



**FUZZY SAYI DİZİLERİNİN
KABA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

Berrak Ülkü ARSLAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

2021

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

**FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA LACUNARY İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI**

BERRAK ÜLKÜ ARSLAN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

Yozgat-2021

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Berrak Ülkü ARSLAN

02/07/2021

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FUZZY SAYI DİZİLERİNİN
KABA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI
Berrak Ülkü ARSLAN
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, istatistiksel yakınsaklık ve kaba istatistiksel yakınsaklık kavramları hakkında temel bilgiler verilmiştir. Ayrıca, fuzzy sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığından bahsedilerek literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde tezde yararlanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise fuzzy sayı dizilerinin kaba lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve kaba lacunary istatistiksel Cauchy dizisi kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, kaba lacunary istatistiksel limit kümesi ile dizinin kaba lacunary istatistiksel limit infimumu ve istatistiksel limit supremumu tanımlanarak aralarındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak, kaba lacunary istatistiksel limit kümesinin özellikleri incelenmiştir..

2021, 32 SAYFA.

ANAHTAR KELİMELELER: Fuzzy Sayı Dizileri, Kaba Yakınsaklık, Kaba İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, Kaba Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, Kaba Lacunary İstatistiksel Limit İnfimum, Kaba Lacunary İstatistiksel Limit Supremum.

ABSTRACT
MASTER THESIS
ROUGH LACUNARY CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUZZY
NUMBERS

Berrak Ülkü ARSLAN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: Assist. Prof. Funda BABAARSLAN

This thesis consists of three parts. In the first section, the definitions about the concepts of statistical convergence and rough statistical convergence are given. In addition, the concept of lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers is recalled and a literature summary is given. In the second part, the basic definitions and theorems that will be used in the thesis are given. In the third chapter, the ideas of rough lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and the ideas of rough lacunary statistical Cauchy sequence are defined. In addition, the concepts of rough lacunary statistical limit sequences and the rough lacunary statistical limit infimum and statistical limit supremum of the sequences were defined according to the degree of roughness. The relationship between them was examined. Finally, the properties of the rough lacunary statistical limit set are shown.

2021, 32 pages.

KEYWORDS: Sequences of Fuzzy Numbers, Rough Convergence, Rough Statistical Convergence, Lacunary Statistical Convergence, Rough Lacunary Statistical Convergence, Rough Lacunary Statistical Limit Infimum, Rough Lacunary Statistical Limit Supremum.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, fuzzy sayı dizilerinin kaba lacunary istatistiksel yakınsaklığı hakkında bilgi verilmiştir.

Bu tez çalışmanın tamamlanması sürecinde başta, benden desteğini esirgemeyen, çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli danışman hocam

Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca bu zaman zarfında her zaman maddi ve manevi yanımda olan, bana moral veren annem AYŞE KAYA, babam Mustafa KAYA, eşim İsmail ARSLAN ve canımın parçaları çocuklarım Hüseyin Bartu ve Hasan Alp'e canı gönülden teşekkür ederim.

Berrak Ülkü ARSLAN

02/07/2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. İstatistiksel Yakınsaklık.....	2
2.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı	3
2.3. Fuzzy Sayı Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı.....	7
3. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	8
3.1. Normlu Uzaylarda Kaba Yakınsaklık ve Kaba İstatistiksel Yakınsaklık	8
3.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba Yakınsaklığı ve Kaba İstatistiksel Yakınsaklığı	9
3.3. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı	10
SONUÇ	21
KAYNAKLAR	22
ÖZGEÇMİŞ	24

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

\mathbb{R}

\mathbb{N}

$L(\square)$

$\delta(K)$

Λ_x

Γ_x

θ

$\delta_\theta(K)$

$\Gamma_\theta(X)$

$st-LIM^r X$

$S_\theta-LIM^r X_k$

Açıklamalar

Reel Sayılar Kümesi

Pozitif Tamsayılar Kümesi

Fuzzy Sayılar Kümesi

K Kümesinin Doğal Yoğunluğu

$_x$ Dizisinin İstatistiksel Limit Noktaları Kümesi

$_x$ Dizisinin İstatistiksel Yığılma Noktaları Kümesi

Lacunary Dizi

K Kümesinin Lacunary Yoğunluğu

X Fuzzy Sayı Dizisinin İstatistiksel Yığılma Noktalarının Kümesi

X Fuzzy Sayı Dizisinin Kaba İstatistiksel Limit Kümesi

X Fuzzy Sayı Dizisinin Kaba Lacunary İstatistiksel Limit Kümesi

1.GİRİŞ

“Bir nesne bir kümenin elemanıdır ya da değildir” mantığına alternatif olarak, 1965 yılında Zadeh, nesnelerin kümeye ait olma durumlarının üyelik dereceleri yardımıyla ifade edileceğini göstermiş ve fuzzy kümeler kavramını tanımlamıştır. Daha sonra, Matloka (1986) fuzzy sayı dizilerini tanımlayarak bu diziler için yakınsaklık ve Cauchy dizisi kavramlarını tanımlamıştır.

Fast (1951) tarafından tanımlanan ve temeli doğal yoğunluğa dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı, fuzzy sayı dizilerine Nuray ve Savaş (1995) tarafından genişletilmiştir. Ayrıca, lacunary dizi olarak adlandırılan, $k_0=0$ olmak üzere $s \rightarrow \infty$ için $h_s = k_s - k_{s-1} \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_s)$ için, reel sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı J. Fridy ve C. Orhan (1993) tarafından tanımlanmıştır. Nuray (1998), bu kavramı fuzzy sayı dizileri için incelemiştir. Birçok araştırmacı, lacunary istatistiksel yakınsaklığı farklı diziler için genellemişlerdir. Örneğin, Altın, Et ve Çolak (2006), fuzzy sayılarının genelleştirilmiş fark dizileri için, Savaş (2009) fuzzy sayılarının çift dizileri için çalışmışlardır.

Son zamanlarda, Phu (2001), kaba yakınsaklık kavramı ile sonlu boyutlu normlu uzaylarda limitin tek olamayabileceğini ve böylece kaba limit kümesi olarak adlandırılan kümenin tanımlanabildiğini ifade ederek yakınsaklığa farklı bir bakış açısı getirmiştir. Akçay ve Aytar (2005), bu yeni kavramı fuzzy sayı dizileri için incelemişlerdir. Ayrıca, Babaarslan ve Tuncer (2020), çift fuzzy sayı dizileri için kaba yakınsaklığı göstermişlerdir.

Aytar (2008), kaba istatistiksel yakınsaklık ve kaba istatistiksel limit kümesini tanımlayarak bu kümenin özelliklerini incelemiştir. Debnath ve Rakshit (2019) bu kavramları fuzzy sayı dizileri için çalışmıştır. Bu tez çalışmasında, fuzzy sayı dizileri için, lacunary diziler yardımıyla, kaba istatistiksel yakınsaklık çalışılmıştır. Aytar (2004) tarafından tanımlanmış olan istatistiksel limit infimum ve supremum

kavramlarının kaba lacunary versiyonları oluşturularak, kaba lacunary istatistiksel limit kümesi ile aralarındaki ilişki verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak çalışmamız için temel teşkil eden tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.1.1. $K \subseteq \mathbb{Q}$ olmak üzere, K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısı $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ile gösterilsin. Bu takdirde, K kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır (Fast, 1951)

Eğer $\delta(K) = 0$ ise, K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.1.2. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere, bu dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir P özelliğini sağlıyorsa (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “*h.h.k.*” ile gösterilir (Fridy, 1985).

Tanım 2.1.3. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani *h.h.k.* için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim_k x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{S} L$ ile gösterilir. (Fast, 1951).

Tanımdan da anlaşılacağı üzere, $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise bu sayının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi varken, komşuluk dışındaki terim sayısının doğal yoğunluğunun sıfır olacak şekilde, komşuluğun dışında da sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Dolayısıyla istatistiksel yakınsak olan bir dizi yakınsak olmayabilir. Ancak yakınsak bir dizinin herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunun dışında sonlu sayıda eleman olduğundan ve sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak bir dizi istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.1.1. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir (Fridy, 1985).

Tanım 2.1.4. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_m| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy, 1985).

2.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 2.2.1. Bir fuzzy sayısı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \square \rightarrow [0,1]$ fonksiyonudur:

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \square$ vardır;
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi bir $x, y \in \square$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{X(x), X(y)\}$$

dir;

iii) X üst- yarı süreklidir;

iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır .

Yukarıdaki tanım, her $\gamma \in [0,1]$ için, X fuzzy sayısının γ -kesim kümesi olarak adlandırılan $X^\gamma = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > \gamma\}$ kümesinin, reel sayıların boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi olduğunu ifade etmektedir.

Tüm fuzzy sayıların kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ için γ -kesim kümeleri sırasıyla $X^\gamma = [\underline{X}^\gamma, \overline{X}^\gamma]$ ve $Y^\gamma = [\underline{Y}^\gamma, \overline{Y}^\gamma]$ olsun. $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, X ve Y γ -kesim kümeleri için toplama, çıkarma ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibidir:

$$[X + Y]^\gamma = [\underline{X}^\gamma + \underline{Y}^\gamma, \overline{X}^\gamma + \overline{Y}^\gamma]$$

$$[X - Y]^\gamma = [\underline{X}^\gamma - \overline{Y}^\gamma, \overline{X}^\gamma - \underline{Y}^\gamma]$$

$$k \cdot X^\gamma = [k \cdot \underline{X}^\gamma, k \cdot \overline{X}^\gamma]$$

Fuzzy sayıları için sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \gamma \in [0,1] \text{ için } \underline{X}^\gamma \leq \underline{Y}^\gamma \text{ ve } \overline{X}^\gamma \leq \overline{Y}^\gamma$$

şeklinde ifade edilir. Bu " \leq " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

γ -kesimleri üzerinde Hausdorff metriği olarak bilinen metrik,

$$d(X^\gamma, Y^\gamma) = \max\left(\left|\underline{X}^\gamma - \underline{Y}^\gamma\right|, \left|\overline{X}^\gamma - \overline{Y}^\gamma\right|\right)$$

olmak üzere bulanık sayılar arasındaki supremum metriği

$$\bar{d}: L(\square) \times L(\square) \rightarrow \square$$

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{0 \leq \gamma \leq 1} \bar{d}(X^\gamma, Y^\gamma)$$

şeklinde tanımlanır ve $(L(\square), \bar{d})$ tam metrik uzaydır (Diamond ve Kloeden, 1994)

Tanım 2.2.2. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $\bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır denir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ ile gösterilir (Matloka, 1986).

Teorem 2.2.1. Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin limiti tektir (Matloka, 1986).

Tanım 2.2.3. Her $\varepsilon > 0$ için $k, m > N$ olduğunda $\bar{d}(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir $N(\varepsilon)$ tamsayısı mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir (Matloka, 1986).

Tanım 2.2.4. Eğer $\{X_k \in L(R) : k \in \square\}$ kümesi sınırlı ise $X = (X_k)$ dizisine sınırlıdır denir (Matloka, 1986).

Tanım 2.2.5. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 ' a istatistiksel yakınsaktır denir.

$$st - \lim_k X_k = X_0$$

ile gösterilir (Nuray, 1998).

Tanım 2.2.6. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Nuray ve Savaş, 1995).

Teorem 2.2.2. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $X = (X_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir. (Nuray ve Savaş, 1995)

Tanım 2.2.7. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k(j) \in \square : j \in \square\}| = 0$$

ise $(X_{k(j)})$ alt dizisine seyrek alt dizi, eğer

$$\limsup_n \frac{1}{n} |\{k(j) \in \square : j \in \square\}| > 0$$

ise $(X_{k(j)})$ alt dizisine seyrek olmayan alt dizi denir (Aytar, 2004).

Tanım 2.2.8. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin ν fuzzy sayısına yakınsak ve seyrek bir alt dizisi varsa, ν fuzzy sayısına $X = (X_k)$ dizisinin istatistiksel limit noktası denir.

X dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_X ile gösterilir (Aytar, 2004).

Tanım 2.2.9. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\bar{\delta}(\{k \in \square : \bar{d}(X_k, \mu) < \varepsilon\}) > 0$$

ise μ fuzzy sayısına $X = (X_k)$ dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir.

X dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_X ile gösterilir (Aytar, 2004).

2.3. Fuzzy Sayı Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 2.3.1. $K \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, K kümesinin lacunary yoğunluğu

$$\delta_\theta(K) = \lim_s \frac{|I_s \cap K|}{h_s}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $I_s = (k_{s-1}, k_s]$ ifadesi $\theta = (k_s)$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıkları göstermektedir. (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 2.3.2. $\theta = (k_s)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

$S_\theta - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0(S_\theta)$ ile gösterilir (Nuray, 1998).

3. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, fuzzy sayı dizilerinin kaba lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve kaba lacunary istatistiksel limit kümesi tanımlanacak, ayrıca bu kümenin bazı özellikleri incelenecektir. Orijinal sonuçlara geçmeden önce, normlu uzaylarda kaba yakınsaklık ve kaba istatistiksel yakınsaklık tanımlarına yer verilecektir.

3.1. Normlu Uzaylarda Kaba Yakınsaklık ve Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım. 3.1.1. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. $r \geq 0$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır, her $k \geq k(\varepsilon)$ için

$$\|x_k - x_*\| < r + \varepsilon$$

ise veya buna denk olarak

$$\limsup_k \|x_k - x_*\| \leq r$$

ise $x = (x_k)$ dizisi x_* noktasına kaba yakınsaktır (r -yakınsak) denir, $x_k \xrightarrow{r} x_*$ ile gösterilir (Phu, 2001)

Bir x_* noktasına yakınsak olduğu öngörülen bir (y_k) dizisinin terimlerinin hesaplanamadığı veya ölçülemediği durumda bu dizi yerine, işlemleri kolaylaştıracak terimleri bilinen bir $x = (x_k)$ dizisinden yararlanılabilir. Bu dizi, $\|x_k - y_k\| \leq r$ olacak şekilde seçilir ve r sayısına yaklaşım hatasının bir üst sınırı denir.

Tanım 3.1.2. $x = (x_k)$ dizisi $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $r \geq 0$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_*\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümesi sıfır doğal yoğunluğa sahip ise veya buna denk olarak

$$st\text{-}\limsup_k \|x_k - x_*\| \leq r$$

ise $x = (x_k)$ dizisi x_* noktasına kaba istatistiksel yakınsaktır denir, $x_k \xrightarrow{rst} x_*$ ile gösterilir.

Burada r sayısına kabalık derecesi denir. Eğer, $r = 0$ alınırsa klasik anlamda istatistiksel yakınsaklık elde edilir. Genel olarak $r > 0$ olduğu durumda dizinin kaba istatistiksel limiti tek değildir. Böylece, kaba istatistiksel limit kümesi denilen

$$st\text{-}LIM^r x := \left\{ x_* \in \mathbb{R}^n : x_k \xrightarrow{rst} x_* \right\}$$
 kümesi tanımlanır (Aytar, 2008).

3.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba Yakınsaklığı ve İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1. $(L(R), \bar{d})$ metrik uzayında $X = (X_k)$ bir dizi olsun. $r \geq 0$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır, her $k \geq k(\varepsilon)$ için

$$\bar{d}(X_k, X_*) < r + \varepsilon$$

ise veya buna denk olarak

$$\limsup_k \bar{d}(X_k, X_*) \leq r$$

ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_* fuzzy sayısına kaba yakınsaktır (r -yakınsak) denir,

$X_k \xrightarrow{r} X_*$ ile gösterilir (Geçit Akçay ve Aytar, 2015).

Tanım 3.2.2. $(L(R), \bar{d})$ metrik uzayında $X = (X_k)$ bir dizi olsun. $r \geq 0$ olmak üzere, eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon\}$$

kümesi sıfır doğal yoğunluğa sahip ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_* fuzzy sayısına kaba istatistiksel yakınsaktır denir, $X_k \xrightarrow{rst} X_*$ ile gösterilir (Debnath ve Rakshit, 2019).

3.3. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda, $r \geq 0$ alınacak, $\theta = (k_s)$ dizisi lacunary dizi ve $X = (X_k)$ dizisi de $(L(R), \bar{d})$ metrik uzayında bir dizi olarak kabul edilecektir. Vereceğimiz orijinal sonuçlarda kullandığımız ispat tekniklerinde Geçit Akçay ve Aytar makalesinden esinlenilmiştir.

Tanım 3.3.1. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \{k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $X = (X_k)$ dizisi X_* fuzzy sayısına kaba lacunary istatistiksel yakınsaktır denir, $X_k \xrightarrow{rs_0} X_*$ ile gösterilir.

Burada r sayısına kaba lacunary istatistiksel yakınsaklık derecesi denir. Eğer, $r = 0$ alınırsa klasik anlamda lacunary istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

Bir fuzzy sayı dizisinin kaba yakınsaklık fikrine benzer olarak, X_* fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsak olan herhangi bir $Y = (Y_k)$ dizisinin elemanları ile işlem yapmak zor ise bu dizinin her bir elemanı için $\bar{d}(X_k, Y_k) \leq r$ olacak şekilde üçgensel fuzzy sayılarından oluşan bir (X_k) yaklaşım dizisi elde edilebilir. Böylece $Y = (Y_k)$ dizisinin yaklaşık değerleri kullanılarak işlemler kolaylıkla hesaplanır. Burada (X_k) dizisi X_* sayısına lacunary istatistiksel yakınsak değildir. Fakat

$$\{k \in I_s : \bar{d}(Y_k, X_*) \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon\}$$

kapsamasından ve kabulümüzden (X_k) dizisinin kaba lacunary istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Genel olarak, $r > 0$ olduğunda dizinin kaba lacunary istatistiksel limiti tek değildir.

Böylece, kaba lacunary istatistiksel limit kümesi denilen

$$S_\theta - LIM^r X_k := \left\{ X_* \in L(R) : X_k \xrightarrow{rs_\theta} X_* \right\}$$

kümesi elde edilir.

Tanım 3.3.2. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_m) \geq r + \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisine r -lacunary istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.3.1. Eğer $X = (X_k)$ dizisi r -lacunary istatistiksel yakınsak ise, bu dizi $2r$ -lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. $X = (X_k)$ dizisi r -lacunary istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| = 0,$$

yani $h.h.k \in I_s$ için $\bar{d}(X_k, X_*) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ dir. $h.h.k \in I_s$ için, eşitsizlik mevcut olduğundan $\bar{d}(X_m, X_*) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ yazılabilir.

O halde $h.h.k \in I_s$ için,

$$\bar{d}(X_k, X_m) \leq \bar{d}(X_k, X_*) + \bar{d}(X_*, X_m) < r + \frac{\varepsilon}{2} + r + \frac{\varepsilon}{2} = 2r + \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $X = (X_k)$ dizisinin $2r$ -lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 3.3.3. (X_k) dizisinin S_θ -limit supremum ve S_θ -limit infimum kavramları

$$A_X := \left\{ \mu \in L(\square) : \delta_\theta(\{k \in N : X_k \succ \mu\}) \neq 0 \right\}$$

$$B_X := \left\{ \mu \in L(\square) : \delta_\theta(\{k \in N : X_k \prec \mu\}) \neq 0 \right\}$$

olmak üzere

$$S_\theta - \liminf_{k \rightarrow \infty} X_k := \inf A_X$$

$$S_\theta - \limsup_{k \rightarrow \infty} X_k := \sup B_X$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.2. in ispatında kullanılacak olan bir dizinin r_θ -limit noktalarıyla S_θ -limit supremumu ve S_θ -limit infimumu arasındaki ilişkiyi veren yardımcı teorem aşağıda ifade edilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.3.1. Eğer $X_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ ise

$$\delta_\theta(\{k \in \square : \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) > r\}) = 0$$

ve

$$\delta_\theta(\{k \in \square : \bar{d}(S_\theta - \liminf X_k, X_*) > r\}) = 0$$

dir.

İspat. Aksine $\delta_\theta(k \in \square : \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) > r) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) - r}{2}$$

olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} > 0$ tanımlanabilir.

S_θ -limit supremum tanımından, $\delta_\theta(K_1) \neq 0$ olacak şekilde her bir $k \in K_1$ için

$$\bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_k) < \tilde{\varepsilon}$$

dir.

Diğer taraftan, $X_* \in S_\theta - LIM' X_i$ olduğundan $\delta_\theta(K_2) = 0$ olacak şekilde her bir $k \in K_2$ için

$$\bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \tilde{\varepsilon}$$

dir.

$K := K_1 \cap K_2^c$ olsun. Lacunary yoğunluk özelliğinden $\delta_\theta(K) \neq 0$ dir.

Böylece, her $k \in K$ için

$$\begin{aligned} \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) &\leq \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_k) + \bar{d}(X_k, X_*) < r + \tilde{\varepsilon} \\ &= r + \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) - r = \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*) < \bar{d}(S_\theta - \limsup X_k, X_*)$$

elde ederiz. Bu bir çelişkidir.

Benzer şekilde $\delta_\theta(\{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(S_\theta - \liminf X_k, X_*) > r\}) = 0$ olduğu da gösterilebilir.

Teorem 3.3.2. (X_k) fuzzy sayı dizisi için $S_\theta - LIM^r X_k \neq \emptyset$ ise

$S_\theta - LIM^r X_k \subseteq [S_\theta - \limsup X_k - r, S_\theta - \liminf X_k + r]$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $X_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ olsun. Bu takdirde

$$\delta_\theta(\{k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

dir. Yani, $\delta_\theta(K_1) \neq 0$ olacak şekildeki her bir $k \in K_1$ için

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \left\{ \left| \underline{X}^\alpha - \underline{X}_*^\alpha \right|, \left| \overline{X}^\alpha - \overline{X}_*^\alpha \right| \right\} < r + \varepsilon$$

veya

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| \underline{X}^\alpha - \underline{X}_*^\alpha \right| < r + \varepsilon \text{ ve } \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| \overline{X}^\alpha - \overline{X}_*^\alpha \right| < r + \varepsilon$$

dir.

Böylece, $\delta_\theta(K_1) \neq 0$ olacak şekildeki her bir $k \in K_1$ için

$$X_* - (r_1 + \varepsilon) \prec X_k \prec X_* + (r_1 + \varepsilon)$$

dir.

Buradan iki durum elde edilir:

İlk olarak, $S_\theta(k : X_k \prec X_* + (r_1 + \varepsilon)) \neq 0$ yani $X_* + (r_1 + \varepsilon) \in B_X$ ve yardımcı teorem 3.3.1.' den

$$S_\theta - \limsup X_k := \sup B_x = \mu \leq X_* + (r_1 + \varepsilon)$$

dir.

İkinci olarak, $S_\theta(\{k : X_k \succ X_* - (r_1 + \varepsilon_1)\}) \neq \emptyset$ yani $X_* - (r_1 + \varepsilon) \in A_X$ ve yardımcı teorem 3.3.1.' den

$$S_\theta - \liminf X_k := \inf A_X = \eta \geq X_* - (r_1 + \varepsilon_1)$$

dir.

Böylece, $X_* \in [S_\theta - \limsup X_k - r, S_\theta - \liminf X_k + r]$ olduğu ispatlanır.

Teorem 3.3.3. $X = (X_k)$ dizisinin kaba lacunary istatistiksel limit kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir.

İspat. Tersini kabul edilirse, $\bar{d}(Y, Z) > 2r$ olacak şekilde $Y, Z \in S_\theta - LIM^r X$ vardır.

$\varepsilon \in \left(0, \frac{\bar{d}(Y, Z)}{2} - r\right)$ keyfi olsun.

$Y, Z \in S_\theta - LIM^r X$ olduğundan,

$$K_1 := \{k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y) \geq r + \varepsilon\} \text{ ve } K_2 := \{k \in I_s : \bar{d}(X_k, Z) \geq r + \varepsilon\}$$

olmak üzere $\varepsilon > 0$ için, $\lim_s \frac{1}{h_s} |K_1| = 0$ ve $\lim_s \frac{1}{h_s} |K_2| = 0$ dir.

Böylece, her bir $k \in K_1^c \cap K_2^c$ için

$$\bar{d}(Y, Z) \leq \bar{d}(X_k, Y) + \bar{d}(X_k, Z) < 2(r + \varepsilon) = \bar{d}(Y, Z)$$

elde edilir. $\bar{d}(Y, Z) < \bar{d}(Y, Z)$ çelişkisi bulunur.

Teorem 3.3.4. Kaba lacunary istatistiksel limit kümesi kapalı bir kümedir.

İspat. $S_\theta - LIM^r X_k$ kümesinden Y_* fuzzy sayısına yakınsak keyfi bir (Y_k) dizisi alınsın. $Y_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ olduğu gösterilirse kaba lacunary istatistiksel limit kümesinin kapalı olduğu gösterilmiş olur.

$\varepsilon > 0$ olsun. (Y_k) dizisi Y_* fuzzy sayısına yakınsak olduğundan, her $k > k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ için

$$\bar{d}(Y_k, Y_*) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k \in I_s$ vardır.

Şimdi $k_0 > k_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olacak şekilde bir $k_0 \in I_s$ seçilsin. O halde, $\bar{d}(Y_{k_0}, Y_*) < \frac{\varepsilon}{2}$ yazılabilir.

$(Y_k) \subseteq S_\theta - LIM^r X_k$ olduğundan, $(Y_{k_0}) \subseteq S_\theta - LIM^r X_k$ elde ederiz. Yani

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_{k_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| = 0$$

olur.

Keyfi bir $i \in \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_{k_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ seçtiğimizde $\bar{d}(X_i, Y_{k_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ olur ve

$i \in \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_*) < r + \varepsilon \right\}$ olduğundan

$$\bar{d}(X_i, Y_*) < \bar{d}(X_i, Y_{k_0}) + \bar{d}(Y_{k_0}, Y_*) < r + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_*) < r + \varepsilon \right\} \supseteq \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_{k_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kapsaması gerçekleşir.

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_{k_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| = 1$$

olduğundan

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y_*) < r + \varepsilon \right\} \right| = 1$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5. Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ için, $X = (X_k)$ dizisi X_* sayısına $\frac{r}{|c|}$ -lacunary istatistiksel yakınsak ise (cX_k) dizisi cX_* fuzzy sayısına kaba lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(cX_k, cX_*) \geq r + \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq \frac{(r + \varepsilon)}{|c|} \right\} \right|$$

eşitsizliğinden $s \rightarrow \infty$ için limit alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.6. Eğer $X = (X_k)$ dizisi X_* sayısına r_1 -lacunary istatistiksel yakınsak ve $Y = (Y_k)$ dizisi Y_* sayısına r_2 -lacunary istatistiksel yakınsak ise $(X_k + Y_k)$ dizisi $X_* + Y_*$ sayısına $(r_1 + r_2)$ -lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k + Y_k, X_* + Y_*) \geq (r_1 + r_2) + \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(Y_k, Y_*) \geq r_2 + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden ispat aşıkardır.

Teorem 3.3.7. $Y = (Y_k)$ dizisi X_* fuzzy sayısına lacunary yakınsak olmak üzere, her $k \in I_s$ için $\bar{d}(X_k, Y_k) \leq r$ ise $X = (X_k)$ dizisi X_* sayısına kaba lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Kabulden, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(Y_k, X_*) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dir. Ayrıca $k \in I_s$ için $\bar{d}(X_k, Y_k) \leq r$ olduğundan

$$\left\{ k \in I_s : \bar{d}(Y_k, X_*) \geq \varepsilon \right\} \supseteq \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon \right\}$$

kapsaması sağlanır.

Böylece $\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon \right\} \right| = 0$ elde edilir.

Teorem 3.3.8. Eğer $X = (X_k)$ dizisi X_* sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\theta - LIM^r X_k = \bar{B}_r(X_*) := (\mu \in L(\square) : \bar{d}(\mu, X_*) \leq r)$ dir.

İspat. $K_1 = \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq \varepsilon \right\}$ olsun. $X_k \xrightarrow{s_\theta} X_*$ olduğundan $\lim_s \frac{1}{h_s} |K_1| = 0$ dir.

$Y \in \bar{B}_r(X_*)$ olsun. Her $k \in K_1^c$ için

$$\bar{d}(X_k, Y) \leq \bar{d}(X_k, X_*) + \bar{d}(X_*, Y) < \varepsilon + r$$

olduğundan $Y \in S_\theta - LIM^r X_k$ elde edilir.

$K_2 = \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon \right\}$ olsun. Şimdi keyfi bir $Y \in S_\theta - LIM^r X_k$ alınsın.

Böylece, $\lim_s \frac{1}{h_s} |K_2| = 0$ dir. Ayrıca $X_k \xrightarrow{s_\theta} X_*$ olduğundan $\lim_s \frac{1}{h_s} |K_1| = 0$ dir.

Her $k \in K_1^c \cap K_2^c$ için

$$\bar{d}(Y, X_*) \leq \bar{d}(X_k, Y) + \bar{d}(X_k, X_*) < 2\varepsilon + r$$

olduğundan $Y \in \overline{B}_r(X_*)$ dir.

Teorem 3.3.9. Eğer $C \in \Gamma_\theta(X)$ ise her $X_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ için $\overline{d}(X_*, C) \leq r$ dir.

İspat. $C \in \Gamma_\theta(X)$ ve $\overline{d}(X_*, C) > r$ olacak şekilde $X_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ olsun.

$\varepsilon = \frac{\overline{d}(X_*, C) - r}{3}$ olmak üzere

$$\{k \in I_s : \overline{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_s : \overline{d}(X_k, C) < \varepsilon\}$$

yazılır.

$C \in \Gamma_\theta(X)$ olduğundan, $\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \{k \in I_s : \overline{d}(X_k, C) < \varepsilon\} \right| \neq 0$ elde edilir.

Böylece

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \{k \in I_s : \overline{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon\} \right| \neq 0$$

dir ve bu ise $X_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ gerçeği ile çelişir.

Teorem 3.3.10.

a) Eğer $C \in \Gamma_\theta(X)$ ise $S_\theta - LIM^r X_k \subseteq \overline{B}_r(C)$ dir

b) $S_\theta - LIM^r X_k = \bigcap_{C \in \Gamma_\theta(X)} \overline{B}_r(C) = \{X_* \in L(\square) : \Gamma_\theta(X) \subseteq \overline{B}_r(X_*)\}$ dir.

İspat.

a) $X_* \in S_\theta - LIM^r X_k$ ve $C \in \Gamma_\theta(X)$ olsun. Teorem 8 den, $\overline{d}(X_*, C) \leq r$ dir aksi

takdirde $\varepsilon = \frac{\overline{d}(X_*, C) - r}{3}$ için

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, X_*) \geq r + \varepsilon \right\} \right| \neq 0$$

elde edilir.

b) (a) dan, $S_\theta - LIM^r X_k = \bigcap_{C \in \Gamma_\theta(X)} \bar{B}r(C)$ vardır.

$Y \in \bigcap_{C \in \Gamma_\theta} \bar{B}r(C)$ olsun. Bu takdirde her $C \in \Gamma_\theta(X)$ için $\bar{d}(X_*, C) \leq r$ dir. Bu ise

$\Gamma_\theta(X) \subseteq \bar{B}r(Y)$ olduğunu yani,

$$\bigcap_{C \in \Gamma_\theta(X)} = \{ X \in L(\square) : \Gamma_\theta(X) \subseteq \bar{B}r(X_*) \}$$

olduğunu gösterir.

$Y \notin S_\theta - LIM^r X_k$ olsun. Böylece

$$\lim_s \frac{1}{h_s} \left| \left\{ k \in I_s : \bar{d}(X_k, Y) \geq r + \varepsilon \right\} \right| \neq 0$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

Bu ise $\bar{d}(Y, C) > r + \varepsilon$ olacak şekilde, C nin X dizisinin lacunary istatistiksel yığılma noktası olduğunu gösterir, yani

$$\Gamma_\theta(X) \subset \bar{B}r(Y) \text{ ve } Y \notin \{ X_* \in L(\square) : \Gamma_\theta(X) \subseteq \bar{B}r(X_*) \}$$

dir. Böylece, $Y \in \{ X_* \in L(\square) : \Gamma_\theta(X) \subseteq \bar{B}r(X_*) \}$ elde edilir.

Buradan

$$\{ X_* \in L(\square) : \Gamma_\theta(X) \subseteq \bar{B}r(X_*) \} \subseteq S_\theta - LIM^r X_k$$

elde ederiz

SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Aytar (2008) tarafından tanımlanan sonlu boyutlu normlu uzaylarda kaba istatistiksel yakınsaklık kavramından yola çıkarak, normlu bir uzay olmayan fuzzy sayı dizilerinin uzayında kaba lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kaba lacunary istatistiksel Cauchy kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, kaba lacunary istatistiksel limit kümesi ifade edilerek bu kümenin özelliklerinden bahsedilmiştir. Dahası, fuzzy sayı dizileri için lacunary istatistiksel limit infimum ve limit supremum kavramları tanımlanarak kaba istatistiksel limit kümesiyle arasındaki ilişki gösterilmiştir. Lacunary istatistiksel yakınsaklık ile kaba lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ispatlanmıştır.

KAYNAKÇA

- Altın, Y. Et, M. ve Çolak, R. (2006). Lacunary Statistical and Lacunary Strongly Convergence of Generalized Difference Sequences of fuzzy Numbers. *An International Computers and Mathematics With Applications*, 52, 1011-1020.
- Aytar, S. (2004). Statistical Limit Points of Sequences of Fuzzy Numbers, *International Sciences* 165, 129-139.
- Aytar, S. (2008). Rough Statistical Convergence, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29, 291-303.
- Babaarslan, F. ve Tuncer, A.N. (2020). Rough Convergence of Double Sequences Of Fuzzy Numbers. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 10, 1335-1342.
- Debnath, S. ve Rakshit, D. (2019). Rough Statistical Convergence of a Sequence of Fuzzy Numbers. *Mathematica*, 61, 33–39.
- Fast, H. (1951). Sur La Convergence Statistique. *Colloquium Mathematicae*, 2, 241-244.
- Fridy, J.A. ve Orhan, C.1993. Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, 160 (1).
- Gecit Akçay, F. ve Aytar, S. (2015). Rough Convergence of a Sequence of Fuzzy Numbers. *Bulletin of Mathematical Analyses and Application*, 7 (4), 17-23.
- Nuray, F. (1998). Lacunary Statistical Convergence of Sequence of Fuzzy Numbers, *Fuzzy Set and Systems*, 99, 353-355.
- Nuray, F. ve Savaş, E. (1995). Statistical Convergence of Sequences of Fuzzy Numbers, *Mathematica Slovaca*, 45 (3), 269-273.
- Matloka, M., (1986). Sequences of fuzzy numbers. *Busefal*, 28, 28-37.
- Phu, H. X. (2001). Rough Convergence in Normed Linear Spaces. *Numer Func. Anal Optimiz*, 23, 139-146.

Puri, M. I. ve Ralescu, D. A. (1983). Differentials for Fuzzy Functions. *J. Math Anal. Appl.* 91 ,552-558.

Savaş, E. (2009). Remark on double lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, *Journal of Computational Analysis & Applications.* 11, 64-69.

