T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI DOĞRUSAL HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Alan BEKKO

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Eylül 2017

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Alan BEKKO tarafından yapılan "Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Doğrusal Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Prof. Dr.	M. Enver AYDIN
Üye :	Doç. Dr.	Necat POLAT
Üye :	Yrd. Doç. Dr.	Asıf YOKUŞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 20/10/2017

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2017

Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım **Doç. Dr. Necat Polat**’a şükranlarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI DOĞRUSAL HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alan BEKKO

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

Bu tezin ilk bölümünde tez konusuna ilişkin bazı açıklayıcı bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde literatür çalışmasına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, teorem, eşitlikler ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca ikinci mertebeden dalga denklemi için bazı teoremler ve titreşen şerit probleminin çözümü Fourier seri yöntemiyle ele alınmıştır.

Dördüncü bölüm bu tezin orijinal kısmıdır ve iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda, değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal hiperbolik diferansiyel denklemin çözümlerinin iyi konumluluğu çalışılmıştır. İkinci kısımda, bu problemin Fourier serisi şeklindeki çözümü verilmiştir.

Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İyi Konumluluk, Düzgün Çözüm, Yüksek Mertebeden Hiperbolik Denklemler.

ABSTRACT

EXISTING OF SOLUTION TO THE HIGHER ORDER LINEAR HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENT

MASTER OF SCIENCE THESIS

Alan BEKKO

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2017

In the first chapter of this thesis some explanatory information on the thesis topic was given.

In the second chapter, related literature was given.

In the third chapter, basic definitions, theorems, equalities and inequalities that will be used throughout the thesis are given. Moreover, some theorems on solutions of second order linear hyperbolic differential equations and the solution of vibrating string problem by Fourier series method were given.

The fourth chapter is the original part of this thesis and consists of two subsections. In the first part, well-posedness of solutions of higher order linear hyperbolic differential equations with variable coefficient is studied. In the second part, the solution of this problem was given by the form of Fourier series

In the fifth chapter, the obtained results are summarized and suggestions are presented.

Keywords: Well Posedness, Regular Solution, Higher Order Hyperbolic Equations

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik ve diğer bilimlerin birçok branşında kısmi diferansiyel denklemlerin sık meydana gelmelerinden dolayı kısmi diferansiyel denklemler teorisi matematik çalışma alanlarının en önemlilerindendir. Kısmi diferansiyel denklemler, sık sık doğanın temel kanunlarının formüllendirilmesinde, uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte kapsamlı değişik problemlerin matematiksel analizinde ve mühendislikte ortaya çıktıklarından dolayı matematiksel bilimlerde, özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi rol oynar. Matematiksel fiziğin birçok problemi uygun başlangıç ve / veya sınır koşullarıyla verilmiş kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanmaktadır. Bu problemler, başlangıç, sınır veya başlangıç ve sınır değer problemleri olarak bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler bütün fiziksel teoremlerin temelidir. Matematiksel disiplinler içerisinde de diferansiyel denklemler teorisi en önemlisidir (Myint-U ve Debnath 2007).

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler hiperbolik, parabolik ve eliptik olarak sınıflandırlmaktadır. Daha yüksek mertebeliler için de benzer sınıflandırma mevcuttur.

İki veya daha yüksek mertebeli kısmi diferansiyel denklemleri içeren fazla sayıda teorik ve uygulamalı çalışmalar mevcuttur. Bu denklemleri içeren bazı klasik ve klasik olmayan problemlerin çözümleri için (Myint-U ve Debnath 2007), (Amanov and Yuldasheva 2009), (Amanov and Ashralyev 2014), (Sabitov 2015), (Amanov 2015), Kozhanov and Pinigina 2017 ve bunların içindeki referanslara bakılabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Önceki Çalışmalar adını alan ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili literatür özeti verilmiştir.

Materyal ve Metot olarak adlandırılan üçüncü bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, tanımlara, uzaylara, eşitsizliklere ve teoremlere yer verilmiştir. Yine bu bölümde ikinci mertebeden dalga denklemini içeren başlangıç ve sınır değer problemi için bazı teoremler verildikten sonra ikinci mertebeden yalın haldeki dalga denklemini içeren bir başlangıç ve sınır değer probleminin değişkenlerin ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümü yer almıştır.

Araştırma Bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümde sınırlı bölgede değişken katsayılı yüksek mertebeden aşağıdaki denklem için

$$Lu = \left(t^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = f(x,t) \tag{1.1}$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemin lokal iyi konumluluğu verildikten sonra Fourier serisi yöntemiyle çözümü elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, tezde elde edilen temel sonuçlar verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Birçok kısmi diferansiyel denklemin hiperbolik, parabolik ve eliptik tiplerinden biri olduğu bilinmektedir. İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması konik denklemlerin sınıflandırılması kaynaklıdır. En yalın haldeki kısmi diferansiyel denklemler dalga, ısı ve Laplace denklemleri olarak sırasıyla aşağıdadır:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ u_t - k u_{xx} &= 0, \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Matematiksel fiziğin birçok problemi kısmi diferansiyel denklemleri özellikle yukarıda verilenleri içeren problemlere indirgenirler. İkinci merteeden kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemler çeşitli yönlerden çalışılmıştır. Ancak yüksek mertebeli denklemler için bu yönlü çalışmalar azdır.

Amanov and Yuldasheva 2009 da $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini gerçekleştirdiler.

Amanov and Ashyralyev 2014 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için başlangıç ve sınır değer ile sınır değer problemlerinin çözülebilirliğinin k nın tekliği ve çiftliğine bağlı olduğunu gerçekleştirdiler.

Amanov 2015 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi.

Sabitov 2015 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 1$ tamsayısı durumunda

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} - \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi.

Kozhanov and Pinigina 2017 de Ω, R^n de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$(-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} + \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x) u_{x_j}) - a(x) u = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi.

3. MATERYAL VE METOT

Sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar, eşitlikler ve eşitsizlikler için Polat 2005, Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011 kaynaklarına bakınız. Ayrıca tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak olan teorem ve metotlara da bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. İkinci Mertebeden Dalga Denklemi İçin Bazı Teoremler

$U \subset R^n$ açık ve ∂U sınırına sahip sınırlı bir bölge, $T > 0$ olmak üzere $U_T = U \times (0, T]$ olsun.

$$\begin{cases} u_{tt} - Lu = f, & (x,t) \in U_T, \\ u = 0, & (x,t) \in \partial U \times (0,T], \\ u = g, & (x,t) \in U \times \{t=0\}, \\ u_t = h, & (x,t) \in U \times \{t=0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer problemi verilsin. Burada $f : U_T \longrightarrow R$, $g, \ h : U \longrightarrow R$ verilmiş fonksiyonlar ve $u = u(x,t)$ olmak üzere $u : \overline{U}_T \longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyon ve L sembolü, her bir t zamanı için ikinci mertebeden yer değişkenlerine göre doğrusal bir kısmi diferansiyel operatördür.

Teorem 3.1.1. (Gelişmiş Düzenlilik)

$g \in H_0^1(U), \ h \in L^2(U), \ f \in L^2(0,T; L^2(U))$ koşulları altında $u \in L^2(0,T; H_0^1(U))$ ($u' \in L^2(0,T; L^2(U))$ ve $u'' \in L^2(0,T; H^{-1}(U))$ ile birlikte), (3.1) probleminin zayıf çözümü ise

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(U)), u' \in L^\infty(0,T; L^2(U))$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T}(\|u(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u'(t)\|_{L^2(U)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}) \\ &\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}\right). \end{aligned}$$

Burada C sabiti U, T ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Ayrıca, $g \in H^2(U), \ h \in H_0^1(U), \ f' \in L^2(0,T; L^2(U))$ koşulları altında

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(U)), u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(U)),$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(U)),\ u''' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}(\|u(t)\|_{H^2(U)} + \|u'(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u''(t)\|_{L^2(U)} + \|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))})$$

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U)} + \|g\|_{H^2(U)} + \|h\|_{H^1(U)}\right).$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.1.2. (Daha Yüksek Düzenlilik)

$g \in H^{m+1}(U),\ h \in H^m(U),\ \frac{d^kf}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{m-k}(U))$ (k= 0,...,m) ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$\frac{d^ku}{dt^k} \in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)) \quad \text{(k=0,...,m+1)}$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^ku}{dt^k}\right\|_{H^{m+1-k}(U)} \le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^kf}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{m-k}(U))} + \|g\|_{H^{m+1}(U)} + \|h\|_{H^m(U)}\right).$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.1.3.

$g \in H^{m+1}(U),\ h \in H^m(U),\ f \in L^1(0,T;H^m(U))$ (k= 0,...,m) ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$u \in C(0,T;H^{m+1}(U)) \cap C^1(0,T;H^m(U)) \cap C^2(0,T;H^{m-1}(U))$$

tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.1.4. (Sonsuz Diferansiyellenebilirlik)

$g,h \in C^\infty(\overline{U}),\ f \in C^\infty(\overline{U_T})$ ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$u \in C^\infty(\overline{U_T})$$

tek çözüme sahiptir.

3.2. Titreşen Şerit Problemi

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0, && 0<x<l, && t>0, \\ u(x,0) &= f(x), && 0\le x\le l, && \\ u_t(x,0) &= g(x), && 0\le x\le l, && \\ u(0,t) &= 0, && && t\ge 0, \\ u(l,t) &= 0, && && t\ge 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

probleminin çözümünü değişkenlerin ayrılması yöntemiyle arayalım. Bunun için

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{3.3}$$

şeklinde ve aşikar olmayan çözüm aranırsa λ ayrılma sabiti olmak üzere

$$XT^{''}=c^2X^{''}T \Rightarrow \frac{X^{''}}{X}=\frac{1}{c^2}\frac{T^{''}}{T}=\lambda$$

ve buradan

$$X^{''}-\lambda X=0 \tag{3.4}$$

$$T^{''}-c\lambda T=0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Sınır koşullarından elde edilen $X(0)=0$ ve $X(l)=0$ ile birlikte $X(x)$ i belirlemek için

$$\begin{aligned} X^{''}-\lambda X &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(l) &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

özdeğer problemini öncelikle çözmeliyiz. $\lambda\ge 0$ durumunda aşikar çözüm olup $\lambda<0$ durumunda

$$X(x)=A\cos\sqrt{-\lambda}x+B\sin\sqrt{-\lambda}x$$

genel çözümden $X(0)=0$ koşulundan $A=0$ ve $X(l)=0$ koşulundan

$$B\sin\sqrt{-\lambda}l=0$$

bulunur. Eğer $B = 0$ ise aşikar çözüm vardır. Aşikar olmayan çözüm için

$$\sin \sqrt{-\lambda} l = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\sqrt{-\lambda} l = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

veya

$$-\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$$

bulunur. λ nın sonsuz farklı değerler kümesi için problem aşikar olmayan çözüme sahiptir. λ_n nin bu değerleri problemin özdeğerleri ve

$$\sin(\frac{n\pi}{l})x, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

ise tekabul eden öz fonksiyonları olarak adlandırılır.

(3.6) probleminin çözümü

$$X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{l})x$$

dır.

$\lambda = \lambda_n$ için (3.5) denkleminin genel çözümü, C_n ve D_n keyfi sabitler olmak üzere

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi c}{l} t$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $a_n = B_n C_n$ ve $b_n = B_n D_n$ olmak üzere (3.3) her n için yazılabilen

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

fonksiyonları (3.2) yi sağlar. (3.2) deki denklem doğrusal ve homojen olduğundan doğrusal birleşim ilkesinden

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{3.7}$$

sonsuz serisi de, yakınsak ve x ve t ye göre iki defa sürekli diferansiyellenebilir olması koşulları altında, bir çözümdür. Serinin her bir terimi (3.2) deki sınır koşullarını sağladığından seri de bunları sağlar. Sağlanması gereken iki başlangıç koşulu kaldı. Bu koşullardan a_n ve b_n sabitlerini belirlemeliyiz.

İlk olarak (3.7) serisini t e göre diferansiyeli

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi c}{l} t + b_n \cos \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

dır. (3.2) deki başlangıç koşullarını uygularsak

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ u_t(x, 0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ Fourier sinüs serileri cinsinden yazlabilirse bu denklemler sağlanır. Katsayılar da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde olur.

(3.8) de verilen a_n ve b_n katsayıları ile birlikte (3.7) serisi, (3.2) probleminin çözümüdür.

Yukarıda verilen (3.7) çözümü biçimsel çözüm olarak adlandırılır. Bazı koşullar altında bunun çözüm olduğunu göstermemiz gerekir:

$f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ de sürekli ve $f(0) = f(l) = 0$ ise

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

serisi $[0, l]$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(3.2) deki diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğinden de $f''(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ de sürekli ve $f''(0) = f''(l) = 0$ olmalıdır.

$g(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ de sürekli ve $g(0) = g(l) = 0$ ise

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

serisi $[0, l]$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(3.2) deki diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğinden de $g'(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ de sürekli olmalıdır.

Yukarıdaki varlık koşulları altında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir $u(x, t)$ fonksiyonu (3.2) probleminin çözümü ise tektir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Doğrusal Hiperbolik Diferansiyel Denklemler

$\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, 0 < t < T\}$ dikdörtgensel bölgesinde p ve T pozitif gerçel sayılar ve k belirli doğal sayı olmak üzere

$$\begin{cases} Lu = \left(t^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \\ \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(0,t) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(p,t) = 0, \quad m = 0,1,2,...,k-1, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.1}$$

başlangıç-sınır değer problemi verilsin. Burada $f : \Omega \longrightarrow R$ verilmiş fonksiyon ve $u = u(x,t)$ olmak üzere $u : \overline{\Omega} \longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyondur. Yukarıda verilen problemin $u(x,t)$ çözümü ile ilgileneceğiz.

Aşağıdaki uzayları tanımlayalım:

$$V(\Omega) = \left\{ u(x,t) : u \in C_{x,t}^{2k-2,1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega); (4.1) \text{ deki koşulları sağlasın.} \right\}$$

$$W(\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} f(x,t) : f \in C_{x,t}^{2k,0}(\overline{\Omega}), \ \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}} \in L_2(\Omega); \ \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} = 0 \ \ x = 0 \text{ da} \\ \text{ve } \ x = p, \, m = 0,1,..., \frac{2k-1}{2} \end{array} \right\}$$

Tanım 4.1.1. $f(x,t) \in C(\Omega)$ olmak üzere (4.1) probleminin $u(x,t) \in V(\Omega)$ çözümüne düzenli çözüm denir.

Lemma 4.1.2. $u(x,t)$ (4.1) probleminin düzenli çözümü olsun. Ayrıca

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^m \partial t}, \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x^{2k-1}}, \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad m = 0,1,...,k$$

türevleri ve $f(x,t)$ fonksiyonu $C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ sınıfından olsun. O halde sadece k ve T ye bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}$$

kestirimi sağlanır. Burada

$$\|u\|^2_{W_2^{k,1}(\Omega)} = \sum_{n=0}^{k} \left\| t^{\frac{m}{2k} n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

dır.

İspat.

$$t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu$$

denkleminin her iki tarafı $\frac{\partial u}{\partial t}$ ile çarpılır ve $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid 0 < x < p,\ \ 0 < t < \tau;\ \ \tau < T\}$ bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} \left(t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dxdt = \int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} Ludxdt \tag{4.2}$$

elde edilir.

(4.2) denkleminde elde edilen kismi türevlerin çarpımı aşağıdaki gibi bulunur;

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial t \partial x^m} \frac{\partial^{2k-1-m} u}{\partial x^{2k-1-m}} \right) + (-1)^k \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

(4.1) deki başlangıç ve sınır koşullarıyla (4.2) denklemi

$$(-1)^k \frac{1}{2} \int_0^p t^m \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]^2 dx + (-1)^k \frac{1}{2} \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2 dx = \int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} Ludxdt$$

haline gelir. Yukarıdaki son denklemin her iki tarafı $2\,(-1)^k$ ile çarpılırsa

$$\int_0^p t^m \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]^2 dx + \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2 dx = 2\,(-1)^k \int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} Ludxdt$$

$$\int_0^p t^m \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]^2 dx + \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2 dx \le 2 \int_0^\tau \int_0^p |u_t Lu|\, dxdt$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int_0^p t^m \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]^2 dx \le 2 \int_0^\tau \int_0^p |u_t Lu|\, dxdt,$$

$$\int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2 dx \le 2 \int_0^\tau \int_0^p |u_t Lu|\, dxdt$$

eşitsizliklerinin geçerliliği açıktır.

İntegralin üst sınırı τ yu T ile değiştirirsek

$$\int_0^p t^m \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dx \leq 2\int_0^T\int_0^p |u_t Lu|\, dxdt, \tag{4.3}$$

$$\int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dx \leq 2\int_0^T\int_0^p |u_t Lu|\, dxdt \tag{4.4}$$

elde edilir.

(4.3) ve (4.4) yi τ ya göre 0 dan T ye integrallersek

$$\int_0^T\int_0^p \left[t^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dxd\tau \leq 2T\int_0^T\int_0^p |u_t Lu|\, dxdt, \tag{4.6}$$

$$\int_0^T\int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dxd\tau \leq 2T\int_0^T\int_0^p |u_t Lu|\, dxdt \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.5)-(4.7) denklemlerinin toplamından

$$\left\|t^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \leq 4T\int_0^T\int_0^p |u_t Lu|\, dxdt$$

elde edilir.

Eşitsizliğin sağ tarafına

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|b|^2$$

eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\left\|t^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 &\leq \frac{4T\epsilon}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{4T}{2\epsilon}\|Lu\|^2 \\
2\left\|t^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 &\leq 4T\epsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{4T}{\epsilon}\|Lu\|^2 \\
\left\|t^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 &\leq 4T\epsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{4T}{\epsilon}\|Lu\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\epsilon = \frac{1}{4T}$ seçilirse

$$\left\|t^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \leq 16T^2\|Lu\|^2 \tag{4.8}$$

elde edilir.

$$u^2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \tau}\left[u^2(x,\tau)\right] d\tau = 2\int_0^t u(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \leq 2\int_0^t \left|u(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}\right| d\tau$$

yukarıdaki eşitsizliği x e göre 0 dan p ye integrallersek

$$\begin{aligned}
\int_0^p u^2(x,t)dx &\leq 2\int_0^p\int_0^T \left|u(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\right| dtdx \\
\int_0^p u^2(x,t)dx &\leq 2\left\|u\right\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitsizliği t ye göre 0 dan T ye integrallersek

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^p u^2(x,t)dxdt &\leq 2\left\|u\right\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\int_0^T dt \\
\left\|u\right\|^2 &\leq 2T\left\|u\right\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafını $\left\|u\right\|$ ya bölüp karesini alırsak

$$\left\|u\right\|^2 \leq 4T^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2$$

elde edilir.

(4.8) denklemini göz önüne alırsak

$$\left\|u\right\|^2 \leq 64T^2\left\|Lu\right\|^2 \tag{4.9}$$

elde edilir.

(4.8) ve (4.9) eşitsizliklerini toplarsak

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 &\leq 64T^4 \|Lu\|^2 + 16T^2 \|Lu\|^2 \\
\|u\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 &\leq (64T^4 + 16T^2) \|Lu\|^2 \\
\|u\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 &\leq C_1 \|Lu\|^2 \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C_1 = 64T^4 + 16T^2$ dır.

$\left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|^2$, $m = 1, 2, ..., k-1$ normuna ait kestirim elde etmek için aşağıdaki eşitsizliği (Amanov 2015)

$$\left\| t^{\frac{m}{2k}n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left\| t^{\frac{m}{2k}(n-1)} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| t^{\frac{m}{2k}(n+1)} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \right\|^2 \qquad (4.11)$$

kullanalım. Eğer (4.11) eşitsizliğini n ye göre 1 den $k-1$ e kadar toplarsak ve (4.10) eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\left\| t^{\frac{m}{2k}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2k}(k-1)} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|^2 \leq C_1 \|Lu\|^2 \qquad (4.12_1)$$

elde edilir.

Aynı şekilde (4.11) eşitsizliğini n ye göre 2 den $k-2$ ye kadar toplarsak ve (4.12_1)

eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\| t^{\frac{m}{k}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2k}(k-2)} \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}} \right\|^2 \leq C_1 \|Lu\|^2 \qquad (4.12_2)$$

elde edilir.

Yukarıdaki şekilde devam edilirse

$$\left\| t^{\frac{m}{2k}3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2k}(k-3)} \frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}} \right\|^2 \leq C_1 \|Lu\|^2 \qquad (4.12_3)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\left\| t^{\frac{m}{2k}\frac{k-1}{2}} \frac{\partial^{\frac{k-1}{2}} u}{\partial x^{\frac{k-1}{2}}} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2k}\frac{k+1}{2}} \frac{\partial^{\frac{k+1}{2}} u}{\partial x^{\frac{k+1}{2}}} \right\|^2 \leq C_1 \|Lu\|^2 \qquad (4.12_{k-1})$$

elde edilir.

(4.12_1) , (4.12_2) , ..., (4.12_{k-1}) eşitsizliklerini toplarsak

$$\sum_{n=0}^{k-1} \left\| t^{\frac{m}{2k}n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 \leq \frac{k+1}{2} C_1 \left\| Lu \right\|^2 \tag{4.13}$$

elde edilir.

(4.13) ve (4.10) eşitsizliğini toplarsak

$$\sum_{m=1}^{k-1} \left\| t^{\frac{m}{2k}n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 + \left\| u \right\|^2 + \left\| t^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \leq \frac{k+1}{2} C_1 \left\| Lu \right\|^2$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k} \left\| t^{\frac{m}{2k}n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 &\leq (k+3)(32T^4 + 8T^2 \left\| Lu \right\|^2 \\ \left\| u \right\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} &\leq C \left\| Lu \right\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlandı.

Sonuç 4.1.2. Lemma 4.1.1 den (4.1) probleminin tek çözüme sahip olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.3. Lemma 4.1.1 den (4.1) probleminin $f(x,t)$ ye sürekli olarak bağımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.3. Lemma 4.1.1, Sonuç 4.1.2 ve Sonuç 4.1.3 den (4.1) probleminin iyi konumlu olduğu çıkar.

4.2. (4.1) Probleminin Fourier Serisi Şeklindeki Çözümü

(4.1) probleminin Fourier serisi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \tag{4.14}$$

şeklinde düzenli çözümünü arayalım. Burada $L_2(0,p)$ de $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, n \in \mathbb{N}$ özfonksiyonları tam ortonormal sistem oluşturur. $u(x,t)$ nin (4.1) deki sınır koşullarını sağladığı açıktır.

$f \in W(\Omega)$ fonksiyonunu $X_n(x)$ cinsinden

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \tag{4.15}$$

seriye açarsak

$$f_n(t) = \int_0^p f(x,t) X_n(x) dx \tag{4.16}$$

olur.

(4.14) ve (4.15) i (4.1) denkleminde yazarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^m u_n(t) X_n^{(2k)}(x) + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

olur.

$X_n^{(2k)}$ yi bulalım:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x \\ X_n'(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

$$k = 1 \ : \qquad X_n''(x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^2 \sin \lambda_n x$$

$$X_n'''(x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^3 \cos \lambda_n x$$

$$k = 2 \ : \qquad X_n^{(4)}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^4 \sin \lambda_n x$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$X_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^{2k} \sin \lambda_n x = (-1)^k \lambda_n^{2k} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x = (-1)^k \lambda_n^{2k} X_n(x)$$

olup bunu yerine yazar ve $(-1)^k$ ile çarparsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^m u_n(t) (-1)^k \lambda_n^{2k} X_n(x) + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$u_n''(t) + t^m \lambda_n^{2k} u_n(t) = (-1)^k f_n(t), \qquad 0 < t < T \tag{4.17}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

(4.1) in başlangıç koşulları aşağıdaki hale gelir:

$$u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0\ . \tag{4.18}$$

(4.17) ve (4.18) probleminin operatörün çarpanlarına ayrılması yöntemiyle çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\left(D_t - i\lambda_n^k t^{\frac{m}{2}}\right)\left(D_t + i\lambda_n^k t^{\frac{m}{2}}\right) u_n(t) = (-1)^k f_n(t)$$

$$u_n(t) = \exp\left(i\frac{2}{m+2}\lambda_n^k t^{\frac{m}{2}+1}\right)\int_0^t \exp\left(i\frac{4}{m+2}\lambda_n^k s^{\frac{m}{2}+1}\right) \times$$
$$\int_0^s (-1)^k f_n(\tau)\exp\left(i\frac{-2}{m+2}\lambda_n^k \tau^{\frac{m}{2}+1}\right) d\tau ds. \tag{4.19}$$

Lemma 4.2.1. Eğer $f \in W(\Omega)$ ise, her $t \in [0,T]$ için $f_n^{(2k+1,0)}(t) = \int_0^p \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$|u_n(t)| \le \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\lambda_n^{2k+1}}\ \left\| f_n^{(2k+1,0)}\right\|_{L_2(0,T)}.$$

İspat. (4.16) nın x e göre kısmi integralini alırsak

$$f_n(t) = \left(f(x,t)\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{-1}{\lambda_n}\cos\lambda_n x\right)_0^p + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^p \frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$$

elde edilir. $f \in W(\Omega)$ olduğundan eşitliğin sağ tarafının birinci kısmı sıfır olur. Buna göre

$$f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^p \frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$$

olur. 2. defa x e göre kısmi integral alırsak

$$f_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n^2}\int_0^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x dx$$

olur. 3. defa x e göre kısmi integral alırsak

$$f_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n^3} \int_0^p \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$$

olur. 4. defa x e göre kısmi integral alırsak

$$f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^p \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x dx$$

olur. Nihayet x e göre 2k+1. defa kısmi integral alırsak

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\lambda_n^{2k+1}} \left| f_n^{(2k+1,0)}(t) \right| \tag{4.20}$$

olur.

(4.19) da karmaşık üstel fonksiyonun uzunluğu, (4.20) ve Cauchy Schwarz Bunyakowsky eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \int_0^t \int_0^s |f_n(\tau)| \, d\tau ds \leq \int_0^t |f_n(\tau)| \, |t-\tau| \, d\tau \leq \frac{T}{\lambda_n^{2k+1}} \int_0^T f_n^{(2k+1,0)}(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\lambda_n^{2k+1}} \left\| f_n^{(2k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)}. \end{aligned}$$

(4.17) denkleminden

$$u_n''(t) = (-1)^k f_n(t) - t^m \lambda_n^{2k} u_n(t) \tag{4.21}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2. Eğer $f \in W(\Omega)$ ise o zaman (4.1) probleminin düzenli çözümü vardır.

İspat. (4.14) serisinin ve aşağıdaki (4.24) ve (4.25) serilerinin düzgün ve mutlak yakınsaklığını ispatlayalım:

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n^{(2k)}(x)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \, \lambda_n^{2k} u_n(t) X_n(x) \tag{4.22}$$

$$(-1)^k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) - t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}$$

$$(-1)^k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) - t^m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \lambda_n^{2k} u_n(t) X_n(x). \tag{4.23}$$

(4.23) teki ilk seri $f \in W(\Omega)$ olduğundan yakınsaktır. (4.23) teki ikinci seri (4.22) serisiyle aynıdır. Bu nedenle (4.22) serisinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu gösterirsek bu aynı zamanda (4.14) ve (4.23) serilerinin düzgün ve mutlak yakınsak olduğu çıkar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2k} |u_n(t)|$$

serisi (4.22) için baskın seridir. Lemma 4.2.1, Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2k} |u_n(t)| &\leq T^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left\| f_n^{(2k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)} \leq \frac{p}{\pi} T^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(2k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)}} \\
&\leq \frac{p}{\sqrt{6}} T^{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}} \right\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Bu nedenle (4.22) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(4.22) serisini t^m ile çarpar ve (4.23) ile toplarsak (4.14) çözümünün (4.1) denklemini sağladığı çıkar.

$X_n(x)$ fonksiyonunun özelliklerinden dolayı (4.14) çözümü (4.1) deki sınır koşullarını sağlar.

(4.19) ve (4.19) un türevinden (4.14) çözümü (4.1) deki başlangıç koşullarını sağlar.

Böylece teorem ispatlandı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan Araştırma Bulguları bölümünde alınan problemin iyi konumluluğu gösterilmiştir. Bu problemdeki değişken katsayılı terimin x e bağlı olduğu durumları için de iyi konumluluk çalışılabilir. Yine bu problemin damping terimli bazı durumları için de iyi konumluluk çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Amanov, D., Yuldasheva, A.V., 2009. Solvability and Spectral Properties of Boundary Value Problems for Equations of Even Order, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 3(2): 227-248.

Amanov, D., Ashyralyev, A., 2014. Well-posedness of boundary-value problems for partial differential equations of even order, Electronic Journal of Differential Equations, 2014 (108), 1-18.

Amanov, D., 2015. Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation, 268, 1282-1291.

Brezis, H. 2011. Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. Springer.

Evans, L. C. 1998. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons. India.

Kozhanov, A.I., Pinigina, N.R. 2017, Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations, Mathematical Notes, 101(3), 467–474.

Myint-U, T. ve Debnath, L., 2007. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser Boston.

Polat, N. 2005. Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu (Blow Up), Doktora Tezi.

Sabitov, K.B., 2015. The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations, Mathematical Notes, 97 (2), 255–2675.

.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Suriye'nin Haseki ilinin Dırbesiyi ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Dırbesiyi'de tamamladım. 2011 yılında Furat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	ALAN BEKKO
ÖĞRENCİ NO	13804302
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI DOĞRUSAL HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	31
BENZERLİK ORANI	% 14
RAPORLAMA TARİHİ	20/12/2017

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 31 sayfalık kısmına ilişkin, 20/12/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14 dır.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☐ Alıntılar hariç/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)
ALAN BEKKO
(Öğrencinin Adı Soyadı)

(İmza)	(İmza)
20/12/2017	20/12/2017
Prof. Dr. Necat POLAT	Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**