i^2 \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)}}{\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha} \right] \quad (5.82)$$

$$l_{4i} = \frac{\frac{\left(\left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha \alpha \left(e^{-\lambda/t_i}\right)\right)^2}{t_i^2 \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^2}}{\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha} \quad (5.83)$$

$$l_{5i} = q_i \frac{\frac{\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha \alpha \left(e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)}{t_{i-1} \left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)} - \frac{\left(\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha \alpha \left(e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)\right)^2}{t_i \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)}}{\left(\left(1-e^{-\lambda/t_{i-1}}\right)^\alpha - \left(1-e^{-\lambda/t_i}\right)^\alpha\right)^2} \quad (5.84)$$

Eşitlik (5.71), verilen $\delta_\alpha^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonuna ait kısmı türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial^2 \alpha^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \alpha^2} - \frac{1}{n \alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2}$$

Eşitlik (5.72), verilen $\delta_\lambda^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial^2 \alpha^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} - \frac{1}{n\lambda^2}$$

5.2.4. GTÜ dağılımı için Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında Bayes tahmini

Bu bölümde, α ve λ parametrelili GTÜ dağılımının bilinmeyen parametreleri için Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında karesel hata kayıp fonksiyonlu ve genel entropi kayıp fonksiyonlu Bayes tahmin edicileri elde edilecektir. Bağımsız α ve λ parametreleri için sırasıyla Gamma (a, b) ve Gamma (c, d) önsel dağılımları.

$$\pi_1(\alpha | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \alpha^{a-1} \exp(-b\alpha), \alpha > 0, a > 0, b > 0 \quad (5.85)$$

$$\pi_2(\lambda | c, d) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \lambda^{c-1} \exp(-d\lambda), \lambda > 0, c > 0, d > 0 \quad (5.86)$$

şeklindedir, burda $\Gamma(\cdot)$ in the Gamma fonksiyonudur. α ve λ parametrelerine ait ortak önsel dağılım

$$\pi(\alpha, \lambda) = \pi_1(\alpha | a, b) \pi_2(\lambda | c, d) \quad (5.87)$$

$$\pi(\alpha, \lambda) = \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \alpha^{a-1} \lambda^{c-1} \exp(-(b\alpha + d\lambda)) \quad (5.88)$$

olarak elde edilir.

$Z = \{d_i, r_i, x_i, t_i; i = 1, 2, \dots, k\}$ Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında $GT\ddot{U}(\alpha, \lambda)$ dağılımdan elde edilmiş sansürlenmiş veriler olmak üzere α ve λ için ortak sonsal dağılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\pi(\alpha, \lambda | Z) = \frac{\pi_1(\alpha | a, b) \times \pi_2(\lambda | c, d) \times L(\alpha, \lambda)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi_1(\alpha | a, b) \times \pi_2(\lambda | c, d) \times L(\alpha, \lambda) d\alpha d\lambda} \quad (5.89)$$

Eşitlik (5.57) verilen olabilirlik fonksiyonu yardımıyla $\pi(\alpha, \lambda | Z)$ sonsal dağılımının açık hali aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\pi(\alpha, \lambda) \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{\alpha \lambda}{x_i^2} e^{-\lambda/x_i} (1 - e^{-\lambda/x_i})^{\alpha-1} \right] \left[\prod_{i=1}^{k/2} \left[(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right]^{d_{2i}} \right] \left[\prod_{i=1}^k (1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha})^{r_i} \right]}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\alpha, \lambda) \left[\prod_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{\alpha \lambda}{x_i^2} e^{-\lambda/x_i} (1 - e^{-\lambda/x_i})^{\alpha-1} \right] \left[\prod_{i=1}^{k/2} \left[(1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right]^{d_{2i}} \right] \left[\prod_{i=1}^k (1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha})^{r_i} \right] d\alpha d\lambda} \quad (5.90)$$

$u(\alpha, \lambda)$, parametre kümesinin bir fonksiyonu olmak üzere, Bayes tahmin edicisi

$$\hat{\theta}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty u(\alpha, \lambda) \pi(\alpha, \lambda | Z) d\alpha d\lambda \quad (5.91)$$

şeklindedir. Bu Bayes tahminleri açık olarak elde edilememekle birlikte Tierney Kadane methodu (1986) yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir.

5.2.4.1. Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme için Tierney Kadane methodu ile Bayes tahmini

$G(\theta) = \ln \pi(\theta)$ olmak üzere, $G(\alpha, \lambda)$ ve $\ell(\theta; Z)$ fonksiyonları;

$$G(\alpha, \lambda) = \ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a) \Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda), \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned}
\ell(\theta; Z) = & \left[(d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\alpha) + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\lambda) - 2 \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(x_i) \right. \\
& - \lambda \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \left(\frac{1}{x_i} \right) + (\alpha - 1) \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(1 - e^{-\lambda/x_i}) \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left((1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.93}$$

şeklinde elde edilir.

$\delta(\theta)$, $\delta^*(\theta)$ fonksiyonları Eşitlik (5.17) ve Eşitlik (5.18)'e göre sırasıyla elde edilir.,

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha, \lambda) = & \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a) \Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda) \right. \\
& + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\alpha) + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\lambda) - 2 \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(x_i) \\
& - \lambda \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \left(\frac{1}{x_i} \right) + (\alpha - 1) \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(1 - e^{-\lambda/x_i}) \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left((1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.94}$$

$u(\theta) = \alpha$ ve $u(\theta) = \lambda$ olduğu durumlarda sırasıyla

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha^*(\alpha, \lambda) = & \frac{1}{n} \ln \alpha + \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a) \Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda) \right. \\
& + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\alpha) + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\lambda) - 2 \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(x_i) \\
& - \lambda \sum_i^{n_1+n_3+\dots+n_{k-1}} \left(\frac{1}{x_i} \right) + (\alpha - 1) \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(1 - e^{-\lambda/x_i}) \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left((1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\lambda}^*(\alpha, \lambda) = & \frac{1}{n} \ln \lambda + \frac{1}{n} \left[\ln \left(\frac{b^a d^c}{\Gamma(a) \Gamma(c)} \right) + (a-1) \ln(\alpha) + (c-1) \ln(\lambda) - (b\alpha + d\lambda) \right. \\
& + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\alpha) + (d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}) \ln(\lambda) - 2 \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(x_i) \\
& - \lambda \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \left(\frac{1}{x_i} \right) + (\alpha-1) \sum_i^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \ln(1 - e^{-\lambda/x_i}) \\
& \left. + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \ln \left((1 - e^{-\lambda/t_{2i-1}})^{\alpha} - (1 - e^{-\lambda/t_{2i}})^{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^k r_i \ln \left(1 - e^{(-\lambda/t_i)^{\alpha}} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{5.96}$$

olarak elde edilir.

$u(\theta) = \alpha$ ve $u(\theta) = \lambda$ fonksiyonlarının karesel hata kayıp fonksiyonu (SELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\alpha}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_{\alpha}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\alpha}^*(\hat{\alpha}_{\delta_{\alpha}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\alpha}^*}) - \delta(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}) \right\} \right]
\tag{5.97}$$

$$\hat{\lambda}_{SELF} = \sqrt{\frac{|\Sigma_{\lambda}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\lambda}^*(\hat{\alpha}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}) - \delta(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}) \right\} \right]
\tag{5.98}$$

$u(\theta) = \alpha$ ve $u(\theta) = \lambda$ fonksiyonlarının genel entropy kayıp fonksiyonu (GELF) altında Tierney Kadane yaklaşımı ile Bayes tahmini sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\alpha}_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\alpha}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\alpha}^*(\hat{\alpha}_{\delta_{\alpha}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\alpha}^*}) - \delta(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{(-1/C)}
\tag{5.99}$$

$$\hat{\lambda}_{GELF} = \left[\sqrt{\frac{|\Sigma_{\lambda}^*|}{|\Sigma|}} \exp \left[n \left\{ \delta_{\lambda}^*(\hat{\alpha}_{\delta_{\lambda}^*}, \hat{\lambda}_{\delta_{\lambda}^*}) - \delta(\hat{\alpha}_{\delta}, \hat{\lambda}_{\delta}) \right\} \right] \right]^{-1/C}
\tag{5.100}$$

Burada $\delta^*(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \ln[u(\boldsymbol{\theta})]^{-C} + \delta(\boldsymbol{\theta})$ şeklindedir.

$(\hat{\alpha}_\delta, \hat{\lambda}_\delta), (\hat{\alpha}_{\delta_\alpha^*}, \hat{\lambda}_{\delta_\alpha^*})$ ve $(\hat{\alpha}_{\delta_\lambda^*}, \hat{\lambda}_{\delta_\lambda^*})$, $\delta(\alpha, \lambda), \delta_\alpha^*(\alpha, \lambda)$ ve $\delta_\lambda^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonlarını sırasıyla maximize eden değerler olmak üzere, Σ ve $\Sigma_\alpha^*, \Sigma_\lambda^*$, $\delta(\alpha, \lambda), \delta_\alpha^*(\alpha, \lambda)$ ve $\delta_\lambda^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonlarının ikinci türevlerini içeren Hessian matrisinin tersinin eksili halidir.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}_\delta, \lambda=\hat{\lambda}_\delta,}$$

$$\Sigma_\alpha^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}_{\delta_\alpha^*}, \lambda=\hat{\lambda}_{\delta_\alpha^*}}$$

$$\Sigma_\lambda^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \delta_\lambda^*}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}_{\delta_\lambda^*}, \lambda=\hat{\lambda}_{\delta_\lambda^*}}$$

Eşitlik (5.94)'te verilen $\delta(\alpha, \lambda)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \alpha} = \frac{1}{n} \left(-\frac{d_1 + d_3 + \dots + d_{k-1}}{\alpha^2} (v_{1i}) - \frac{a-1}{\alpha^2} \right)$$

$$v_{1i} = \left[\sum_{i=1}^{k/2} d_{2i} \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^2 - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i}})^2}{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha} - d_{2i} \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}}) - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i}})^2}{((1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha)^2} \right] \quad (5.101)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \frac{e^{-\lambda/x_i}}{x_i(1-e^{-\lambda/x_i})} + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i}(v_{2i}) - d_{2i}(v_{3i}) \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k r_i \frac{(1-e^{-\lambda/t_i})}{t_i(1-e^{-\lambda/t_i})} \right) \quad (5.102)$$

Burada v_{2i} ve v_{3i} fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$v_{2i} = \left[\frac{\frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{2i-1}} \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})}{t_{2i-1}(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})} + \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha e^{-\lambda/t_{2i-1}}}{t_{2i-1}(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})}}{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha} \right. \\ \left. - \left[\frac{\frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{2i}} \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i}})}{t_{2i}(1-e^{-\lambda/t_{2i}})} - \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha e^{-\lambda/t_{2i}}}{t_{2i}(1-e^{-\lambda/t_{2i}})}}{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha} \right] \right] \quad (5.103)$$

$$v_{3i} = \left[\frac{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}}) - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \ln(1-e^{-\lambda/t_{2i}}) \right)}{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right)^2} \right] \\ \times \left[\frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{2i-1}}}{t_{2i-1}(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})} \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \alpha e^{-\lambda/t_{2i}}}{t_{2i}(1-e^{-\lambda/t_{2i}})} \right] \quad (5.104)$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \lambda \partial \lambda} = \frac{1}{n} \left[\left(-\frac{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}}{\lambda^2} + (v_{4i}) + \sum_{i=1}^{k/2} d_{2i}(v_{5i} - v_{6i}) \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^k \left(-\frac{r\alpha(e^{-\lambda/t_i})}{t_i^2(1-e^{-\lambda/t_i})} - \frac{r\alpha(e^{-\lambda/t_i})^2}{t_i^2(1-e^{-\lambda/t_i})^2} \right) \right] \\ - \left(\frac{c-1}{\lambda^2} \right) \quad (5.105)$$

Burada v_{4i} , v_{5i} ve v_{6i} fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$z_{4i} = (\alpha - 1) \left[\sum_{i=1}^{d_1+d_3+\dots+d_{k-1}} \left(-\frac{e^{-\lambda/x_i}}{x_i^2 (1-e^{-\lambda/x_i})} - \frac{(e^{-\lambda/x_i})^2}{x_i^2 (1-e^{-\lambda/x_i})^2} \right) \right] \quad (5.106)$$

$$v_{5i} = \left[\frac{\frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha^2 (e^{-\lambda/t_{2i-1}})^2}{t_{2i-1}^2 (1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^2} - \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i-1}})}{t_{2i-1}^2 (1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})} - \frac{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i-1}}) \right)^2}{t_{2i-1}^2 (1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^2}}{(1-e^{-\lambda/t_{i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_i})^\alpha} \right. \\ \left. - \frac{\frac{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \alpha^2 (e^{-\lambda/t_{2i}})^2 \right)}{t_{2i}^2 (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^2} + \frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i}})}{t_{2i}^2 (1-e^{-\lambda/t_{2i}})} + \frac{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i}}) \right)^2}{t_{2i}^2 (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^2}}{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha} \right] \quad (5.107)$$

$$v_{6i} = d_i \frac{\frac{(1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i-1}})}{t_{2i-1} (1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})} - \frac{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha \alpha (e^{-\lambda/t_{2i-1}}) \right)^2}{t_{2i} (1-e^{-\lambda/t_{2i}})}}{\left((1-e^{-\lambda/t_{2i-1}})^\alpha - (1-e^{-\lambda/t_{2i}})^\alpha \right)^2} \quad (5.108)$$

Eşitlik (5.95)'te verilen $\delta_\alpha^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial^2 \alpha^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \alpha^2} - \frac{1}{n\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_\alpha^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2}$$

Eşitlik (5.96)'te verilen $\delta_\lambda^*(\alpha, \lambda)$ fonksiyonuna ait kısmi türevler;

$$\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \alpha^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial \alpha \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \delta_{\lambda}^*}{\partial^2 \lambda^2} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial^2 \lambda^2} - \frac{1}{n\lambda^2}$$

5.2.5. GTÜ dağılımı için simulasyon çalışması

Bu bölümde, Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve tam örnekleme durumunda GTÜ dağılımı için elde edilen EÇO ile Bayes tahmin edicileri simülasyon çalışması ile karşılaştırılacaktır.

5.2.5.1. GTÜ dağılımı için en çok olabilirlik tahmini simulasyon çalışması

$\alpha : 2, \lambda : 2$ parametrelili genelleştirilmiş ters üstel dağılımı için farklı örneklem büyüklüğü n , aralık sayısı k ve aralık uzunlu t değerleri için part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve tam örneklem durumunda, $p=0.1$ alınarak 10.000 deneme üzerinden Monte Carlo simülasyonu ile EÇO tahmin değerleri elde edilmiştir. Elde edilen ortalama tahmin değerleri, tahminlere ait yan değerleri ortalaması, ortalama varyansları ve hata kareler ortalamaları (MSE) Çizelge 5.3' de sunulmuştur.

Çizelge 5.3. GTÜ dağılımı için en çok olabilirlik tahmini simülasyon sonuçları

$\alpha : 2, \lambda : 2$				p=0.1 and 10,000 tekrar							
				Ortalama Tahmin		Ortalama Yan		Ortalama Var.		MSE	
n	k	t	Method	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$
50	4	0.5	Tam örneklem	2.1307	2.0707	0.1307	0.0707	0.2287	0.1100	0.2457	0.1149
			Part-Time	2.2293	2.0841	0.2293	0.0841	0.7024	0.2013	0.7549	0.2084
			Aralık	2.2140	2.0690	0.2140	0.0690	0.7484	0.2228	0.7942	0.2275
50	6	0.5	Tam örneklem	2.1458	2.0793	0.1458	0.0793	0.2332	0.1084	0.2544	0.1146
			Part-Time	2.1997	2.0875	0.1997	0.0875	0.5025	0.1682	0.5423	0.1759
			Aralık	2.1917	2.0788	0.1917	0.0788	0.5311	0.1831	0.5678	0.1893
50	4	0.75	Tam örneklem	2.1377	2.0730	0.1377	0.0730	0.2323	0.1071	0.2513	0.1124
			Part-Time	2.1830	2.0796	0.1830	0.0796	0.4581	0.1564	0.4915	0.1627
			Aralık	2.1733	2.0619	0.1733	0.0619	0.5463	0.2038	0.5763	0.2077
50	6	0.75	Tam örneklem	2.1405	2.0744	0.1405	0.0744	0.2430	0.1092	0.2627	0.1147
			Part-Time	2.1680	2.0796	0.1680	0.0796	0.3757	0.1419	0.4039	0.1483
			Aralık	2.1574	2.0646	0.1574	0.0646	0.4255	0.1767	0.4503	0.1808
50	4	1	Tam örneklem	2.1455	2.0804	0.1455	0.0804	0.2368	0.1091	0.2580	0.1155
			Part-Time	2.1545	2.0753	0.1545	0.0753	0.3570	0.1362	0.3808	0.1419
			Aralık	2.1601	2.0616	0.1601	0.0616	0.5172	0.2236	0.5427	0.2274
50	6	1	Tam örneklem	2.1456	2.0769	0.1456	0.0769	0.2423	0.1091	0.2635	0.1150
			Part-Time	2.1498	2.0737	0.1498	0.0737	0.3144	0.1263	0.3368	0.1317
			Aralık	2.1576	2.0667	0.1576	0.0667	0.4250	0.1953	0.4498	0.1997
100	4	0.5	Tam örneklem	2.0756	2.0401	0.0756	0.0401	0.1034	0.0520	0.1091	0.0536
			Part-Time	2.1467	2.0545	0.1467	0.0545	0.3729	0.1059	0.3944	0.1089
			Aralık	2.1364	2.0459	0.1364	0.0459	0.3914	0.1156	0.4100	0.1177
100	6	0.5	Tam örneklem	2.0638	2.0359	0.0638	0.0359	0.1058	0.0532	0.1099	0.0545
			Part-Time	2.0969	2.0436	0.0969	0.0436	0.2406	0.0851	0.2500	0.0870
			Aralık	2.0905	2.0374	0.0905	0.0374	0.2517	0.0923	0.2599	0.0937
100	4	0.75	Tam örneklem	2.0691	2.0363	0.0691	0.0363	0.1056	0.0527	0.1104	0.0540
			Part-Time	2.0938	2.0407	0.0938	0.0407	0.2122	0.0769	0.2210	0.0786
			Aralık	2.0892	2.0322	0.0892	0.0322	0.2522	0.1007	0.2601	0.1017
100	6	0.75	Tam örneklem	2.0764	2.0444	0.0764	0.0444	0.1061	0.0521	0.1119	0.0541
			Part-Time	2.0928	2.0474	0.0928	0.0474	0.1739	0.0684	0.1825	0.0707
			Aralık	2.0885	2.0400	0.0885	0.0400	0.2027	0.0868	0.2105	0.0884
100	4	1	Tam örneklem	2.0734	2.0418	0.0734	0.0418	0.1036	0.0532	0.1089	0.0549
			Part-Time	2.0788	2.0400	0.0788	0.0400	0.1642	0.0675	0.1704	0.0691
			Aralık	2.0819	2.0338	0.0819	0.0338	0.2297	0.1096	0.2364	0.1108
100	6	1	Tam örneklem	2.0683	2.0366	0.0683	0.0366	0.1053	0.0536	0.1099	0.0549
			Part-Time	2.0754	2.0370	0.0754	0.0370	0.1439	0.0627	0.1496	0.0641
			Aralık	2.0760	2.0309	0.0760	0.0309	0.1931	0.0988	0.1989	0.0998

250	4	0.5	Tam örneklem	2.0277	2.0145	0.0277	0.0145	0.0383	0.0204	0.0390	0.0206
			Part-Time	2.0544	2.0193	0.0544	0.0193	0.1327	0.0400	0.1356	0.0404
			Interval	2.0499	2.0154	0.0499	0.0154	0.1406	0.0440	0.1431	0.0442
250	6	0.5	Tam örneklem	2.0264	2.0143	0.0264	0.0143	0.0383	0.0204	0.0390	0.0206
			Part-Time	2.0408	2.0182	0.0408	0.0182	0.0900	0.0333	0.0917	0.0337
			Interval	2.0396	2.0168	0.0396	0.0168	0.0945	0.0360	0.0961	0.0363
250	4	0.75	Tam örneklem	2.0286	2.0159	0.0286	0.0159	0.0386	0.0203	0.0395	0.0205
			Part-Time	2.0382	2.0176	0.0382	0.0176	0.0785	0.0300	0.0800	0.0303
			Interval	2.0364	2.0141	0.0364	0.0141	0.0942	0.0391	0.0955	0.0393
250	6	0.75	Tam örneklem	2.0270	2.0152	0.0270	0.0152	0.0379	0.0200	0.0386	0.0202
			Part-Time	2.0362	2.0176	0.0362	0.0176	0.0628	0.0262	0.0641	0.0265
			Interval	2.0353	2.0151	0.0353	0.0151	0.0746	0.0338	0.0758	0.0341
250	4	1	Tam örneklem	2.0271	2.0145	0.0271	0.0145	0.0378	0.0199	0.0385	0.0201
			Part-Time	2.0313	2.0145	0.0313	0.0145	0.0609	0.0253	0.0619	0.0255
			Interval	2.0342	2.0137	0.0342	0.0137	0.0842	0.0414	0.0854	0.0416
250	6	1	Tam örneklem	2.0264	2.0146	0.0264	0.0146	0.0384	0.0204	0.0391	0.0206
			Part-Time	2.0302	2.0156	0.0302	0.0156	0.0533	0.0239	0.0542	0.0241
			Interval	2.0293	2.0121	0.0293	0.0121	0.0714	0.0376	0.0723	0.0377
500	4	0.5	Tam örneklem	2.0142	2.0074	0.0142	0.0074	0.0184	0.0100	0.0186	0.0100
			Part-Time	2.0290	2.0111	0.0290	0.0111	0.0636	0.0204	0.0645	0.0205
			Interval	2.0271	2.0093	0.0271	0.0093	0.0679	0.0224	0.0687	0.0225
500	6	0.5	Tam örneklem	2.0130	2.0066	0.0130	0.0066	0.0187	0.0101	0.0189	0.0101
			Part-Time	2.0202	2.0087	0.0202	0.0087	0.0436	0.0164	0.0440	0.0165
			Interval	2.0196	2.0079	0.0196	0.0079	0.0456	0.0175	0.0460	0.0176
500	4	0.75	Tam örneklem	2.0134	2.0073	0.0134	0.0073	0.0185	0.0101	0.0187	0.0101
			Part-Time	2.0188	2.0086	0.0188	0.0086	0.0374	0.0146	0.0378	0.0146
			Interval	2.0181	2.0070	0.0181	0.0070	0.0451	0.0194	0.0454	0.0194
500	6	0.75	Tam örneklem	2.0128	2.0062	0.0128	0.0062	0.0182	0.0100	0.0184	0.0100
			Part-Time	2.0160	2.0070	0.0160	0.0070	0.0300	0.0129	0.0302	0.0130
			Interval	2.0144	2.0049	0.0144	0.0049	0.0352	0.0166	0.0354	0.0167
500	4	1	Tam örneklem	2.0167	2.0101	0.0167	0.0101	0.0191	0.0103	0.0194	0.0104
			Part-Time	2.0189	2.0104	0.0189	0.0104	0.0304	0.0129	0.0307	0.0130
			Interval	2.0194	2.0091	0.0194	0.0091	0.0430	0.0219	0.0434	0.0220
500	6	1	Tam örneklem	2.0143	2.0085	0.0143	0.0085	0.0187	0.0102	0.0189	0.0103
			Part-Time	2.0154	2.0082	0.0154	0.0082	0.0267	0.0121	0.0269	0.0122
			Interval	2.0149	2.0065	0.0149	0.0065	0.0354	0.0195	0.0356	0.0196

Çizelge 5.3 incelendiğinde tüm yöntemlerde; örneklem büyüklüğü n arttıkça, yan değerlerinin, varyans değerlerinin ve MSE değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bununla birlikte part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme için; n ve k sabitken aralık uzunluğu t arttıkça varyans ve MSE değerlerinin azaldığı görülür. Ayrıca aralık sayısı n ve t sabitken k arttıkça, part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme altında varyans ve MSE değerleri azalmaktadır. Simülasyon çalışmasından çıkarılabilecek en önemli sonuç; yeni bir sansürleme şeması olarak sunulan part time operatörlü sansürleme yönteminin, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme yöntemine göre daha iyi performans göstermesidir. Tüm n , k , t durumlar için varyans değerleri ve MSE değerleri Part-Time operatörlü sansürleme yönteminde daha düşük olarak elde edilmiştir.

5.2.5.2. GTÜ dağılımı için Bayes tahmini simülasyon çalışması

α parametresi için önsel dağılım parametreleri $a = 2$, $b = 2$ ve λ parametresi için önsel dağılım parametreleri $c = 2$, $d = 2$ alınarak $n = 50, 100, 250, 500$ alınarak farklı aralık uzunlukları ($t=0.5-0.75-1$) için Part time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve tam örneklem durumunda, $p=0.1$ alınarak 10.000 deneme üzerinden mle, SELF ve GELF Bayes tahminlerine ait ortalama risk değerleri Çizelge 5.4' de sunulmuştur.

Çizelge 5.4. GTÜ $C = \pm 1.5$ değerleri için SELF, GELF ve Mle tahmin sonuçlarına ait ortalama risk değerleri

a=2, b=2, c=2, d=2			C=-1.5						C=1.5					
			Tam Örneklem		Part-Time		Aralık		Tam Örneklem		Part-Time		Aralık	
n	t	Method	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$
50	0.5	MLE	0.5981	0.2237	1.7550	0.7892	1.9564	0.7931	0.5563	0.1909	1.5948	0.4911	1.8036	0.5265
		SELF	0.5447	0.2083	1.4703	0.5520	1.6349	0.6057	0.5256	0.1809	1.4355	0.4366	1.5974	0.4705
		GELF	0.5479	0.2092	1.5418	0.5634	1.7408	0.6196	0.5624	0.1828	1.6338	0.4434	1.7119	0.4831
50	0.75	MLE	0.5023	0.2430	1.0056	0.6314	1.2734	0.6775	0.5113	0.2200	1.0403	0.4851	1.3500	0.5341
		SELF	0.4837	0.2340	0.9173	0.4921	1.1189	0.5407	0.4948	0.2107	0.9520	0.4450	1.1695	0.4924
		GELF	0.4861	0.2350	0.9339	0.5032	1.1666	0.5545	0.5342	0.2142	1.0845	0.4451	1.2316	0.4953
50	1	MLE	0.4522	0.2343	0.7147	0.4891	1.0799	0.5900	0.4496	0.2229	0.7008	0.4385	1.0415	0.5294
		SELF	0.4368	0.2256	0.6645	0.3866	0.9061	0.4557	0.4351	0.2158	0.6549	0.3646	0.9076	0.4323
		GELF	0.4389	0.2265	0.6703	0.3913	0.9506	0.4636	0.4711	0.2244	0.7317	0.3899	0.8798	0.4525
100	0.5	MLE	0.2816	0.1203	1.1189	0.5870	1.2400	0.5900	0.2680	0.1048	1.0024	0.3803	1.1417	0.4026
		SELF	0.2734	0.1183	0.9528	0.3968	1.0736	0.4343	0.2615	0.1022	0.9258	0.3230	1.0605	0.3539
		GELF	0.2742	0.1186	0.9820	0.4019	1.1255	0.4407	0.2726	0.1044	1.0471	0.3225	1.1218	0.3519
100	0.75	MLE	0.2364	0.1164	0.5171	0.3683	0.7049	0.4047	0.2460	0.1110	0.4958	0.2812	0.6731	0.3062
		SELF	0.2337	0.1147	0.4836	0.2856	0.6404	0.3279	0.2410	0.1093	0.4651	0.2642	0.6214	0.2978
		GELF	0.2340	0.1148	0.4887	0.2895	0.6648	0.3321	0.2498	0.1104	0.5078	0.2624	0.6059	0.2932
100	1	MLE	0.2221	0.1117	0.3617	0.2592	0.6031	0.3119	0.2358	0.1217	0.3800	0.2367	0.6702	0.2911
		SELF	0.2178	0.1091	0.3477	0.2181	0.5487	0.2592	0.2341	0.1202	0.3682	0.2078	0.5922	0.2497
		GELF	0.2187	0.1093	0.3492	0.2200	0.5750	0.2624	0.2456	0.1215	0.3954	0.2170	0.5430	0.2583

250	0.5	MLE	0.1065	0.0446	0.5114	0.2988	0.5951	0.3037	0.0970	0.0444	0.4662	0.2156	0.5358	0.2282
		SELF	0.1062	0.0443	0.4579	0.2144	0.5430	0.2392	0.0962	0.0440	0.4321	0.1640	0.5074	0.1786
		GELF	0.1061	0.0443	0.4638	0.2153	0.5608	0.2404	0.0972	0.0447	0.4706	0.1639	0.5186	0.1754
250	0.75	MLE	0.0904	0.0452	0.1963	0.1403	0.2900	0.1525	0.0958	0.0445	0.2191	0.1343	0.3184	0.1441
		SELF	0.0896	0.0450	0.1921	0.1111	0.2792	0.1218	0.0952	0.0444	0.2124	0.1139	0.3094	0.1226
		GELF	0.0896	0.0450	0.1932	0.1113	0.2883	0.1223	0.0980	0.0448	0.2237	0.1189	0.2917	0.1269
250	1	MLE	0.0933	0.0449	0.1519	0.1028	0.2921	0.1245	0.0966	0.0434	0.1532	0.0989	0.3099	0.1230
		SELF	0.0930	0.0444	0.1495	0.0887	0.2932	0.1078	0.0962	0.0431	0.1509	0.0904	0.3082	0.1125
		GELF	0.0933	0.0444	0.1498	0.0882	0.3083	0.1076	0.0977	0.0433	0.1561	0.0937	0.2600	0.1148
500	0.5	MLE	0.0517	0.0226	0.2473	0.1777	0.2911	0.1771	0.0490	0.0222	0.2413	0.1310	0.2775	0.1350
		SELF	0.0516	0.0227	0.2313	0.1126	0.2769	0.1257	0.0488	0.0222	0.2287	0.1046	0.2643	0.1115
		GELF	0.0515	0.0229	0.2325	0.1126	0.2825	0.1256	0.0493	0.0223	0.2438	0.1038	0.2683	0.1078
500	0.75	MLE	0.0477	0.0205	0.1024	0.0658	0.1616	0.0714	0.0476	0.0223	0.1053	0.0692	0.1616	0.0749
		SELF	0.0475	0.0204	0.1004	0.0556	0.1643	0.0610	0.0474	0.0222	0.1034	0.0602	0.1679	0.0664
		GELF	0.0474	0.0204	0.1004	0.0553	0.1695	0.0608	0.0479	0.0223	0.1060	0.0630	0.1501	0.0685
500	1	MLE	0.0458	0.0211	0.0752	0.0433	0.1699	0.0554	0.0449	0.0215	0.0718	0.0481	0.1649	0.0605
		SELF	0.0457	0.0210	0.0746	0.0403	0.1674	0.0515	0.0447	0.0215	0.0712	0.0442	0.1676	0.0560
		GELF	0.0458	0.0212	0.0746	0.0402	0.1754	0.0515	0.0448	0.0216	0.0719	0.0459	0.1415	0.0573

Çizelge 5.4 incelendiğinde n ve t 'nin tüm durumları için tam örneklem, Part-Time operatörlü sansürleme ve ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme durununda, elde edilen risk değerlerinin karesel hata kayıp fonksiyonlu(SELF) Bayes tahmininde daha küçük olduğu görülmektedir. Bununla birlikte part time operatörlü ilerleyen tür tip-I sansürleme risk değerlerinin her durumda ilerleyen tür tip-I aralık sansürlemeye göre daha düşük olduğu görülmektedir.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Endüstriyel yaşam testleri ve tıbbi sağ kalım analizlerinde, çoğunlukla ilgi konusu nesne kaybolabilir (bozulma, ölme, çürüme...) veya deneyden geri çekilebilir ya da nesne ömrü ancak belirli bir aralıkta bilinebilir. Dolayısıyla, elde edilen örneğe, sansürlü bir numune (veya tamamlanmamış bir numune) adı verilir. Yaşam zamanı testlerinde kullanılan birçok sansür tipi vardır. Bu sansür tiplerinden sıklıkla kullanılan ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme yöntemi, Aggarwala (2001) tarafından ilerleyen tür sansürleme ve tip-I aralık sansürlemeyi birleştirerek önerilmiştir. İlerleyen tür tip-I aralık sansürlemede önceden belirlenmiş iki zaman arasında gözlemler elde edilir ve yine önceden belirlenmiş zaman noktalarında sistemden birimlerin çekilmesine izin verir.

Bu tez çalışmasında, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme yöntemine alternatif olarak yeni bir sansürleme şeması önerilmiştir. Part-Time çalışma esasına dayalı bu sansürleme şeması Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme olarak adlandırılmıştır. Araştırmacı ya da araştırmacılar yaşam zamanı testinin belirli bölümlerinde gözlem yaparak bozulan birimlerin kesin bozulma zamanlarını kaydeder. Bazı bölümlerde de sadece bozulma sayılarını belirler. Bu yeni sansür şemasında ilerleyen tür tip-I aralık sansür şemasına göre daha çok örnekleme sahip olma ve bilgi alabilme imkanı vardır. Şartlar ve imkanlara göre bazı yaşam zamanı testlerinde kullanılma ihtiyacı doğabileceği düşünülmektedir.

Bu yeni şemayı değerlendirmek için Weibull dağılımı ve genelleştirilmiş ters üstel dağılımı kullanılarak ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme ve Part-Time operatörlü sansürleme altında en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri elde edilmiştir. Bayes tahinleri karesel hata kayıp fonksiyonu ve genel entropi kayıp fonksiyonu altında elde edilmiştir. Örneklem büyüklüğü (n), aralık sayıları (k) ve aralık uzunlukları (t) farklı değerlerde alınarak, ilerleyen tür tip-I aralık sansürleme, Part-Time operatör ve tam örneklem olmak üzere 3 farklı şemaya göre simülasyon çalışması ile değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak çizelgelerin altında verilmiştir.

Sonuç olarak, elde edilen en çok olabilirlik tahmin sonuçlarına göre, bütün durumlarda Part-Time operatörlü sansürlü örneklemden elde edilen tahminlere ait varyans ve hata kareler ortalaması, ilerleyen tür tip-I aralık sansürlü örnekleme göre

daha düşük değerlere sahiptir. Yan değerleri ise çoğunlukla daha düşük değerlere sahiptir. Bayes ve mle tahmin sonuçlarına göre ise tam örneklem ve Part-Time operatörlü ilerleyen tür tip-I aralık sansürlü örneklemde karesel hata kayıp fonksiyonlu Bayes tahmini daha düşük risk değerlerine sahiptir. İlerleyen tür tip-I aralık sansürlü örneklemde ise parametreye göre değişiklik göstermektedir.

6.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında aralık uzunluğunun çift sayı olduğu durumlar incelenmiştir. Yeni yapılacak çalışmalarda aralık uzunluğunun tek sayı olduğu durumlarda değerlendirilebilir. Optimal deney tasarımı ile birlikte Part-Time operatörlü sansürlü örneklem çalışabilir.

KAYNAKLAR

- Abouammoh, A. M. ve Alshingiti, A. M., 2009, Reliability estimation of generalized inverted exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79 (11), 1301-1315.
- Aggarwala, R., 2001, Progressive interval censoring: Some mathematical results with applications to inference, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 30 (8-9), 1921-1935.
- Ahmadi, K. ve Yousefzadeh, F., 2015, Estimation for the Parameters of Generalized Half-normal Distribution Based on Progressive Type-I Interval Censoring, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44 (10), 2671-2695.
- Ashour S, A. W., 2007, Statistical Analysis of Exponentiated Weibull Family under Type I Progressive Interval Censoring with Random Removals, *Journal of Applied Statistics Sciences Research*, 3 (12), 1851-1863.
- Calabria, R. ve Pulcini, G., 1994, Bayes 2-Sample Prediction for the Inverse Weibull Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 23 (6), 1811-1824.
- Casella, G. ve Berger, R. L., 2002, Statistical Inference (Second Edition), *Duxbury*, p.
- Chen, D. G. ve Lio, Y. L., 2010, Parameter estimations for generalized exponential distribution under progressive type-I interval censoring, *Computational Statistics & Data Analysis*, 54 (6), 1581-1591.
- Cohen, A. C., 1965, Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based on Complete and on Censored Samples, *Technometrics*, 7 (4), 579-588.
- Dey, S., Singh, S., Tripathi, Y. M. ve Asgharzadeh, A., 2016, Estimation and prediction for a progressively censored generalized inverted exponential distribution, *Statistical Methodology*, 32, 185-202.
- Ding, C., Yang, C. Y. ve Tse, S. K., 2010, Accelerated life test sampling plans for the Weibull distribution under Type I progressive interval censoring with random removals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80 (8), 903-914.
- Kaushik, A., Singh, U. ve Singh, S. K., 2015, Bayesian Inference for the Parameters of Weibull Distribution under Progressive Type-I Interval Censored Data with Beta-binomial Removals, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 0-0.
- Lin, C.-T., Wu, S. J. S. ve Balakrishnan, N., 2009, Planning life tests with progressively Type-I interval censored data from the lognormal distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139 (1), 54-61.
- Lin, Y. J. ve Lio, Y. L., 2012, Bayesian inference under progressive type-I interval censoring, *Journal of Applied Statistics*, 39 (8), 1811-1824.
- Lu, W. ve Tsai, T.-R., 2009, Interval censored sampling plans for the gamma lifetime model, *European Journal of Operational Research*, 192 (1), 116-124.
- Ng, H. K. T. ve Wang, Z., 2009, Statistical estimation for the parameters of Weibull distribution based on progressively type-I interval censored sample, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79 (2), 145-159.
- Peng, X. Y. ve Yan, Z. Z., 2013, Bayesian Estimation for Generalized Exponential Distribution Based on Progressive Type-I Interval Censoring, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica-English Series*, 29 (2), 391-402.
- Roussas, G. G., 1973, A first course in mathematical statistics, Addison-Wesley, p.
- Singh, S. ve Tripathi, Y. M., 2016, Estimating the parameters of an inverse Weibull distribution under progressive type-I interval censoring, *Statistical Papers*, 1-36.

- Singh, S. K., Singh, U. ve Kumar, D., 2011, Bayesian Estimation of the Exponentiated Gamma Parameter and Reliability Function under Asymmetric Loss Function, *Revstat-Statistical Journal*, 9 (3), 247-260.
- Singh, S. K., Singh, U. ve Kumar, D., 2013, Bayesian estimation of parameters of inverse Weibull distribution, *Journal of Applied Statistics*, 40 (7), 1597-1607.
- Singh, S. K., Singh, U. ve Sharma, V. K., 2014, Bayesian estimation and prediction for the generalized Lindley distribution under asymmetric loss function, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43 (4), 661-678.
- Tierney, L. ve Kadane, J. B., 1986, Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*, 81 (393), 82-86.
- Tse, S. K., Yang, C. Y., Yuen, H. K. ve Yuen, K., 2000, Statistical analysis of Weibull distributed lifetime data under Type II progressive censoring with binomial removals, *Journal of Applied Statistics*, 27 (8), 1033-1043.
- Varian, H. R., 1975, A Bayesian approach to real estate assessment, *Studies in Bayesian econometrics and statistics in honor of Leonard J. Savage*, 195-208.
- Wu, S.-J., Chang, C.-T., Liao, K.-J. ve Huang, S.-R., 2008, Planning of progressive group-censoring life tests with cost considerations, *Journal of Applied Statistics*, 35 (11), 1293-1304.
- Wu, S. J. ve Huang, S. R., 2014, Planning Progressive Type-I Interval Censoring Life Tests With Competing Risks, *Ieee Transactions on Reliability*, 63 (2), 511-522.
- Xiang, L. M. ve Tse, S. K., 2005, Maximum likelihood estimation in survival studies under progressive interval censoring with random removals, *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 15 (6), 981-991.
- Yang, C. Y. ve Tse, S. K., 2005, Planning accelerated life tests under progressive type I interval censoring with random removals, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 34 (4), 1001-1025.
- Yang, C. Y., Fan, A. X. ve Tse, S. K., 2008, The Optimal Design of Accelerated Life Tests for Lognormal Distribution under Progressive Type-I Interval Censoring with Random Removals, *Icpom2008: Proceedings of 2008 International Conference of Production and Operation Management, Volumes 1-3*, 1173-1177.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yener ÜNAL
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Akdağmadeni 01.05.1985
Telefon :
Faks :
e-mail : uyener@cumhuriyet.edu.tr

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Süleyman Demirel Anadolu Lisesi, Sincan, Ankara	2004
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2009
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2009
Doktora	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	Devam ediyor

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
-----	-------	--------

UZMANLIK ALANI: İstatistik

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Y.Ünal, M. Bekçi, i.Kınacı, Ç. Kuş, 2014, “Bayesian Estimation Based on Type I Grouped Censored Sample with Part Time Operator”, 9.International Statistics Day Symposium, Bildiri Özetleri Kitabı, s.92, May 10-14, Antalya, Turkey.

Y.Ünal, N.Yapıcı Pehlivan, 2011, “Bulanık Çok Kriterli Karar Verme Yöntemleri Ve Bir Takım Oyunu İçin Oyuncu Seçimi Uygulaması”, 7.Uluslararası İstatistik Kongresi, Bildiri Özetleri Kitabı, s.124-125, 28 Nisan-1 Mayıs, Antalya, Türkiye.

M. Oğuzhan YALÇIN, **Y.ÜNAL**, 2015, "Applying Artificial Neural Networks and Clasical Time Series to Forecasting Unemployment Rate of Oecd Countries", 16. Uluslararası Ekonometri, Yöneylem Arastırması ve İstatistik Sempozyumu, Bildiri Özetleri Kitabı, s.122-123, May 07-12, Edirne, Turkey