



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODİFİYE İNTEREST KATEGORİLERDE CAT^1 -OBJELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ekrem Serdar SERT

DANIŞMAN

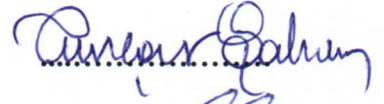
Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

AKSARAY, 2017

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342604 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, Ekrem Serdar SERT, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “MODİFİYE İNTEREST KATEGORİLERDE CAT¹-OBJELER” başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
Aksaray Üniversitesi



Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Sezer SORGUN
Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi



Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mustafa BAŞI
Aksaray Üniversitesi



Teslim Tarihi: 16 EKİM 2017

Savunma Tarihi: 14 KASIM 2017

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.


Ekrem Serdar SERT

TEŞEKKÜR

Tüm yüksek lisans öğrenimim boyunca her türlü emeğini ve ilgisini üzerimden hiç eksik etmeyerek karşılaştığım her zorlukta bana her daim yol gösterici olan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN' a teşekkür ve saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
DOĞRULUK BEYANI.....	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	3
2. ÖN BİLGİLER.....	5
2.1 Modifiye İnterest Kategoriler.....	5
2.2 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüller	8
3. MCI İÇİNDEKİ BAZI CEBİRSEL YAPILAR	11
3.1 MCI daki (Pre)Cat ¹ -Objeler	11
4. SİNGÜLERLİK VE MERKEZSEL GENİŞLEMELER	15
4.1 Singülerlik ve Komutatörler.....	15
4.2 Merkezsel Genişlemeler.....	17
5. (ÖN)ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER İÇİN UYGULAMALAR	20
5.1 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüllerin Merkezi ve Singülerliği.....	20
5.2 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüllerin Komutatörü	22
5.3 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüllerin Merkezsel Genişlemeleri.....	23
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ.....	29

MODİFİYE İNTEREST KATEGORİLERDE CAT^1 -OBJELER

(Yüksek Lisans Tezi)

Ekrem Serdar SERT

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2017

ÖZET

Cebirsel yapılardaki, normal alt objeler ve bölüm objelerinin sınıflandırma açısından önemli bir yeri vardır. Örneğin izomorfizm teoremleri kullanılarak bir grup üzerindeki homomorfizmler sınıflandırılabilir ve bir grubun basit veya mükemmel olması bu grup üzerindeki homomorfizmler cinsinden ifade edilebilir. Cebirsel yapıların merkezsiz genişlemeleri de matematikçilerin oldukça ilgisini çekmiştir. Merkezsiz genişlemelerin elde edilmesi için normal alt objeler ve bölüm objelerinden faydalanılmıştır. Singüler objeler ve komutatör objeler ise merkezsiz genişlemelerin sınıflandırılması için kullanışlı objelerdir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışılacak konu üzerinde literatürde yapılmış bazı çalışmalardan bahsedip konunun kısa bir tarihçesi verildi. İkinci bölümde temel özellikleri ile birlikte bazı ilişkili yapılar ve modifiye interest kategorisinin literatürde var olan tanımı verildi. Üçüncü bölümde, herhangi bir $\mathbb{C}$ modifiye interest kategorisindeki $(\text{pre})\text{cat}^1$ -objenin notasyonu ve bu objenin $\mathbb{C}$ deki çaprazlanmış modüller ile bağlantısı verildi. Daha sonra dördüncü bölümde modifiye interest kategorilerde singülerlik, komutatör ve merkezsiz genişlemeler verildi. Beşinci bölümde ise dördüncü bölümün uygulaması olarak bu tezde verilen notasyonların (ön)çaprazlanmış modül versiyonları elde edildi.

Anahtar Kelimeler : Merkez, Merkez Genişleme, Komutatör, Singülerlik
Sayfa Adedi : 28
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

CAT¹-OBJECTS IN MODIFIED CATEGORIES OF INTEREST

(M.Sc. Thesis)

Ekrem Serdar SERT

AKSARAY UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

November 2017

ABSTRACT

Normal subobjects and quotient objects in algebraic structures have an important place in terms of classification. For example, homomorphisms on a group can be categorized using isomorphism theorems, and if a group is simple or perfect, it can be expressed in terms of homomorphisms on this group. The central extensions of algebraic structures have also attracted considerable interest from mathematicians. Normal subobjects and quotient objects were used to achieve centralized extensions. Singular objects and commutator objects are useful objects for classifying central expansions.

This thesis consists of five chapters. In the introduction, a short history was given about some of the studies in the literature on the topic to be studied. In the second chapter, some related structures and modified categories of interests are given in the literature together with their fundamental properties. In the third section, the notion of (pre)cat¹-object in any $\mathbb{C}$ modified category of interest and this object is linked to the crossed modules in $\mathbb{C}$. Then in the fourth chapter, singularity, commutator and central extensions were given in the modified categories of interest. In the fifth section, the crossed module versions of the notions given in this thesis were obtained as the application of the fourth section.

Keywords	: Center, Central Extension, Commutator, Singularity
Number of pages	: 28
Adviser	: Asst. Prof. Dr. Tunçar AHAN

KISALTMALAR DİZİNİ

$\text{Cat}^1 - \text{Ass}$	Assosyatif Cebirlerde Cat^1 -objeler kategorisi
$\text{Cat}^1 - \text{Lie}$	Lie Cebirlerde Cat^1 -objeler kategorisi
$\text{Cat}^1 - \text{Leibniz}$	Leibniz Cebirlerde Cat^1 -objeler kategorisi
$\text{PreCat}^1 - \text{Ass}$	Assosyatif Cebirlerde Ön Cat^1 -objeler kategorisi
$\text{PreCat}^1 - \text{Lie}$	Lie Cebirlerde Ön Cat^1 -objeler kategorisi
$\text{PreCat}^1 - \text{Leibniz}$	Leibniz Cebirlerde Cat^1 -objeler kategorisi
MCI	Modifiye Interest Kategori
$(\text{P})\text{Xmod}(\mathbb{C})$	MCI da (Ön)Çaprazlanmış Modüller kategorisi
$(\text{Pre})\text{Cat}^1(\mathbb{C})$	MCI da (Ön) Cat^1 -objeler kategorisi

1. GİRİŞ

Abelyan olmayan gruplar Geometri, Analiz ve Fizikte geniş uygulamalara sahiptir. Temel grup kavramının yüksek mertebelere genelleştirilerek abelyan olmayan homotopi grupları elde edilmesi için yüksek boyutlu $\pi_n(X, x_0)$ homotopi grubu tanımlanmış, fakat $n \geq 2$ için bu grupların abelyan olduğu gözlenmiştir. Dolayısıyla bu grup, beklentileri karşılamamıştır. Bunun üzerine relatif homotopi grubu tanımlanmış ve $n \geq 3$ için bu homotopi grupları abelyan olmasına rağmen $n = 2$ için $\pi_2(X, A, x_0)$ relatif homotopi gruplarından bazılarının abelyan olmadığı Whitehead tarafından doğrulanmıştır [1]. Bu uğraşı esnasında Whitehead $\rho: \pi_2(X, A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ sınır fonksiyonunun bazı özel koşulları sağladığını gözlemlemiş ve bunu çapraz modül olarak adlandırmıştır. Bu çalışmalar Van Kampen Teoreminin yüksek boyutlu uzaylarda ispatına olanak sağlamıştır. O zamandan itibaren çapraz modül ve çapraz kare kavramı diğer alanlarda da önemli bir yer tutmuştur.

Çapraz modüllerin homotopi teorisi, grup gösterimi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli homoloji, kombinator grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli rolü vardır. Çaprazlanmış modüller homotopi 3-tiplerin bir modeli olarak [2] de J.H.C Whitehead tarafından tanımlandı ve [3] deki yüksek boyutlu kohomoloji gruplarının sınıflandırılmasında kullanıldı. O zamandan sonra çaprazlanmış modülün tüm özellikleri birçok cebire uyarlandı. Çaprazlanmış modüllerin notasyonu ilgili makalelerde [4-15] (asosyatif) komutatif cebirler, Lie cebirleri, Leibniz cebirleri, Lie-Rinehart cebirler gibi çeşitli cebirler üzerinde tanımlandı. Modifiye interest kategorilerdeki çaprazlanmış modüllerin tanımı tüm bu tanımları kapsar. Lichtenbaum, Schlessinger [16] ve Gerstenhaber [17] çalışmalarında birleşmeli ve değişmeli cebirler üzerinde çapraz modül kavramını tanımlamışlardır. Çaprazlanmış kare ise ilk olarak cebirsel K-teorideki problemlere uygulanmak üzere tanımlanmıştır [18]. Loday homotopi tiplerinin farklı bir modeli olarak cat^1 -grupları tanımladı [19]. Daha sonra birbirlerinden ayrı olarak Brown ve Spencer [20] ve Loday [19]

tarafından cat^1 -grupların kategorisi ile $\mathcal{C}$ apraz modüllerin kategorisinin denk olduğu ve daha genel olarak çok işlemli grupların kategorisindeki iç grupoidlerin kategorisi ile aynı tip $\mathcal{C}$ apraz modüllerin kategorisinin denk olduğu gösterilmiştir [15]. $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüller ve cat^1 -grupların kategorisi doğal olarak denktir ve bu sonuç birçok cebirdede uyarlanabilir. Cat^1 -cebirleri notasyonu [21] de verildi. $\mathcal{C}$ apraz modüllerde normal alt $\mathcal{C}$ apraz modülü ve bölüm $\mathcal{C}$ apraz modülü kavramlarının cat^1 -gruplar kategorisindeki karşılığı Mucuk, Şahan ve Alemdar tarafından incelendi [22]. Yani $\mathcal{C}$ apraz modüllerdeki normallik ve bölüm kavramları, $\mathcal{C}$ apraz modüllerin kategorisine denk olan cat^1 -grupların kategorisine taşınmıştır.

İnterest kategoriler farklı cebirler ve farklı cebirlerin kategorisinin özelliklerini çalışmak için tanımlandı. Fikir P. G. Higgins [23] den geldi ve kategoriyi M. Barr ve G. Orzech [24] tanımladı. Cebirsel yapıların bir çok kategorisi İnterest kategorilerinin ana örnekleridir (bakınız [24-29]). Gruplar kategorisindeki sırasıyla $\mathcal{C}$ aprazlanmış ve ön $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüller interest kategorilere ilgili makalelerde olduğu gibi denktir [30,31]. Fakat, cat^1 -Lie (asosyatif, Leibniz, etc.) cebirler interest kategori tanımını sağlamaz. Dolayısıyla, [32] de, Y.Boyacı vd. interest kategorilerinin yeni bir tipini tanımladı ve çalıştı; yani, [15] deki işlemlerle gruplar kategorisinin tüm aksiyomlarını sağlayan kategoriye yeni bir şart ekledi; bu kategori interest kategoriler için [24] de verilen iki toplamsal aksiyomu sağlar. [32] numaralı kaynakta bu kategori "Modifiye İnterest kategori" olarak verildi ve bu tez boyunca kısaca MCI ile ifade edeceğiz. Bu kategorinin ana örnekleri asosyatif komutatif ve asosyatif cebirler, Leibniz cebirleri, Lie cebirlerin kategorisindeki $\mathcal{C}$ aprazlanmış ve ön $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüllerin kategorisine denk olan kategorilerdir. Daha fazla örnek ilgili makalelerde ([4-15]) bulunabilir.

Bu tezdeki ana amaç (ön) $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüllerin çeşitli kategorilerindeki ([7,32-35]) merkez, singülerlik, komutatör ve merkezsiz genişlemeler gibi notasyonları genellemektir. Bunun için, ilk olarak modifiye interest kategorilerdeki merkez, singülerlik ve merkezsiz genişlemeler tanımlanacak. Ayrıca bu tezde $(\text{Pre})\text{cat}^1$ -gruplar ve (ön) $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüllerin kategorisi arasındaki denklikten esinlenerek, $(\text{pre})\text{cat}^1$ -objeler verilerek modifiye interest kategorilerdeki $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüller ile bağlantısı verildi. Bu tanımların $(\text{pre})\text{cat}^1$ -objelere uygulanmasından, kategorilerin farklı tiplerindeki (ön) $\mathcal{C}$ aprazlanmış modüllere ait bir çok notasyonun genellemesi elde edildi. Ayrıca bu tezde verilen tanımların [36-38] de verilen tanımlarla örtüştüğü gösterildi.

1.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda tezde kullanılan temel kavramlar hatırlatılacaktır.

Tanım 1.1.1. G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısına aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

- (i) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (birleşme özelliği) sağlanır.
- (ii) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ (e ye birim eleman denir) vardır.
- (iii) Her $a, b \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ (a^{-1} elemanına a nın tersi denir) vardır.

Tanım 1.1.2. $(G, \cdot)$ ve $(H, *)$ iki grup ve $f : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in G$ için $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$ ise f fonksiyonuna G den H ye bir grup homomorfizmi denir.

Tanım 1.1.3. G ve H iki grup ve $f : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. Eğer f birebir ve örten ise f ye G ile H arasında bir izomorfizm denir.

Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizm varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4. G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. Eğer H , G nin ikili işlemine göre kapalı ve G den indirgenmiş ikili işlem ile bir grup ise bu takdirde, H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer her $x \in G$ için

$$xN = Nx$$

oluyorsa bu takdirde, N ye G nin bir normal alt grubu denir ve $N \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.6. G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. $G/N = \{xN : x \in G\}$ ile tanımlı kosetlerin kümesi (bölüm kümesi)

$$\begin{aligned} G/N \times G/N &\rightarrow G/N \\ (xN, yN) &\rightarrow xyN \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı işleme göre bir gruptur. Bu gruba G nin N ile bölüm grubu denir.

Tanım 1.1.7. Bir G grubu için

$$Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G \text{ için } xy = yx\}$$

şeklinde tanımlı kümeye G nin merkezi denir.

Bir G grubunun merkezi G nin normal alt grubudur.

Tanım 1.1.8. $(G, *)$ bir grup ve her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği sağlanıyorsa G grubuna değişmeli (abelyan) grup denir.

Tanım 1.1.9. G, H iki grup, $f : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi ve H grubunun birim elemanı e_H olsun. Bu durumda ,

$$\text{Çek } f = \{x \in G : f(x) = e_0\}$$

şeklinde tanımlı kümeye f grup homomorfizminin çekirdeği denir.

Tanım 1.1.10. G ve H birer grup olsun. Eğer

$$\varepsilon : \quad G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} H$$

diyagramında $i : G \rightarrow E$ grup homomorfizmi birebir, $p : E \rightarrow H$ grup homomorfizmi örten ve $\text{Çek } p = G$ ise E grubuna G ile H gruplarının bir genişlemesi denir. Eğer $ps = 1_H$ olacak şekilde bir $s : H \rightarrow E$ grup homomorfizmi varsa E grubuna G ile H gruplarının bir split genişlemesi denir. Eğer $\text{Çek } p = G \subseteq M(E)$ oluyorsa E grubuna G ile H gruplarının bir merkezel genişlemesi denir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin geri kalan kısmında kullanılacak temel tanım ve kavramlar hatırlatılmış ve bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1 Modifiye İnterest Kategoriler

İlk olarak [11,24,31] kaynaklarında verilen interest kategorilerin modifiye versiyonu olan MCI'nın [32] deki tanım ve ana inşalarını hatırlayalım.

$\mathbb{E}$ grup koşullarını içermek ve aşağıdaki şartları sağlamak üzere, $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ koşulların ve Ω işlemlerin kümeleri ile birlikte grupların bir kategorisi olsun, Eğer Ω_i , Ω daki i -li işlemlerin kümesiye:

- (a) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$;
- (b) (toplamsal olarak yazılan : $0, -, +$) grup işlemleri sırasıyla Ω_0 , Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır. $\Omega'_2 = \Omega_2 \setminus \{+\}$, $\Omega'_1 = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olsun. Eğer $* \in \Omega_2$ ise, Ω'_2 nün $x *^\circ y = y * x$ şeklinde tanımlanan $*^\circ$ nı içerdiğini ve $\Omega_0 = \{0\}$ olduğunu varsayacağız;
- (c) her bir $* \in \Omega'_2$ için, $\mathbb{E}$, $x*(y+z) = x*y + x*z$ özdeşliğini içermelidir;
- (d) her bir $\omega \in \Omega'_1$ ve $* \in \Omega'_2$ için, $\mathbb{E}$ $\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y)$ ve $\omega(x*y) = \omega(x)*\omega(y)$ özdeşliklerini içermelidir.

C , $\mathbb{C}$ nin bir objesi ve $x_1, x_2, x_3 \in C$ olsun:

Aksiyom 1. her bir $* \in \Omega'_2$ için, $x_1 + (x_2 * x_3) = (x_2 * x_3) + x_1$ dir.

Aksiyom 2. her bir $(*, \bar{*}) \in \Omega'_2 \times \Omega'_2$ sıralı ikilisi için

$$(x_1 * x_2) \bar{*} x_3 = W(x_1(x_2 x_3), x_1(x_3 x_2), (x_2 x_3)x_1, (x_3 x_2)x_1, x_2(x_1 x_3), x_2(x_3 x_1), (x_1 x_3)x_2, (x_3 x_1)x_2),$$

deki her bir diziliş Ω'_2 de bir işlem belirtmek üzere, yukarıdaki şekilde bir W kelimesi vardır.

Tanım 2.1.1. İşlemler ile bir $\mathbb{C}$ kategorisi yukarıdaki (a)–(d), Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 şartlarını sağlar ise bu kategoriye *modifiye interest kategori* denir [32].

Yukarıdaki tanımın interest kategorilerin eski tanımından farkı interest kategorilerin tanımında yer alan $\omega(x)*y = \omega(x*y)$ nın yerine artık yeni tanımda $\omega(x)*\omega(y) = \omega(x*y)$ özdeşliğinin kullanılmasıdır.

Örnek 2.1.2. $\text{Cat}^1 - \text{Ass}$, $\text{Cat}^1 - \text{Lie}$, $\text{Cat}^1 - \text{Leibniz}$, $\text{PreCat}^1 - \text{Ass}$, $\text{PreCat}^1 - \text{Lie}$ ve $\text{PreCat}^1 - \text{Leibniz}$ kategorileri modifiye interest kategorisi olmasına rağmen interest kategori değildir. Ayrıca [39] de tanımlanmış olan komutatif Von Neumann regüler halkalarının kategorisi modifiye interest kategorisindeki iki aksiyomu sağlayan $()^*$ birli işlem ile birlikte komutatif halkalar kategorisine izomorftur.

Tezin geri kalan kısmında, keyfi bir modifiye interest kategori $\mathbb{C}$ ile ifade edilecektir.

$B \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer B nin bir alt objesi bazı morfizmlerin çekirdeği ise B nin bu alt objesine ideal denir. A nın B nin bir ideali olması için gerek ve yeter şart A, B nin bir normal alt grubu olmalı ve her $a \in A$, $b \in B$ ve $* \in \Omega_2'$ için $a*b \in A$ olmalıdır.

$A, B \in \mathbb{C}$ olsun. Her bir $* \in \Omega_2$ için, $f_* : A \times B \rightarrow A$ dönüşümü var olduğunda A üzerinde B nin etkilerinin kümesine sahip oluruz. B nin A ile bir split genişlemesi $\mathbb{C}$ deki işlemler ile birlikte B nin A üzerine bir etkisini sunar.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

split genişlemesi verildiğinde her $b \in B$, $a \in A$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$\begin{aligned} b \cdot a &= s(b) + a - s(b), \\ b * a &= s(b) * a, \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Yukarıdaki denklemlerle tanımlanan B nin A üzerine etkisine türetilmiş etki denir.

B nin A üzerine bir etkisi verildiğinde, $A \rtimes B$ semi-direkt çarpımı, her $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ için

$$\begin{aligned}
\omega(a,b) &= (\omega(a), \omega(b)), \\
(a',b')+(a,b) &= (a'+b' \cdot a, b'+b), \\
(a',b')*(a,b) &= (a' * a + a' * b + b' * a, b' * b),
\end{aligned}$$

ile tanımlanılmış işlemler ve $A \times B$ nin uzandığı küme olan evrensel cebirdir. Detaylar için [32] kaynağına bakılabilir.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki-cebir (veya iki-asosyatif cebir) [28] de, her $x, y, z \in A$ için

$$\dashv, \vdash : A \otimes A \rightarrow A$$

sekinde iki $\mathbb{K}$ -lineer dönüşüm

$$\begin{aligned}
(x \dashv y) \dashv z &= x \dashv (y \vdash z), \\
(x \dashv y) \vdash z &= x \dashv (y \dashv z), \\
(x \vdash y) \dashv z &= x \vdash (y \dashv z), \\
(x \vdash y) \vdash z &= x \vdash (y \vdash z), \\
(x \vdash y) \vdash z &= x \vdash (y \vdash z),
\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan bir $\mathbb{K}$ -vektor uzayı olarak verildi.

A ve B iki iki-cebir olsun. B nin A üzerinde bir iki-cebir etkisi:

$$\begin{aligned}
\triangleright_{\vdash}, \triangleright_{\dashv} : B \times A &\rightarrow A \\
\triangleleft_{\vdash}, \triangleleft_{\dashv} : A \times B &\rightarrow A
\end{aligned}$$

30 aksiyomu sağlayan dört bilineer dönüşüm ile verildi (bu aksiyomları detaylı bir şekilde görmek için [6] ya bakılabilir).

$A \rtimes B$ yarı-direkt çarpımı, $a, a' \in A$ and $b, b' \in B$ için

$$\begin{aligned}
(a, b) \dashv (a', b') &= (a \dashv a' + b \triangleright_{\dashv} a' + a \triangleleft_{\dashv} b', b \vdash b'), \\
(a, b) \vdash (a', b') &= (a \vdash a' + b \triangleright_{\vdash} a' + a \triangleleft_{\vdash} b', b \vdash b'),
\end{aligned}$$

ile tanımlanılmış ikili işlemler toplama ve skaler çarpma ile $A \times B$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir iki-cebirdir.

Teorem 2.1.4. B nin A üzerine bir etkisinin bir türetilmiş etki olması için gerek ve yeter şart $A \rtimes B$ nin $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmasıdır [32].

Önerme 2.1.5. $\mathbb{C}_G$ de B nin A üzerine etkilerinin kümesi türetilmiş etkilerin bir kümesi olması için gerek ve yeter şart, her bir $\omega \in \Omega_1'$, $* \in \Omega_2'$, $b, b_1, b_2 \in B$, $a, a_1, a_2 \in A$ ve (xii) şartın her iki tarafı da tanımlı olduğunda $x, y, z, t \in A \cup B$ için

- (i) $0 \cdot a = a$,
- (ii) $b \cdot (a_1 + a_2) = b \cdot a_1 + b \cdot a_2$,
- (iii) $(b_1 + b_2) \cdot a = b_1 \cdot (b_2 \cdot a)$,
- (iv) $b * (a_1 + a_2) = b * a_1 + b * a_2$,
- (v) $(b_1 + b_2) * a = b_1 * a + b_2 * a$,
- (vi) $(b_1 * b_2) \cdot (a_1 * a_2) = a_1 * a_2$,
- (vii) $(b_1 * b_2) \cdot (a * b) = a * b$,
- (viii) $a_1 * (b \cdot a_2) = a_1 * a_2$,
- (ix) $b * (b_1 \cdot a) = b * a$,
- (x) $\omega(b \cdot a) = \omega(b) \cdot \omega(a)$,
- (xi) $\omega(a * b) = \omega(a) * \omega(b)$,
- (xii) $x * y + z * t = z * t + x * y$,

$\mathbb{C}_G$ de şartları sağlanmalıdır [32].

2.2 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüller

Tanım 2.2.1. $A \in \mathbb{C}$ olsun. Her $a \in A, \omega \in \Omega_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$Z(A) = \{z \in A \mid a + z = z + a, a + \omega(z) = \omega(z) + a, a * z = 0, a * \omega(z) = 0\}$$

kümesine A nın merkezi denir [32].

Diğer taraftan eğer A, B nin bir ideali ise, A nın B deki merkezleştiricisi her $a \in A, \omega \in \Omega_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$Z(B, A) = \{b \in B \mid a + b = b + a, a + \omega(b) = \omega(b) + a, a * b = 0, a * \omega(b) = 0\}$$

idealidir [32].

Tanım 2.2.2. $C_0, C_1 \in \mathbb{C}$, C_0, C_1 üzerinde türetilmiş etkiye sahip ve $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ dönüşümü $\mathbb{C}$ de bir morfizm olmak üzere her $c_0 \in C_0, c_1 \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$(a) \quad \partial(c_0 \cdot c_1) = c_0 + \partial(c_1) - c_0,$$

$$(b) \quad \partial(c_0 * c_1) = c_0 * \partial(c_1),$$

şartlarını sağlayan (C_1, C_0, ∂) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir ön çaprazlanmış modül, bu şartların yanında eğer her $c_1, c_1' \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$(c) \quad \partial(c_1) \cdot c_1' = c_1 + c_1' - c_1,$$

$$(d) \quad \partial(c_1) * c'_1 = c_1 * c'_1,$$

şartlarını sağlayan (C_1, C_0, ∂) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir çaprazlanmış modül denir [33].

Tanım 2.2.3. Her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için $\mu_0 : C_0 \rightarrow C'_0$, $\mu_1 : C_1 \rightarrow C'_1$ olmak üzere $(\mu_1, \mu_0) : (C_1, C_0, \partial) \rightarrow (C'_1, C'_0, \partial')$ ikili morfizmi

$$(a) \quad \mu_0 \partial = \partial' \mu_1,$$

$$(b) \quad \mu_1(c_0 \cdot c_1) = \mu_0(c_0) \cdot \mu_1(c_1),$$

$$(c) \quad \mu_1(c_0 * c_1) = \mu_0(c_0) * \mu_1(c_1),$$

şartlarını sağlıyorsa (μ_1, μ_0) morfizm ikilisine (C_1, C_0, ∂) dan (C'_1, C'_0, ∂') a bir (ön) çaprazlanmış modül morfizmi denir [33].

Dolayısıyla, tanımladığımız morfizmlerle beraber **PXMod**($\mathbb{C}$) (ön) çaprazlanmış modüller ve **XMod**($\mathbb{C}$) çaprazlanmış modüller kategorileri elde edilir.

Örnek 2.2.4. $\partial : D_1 \rightarrow D_0$ bir iki-cebir homomorfizmi ve D_1 üzerinde D_0 ın etkisi olsun. Her $d_1, d'_1 \in D_1$, $d_0 \in D_0$ için $\partial : D_1 \rightarrow D_0$ homomorfizmi

$$(a) \quad \partial(d_0 \triangleright_{\neg} d_1) = d_0 \neg \partial(d_1),$$

$$\partial(d_0 \triangleright_{\vdash} d_1) = d_0 \vdash \partial(d_1),$$

$$\partial(d_1 \triangleleft_{\neg} d_0) = \partial(d_1) \neg d_0,$$

$$\partial(d_1 \triangleleft_{\vdash} d_0) = \partial(d_1) \vdash d_0,$$

$$(b) \quad \partial(d_1) \triangleright_{\neg} d'_1 = d_1 \neg d'_1 = d_1 \triangleleft_{\neg} \partial(d'_1),$$

$$\partial(d_1) \triangleright_{\vdash} d'_1 = d_1 \vdash d'_1 = d_1 \triangleleft_{\vdash} \partial(d'_1),$$

şartlarını sağlıyorsa (D_1, D_0, ∂) üçlüsüne iki-cebirler kategorisinde bir çaprazlanmış modül denir. Bu tanım [6] de verilen tanıma kapsar.

Örnek 2.2.5. $\partial : D_1 \rightarrow D_0$ ve $\partial' : D'_1 \rightarrow D'_0$ birer iki-cebir çaprazlanmış modülleri olsun. $\partial : D_1 \rightarrow D_0$ ve $\partial' : D'_1 \rightarrow D'_0$ homomorfizmleri arasında $\mu_1 : D_1 \rightarrow D'_1$, $\mu_0 : D_0 \rightarrow D'_0$ olacak şekildeki (μ_1, μ_0) ikilisi her $d_1 \in D_1$ ve $d_0 \in D_0$ için

$$\mu_1(d_0 \triangleright_{\vdash} d_1) = \mu_0(d_0) \triangleright_{\vdash} \mu_1(d_1),$$

$$\mu_1(d_1 \triangleleft_{\neg} d_0) = \mu_1(d_1) \triangleleft_{\neg} \mu_0(d_0),$$

$$\mu_1(d_0 \triangleright_{\neg} d_1) = \mu_0(d_0) \triangleright_{\neg} \mu_1(d_1),$$

$$\mu_1(d_1 \triangleleft_{\vdash} d_0) = \mu_1(d_1) \triangleleft_{\vdash} \mu_0(d_0)$$

şartlarının yanında $\partial' \mu_1 = \mu_0 \partial$ özelliğininde sağlıyorsa (μ_1, μ_0) ikilisine iki-cebir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Tanım 2.2.6. (C_1, C_0, μ) , $\mathbb{C}$ de bir (ön) çaprazlanmış modül olsun. Eğer C'_1 ve C'_0 sırasıyla C_1 ve C_0 in alt objeleri, $\mu' = \mu|_{C'_1}$ ve C'_0 in C'_1 üzerindeki etkisi C_0 in C_1 üzerindeki etkisiyle verildiyse, (C'_1, C'_0, μ') (ön)çaprazlanmış modülü (C_1, C_0, μ) in bir (ön)çaprazlanmış alt modülüdür [33].

Tanım 2.2.7. (C'_1, C'_0, μ') ve (C_1, C_0, μ) iki (ön) çaprazlanmış modül olsun. Eğer çekirdeği (C'_1, C'_0, μ') olacak şekilde bir $(C'_1, C'_0, \mu') \rightarrow (C_1, C_0, \mu)$ (ön)çaprazlanmış modül morfizmi varsa (C'_1, C'_0, μ') (ön)çaprazlanmış modülüne (C_1, C_0, μ) (ön)çaprazlanmış modülünün bir ideali denir [33].

Tanım 2.2.8. (C'_1, C'_0, μ') (ön)çaprazlanmış modülüne (C_1, C_0, μ) (ön)çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda $\left(\frac{C_1}{C'_1}, \frac{C_1}{C'_1}, \mu^* \right)$ üçlüsü de bir (ön)çaprazlanmış modül olur ve bu (ön)çaprazlanmış modüle bölüm (ön)çaprazlanmış modülü denir [33].

Teorem 2.2.7. (C'_1, C'_0, μ') (ön)çaprazlanmış modülü (C_1, C_0, μ) in bir (ön)çaprazlanmış alt modülü olsun. Eğer C'_0 ve C'_1 sırasıyla C_0 ve C_1 in idealleri ise ve her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$, $c'_0 \in C'_0$ ve $c'_1 \in C'_1$ için

- (a) $c_0 * c'_1 \in C'_1$
- (b) $c'_0 * c_1 \in C'_1$
- (c) $c_0 \cdot c'_1 \in C'_1$
- (d) $c'_0 \cdot c_1 - c_1 \in C'_1$

oluyorsa, (C'_1, C'_0, μ') (ön)çaprazlanmış modülü (C_1, C_0, μ) (ön)çaprazlanmış modülünün bir idealidir [33].

3. MCI İÇİNDEKİ BAZI CEBİRSEL YAPILAR

Bu bölümde, ilk olarak $\mathbb{C}$ modifiye interest kategorisindeki $(\text{pre})\text{cat}^1$ -objeler ve $\mathbb{C}$ deki (ön) çaprazlanmış modüllerin $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ kategorisi ile $(\text{pre})\text{cat}^1$ -objelerin $(\mathbf{Pre})\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ kategorisi arasında doğal denklik verilecektir. Daha sonra $\mathbb{C}$ deki singülerlik, komutatör ve merkez genişlemeler verilecektir. Ayrıca Tanım 4.2.1 de verilen merkez genişlemeler [40] daki merkezleştirme tanımı arasındaki bağlantı verilecek.

3.1 MCI daki $(\mathbf{Pre})\mathbf{Cat}^1$ -Objeler

Tanım 3.1.1. $C \in \mathbb{C}$ ve $\omega_0, \omega_1 : C \rightarrow C$, $\mathbb{C}$ de iki morfizm olsun. Eğer bu morfizmler

$$(a) \quad \omega_0 \omega_1 = \omega_1, \quad \omega_1 \omega_0 = \omega_0$$

şartını sağlıyorsa (C, ω_0, ω_1) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir precat^1 -obje, eğer ek olarak her $* \in \Omega_2'$ ve $x \in \text{Çek } \omega_0$, $y \in \text{Çek } \omega_1$ için

$$(b) \quad x * y = 0, \quad x + y - x - y = 0,$$

şartıda sağlanıyorsa (C, ω_0, ω_1) üçlüsüne $\mathbb{C}$ de bir cat^1 -obje denir [33].

Şimdi ω_0 and ω_1 dönüşümleri ile birlikte objeleri cat^1 -objeler ve morfizmleri $\mathbb{C}$ - morfizmler olan cat^1 -objeler kategorisini elde ettik. Bu kategoriyi tezin geri kalan kısmında $\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ ile ifade edeceğiz.

Ayrıca benzer şekilde precat^1 -objelerin kategorisini elde edebiliriz. Bu kategoriyide $\mathbf{PreCat}^1(\mathbb{C})$ ile ifade edeceğiz.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{L}$ Leibniz cebirlerinin kategorisi olsun. $L \in \mathbb{L}$ için $\omega_0, \omega_1 : L \rightarrow L$ iki Leibniz cebir homomorfizmi olsun. Her $x \in \text{Çek } \omega_0$, $y \in \text{Çek } \omega_1$ için

$$(a) \quad \omega_0 \omega_1 = \omega_1, \quad \omega_1 \omega_0 = \omega_0,$$

$$(b) \quad [x, y] = 0 = [y, x],$$

şartlarını sağlayan (L, ω_0, ω_1) üçlüsü bir cat^1 -Leibniz cebirdir.

Örnek 3.1.3. $\mathbb{D}$ iki-cebirlerinin kategorisi olsun. $D \in \mathbb{D}$ için $\omega_0, \omega_1 : D \rightarrow D$ iki iki-cebir homomorfizmi olsun. Her $x \in \text{Çek } \omega_0$, $y \in \text{Çek } \omega_1$ için

- (a) $\omega_0 \omega_1 = \omega_1$, $\omega_1 \omega_0 = \omega_0$,
- (b) $x \dashv y = 0 = y \dashv x$, $x \vdash y = 0 = y \vdash x$,

şartlarını sağlayan (D, ω_0, ω_1) üçlüsü bir cat^1 -iki-cebirdir.

Önerme 3.1.4. [33] $\mathbf{XMod}(\mathbb{C})$ kategorisi ve $\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ kategorisi birbirlerine denk kategorilerdir.

İspat: (C_1, C_0, ∂) $\mathbb{C}$ de bir çaprazlanmış modül olsun. C_1 üzerinde C_0 in etkisiyle elde edilen $C_1 \rtimes C_0$ semi-direkt çarpımını düşünelim. Teorem 2.1.4 ile, $C_1 \rtimes C_0 \in \mathbb{C}$ dir. Her $(c_1, c_0) \in C_1 \times C_0$ için $\omega_0 : C_1 \rtimes C_0 \rightarrow C_1 \rtimes C_0$, $\omega_1 : C_1 \rtimes C_0 \rightarrow C_1 \rtimes C_0$ dönüşümlerini $\omega_0(c_1, c_0) = (0, c_0)$, $\omega_1(c_1, c_0) = (0, \partial(c_1) + c_0)$, şeklinde $\mathbb{C}$ -morfizmler olarak tanımlarsak istenen sağlanır. Diğer taraftan, her $(c_1, c_0) \in C_1 \times C_0$ için,

$$\omega_0 \omega_1(c_1, c_0) = \omega_0(0, \partial(c_1) + c_0) = (0, \partial(c_1) + c_0) = \omega_1(c_1, c_0)$$

ve

$$\omega_1 \omega_0(c_1, c_0) = \omega_1(0, c_0) = (0, c_0) = \omega_0(c_1, c_0),$$

olduğundan, $\omega_0 \omega_1 = \omega_1$, $\omega_1 \omega_0 = \omega_0$ elde edilir. $(c_1, c_0) \in \text{Çek } \omega_0$ ve $(\overline{c_1}, \overline{c_0}) \in \text{Çek } \omega_1$ olsun. Bu durumda $c_0 = 0$ ve $\partial(\overline{c_1}) + \overline{c_0} = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} (c_1, c_0) + (\overline{c_1}, \overline{c_0}) &= (c_1 + c_0 \cdot \overline{c_1}, c_0 + \overline{c_0}) \\ &= (c_1 + \overline{c_1}, \overline{c_0}) \\ &= (\overline{c_1} - \overline{c_1} + c_1 + \overline{c_1}, \overline{c_0}) \\ &= (\overline{c_1} + (-\partial(\overline{c_1})) \cdot c_1, \overline{c_0}) \\ &= (\overline{c_1} + \overline{c_0} \cdot c_1, \overline{c_0} + c_0) \\ &= (\overline{c_1}, \overline{c_0}) + (c_1, c_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(c_1, c_0) * (\overline{c_1}, \overline{c_0}) &= (c_1 * \overline{c_1} + c_1 * \overline{c_0} + c_0 * \overline{c_1}, c_0 * \overline{c_0}) \\
&= (c_1 * \overline{c_1} + c_1 * \overline{c_0} + 0 * \overline{c_1}, 0 * \overline{c_0}) \\
&= (c_1 * (\partial(\overline{c_1})) + c_1 * \overline{c_0}, 0) \\
&= (c_1 * (\partial(\overline{c_1}) + \overline{c_0}), 0) \\
&= (c_1 * 0, 0) \\
&= (0, 0),
\end{aligned}$$

olur ki bu da istenendir. Dolayısıyla $\mathfrak{C} : \mathbf{XMod}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ fonktoru elde edildi.

Tersine, $\mathbb{C}$ de bir (C, ω_0, ω_1) $\mathbf{cat}^1$ -obje verilsin. $C_1 = \text{\texttt{Çek}} \omega_0$, $C_0 = \text{\texttt{Gör}} \omega_0$ ve $\partial = \omega_1|_{\text{\texttt{Çek}} \omega_0}$ olmak üzere $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ morfizmini düşünelim. Her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1, * \in \Omega'_2$ için C_0 in C_1 üzerine nokta etkisini $c_0 \cdot c_1 = c_0 + c_1 - c_0$ şeklinde ve yıldız etkisini $c_0 * c_1$, şeklinde tanımlayalım. Buradaki amaç, bu etkilerle (C_1, C_0, ∂) in $\mathbb{C}$ de bir çaprazlanmış modül olduğunu göstermektir.

Direkt hesaplamalar ile, her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ için $\omega_0(c_1) = 0$ olduğu ve $\omega_0(c) = c_0$ olacak şekilde $c \in C$ nin var olduğu görülebilir.

(a) Her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ için,

$$\begin{aligned}
\partial(c_0 \cdot c_1) &= \omega_1(c_0 + c_1 - c_0) \\
&= \omega_1(\omega_0(c) + c_1 - \omega_0(c)) \\
&= \omega_1\omega_0(c) + \omega_1(c_1) - \omega_1\omega_0(c) \\
&= \omega_0(c) + \omega_1(c_1) - \omega_0(c) \\
&= c_0 + \partial(c_1) - c_0.
\end{aligned}$$

(b) Her $c_0 \in C_0$, $c_1 \in C_1$ için,

$$\begin{aligned}
\partial(c_0 * c_1) &= \omega_1(\omega_0(c) * c_1) \\
&= \omega_1\omega_0(c) * \omega_1(c_1) \\
&= \omega_0(c) * \omega_1(c_1) \\
&= c_0 * \partial(c_1).
\end{aligned}$$

(c) $\omega_1\omega_1 = \omega_1\omega_0\omega_1 = \omega_0\omega_1 = \omega_1$ olduğundan, her $c'_1 \in C_1$ için $(c_1 - \partial(c_1)) \in \text{\texttt{Çek}} \omega_1$ ve $(c_1 - \partial(c_1)) + c'_1 - (c_1 - \partial(c_1)) - c'_1 = 0$, dolayısıyla $\omega_1(c_1 - \partial(c_1)) = 0$ elde edilir. Ayrıca her $c_1, c'_1 \in C_1$ için

$$\begin{aligned}
\partial(c_1) \cdot c'_1 &= \partial(c_1) + c'_1 - \partial(c_1) \\
&= c_1 - c_1 + \partial(c_1) + c'_1 - \partial(c_1) \\
&= c_1 + c'_1 - c_1,
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenendir.

(d) (c) deki benzer hesaplamalar ile her $c_1, c'_1 \in C_1, * \in \Omega'_2$ için $\partial(c_1 * c'_1) = \partial(c_1) * c'_1 = c_1 * c'_1$ eşitlikleri elde edilir.

Dolayısıyla, $\mathcal{X} : \mathbf{Cat}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{XMod}(\mathbb{C})$ fonktoru elde edildi. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{X}$ fonktorları $\mathbf{XMod}(\mathbb{C})$ ve $\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ arasında doğal denklik verir.

Benzer yollar ile, $(\mathbf{Pre})\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ ve $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ arasında doğal denklik elde edilebilir.

4. SİNGÜLERLİK VE MERKEZSEL GENİŞLEMELER

Bu bölümde MCI daki singülerlik, komutatörler ve merkezsiz genişlemeler ifadelerini vereceğiz.

4.1 Singülerlik ve Komutatörler

Tanım 4.1.1. $\mathbb{C}$ de bir C objesi kendi merkezine denk ise C ye singüler denir [33].

Örnek 4.1.2. A bir iki-cebir olsun. Bu durumda A nın $Z(A)$ merkezi

$$\{z \in A \mid \text{her } a \in A \text{ için } a \dashv z = 0 = z \dashv a, a \vdash z = 0 = z \vdash a\}$$

kümesidir. Dolayısıyla, eğer her $a, a' \in A$ için $a \dashv a' = 0 = a \vdash a'$ ise, A singülerdir.

Örnek 4.1.3. (G, ω_0, ω_1) cat¹-grubunu alalım. Bu durumda eğer her $g, g' \in G$, $i=0,1$ için $g + g' = g' + g$, $g + \omega_i(g') = \omega_i(g') + g$ ise, (G, ω_0, ω_1) singülerdir.

Tanım 4.1.4. $A \in \mathbb{C}$ ve $S \subseteq A$ olsun. S yi içeren en küçük ideale S ile üretilmiş ideal denir ve $\langle S \rangle$ ile ifade edilir [33].

Tanım 4.1.5. $A \in \mathbb{C}$ ve B, C objeleri A nın idealleri olsun. Bu durumda

$\{b + c - b - c, b * c, b + \omega(c) - b - \omega(c), c + \omega(b) - c - \omega(b), b * \omega(c), c * \omega(b) \mid b \in B, c \in C\}$ kümesiyle elde edilen ideale B ve C nin komutatör objesi denir [33].

$A \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\{x + y - x - y, x + \omega(y) - x - \omega(y), x * y, x * \omega(y) \mid x, y \in A, * \in \Omega_2'\}$$

kümesiyle üretilmiş ideale A nı komutatörü denir ve $[A, A]$ ile ifade edilir. Ayrıca, $A/[A, A]$ bölüm objesine A nın singülerleştirilmesi denir.

Örnek 4.1.6. D bir iki-cebir olsun. D nin komutatörü $\{a \dashv b, b \vdash a \mid a, b \in D\}$ kümesiyle üretilmiş idealdir. Ek olarak, D nin singülerleştirilmesi

$$D / \langle a \dashv b, b \vdash a : a, b \in D \rangle$$

dir.

Önerme 4.1.7. [33] $\mathbb{C}$ nin bir C objesinin singüler olması için gerek ve yeter şart $[C, C] = 0$ olmasıdır.

İspat: $C \in \mathbb{C}$ bir singüler obje olsun. Bu durumda C objesi her $c \in C, \omega \in \Omega_1$ ve $* \in \Omega_2'$ için

$$Z(C) = \{z \in C \mid c + z = z + c, c + \omega(z) = \omega(z) + c, c * z = 0, c * \omega(z) = 0\}$$

şeklinde ifade edilen merkezine denktir. Dolayısıyla bu denklik ile her bir $x, y \in C$ elemanı C nin merkezinde olacağından

$$\{x + y - x - y, x + \omega(y) - x - \omega(y), x * y, x * \omega(y) \mid x, y \in C, * \in \Omega_2'\}$$

kümesiyle üretilmiş ideal 0 dır. Bu ise $[C, C] = 0$ olması anlamına gelir.

Tersine, $[C, C] = 0$ olsun. Bu durumda

$$\{x + y - x - y, x + \omega(y) - x - \omega(y), x * y, x * \omega(y) \mid x, y \in C, * \in \Omega_2'\}$$

kümesiyle üretilmiş ideal 0 dır. Bu ise kümedeki her bileşenin 0 olmasıyla mümkündür. Her bir bileşenin sıfır olması bu şekildeki her bir $x, y \in C$ elemanı C nin merkezinde olması demektir. Dolayısıyla C nin merkezi ile C çakışır. Yani C singülerdir.

Not: $\mathbb{C}$ deki komutatör tanımı Huq'un [38] komutatör tanımıyla denktir ve $\mathbb{C}$ deki singüler objelerin $\mathbf{Ab}(\mathbb{C})$ Birkhoff alt kategorisi ile ilgili komutatördür (bakınız [36]).

Teorem 4.1.8. [33] Herhangi bir $A \in \mathbb{C}$ objesi için $[A, A]$ komutatör ideali $A/[A, A]$ yı singüler yapan en küçük idealdir.

İspat: $A \in \mathbb{C}$ olsun. A nın $[A, A]$ komutatör ideali

$$\{x + y - x - y, x + \omega(y) - x - \omega(y), x * y, x * \omega(y) \mid x, y \in A, * \in \Omega_2'\}$$

kümesiyle üretilmiş olacağından, $x, y \in A$ için $A/[A, A]$ nın singüler olması bir önceki önerme gereği $[\bar{x} + [A, A], \bar{y} + [A, A]] = [\bar{x}, \bar{y}] + [A, A]$ nın sıfır olmasıyla mümkün olacağından ve $x, y \in A$ olduğundan $A/[A, A]$ yı singüler yapan en küçük ideal $[A, A]$ komutatör idelidir.

$\mathbf{Ab}(\mathbb{C})$ ile $\mathbb{C}$ deki singüler objelerin oluşturduğu full alt kategoriyi ifade edelim. Bu durumda her hangi bir C objesini onun singülerleştirmesi olan $C/[C, C]$ ye götüren

$\mathcal{S}ing: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Ab}(\mathbb{C})$ fonktörüne sahibiz. Ek olarak, $\mathbb{C}$ de $\mathbf{Ab}(\mathbb{C})$ Birkhoff çeşitliliğinin içermesi olan $inc: \mathbf{Ab}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ içermek fonktörüne sahibiz. Dolayısıyla,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathcal{S}ing} & \mathbf{Ab}(\mathbb{C}) \\ & \xleftarrow{inc.} & \end{array}$$

ile diagramatize edilmiş $\mathcal{S}ing \dashv inc.$ adjointleştirilmesine sahibiz.

4.2 Merkezsel Genişlemeler

Tanım 4.2.1. $C \in \mathbb{C}$ ve $A \in \mathbf{Ab}(\mathbb{C})$ olsun. A , $Z(B)$ nin alt objesi olmak üzere C nin A ile bir merkezsel genişlemesi

$$E: A \rightrightarrows B \rightrightarrows C$$

genişlemesidir [33].

Janelidze ve Kelly [40] de "admissible" alt kategorilerle ilgili bir tam kategoride merkezsel genişlemeler tanımı verildi. [41] den, her hangi bir $\mathbb{C}$ modifiye interest kategorisi Barr exact Mal'tsev kategorisidir ve bu yüzden $\mathbb{C}$ nin herhangi bir Birkhoff alt kategorisi $\mathbb{C}$ deki merkezsel genişlemelerin kategorisel teorisini düşünmemize yol açan admissible dir.

Eğer yatay morfizmler adjointleştirilmenin birimi ile verilmek üzere

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{S}ing(A) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}ing(f) \\ B & \longrightarrow & \mathcal{S}ing(B) \end{array}$$

diagramı pullback(geri çekim) ise, $f: A \rightarrow B$ genişlemesine [40] anlamında aşikar genişleme denir. Eğer

$$\begin{array}{ccc} E \times_B A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{\rho} & B \end{array}$$

pullback(geri çekim) diyagramında π_1 aşikar genişlemelerin morfizmi olmak üzere B nin $\rho: E \rightarrow B$ genişlemesi var ise, bu genişlemeye [40] in anlamında merkezsel genişleme denir.

Önerme 4.2.2. [33] Tanım 4.2.1, [40] de verilen merkezleştirme tanımı ile denktir. (Buradaki kategori $\mathbb{C}$ kategorisi alındı ve $\mathbf{Ab}(\mathbb{C})$ admissible alt kategorisi olarak düşünüldü.)

İspat:

$$A \rightrightarrows B \twoheadrightarrow C$$

$A \subset Z(B)$ ile $\mathbb{C}$ de bir genişleme olsun.

$$\begin{array}{ccc} B \times_C B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

pullback diyagramını düşünelim. Direkt hesaplamalar ile

$$\begin{array}{ccc} B \times_C B & \longrightarrow & \mathfrak{Sing}(B \times_C B) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Sing}(\pi_1) \\ C & \longrightarrow & \mathfrak{Sing}(C) \end{array}$$

diyagramı pullbacktir, yani, $B \times_C B$ ile $(b, b') \mapsto (b, \overline{(b, b')})$ şeklinde tanımlanan $C \times_{\mathfrak{Sing}(C)} \mathfrak{Sing}(B \times_C B)$ fiber çarpımı arasında bir izomorfizm vardır. Bu yüzden $\pi_1 : B \times_C B \rightarrow C$ morfizmi [40] kaynağındaki anlamda merkezleştirmeden elde edilmiş aşıkır genişlemedir.

Tersine, $\mathbb{C}$ de verilen

$$A \rightrightarrows B \xrightarrow{\vartheta_B} C$$

genişlemesi [40] daki anlamda merkezsiz genişleme olsun. O zaman

$$\begin{array}{ccc} E \times_C B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & C \end{array}$$

pullback diyagramında $\pi_1 : E \times_C B \rightarrow C$ morfizmi aşıkır genişleme olmak üzere

$E \xrightarrow{\vartheta_E} C$ genişlemesi vardır, bir başka deyişle,

$$\begin{array}{ccc} E \times_C B & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{Sing}(E \times_C B) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Sing}(\pi_1) \\ E & \longrightarrow & \mathfrak{Sing}(E) \end{array}$$

diyagramı pullbackdir. $\overline{(0,a)}$ ilgili koseti ifade etmek üzere, $\sigma(a) = \overline{(0,a)}$ şeklinde tanımlanırsa, π_1 nin $A \rightrightarrows E \times_C B$ çekirdeği içermesi ve $\text{Sing}(\pi_1)$ nin çekirdeği $\sigma : A \rightarrow \text{Sing}(E \times_C B)$ içermesidir. Biz $A \subset Z(B)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için biz her $a \in A, b \in B, \omega \in \Omega_1, * \in \Omega_2'$ için $b+a=a+b$, $b+\omega(a)=\omega(a)+b$, $b*a=0$, $b*\omega(a)=0$ olduğunu göstermeliyiz. Her $b \in B$ için, $\varphi_B(b) = \varphi_E(e)$ olacak şekilde $e \in E$ vardır.

$$\begin{aligned}
 \sigma(b+a-b-a) &= \overline{(0,b+a-b-a)} \\
 &= \overline{(0,b)} + \overline{(e,a)} - \overline{(0,b)} - \overline{(e,a)} \\
 &= \overline{(0,b)} - \overline{(0,b)} + \overline{(e,a)} - \overline{(e,a)} \\
 &= \overline{(0,0)}
 \end{aligned}$$

olduğu için, $b+a-b-a=0$ elde ederiz. Benzer hesaplamalar ile $A \subseteq Z(B)$ elde ederiz ki bu da istenendir.

5. (ÖN)ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER İÇİN UYGULAMALAR

Bu bölümde, modifiye interest kategorisinde (ön)çaprazlanmış modüllerin merkezsiz genişlemeleri, singülerlik ve merkez tanımlarını vereceğiz. Bunun için, biz (ön)çaprazlanmış modüllerin $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ ve $(\text{pre})\text{cat}^1$ -objelerin $(\mathbf{Pre})\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ kategorilerinin denkliğinden yararlanacağız. Grupların önçaprazlanmış modülleri durumunda (Lie cebirleri) merkezler, singülerlik ve merkezsiz genişlemelerin tanımı [10,34,35,42,43] kaynaklarında verildi.

5.1 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüllerin Merkezi ve Singülerliği

(C_1, C_0, ∂) önçaprazlanmış modül ve $(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ karşılık gelen precat^1 -obje olsun. $(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ objesinin

$$\begin{aligned} Z(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1) = \{ & (z_1, z_0) \in C_1 \rtimes C_0 \mid z_1 + z_0 \cdot c_1 = c_1 + c_0 \cdot z_1, z_1 + c_1 = c_1 + z_1, \\ & c_1 = z_0 \cdot c_1, c_1 = \partial(z_1) \cdot c_1, c_0 + \partial(z_1) = \partial(z_1) + c_0, \\ & (c_1 * z_0) + (c_0 * z_1) + (c_1 * z_0) = 0, (c_1 * z_1) = 0, (c_1 * z_0) = 0, \\ & (c_1 * \partial(z_1)) = 0, \partial(c_0 * z_1) = 0, \text{ her } (c_1, c_0) \in C_1 \rtimes C_0, * \in \Omega_2' \text{ için} \} \end{aligned}$$

şeklindeki $Z(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ merkezi idealdir.

$\mathcal{X}(Z(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1))$ görüntüsü (C_1, C_0, ∂) in (Z_1, Z_0, ∂) ön çaprazlanmış idealidir, burada

$$\begin{aligned} Z_1 = \{ & z_1 \in C_1 \mid z_1 + c_1 = c_1 + z_1, c_1 \cdot (\partial(z_1)) = c_1, \\ & c_0 + \partial(z_1) = \partial(z_1) + c_0, z_1 = c_0 \cdot z_1, c_1 * z_1 = 0, \\ & c_1 * (\partial(z_1)) = 0, c_0 * z_1 = 0, \text{ her } c_1 \in C_1, c_0 \in C_0, * \in \Omega_2' \text{ için} \} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Z_0 = \{ & z_0 \in C_0 \mid z_0 \cdot c_1 = c_1, z_0 + c_0 = c_0 + z_0, \\ & c_1 * z_0 = 0, c_0 * z_0 = 0, \text{ her } c_0 \in C_0, c_1 \in C_1, * \in \Omega_2' \text{ için} \} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Eğer (C_1, C_0, ∂) bir çaprazlanmış modül ise, bu durumda

$$\begin{aligned} Z_1 = \{ & z_1 \in C_1 \mid z_1 + c_1 = c_1 + z_1, c_0 + \partial(z_1) = \partial(z_1) + c_0, c_0 \cdot z_1 = z_1, \\ & c_1 * z_1 = 0, c_0 * z_1 = 0, \text{ her } c_0 \in C_0, c_1 \in C_1, * \in \Omega_2' \text{ için} \}, \end{aligned}$$

$$Z_0 = \{z_0 \in C_0 \mid z_0 \cdot c_1 = c_1, z_0 + c_0 = c_0 + z_0, c_1 * z_0 = 0, \\ c_0 * z_0 = 0, \text{ her } c_0 \in C_0, c_1 \in C_1, * \in \Omega_2' \text{ için}\}$$

şeklindedir.

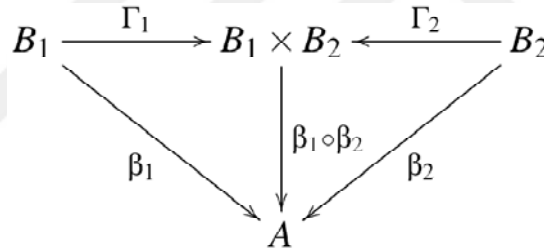
Tanım 5.1.1. (Z_1, Z_0, ∂) çaprazlanmış modülüne (C_1, C_0, ∂) çaprazlanmış modülünün merkezi denir.

Tezin geri kalan kısmında (C_1, C_0, ∂) çaprazlanmış modülünün merkezini $Z(C_1, C_0, \partial)$ ile ifade edeceğiz.

Merkezselleşen objeler ve hesaplanan morfizmleri Çarpım ve dual çarpım morfizmlerin görüntüleri var olan sıfır objeli kategorilerde Huq [38] tarafından tanımlandı.

$\Gamma_i : B_i \rightarrow B_1 \times B_2, i = 1, 2$ içermelerinin aşağıdaki özelliklerinin varlığından böyle bir kategoride direkt çarpımda aşağıdaki özellikler vardır.

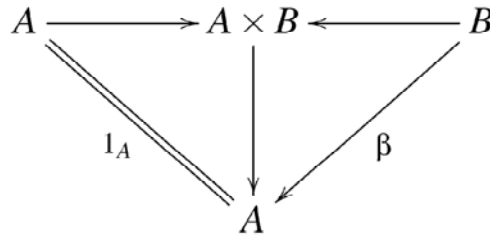
Tanım 5.1.2. $\Gamma_i, i = 1, 2$ direkt çarpımın içermelerini ifade etmek üzere, B



diyagramını değişmeli yapan

$$\beta_1 \circ \beta_2 : B_1 \times B_2 \rightarrow A$$

morfizmi var ise, $\beta_1 : B_1 \rightarrow A$ ve $\beta_2 : B_2 \rightarrow A$ iki dual bitiş (hedef) morfizmlerine değişmeli denir. Dolayısıyla, A üzerindeki birim morfizm β ile değişmeli ise, yani



diyagramı değişmeli ise $\beta : B \rightarrow A$ morfizmine merkezselleşen denir. Ek olarak, $\beta : B \rightarrow A$ monomorfizm ise, B ye A nın merkezselleşen alt objesi denir [38].

Tanım 5.1.3. Bir objenin merkezi monomorfizmlerin kümesi üzerinde var olan sıralama bağıntısıyla ilişkili olarak maksimal merkezselleşen alt objedir [38].

Önerme 5.1.4. [33] (C_1, C_0, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $Z(C_1, C_0, \partial |)$ objesi (C_1, C_0, ∂) nın maksimal alt objesidir.

İspat: $\alpha_1 : C_1 \times Z_1 \rightarrow C_1$, $\alpha_0 : C_0 \times Z_0 \rightarrow C_0$ sırasıyla $\alpha_1(c_1, z_1) = c_1 + z_1$, $\alpha_0(c_0, z_0) = c_0 + z_0$, şeklinde tanımlayalım, ve (β_1, β_0) bir içirme ve diğerleri önceki şekilde olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} (C_1, C_0, \partial) & \longrightarrow & (C_1 \times Z_1, C_0 \times Z_0, \partial \times \partial |) & \longleftarrow & Z(C_1, C_0, \partial |) \\ & \searrow & \downarrow (\alpha_1, \alpha_0) & \swarrow (\beta_1, \beta_0) & \\ & & (C_1, C_0, \partial) & & \end{array}$$

diyagramını düşünelim. Burada $Z(C_1, C_0, \partial |)$ merkezselsel alt obje olduğundan yukarıdaki diyagram değişmelidir.

(C_1, C_0, ∂) in herhangi bir $(H_1, H_0, \partial |)$ merkezselsel alt objesi için,

$$\begin{array}{ccccc} (C_1, C_0, \partial) & \longrightarrow & (C_1 \times H_1, C_0 \times H_0, \partial \times \partial |) & \longleftarrow & (H_1, H_0, \partial |) \\ & \searrow & \downarrow (\sigma_1, \sigma_0) & \swarrow (\mu_1, \mu_0) & \\ & & (C_1, C_0, \partial) & & \end{array}$$

diyagramını değiştirmeli yapan $(\mu_1, \mu_0) : (H_1, H_0, \partial |) \rightarrow (C_1, C_0, \partial)$ monomorfizmi ve $(\sigma_1, \sigma_0) : (C_1 \times H_1, C_0 \times H_0, \partial \times \partial |) \rightarrow (C_1, C_0, \partial)$ homomorfizmi vardır. Direkt hesaplamalar ile $Z(C_1, C_0, \partial |)$ çaprazlanmış modülünün (C_1, C_0, ∂) çaprazlanmış modülünün maksimal merkezselsel alt objesi olduğundan, $(\mu_1, \mu_0)(H_1, H_0, \partial |) \subseteq Z(C_1, C_0, \partial |)$, elde edilir ki bu da istenendir.

Sonuç 5.1.5. [33] Tanım 5.1.1, [38] kaynağında verilen tanıma denktir.

İspat: Tanım 5.1.3 ve Önerme 5.1.4 den açıktır.

Tanım 5.1.6. $\mathbb{C}$ de bir singüler (ön)çaprazlanmış modül onun merkeziyle denk olan çaprazlanmış modüldür.

5.2 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüllerin Komutatörü

Bu alt bölümde, [36] kaynağındaki ilgili komutatör gibi ve [38] kaynağındaki Huq 'un komutatörünü düzenleyen $\mathbb{C}$ modüllerdeki ön çaprazlanmış modüllerin tanımını verdik. (C_1, C_0, ∂) bir ön çaprazlanmış modül olsun. İlgili $(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)$ precat¹-objesinin komutatörü

$$\begin{aligned} & \{(x_1, x_0) + (y_1, y_0) - (x_1, x_0) - (y_1, y_0), (x_1, x_0) + (0, y_0) - (x_1, x_0) - (0, y_0), \\ & (x_1, x_0) + (0, \partial(y_1) + y_0) - (x_1, x_0) - (0, \partial(y_1) + y_0), (x_1, x_0) * (y_1, y_0), \\ & (x_1, x_0) * (0, y_0), (x_1, x_0) * (0, \partial(y_1) + y_0) \mid (x_1, x_0), (y_1, y_0) \in C_1 \rtimes C_0 \text{ ve } * \in \Omega_2'\} \end{aligned}$$

kümesiyle üretilmiş $[(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1), (C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)]$ idealdir.

$\mathfrak{X}([(C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1), (C_1 \rtimes C_0, \omega_0, \omega_1)])$ görüntüsü sırasıyla

$$\{x_0 \cdot x_1 - x_1, x_1 + y_1 - x_1 - y_1, x_1 * y_1, x_0 * x_1 \mid x_0 \in C_0, x_1, y_1 \in C_1\}$$

ve

$$\{x_0 + y_0 - x_0 - y_0, x_0 * y_0 \mid x_0, y_0 \in C_0\}$$

kümeleriyle üretilmiş idealler K_1 ve K_0 olmak üzere $(K_1, K_0, \partial \mid)$ objesidir.

Tanım 5.2.1. (C_1, C_0, ∂) bir ön çaprazlanmış modül olsun. $(K_1, K_0, \partial \mid)$ üçlüsüne (C_1, C_0, ∂) nin komütatör alt çaprazlanmış modülü denir [33].

(C_1, C_0, ∂) bir çaprazlanmış modül ise K_1

$$\{x_0 \cdot x_1 - x_1, x_0 * x_1 \mid x_0 \in C_0, x_1 \in C_1\}.$$

kümesiyle üretilmiş kümedir.

5.3 MCI daki (Ön)Çaprazlanmış Modüllerin Merkezsel Genişlemeleri

Bu kısımda biz, [40] kaynağındaki anlamda merkezleştirme ile ilgili tanım ve Önerme 4.2.2 e benzer olarak $\mathbb{C}$ deki (ön)çaprazlanmış modüllerin merkezsel genişlemelerini vereceğiz.

Tanım 5.3.1. (C_1, C_0, ∂_C) bir (ön)çaprazlanmış modül ve (A_1, A_0, ∂_A) $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ de bir singüler obje olsun. (C_1, C_0, ∂_C) in (A_1, A_0, ∂_A) ile bir merkezsel genişlemesi $(A_1, A_0, \partial_A) \rightarrow Z(B_1, B_0, \partial_B)$ nin bir çaprazlanmış ideali olmak üzere

$$(A_1, A_0, \partial_A) \twoheadrightarrow (B_1, B_0, \partial_B) \twoheadrightarrow (C_1, C_0, \partial_C)$$

genişlemesidir [33].

Sonuç olarak, (ön)çaprazlanmış modüllerin merkezsel genişlemelerinin sınıflandırması inşaa edilebilir. Çeşitli durumlar için [5,7,34,35,43-45] kaynaklarına bakınız.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

$\mathbb{C}$ herhangi bir modifiye interest kategori (MCI) olmak üzere, $\mathbb{C}$ nin herhangi bir A objesinin singülerliği $Z(A) = A$ olma şartıyla, yani A nın merkezi kendisine denk olması ile tanımlandı. $\mathbb{C}$ de bir A objesinin singüler olması için gerek ve yeter şartın $[A, A] = 0$ olduğu gösterildi.

$\mathbb{C}$ de herhangi B, C objeleri için komutator objesi belirlendi. Bu komutator objenin, Hug [38] tarafından verilen komutator tanımıyla denk olduğu gösterildi. Ayrıca bir $A \in \mathbb{C}$ objesi için $[A, A]$ komutator idealinin A/I bölüm objesini singüler yapan en küçük ideal olduğu ispatlandı.

$\mathbb{C}$ nin herhangi bir A objesinin merkezel genişlemesi tanımlandı ve bu tanımın [40] kaynağındaki merkezel genişleme tanımı ile denk olduğu gösterildi.

Son bölümde ise 4. bölümde tanımlanan kavramlar ve elde edilen sonuçlar ile $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ ve $(\mathbf{Pre})\mathbf{Cat}^1(\mathbb{C})$ kategorilerinin denkliği kullanılarak $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ kategorisinde merkez ve merkezel alt obje tanımları verildi ve merkezel objenin maksimal alt obje olduğu gösterildi. Daha sonra $(\mathbf{P})\mathbf{Xmod}(\mathbb{C})$ kategorisinde komutator alt çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış modüllerin merkezel genişlemesi kavramları tanımlandı.

Bunlarla birlikte, sonraki çalışmalar açısından modifiye interest kategorilerde çaprazlanmış kare veya daha genel olarak çaprazlanmış n -küpler ve $\mathbf{cat}^n$ -objeler tanımlanıp, bu yapılar için de singülerlik, komutator obje ve merkezel genişleme kavramları tanımlanıp karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Whitehead, J.H.C., 1946. Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy group", *Annals of Mathematics*, 47, 4, 806-810.
- [2] Whitehead, J.H.C., 1948. On operators in relative homotopy groups, *Ann. of Math.*, 49, 2, 610-640.
- [3] Whitehead, J.H.C., 1949. Combinatorial homotopy. II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 453-496.
- [4] Baues, H.J. and Minian, E.G., 2002. Crossed extensions of algebras and Hochschild cohomology, *Homology Homotopy Appl.*, 4, 2, 63-82.
- [5] Casas, J.M., Khmaladze, E. and Ladra, M., 2008. Crossed modules for Leibniz n -algebras, *Forum Mathematicum*, 20, 5, 841-858.
- [6] Casas, J.M., Casado, R.F., Khmaladze, E. and Ladra, M., 2015. More on crossed modules of lie, leibniz, associative and diassociative algebras, Adres: <http://arxiv.org/abs/1508.01147>
- [7] Casas, J.M., 1999. Universal central extension and the second invariant of homology of crossed modules in Lie algebras, *Comm. Algebra*, 27, 8, 3811-3821.
- [8] Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2009. Actor of a precrossed modules, *Comm. Algebra*, 37, 12, 4516-4541.
- [9] Casas, J.M., Ladra, M., and Pirashvili, T. 2004. Crossed modules for Lie-Rinehart algebras, *J. Algebra*, 274, 1, 192-201.
- [10] Casas, J.M., Datuashvili, T., Ladra, M. and Uslu, E.Ö., 2012. Actions in the catagory of precrossed modules in Lie algebras, *Comm. Algebra*, 40, 8, 2962-2982.

- [11] Datuashvili, T., 1995. Cohomologically trivial internal categories in categories of groups with operations, *Appl. Categ. Structures*, 3, 3, 221-237.
- [12] Dedecker, P. and Lue, A.S.-T., 1966. A non-abelian two-dimensional cohomology for associative algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 6, 1044-1050.
- [13] Lavendhomme, R. and Lucas, Th., 1996. On modules and crossed modules, *J. Algebra*, 179, 3, 936-963.
- [14] Lue, A.S.-T., 1968. Non-abelian cohomology of associative algebras, *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, 19, 2, 150-180.
- [15] Porter, T., 1987. Extensions, crossed modules and internal categories in categories of groups with operations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 30, 3, 373-381.
- [16] Lichtenbaum, S. and Schlessinger, M., 1967. The cotangent complex of a morphism, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 128, 41-70.
- [17] Gerstenhaber, M., 1964. On the Deformation of Rings and Algebras, *Annals of Mathematics Second Series*, 79, 1, 59-103.
- [18] Guin-Walery, D., and Loday, J.-L., 1981. "Obstruction à l'Excision en K-théorie Algébrique", in: *Algebraic K-Theory, Lecture Notes in Math.* 854, 179-216, Springer.
- [19] Loday, J.-L., 1982. Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *J. Pure Appl. Algebra*, 24, 179-202.
- [20] Brown, R. ve Spencer, C.B., 1976. G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen series A*, 79, 4, 296-302.
- [21] Ellis, G.J., 1988. Higher dimensional crossed modules of algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, 52, 3, 277-282.

- [22] Mucuk, O., Sahan, T., and Alemdar, N., 2015. Normality and Quotients in Crossed Modules and Group-groupoids, *Applied Categorical Structures*, 23, 3, 415-428.
- [23] Higgins, P.G., 1956. Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, 3, 366-416.
- [24] Orzech, G., 1972. Obstruction theory in algebraic categories I and II, *J. Pure Appl. Algebra*, 2, 287-314 and 315-340.
- [25] Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2009. Actor of an alternative algebra, Adres: <http://arXiv:math.RA/0910.0550v1>
- [26] Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2014. Left-right Noncommutative Poisson algebras, *Cent. Eur. J. Math.*, 12, 1, 57-78.
- [27] Loday, J.-L., 1995. Algèbres ayant deux opérations associatives. (digèbres), *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 321, 2, 141-146.
- [28] Loday, J.-L., 2001. Dialgebras, pp.7-66, in: *Dialgebras and related operads*, *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin.
- [29] Loday, J.-L. and Ronco, M.O., 2004. Trialgebras and families of polytopes, *Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K-theory*, *Contemp. Math.* 346, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 369-398.
- [30] Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2007. Actors in categories of interest, Adres: <http://arXiv:math/0702574v2>
- [31] Casas, J.M., Datuashvili, T. and Ladra, M., 2010. Universal strict general actors and actors in categories of interest, *Appl. Categ. Structures*, 18, 1, 85-114.
- [32] Boyacı, Y, Casas, J.M., Datuashvili, T. and Uslu, E.Ö., 2015. Actions in MCI with application to crossed modules, *Theory Appl. Categ.*, 30, 25, 882-908.

- [33] Uslu, E.Ö., Çetin, S. and Aslan, A.F., 2017, On crossed modules in modified categories of interest, *Math. Commun.*, 22, 103-119.
- [34] Arias, D., Casas, J.M. and Ladra, M., 2007. On universal central extensions of precrossed and crossed modules, *J. Pure Appl. Algebra*, 210, 1, 177-191.
- [35] Norrie, K.J., 1990. Actions and automorphisms of crossed modules, *Bull. Soc. Math. France*, 118, 2, 129-146.
- [36] Everaert, T. and Van der Linden, T., 2010. Relative commutator theory in semi-abelian categories, *Pre Publicacoes DMUC.*, 39, 10, 1-30.
- [37] Janelidze, G. and Kelly, G.M., 2000. Central extensions in universal algebra: a unification of three notions, *Algebra Universalis*, 44, 1-2, 123-128.
- [38] Huq, S.A., 1968. Commutator, nilpotency and solvability in categories, *Quart. J. Math. Oxford Series*, 19, 1, 363-389.
- [39] Borceux, F., Janelidze, G. and Kelly, G.M., 2005. On the representability of actions in a semi-abelian category, *Theory Appl. Categ.*, 14, 11, 244-286.
- [40] Janelidze, G. and Kelly, G.M., 1994. Galois theory and a general notion of central extension, *J. Pure Appl. Algebra*, 52, 135-161.
- [41] Janelidze, G., Marki, L. and Tholen, W., 2002. Semi-abelian categories, *J. Pure Appl. Algebra*, 168, 367-386.
- [42] Casas, J.M. and Ladra, M., 1998. The actor of a crossed module in Lie algebras, *Comm. Algebra*, 26, 7, 2065-2089.
- [43] Norrie, K.J., 1987. Crossed modules and analogues of group theorems, Ph. D. Thesis, King's College, England, UK.
- [44] Casas, J.M., 1990. Invariantes de modulos cruzados en algebras de Lie, Ph. D. Thesis, Universty of Santiago, Spain.
- [45] Casas, J.M., 1999. Crossed extensions of Leibniz algebras, *Comm. Algebra*, 27, 12, 6253-6272.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ekrem Serdar SERT
Doğum Tarihi ve Yeri : 31.07.1978 / İstanbul
E-posta adresi : ekremserdarsert@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Dumlupınar Üniversitesi Matematik Bölümü, 2000
Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2017

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

Matematik Öğretmeni Milli Eğitim Bakanlığı 2000 - Devam Ediyor