T.C.
CUMHURIYET ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ

FUZZY METRIK VE SEZGISEL FUZZY METRIK UZAYLAR ÜZERINE

ÖNDER KORKMAZ

YÜKSEK LISANS TEZI

MATEMATIK ANABILIM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. IDRIS ZORLUTUNA

IKINCI DANIŞMAN
Doç. Dr. HAKAN EFE

SIVAS
2012

FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Bu çal¬şma, Cumhuriyet Üniversitesi Fen/Sağl¬k Bilimleri Enstitüsü tez yaz¬m kurallar¬na uygun olarak haz¬rlanm¬ş ve jürimiz taraf¬ndan, Matematik Anabilim Dal¬'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Metin AKDAĞ

Üye : Doç. Dr. Idris ZORLUTUNA

Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÖZKAN

ONAY

Bu tez çal¬şmas¬, 02/08/2012 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulu taraf¬ndan belirlenen ve yukar¬da imzalar¬ bulunan jüri üyeleri taraf¬ndan kabul edilmiştir.

FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof. Dr. Mustafa DEĞIRMENCI

Bu tez Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu’nun 24.09.2008 tarihli ve 009 say¬l¬ toplant¬s¬nda kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yaz¬m K¬lavuzu adl¬ yönergeye göre haz¬rlanm¬şt¬r.

ÖZET

FUZZY METRIK VE SEZGISEL FUZZY METRIK UZAYLAR ÜZERINE

Önder KORKMAZ
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Idris ZORLUTUNA

2012, 56 sayfa

Fuzzy metrik ve sezgisel fuzzy metrik uzaylar için bir altyapı oluşturmayı amaçlayan ve literatürden derlenen bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü, konunun tarihsel gelişimini, literatürdeki önemini ve hazırlanan çalışmanın kısa bir taslağını içeren giriş bölümüdür.

Ikinci bölümde, klasik metrik uzaylarda temel kavramlar ve özellikler sunulmuştur. Ayrıca tezin üçüncü ve dördündü bölümlerinde fuzzy metrik ve sezgisel fuzzy metrik uzaylara genelleştirilmiş olan bazı topolojik kavramlar listelenmiştir.

Üçüncü bölümün birinci kısmında fuzzy metrik uzaylara ait tanım ve örneklere yer verilmiştir. Ikinci kısmında ise klasik metrik uzaylar teorisinden bilinen ve fuzzy metrik uzaylar yapısına genelleştirilen bazı topolojik kavram ve sonuçlar sunulmuştur.

Dördüncü bölümün birinci kısmı sezgisel fuzzy metrik uzaylar ile ilgili tanımlara ve örneklere ayrılmıştır. Ikinci kısmında ise yine klasik metrik uzaylar teorisinden bilinen ve literatürde sezgisel fuzzy metrik uzaylar yapısına genelleştirilen bazı topolojik kavram ve sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Metrik uzay, Fuzzy metrik uzay, Sezgisel fuzzy metrik uzay

ABSTRACT

ON FUZZY METRIC AND INTUITIONISTIC FUZZY METRIC SPACES

Önder KORKMAZ

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Idris ZORLUTUNA

2012, 56 pages

This thesis, consists of four chapters, is aiming to provide the background in the subjects of fuzzy metric and intuitionistic fuzzy metric spaces and is compiled from the literature. The first chapter of the thesis is introduction chapter and it includes the historical development and the significance of the subject in literature and also a brief overwiew of the study.

In the second chapter, the basic concepts and properties of classic metric spaces are presented. In addition, some topological concepts which are generalized to fuzzy metric spaces and intuitionistic fuzzy metric spaces given in the third and fourth chapters of the thesis, are listed.

In the first part of the third chapter, definitions and examples of fuzzy metric spaces are presented. In the second part, some topological concepts and results which are known from the classical metric spaces and are generalized to the setting of fuzzy metric spaces, are presented.

The first part of the fourth chapter is devoted to definitions and examples related to intuitionistic fuzzy metric spaces. In the second part, some topological concepts and results which are also known from the classical metric spaces and are generalized to the setting of intuitionistic fuzzy metric spaces, are presented.

Key words: Metric space, Fuzzy metric space, Intuitionistic fuzzy metric space.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusu ile ilgili araşt¬rmalar¬m¬n her safhas¬nda karş¬laşt¬ğ¬m zorluklar¬ bilgi ve tecrübesiyle aşmamda yard¬mc¬ olan dan¬şmam hocam, Say¬n Doç. Dr. Idris ZORLUTUNA ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayr¬ca her an¬mda yan¬mda olan sevgili eşime ve aileme sonsuz sevgi ve sayg¬lar¬m¬ sunar¬m.

IÇINDEKILER

1. GIRIŞ

Dünyadaki bazı olayları açıklamak için kesin tanımlamalarda bulunabilmek imkansızdır. Dolayısıyla gündelik yaşamda pek çok yargıya belirsizlikler altında varılır. Örneğin günlük hayattaki konuşmalarımız arasında, ılık su, orta yaşlı insan, mavi kalem ve uzun zaman gibi belirsizlik içeren, anlamı kişiden kişiye ve duruma göre değişen bir çok kavram kullanılır. Klasik mantıkla bu gibi kavramların matematiksel olarak modellenmesi mümkün değildir. Çünkü matematik denilince akla gelen kesinliktir ve kesinlik yaklaşımıyla belirsizlik gerçekçi bir şekilde modellenemez.

Klasik mantığı geliştirmeyi düşünen araştırmacılar, Auguste Comte nin 18. yüzyılda ortaya attığı "üç hal" kanununa göre "bilimde belirsizlikler bulunamaz" görüşünün de etkisinde kalarak, belirsizlik bilgilerinden yine belirsiz de olsa, sonuçlar çıkarmayı düşünmemişlerdir. Çünkü o zaman için belirsizlikler genellikle teolojik ya da metafizik konularda ortaya çıkmaktaydı ve temel ve uygulamalı bilimlerde belirsizliğin varlığı akla bile gelmiyordu. Buna karşılık özellikle yer bilimlerinde gözlenen ve kaçınılmayan belirsizlik olaylarının incelenerek elde edilen verilerin işlenerek anlamlı sonuçlar çıkarılması için yine klasik ve sembolik mantık esaslarına göre kurulmuş ihtimaller teorisi, istatistik ve stokastik yöntemler kullanılmıştır.

1930 larda Max Planck tarafından belirsizliği açıklayıcı ilk kavramlar geliştirilmiş olsa da 1965 de Azeri kökenli sistem bilimci Zadeh (1965) tarafından yayımlanan makale ile belirsizlik kavramı modern anlamda açıklığa kavuşmuştur. Insanın kesin olmayan bilgiyi anlama ve analiz etme yeteneğinden yola çıkan Zadeh, kesinlik içermeyen problemleri çözmek ve insan düşüncesinin anahtar elemanlarının sayılar değil dilsel ifadeler olduğu fikrini dayanak alarak fuzzy küme teorisini geliştirmiştir (Mao, 1999). Klasik kümelerde yer alan evet/hayır, iyi/kötü, doğru/yanlış ifadeleri fuzzy kümelerde yerini kısmen doğru ve kısmen yanlış gibi ifadelere bırakır (Kleyle vd., 1997). Eğer insanın karar verme sürecindeki bu belirsizlikler dikkate alınmazsa sonuçlar yanıltıcı olabilir (Tsaur vd., 2002). Dolayısıyla fuzzy küme teorisi, insan algı ve öznel yargılarıyla ilgili olan dilsel belirsizliği modellerken nitel parametrelerin yorumlanmasını ve dilsel belirsizliğin fuzzy sayılarla matematiksel olarak ifade edilebilmesini sağlar (Knight, 2001).

Fuzzy küme kavramı topoloji ve analizde önemli bir role sahiptir. Bu kavramın tanımlanmasından sonra bir çok araştırmacı fuzzy kümeler ve uygulamaları üzerinde çalışmışlar ve klasik teorilerin fuzzy benzerlerini bulmak için büyük çaba harcamışlardır. Bu anlamda Chang 1968 yılında, fuzzy topolojik uzay fikrini ortaya atmış ve Chang ın bu çalışmasından sonra klasik topolojide önemli rol oynayan birçok topolojik kavram fuzzy topoloji için çalışılmıştır.

Fuzzy topolojide en önemli problemlerden biri ise uygun bir fuzzy metrik uzay kavramını bulmaktır. Bu problem çeşitli araştırmacılar (Kramosil ve Michalek, 1975; Abu Osman, 1983; Kaleva ve Seikkala, 1984) tarafından farklı şekillerde çözülmeye çalışılmıştır. Özel olarak, 1975 yılında Kramosil ve Michalek, klasik metrik uzayın bir diğer genelleştirilmesi olan ve Menger (1942) tarafından tanımlanıp Schweizer ve Sklar (1960) tarafından geliştirilen olasılıksal metrik uzay kavramını fuzzy duruma genelleştirerek fuzzy metrik uzayı tanımladılar. Daha sonra George ve Veeramani (1994) bu fuzzy metrik uzay tanımını modifiye ederek, fuzzy metrik uzaylarda Hausdorffluk, sınırlılık, kompaktlık, yakınsama ve tamlık gibi analiz ve topolojinin önemli kavramlarını çalıştılar. Ayrıca fuzzy metrik uzaylar için Baire teoremini ispatladılar.

Öte yandan 1986 yılında Atanassov boştan farklı bir kümenin her elemanının üyelik olma derecesi ve üyelik olmama derecesi toplamının 1 den küçük ve eşit olma şartını koyarak fuzzy küme kavramının bir genelleştirmesi gibi "Sezgisel fuzzy küme" kavramını vermiştir. Bu yeni tanım ışığında, 1997 yılında Çoker "Sezgisel fuzzy topolojik uzay" kavramını ortaya koymuş daha sonra bu alanda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Son olarak Park (2004) sürekli t-norm ve sürekli t-conorm kavramları yardımıyla, sezgisel fuzzy küme fikrine ve fuzzy metrik uzay kavramına dayanan fuzzy metrik uzayın sezgisel fuzzy metrik uzay kavramını tanımladı. Park, bu çalışmasında sezgisel fuzzy metrik uzay üzerinde bir Hausdorff topoloji tanımlayarak, her metriğin bir sezgisel fuzzy metrik ürettiğini gösterdi. Ayrıca sezgisel fuzzy metrik uzaylar için Baire teoremini kanıtlayarak, fuzzy metrik uzaylarda tamlık, ayrılabilirlik, ikinci sayılabilirlik ve süreklilik kavramları üzerinde durmuştur.

Bu tez ile klasik metrik uzaylardan fuzzy metrik ve sezgisel fuzzy metrik uzaylara genelleştirilen temel kavramların derlenerek sunulması amaçlanmıştır. Bu amaçla tezin birinci bölümünde metrik uzaylar bağlamında gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin ikinci bölümü klasik metrik uzaylardan fuzzy metrik uzaylara genelleştirilen kavram ve sonuçlara ayrılmıştır. Üçüncü ve son bölümde ise yine klasik metrik uzayların kavram ve sonuçlarından sezgisel fuzzy metrik uzaylara genelleştirilenler üzerinde durulmuştur.

2. METRIK UZAYLAR

2.1 Metrik Uzaylarda Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 *X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere,*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için

(M_1) $d(x,y) \geq 0$,

(M_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M_3) $d(x,y) = d(y,x)$,

(M_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(üçgen eşitsizliği),*

koşullarını gerçekliyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metriktir denir. Üzerinde bir d metriği tanımlı olan X kümesine de metrik uzay denir ve (X,d) veya X_d simgesi ile gösterilir. X kümesinin öğelerine (X,d) metrik uzayının noktaları denir. Metrik tanımındaki M_2 koşulunun gerçeklenmemesi durumunda M_2 koşulu yerine her $x \in X$ için $d(x,x) = 0$ koşulu alınırsa, M_1, M_2, M_3, ve M_4 koşullarını gerçekleyen d fonksiyonuna yarı-metrik, uzaya da yarı-metrik uzay denir.

Örnek 2.1.1 $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi olsun.* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *için* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$ *şeklinde tanımlanan d fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (veya mutlak değer) metrik,* $(\mathbb{R}, d)$ *ikilisine de alışılmış metrik uzay denir*

Örnek 2.1.2 *Boş olmayan bir X kümesi verilsin.* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu, her $x, y \in X$ noktaları için,*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metriktir. Bu metriğe, ayrık (diskret, noktasal, trivial) metrik denir.

Örnek 2.1.3 $X = \mathbb{R}^n$ *üzerinde*

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

biçiminde tanımlanan d_∞ fonksiyonu bir metriktir.

Çözüm. (M_1) $|x_1 - y_1| \geq 0$ ve $|x_1 - y_1| \geq 0$ olduğundan

$$max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq 0$$

ve dolayısıyla $d_\infty(x,y) \geq 0$ olur.

(M_2)

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = 0 &\Leftrightarrow max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0, |x_2 - y_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Bu ise koşulun sağladığını gösterir.

(M_3) $d_\infty(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d_\infty(y,x)$

(M_4)

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ &= max\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \\ &\leq max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \\ &\leq max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|\} + \max\{|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \\ &= d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.4 $X = \mathbb{R}$ *ve* $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = (x - y)^2$ *olmak üzere* (X,d) *bir metrik uzay değildir.*

Tanım 2.1.2 (X,d) *metrik uzayı ve herhangi bir* $a \in X$ *noktası verilsin.* $\varepsilon > 0$ *olmak üzere,*

$$B(a,\varepsilon) = \{x \in X | d(a,x) < \varepsilon\}$$

kümesine a *merkezli,* ε *yarıçaplı açık yuvar (açık disk) ,*

$$B[a,\varepsilon] = \{x \in X | d(a,x) \leq \varepsilon\}$$

kümesine a *merkezli,* ε *yarıçaplı kapalı yuvar (kapalı disk) ve*

$$S(a,\varepsilon) = \{x \in X | d(a,x) = \varepsilon\}$$

kümesine a *merkezli,* ε *yarıçaplı küre (yuvar yüzeyi) denir.*

Önerme 2.1.1 (X, d) *bir metrik uzay,* $x \in X$ *ve* $r_1, r_2 > 0$ *olsun. Bu durumda* x *merkezli ve* r_1, r_2 *yarıçaplı açık yuvarları için* $B(x, r_1) \subseteq B(x, r_2)$ *veya* $B(x, r_2) \subseteq B(x, r_1)$ *dir.*

Tanım 2.1.3 (X, d) *herhangi bir metrik uzay,* (x_n) *bu uzayda herhangi bir dizi ve* $a \in X$ *herhangi bir nokta olsun.*

(a) Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık,* $n \geq n_0$ *özelliğindeki her bir* n *doğal sayısı için* $d(x_n, a) < \varepsilon$ *olacak biçimde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *bulunabiliyorsa* (x_n) *dizisi* (X, d) *metrik uzayında* a *noktasına yakınsıyor (ya da* (x_n) *dizisinin limiti* a *dır) denir.*

Eğer (x_n) *dizisi bir* a *noktasına yakınsıyor ise* a *noktasına* (x_n) *dizisinin limit noktası ve* (x_n) *dizisine yakınsak dizi, aksi halde ıraksak dizi denir.*

(b) Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ *sayısı ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $m \geq n$ *ve* $d(x_m, a) < \varepsilon$ *olacak biçimde bir* $m \in \mathbb{N}$ *bulunabiliyorsa* a *noktasına* (x_n) *dizisinin yığılma noktası denir.*

Teorem 2.1.1 *Bir metrik uzayda yakınsak her dizinin tek bir limit noktası vardır.*

Teorem 2.1.2 (X, d) *bir metrik uzay,* (x_n) *bu uzayda bir dizi ve* A*, bu dizinin terimlerinin kümesi olsun. Eğer* x*,* A *kümesinin bir yığılma noktası ise* (x_n) *dizisinin* x *noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır.*

Örnek 2.1.5 $\mathbb{R}$ *alışılmış uzayında* $(x_n) = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ *dizisini dikkate alırsak* -1 *ve* 1 *noktaları bu dizinin terimlerinin yığılma noktalarıdır. Üstelik bu noktalar sırasıyla,* (x_n) *dizisinin* $\left(-1 + \dfrac{1}{2n-1}\right)$ *ve* $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)$ *alt dizilerinin limit noktalarıdır.*

Örnek 2.1.6 $\mathbb{R}^2$ *alışılmış uzayında* $(x_n) = \left(-\dfrac{1}{n}, (-1)^n\right)$ *dizisinin terimlerinin kümesi dikkate alınırsa,* $(0, 1)$ *ve* $(0, -1)$ *noktaları bu kümenin birer yığılma noktasıdır. Bu noktalar aynı zamanda* $\left(-\dfrac{1}{2n}, 1\right)$ *ve* $\left(-\dfrac{1}{2n-1}, -1\right)$ *alt dizilerinin limit noktalarıdır.*

Tanım 2.1.4 (X, d) *metrik uzay,* (x_n) *bu uzayda bir dizi ve* $x \in X$ *olsun.* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0$ *iken* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *oluyorsa,* (x_n) *dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer* (X, d) *metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsar ise,* (X, d) *metrik uzayına tamdır denir.*

Not 1 *X boş olmayan bir küme ve $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ X in alt kümelerinin bir dizisi olsun. $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin iç içe olması demek her n için $F_{n+1} \subseteq F_n$ olması demektir.*

Teorem 2.1.3 *(X,d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart çapı sıfıra giden boş olmayan iç içe kapalı yuvarların her dizisinin arakesitinin boştan farklı olmasıdır.*

Teorem 2.1.4 *(X,d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir Cauchy dizisi ve $x \in X$ noktası (x_n) dizisinin bir yığılma noktası ise $(x_n) \to x$ tir.*

Tanım 2.1.5 *X boş olmayan bir küme ve d, X üzerinde bir metrik olsun.*

(a) Boş olmayan bir $A \subset X$ alt kümesi için herhangi bir $p \in X$ noktasının A kümesine olan uzaklığı $d(p,A)$ simgesiyle gösterilir ve

$$d(p,A) = \inf\{d(p,a) \mid a \in A\}$$

olarak tanımlanır.

(b) Boş olmayan A, $B \subset X$ kümelerinin birbirine uzaklığı $d(A,B)$ ile gösterilir ve

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlanır.

(c) Boş olmayan bir $S \subset X$ kümesinin çapı $d(S)$ ya da çap(S) simgesiyle gösterilir ve

$$d(S) = \sup\{d(a,a') \mid a, a' \in S\}$$

olarak tanımlanır.

Uyarı 2.1.1 *(a) $d(p,A), d(A,B)$ ve $d(A)$ negatif olmayan sayılardır.*

(b) Tanıma dikkat edilirse, boş kümenin herhangi bir noktaya ve herhangi bir kümeye olan uzaklığı ile boş kümenin çapı tanımlı değildir. Ancak $d(p,\emptyset) = \infty$, $d(A,\emptyset) = d(\emptyset,A) = \infty$ ve $d(\emptyset) = -\infty$ olarak kabul edilir.

(c) $A \subset X$ ve $p \in A$ ise $d(p,A) = 0$ dır, gerçekten de, eğer $p \in A$ ise $d(p,p) = 0$ olacağından $d(p,A)$ nın tanımı gereği $d(p,A) = 0$ olur. $d(p,A) = 0$ olması halinde $p \in A$ olmak zorunda değildir.

(d) Eğer A kümesi tek öğeli bir küme ise $d(A) = 0$ olacağı açıktır. Üstelik her bir $A \subset X$ için $d(A) \leq d(X)$ dir.

Örnek 2.1.7 $(\mathbb{R}, d)$ *alışılmış metrik uzayında, n bir doğal sayı olmak üzere $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ kümesini dikkate alırsak, $d(0, A) = 0$ dır ancak $0 \notin A$ dır. Diğer yandan (X, d_a) ayrık metrik uzay ise $d_a(p, A) = 0$ olması halinde $p \in A$ olmak zorundadır, çünkü sadece $p \notin A$ olduğunda $d_a(p, A) = 1$ olur.*

Uyarı 2.1.2 *Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise $d(A, B) = 0$ dır. Çünkü $A \cap B \neq \emptyset$ ve $x \in A \cap B$ ise $0 \in \{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$ ve dolayısıyla $d(A, B) = 0$ olur. Ancak $d(A, B) = 0$ olması halinde $A \cap B \neq \emptyset$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{R}$ alışılmış metrik uzayında $A = [0, 1)$ ve $B = (1, 2]$ alt kümelerini dikkate alırsak $d(A, B) = 0$ olmasına rağmen $A \cap B = \emptyset$ dir.*

Tanım 2.1.6 *(X, d) metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer her $x \in S$ için*

$$d(x, a) \leq M$$

olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}$ ve bir $a \in X$ var ise S ye sınırlı kümedir denir.

Uyarı 2.1.3 *(a) Eğer $A \subset X$ kümesi sınırlı ise A kümesinin her bir alt kümesinin de sınırlı olacağı açıktır.*

(b) Eğer $A \subset X$ kümesi sınırlı ise $d(A) < \infty$, yani çapı negatif olmayan bir gerçel sayıdır. Eğer A kümesi sınırlı değil ise $d(A) = +\infty$ dır.

Tanım 2.1.7 *X bir küme ve d, X üzerinde metrik olsun. Eğer bir $\rho > 0$ sayısı her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq \rho$ olacak şekilde mevcut ise, bu d metriğine sınırlı metrik denir.*

Tanım 2.1.8 *(X, d) ve (Y, ρ) metrik uzayları ve $f : X_d \to Y_\rho$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(X)$ kümesi Y de sınırlı bir alt kümesi ise f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.*

Tanım 2.1.9 *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ noktası için $B(x, \varepsilon) \subset A$ olacak biçimde en az bir $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa A alt kümesine bu metrik uzayda açık küme denir.*

Tanım 2.1.10 *Eğer bir $F \subset X$ alt kümesinin $X - F$ tümleyeni açık ise, bu F alt kümesine kapalı küme adı verilir.*

Teorem 2.1.5 *Bir (X, d) metrik uzayında açık kümeler ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

(a) $\emptyset$ ve X açıktır.

(b) İki açık kümenin arakesitide açıktır.

(c) Açık kümelerin herhangi bir ailesinin birleşimide açıktır.

Tanım 2.1.11 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $U \subset X$ olsun. Eğer $B(x, \varepsilon) \subset U$ olacak biçimde en az bir $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa U alt kümesine x noktasının bir komşuluğu denir.*

Teorem 2.1.6 *(X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq G \subset X$ olsun. Bu durumda G açıktır $\Leftrightarrow$ G her noktasının bir komşuluğudur.*

Tanım 2.1.12 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun.*

(a) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon)$ ile A nın arakesiti boş değilse, bu x noktasına A kümesinin bir kapanış noktası denir. Bu durumda

$$\overline{A} := \{x \in X : x,\ A \text{ nın bir kapanış noktasıdır}\}$$

kümesine A nın kapanışı adı verilir.

(b) Eğer uygun bir $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \subset A$ ise, bu x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. Bu durumda

$$\overset{\circ}{A} := \{x \in X : x,\ A \text{ nın bir iç noktasıdır}\}$$

kümesine A nın içi adı verilir.

(c) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) - \{x\}$ ile A nın arakesiti boş değilse, bu x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. Bu durumda

$$A' := \{x \in X : x,\ A \text{ nın bir yığılma noktasıdır}\}$$

kümesine A nın türev (yığılma noktaları) kümesi adı verilir.

(d) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon)$ ile hem A nın hemde $X - A$ nın arakesiti boş değilse, bu x noktasına A kümesinin bir sınır noktası denir. Bu durumda

$$\partial A := \{x \in X : x,\ A \text{ nın bir sınır noktasıdır}\}$$

kümesine A nın sınırı adı verilir.

(e) Eğer uygun bir $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$ ise, bu x noktasına A kümesinin bir ayrık (izole) noktası; ve eğer uygun bir $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ise, bu x noktasına A kümesinin bir dış noktası denir.

Tanım 2.1.13 *A kapalı bir küme ve hiç ayrık noktası yok ise A kümesine mükemmel (perfect) küme denir.*

Teorem 2.1.7 *(Bolzano-Weierstrass) Gerçel sayıların sonsuz öğeli ve sınırlı her alt kümesinin en az bir tane yığılma noktası vardır.*

Tanım 2.1.14 *Eğer $\bar{A} = X$ ise A kümesine X uzayında yoğun bir kümedir denir. $\overset{o}{(\bar{A})} = \emptyset$ ise A kümesine X uzayında hiç bir yerde yoğun küme adı verilir.*

Tanım 2.1.15 *(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, a) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her bir noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir ya da kısaca süreklidir denir.*

Örnek 2.1.8 *$X = \mathbb{R}^2$ ve $Y = \mathbb{R}$ kümeleri üzerinde alışılmış metrikleri düşünelim. Bu durumda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ fonksiyonu süreklidir.*

Teorem 2.1.8 *(X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:*

(a) $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ süreklidir,

(b) X de bir (x_n) dizisi ve bir x noktası için,

$\lim_n d(x_n, x) = 0$ *ise* $\lim_n \rho(f(x_n), f(x)) = 0$ *olur.*

Örnek 2.1.9 *d öklid metriği, ρ ayrık metriği göstermek üzere $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho)$, $f(x) = x$ fonksiyonunu düşünelim. Bu durumda f sürekli değildir. Çünkü $(\frac{1}{n})$ dizisi için $\lim_n d(x_n, 0) = 0$ ancak $\lim_n \rho(f(x_n), f(0)) = 1$ dir.*

Tanım 2.1.16 (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzayları ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_1, x_2 \in X$ için $d(x_1, x_2) < \delta$ olduğunda

$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ *olacak biçimde bir* $\delta > 0$ *sayısı bulunabilirse,* f *fonksiyonuna* X *üzerinde düzgün süreklidir denir.*

Uyarı 2.1.4 *Tanıma dikkat edilirse, fonksiyonun düzgün sürekliliği bir küme üzerinde tanımlanmaktadır.*

Uyarı 2.1.5 *Eğer* $f : X \to Y$ *fonksiyonu düzgün sürekli bir fonksiyon ise* f *nin sürekli olduğu tanımdan açıktır. Ancak bir fonksiyonun sürekli olması onun düzgün sürekli olmasını gerektirmez. Örneğin* $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ *ve* $Y = \mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi üzerinde alışılmış metriklerin olduğunu varsayalım.* $f : X \to Y$, $f(x) = \frac{1}{x}$ *biçiminde tanımlanan* f *fonksiyonu süreklidir. Çünkü* X *ve* Y *üzerinde* $\mathbb{R}$ *üzerindeki alışılmış metrik ile elde edilen alt uzay metriği bulunduğundan* X *ve* Y *nin her alt kümesi açıktır. Ancak* f *fonksiyonu düzgün sürekli değildir.*

Örnek 2.1.10 $\mathbb{R}$ *üzerinde alışılmış metrik olmak üzere,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ *fonksiyonu düzgün süreklidir. Gerçekten de her* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *için*

$$d(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_1) - f(x_2)| = |2x_1 - 2x_2| = 2|x_1 - x_2|$$

olduğundan $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *olarak almak yeterlidir. Ancak* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *fonksiyonu düzgün sürekli değildir.*

Tanım 2.1.17 $\{f_n\}$, (X, d) *metrik uzayından* (Y, ρ) *metrik uzayına tanımlı olan fonksiyonların bir dizisi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *ve her* $x \in X$ *için* $n \geq n_0$ *iken* $\rho(f_{n(x)}, f_{(x)}) < \varepsilon$ *koşulunu sağlayan bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* $\{f_n\}$ *dizisi* $f : X \to Y$ *fonksiyonuna düzgün yakınsar denir.*

Teorem 2.1.9 *(Düzgün Limit Teoremi)* $f_n : X \to Y$, X *topolojik uzayından* Y *metrik uzayına sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer* $\{f_n\}$ *dizisi* f *e düzgün yakınsak ise* f *süreklidir.*

2.2 Metrik ve Topolojik Uzaylar

Tanım 2.2.1 *X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{T}$, X kümesinin bazı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{T}$ ailesi*

(T_1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T_2) $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{T}$ *olduğunda* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$,

(T_3) I herhangi bir küme olmak üzere her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \in \mathcal{T}$ olduğunda $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$

şartlarını sağlıyor ise $\mathcal{T}$ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji (topolojik yapı), $(X,\mathcal{T})$ ikilisine topolojik uzay, $\mathcal{T}$ nun her bir elemanına $\mathcal{T}$ topolojisine göre açık küme denir.

Tanım 2.2.2 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $K \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus K \in \mathcal{T}$ ise K kümesine $\mathcal{T}$ topolojisine göre kapalı küme denir.*

Tanım 2.2.3 *(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda*

$$\mathcal{T}_d = \{G \subset X : \forall x \in G \text{ için } \exists \varepsilon_x > 0 \text{ öyleki } B_d(x, \varepsilon_x) \subset G\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde d metriği ile üretilen metrik topoloji denir.

Şu halde her metrik uzay, metrik topoloji ile bir topolojik uzaydır. Aksi belirtilmediği takdirde bir metrik uzay topolojik uzay olarak metrik topoloji ile göz önüne alınır.

Tanım 2.2.4 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ koşulunu sağlayan bir d metriği varsa, bu $\mathcal{T}$ topolojisine metrik topoloji ve $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayına da metriklenebilir topolojik uzay denir.*

Tanım 2.2.5 *X bir küme ve d_1 ile d_2, X üzerinde iki metrik olsunlar. Eğer d_1 ile d_2, X üzerinde aynı topolojiyi üretirlerse, yani $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ sağlanıyorsa, bu iki metriğe denk metrikler denir.*

Önerme 2.2.1 *X üzerinde her d metriği sınırlı bir metriğe denktir.*

İspat. Verilen d metriği ile tanımlanan

$$d_1(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}$$

ve

$$d_2(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

fonksiyonlarının X üzerindeki d metriğine denk iki sınırlı metrik oldukları kolayca görülebilir. ■

Tanım 2.2.6 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $U \subset X$ olsun. Eğer $x \in G \subset U$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{T}$ varsa, bu U alt kümesine bu uzayda x noktasının bir komşuluğu denir.*

$x \in X$ noktasının $\mathcal{T}$ topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan aile $\mathcal{U}_\tau(x)$, veya topoloji belirtmenin gerekli olmadığı durumlarda kısaca $\mathcal{U}(x)$ ile gösterilir ve buna x in komşuluk ailesi yada komşuluklar sistemi denir.

Tanım 2.2.7 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $E(x) \subset \mathcal{U}_\tau(x)$ olsun. Eğer $E(x)$,*

$$\forall U \in \mathcal{U}_\tau(x) \text{ için } \exists V \in E(x) \text{ öyleki } V \subset U$$

şartını sağlıyorsa bu $E(x)$ ailesine bu topolojik uzayda x noktasının bir komşuluk tabanı denir.

Tanım 2.2.8 *Bir topolojik uzayın her noktasında sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, bu topolojik uzaya birinci sayılabilir uzay denir.*

Örnek 2.2.1 *(X,d) bir metrik uzay ise $(X,\mathcal{T}_d)$ bir birinci sayılabilir uzaydır. Gerçekten her $x \in X$ için*

$$E(x) = \{B(x,\frac{1}{n}) : n = 1,2,...\}$$

sayılabilir ailesinin x noktasında bir komşuluk tabanı olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.2.9 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\beta \subset \mathcal{T}$ olsun. Eğer her açık küme, β nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile*

$$\forall G \in \tau \text{ için } \exists \beta' \subset \beta \text{ öyleki } G \subset \bigcup_{B \in \beta'} B$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa bu β ailesine $\mathcal{T}$ topolojisi için bir taban (veya baz) adı verilir.

Örnek 2.2.2 *$\beta = \{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ailesi (X,d) metrik uzayında $\mathcal{T}_d$ metrik topolojisi için bir tabandır.*

Tanım 2.2.10 *Bir topolojik uzayın (yani topolojisinin) sayılabilir bir tabanı varsa, bu topolojik uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.*

Tanım 2.2.11 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $\vartheta = \{G_i : i \in I\}$ X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer*

$$A \subset \bigcup_{i \in I'} G_i$$

ise ϑ ailesine A nın bir örtüsü denir.

Eğer ϑ deki her bir G_i kümesi açık ise ϑ ye açık örtü adı verilir. ϑ ailesi A nın bir örtüsü olmak üzere eğer ϑ nin birleşimleri A yı örten sonlu tane elemanı varsa, yani

$$A \subset G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_n}$$

olacak şekilde $G_{i_1}, ..., G_{i_n} \in \vartheta$ varsa

$$\vartheta' = \{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$$

ailesine ϑ nin sonlu bir alt örtüsü denir.

Tanım 2.2.12 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir. Özel olarak X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa $(X,\mathcal{T})$ uzayına kompakt uzay denir.*

Tanım 2.2.13 *Bir topolojik uzaydaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa, bu uzaya dizisel kompakt uzay denir.*

Tanım 2.2.14 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi bu uzayda sayılabilir sayıda hiç bir yerde yoğun A_n $(n = 1, 2, ...)$ kümelerinin birleşimi olarak, yani*

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$$

şeklinde yazılabiliyorsa, A ya bu uzayda birinci kategoriden dir denir. X in birinci kategoriden olmayan diğer bütün alt kümelerine bu uzayda ikinci kategoriden adı verilir. Birinci kategoriden kümelere "zayıf kümeler" de denir.

Tanım 2.2.15 *$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. X de içi boş olan kapalı kümelerin herhangi bir sayılabilir ailesinin birleşiminin de içi boş ise bu uzaya Baire uzayı denir.*

Not 2 *Baire uzay olmanın iki denk koşulu aşağıdaki gibidir:*

(1) Sayılabilir sayıda yoğun kümelerin arakesitleri de yoğundur.

(2) Sayılabilir sayıda hiç bir yerde yoğun kapalı kümelerin herhangi birleşimlerinin içi boştur.

Teorem 2.2.1 *Her Baire uzayı kendisinin içinde ikinci kategoridendir.*

Teorem 2.2.2 *Her tam metrik uzay Baire uzaydır.*

.

3. FUZZY METRIK UZAYLAR

3.1 Fuzzy Metrik Uzaylarda Temel Kavramlar

Bu kesimde fuzzy metrik uzay tanım verilerek, fuzzy metrik uzay örnekleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca metrik ve fuzzy metrik ilişkileri anlatılacaktır.

Tanım 3.1.1 *(Schweizer and Sklar, 1960)* $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *bir ikili işlem olsun. Eğer bu* $*$ *işlemi* $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ *için;*

(1) $a * b = b * a$,

(2) $(a * b) * c = a * (b * c)$,

(3) $*$ *işlemi sürekli,*

(4) $a * 1 = a$,

(5) $a \leq c$ *ve* $b \leq d$ *iken* $a * b \leq c * d$,

şartlarını sağlıyor ise $*$ *işlemine sürekli t-norm denir*

Örnek 3.1.1 *(George ve Veeramani, 1994) Her* $a,b \in [0,1]$ *için* $a * b = ab$ *ve* $a * b = \min\{a,b\}$ *biçimde tanımlı* $*$ *ikili işlemleri birer sürekli t-normdurlar.*

Çözüm. $a*b = ab$ şeklinde tanımlanan ikili işlemin sürekli t-norm olduğunu gösterelim. $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ için;

(1) $a * b = ab = ba = b * a$ olduğundan $a * b = b * a$ dır.

(2) $(a * b) * c = (ab) * c = (ab)c = a(bc) = a * (bc) = a * (b * c)$ olduğundan $(a * b) * c = a * (b * c)$ dir.

(3) (a_n), (b_n) $[0,1]$ üzerinde iki dizi ve $a_n \to a, b_n \to b$ olsun. $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ olduğundan $a_n b_n \to ab$ ve dolayısıyla $a_n * b_n \to a * b$ olur. $*$ dizisel sürekli olduğundan süreklidir.

(4) $a * 1 = a1 = a$ dır.

(5) $a \leq c$ ve $b \leq d$ ise $ab \leq cd$, buradan $a * b \leq c * d$ olur.

Sonuç olarak $*$ sürekli t-normdur.

Benzer şekilde $a * b = \min\{a,b\}$ ikili işlemide sürekli t-normdur.

Tanım 3.1.2 *(George ve Veeramani, 1994)* X *boştan farklı bir küme,* $*$ *sürekli t-norm ve* M, $X \times X \times (0,\infty)$ *üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy küme* *olsun.* $\forall x, y, z \in X$ *ve* $\forall s, t > 0$ *için;*

(FM1) $M(x, y, t) > 0$,

(FM2) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

(FM3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(FM4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

(FM5) $M(x, y, .) : (0, \infty) \to [0, 1]$ *süreklidir.*

Bu durumda $(X, M, *)$ *üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir. Burada* $M(x, y, t)$ *ifadesine* x *ile* y *nin* t *ye göre birbirine yakın olma derecesi denir. (FM1) şartı, klasik metrik* d, ∞ *değeri alamacağından* M *nin* 0 *değerini alamayacağını belirtir. (FM2) şartı, her* $x \in X$ *ve* $t > 0$ *için* $M(x, x, t) = 1$ *ve her* $x \neq y$ *ve her* $t > 0$ *için* $M(x, y, t) < 1$ *demektir. Son olarak (FM5) şartında, sabit* x *ve* y *için* $t \to M(x, y, t)$ *sürekli bir fonksiyon olarak kabul edilmiştir.*

Uyarı 3.1.1 *(George ve Veeramani, 1994) (a)* $(X, M, *)$ *fuzzy metrik uzayında* $\forall x, y \in X$, $t > 0$ *ve* $0 < r < 1$ *için;* $M(x, y, t) > 1 - r$ *olduğunda* $M(x, y, t_0) > 1 - r$ *olacak biçimde* $0 < t_0 < t$ *koşulunu sağlayan bir* t_0 *bulunabilir.*

(b) Her bir $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in (0, 1)$ *için;* $r_1 > r_2$ *iken* $r_1 * r_3 \geq r_2$ *olacak biçimde bir* r_3 *ve herhangi bir* r_4 *için* $r_5 * r_5 \geq r_4$ *olacak biçimde bir* r_5 *bulunabilir*

Lemma 3.1.1 *(Grabiec, 1988)* $\forall x, y \in X$ *için* $M(x, y, .) : (0, \infty) \to [0, 1]$ *azalmayandır.*

İspat. $M(x, y, .) : (0, \infty) \to [0, 1]$ için $0 < t < s$ alalım. Kabul edelim ki $M(x, y, t) > M(x, y, s)$ yani kesin azalan olsun. Bu durumda

$$M(x, y, t) * M(y, y, s - t) \leq M(x, y, s) < M(x, y, t)$$

olup fuzzy metrik uzay tanımından $M(y, y, s - t) = 1$ olduğuna göre

$$M(x, y, t) * 1 = M(x, y, t) < M(x, y, t)$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\forall x, y \in X$ ve $t < s$ için $M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$ olup $M(x, y, .)$ azalmayandır. ■

Örnek 3.1.2 *(George ve Veeramani, 1994) $X=\mathbb{R}$ ve $a*b=ab$ olsun. $\forall x,y\in X$ ve $t>0$ için*

$$M(x,y,t) = \frac{1}{e^{|x-y|/t}}$$

biçiminde tanımlanır ise $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm. (FM1) $\forall x,y\in X$ ve $t>0$ için $M(x,y,t)>0$ olduğu açıktır.

(FM2)

$$\begin{aligned}
M(x,y,t)=1 &\iff \frac{1}{e^{|x-y|/t}}=1\\
&\iff e^{|x-y|/t}=1\\
&\iff |x-y|/t=0\\
&\iff |x-y|=0\\
&\iff x=y
\end{aligned}$$

(FM3) $M(x,y,t) = \dfrac{1}{e^{|x-y|/t}} = \dfrac{1}{e^{|y-x|/t}} = M(y,x,t)$

(FM4) $M(x,y,t)*M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$ olduğunu göstermek için ;

$$|x-z| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|y-z|$$

eşitsizliğini ele alalım. Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{|x-z|}{t+s} \leq \frac{|x-y|}{t}+\frac{|y-z|}{s} &\implies e^{|x-z|/(t+s)} \leq e^{|x-y|/t+|y-z|/s} = e^{|x-y|/t}e^{|y-z|/s}\\
&\implies \frac{1}{e^{|x-y|/t}e^{|y-z|/s}} \leq \frac{1}{e^{|x-z|/(t+s)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $M(x,y,t)*M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$ demektir.

(FM5) $M(x,y,.):(0,\infty)\to[0,1]$ sürekli midir? $\forall t_0>0$ için;

$$\lim_{t\to t_0} M(x,y,.) = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{e^{|x-y|/t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to t_0} e^{|x-y|/t}} = \frac{1}{e^{|x-y|/t_0}} = M(x,y,t_0)$$

O halde $M(x,y,.):(0,\infty)\to[0,1]$ süreklidir.

Böylece $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Uyarı 3.1.2 *(George ve Veeramani, 1994) Son örnekte* $\mathbb{R}$ *yerine herhangi bir X metrik uzayının ve $|x-y|$ yerine $d(x,y)$ alabiliriz. Ayrıca t-norm olarakta $a*b=\min\{a,b\}$ sürekli t-normunu düşünebiliriz.*

Örnek 3.1.3 *(George ve Veeramani, 1994)* (X, d) *bir metrik uzay ve* $a * b = a.b$ *olsun.* $\forall k, m, n \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$M_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$$

şeklinde tanımlanırsa $(X, M_d, *)$ *bir fuzzy metrik uzaydır.*

Uyarı 3.1.3 *(George ve Veeramani, 1994) Üstteki örnek,* t*-norm olarak* $a * b = \min\{a, b\}$ *alınması durumunda da geçerlidir. Bu örnek her metriğin bir fuzzy metrik oluşturacağını da göstermektedir. Ayrıca* $k = m = n = 1$ *alınması durumunda*

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

elde edilir. Bu M_d *fuzzy kümesi ile de* $(X, M_d, *)$ *bir fuzzy metrik uzaydır. Bu metriğe* d *metriği tarafından oluşturulan standart fuzzy metrik denir.*

Şimdi de, (X, d) metrik uzay, $a, b \in [0, 1]$ ve $a * b = ab$ olmak üzere $t > 0$ için;

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

şeklinde tanımlanırsa $(X, M_d, *)$ üçlüsünün fuzzy metrik uzay olduğunu görelim.

(FM1) $t \in (0, \infty)$ ve metrik tanımından $d(x, y) \geq 0$ olup, $M_d(x, y, t) > 0$ dır.

(FM2) $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için,

$M_d(x, y, t) = 1 \iff \dfrac{t}{t + d(x, y)} = 1 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$ dir.

(FM3) Metrik tanımından $d(x, y) = d(y, x)$ olup

$M_d(x, y, t) = \dfrac{t}{t + d(x, y)} = \dfrac{t}{t + d(y, x)} = M_d(y, x, t)$ dir.

(FM4) $\forall x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için $M_d(x, y, t) * M_d(y, z, s) \leq M_d(x, z, t + s)$ eşitsizliğinin sağlandığı görelim. Metrik tanıma göre $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ve $\dfrac{t + s}{t} > 1$, $\dfrac{t + s}{s} > 1$ olduğundan ;

$$\begin{aligned}
d(x, z) \leq \left(\frac{t + s}{t}\right)d(x, y) + \left(\frac{t + s}{s}\right)d(y, z) \quad &\Rightarrow \frac{d(x, z)}{t + s} \leq \frac{d(x, y)}{t} + \frac{d(y, z)}{s} \\
&\Rightarrow \frac{d(x, z)}{t + s} \leq \frac{sd(x, y) + td(y, z)}{st} \\
&\Rightarrow 1 + \frac{d(x, z)}{t + s} \leq 1 + \frac{sd(x, y) + td(y, z)}{st} \\
&\Rightarrow \frac{t + s + d(y, z)}{t + s} \leq \frac{st + sd(x, y) + td(y, z)}{st}
\end{aligned}$$

ve $d(x,y)d(y,z) \geq 0$ olduğundan,

$$\frac{t+s+d(x,z)}{t+s} \leq \frac{st+sd(x,y)+td(y,z)}{st} \leq \frac{st+sd(x,y)+td(y,z)+d(x,y)d(y,z)}{st}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{st}{st+sd(x,y)+td(y,z)+d(x,y)d(y,z)} \leq \frac{t+s}{t+s+d(x,z)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{t}{t+d(x,y)}\right)\left(\frac{s}{s+d(y,z)}\right) \leq \frac{t+s}{t+s+d(x,z)}$$

bulunur ki bu $M_d(x,y,t) * M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$ eşitsizliğini verir.

(FM5) $\forall x,y \in X$ ve $t_0 > 0$ için ;

$$\lim_{t \to t_0} M_d(x,y,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{t}{t+d(x,y)} = \frac{\lim_{t \to t_0} t}{\lim_{t \to t_0} t + d(x,y)} = \frac{t_0}{t_0+d(x,y)} = M_d(x,y,t_0)$$

olduğundan $M_d(x,y,.) : (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

Böylece M_d, X üzerinde bir fuzzy metrik ve $(X, M_d, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Örnek 3.1.4 *(George ve Veeramani, 1994) $X = \mathbb{N}$ ve $a * b = ab$ olsun. Her $t > 0$ için;*

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & ; x \leq y \\ \dfrac{y}{x} & ; y \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ise $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Çözüm. (FM1) $\forall t > 0$ ve $x,y \in \mathbb{N}$ için $M(x,y,t) > 0$ olduğu açıktır.

(FM2) $\forall x,y \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $M(x,y,t) = 1 \Rightarrow x = y$ olduğunu görelim.

(i) $x \leq y \Rightarrow M(x,y,t) = \dfrac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $y \leq x \Rightarrow M(x,y,t) = \dfrac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y$

(FM3) $\forall x,y \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & ; x \leq y \\ \dfrac{y}{x} & ; y \leq x \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{y}{x} & ; y \leq x \\ \dfrac{x}{y} & ; x \leq y \end{cases} = M(y,x,t)$$

dir.

(FM4) $\forall x,y,z \in \mathbb{N}$ ve $s,t > 0$ için $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$ olduğunu görelim. Kabul edelim ki $x \leq y$ olsun.

(i) $x \leq y \leq z$ ise $M(x,y,t) = \dfrac{x}{y}, M(y,z,s) = \dfrac{y}{z}$ ve $M(x,z,t+s) = \dfrac{x}{z}$ olup

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{z} = M(x,z,t+s)$ dir.

(ii) $x \leq z \leq y$ ise $M(x,y,t) = \dfrac{x}{y}, M(y,z,s) = \dfrac{z}{y}$ ve $M(x,z,s+t) = \dfrac{x}{z}$ olup

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \dfrac{x}{y}\dfrac{z}{y} \leq \dfrac{x}{z} = M(x,z,t+s)$ dir.

(iii) $z \leq x \leq y$ ise $M(x,y,t) = \dfrac{x}{y}, M(y,z,s) = \dfrac{z}{y}$ ve $M(x,z,s+t) = \dfrac{z}{x}$ olup

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \dfrac{x}{y}\dfrac{z}{y} \leq \dfrac{z}{x} = M(x,z,t+s)$ dir.

Benzer şekilde $y \leq x$ için de $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$ olduğu görülür.

(FM5) $\forall t_0 > 0$ için $\lim_{t \to t_0} M(x,y,t) = M(x,y,t_0)$ olduğu açıktır. Bu nedenle $M(x,y,.) : (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir. Böylece $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Not 3 *Yukarıdaki örnekte olduğu gibi M, t ye bağlı değilse M ye stationary fuzzy metrik adı verilir (Gregori ve Romaguera, 2004). Başka bir deyişle, her $x, y \in X$ için $M(x,y,t)$ sabit fonksiyon ise M ye stationary fuzzy metrik denir.*

Uyarı 3.1.4 *(George ve Veeramani, 1994) Son örnekte verilen*

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & ; x \leq y \\ \dfrac{y}{x} & ; y \leq x \end{cases}$$

için $M(x,y,t) = \dfrac{t}{t + d(x,y)}$ *olacak biçimde X üzerinde hiçbir d metriği yoktur. Ayrıca $a * b = \min\{a,b\}$ t-normu alınırsa $M(x,y,t)$ fuzzy metrik değildir.*

3.2 Fuzzy Metrik Tarafından Üretilen Topoloji ve Özellikleri

Bu kesimde, klasik metrik uzaylar teorisinden bilinen ve çeşitli araştırmacılar tarafından fuzzy metrik uzaylar yapısında incelenen bazı kavram ve sonuçlar sunulacaktır.

Tanım 3.2.1 *(George ve Veeramani, 1994) $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda*

$$B(x,r,t) = \{y \in X : M(x,y,t) > 1 - r\}$$

kümesine x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir.

Önerme 3.2.1 *$x \in X$, $t > 0$ ve $0 < r_1 < 1$, $0 < r_2 < 1$ olmak üzere $B(x, r_1, t)$ ve $B(x, r_2, t)$ aynı merkezli açık yuvarlar olsunlar. Bu durumda ya $B(x, r_1, t) \subset B(x, r_2, t)$ yada $B(x, r_2, t) \subset B(x, r_1, t)$ dır.*

Ispat. Eğer $r_1 = r_2$ ise önerme doğrudur. Kabul edelim ki $r_1 \neq r_2$ olsun. Genelliği bozmadan $0 < r_1 < r_2 < 1$ seçebiliriz. Bu durumda $1 - r_2 < 1 - r_1$ dir. Şimdi $a \in B(x, r_1 t)$ olsun. Buradan $M(a, x, t) > 1 - r_1 > 1 - r_2$ olacağından $a \in B(x, r_2, t)$ olur. Bu $0 < r_1 < r_2 < 1$ seçildiğinde $B(x, r_1, t) \subset B(x, r_2, t)$ olduğunu gösterir.

Benzer şekilde $0 < r_2 < r_1 < 1$ seçildiğinde $B(x, r_2, t) \subset B(x, r_1, t)$ olduğu kolayca gösterilebilir. ■

Tanım 3.2.2 *$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \in B(x, r, t) \subset A$ olacak şekilde bir $B(x, r, t)$ açık yuvarı varsa A ya açık bu fuzzy metrik uzayda açıktır denir.*

Teorem 3.2.1 *(George ve Veeramani, 1994) Her açık yuvar açık kümedir.*

Ispat. $B(x, r, t)$ açık yuvarını ele alalım. $y \in B(x, r, t)$ keyfi bir nokta olsun. $B(x, r, t)$ nin tanımından $y \in B(x, r, t)$ ise $M(x, y, t) > 1 - r$ olur. Bu durumda $M(x, y, t_0) > 1 - r$ olacak biçimde $0 < t_0 < t$ şartını sağlayan bir t_0 bulunabilir. $r_0 = M(x, y, t_0)$ olsun. $r_0 = M(x, y, t_0) > 1 - r$ olduğundan $r_0 > 1 - s > 1 - r$ olacak biçimde $0 < s < 1$ şartını sağlayan bir s bulunabilir. Ayrıca $r_0 > 1 - s$ olacak biçimde verilen r_0 ve s için $r_0 * r_1 \geq 1 - s$ şartını sağlayan bir $r_1 \in (0, 1)$ bulunabilir. Şimdi $B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ açık yuvarını göz önüne alalım. Iddia ediyoruz ki $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$ dir.

$z \in B(y, 1 - r_1, t - t_0)$ olsun. O halde $M(y, z, t - t_0) > 1 - (1 - r_1) = r_1$ dir. Buradan

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t_0) * (y, z, t - t_0) > r_0 * r_1 \geq 1 - s > 1 - r$$

olacağından $z \in B(x, r, t)$ olur. Böylece $B(y, 1 - r_1, t - t_0) \subset B(x, r, t)$ bulunur. Bu ise $B(x, r, t)$ nin açık küme olduğunu verir. ■

Sonuç 3.2.1 *(George ve Veeramani, 1994) $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun.*

$\tau_M = \{A \subset X : \forall x \in A$ *için* $B(x, r, t) \subset A$ *olacak biçimde* $t > 0$ *ve* $r \in (0, 1)$ *vardır*$\}$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{T}_M$, X üzerinde bir topolojidir.

İspat. (T_1) $\emptyset$ kümenin hiçbir elemanı olmadığından $\emptyset$ nin elemanlarını merkez kabul eden açık yuvar boştur. Dolayısıyla $\emptyset$ tarafından kapsanır. O halde $\emptyset \in \mathcal{T}_M$ dir ve $\forall x \in X$ ve $0 < r < 1$ için $B(x,r,t) \subset X$ olduğundan $X \in \mathcal{T}_M$ olur. Böylece $\emptyset, X \in \mathcal{T}_M$ dur.

(T_2) $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in \mathcal{T}_M$ olsun.

(i) $\cap_{i=1}^n A_i = \emptyset \Rightarrow \cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_M$ dir.

(ii) $\cap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ ve $x \in \cap_{i=1}^n A_i$ olsun. Bu durumda $\forall i = 1, 2, ..., n$ için $x \in A_i$ ve $A_i \in \mathcal{T}_M$ olduğundan $\forall i = 1, 2, ..., n$ için $B(x, r_i, t) \subset A_i$ olacak biçimde $0 < r_i < 1$ ve $t_i > 0$ vardır. $r = \min\{r_i : i = 1, ...n\}$ ve $t = maks\{t_i : i = 1, ..., n\}$ olsun. Buradan $\forall i = 1, 2, ..., n$ için $B(x,r,t) \subset B(x, r_i, t_i) \subset A_i$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ bulunmuş olur. Bu durumda $B(x,r,t) \subset \cap_{i=1}^n A_i$ elde edilir ki bu $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_M$ demektir.

(T_3) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_M$ iken $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_M$ olduğunu görelim.

(i) $\cup_{i \in I} A_i = X$ ise $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_M$ olduğu açıktır.

(ii) $x \in \cup_{i \in I} A_i \neq X$ olsun. Bu durumda $\exists i_0 \in I$ için $x \in A_{i_0}$ dır. $A_{i_0} \in \mathcal{T}_M$ olduğundan $B(x,r,t) \subset A_{i_0}$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ vardır. $A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i$ olduğundan bir $0 < r < 1$ ve bir $t > 0$ için $B(x,r,t) \subset \cup_{i \in I} A_i$ olur. O halde $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_M$ dur.

Böylece $\mathcal{T}_M$, X üzerinde bir topolojidir. ■

Önerme 3.2.2 *(George and Veeramani, 1994)* $(X, \mathcal{T}_M)$ *topolojik uzay ve* $x \in X$ *olsun. Buna göre*

$$E(x) = \{B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi x *in yerel (komşuluklar) tabanıdır.*

İspat. Komşuluk tanımından N, x in bir komşuluğu ise $x \in U \subset N$ olacak biçimde en az bir $U \subset X$ açığı vardır. $U \subset X$ açık olduğundan $B(x,r,t) \subset U$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ vardır. $\frac{1}{n} < r$ ve $\frac{1}{n} < t$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Şimdi $B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset B(x,r,t)$ olduğunu görelim. $z \in B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ olsun. O halde $M(x, z, \frac{1}{n}) > 1 - \frac{1}{n} > 1 - r$ olur. $M(x, z, \frac{1}{n}) * M(z, z, t - \frac{1}{n}) \leq M(x,z,t)$ ve $M(z, z, t -$

$\frac{1}{n}) = 1$ olduğundan $M(x,z,\frac{1}{n}) \le M(x,z,t)$ bulunur. Ayrıca $M(x,z,\frac{1}{n}) > 1 - r$ eşitsizliğinden $M(x,z,t) > 1 - r$ olacaktır. Buna göre $z \in B(x,r,t)$ dir. Böylece $B(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \subset B(x,r,t) \subset U \subset N$ yani $B(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \subset N$ dir. O halde x in her N komşuluğu için $B(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \subset N$ olacak biçimde en az bir $B(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \in E(x)$ bulunabileceğinden $E(x)$, x in yerel (komşuluklar) tabanıdır. ■

Not 4 *(George and Veeramani, 1994) Yukarıda tanımlanan $E(x)$ ailesinin her bir elemanı doğal sayılar tarafından indislendiğinden $E(x)$ sayılabilir bir ailedir. Bu sebeple $E(x)$, x in sayılabilir komşuluklar tabanıdır. Sonuç olarak (X,τ_M) topolojik uzayı birinci sayılabilir uzaydır.*

Sonuç 3.2.2 *(George ve Veeramani, 1994) (X,d) bir metrik uzay ve $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ olsun. Bu durumda d metriği ve M fuzzy metriği tarafından X üzerine indirgenen topolojiler çakışır.*

Teorem 3.2.2 *(George ve Veeramani, 1994) Her fuzzy metrik uzay Hausdorff uzaydır.*

Ispat. $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay, $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Fuzzy metrik tanımına göre $x \neq y$ olduğundan $0 < M(x,y,t) < 1$ dir. $r = M(x,y,t)$ dersek, $r < r_0 < 1$ şartını sağlayan her bir r_0 için $r_1 * r_1 \ge r_0$ eşitsizligini sağlayan bir r_1 bulunabilir. Şimdi $B(x,1-r_1,\frac{1}{2}t)$ ve $B(y,1-r_1,\frac{1}{2}t)$ açık yuvarlarını ele alalım. Açıktır ki, $B(x,1-r_1,\frac{1}{2}t) \cap B(y,1-r_1,\frac{1}{2}t) = \emptyset$ dir. Aksi halde $z \in B(x,1-r_1,\frac{1}{2}t) \cap B(y,1-r_1,\frac{1}{2}t)$ ise

$$r = M(x,y,t) \ge M(x,z,\frac{1}{2}t) * M(z,y,\frac{1}{2}t) \ge r_1 * r_1 \ge r_0 > r$$

elde edilir ki, bu bir çeliskidir. O halde $x,y \in X$ ve $x \neq y$ için $B(x,1-r_1,\frac{1}{2}t) \cap B(y,1-r_1,\frac{1}{2}t) = \emptyset$ dir. Buna göre $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzaydır. ■

Teorem 3.2.3 *(George ve Veeramani, 1994) $(X,M,*)$ bir fuzzy metrik uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun. $x_n \to x$ olması için gerekli ve yeterli koşul $n \to \infty$ için $M(x_n,x,t) \to 1$ olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$. Kabul edelim ki $x_n \to x$ olsun. O zaman $0 < r < 1$ için $n \geq n_0$ iken $x_n \in B(x, r, t)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $M(x_n, x, t) > 1 - r$ yani $1 - M(x_n, x, t) < r$ olur. Böylece $n \to \infty$ için $M(x_n, x, t) \to 1$ dir.

$(\Leftarrow)$. Her $t > 0$ için $n \to \infty$ iken $M(x_n, x, t) \to 1$ ise $0 < r < 1$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_0$ iken $1 - M(x_n, x, t) < r$ olur. Buradan her $n \geq n_0$ için $M(x_n, x, t) > 1 - r$ yani $x_n \in B(x, r, t)$ olup, bu $x_n \to x$ demektir. ■

Önerme 3.2.3 *(Afrouzi vd., 2011)* $(X, M, *)$ *fuzzy metrik uzay ve* $\lambda \in [0, 1)$ *olsun. Bu durumda* X *üzerinde öyle bir* m *fuzzy metriği vardır ki her* $x, y \in X$ *ve* $t > 0$ *için* $m(x, y, t) \geq \lambda$ *dır. Ayrıca* m *ve* M, X *üzerinde aynı topolojiyi üretirler.*

İspat. $m(x, y, t) = \max\{\lambda,\ M(x, y, t)\}$ biçiminde tanımlansın. İddiamız m, X üzerinde bir fuzzy metriktir. Fuzzy metrik olma koşullarından (FM1), (FM2), (FM3) ve (FM5) m nin tanımından açıktır. üçgen eşitsizliği için $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olsun. Bu durumda $m(x, z, t + s) \geq \lambda$ ve $m(x, y, t) = \lambda$ veya $m(y, z, s) = \lambda$ olduğunda $m(x, z, t + s) \geq m(x, y, t) * m(y, z, s)$ dır. Eğer $m(x, y, t) = M(x, y, t) > \lambda$ ve $m(y, z, s) = M(y, z, s) > \lambda$ ise M üçgen eşitsizliğini sağladığından ve $m(x, z, t + s) \geq M(x, z, t + s)$ olduğundan

$$m(x, z, t + s) \geq M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s) = m(x, y, t) * m(y, z, s)$$

yani $m(x, z, t + s) \geq m(x, y, t) * m(y, z, s)$ elde edilir. Böylece m, X üzerinde fuzzy metriktir. Ayrıca her bir $t > 0$ için $m(x_n, x, t) \to 1 \Leftrightarrow \{\lambda, M(x_n, x, t)\} \to 1 \Leftrightarrow M(x_n, x, t) \to 1$ olacağından m tarafından üretilen topoloji ile M tarafından üretilen topoloji aynıdır.

Bu lemmada ki m fuzzy metriği λ ile sınırlıdır denir. ■

Uyarı 3.2.1 *(Lopez ve Romaguera, 2004)* $(X, M, *)$ *bir fuzzy metrik uzay olsun Bu durumda* M, $X \times X \times (0, \infty)$ *üzerinde bir sürekli fonksiyondur.*

İspat. $X \times X \times (0, \infty)$ da $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $(x'_n, y'_n, t'_n)_n$ dizisi (x, y, t) ye yakınsar olsun. $(M(x'_n, y'_n, t'_n))_n$, $(0, 1]$ de bir dizi olduğundan, $(x'_n, y'_n, t'_n)_n$ dizisinin bir $(x_n, y_n, t_n)_n$ alt dizisi vardır ki, $(M(x_n, y_n, t_n))_n$ dizisi $[0, 1]$ de yakınsaktır. $\delta <$

$t/2$ olacak şekilde $\delta > 0$ ı sabitleyelim. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $|t - t_n| < \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$M(x_n, y_n, t_n) \geq M(x_n, x, \delta/2) * M(x, y, t - 2\delta) * M(y, y_n, \delta/2)$$

ve her $n \geq n_0$ için

$$M(x, y, t + 2\delta) \geq M(x, x_n, \delta/2) * M(x_n, y_n, t_n) * M(y_n, y, \delta/2)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alındığında

$$\lim_n M(x_n, y_n, t_n) \geq 1 * M(x, y, t - 2\delta) * 1 = M(x, y, t - 2\delta)$$

ve

$$M(x, y, t + 2\delta) \geq 1 * \lim_n M(x_n, y_n, t_n) * 1 = \lim_n M(x_n, y_n, t_n)$$

olacaktır. Böylece $t \to M(x, y, t)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$M(x, y, t) = \lim_n M(x_n, y_n, t_n)$$

olur ki bu M nin $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğunu verir. ■

Tanım 3.2.3 *(George ve Veeramani, 1994)* $(X, M, *)$ *bir fuzzy metrik uzay ve* A*,* X *in bir alt kümesi olsun. Eğer her* $x, y \in A$ *için* $M(x, y, t) > 1 - r$ *olacak biçimde* $t > 0$ *ve* $0 < r < 1$ *varsa* A *kümesine* F*-sınırlıdır denir..*

Teorem 3.2.4 *(George ve Veeramani, 1994)* $(X, M, *)$*,* d *metriği tarafından indirgenen bir fuzzy metrik uzay ve* A*,* X *in bir alt kümesi olsun.* A *kümesinin* F*-sınırlı olması için gerekli ve yeterli şart* A *nın sınırlı olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$. $A \subset X$ kümesi F-sınırlı olsun. O halde $\forall x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olacak biçimde $t > 0$ ve $0 < r < 1$ vardır. Buradan her $a \in A$ için bir $x \in A \subset X$ alındığında $M(x, a, t) > 1 - r$ olduğundan $a \in B(x, r, t)$ olur. Bu ise $A \subset B(x, r, t)$ olacak şekilde $x \in X$, $t > 0$ ve $0 < r < 1$ var demektir. Böylece A sınırlıdır.

$(\Leftarrow)$. $A \subset X$ kümesi sınırlı olsun. Buna göre $A \subset B(x, r, t)$ olacak biçimde $x \in X$, $t > 0$ ve $0 < r < 1$ vardır. O halde her $a, b \in A$ için $a, b \in B(x, r, t)$ olup $M(x, a, t) > 1 - r$ ve $M(x, b, t) > 1 - r$ dir. Buradan $\forall a, b \in A$ için

$$M(a, b, 2t) \geq M(a, x, t) * M(x, b, t) > (1 - r) * (1 - r)$$

olur. Öte yandan $0 < r < 1$ için $(1 - r) * (1 - r) > 1 - s$ olacak şekilde $0 < s < 1$ vardır. Şimdi $2t = t'$ denirse her $a, b \in A$ için $M(a, b, t') > 1 - s$ olacak şekilde $t' > 0$ ve $0 < s < 1$ bulunur. Bu ise A nın F-sınırlı olduğunu verir. ■

Teorem 3.2.5 *(George ve Veeramani, 1994) $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. X in her kompakt alt kümesi F-sınırlıdır.*

İspat. X in kompakt bir A alt kümesini göz önüne alalım. $t > 0$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere $\{B(x, r, t) : x \in A\}$ ailesi A nın bir açık örtüsü olsun. A kompakt olduğundan $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r, t)$ olacak şekilde $x_1, x_2, ...x_n \in A$ vardır. $x, y \in A$ olsun. Bu durumda $x \in B(x_i, r, t)$ ve $y \in B(x_j, r, t)$ olacak şekilde $1 \leq i, j \leq n$ vardır. Bu nedenle $M(x, x_i, t) > 1 - r$ ve $M(y, x_j, t) > 1 - r$ olur. $\alpha = \min\{M(x_i, x_j, t) : 1 \leq i, j \leq n\}$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ dır.

$$M(x, y, 3t) \geq M(x, x_i, t) * M(x_i, x_j, t) * M(x_j, y, t) > (1 - r) * (1 - r) * \alpha$$

eşitsizliğini düşünelim. $3t = t'$ diyerek $(1 - r) * (1 - r) * \alpha > 1 - s$ olacak biçimde $0 < s < 1$ alalım. Böylece her $x, y \in A$ için $M(x, y, t') > 1 - s$ olur. Buna göre A, F-sınırlıdır. ■

Sonuç 3.2.3 *(George ve Veeramani, 1994) Bir fuzzy metrik uzayda her kompakt küme kapalı ve sınırlıdır.*

İspat. Her fuzzy metrik uzay Hausdorff uzayı ve Hausdorff bir X uzayının her kompakt alt kümesi X de kapalı olduğundan $A \subset X$ kompakt ise $A \subset X$ kapalıdır. Ayrıca Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 dan $A \subset X$ kompakt ise A F-sınırlıdır dolayısıyla A sınırlıdır. ■

Tanım 3.2.4 *(Grabiec, 1988) $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul her $p > 0$ ve her $t > 0$ için $\lim_{n \to \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ olmasıdır.*

Tanım 3.2.5 *(George ve Veeramani, 1994) Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu fuzzy metrik uzaya tam fuzzy metrik uzay denir.*

Sonuç 3.2.4 *(George ve Veeramani, 1997)* (X, d) *metrik uzayının tam olması için gerekli ve yeterli şart* $M(x, y, t) = \dfrac{t}{t + d(x, y)}$ $(x, y \in X, t > 0)$ *olmak üzere* $(X, M, *)$ *fuzzy metrik uzayının tam olmasıdır.*

Uyarı 3.2.2 *(George ve Veeramani, 1994) Yukarıdaki Tanım 3.2.4 e göre* $\mathbb{R}$ *tam fuzzy metrik uzay değildir.*

Örnek 3.2.1 $(\mathbb{R}, d)$ *metrik uzay,* $d(x, y) = |x - y|$ *ve* $a * b = ab$ *olsun.* $M(x, y, t) = \dfrac{t}{t + d(x, y)}$ *biçiminde tanımlanırsa* $(\mathbb{R}, M, *)$ *fuzzy metrik uzaydır. Bu uzayda*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

olacak biçimde (S_n) *dizisini ele alalım. Her* $p > 0$ *için;*

$$M(S_{n+p}, S_n, t) = \frac{t}{t + |S_{n+p} - S_n|} = \frac{t}{t + (\frac{1}{n} + 1) + (\frac{1}{n} + 2) + ... + (\frac{1}{n} + p)}$$

olduğundan $\lim_{n \to \infty} M(S_{n+p}, S_n, t) = 1$ *olur. O halde* (S_n) *dizisi* $(\mathbb{R}, M, *)$ *fuzzy metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Eğer* $\mathbb{R}$ *tam fuzzy metrik uzay ise en az bir* $x \in \mathbb{R}$ *noktası vardır ki* $n \to \infty$ *iken* $M(S_n, x, t) \to 1$ *dir. Buradan* $n \to \infty$ *iken* $\dfrac{t}{t + |S_n - x|} \to 1$ *yani* $n \to \infty$ *iken* $|S_n - x| \to 0$ *olur. Dolayısıyla* $S_n \to x$ *tir. Ancak* $\mathbb{R}$ *de bu doğru değildir. Bu sebeple* $\mathbb{R}$ *tam fuzzy metrik uzay değildir.*

$\mathbb{R}$ nin tam fuzzy metrik uzay olması için, George ve Veeramani (1994) Cauchy dizisi tanımını aşağıdaki gibi değiştirdiler.

Tanım 3.2.6 $(X, M, *)$ *fuzzy metrik uzayında bir* (x_n) *dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli şart her bir* $\varepsilon > 0$*,* $t > 0$ *için* $m, n \geq n_0$ *iken* $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısının bulunmasıdır.*

Sonuç 3.2.5 *Tanım 3.2.6 de verilen Cauchy dizisi tanımına göre* $\mathbb{R}$ *tam fuzzy metrik uzaydır.*

Ispat. $(\mathbb{R}, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve (x_n) $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$, $t > 0$ için $m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre $\forall n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_{n_0}, t) > 1 - \varepsilon$ olur. Yani $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon, t)$ dir. $A = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ denirse $A \subset B(x_{n_0}, \varepsilon, t)$ yani A sınırlı olur. $B = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0+1}\}$ olsun. B sonlu olduğundan B de sınırlı olup

$(x_n) = A \cup B$ dolayısıyla (x_n) sınırlıdır. Bolzano-Wierstrass Teoremine göre R nin sonsuz elemanlı sınırlı her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır. Kabul edelim ki x, (x_n) dizisinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ alt dizisi vardır. $x_{n_k} \to x$ olduğundan her $0 < r < 1$ için $n_k \geq n_1$ iken $x_{n_k} \in B(x, r, t)$ olacak şekilde bir $n_1 \in$ N vardır. Buradan her $0 < r < 1$ için $n_k \geq n_1$ iken $M(x_{n_k}, x, t) > 1 - r$ olacak şekilde $n_1 \in$ N bulunmuş olur. $n_2 = maks\{n_0, n_1\}$ olsun. Her $n \geq n_2$ için

$$M(x_n, x, 2t) \geq M(x_n, x_{n_k}, t) * M(x_{n_k}, x, t) > (1 - \varepsilon) * (1 - r)$$

olacaktır. Öte yandan $\varepsilon > 0$ ve $0 < r < 1$ için $(1 - \varepsilon) * (1 - r) < 1 - s$ olacak biçimde $0 < s < 1$ vardır. Ayrıca $2t = t'$ denirse $M(x_n, x, t') > 1 - s$ yani $x_n \in B(x, s, t')$ olur. Buna göre $x_n \to x$ bulunur. Böylece R tam fuzzy metrik uzaydır. ■

Tanım 3.2.7 *(Gregori ve Romaguera, 2000) Eğer $0 < r < 1$ olan her bir r ve her $t > 0$ için*

$$X = \cup_{a \in A} B(a, r, t)$$

şeklinde X in sonlu bir A alt kümesi varsa $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı prekompakt olarak adlandırılır.

Bu durumda M, X üzerinde bir prekompakt fuzzy metriktir denir. Eğer $(X, \mathcal{T}_M)$ bir kompakt topolojik uzay ise $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayına kompakttır denir.

Lemma 3.2.1 *(Gregori ve Romaguera, 2000) Bir fuzzy metrik uzayın prekompakt olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki her dizinin bir Cauchy alt dizisine sahip olmasıdır.*

Ispat. $(X, M, *)$ ın bir prekompakt fuzzy metrik uzay olduğu kabul edilsin. $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ X de bir dizi olsun. Prekompaklıktan her $m \in$ N için $X = \cup_{a \in A_m} B(a, 1/m, 1/m)$ olacak şekilde X in bir A_m sonlu alt kümesi vardır. Bu nedenle $m = 1$ ve her $n \in$ N için $x_{1(n)} \in B(a_1, 1, 1)$ olacak şekilde bir $a_1 \in A_1$ ve $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ nin bir $(x_{1(n)})_{n \in \mathrm{N}}$ alt dizisi vardır. Benzer şekilde her $n \in$ N için $x_{2(n)} \in B(a_2, 1/2, 1/2)$ olacak şekilde bir $a_2 \in A_2$ ve $(x_{1(n)})_{n \in \mathrm{N}}$ nin $(x_{2(n)})_{n \in \mathrm{N}}$ alt dizisi vardır. Bu yöntem izlenerek

$m \in \mathbb{N}$ ($m > 1$) için ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{m(n)} \in B(a_m, 1/m, 1/m)$ olacak şekilde bir $a_m \in A_m$ ve $(x_{(m-1)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nin bir $(x_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Şimdi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nin $((x_{n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisini ele alalım. Verilen bir $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için, $2/n_0 < t$ ve $(1 - (1/n_0)) * (1 - (1/n_0)) > 1 - r$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her bir $k, m \geq n_0$ için;

$$\begin{aligned} M(x_{k(k)}, x_{m(m)}, t) &\geq M(x_{k(k)}, x_{m(m)}, 2/n_0) \\ &\geq M(x_{k(k)}, a_{n_0}, 1/n_0) * M(a_{n_0}, x_{m(m)}, 1/n_0) \\ &\geq (1 - (1/n_0)) * (1 - (1/n_0)) \\ &> 1 - r \end{aligned}$$

olacağından $((x_{n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ $(X, M, *)$ da bir Cauchy dizisidir.

Tersine, $(X, M, *)$ prekompakt olmayan fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda X in her bir sonlu A alt kümesi için $X \neq \cup_{a\in A} B(a, r, t)$ olacak şekilde $0 < r < 1$ olan bir r ve $t > 0$ vardır. $x_1 \in X$ sabit olsun. Bu durumda bir $x_2 \in X \setminus B(x_1, r, t)$ vardır. Üstelik bir $x_3 \in X \setminus (\cup_{k=1}^{2} B(x_k, r, t))$ noktası da vardır. Bu yöntem izlenerek X in farklı noktaları ile bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi oluşturulur ki bu dizi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \notin \cup_{k=1}^{n} B(x_k, r, t)$ koşulunu sağlar. Bu yüzden $(x_{n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy alt diziye sahip değildir. Bu ispatı tamamlar. ■

Lemma 3.2.2 *(Gregori ve Romaguera, 2000)* $(X, M, *)$ *bir fuzzy metrik uzay olsun. Eğer* X *teki bir Cauchy dizisi bir* $x \in X$ *yığılma noktasına sahip ise bu dizi* x *e yakınsar.*

İspat. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in X$ yığılma noktasına sahip olan $(X, M, *)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda τ_M ye göre X e yakınsayan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizisi olan $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vardır. Böylece $0 < r < 1$ ile verilen r ve $t > 0$ için $s > 0$ iken $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$ olmak üzere her bir $n \geq n_0$ için

$$M(x, x_{k(n)}, \frac{t}{2}) > 1 - s$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan her bir $n, m \geq n_1$ için

$$M(x_n, x_m, \frac{t}{2}) > 1 - s$$

olacak şekilde $n_1 \geq k(n_0)$ vardır. Bu nedenle her bir $n \geq n_1$ için

$$\begin{aligned} M(x, x_n, t) &\geq M(x, x_{k(n)}, \tfrac{t}{2}) * M(x_{k(n)}, x_n, \tfrac{t}{2}) \\ &\geq (1 - s) * (1 - s) > 1 - r \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisinin x e yakınsadığını gösterir. ■

Teorem 3.2.6 *(Gregori ve Romaguera, 2000) Bir fuzzy metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart onun prekompakt ve tam olmasıdır.*

İspat. $(X, M, *)$ bir kompakt fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $0 < r < 1$ olan her bir r ve her bir $t > 0$ için X in $\{B(x, r, t) : x \in X\}$ açık örtüsü sonlu alt örtüye sahiptir. Böylece $(X, M, *)$ prekompakttır. Diğer taraftan $(X, M, *)$ daki her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi bir $y \in X$ yığılma noktasına sahiptir. Lemma 3.2.2 den $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y ye yakınsar. Böylece $(X, M, *)$ tamdır.

Tersine $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X de bir dizi olsun. Lemma 3.2.1 ve $(X, M, *)$ ın tamlığından $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir yığılma noktasına sahiptir. Ayrıca $(X, \mathcal{T}_M)$ metriklenebilir (Gregori ve Romaguera, 2000, Teorem 1) ve dizisel kompakt metriklenebilir uzay kompakt olduğundan $(X, M, *)$ kompakttır. ■

Teorem 3.2.7 *(Gregori ve Romaguera, 2000) Bir metriklenebilir topolojik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart her uyumlu fuzzy metriğin prekompakt olmasıdır.*

İspat. $(X, \mathcal{T})$ bir kompakt metriklenebilir uzay olsun. Lemma 3.2.6 den her uyumlu fuzzy metrik prekompakttır.

Tersine d, X üzerinde $\mathcal{T}$ ile uyumlu herhangi bir metrik olsun. d tarafından indirgenen M_d fuzzy metriğini alalım. Hipotezden M_d prekompakttır. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X de herhangi bir dizi olsun. Lemma 3.2.1 den $(X, M_d, *)$ da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy alt dizisine sahiptir. $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ile verilen bir ε ve her $n, m \geq n_0$ için

$$M_d(x_{k(n)}, x_{k(m)}, 1/2) > 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda basit hesaplamalar yapılarak, her $n, m \geq n_0$ için

$$d(x_{k(n)}, x_{k(m)}) < \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} < \varepsilon$$

olduğu gösterilebilir. Böylece (X, d) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nin bir Cauchy alt dizisiye sahip olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla $\mathcal{T}$ ile uyumlu X üzerinde her d metriği prekompakttır. Buradan (Engelking, 1977, 4.3.E(c)) nedeniyle $(X, \mathcal{T})$ kompakttır. ■

Teorem 3.2.8 *(Gregori ve Romaguera, 2000) Metriklenebilir topolojik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart her uyumlu fuzzy metriğin tam olmasıdır.*

İspat. $(X,\mathcal{T})$ kompakt metriklenebilir bir uzay olsun. Teorem 3.2.6 den her uyumlu fuzzy metrik tamdır.

Tersine, d, X üzerinde $\mathcal{T}$ ile uyumlu herhangi bir metrik olsun. d den indirgenen M_d fuzzy metriği göz önüne alındığında hipotezden M_d tamdır. Böylece d tamdır (George ve Veeramani, 1997, Sonuç 2.9). Niemytzki – Tychonoff Teoreminin (Engelking, 1977, 4.3.E(d)) uygulanmasıyla $(X,\mathcal{T})$ nun kompakt olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 3.2.8 *(George ve Veeremani, 1997)* $(X,M,*)$ *bir fuzzy metrik uzay olsun. Bir* $\{F_n\}_{n\in I}$ *kümelerinin koleksiyonunun fuzzy sıfır çapa sahip olması için gerek ve yeter şart her bir* $r,t>0$ $(0<r<1)$ *çifti için* $x,y\in F_n$ *iken* $M(x,y,t)>1-r$ *olacak şekilde bir* $n\in I$ *nın var olmasıdır.*

Uyarı 3.2.3 *(George ve Veeremani, 1997)* X *fuzzy metrik uzayında boş olmayan bir* F *alt kümesinin fuzzy sıfır çapa sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart* F *nin bir tek nokta kümesi olmasıdır.*

Teorem 3.2.9 *(George ve Veeremani, 1997) Bir* $(X,M,*)$ *fuzzy metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart fuzzy sıfır çaplı boş olmayan kapalı kümelerin her iç içe sıralı* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisinin arakesitinin boş olmamasıdır.*

İspat. $(X,M,*)$ fuzzy tam ve $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ iç içe geçen (nested) boş olmayan kapalı kümelerden oluşan fuzzy sıfır çaplı bir dizi olsun. $n=1,2,3,\ldots$ olacak şekilde $x_n\in F_n$ alalım. $\{F_n\}$ nin fuzzy sıfır çapa sahip olmasından, $0<r<1$ olmak üzere her $r,t>0$ için; $x,y\in F_{n_0}$ iken $M(x,y,t)>1-r$ olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan her $m,n\geq n_0$ için $M(x_n,x_m,t/3)>1-r$ dir. $x_n\in F_n\subset F_{n_0}$ ve $x_m\in F_m\subset F_{n_0}$ olduğundan (x_n) bir Cauchy dizisidir. $(X,M,*)$ tam fuzzy metrik uzay olduğundan bir $x\in X$ için x_n, x e yakınsar. Öyleyse her bir sabit n ve her $k\geq n$ için $x_k\in F_n$ dir. Bu yüzden her n için $x\in\bar{F}_n=F_n$ ve bu yüzden $x\in\cap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$ olur.

Tersine, X de bir (x_n) Cauchy dizisi alalım. $A = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ ve $F_n = \bar{A}_n$ olsun. Bu durumda iddiamız $\{F_n\}$ fuzzy sıfır çapa sahiptir. $0 < s < 1$ olmak üzere $s, t > 0$ verildiğinde $(1 - r) * (1 - r) * (1 - r) > (1 - s)$ olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ bulunabilir. (x_n) Cauchy dizisi olduğundan $0 < r < 1$ olmak üzere r, $t > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $M(x_n, x_m, t/3) > 1 - r$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu yüzden her $x, y \in A_{n_0}$ için $M(x, y, t/3) > 1 - r$ dir. $x, y \in F_{n_0}$ ise (x'_n), x e ve (y'_n), y ye yakınsayacak şekilde A_{n_0} da (x'_n) ve (y'_n) dizileri vardır. Bu nedenle yeterince büyük n için $x'_n \in B(x, r, t/3)$ ve $y'_n \in M(y, r, t/3)$ olur. Şu halde;

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &\geq M(x, x'_n, t/3) * M(x'_n, y'_n, t/3) * M(y'_n, y, t/3) \\ &> (1 - r) * (1 - r) * (1 - r) > 1 - s \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden her $x, y \in F_{n_0}$ için $M(x, y, t) > 1 - s$ dir. Böylece $\{F_n\}$ fuzzy sıfır çapa sahiptir. Bu nedenle hipotezden $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ boş değildir. $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ alınırsa $0 < r < 1$ olmak üzere $r, t > 0$ için $n \geq n_1$ iken $M(x_n, x, t) > 1 - r$ olacak şekilde bir n_1 mevcuttur. Bu yüzden her bir $t > 0$ için $n \to \infty$ iken $M(x_n, x, t)$, 1 e yakınsar. Dolayısıyla $(x_n) \to x$ olup, $(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzaydır. ■

Uyarı 3.2.4 *(George ve Veeremani, 1997) $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ elemanı tektir. Eğer burada $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ gibi iki farklı eleman varsa $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ fuzzy sıfır çapa sahip olduğundan her bir sabit $t > 0$ ve her n için $M(x, y, t) > 1 - \dfrac{1}{n}$ dir. Bu da $M(x, y, t) = 1$ olması demektir ve böylece $x = y$ dir.*

Sonuç 3.2.6 *(George ve Veeremani, 1997) (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart çapı sıfıra giden boş olmayan iç içe kapalı kümelerden oluşan $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin arakesitinin boştan farklı olmasıdır.*

Ispat. (X, d) metrik uzayı tam olsun ve $M(x, y, t) = t/[t + d(x, y)]$ olsun. Bu durumda d metriğinden indirgenen X üzerindeki τ_d topolojisi M fuzzy metriğinden indirgenen X üzerindeki τ_f topolojisi ile aynıdır. $\delta(F_n)$ sıfıra gitmesinden $0 < r < 1$ olmak üzere her bir $r, t > 0$ için $\delta(F_n) < tr/(1 - r)$ olacak şeklinde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $x, y \in F_n$ için $d(x, y) < tr/(1 - r)$ ve dolayısıyla her $x, y \in F_n$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ dir. Böylece $\{F_n\}$ fuzzy sıfır çapa sahiptir. Bu nedenle Teorem 3.2.9 den $(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay, dolayısıyla (X, d) tam metrik uzaydır.

Tersine, eğer (X, d) tam ise $(X, M, *)$ da tamdır ve $\delta(F_n)$ nin sıfıra gidiyor olması $\{F_n\}$ fuzzy sıfır çapa sahip olmasını verir. Bu nedenle Teorem 3.2.9 den $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ boş değildir. ■

Teorem 3.2.10 *(George ve Veeremani, 1997) Her ayrılabilir fuzzy metrik uzay ikinci sayılabilirdir.*

İspat. $(X, M, *)$ ayrılabilir fuzzy metrik uzay ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ X de bir sayılabilir yoğun bir alt küme olsun. $B = \{B(a_j, 1/k, 1/k) : j, k \in \mathbb{N}\}$ kümesi düşünüldüğünde B sayılabilirdir. Ayrıca B tabandır. B nin taban olduğunu görmek için X de keyfi bir açık küme G ve keyfi bir $x \in G$ noktası alalım..Bu durumda için $B(x, r, t) \subset G$ olacak şekilde $0 < r < 1$ olan $r, t > 0$ vardır. Ayrıca $r \in (0, 1)$ için $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$ olacak şekilde bir $s \in (0, 1)$ bulunabilir. Bir $m \in \mathbb{N}$, $1/m < \min\{s, t/2\}$ şartını sağlacak biçimde seçilsin. A, X de yoğun olduğundan $a_j \in B(x, 1/m, 1/m)$ olacak şekilde $a_j \in A$ vardır. O halde $y \in B(a_j, 1/m, 1/m)$ ise

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &\geq M(x, a_j, t/2) * M(y, a_j, t/2) \\ &\geq M(x, a_j, 1/m) * M(y, a_j, 1/m) \\ &\geq (1 - 1/m) * (1 - 1/m) \\ &\geq (1 - s) * (1 - s) > 1 - r \end{aligned}$$

olur. Böylece $y \in B(x, r, t)$ ve B bir tabandır. ■

Teorem 3.2.11 *(George ve Veeremani, 1997) Ayrılabilir fuzzy metrik uzayın her alt uzayı da ayrılabilirdir.*

İspat. X bir fuzzy metrik uzay ve Y, X in bir alt uzayı olsun. $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, X de bir sayılabilir yoğun alt küme olsun. Herhangi sabit $n, k \in \mathbb{N}$ için $M(x_n, x, 1/k) > 1 - 1/k$ olacak şekilde $x \in X$ noktaları var ise bunlardan birini seçerek bu noktayı x_{nk} ile gösterelim. $B = \{x_{nk} : n, k \in \mathbb{N}\}$ olsun. B sayılabilirdir ve iddia ediyoruz ki $Y \subset \overline{B}$ tır. Bunun için bir $y \in Y$ ve $0 < r < 1$ olacak şekilde $r, t > 0$ verilsin. Bu durumda $(1 - 1/k) * (1 - 1/k) > 1 - r$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ bulunabilir. A, X de yoğun olduğunda $M(x_m, y, 1/k) > 1 - 1/k$ olacak şeklinde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

Fakat B nin tanımından $M(x_{mk}, x_m, 1/k) > 1 - 1/k$ şartını sağlayan bir $x_{mk} \in A$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} M(x_{mk}, y, t) &\geq M(x_{mk}, x_m, t/2) * M(x_m, y, t/2) \\ &\geq M(x_{mk}, x_m, 1/k) * M(x_m, y, 1/k) \\ &\geq (1 - 1/k) * (1 - 1/k) > 1 - r \end{aligned}$$

olacağından $y \in \bar{B}$ olur ki bu Y nin ayrılabilir olduğunu verir. ■

Tanım 3.2.9 *(George ve Veeramani, 1994)* $(X, M, *)$ *bir fuzzy metrik uzay,* $x \in X$*,* $0 < r < 1$ *ve* $t > 0$ *olsun. Bu durumda*

$$B[x, r, t] = \{y \in X : M(x, y, t) \geq 1 - r\}$$

kümesine x *merkezli ve* r *yarıçaplı kapalı yuvar denir.*

Lemma 3.2.3 *(George ve Veeramani, 1994) Her kapalı yuvar kapalı bir kümedir.*

İspat. $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay, $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ olmak üzere $B[x, r, t]$ kapalı yuvarını ele alalım. $y \in \overline{B[x, r, t]}$ olsun. X birinci sayılabilir uzay olduğundan $y_n \to y$ olacak biçimde $(y_n) \subset B[x, r, t]$ vardır. Bu durumda her t için $M(y_n, y, t) \to 1$ dir. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$M(x, y, t + \varepsilon) \geq M(x, y_n, t) * M(y_n, y, \varepsilon)$$

olacağından

$$M(x, y, t + \varepsilon) \geq \lim_{n \to \infty} M(x, y_n, t) * \lim_{n \to \infty} M(y_n, y, \varepsilon) \geq (1 - r) * 1 = 1 - r$$

olur. (Eğer $M(x, y_n, t)$ sınırlı ise (y_n), $\lim_{n \to \infty} M(x, y_n, t)$ limitinin var olması için yine (y_n) ile göstereceğimiz bir alt diziye sahiptir). Özel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ alınırsa $M(x, y, t + \dfrac{1}{n}) \geq 1 - r$ olur. Bu yüzden

$$M(x, y, t) = \lim_{n \to \infty} M(x, y, t + \frac{1}{n}) \geq 1 - r$$

yani $y \in B[x, r, t]$ olur. Böylece $\overline{B[x, r, t]} \subset B[x, r, t]$ dir. Bundan dolayı $B[x, r, t]$ kapalıdır. ■

Teorem 3.2.12 *(Baire Teoremi)(George ve Veeremani, 1994) X bir tam fuzzy metrik uzay ise X deki sayılabilir sayıda açık yoğun kümelerin arakesiti de yoğundur.*

İspat. X bir tam fuzzy metrik uzay ve B_0 boş olmayan bir açık alt kümesi olsun. Kabul edelim ki $D_1, D_2, ...$ X teki açık yoğun kümeler olsunlar. D_1 yoğun olduğundan $B_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ dir. $x_1 \in B_0 \cap D_1$ olsun. $B_0 \cap D_1$ açık bir küme olduğundan $B(x_1, r_1, t_1) \subset B_0 \cap D_1$ olacak şekilde $0 < r_1 < 1$ ve $t_1 > 0$ vardır. $B[x_1, r_1', t_1'] \subset B_0 \cap D_1$ olacak şekilde $r_1' < r_1$ ve $t_1' = \min\{t_1, 1\}$ seçelim ve $B_1 = B(x_1, r_1', t_1')$ olsun. D_2 yoğun olduğundan $B_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ dir. $x_2 \in B_1 \cap D_2$ olsun. Yine $B_1 \cap D_2$ açık bir küme olduğundan $B(x_2, r_2, t_2) \subset B_1 \cap D_2$ olacak şekilde $0 < r_2 < 1$ ve $t_2 > 0$ vardır. $B[x_2, r_2', t_2'] \subset B_1 \cap D_2$ olacak şekilde $r_2' < r_2$ ve $t_2' = \min\{t_2, 1/2\}$ seçelim ve $B_2 = B(x_2, r_2', t_2')$ olsun. Bu işlem böyle devam ettirilerek, bir $x_n \in B_{n-1} \cap D_n$ alabiliriz. $B_{n-1} \cap D_n$ açık bir küme olduğundan $B(x_n, r_n, t_n) \subset B_{n-1} \cap D_n$ olacak şekilde $0 < r_n < 1$ ve $t_n > 0$ vardır. $B[x_n, r_n', t_n'] \subset B_{n-1} \cap D_n$ olacak şekilde $r_n' < r_n$ ve $t_n' = \min\{t_n, 1/n\}$ seçelim ve $B_n = B(x_n, r_n', t_n')$ olsun. Bu şekilde oluşturulan (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Gerçekten, herhangi bir $t > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $1/n_0 < t$ ve $1/n_0 < \varepsilon$ olacak şekilde seçilirse, her $n \geq n_0$ ve $m \geq n$ için

$$M(x_n, x_m, t) \geq M(x_n, x_m, 1/n) \geq 1 - (1/n) \geq 1 - \varepsilon$$

olur. Bu (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Öte yandan X tam uzay olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. $B[x_n, r_n', t_n']$ kapalı ve her $k \geq n$ için $x_k \in B[x_n, r_n', t_n']$ dir. Bu nedenle her n için $x \in B[x_n, r_n', t_n'] \subset B_{n-1} \cap D_n$ olacaktır. Buradan $B_0 \cap (\cap_{n=1}^{\infty} D_n) \neq \emptyset$ yani $\cap_{n=1}^{\infty} D_n$, X de yoğundur. ■

Sonuç 3.2.7 *(George ve Veeremani, 1994) Her tam fuzzy metrik uzayı bir Baire uzayıdır.*

Uyarı 3.2.5 *Herhangi bir tam fuzzy metrik uzay hiçbir yerde yoğun kümelerden oluşan bir dizinin birleşimi şeklinde gösterilemeyeceği için birinci kategoriden değildir.*

Tanım 3.2.10 *(George ve Veeremani, 1997) X boştan farklı bir küme ve $(Y, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. X den Y ye tanımlı olan fonksiyonların bir (f_n) dizisi ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.* $0 < r < 1$ *olan ve* $r, t > 0$ *verildiğinde* $n \geq n_0$

iken her $x \in X$ için $M(f_n(x), f(x), t) > 1 - r$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar denir.

Teorem 3.2.13 *(Düzgün limit teoremi) (George ve Veeremani, 1997) $f_n : X \to Y$, X topolojik uzayından Y fuzzy metrik uzayına tanımlı olan sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer (f_n) dizisi $f : X \to Y$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f de süreklidir.*

İspat. Y de herhangi açık küme V ile $x_0 \in f^{-1}(V)$ olan $x_0 \in X$ noktası verilsin. $y_0 = f(x_0)$ olsun. V açık olduğundan $B(y_0, r, t) \subset V$ olacak şekilde $r, t > 0$ $(0 < r < 1)$ bulunabilir. $r \in (0, 1)$ için $(1 - s) * (1 - s) * (1 - s) > (1 - r)$ olacak şekilde bir $s \in (0, 1)$ vardır. (f_n), f ye bu $s, t > 0$ için $n \geq n_0$ iken $M(f_n(x), f(x), t/\varepsilon) > 1 - s$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için f_n sürekli olduğundan sabit bir $n \geq n_0$ için $f_n(U) \subset B(f_n(x_0), s, t/\varepsilon)$ olan x_0 ın bir U komşuluğu bulunabilir. Bu nedenle U daki tüm x ler için $M(f_n(x), f_n(x_0), t/3) > 1 - s$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} M(f(x), f(x_0), t) &\geq M(f(x), f_n(x), t/3) * M(f_n(x), f_n(x_0), t/3) * M(f_n(x_0), f(x_0), t/3) \\ &\geq (1 - s) * (1 - s) * (1 - s) \\ &> (1 - r) \end{aligned}$$

olacağından her $x \in U$ için $f(x) \in B(f(x_0), r, t) \subset V$ dir. Bu nedenle $f(U) \subset V$ ve dolayısıyla f süreklidir. ■

Önerme 3.2.4 *(Roja vd., 2006) (Urysohn's Lemma) $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay, $\mathcal{T}$, X üzerinde fuzzy metrik tarafından üretilen topoloji olsun. A ve B, X in ayrık elemanları ise, A üzerinde $f = 0$ ve B üzerinde $f = 1$ şartlarını sağlayan bir $f : X \to [0, 1]$ fuzzy sürekli fonksiyonu vardır.*

İspat. $f : X \to [0, 1]$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1 - M_A(x, x, t)}{M_B(x, x, t) - M_A(x, x, t)}$$

biçiminde tanımlansın. Herhangi bir $x \in X$ için $M_B(x, x, t) - M_A(x, x, t) \neq 0$ dır. Eğer $x \in A$ ise $M_A(x, x, t) = 1$ ve buradan $f(x) = 0$ dır. Yine eğer $x \in B$ ise $M_B(x, x, t) = 1$ ve buradan $f(x) = 1 - M_A(x, x, t)/1 - M_A(x, x, t) = 1$ olur. Ayrıca $M(x, y, t)$ fuzzy sürekli olduğundan f fuzzy süreklidir. ■

Önerme 3.2.5 *(Roja vd., 2006) (Gluing Lemma)* $(X, M, *)$ *ve* $(Y, M, *)$ *iki fuzzy metrik uzay olsun.* X *üzerinde metriğin ürettiği* $\mathcal{T}$ *topolojisinin* $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ *koşulunu sağlayan* U_i*,* $i \in I$ *elamanlarını düşünelim. Kabul edelim ki her* $i \in I$ *için* $i, j \in I$ *ve* $x \in U_i \cap U_j$ *iken* $f_i(x) = f_j(x)$ *şartını sağlayan bir* $f_i : U_i \to Y$ *fuzzy sürekli (George ve Veeramani, 1995) fonksiyonu var olsun. Bu durumda* $x \in U_i$ *iken* $f(x) = f_i(x)$ *biçiminde tanımlanan* $f : X \to Y$ *fonksiyonu iyi tanımlı ve fuzzy süreklidir.*

İspat. $x, y \in X$ olsun. Verilen $r \in (0,1)$, $t > 0$ için f_i sürekli olduğundan bir $r_0 \in (0,1)$ ve $t/4 > 0$ bulunabilir ki $M(x, y, t_0) > 1 - r_0$ iken $M(f_i(x), f_i(y), t/2) > 1 - r$ dir. Ayrıca $M(x, y, t/4) > 1 - r_0$ dır. $i \neq j$ için $x \in U_i$, $y \in U_j$ ve $x_i \in U_i \cap U_j$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
M(f(x), f(y), t/2) &> M(f(x), f(x_i), t/4) * M(f(x_i), f(y), t/4) \\
&= M(f_i(x), f_i(x_i), t/4) * M(f_j(x_i), f_j(y), t/4) \\
&> (1 - r) * (1 - r) = 1 - r
\end{aligned}
$$

olduğundan f fuzzy süreklidir. ■

4. SEZGISEL FUZZY METRIK UZAYLAR

4.1 Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylarda Temel kavramlar

Park (2004) sezgisel fuzzy küme fikrini kullanarak, George ve Veeramani (1994) nin vermiş olduğu fuzzy metrik uzay tanımının bir genelleştirmesi gibi "Sezgisel fuzzy metrik uzay" kavramına giriş yapmış ve bu uzayın temel özelliklerini incelemiştir. Bu kavramı tanımlarken sürekli t-norm ve sürekli t-conorm ikili işlemlerini kullanmıştır. Sürekli t-norm kavramı önceki bölümde tanıtılmıştı. Aşağıda sürekli t-conorm tanımı verilecektir.

Tanım 4.1.1 *(Schweizer ve Sklar, 1960)* $\diamond : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *ikili işlemi eğer,*

(i) $\diamond$ *birleşmeli ve değişmeli,*

(ii) $\diamond$ *sürekli,*

(iii) $\forall a \in [0,1]$ *için* $a \diamond 0 = a$*,*

(iv) $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ *için* $a \leq c$ *ve* $b \leq d$ *iken* $a \diamond b \leq c \diamond d$*,*

şartlarını sağlıyorsa $\diamond$ *işlemine sürekli t-conorm denir.*

Örnek 4.1.1 $\forall a,b \in [0,1]$ *için* $a \diamond b = \min\{a+b, 1\}$ *ve* $a \diamond b = maks\{a,b\}$ *şeklinde tanımlanan ikili işlemler sürekli t-conormdur.*

Uyarı 4.1.1 *(Park, 2004)* $*$ *ve* $\diamond$ *ikili işlemleri aşağıdaki şartları sağlar:*

i) Herhangi $r_1, r_2 \in (0,1)$ *için* $r_1 > r_2$ *ise* $r_1 * r_3 \geq r_2$ *ve* $r_1 \geq r_4 \diamond r_2$ *olacak şekilde* $r_3, r_4 \in (0,1)$ *vardır.*

ii) Herhangi $r_5 \in (0,1)$ *için* $r_6 * r_6 \geq r_5$ *ve* $r_7 \diamond r_7 \leq r_5$ *olacak şekilde* $r_6, r_7 \in (0,1)$ *vardır.*

Tanım 4.1.2 *(Sezgisel (intuitionistic) fuzzy metrik uzay)(Park, 2004)* $X \neq \emptyset$ *herhangi bir küme,* $*$ *sürekli* t*-norm,* $\diamond$ *sürekli* t*-conorm,* $X \times X \times (0,\infty)$ *üzerindeki* M *ve* N *fuzzy kümeleri* $\forall x,y,z \in X$ *ve* $\forall t,s \in (0,\infty)$ *için aşağıdaki şartları sağlasın:*

(IFM-1) $M(x,y,t) + N(x,y,t) \leq 1$*,*

(IFM-2) $M(x,y,t) > 0$*,*

(IFM-3) $M(x,y,t) = 1 \Leftrightarrow x = y$*,*

(IFM-4) $M(x,y,t) = M(y,x,t)$,

(IFM-5) $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$,

(IFM-6) $M(x,y,.) : (0,\infty) \to [0,1]$ *sürekli,*

(IFM-7) $N(x,y,t) > 0$,

(IFM-8) $N(x,y,t) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(IFM-9) $N(x,y,t) = N(y,x,t)$,

(IFM-10) $N(x,y,t) \diamond N(y,z,s) \geq N(x,z,t+s)$,

(IFM-11) $N(x,y,.) : (0,\infty) \to [0,1]$ *sürekli.*

Bu durumda (M,N) ikilisine X üzerinde sezgisel fuzzy metrik denir. $(X,M,N,*,\diamond)$ beşlisine sezgisel fuzzy metrik uzay adı verilir. Burada $M(x,y,t)$ ve $N(x,y,t)$ fonksiyonları sırasıyla x ile y nin t ye göre birbirlerine yakın olma ve yakın olmama derecesidir.

Not 5 *(Park, 2004) Her $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzayı $(X,M,1-M,*,\diamond)$ formunda sezgisel fuzzy metrik uzaydır. Burada $*$ ile $\diamond$ birleştirilerek (Lowen, 1996) $\forall a,b \in [0,1]$ için $a \diamond b = 1-((1-a)*(1-b))$ olarak tanımlanır.*

Teorem 4.1.1 *(Park, 2004) Her $x,y \in X$ için $N(x,y,.)$ artmayandır*

İspat. Kabul edelim ki $0 < s < t$ için $N(x,y,t) < N(x,y,s)$, yani N kesin artan olsun. Dolayısıyla, $N(x,y,t) \diamond N(y,y,s-t) \geq N(x,y,s) > N(x,y,t)$ ve buradan $N(x,y,t) > N(x,y,t)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $0 < t < s$ için $N(x,y,t) \geq N(x,y,s)$, yani N artmayandır. ■

Örnek 4.1.2 *(Park, 2004) (X,d) bir metrik uzay olsun. Her $a,b \in [0,1]$ için $a*b = a.b$ ve $a \diamond b = \min\{1, a+b\}$ olarak alınırsa, M_d, N_d, $X \times X \times (0,\infty)$ üzerinde her $h,m,n \in \mathbb{R}^+$ için*

$$M_d(x,y,t) = \frac{ht^n}{ht^n + md(x,y)} \text{ ve } N_d(x,y,t) = \frac{md(x,y)}{ht^n + md(x,y)}$$

olmak üzere $(X,M_d,N_d,*,\diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

Bu son örnek t-norm olarak $a * b = \min\{a,b\}$ ve t-conorm olarak $a \diamond b = maks\{a,b\}$ alınması durumunda da geçerlidir. Ayrıca burada, $h = m = n = 1$ alınırsa,

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \text{ ve } N_d(x,y,t) = \frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$$

elde edilir. Bu sezgisel fuzzy metrik d metriği tarafından oluşturulan standart sezgisel fuzzy metrik olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.3 *(Park, 2004) $X = \mathbb{N}$ olsun. Her $a, b \in [0,1]$ için $a \star b = maks\{0, a+b-1\}$ ve $a \diamond b = a + b - ab$ olarak alınırsa M ve N, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için;*

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & ; x \le y \\ \dfrac{y}{x} & ; y \le x \end{cases}, \quad N(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{y} & ; x \le y \\ \dfrac{x-y}{x} & ; y \le x \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fuzzy kümeler olmak üzere $(X, M, N, \star, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

Uyarı 4.1.2 *Son örnekte $\star$ t-norm ile $\diamond$ t-conorm birleştirilemezdir. Ayrıca X üzerinde*

$$M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \text{ ve } M(x,y,t) = \frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$$

şartlarını sağlayan bir d metriği bulunamaz. Öte yandan yukarıdaki fonksiyonlarla (M, N), $a \star b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond b = maks\{a, b\}$ olmak üzere bir sezgisel fuzzy metrik değildir.

4.2 Sezgisel Fuzzy Metrik Tarafından Üretilen Topoloji ve Özellikleri

Bu kesimde yine klasik metrik uzaylar teorisinden bilinen ve literatürde sezgisel fuzzy metrik uzaylar yapısında incelenen bazı kavram ve sonuçlar sunulacaktır.

Tanım 4.2.1 *(Park, 2004) $(X, M, N, \star, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $r \in (0,1)$, $t > 0$ ve $x \in X$ olsun. x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar*

$$B_{(M,N)}(x,r,t) = \{y \in X : M(x,y,t) > 1 - r, N(x,y,t) < r\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.2.2 *$(X, M, N, \star, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \in B_{(M,N)}(x,r,t) \subset A$ olacak şekilde $B_{(M,N)}(x,r,t)$ açık yuvarı varsa A ya (M, N) sezgisel fuzzy metriğine göre açıktır denir.*

Teorem 4.2.1 *(Park, 2004) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayında her açık $B_{(M,N)}(x, r, t)$ yuvarı açık kümedir*

İspat. $B_{(M,N)}(x, r, t)$, x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar olsun. $y \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ ise $M(x, y, t) > 1 - r$ ve $N(x, y, t) < r$ dir. $M(x, y, t) > 1 - r$ olduğundan $M(x, y, t_0) > 1 - r$ ve $N(x, y, t_0) < r$ olacak biçimde en az bir $t_0 \in (0, t)$ vardır. $r_0 = M(x, y, t_0)$ olsun. $r_0 > 1 - r$ olduğundan $r_0 > 1 - s > 1 - r$ olacak şekilde en az bir $s \in (0, 1)$ bulunabilir. Şimdi bu r_0 ve s için $r_0 > 1 - s$ olduğundan $r_0 * r_1 \geq 1 - s$ ve $(1 - r_0) \diamond (1 - r_2) \leq s$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in (0, 1)$ vardır. $r_3 = maks\{r_1, r_2\}$ olsun $B_{(M,N)}(y, 1 - r_3, t - t_0)$ açık yuvarını göz önüne alalım. İddia ediyoruz ki, $B_{(M,N)}(y, 1 - r_3, t - t_0) \subset B(M, N)(x, r, t)$ dir. Eğer, $z \in B_{(M,N)}(y, 1 - r_3, t - t_0)$ ise $M(y, z, t - t_0) > r_3$ ve $N(y, z, t - t_0) < 1 - r_3$ olur. Böylece,

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t_0) * M(y, z, t - t_0) \geq r_0 * r_3 \geq r_0 * r_1 \geq 1 - s > 1 - r,$$

$$N(x, z, t) \leq N(x, y, t_0) \diamond N(y, z, t - t_0) \leq (1 - r_0) \diamond (1 - r_3) \leq (1 - r_0) \diamond (1 - r_2) \leq s < r$$

olur. Bu da $z \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ ve sonuçta $B_{(M,N)}(y, 1 - r_3, t - t_0) \subset B_{(M,N)}(x, r, t)$ demektir. O halde, $B_{(M,N)}(x, r, t)$ yuvarı açık kümedir. ■

Teorem 4.2.2 *(Park, 2004) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda,*

$\mathcal{T}_{(M,N)} = \{A \subset X : \forall x \in A$ *için* $\exists t > 0$ *ve* $r \in (0, 1)$ *vardır ki* $B_{(M,N)}(x, r, t) \subset A\}$

ile tanımlanan aile X üzerinde bir topolojidir

İspat. $\mathcal{T}_{(M,N)}$ ailesinin topoloji olma şartları olarak bilinen T_1, T_2, T_3 şartlarını sağladığını göstereceğiz.

(T_1) $\emptyset$ kümesinin hiçbir elemanı olmadığından $\emptyset$ un elemanlarını merkez kabul eden açık yuvar boştur. O halde $\emptyset \in \mathcal{T}_{(M,N)}$. Her $x \in X$ ve $r > 0$ için $B_{(M,N)}(x, r, t) \subset X$ olduğundan $X \in \mathcal{T}_{(M,N)}$.

(T_2) $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_{(M,N)}$ olsun. Gösterelim ki $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_{(M,N)}$ dir.

$A_1 \in \mathcal{T}_{(M,N)} \Rightarrow \forall x \in A_1$ ve $\forall t > 0, \exists r_1 \in (0, 1)$ vardır ki $B_{(M,N)}(x, r_1, t) \subset A_1$

$A_2 \in \mathcal{T}_{(M,N)} \Rightarrow \forall x \in A_2$ ve $\forall t > 0, \exists r_2 \in (0, 1)$ vardır ki $B_{(M,N)}(x, r_2, t) \subset A_2$

$r = \min\{r_1, r_2\}$ alalım. Bu durumda $r \in (0, 1)$ olup $B_{(M,N)}(x, r, t) \subset B_{(M,N)}(x, r_1, t) \cap B_{(M,N)}(x, r_2, t) \subset A_1 \cap A_2$ dir. Gerçekten, $y \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ ise $M(x, y, t) > 1 - r$ ve $N(x, y, t) < r$ olur. Buradan $M(x, y, t) > 1 - r > 1 - r_1$, $N(x, y, t) < r < r_1$ ve

$M(x,y,t) > 1 - r > 1 - r_2$, $N(x,y,t) < r < r_2$ olacağından $y \in B_{(M,N)}(x,r_1,t)$ ve $y \in B_{(M,N)}(x,r_2,t)$ yani $y \in B_{(M,N)}(x,r_1,t) \cap B_{(M,N)}(x,r_2,t)$ elde edilir. O halde $B_{(M,N)}(x,r,t) \subset A_1 \cap A_2$ olup $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_{(M,N)}$ dir.

(T_3) Keyfi $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_{(M,N)}$ olsun. $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_{(M,N)}$ olduğunu göstereceğiz.

$$
\begin{aligned}
y \in \cup_{i\in I} A_i \quad &\Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ için } y \in A_{i_0} \subset \cup_{i\in I} A_i \\
&\Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ için } y \in B_{(M,N)}(x, r_{i_0}, t) \subset A_{i_0} \subset \cup_{i\in I} A_i \\
&\Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ için } y \in B_{(M,N)}(x, r_{i_0}, t) \subset \cup_{i\in I} A_i
\end{aligned}
$$

Şu halde $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_{(M,N)}$ olur ■

Sonuç 4.2.1 *(Park, 2004)* $(X,M,N,*,\diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay ve* $(X,\mathcal{T}_{(M,N)})$ *topolojik uzay olmak üzere,*

(i) $\{B_{(M,N)}(x,r,t) : x \in X, r \in (0,1), t > 0\}$ *ailesi* $\mathcal{T}_{(M,N)}$ *için bir tabandır.*

(ii) $\{B_{(M,N)}(x,1/n,1/n) : n = 1,2,...\}$ *ailesi* $\forall x \in X$ *noktası için yerel taban olduğundan* $(X,\mathcal{T}_{(M,N)})$ *uzayı birinci sayılabilirdir.*

Teorem 4.2.3 *(Park, 2004) Her sezgisel fuzzy metrik uzay Hausdorff uzaydır.*

Ispat. $(X,M,N,*,\diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay, $x \neq y$ ve $x,y \in X$ olsun. Dolayısıyla $0 < M(x,y,t) < 1$ ve $0 < N(x,y,t) < 1$ dir. $r_1 = M(x,y,t)$, $r_2 = N(x,y,t)$ ve $r = maks\{r_1, 1 - r_2\}$ diyelim. Her bir $r_0 \in (r,1)$ için $r_3 * r_3 \geq r_0$ ve $(1 - r_4) \diamond (1 - r_4) \leq 1 - r_0$ olacak şekilde $r_3, r_4 \in (0,1)$ vardır. $r_5 = maks\{r_3, r_4\}$ diyelim ve $B_{(M,N)}(x, 1 - r_5, t/2)$ ile $B_{(M,N)}(y, 1 - r_5, t/2)$ açık yuvarlarını ele alalım. Bu yuvarların arakesiti boştur. Gerçekten, $z \in B_{(M,N)}(x, 1 - r_5, t/2) \cap B_{(M,N)}(y, 1 - r_5, t/2)$ olsaydı,

$$
\begin{aligned}
r_1 = M(x,y,t) \quad &\geq M(x,z,t/2) * M(z,y,t/2) \geq r_5 * r_5 \geq r_3 * r_3 \geq r_0 > r_1 \\
r_2 = N(x,y,t) \quad &\leq N(x,z,t/2) \diamond M(z,y,t/2) \\
&\leq (1 - r_5) \diamond (1 - r_5) \\
&\leq (1 - r_4) \diamond (1 - r_4) \\
&\leq 1 - r_0 \\
&< r_2
\end{aligned}
$$

olurdu ki bu bir çelişkidir. O halde $(X,M,N,*,\diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzaydır. ■

Uyarı 4.2.1 *(Park, 2004)* (X,d) *metrik uzay ve*

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \text{ ve } N_d(x,y,t) = \frac{d(x,y)}{kt + d(x,y)} \quad k \in \mathbb{R}^+$$

X üzerinde sezgisel fuzzy metrik olsun. d metriği tarafından üretilen $\mathcal{T}_d$ topolojisi ile (M,N) tarafından üretilen $\mathcal{T}_{(M,N)}$ topolojisi çakışır.

Teorem 4.2.4 *(Park, 2004) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $\mathcal{T}_{(M,N)}$, X üzerine fuzzy metrik tarafından oluşturulmuş topoloji ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Bu durumda, $x_n \to x \Leftrightarrow M(x_n, x, t) \to 1$ ve $N(x_n, x, t) \to 0$ dır.*

İspat. Kabul edelim ki $x_n \to x$ ve $t > 0$ olsun. Buradan her $r \in (0,1)$ için $n \geq n_0$ iken $x_n \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ olacak şekilde en az bir n_0 doğal sayısı vardır. Dolayısıyla, $1 - M(x_n, x, t) < r$ ve $N(x_n, x, t) < r$ ve böylece $M(x_n, x, t) \to 1$ ve $N(x_n, x, t) \to 0$ olur.

Tersine, her bir $t > 0$ için $M(x_n, x, t) \to 1$ ve $N(x_n, x, t) \to 0$ ise $n \geq n_0$ iken $1 - M(x_n, x, t) < r$ ve $N(x_n, x, t) < r$ olacak şekilde en az bir n_0 doğal sayısı vardır. Böylece $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in B_{(M,N)}(x, r, t)$ olup $x_n \to x$ dir. ■

Lemma 4.2.1 *(Saadati, 2005) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $\lambda, \eta \in (0,1)$ sayıları $\lambda + \eta \leq 1$ şartını sağlasınlar. Bu durumda X üzerinde, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $m(x,y,t) \geq \lambda$ ve $n(x,y,t) \leq \eta$ şartlarını sağlayan bir (m,n) sezgisel fuzzy metriği vardır. Ayrıca (M,N) ve (m,n) metriklerinin ürettikleri X üzerindeki topolojiler aynıdır.*

İspat. $m(x,y,t) = maks\{\lambda, M(x,y,t)\}$ ve $n(x,y,t) = \min\{\eta, N(x,y,t)\}$ biçiminde tanımlansın. İddiamız (m,n), X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir. Sezgisel fuzzy metrik olma koşullarından üçgen eşitsizlikleri dışındakiler m ve n nin tanımlarından açıktır. üçgen eşitsizliği için $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olsun. Bu durumda $m(x,z,t+s) \geq \lambda$ ve $m(x,y,t) = \lambda$ veya $m(y,z,s) = \lambda$ olduğunda $m(x,z,t+s) \geq m(x,y,t) * m(y,z,s)$ dır. Eğer $m(x,y,t) = M(x,y,t) > \lambda$ ve $m(y,z,s) = M(y,z,s) > \lambda$ ise M üçgen eşitsizliğini sağladığından ve $m(x,z,t+s) \geq M(x,z,t+s)$ olduğundan $m(x,z,t+s) \geq M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t) * M(y,z,s) = m(x,y,t) * m(y,z,s)$ yani $m(x,z,t+s) \geq m(x,y,t) * m(y,z,s)$ elde edilir. Ayrıca, $n(x,z,t+s) \leq \eta$ ve $n(x,y,t) = \eta$ veya $n(y,z,s) = \eta$ olduğunda $n(x,z,t+s) \leq n(x,y,t) \diamond n(y,z,s)$ dır. Eğer $n(x,y,t) = N(x,y,t) < \eta$ ve $n(y,z,s) = N(y,z,s) > \eta$ ise N üçgen eşitsizliğini sağladığından ve $n(x,z,t+s) \le N(x,z,t+s)$ olduğundan $n(x,z,t+s) \le N(x,z,t+s) \le N(x,y,t) \diamond N(y,z,s) = n(x,y,t) \diamond n(y,z,s)$ yani $n(x,z,t+s) \le n(x,y,t) \diamond n(y,z,s)$ elde edilir. Böylece (m,n), X üzerinde bir sezgisel fuzzy metriktir. Ayrıca her bir $t>0$ için $m(x_n,x,t) \to 1$ ve $n(x_n,x,t) \to 0 \Leftrightarrow \{\lambda, M(x_n,x,t)\} \to 1$ ve $\{\eta, N(x_n,x,t)\} \to 0 \Leftrightarrow M(x_n,x,t) \to 1$ ve $N(x_n,x,t) \to 0$ olacağından (m,n) tarafından üretilen topoloji ile (M,N) tarafından üretilen topoloji aynıdır.

Ek olarak buradaki (m,n) sezgisel fuzzy metriğine (λ,η) ile sınırlıdır denir.

■

Tanım 4.2.3 *(Park, 2004)* $(X,M,N,*,\diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay ve* $A \subset X$ *olsun. Eğer her* $x,y \in A$ *için* $M(x,y,t) > 1-r$ *ve* $N(x,y,t) < r$ *olacak şekilde* $t>0$ *ve* $r \in (0,1)$ *varsa,* A *kümesine* IF*- sınırlıdır (intuitionistic fuzzy bounded) denir.*

Uyarı 4.2.2 *(Park, 2004)* $(X,M,N,*,\diamond)$*,* d *metriği tarafından oluşturulan sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda* $A \subset X$ *için,* A IF*-sınırlıdır* $\Leftrightarrow$ A *sınırlıdır.*

Teorem 4.2.5 *(Park, 2004)* $(X,M,N,*,\diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzayın her kompakt alt kümesi* IF*-sınırlıdır.*

İspat. $A \subset X$ kompakt olsun. $t>0$ ve $0<r<1$ olsun. A nın $\{B_{(M,N)}(x,r,t) : x \in A\}$ açık örtüsünü alalım. A kompakt olduğundan $A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i,r,t)$ olacak şekilde $x_1,x_2,...,x_n \in A$ vardır. $x,y \in A$ olsun. Dolayısıyla bazı i,j ler için $x \in B_{(M,N)}(x_i,r,t)$ ve $y \in B_{(M,N)}(x_j,r,t)$ dir. Buradan, $M(x,x_i,t) > 1-r$, $N(x,x_i,t) < r$; $M(y,x_j,t) > 1-r$ ve $N(y,x_j,t) < r$ olur. $\alpha = \min\{M(x_i,x_j,t) : 1 \le i,j \le n\}$ ve $\beta = maks\{N(x_i,x_j,t) : 1 \le i,j \le n\}$ olsun. $\alpha,\beta > 0$ dır. Buradan $0<s_1<1$ ve $0<s_2<1$ olmak üzere,

$$M(x,y,3t) \ge M(x,x_i,t) * M(x_i,x_j,t) * M(x_j,y,t) \ge (1-r)*(1-r)*\alpha > 1-s_1$$
$$N(x,y,3t) \le N(x,x_i,t) \diamond N(x_i,x_j,t) \diamond N(x_j,y,t) \le r \diamond r \diamond \beta < s_2$$

olur. $s = maks\{s_1,s_2\}$ ve $t' = 3t$ alınırsa, $\forall x,y \in A$ için $M(x,y,t') > 1-s$ ve $N(x,y,t') < s$ elde edilir ki bu A nın IF-sınırlı olduğunu gösterir. ■

Uyarı 4.2.2, Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.5 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2 *Sezgisel fuzzy metrik uzayda her kompakt alt küme kapalı ve sınırlıdır.*

Tanım 4.2.4 *(Park, 2004)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay olsun.*

(i) Eğer her $\varepsilon > 0$ *ve* $t > 0$ *için* $m, n \geq n_0$ *iken* $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ *ve* $N(x_n, x_m, t) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* $(x_n) \subseteq X$ *dizisine Cauchy dizisi denir.*

(ii) Eğer her Cauchy dizisi $\tau_{(M,N)}$ *topolojisine göre yakınsak ise* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzayına tamdır denir.*

Teorem 4.2.6 *(Park, 2004)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay olsun.* X *de her Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse* X *sezgisel fuzzy metrik uzayı tamdır.*

İspat. (x_n) dizisi X de bir Cauchy dizisi ve $\{x_{i_n}\}$ dizisi de x noktasına yakınsayan (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. Göstereceğiz ki $x_n \to x$ dir. $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. $(1 - r) * (1 - r) \geq (1 - \varepsilon)$ ve $r \diamond r \leq \varepsilon$ olan bir $r \in (0, 1)$ seçelim. (x_n) dizisi X de bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t/2) > 1 - r$ ve $N(x_n, x_m, t/2) < r$ koşulunu sağlayacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $x_{i_n} \to x$ olduğundan $i_p > n_0$ için $M(x_{i_n}, x, t/2) > 1 - r$ ve $N(x_{i_n}, x, t/2) < r$ olacak şekilde i_p pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece, $n \geq n_0$ için,

$$M(x_n, x, t) \geq M(x_n, x_{i_p}, t/2) * M(x_{i_p}, x, t/2) > (1 - r) * (1 - r) \geq (1 - \varepsilon),$$
$$N(x_n, x, t) \leq N(x_n, x_{i_p}, t/2) \diamond N(x_{i_p}, x, t/2) < r \diamond r \leq \varepsilon.$$

olur. Buradan $x_n \to x$ dir ve böylece $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı tamdır. ■

Tanım 4.2.5 *(Park, 2004)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay ve* X *in alt kümelerinin bir* $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ailesi verilsin. Eğer her* $r \in (0, 1)$ *ve* $t > 0$ *için* $x, y \in F_{n_0}$ *iken* $M(x, y, t) > 1 - r$ *ve* $N(x, y, t) < r$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *varsa* $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ailesi sezgisel fuzzy sıfır çapa sahiptir denir.*

Uyarı 4.2.3 *(Park, 2004) Sezgisel fuzzy metrik uzayın bir* F *alt kümesinin sezgisel fuzzy sıfır çapa sahip olması için gerek ve yeter şart* F *nin tek nokta kümesi olmasıdır.*

Teorem 4.2.7 *(Park, 2004)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart iç içe geçmiş boş olmayan kapalı kümelerden oluşan sezgisel fuzzy sıfır çapa sahip her* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dizisi için* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ *olmasıdır.*

İspat. ($\Leftarrow$). (x_n) X de bir Cauchy dizisi, $B_n = \{x_k : k \geq n\}$ ve $F_n = \overline{B_n}$ olsun. İddiamız; (F_n) sezgisel fuzzy sıfır çapa sahiptir. Verilen bir $s \in (0,1)$ ve $t > 0$ için $(1-r) * (1-r) * (1-r) > (1-s)$ ve $r \diamond r \diamond r < s$ koşullarını sağlayan $r \in (0,1)$ seçelim. (x_n) Cauchy dizisi olduğundan her $m, n \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, \frac{t}{3}) > 1 - r$ ve $N(x_n, x_m, \frac{t}{3}) < r$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $x, y \in B_{n_0}$ için $M(x, y, \frac{t}{3}) > 1 - r$ ve $N(x, y, \frac{t}{3}) < r$ dir. $x, y \in F_{n_0}$ alalım. Bu durumda B_{n_0} da öyle (x'_n) ve (y'_n) dizileri vardır ki $x'_n \to x$ ve $y'_n \to y$ dir. Dolayısıyla yeterince büyük n ler için $x'_n \in B_{(M,N)}(x, r, \frac{t}{3})$ ve $y'_n \in B_{(M,N)}(y, r, \frac{t}{3})$ olur. Ayrıca

$$M(x,y,t) \geq M(x, x'_n, \frac{t}{3}) * M(x'_n, y'_n, \frac{t}{3}) * M(y'_n, y, \frac{t}{3}) > (1-r)*(1-r)*(1-r) > (1-s)$$

ve

$$N(x,y,t) \leq N(x, x'_n, \frac{t}{3}) \diamond N(x'_n, y'_n, \frac{t}{3}) \diamond N(y'_n, y, \frac{t}{3}) < r \diamond r \diamond r < s$$

dir. Böylece (F_n) sezgisel fuzzy sıfır çapa sahiptir ve hipotezden $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ boş kümeden farklıdır.

Şimdi $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ alalım. Gösterelim ki $(x_n) \to x$ tir. $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ ise $n \geq n_1$ iken $M(x_n, x, t) > 1 - r$ ve $N(x_n, x, t) < r$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $t > 0$, için $M(x_n, x, t) \to 1$ ve $N(x_n, x,) \to 0$ yani $x_n \to x$ dir. Bu ise $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayının tam olduğunu verir.

($\Rightarrow$). Kabul edelim ki $(X, M, N, *, \diamond)$ tam ve $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iç içe geçmiş boş olmayan kapalı kümelerden oluşan sezgisel fuzzy sıfır çapa sahip bir ailesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_n \in F_n$ noktasını seçelim. İddiamız (x_n) bir Cauchy dizisidir. (F_n) sezgisel fuzzy sıfır çapa sahip olduğundan, $x, y \in F_{n_0}$ iken $t > 0$ ve $r \in (0,1)$ için $M(x,y,t) > 1 - r$ ve $N(x,y,t) < r$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (F_n) iç içe dizi olduğundan her $n, m \geq n_0$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - r$ ve $N(x_n, x_m, t) < r$ dir. Bu nedenle (x_n) Cauchy dizisi olup $(X, M, N, *, \diamond)$ tam olduğundan bir $x \in X$ için $x_n \to x$ tir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in \overline{F_n} = F_n$ yani $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ tur. ■

Uyarı 4.2.4 *$x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ tektir. Aksi taktirde $x, y \in \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ise $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sezgisel fuzzy sıfır çapa sahip olduğu için her sabit $t > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x,y,t) > 1 - \frac{1}{n}$ ve $N(x,y,t) < \frac{1}{n}$ dir. Bu $M(x,y,t) = 1$ ve $N(x,y,t) = 0$ yani $x = y$ demektir.*

Standart sezgisel fuzzy metrik ve karşılık gelen metrik tarafından üretilen topolojiler aynı olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.3 *(Park, 2004) (X,d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart iç içe geçmiş boş olmayan kapalı kümelerin çapı sıfıra giden her (F_n) dizisi için $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ olmasıdır.*

Teorem 4.2.8 *(Park, 2004) Her ayrılabilir sezgisel fuzzy metrik uzay ikinci sayılabilirdir.*

İspat. $(X,M,N,*,\diamond)$ ayrılabilir sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ X in sayılabilir yoğun alt kümesi olsun. $\beta = \{B_{(M,N)}(x_j, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}) : j,k \in \mathbb{N}\}$ ailesini düşünelim. Bu durumda β sayılabilirdir. İddia ediyoruz ki, X in tüm açık kümelerinin ailesi için β bir tabandır. U, X de herhangi bir açık küme ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $t > 0$ ve $r \in (0,1)$ vardır öyleki $B_{(M,N)}(x,r,t) \subset U$ dur. $r \in (0,1)$ için bir $s \in (0,1)$ i öyle seçebiliriz ki $(1-s)*(1-s) > 1-r$ ve $s \diamond s < r$ olur. Şimdi $\frac{1}{m} < \min\{s, t/2\}$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ alalım. A, X de yoğun olduğundan $x_j \in B_{(M,N)}(x, \frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ olacak biçimde $x_j \in A$ vardır. Eğer $y \in B_{(M,N)}(x_j, \frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ ise

$$\begin{aligned} M(x,y,t) &\geq M(x,x_j,t/2) * M(y,x_j,t/2) \\ &\geq M(x,x_j,1/m) * M(y,x_j,1/m) \\ &\geq (1-\frac{1}{m}) * (1-\frac{1}{m}) \\ &\geq (1-s)*(1-s) \\ &> 1-r \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x,y,t) &\leq N(x,x_j,t/2) \diamond N(y,x_j,t/2) \\ &\leq N(x,x_j,1/m) \diamond N(y,x_j,1/m) \\ &\leq \frac{1}{m} \diamond \frac{1}{m} \\ &\leq s \diamond s \\ &< r \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $y \in B_{(M,N)}(x,r,t) \subset U$ ve β bir tabandır. ■

Uyarı 4.2.5 *(Park,2004) İkinci sayılabilirlik kalıtsal özellik ve ayrılabilirliği gerektirdiğinden bir ayrılabilir sezgisel fuzzy metrik uzayın her alt uzayı ayrılabilirdir.*

Önerme 4.2.1 *(Park, 2004)*$(X,M,N,*,\diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Eğer* $t>0$ *ve* $r,s\in(0,1)$ *sayıları için* $(1-s)*(1-s)\geq 1-r$ *ve* $s\diamond s\leq r$ *şartları sağlanırsa,* $\overline{B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})}\subset B_{(M,N)}(x,r,t)$ *dir.*

İspat. $y\in\overline{B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})}$ olsun. $B_{(M,N)}(y,s,\frac{t}{2})\cap B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})\neq 0$ olduğundan bir $z\in B_{(M,N)}(y,s,\frac{t}{2})\cap B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})$ vardır. Bu durumda

$$M(x,y,t)\geq M(x,z,\frac{t}{2})*M(y,z,\frac{t}{2})>(1-s)*(1-s)\geq 1-r$$

ve

$$N(x,y,t)\leq N(x,z,\frac{t}{2})\diamond N(y,z,\frac{t}{2})<s\diamond s\leq r$$

olacağından $z\in B_{(M,N)}(x,r,t)$ yani $\overline{B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})}\subset B_{(M,N)}(x,r,t)$ olur. ■

Teorem 4.2.9 *(Park, 2004)* $(X,M,N,*,\diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzayın bir* A *alt kümesinin hiçbir yerde yoğun olması için gerek ve yeter şart* X *teki boş olmayan her açık kümenin, kapanışı* A *ile kesişmeyen bir açık yuvar kapsamasıdır.*

İspat. $U\subseteq X$ açık olsun. Bu durumda boş olmayan bir V açık kümesi vardır ki $V\subset U$ ve $V\cap\overline{A}=\emptyset$ dir. $x\in V$ ise $B_{(M,N)}(x,r,t)\subset V$ olacak şekilde $r\in(0,1)$ ve $t>0$ vardır. $(1-s)*(1-s)\geq 1-r$ ve $s\diamond s\leq r$ olacak şekilde bir $s\in(0,1)$ seçelim. Önerme 4.2.1 den $\overline{B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})}\subset B_{(M,N)}(x,r,t)$ dir. Böylece $\overline{B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})}\subset U$ ve $\overline{B_{(M,N)}(x,s,\frac{t}{2})}\cap A=\emptyset$ olur.

Tersine, eğer A hiç bir yerde yoğun bir küme değilse $(\overline{A})^{\circ}=\emptyset$ tur. Dolayısıyla boş olmayan her U açık kümesi için $U\subset\overline{A}$ dır. $B_{(M,N)}(x,r,t)$, U da kapsanan bir açık yuvar olduğundan $\overline{B_{(M,N)}(x,r,t)}\cap A\neq\emptyset$ olur ki bu çelişkidir. ■

Teorem 4.2.10 *(Baire Teoremi)(Park, 2004)* $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$ *bir tam* $(X,M,N,*,\diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzayının açık ve yoğun alt kümelerinin bir dizisi ise* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ *kümesi* X *de yoğundur.*

İspat. V, X in boş olmayan bir açık alt kümesi olsun. U_1 X de yoğun olduğundan $V\cap U_1\neq\emptyset$ tur. $x\in V\cap U_1$ olsun. $V\cap U_1$ açık olduğundan $B_{(M,N)}(x_1,r_1,t_1)\subset V\cap U_1$ olacak şekilde $r_1\in(0,1)$ ve $t_1>0$ vardır. Şimdi $\overline{B_{(M,N)}(x_1,r_1',t_1')}\subset V\cap U_1$ olacak şekilde $r_1'<r_1$ ve $t_1'=\min\{t_1,1\}$ seçelim. U_2 X de yoğun olduğundan

$B_{(M,N)}(x_1, r_1', t_1') \cap U_2 \neq \emptyset$ tur. $x_2 \in B_{(M,N)}(x_1, r_1', t_1') \cap U_2$ olsun. $B_{(M,N)}(x_1, r_1', t_1') \cap U_2$ açık olduğundan $B_{(M,N)}(x_2, r_2', t_2') \subset B_{(M,N)}(x_1, r_1', t_1') \cap U_2$ olacak şekilde $r_2 \in (0, \frac{1}{2})$ ve $t_2 > 0$ vardır. Bu işlem devam ettirilirse

$$B_{(M,N)}(x_n, r_n', t_n') \subset B_{(M,N)}(x_{n-1}, r_{n-1}', t_{n-1}') \cap U_n$$

ve $0 < t_n' < \frac{1}{n}$ koşullarını sağlayan (x_n) ve (t_n') dizileri bulunabilir. Iddiamız (x_n) bir cauchy dizisidir. Gerçekten bir $t > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde $1/n_0 < t$ ve $1/n_0 < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Bu durumda her $n \geq n_0$ ve $m \geq n$ için

$$M(x_n, x_m, t) \geq M(x_n, x_m, \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \text{ ve } N(x_n, x_m, t) \leq N(x_n, x_m, \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

olacağından (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bir $x \in X$ için $x_n \to x$ tir. $k \geq n$ için $x_k \in B_{(M,N)}(x_n, r_n', t_n')$ olacağından $x \in \overline{B_{(M,N)}(x_n, r_n', t_n')}$ olur. Bu yüzden her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in \overline{B_{(M,N)}(x_n, r_n', t_n')} \subset B_{(M,N)}(x_{n-1}, r_{n-1}', t_{n-1}') \cap U_n$ dir. Buradan $V \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ X te yoğundur. ■

Not 6 *(Park, 2004) Herhangi bir sezgisel fuzzy metrik uzay hiçbir yerde yoğun kümelerden oluşan bir dizinin birleşimi şeklinde yazılamayacağından birinci kategoriden değildir. Bu nedenle her tam sezgisel fuzzy metrik uzay ikinci kategoridendir.*

Uyarı 4.2.6 *(Park, 2004) Her metrik bir sezgisel fuzzy metrik ürettiğinden ve sezgisel fuzzy metrik, fuzzy metriğin bir genelleştirilmesi olduğundan tam metrik uzaylar için Baire teoremi (Nagata, 1974) ve tam fuzzy metrik uzaylar için Baire teoremi (George ve Veeramani, 1994) yukarıdaki teoremin özel durumlarıdır.*

Tanım 4.2.6 *(Park,2004) X herhangi boştan farklı bir küme ve $(Y, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. X den Y ye tanımlı olan fonksiyonların bir (f_n) dizisi ile bir f fonksiyonu verilsin. Bir $r \in (0,1)$ ve $t > 0$ verildiğinde her $x \in X$ için $n \geq n_0$ iken $M(f_n(x), f(x), t) > 1 - r$ ve $N(f_n(x), f(x), t) < r$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.*

Teorem 4.2.11 *(Düzgün limit teoremi)(Park,2004) $f_n : X \to Y$ bir X topolojik uzayından bir $(Y, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayına sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n), $f : X \to Y$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f süreklidir.*

İspat. V, Y nin bir açık alt kümesi ve $x_0 \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(U) \subset V$ olacak biçimde x_0 ın bir U komşuluğunu bulmak istiyoruz. V açık olduğundan $B_{(M,N)}(f(x_0), r, t) \subset V$ olacak biçimde $t > 0$ ve $r \in (0,1)$ vardır. $r \in (0.1)$ için bir $s \in (0.1)$ i öyle seçebiliriz ki $(1-s) * (1-s) * (1-s) > 1-r$ ve $s \diamond s \diamond s < r$ olur. (f_n) dizisi f e düzgün yakınsak olduğundan verilen $t > 0$, $s \in (0,1)$ ve her $x \in X$ için $n \geq n_0$ iken $M(f_n(x), f(x), \frac{t}{3}) > 1-s$ ve $N(f_n(x), f(x), \frac{t}{3}) < s$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca her n için f_n sürekli olduğundan $f_n(U) \subset B_{(M,N)}(f_n(x_0), s, \frac{t}{3})$ olacak biçimde x_0 ın bir U komşuluğu vardır. Böylece her $x \in U$ için $M(f_n(x), f_n(x_0), \frac{t}{3}) > 1-s$ ve $N(f_n(x), f_n(x_0), \frac{t}{3}) < s$ dir. Şimdi

$$\begin{aligned} M(f(x), f(x_0), t) &\geq M(f(x), f_n(x), \tfrac{t}{3}) * M(f_n(x), f_n(x_0), \tfrac{t}{3}) * M(f_n(x_0), f(x_0), \tfrac{t}{3}) \\ &\geq (1-s) * (1-s) * (1-s) > 1-r \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(f(x), f(x_0), t) &\leq N(f(x), f_n(x), \tfrac{t}{3}) \diamond N(f_n(x), f_n(x_0), \tfrac{t}{3}) \diamond N(f_n(x_0), f(x_0), \tfrac{t}{3}) \\ &\leq s \diamond s \diamond s < r \end{aligned}$$

olur. Böylece her $x \in U$ için $f(x) \in B_{(M,N)}(f(x_0), r, t) \subset V$ dır. Dolayısıyla $f(U) \subset V$ ve f süreklidir. ∎

Tanım 4.2.7 *(Saadati, 2005) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için $A \subset \cup_{x \in S} B_{(M,N)}(x, r, t)$ olacak biçimde A nın sonlu bir S alt kümesi varsa A ya prekompakttır denir.*

Lemma 4.2.2 *(Saadati, 2005) $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A prekompakttır ancak ve ancak her $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için*

$$A \subset \cup_{x \in S} B_{(M,N)}(x, r, t) \qquad (1)$$

olacak biçimde X in sonlu bir S alt kümesi vardır.

İspat. $A \subset X$ prekompakt ise her $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için

$$A \subset \cup_{x \in S} B_{(M,N)}(x, r, t)$$

olacak biçimde X in sonlu bir S alt kümesinin varlığı açıktır.

Tersine, kabul edelim ki bir $0 < r < 1$ ve bir $t > 0$ için (1) şartı sağlansın. $*$ ve $\diamond$ işlemlerinin sürekliliğinden, $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$ ve $s \diamond s < r$ olacak biçimde bir $s \in (0, 1)$ vardır. s ve $t/2$ için (1) koşulunu uygularsak,

$$A \subset \cup_{x_i \in S'} B_{(M,N)}(x_i, s, t/2)$$

olacak şekilde X in sonlu bir $S' = \{x_1, ..., x_n\}$ alt kümesi vardır. Kabul edelim ki $B_{(M,N)}(x_j, s, t/2) \cap A \neq \emptyset$ olsun. Aksi halde x_j noktasını S' den atarız ve $A \subset \cup_{x_i \in S' - \{x_j\}} B_{(M,N)}(x_i, s, t/2)$ yazabiliriz. Her $i = 1, ..., n$ için $y_i \in B_{(M,N)}(x_i, s, t/2) \cap A$ seçelim ve $S = \{y_1, ..., y_n\}$ olsun. Bu durumda A daki her y için $M(y, x_i, t/2) > 1 - s$ ve $N(y, x_i, t/2) < s$ olacak şekilde bir $i \in \{1, ..., n\}$ vardır. Buradan

$$M(y, y_i, t) > M(y, x_i, t/2) * M(x_i, y_i, t/2) > (1 - s) * (1 - s) > 1 - r$$

ve

$$N(y, y_i, t) < N(y, x_i, t/2) \diamond N(x_i, y_i, t/2) < s \diamond s < r$$

olur. Bu $A \subset \cup_{x \in S} B_{(M,N)}(x, r, t)$ demektir. ■

Lemma 4.2.3 *(Saadati, 2005)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay ve* $A \subset X$ *olsun.* A *bir prekompakt küme ise* $\overline{A}$ *da prekompakt bir kümedir.*

İspat. $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda $*$ ve $\diamond$ nın sürekliliğinden $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$ ve $s \diamond s < r$ olacak biçimde $s \in (0, 1)$ vardır. Ayrıca $A \subset \cup_{x_i \in S'} B_{(M,N)}(x_i, s, \frac{t}{2})$ olacak biçimde X in bir $S' = \{x_1, ..., x_n\}$ sonlu alt kümesi vardır. Bu durumda $\overline{A}$ daki her y için $M(x, y, \frac{t}{2}) > 1 - s$ ve $N(x, y, \frac{t}{2}) < s$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır ve $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde bir i vardır ki $M(x, x_i, \frac{t}{2}) > 1 - s$ ve $N(x, x_i, \frac{t}{2}) < s$ tir. Buradan

$$M(y, x_i, t) > M(y, x, t/2) * M(x, x_i, t/2) > (1 - s) * (1 - s) > 1 - r$$

ve

$$N(y, x_i, t) < N(y, x, t/2) \diamond N(x, x_i, t/2) < (1 - s) \diamond (1 - s) < r$$

olur. Bu nedenle $\overline{A} \subset \cup_{x_i \in S} B_{(M,N)}(x_i, r, t)$ yani $\overline{A}$ prekompakt bir kümedir. ■

Teorem 4.2.12 *(Saadati, 2005)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay ve* $A \subset X$ *olsun.* A *nın prekompakt olması için gerekli ve yeter şart her dizinin bir Cauchy alt diziye sahip olmasıdır.*

Ispat. A bir prekompakt bir küme ve (p_n) A da bir dizi olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $A \subset \bigcup_{x \in S_k} B_{(M,N)}(x, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ koşulunu sağlayan X in bir S_k sonlu alt kümesi vardır. O halde $k = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_1 \in S_1$ ve (p_n) nin bir $(p_{1,n})$ alt dizisi vardır ki $p_{1,n} \in B_{(M,N)}(x_1, 1, 1)$ dir. Benzer şekilde $k = 2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_2 \in S_2$ ve $(p_{1,n})$ nin bir $(p_{2,n})$ alt dizisi vardır ki $p_{2,n} \in B_{(M,N)}(x_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dir. Bu işlem devam ettirilirse her $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_k \in S_k$ ve $(p_{k-1,n})$ nin $(p_{k,n})$ alt dizisi vardır ki $p_{k,n} \in B_{(M,N)}(x_k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ dir. (p_n) nin $(p_{n,n})$ alt dizisini ele alalım. Her $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $*$ ve $\diamond$ nın sürekliliğinden $(1 - \frac{1}{n_0}) * (1 - \frac{1}{n_0}) > 1 - r$, $\frac{1}{n_0} \diamond \frac{1}{n_0} < r$ ve $\frac{2}{n_0} < t$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $l, m \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} M(p_{l,l}, p_{m,m}, t) &\geq M(p_{l,l}, p_{m,m}, \frac{2}{n_0}) \\ &\geq M(p_{l,l}, x_{n_0}, \frac{1}{n_0}) * M(x_{n_0}, p_{m,m}, \frac{1}{n_0}) \\ &> (1 - \frac{1}{n_0}) * (1 - \frac{1}{n_0}) \\ &> 1 - r \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(p_{l,l}, p_{m,m}, t) &\leq N(p_{l,l}, p_{m,m}, \frac{2}{n_0}) \\ &\leq N(p_{l,l}, x_{n_0}, \frac{1}{n_0}) \diamond N(x_{n_0}, p_{m,m}, \frac{1}{n_0}) \\ &< \frac{1}{n_0} \diamond \frac{1}{n_0} \\ &< r \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(p_{m,m})$ dizisi $(X, M, N, *, \diamond)$ de bir Cauchy dizisidir.

Tersine, kabul edelim ki A bir prekompakt küme olmasın. Bu durumda X in her sonlu S alt kümesi için bir $r \in (0, 1)$ ve bir $t > 0$ vardır ki A, $\bigcup_{x \in S} B_{(M,N)}(x, r, t)$ nin bir alt kümesi değildir. $p_1 \in A$ yı sabitleyelim. A, $\bigcup_{x \in \{p_1\}} B_{(M,N)}(x, r, t)$ nin alt kümesi olmadığından, $M(p_1, p_2, t) \leq 1 - r$ ve $N(p_1, p_2, t) \geq r$ olacak biçimde $p_2 \in A$ vardır. A, $\bigcup_{x \in \{p_1, p_2\}} B_{(M,N)}(x, r, t)$ nin de bir alt kümesi olmadığından $M(p_1, p_3, t) \leq 1 - r$, $N(p_1, p_3, t) \geq r$, $M(p_2, p_3, t) \leq 1 - r$ ve $N(p_2, p_3, t) \geq r$ olacak biçimde $p_3 \in A$ vardır. Bu işlemi devam ettirirsek her $i \neq j$ için $M(p_i, p_j, t) \leq 1 - r$ ve $N(p_i, p_j, t) \geq r$ olacak biçimde A da farklı noktaların bir (p_n) dizisini oluştururuz.

Bu yüzden (p_n) Cauchy alt dizisine sahip değildir. ■

Lemma 4.2.4 *(Saadati, 2005)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bir* $x \in X$ *noktası bir Cauchy dizisinin yığılma noktası ise dizi* x *noktasına yakınsar.*

Ispat. (x_n) dizisi $(X, M, N, *, \diamond)$ da bir $x \in X$ yığılma noktasına sahip bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin $\mathcal{T}_{(M,N)}$ topolojisine göre x noktasına yakınsak olan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Böylece verilen $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için $k \geq N$ iken, $s \in (0,1)$, $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$ ve $s \diamond s < r$ şartlarını sağlamak üzere $M(x, x_{n_k}, \frac{t}{2}) > 1 - s$ ve $N(x, x_{n_k}, \frac{t}{2}) < s$ olacak şekilde bir $n_N \in \mathbb{N}$ vardır.

Diğer taraftan $n, m \geq n_1$ iken $M(x_m, x_n, \frac{t}{2}) > 1 - s$ ve $N(x_m, x_n, \frac{t}{2}) < s$ olacak biçimde bir $n_1 \geq n_N$ vardır. Buradan $n \geq n_1$ için

$$M(x, x_n, t) \geq M(x, x_{n_k}, t/2) * M(x_{n_k}, x_n, t/2) > (1 - s) * (1 - s) > 1 - r$$

ve

$$N(x, x_n, t) \leq N(x, x_{n_K}, t/2) \diamond N(x_{n_k}, x_n, t/2) < s \diamond s < r$$

olur. Sonuç olarak (x_n) Cauchy dizisi x e yakınsar. ■

Lemma 4.2.5 *(Saadati, 2005)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda* $(X, \mathcal{T}_{(M,N)})$ *metriklenebilir bir topolojik uzaydır.*

Her metriklenebilir dizisel kompakt uzay kompakt olduğundan, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.4 *(Saadati, 2005)* $(X, M, N, *, \diamond)$ *sezgisel fuzzy metrik uzayının bir* A *alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart* A *nın prekompakt ve tam olmasıdır.*

KAYNAKLAR

Abu Osman, M.T. (1983). Fuzzy metric spaces and fixed fuzzy set theorem, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 6(1), 1-4.

Afrouzi, G.A., Shakeri, S. ve Rasouli, S. H. (2011). On the fuzzy metric spaces, The Journal of Mathematics and Computer Science, 2(3), 485-482

Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20(1), 87-96.

Chang, C.L. (1968) Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 24, 182-190.

Çoker, D. (1997). An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 88(1), 81-89.

Engelking, R. (1977). General Topology, PWN-Polish Sci. Publ., Warsaw.

George, A. ve Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 64, 395-399.

George, A. ve Veeramani, P. (1997). On some results of analysis for fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 90, 365-368.

Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 27, 385-389.

Gregori, V. ve Romaguera, S. (2000). Some properties of fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 115, 485-489.

Gregori, V. ve Romaguera, S. (2004). Characterizing completable fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 144, 411-420.

Kaleva, O ve Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 12, 215-229.

Kleyle, R., Korvin, A.D. ve Khondkar, K. (1997). Investing in new companies in an unstable economic environment: A fuzzy set approach, Managerial Finance, 23(6), 68-80.

Knight, K.G. (2001). A Fuzzy Logic Model For Predicting Commercial Building Design Cost Overruns, Master of Science Thesis, University of Alberta.

Kramosil, O. ve Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces, Kybernetica, 11, 326-334.

Lopez, J.R. ve Romaguera, S. (2004). The Hausdor¤ fuzzy metric on compact sets, Fuzzy Sets and Systems, 147, 273-283.

Lowen, R. (1996). Fuzzy Set Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Mao, H. (1999). Estimating Labour Productivity Using Fuzzy Set Theory, Master of Science Thesis, University of Alberta.

Menger, K. (1942). Statistical metric, Proc. Nat. Acad. Sci., 28, 535-537.

Nagata, J. (1974). Modern General Topology, Amsterdam: North-Holland.

Park, J.H. (2004). Intuitionistic fuzzy metric spaces, Chaos Solitons Fractals, 22, 1039-1046.

Roja, E., Uma, M.K. ve Balasubraman-an, G. (2008). Urysohn lemma, gluing lemma and contraction* mapping theorem for fuzzy metric spaces, Math. Bohem., 133 (2), 179-185.

Saadati, R. (2005). On the intuitionistic fuzzy topological (metric and normed) spaces, arXiv:math/0501149v1 [math.GN].

Schweizer, B. ve Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces, Pacific J. Math., 10, 314-334.

Tsaur, S.H., Chang, T.Y. ve Chang, H.Y. (2002). The evaluation of airline service quality by fuzzy MCDM, Tourism Management, 23, 107-115.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

<u>Kişisel bilgiler</u>

Adı Soyadı	Önder KORKMAZ
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 28/10/1981
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sivas
E-posta Adresi	matematik06@mynet.com

<u>Eğitim ve Akademik Durumu</u>

Lise	Kongre Lisesi, 1999
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2004
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2012

<u>İş Tecrübesi</u>

Özel Final Anadolu Lisesi	Öğretmen, 2009-