CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA BISHOP ÇATISINA GÖRE UZAY EĞRİLERİNİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Yüksek Lisans Tezi

Buket ARDA

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Cebir ve Sayılar Teorisi

MANİSA 2012

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA BISHOP ÇATISINA GÖRE UZAY EĞRİLERİNİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Yüksek Lisans Tezi

Buket ARDA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30.05.2012

Tezin Savunulduğu Tarih: 20.06.2012

Tezin Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEMİR

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA 2012

ÖZET

Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre karakterize edilen uzay eğrileri ile ilgili olan bu çalışma üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, konu ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve Öklid uzayı ile Minkowski 3-uzayındaki diferansiyellenebilir eğrilerin Bishop çatısı ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, Minkowski 3-uzayındaki timelike eğrilerin Bishop çatısına göre genel karakterizasyonları verilmiş ve $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlerine göre harmonik 1-tipli timelike eğriler ile harmonik timelike eğriler incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Minkowski 3-uzayındaki spacelike eğrilerin Bishop çatısına göre genel karakterizasyonları verilmiş ve $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlerine göre harmonik 1-tipli spacelike eğriler ve harmonik spacelike eğriler incelenmiş, bu tip eğriler ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

ABSTRACT

This study which is related to the space curves characterized by Bishop frame in Minkowski 3-space consists of three sections.

In the first section, basic concepts on subject are given and are represented Bishop frame of the differentiable curves in Euclidean space with Minkowski 3-space.

In the second section, the general characterizations according to Bishop frame of timelike space curves in Minkowski 3-space are given and harmonic 1-type timelike curves, harmonic timelike curves according to the vectors $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ are investigated and some results are obtained.

In the third section, the general characterizations according to Bishop frame of spacelike space curves in Minkowski 3-space are given and harmonic 1-type spacelike curves, harmonic spacelike curves according to the vectors $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ are investigated, some results related to this type curves are obtained.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında ve planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde olumlu ve yapıcı eleştirileriyle bana yol gösteren Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ÖZDEMİR' e ve önerilerde bulunan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT' e ve çalışmam esnasında bana vakit ayıran Arş. Gör. Dr. Mehmet ÖNDER' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim, bugünlere gelmeme yardımcı olan ve beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

E_1^3 uzayındaki çalışmalar pek çok matematikçi tarafından incelenmiştir. [15] de İlarslan E_1^3 uzayında helislerin karakterizasyonları üzerine çalışmıştır ve Minkowski 3-uzayında Frenet vektörlerine göre helisleri karakterize eden diferansiyel denklemleri bulmuştur. Bunun öncesinde bir eğrinin genel helis olabilmesi için sabit eğrilik ve sabit burulmaya sahip olması gerektiği bulunmuştur [27]. Buradan, Kocayiğit Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında Frenet eğrilerini karakterize eden genel diferansiyel denklemleri elde etmiştir [19].

1975'te Bishop, eğrilerin paralel ötelemesi için alternatif bir çatının yani Bishop çatısının var olduğunu söylemiştir [3].

Bükçü ve Karacan Öklid 3-uzayında Bishop çatısına göre slant helisleri tanımlamışlardır [6]. Üstelik Bükçü ve Karacan Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre timelike, asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğriler ve binormal vektörü spacelike olan spacelike eğriler ile ilgili birçok çalışmada bulunmuşlardır [4, 6, 7].

Ayrıca Chen ve Ishikawa yarı-Öklid uzayında, Δ Laplace operatörü ve H Frenet eğrisinin eğrilik vektör alanını göstermek üzere, $\Delta H = 0$ koşulunu sağlayan eğriler yani, biharmonik eğriler üzerinde çalışmıştır [9]. Bunun ardından Kocayiğit Öklid 3-uzayında ve Minkowski 3-uzayında biharmonik eğriler ve λ sabit olmak üzere $\Delta H = \lambda H$ şartını sağlayan harmonik 1-tipli eğriler üzerinde çalışmıştır [20].

Bu tezde de yukarıda bahsi geçen çalışmalardan yararlanılarak Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre timelike ve spacelike uzay eğrilerini karakterize eden genel diferansiyel denklemler ve harmonik 1-tipli vektörlere sahip timelike ve spacelike uzay eğrilerini karakterize eden genel diferansiyel denklemler elde edildi.

I. BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Öklid ve Minkowski 3-uzaylarında Frenet ve Bishop çatıları hatırlatılmıştır.

Tanım 1.1: (Öklid Uzayı): R reel sayılar cismini göstermek üzere, $R^n = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) : x_i \in R\}$ vektör uzayında, iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$\begin{aligned} <,>: R^n \times R^n &\to R \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\to < \vec{x}, \vec{y} > \end{aligned}$$

fonksiyonu R^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı R^n afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [25].

Tanım 1.2: I **,** R reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset R &\to E^n \\ s &\to \gamma(s) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir γ dönüşümüne, E^n uzayında bir **eğri** denir [25].

Tanım 1.3: E^n uzayında, $\gamma : I \subset R \to E^n$ eğrisi için

$$\forall s \in I, \quad \| \gamma'(s) \| = 1$$

ise γ eğrisine **birim hızlı eğri** denir [25].

Tanım 1.4: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \gamma'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne γ eğrisinin s noktasındaki **birim teğet vektörü** denir [25].

Tanım 1.5: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \to R$$
$$s \to \kappa(s) = \| \vec{T}'(s) \|$$

fonksiyonuna γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **eğriliği** denir [25].

Tanım 1.6: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **asli normali** denir [25].

Tanım 1.7: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **binormali** denir [25].

Tanım 1.8: $\gamma : I \subset R \to E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere,

$$\tau : I \to R, \qquad \tau(s) = -< \vec{B}'(s), \vec{N}(s) >$$

fonksiyonuna**,** γ eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **burulması** denir [25].

Tanım 1.9: (Öklid 3-uzayında Bishop çatısı): Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır, yani bir eğrinin ikinci türevi olmasa bile iyi tanımlıdır. Çatının her bileşenini paralel öteleme ile eğri üzerinde ortonormal çatı yardımıyla kolayca paralel taşıyabiliriz. Bu paralel öteleme çatısı şu gözleme dayalıdır: Verilen eğri için $\vec{T}(s)$ tek iken çatının geri kalanı için γ eğrisinin sırasıyla birinci eğriliği ve ikinci eğriliği k_1, k_2 (doğal eğrilikler) olmak üzere herhangi uygun keyfi bazları $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ seçelim, böylece bu çatı her noktada $\vec{T}(s)$ vektörüne dik normal düzlemdedir. $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlı ise herbiri birbirine bağlı değilse, doğal eğrilikler ne olursa olsun yol boyunca düzgün olarak $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ bazlarını değiştirebiliriz. Böylece

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'}\vec{T} \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere alternatif çatı denklemleri elde ederiz [3].

$$\kappa(s) = \sqrt{\|\gamma'(s)\|} = \sqrt{\|\vec{T}(s)\|}$$

$$\theta(s) = \mathrm{ar}\,c\tan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \; k_1 \neq 0$$

$$\tau = \theta' = \frac{k_1k_2' - k_1'k_2}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Burada κ, θ kutup koordinatları için etkin bir biçimde Kartezyen koordinat sistemine karşılık gelir [3].

$\gamma(s) : I \subset R \to E^3$ regüler bir eğri olsun, yani herhangi bir s parametresi için türevi sıfırdan farklı bir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin $\vec{N}_1(s)$ birim vektörü bazı sabit $\vec{U}$ birim vektörleriyle sabit θ açısı yapıyorsa yani $s \in I$ için $< \vec{N}_1(s), \vec{U} >= sabit$ ise γ eğrisi slant helis olarak adlandırılır.

$\gamma : I \to E^3$ sıfırdan farklı k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisi bir slant helistir ancak ve ancak $\frac{k_1}{k_2}(s)$ sabittir [6].

Tanım 1.10: E^3 uzayındaki regüler γ eğrisi için

$$\Delta\vec{T} = 0,$$

eşitliği sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik tanjant vektörlü eğri denir. Ayrıca E^3 uzayındaki γ regüler eğrisi için

$$\Delta\vec{T} = \lambda\vec{T}, \; \lambda \in R,$$

şartı sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik 1-tipli tanjant vektörlü eğri denir [18].

Tanım 1.11: E^3 uzayında regüler γ eğrisi için

$$\Delta\vec{N}_1 = 0$$

şartı sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik $\vec{N}_1$ vektörlü eğri denir. Üstelik E^3 uzayında γ regüler eğrisi için

$$\Delta\vec{N}_1 = \lambda\vec{N}_1, \; \lambda \in R,$$

eşitliği sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü eğri denir [18].

Tanım 1.12: E^3 uzayındaki regüler γ eğrisi

$$\Delta\vec{N}_2 = 0$$

şartını sağlıyorsa γ eğrisine harmonik $\vec{N}_2$ vektörlü eğri denir. Ayrıca E^3 uzayındaki γ regüler eğrisi için

$$\Delta\vec{N}_2 = \lambda\vec{N}_2,\ \lambda \in R,$$

şartı sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü eğri denir [18].

Tanım 1.13: (Minkowski Uzayı): $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \in E^n$ olmak üzere

$$< \vec{x}, \vec{y} >_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

iç çarpımına **Lorentz (Minkowski) iç çarpımı** denir [24]. Minkowski iç çarpımıyla tanımlı Öklid uzayına **Lorentz uzayı**, **Minkowski uzayı** ve ya **yarı-Öklid uzayı** denir ve E_1^n ile gösterilir.

Özel olarak $n = 3$ ise E_1^3 uzayına **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Bu durumda standart metrik , $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in E_1^3$ olmak üzere

$$< \vec{x}, \vec{y} >_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklindedir [24, 27].

Tanım 1.14: Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi için,

i) $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L < 0$ ise, γ eğrisine **timelike eğri**,

ii) $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L > 0$ ise, γ eğrisine **spacelike eğri**,

iii) $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle_L = 0$ ise, γ eğrisine **null eğri** denir.

$\gamma(s) \in E_1^3$ olmak üzere γ eğrisi için üç durum söz konusudur [10, 24, 27].

I. Durum: $\gamma(s)$ bir timelike eğri ise; $\vec{T}$ timelike, $\vec{N}$ spacelike, $\vec{B}$ spacelike vektörlerdir, yani

$$< \vec{T}, \vec{T} >_L = -1,\ < \vec{N}, \vec{N} >_L = 1,\ < \vec{B}, \vec{B} >_L = 1$$

$$\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle_L = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle_L = 0$$

$$\nabla_\gamma \vec{T} = \kappa\vec{N}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N} = \kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{B} = -\tau \vec{N}$$

dir [28].

II. Durum: $\gamma(s)$ spacelike eğriyse**,**

1) γ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olabilir bu durumda,

$\vec{T}$ spacelike, $\vec{N}$ timelike, $\vec{B}$ spacelike vektörlerdir, yani

$$<\vec{T},\vec{T}>_L = 1, \; <\vec{N},\vec{N}>_L = -1, \; <\vec{B},\vec{B}>_L = 1$$

$$<\vec{T},\vec{N}>_L = <\vec{N},\vec{B}>_L = <\vec{T},\vec{B}>_L = 0$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{T} = \kappa \vec{N}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N} = \kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{B} = \tau \vec{N}$$

dir [28].

2) γ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olabilir bu durumda ise,

$\vec{T}$ spacelike, $\vec{N}$ spacelike, $\vec{B}$ timelike vektörlerdir, yani

$$<\vec{T},\vec{T}>_L = 1, \; <\vec{N},\vec{N}>_L = 1, \; <\vec{B},\vec{B}>_L = -1$$

$$<\vec{T},\vec{N}>_L = <\vec{N},\vec{B}>_L = <\vec{T},\vec{B}>_L = 0$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{T} = \kappa \vec{N}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N} = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{B} = \tau \vec{N}$$

olur [28].

III. Durum: $\gamma(s)$ null eğriyse**,**

$\vec{T}$ null, $\vec{N}$ spacelike, $\vec{B}$ spacelike vektörlerdir, yani

$$<\vec{T},\vec{T}>_L = 0, \; <\vec{N},\vec{N}>_L = 1, <\vec{B},\vec{B}>_L = 1$$

$$<\vec{T},\vec{N}>_L = <\vec{N},\vec{B}>_L = 0, <\vec{T},\vec{B}>_L = 1$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{T} = \kappa \vec{N}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N} = \tau \vec{T} - \kappa \vec{B}$$

$$\nabla_{\gamma'} \vec{B} = -\tau \vec{N}$$

dir [28].

Tanım 1.15: ∇ sembolüne, γ eğrisinin yay parametresi s olmak üzere $\nabla_{\gamma'} = \dfrac{d}{ds}$ ile verilen **Levi- Civita koneksiyonu** denir.

γ eğrisinin Laplace operatörü ise

$$\Delta = -\nabla_{\gamma'}^{\;2} = -\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'} \tag{1.1}$$

ile tanımlanır [24].

Tanım 1.16: (Minkowski 3-uzayında Bishop çatısı): Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır, yani bir eğrinin ikinci türevi olmasa bile iyi tanımlıdır. Çatının her bileşenini paralel öteleme ile eğri üzerinde ortonormal çatı yardımıyla kolayca paralel taşıyabiliriz. Bu paralel öteleme çatısı şu gözleme dayalıdır: Verilen eğri için $\vec{T}(s)$ tek iken çatının geri kalanı için γ eğrisinin sırasıyla birinci eğriliği ve ikinci eğriliği k_1, k_2 (doğal eğrilikler) olmak üzere herhangi uygun keyfi bazları $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ seçelim, böylece bu çatı her noktada $\vec{T}(s)$ vektörüne dik normal düzlemdedir. $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlı ise herbiri birbirine bağlı değilse, doğal eğrilikler ne olursa olsun yol boyunca düzgün olarak $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ bazlarını değiştirebiliriz. Böylece

$$\kappa(s) = \sqrt{\| \gamma'(s) \|_L} = \sqrt{\| \vec{T}(s) \|_L}$$

$$\theta(s) = \arg\tanh\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \; k_1 \neq 0$$

olmak üzere alternatif çatı denklemleri elde ederiz. Burada κ, θ kutup koordinatları için etkin bir biçimde Kartezyen koordinat sistemine karşılık gelir [7].

$\gamma(s) : I \subset R \rightarrow E_1^3$ regüler bir eğri olsun, yani herhangi bir s parametresi için türevi sıfırdan farklı bir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin $\vec{N}_1(s)$ birim vektörü bazı sabit $\vec{U}$ birim vektörleriyle sabit θ açısı yapıyorsa yani $s \in I$ için $< \vec{N}_1(s), \vec{U} >_L = sabit$ ise γ eğrisi slant helis olarak adlandırılır.

$\gamma : I \rightarrow E_1^3$ sıfırdan farklı k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisi bir slant helistir ancak ve ancak $\dfrac{k_1}{k_2}(s)$ sabittir [6].

Tanım1.17: E_1^3 uzayındaki regüler γ eğrisi için

$$\Delta\vec{T} = 0, \quad (1.2)$$

eşitliği sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik tanjant vektörlü eğri denir. Ayrıca E_1^3 uzayındaki γ regüler eğrisi için

$$\Delta\vec{T} = \lambda\vec{T}, \ \lambda \in R, \quad (1.3)$$

şartı sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik 1-tipli tanjant vektörlü eğri denir [20].

Tanım 1.18: E_1^3 uzayındaki regüler γ eğrisi için

$$\Delta\vec{N}_1 = 0 \quad (1.4)$$

eşitliği sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik $\vec{N}_1$ vektörlü eğri denir. Üstelik E_1^3 uzayında γ regüler eğrisi için

$$\Delta\vec{N}_1 = \lambda\vec{N}_1, \ \lambda \in R, \quad (1.5)$$

ise harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü eğri denir [20].

Tanım 1.19: E_1^3 uzayındaki regüler γ eğrisi

$$\Delta\vec{N}_2 = 0 \quad (1.6)$$

şartını sağlıyorsa γ eğrisine harmonik $\vec{N}_2$ vektörlü eğri denir. Ayrıca E_1^3 uzayındaki γ regüler eğrisi için

$$\Delta\vec{N}_2 = \lambda\vec{N}_2, \ \lambda \in R, \quad (1.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa γ eğrisine harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü eğri denir [20].

II. BÖLÜM

TIMELIKE EĞRiLERiN BISHOP ÇATISINA GÖRE KARAKTERiZASYONLARI

Bu bölümde E_1^3 uzayında Bishop çatısına göre timelike eğrilerin karakterizasyonlarını vereceğiz.

Üstelik Minkowski 3-uzayında Bishop çatısı $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlerine göre timelike eğrileri karakterize eden genel diferansiyel denklemleri elde edeceğiz.

$\gamma(s)$ timelike bir eğri olsun, bu takdirde $\gamma(s)$ eğrisi Bishop çatısına göre aşağıdaki alternatif çatı denklemlerine sahiptir:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'}\vec{T} \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\nabla_{\gamma'}\vec{T} = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 = k_1\vec{T}$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 = k_2\vec{T}$$

dir. Ayrıca

$$<\vec{T},\vec{T}>_L = -1,\ <\vec{N}_1,\vec{N}_1>_L = 1,\ <\vec{N}_2,\vec{N}_2>_L = 1$$

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\theta(s) = -\arg\tanh\left(\frac{k_2}{k_1}\right),\ k_1 \neq 0$$

dır [6]. Şimdi de $\gamma(s)$ timelike eğrisini karakterize eden aşağıdaki teoremleri verelim.

2.1. Timelike Eğrilerin Bishop Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu bölümde $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörleri yardımıyla timelike eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 2.1: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 doğal eğrilikleriyle E_1^3 de birim hızlı timelike bir eğri olsun. $\vec{T}$ teğet vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\begin{aligned}
&\lambda_4 = f,\\
&\lambda_3 = -g,\\
&\lambda_2 = (k_1k_2z + t + k_2^{'}k_1^3 - k_1^{'}k_2^3),\\
&\lambda_1 = 3fh + g\kappa^2,
\end{aligned}$$

ve

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'} k_2^2,\ g = k_1^{''}k_2 - k_1k_2^{''},\ h = -k_1k_1^{'} - k_2k_2^{'},\ z = k_2k_2^{'} - k_1k_1^{'},\ t = k_2^{'}k_1^{''} - k_1^{'}k_2^{''}$$

olmak üzere

$$\lambda_4\nabla_{\gamma'}^3\vec{T} + \lambda_3\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} + \lambda_2\nabla_{\gamma'}\vec{T} + \lambda_1\vec{T} = 0$$

olarak elde edilir.

İspat: γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 sırasıyla eğrinin birinci ve ikinci eğriliği olmak üzere birim hızlı timelike bir eğri olsun. s parametresine göre $\vec{T}$ vektörünün üç kez türevi alınarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\nabla_{\gamma'}\vec{T} = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 \tag{2.1}$$

$$\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} = (k_1^2 + k_2^2)\vec{T} + k_1^{'}\vec{N}_1 + k_2^{'}\vec{N}_2 \tag{2.2}$$

$$\nabla_{\gamma'}^3\vec{T} = 3(k_1k_1^{'} + k_2k_2^{'})\vec{T} + (k_1^3 + k_1k_2^2 + k_1^{''})\vec{N}_1 + (k_2^3 + k_1^2k_2 + k_2^{''})\vec{N}_2. \tag{2.3}$$

(2.1) ve (2.2) eşitliklerinden

$$\vec{N}_1 = \frac{k_2(k_1^2 + k_2^2)}{k_2^{'}k_1 - k_2k_1^{'}}\vec{T} + \frac{k_2^{'}}{k_2^{'}k_1 - k_2k_1^{'}}\nabla_{\gamma'}\vec{T} - \frac{k_2}{k_2^{'}k_1 - k_2k_1^{'}}\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} \tag{2.4}$$

ve

$$\vec{N}_2 = \frac{k_1(k_1^2 + k_2^2)}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\vec{T} + \frac{k_1^{'}}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\nabla_{\gamma'}\vec{T} - \frac{k_1}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} \tag{2.5}$$

bulunur. (2.3) denkleminde (2.4) ve (2.5) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'} k_2^2,\ g = k_1^{''}k_2 - k_1k_2^{''},\ h = -k_1k_1^{'} - k_2k_2^{'},\ z = k_2k_2^{'} - k_1k_1^{'},\ t = k_2^{'}k_1^{''} - k_1^{'}k_2^{''}$$

olmak üzere

$$\lambda_4 = f,$$
$$\lambda_3 = -g,$$
$$\lambda_2 = (k_1 k_2 z + t + k_2^{'} k_1^3 - k_1^{'} k_2^3),$$
$$\lambda_1 = (3fh + g\kappa^2).$$
$$f\nabla_{\gamma'}^3 \vec{T} - g\nabla_{\gamma'}^2 \vec{T} + (k_1 k_2 z + t - k_1^{'} k_2^3 + k_2^{'} k_1^3)\nabla_{\gamma'} \vec{T} + (3fh + g\kappa^2)\vec{T} = 0 \tag{2.6}$$

denklemlerini buluruz. (2.6) denkleminden

$$\lambda_4 \nabla_{\gamma'}^3 \vec{T} + \lambda_3 \nabla_{\gamma'}^2 \vec{T} + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} \vec{T} + \lambda_1 \vec{T} = 0$$

istenen denklemi elde ederiz.

Teorem 2.2: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 eğrilikleriyle Minkowski 3-uzayında birim hızlı timelike bir eğri olsun. $\vec{N}_1$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\beta_3 = (-2\frac{k_1^{'}}{k_1} - \frac{k_2^{'}}{k_2}),$$
$$\beta_2 = (2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2} + \frac{k_1^{'} k_2^{'}}{k_1 k_2} - \frac{k_1^{''}}{k_1} - k_2^2 - k_1^2),$$
$$\beta_1 = (\frac{k_1^2 k_2^{'}}{k_2} - k_1 k_1^{'})$$

olmak üzere

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_1 + \beta_3 \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_1 + \beta_2 \nabla_{\gamma'} \vec{N}_1 + \beta_1 \vec{N}_1 = 0$$

ile verilir.

İspat: γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birim hızlı timelike bir eğri olsun. $\vec{N}_1$ vektörünün s parametresine göre üç kez türevini alarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N}_1 = k_1 \vec{T} \tag{2.7}$$
$$\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_1 = k_1^{'} \vec{T} + k_1^2 \vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{N}_2 \tag{2.8}$$
$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_1 = (k_1^{''} + k_1^3 + k_1 k_2^2)\vec{T} + (3k_1 k_1^{'})\vec{N}_1 + (2k_1^{'} k_2 + k_1 k_2^{'})\vec{N}_2. \tag{2.9}$$

(2.7) ve (2.8) eşitliklerinden

$$\vec{T} = \frac{1}{k_1}\nabla_{\gamma'} \vec{N}_1, \tag{2.10}$$

$$\vec{N}_2 = \frac{1}{k_1 k_2}\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2 k_2}\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 - \frac{k_1}{k_2}\vec{N}_1 \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.9) denkleminde (2.10) ve (2.11) eşitlikleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 &+ \left(-2\frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_2'}{k_2}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(2\frac{(k_1')^2}{k_1^2} + \frac{k_1'k_2'}{k_1k_2} - \frac{k_1''}{k_1} - k_1^2 - k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \\ &+ \left(\frac{k_1^2k_2'}{k_2} - k_1k_1'\right)\vec{N}_1 = 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

bulunur.

$$\beta_3 = (-2\frac{k_1'}{k_1} - \frac{k_2'}{k_2}),$$

$$\beta_2 = (2\frac{(k_1')^2}{k_1^2} + \frac{k_1'k_2'}{k_1k_2} - \frac{k_1''}{k_1} - k_1^2 - k_2^2),$$

$$\beta_1 = (\frac{k_1^2k_2'}{k_2} - k_1k_1')$$

ifadeleri yerine yazılarak (2.12) denkleminden

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_1\vec{N}_1 = 0$$

istenen denklem elde edilir.

Eğer γ timelike eğrisi E_1^3 uzayında slant helis ise $\frac{k_1}{k_2} = sabit$ yani, $\frac{k_1'}{k_1} = \frac{k_2'}{k_2}$ dir. Bu durumda $\beta_1 = 0$ olur. Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.1: *γ timelike eğrisi, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birlikte E_1^3 uzayında slant helis, yani $\frac{k_1'}{k_1} = \frac{k_2'}{k_2}$ olsun. Bu takdirde γ timelike eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(-3\frac{k_1'}{k_1}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(3\frac{(k_1')^2}{k_1^2} - \frac{k_1''}{k_1} - k_1^2 - k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 = 0$$

ile verilir.

Teorem 2.3: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birlikte E_1^3 de birim hızlı timelike bir eğri olsun, $\vec{N}_2$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\eta_3 = (-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}),$$

$$\eta_2 = (2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 - k_2^2),$$

$$\eta_1 = (\frac{k_2^2k_1^{'}}{k_1} - k_2k_2^{'})$$

olmak üzere

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \eta_3 \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \eta_2 \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 + \eta_1 \vec{N}_2 = 0$$

denklemi ile verilir.

İspat: γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 doğal eğrilikleriyle birim hızlı timelike bir eğri olsun. $\vec{N}_2$ vektörünün s parametresine göre üç kez türevi alınırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 = k_2 \vec{T} \tag{2.13}$$

$$\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 = k_2^{'} \vec{T} + k_1k_2 \vec{N}_1 + k_2^2 \vec{N}_2 \tag{2.14}$$

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 = (k_2^{''} + k_2^3 + k_2k_1^2)\vec{T} + (2k_2^{'}k_1 + k_2k_1^{'})\vec{N}_1 + (3k_2k_2^{'})\vec{N}_2. \tag{2.15}$$

(2.13) ve (2.14) eşitliklerinden

$$\vec{T} = \frac{\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2}{k_2} \tag{2.16}$$

ve

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{k_1k_2} \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 - \frac{k_2^{'}}{k_2^2k_1} \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 - \frac{k_2}{k_1} \vec{N}_2 \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.15) denkleminde (2.16) ve (2.17) eşitlikleri yerine yazılarak

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \left(-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}\right) \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \left(2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 - k_2^2\right) \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 + \left(-k_2k_2^{'} + \frac{k_2^2k_1^{'}}{k_1}\right) \vec{N}_2 = 0 \tag{2.18}$$

denklemini elde ederiz.

$$\eta_3 = (-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}),$$

$$\eta_2 = (2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 - k_2^2),$$

$$\eta_1 = (\frac{k_1^{'}k_2^2}{k_1} - k_2k_2^{'})$$

yazılarak (2.18) denkleminden

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_2+\eta_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_2+\eta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2+\eta_1\vec{N}_2=0$$

istenen denkleme ulaşırız.

Eğer γ timelike eğrisi E_1^3 uzayında bir slant helis ise, yani $\frac{k_1'}{k_1}=\frac{k_2'}{k_2}$ ise aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2: *γ timelike eğrisi $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı k_1 ve k_2 doğal eğrilikleriyle slant helis olsun. $\vec{N}_2$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_2+\left(-3\frac{k_2'}{k_2}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_2+\left(3\frac{(k_2')^2}{k_2^2}-\frac{k_2''}{k_2}-k_1^2-k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2=0$$

olur.

2.2. Harmonik 1-Tipli $\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2$ Vektörlü Timelike Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu bölümde E_1^3 uzayında harmonik 1-tipli $\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2$ vektörlerine sahip olan timelike eğrilerin karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 2.4: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir timelike eğri olması için gerek ve yeter şart k_1 ve k_2 doğal eğriliklerinin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır.*

λ, c_1, c_2 sabit olmak üzere

$$\begin{cases}\lambda=-(k_1^2+k_2^2),\\ k_1=c_1,\\ k_2=c_2.\end{cases}\tag{2.19}$$

İspat: γ, $\vec{T}$ tanjant vektörüne sahip Minkowski 3- uzayında birim hızlı timelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{T}=-(k_1^2+k_2^2)\vec{T}-k_1'\vec{N}_1-k_2'\vec{N}_2\tag{2.20}$$

denklemini hesaplamak için (1.1) ve (2.2) denklemlerini kullanabiliriz. γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü timelike bir eğri olduğunu varsayalım. (1.3) denkleminde (2.20) denklemini yerine koyarak (2.19) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine olarak (2.19) eşitlikleri λ sabiti için sağlanıyorsa γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü timelike bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 2.3: *γ Bishop çatısı $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ ile E_1^3 uzayında birim hızlı timelike eğri olsun. γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü timelike bir eğri olması için gerek ve yeter şart γ timelike eğrisinin sabit eğrilik ve sabit burulmayla slant helis olmasıdır.*

Sonuç 2.4: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri olsun. γ eğrisi harmonik tanjant vektörüne sahiptir ancak ve ancak*

$$k_1(s)=k_2(s)=0$$

dır.

Teorem 2.5: *$\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında γ birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü timelike bir eğri olması için gerek ve yeter şart γ timelike eğrisinin k_1 ve k_2 doğal eğriliklerinin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır*

$$\begin{cases}\lambda=-k_1^2, \\ k_1=sabit, \\ k_2=0.\end{cases} \tag{2.21}$$

İspat: γ, $\vec{N}_1$ vektörüne sahip E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{N}_1=-k_1'\vec{T}-k_1^2\vec{N}_1-k_1k_2\vec{N}_2 \tag{2.22}$$

eşitliğini hesaplamak için (1.1) ve (2.8) eşitliklerini kullanabiliriz.

γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü timelike bir eğri olduğunu varsayalım. (1.5) eşitliğinde (2.22) denklemini yerine yazarsak (2.21) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine olarak (2.21) eşitlikleri λ sabiti için sağlanırsa γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü timelike bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 2.5: *γ, $\left\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\right\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ, harmonik $\vec{N}_1$ vektörlü timelike bir eğridir ancak ve ancak*

$$k_1(s)=0$$

dır.

Son olarak γ timelike eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü olması halinde sahip olacağı karakterizasyonu verelim.

Teorem 2.6: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü timelike bir eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin k_1 ve k_2 doğal eğriliklerinin aşağıdaki eşitlikleri sağlamasıdır*

$$\begin{cases} \lambda = -k_2^2, \\ k_2 = sabit, \\ k_1 = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

İspat: γ, $\vec{N}_2$ vektörüne sahip E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{N}_2 = -k_2'\vec{T} - k_1k_2\vec{N}_1 - k_2^2\vec{N}_2 \tag{2.24}$$

denklemini hesaplamak için (1.1) ve (2.14) eşitliklerini kullanabiliriz. γ timelike eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü timelike bir eğri olduğunu kabul edelim. (1.7) eşitliğinde (2.24) denklemini yazarsak (2.23) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (2.23) eşitlikleri λ sabiti için sağlanırsa γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü timelike bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 2.6: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ, $\vec{N}_2$ harmonik vektörüne sahiptir ancak ve ancak*

$$k_2(s) = 0$$

dır.

Şimdi Laplace operatörü Δ e göre bir γ timelike eğrisinin genel karakterizasyonlarını inceleyelim. Bu takdirde Bishop çatısı $\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2$ vektörlerini göz önüne alarak aşağıdakileri elde ederiz.

Teorem 2.7: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{T} + \lambda\nabla_\gamma\vec{T} + \mu\vec{T} = 0 \tag{2.25}$$

λ, μ sabit olmak üzere γ eğrisi için geçerlidir ancak ve ancak c sabit olmak üzere

$$k_1 = ck_2,\ k_2 = \mp\sqrt{\frac{\mu}{c^2+1}}, \left(\frac{\mu}{c^2+1} > 0\right)$$

doğal eğrilikleriyle γ bir slant helistir.

İspat: (2.25) şartının γ timelike eğrisi için sağlandığını varsayalım. (2.1) (2.20) ve (2.25) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &\mu - k_1^2 - k_2^2 = 0 \\ &\lambda k_1 - k_1' = 0 \\ &\lambda k_2 - k_2' = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

eşitliklerine sahibiz. (2.26) sisteminin 2. ve 3. eşitlikleri $\frac{k_1}{k_2}$ değerinin sabit olduğunu verir, yani γ timelike eğrisi slant helistir. Üstelik (2.26) sisteminin eşitliklerinden c sabit olmak üzere

$$k_1 = ck_2 \tag{2.27}$$

ve

$$k_2 = \mp\sqrt{\frac{\mu}{c^2+1}}, \left(\frac{\mu}{c^2+1} > 0\right) \tag{2.28}$$

elde edilir.

Tersine γ timelike eğrisi sırasıyla (2.27), (2.28) denklemleriyle verilen k_1, k_2 eğrilikleriyle bir slant helis ise (2.25) denkleminin sağlandığını görmek kolaydır.

Teorem 2.8: *γ, E_1^3 uzayında birim hızlı timelike bir eğri ve μ sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{N}_1 + \mu\vec{N}_1 = 0 \tag{2.29}$$

eşitliği γ eğrisi için sağlanır ancak ve ancak,

$$k_1 = \mp\sqrt{\mu},\ (\mu > 0), \qquad k_2 = 0 \tag{2.30}$$

olmalıdır.

İspat: γ timelike eğrisi için (2.29) eşitliği sağlansın. Bu takdirde (2.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\mu - k_1^2 = 0 \\ &k_1 \cdot k_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

olur. (2.31) sistemi eşitliklerinden

$$k_1 = \mp\sqrt{\mu},\ (\mu > 0),\quad k_2 = 0$$

elde edilir.

Tersine (2.31) eşitlikleri sağlanıyorsa (2.29) denklemi sağlanır.

Teorem 2.9: γ, E_1^3 *uzayında birim hızlı timelike bir eğri ve* ρ *sıfırdan farklı sabit olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{N}_2 + \rho\vec{N}_2 = 0 \tag{2.32}$$

γ *eğrisi için sağlanır ancak ve ancak*

$$k_2 = \mp\sqrt{\rho},\ (\rho > 0), \quad k_1 = 0 \tag{2.33}$$

olmalıdır.

İspat: γ timelike eğrisi için (2.32) eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (2.24) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \rho - k_2^2 &= 0 \\ k_1 \cdot k_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

olur. (2.34) sistemi eşitliklerinden

$$k_2 = \mp\sqrt{\rho},\ (\rho > 0), \quad k_1 = 0 \tag{2.35}$$

elde eidlir.

Tersine (2.35) sağlanıyorsa (2.32) eşitliğinin sağlandığını görmek kolaydır.

III. BÖLÜM
SPACELIKE EĞRİLERİN BISHOP ÇATISINA GÖRE KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde E_1^3 uzayında Bishop çatısına göre spacelike eğrilerin karakterizasyonlarını vereceğiz. Ayrıca bunlara ek olarak Minkowski 3- uzayında Bishop çatısı $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlerine göre spacelike eğrileri karakterize eden genel diferansiyel denklemleri elde edeceğiz.

$\gamma(s)$ spacelike bir eğri olsun bu takdirde iki durum söz konusudur.Bu nedenle spacelike eğrileri iki farklı duruma göre inceliyeceğiz.

3.1. $\vec{N}_2$ Binormal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin Bishop Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

$\gamma(s)$ $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike eğri ise Bishop çatısına göre γ eğrisinin doğal eğrilikleri k_1, k_2 baz vektörleri $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ ve

$$\kappa(s) = \sqrt{|\, k_1^2 - k_2^2 \,|}$$

$$\theta(s) = \arg\tanh\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \quad k_1 \neq 0$$

olmak üzere aşağıdaki alternatif çatı denklemlerine sahiptir:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'}\vec{T} \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{T} = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 = k_1\vec{T}$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 = k_2\vec{T}$$

$$<\vec{T},\vec{T}>_L = 1, <\vec{N}_1,\vec{N}_1>_L = -1, <\vec{N}_2,\vec{N}_2>_L = 1$$

dir [7]. Buradan $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisini karakterize eden aşağıdaki teoremleri inceleyelim.

Teorem 3.1.1: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 eğrilikleriyle E_1^3 de birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{T}$ teğet vektörüne göre γ spacelike eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\lambda_4 = f,$$
$$\lambda_3 = -g,$$
$$\lambda_2 = (k_1 k_2 z + t + k_2^{'} k_1^3 + k_1^{'} k_2^3),$$
$$\lambda_1 = 3fh + g\kappa^2,$$

ve

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'} k_2^2,\; g = k_1^{''} k_2 - k_2^{''} k_1,\; h = k_2 k_2^{'} - k_1 k_1^{'},\; z = -k_2 k_2^{'} - k_1 k_1^{'},\; t = k_2^{'} k_1^{''} - k_2^{''} k_1^{'}$$

olmak üzere

$$\lambda_4 \nabla^3_{\gamma'} \vec{T} + \lambda_3 \nabla^2_{\gamma'} \vec{T} + \lambda_2 \nabla_{\gamma'} \vec{T} + \lambda_1 \vec{T} = 0$$

olarak elde edilir.

İspat: γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 doğal eğrilikleri ile birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. s parametresine göre $\vec{T}$ vektörünün üç kez türevi alınarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\nabla_{\gamma'} \vec{T} = k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2 \tag{3.1}$$

$$\nabla^2_{\gamma'} \vec{T} = (k_1^2 - k_2^2)\vec{T} + k_1^{'} \vec{N}_1 - k_2^{'} \vec{N}_2 \tag{3.2}$$

$$\nabla^3_{\gamma'} \vec{T} = 3(k_1 k_1^{'} - k_2 k_2^{'})\vec{T} + (k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1^{''})\vec{N}_1 + (k_2^3 - k_1^2 k_2 - k_2^{''})\vec{N}_2. \tag{3.3}$$

(3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\vec{N}_1 = \frac{k_2(k_1^2 - k_2^2)}{k_2^{'} k_1 - k_2 k_1^{'}} \vec{T} + \frac{k_2^{'}}{k_2^{'} k_1 - k_2 k_1^{'}} \nabla_{\gamma'} \vec{T} - \frac{k_2}{k_2^{'} k_1 - k_2 k_1^{'}} \nabla^2_{\gamma'} \vec{T} \tag{3.4}$$

ve

$$\vec{N}_2 = \frac{-k_1(k_1^2 - k_2^2)}{k_2 k_1^{'} - k_2^{'} k_1} \vec{T} - \frac{k_1^{'}}{k_2 k_1^{'} - k_2^{'} k_1} \nabla_{\gamma'} \vec{T} + \frac{k_1}{k_2 k_1^{'} - k_2^{'} k_1} \nabla^2_{\gamma'} \vec{T}. \tag{3.5}$$

bulunur. (3.3) denkleminde (3.4) ve (3.5) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'} k_2^2,\; g = k_1^{''} k_2 - k_1 k_2^{''},\; h = k_2 k_2^{'} - k_1 k_1^{'},\; z = -k_2 k_2^{'} - k_1 k_1^{'},\; t = k_2^{'} k_1^{''} - k_1^{'} k_2^{''}$$

olmak üzere

$$\lambda_4 = f,$$
$$\lambda_3 = -g,$$
$$\lambda_2 = (k_1 k_2 z + t + k_2^{'} k_1^3 + k_1^{'} k_2^3),$$
$$\lambda_1 = (3fh + g\kappa^2).$$

$$f\nabla^3_{\gamma'}\vec{T} - g\nabla^2_{\gamma'}\vec{T} + (k_1k_2z + t + k_2^{'}k_1^3 + k_1^{'}k_2^3)\nabla_{\gamma'}\vec{T} + (3hf + g\kappa^2)\vec{T} = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) denkleminden

$$\lambda_4\nabla^3_{\gamma'}\vec{T} + \lambda_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{T} + \lambda_2\nabla_{\gamma'}\vec{T} + \lambda_1\vec{T} = 0$$

buluruz buda istenendir.

Teorem 3.1.2: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 doğal eğrilikleriyle Minkowski 3-uzayında birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_1$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\beta_3 = (-2\frac{k_1^{'}}{k_1} - \frac{k_2^{'}}{k_2}),$$

$$\beta_2 = (2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_1^{''}}{k_1} - k_1^2 + k_2^2),$$

$$\beta_1 = (-k_1k_1^{'} + \frac{k_1^2k_2^{'}}{k_2})$$

olmak üzere

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_1\vec{N}_1 = 0$$

ile verilir.

İspat: γ $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 doğal eğrilikleri ile birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_1$ vektörünün s parametresine göre üç kez türevini alarak aşağıdakileri buluruz:

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 = k_1\vec{T} \tag{3.7}$$

$$\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 = k_1^{'}\vec{T} + k_1^2\vec{N}_1 - k_1k_2\vec{N}_2 \tag{3.8}$$

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 = (k_1^{''} + k_1^3 - k_1k_2^2)\vec{T} + (3k_1k_1^{'})\vec{N}_1 + (-2k_1^{'}k_2 - k_1k_2^{'})\vec{N}_2. \tag{3.9}$$

(3.7) ve (3.8) eşitliklerinden

$$\vec{T} = \frac{1}{k_1}\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \tag{3.10}$$

ve

$$\vec{N}_2 = -\frac{1}{k_1k_2}\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \frac{k_1^{'}}{k_1^2k_2}\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 + \frac{k_1}{k_2}\vec{N}_1. \tag{3.11}$$

olur. (3.9) denkleminde (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(-2\frac{k_1^{'}}{k_1} - \frac{k_2^{'}}{k_2}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_1^{''}}{k_1} - k_1^2 + k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(\frac{k_1^2k_2^{'}}{k_2} - k_1k_1^{'}\right)\vec{N}_1 = 0. \tag{3.12}$$

$$\beta_3 = (-2\frac{k_1^{'}}{k_1} - \frac{k_2^{'}}{k_2}),$$

$$\beta_2 = (2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_1^{''}}{k_1} - k_1^2 + k_2^2),$$

$$\beta_1 = (-k_1k_1^{'} + \frac{k_1^2k_2^{'}}{k_2})$$

yazılarak (3.12) denkleminden

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 + \beta_1\vec{N}_1 = 0$$

istenen denklem elde edilir.

Eğer $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi E_1^3 uzayında slant helis ise $\frac{k_1}{k_2} = sabit$ yani, $\frac{k_1^{'}}{k_1} = \frac{k_2^{'}}{k_2}$ dir. Bu durumda $\beta_1 = 0$ olur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1: *γ $\vec{N}_2$ binormal vektörü* spacelike *olan spacelike eğri, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 eğrilikleri ile birlikte E_1^3 uzayında slant helis olsun. $\vec{N}_1$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(-3\frac{k_1^{'}}{k_1}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1 + \left(3\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2} - \frac{k_1^{''}}{k_1} - k_1^2 + k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 = 0$$

ile verilir.

Teorem 3.1.3: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 eğrilikleriyle birlikte E_1^3 de birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_2$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\eta_3 = (-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}),$$

$$\eta_2 = (2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 + k_2^2),$$

$$\eta_1 = (k_2k_2^{'} - \frac{k_2^2k_1^{'}}{k_1})$$

olmak üzere

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \eta_3 \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \eta_2 \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 + \eta_1 \vec{N}_2 = 0$$

Ile verilir.

İspat: γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 eğrilikleriyle birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_2$ vektörünün s parametresine göre 3 kez türevi alınırsa aşağıdakiler bulunur:

$$\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 = k_2 \vec{T} \tag{3.13}$$

$$\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 = k_2^{'} \vec{T} + k_2k_1\vec{N}_1 - k_2^2 \vec{N}_2 \tag{3.14}$$

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 = (k_2^{''} + k_2k_1^2 - k_2^3)\vec{T} + (2k_1k_2^{'} + k_1^{'}k_2)\vec{N}_1 + (-3k_2k_2^{'})\vec{N}_2. \tag{3.15}$$

(3.13) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\vec{T} = \frac{\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2}{k_2} \tag{3.16}$$

ve

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{k_1k_2}\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 - \frac{k_2^{'}}{k_2^2k_1}\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 + \frac{k_2}{k_1}\vec{N}_2. \tag{3.17}$$

olur. (3.15) denkleminde (3.16) ve (3.17) eşitlikleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned} &\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \left(-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}\right)\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \left(2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 + k_2^2\right)\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 \\ &\quad + \left(k_2k_2^{'} - \frac{k_1^{'}k_2^2}{k_1}\right)\vec{N}_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir.

$$\eta_3 = (-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}),$$

$$\eta_2 = (2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1 k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 + k_2^2),$$

$$\eta_1 = (k_2 k_2^{'} - \frac{k_1^{'}k_2^2}{k_1})$$

yazılarak (3.18) denkleminden

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \eta_3 \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \eta_2 \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 + \eta_1 \vec{N}_2 = 0$$

istenen denklem elde edilir.

Eğer $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi E_1^3 uzayında bir slant helis yani $\frac{k_1^{'}}{k_1} = \frac{k_2^{'}}{k_2}$ ise aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.2: $\vec{N}_2$ *binormal vektörü spacelike olan spacelike* γ *eğrisi* $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ *Bishop çatısı* k_1 *ve* k_2 *eğrilikleriyle* E_1^3 *uzayında slant helis olsun.* $\vec{N}_2$ *vektörüne göre* $\vec{N}_2$ *binormal vektörü spacelike olan spacelike* γ *eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem*

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \left(-3\frac{k_2^{'}}{k_2}\right)\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \left(3\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} - k_1^2 + k_2^2\right)\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 = 0.$$

şeklinde olur.

3.2. Harmonik 1-Tipli $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ Vektörlü $\vec{N}_2$ Binormal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu bölümde E_1^3 uzayında harmonik 1-tipli $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlü N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike eğrilerin karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 3.2.1: γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ *Bishop çatısı ile* E_1^3 *uzayında birim hızlı,* N_2 *binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu takdirde* γ *eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olması için gerek ve yeter şart* k_1 *ve* k_2 *eğriliklerinin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır:*

λ, c_1, c_2 *sabit olmak üzere*

$$\begin{cases} \lambda = -(k_1^2 - k_2^2), \\ k_1 = c_1, \\ k_2 = c_2. \end{cases} \tag{3.19}$$

İspat: γ, $\vec{T}$ tanjant vektörüne sahip Minkowski 3- uzayıında birim hızlı, N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{T} = -(k_1^2 - k_2^2)\vec{T} - k_1^{'}\vec{N}_1 + k_2^{'}\vec{N}_2 \tag{3.20}$$

denklemini hesaplamak için (1.1) ve (3.2) denklemlerini kullanabiliriz. N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olduğunu varsayalım. (1.3) denkleminde (3.20) denklemini yerine koyarak (3.19) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (3.19) denklemleri λ sabiti için sağlanıyorsa N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 3.2.1: *γ Bishop çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ ile E_1^3 uzayında birim hızlı, N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin sabit eğrilik ve sabit burulmayla slant helis olmasıdır..*

Sonuç 3.2.2: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı, N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisi harmonik tanjant vektörlü bir eğridir ancak ve ancak*

$$k_1(s) = k_2(s) = 0$$

olmalıdır. Şimdi $\vec{N}_1$ vektörüne göre N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin karakterizasyonunu düşünelim.

Teorem 3.2.2: *$\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile γ, E_1^3 uzayında birim hızlı, N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin k_1 ve k_2 eğriliklerinin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır*

$$\begin{cases} \lambda = -k_1^2, \\ k_1 = sabit, \\ k_2 = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

İspat: γ, $\vec{N}_1$ vektörüne sahip E_1^3 uzayında birim hızlı, N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{N}_1 = -k_1'\vec{T} - k_1^2\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2 \tag{3.22}$$

eşitliğini hesaplamak için (1.1) ve (3.8) eşitliklerini kullanabiliriz.

N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğri olduğunu varsayalım. (1.5) eşitliğinde (3.22) denklemini yerine yazarsak (3.21) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (3.21) eşitlikleri λ sabiti için sağlanıyorsa N_2 binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 3.2.3: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun. Bu takdirde γ, harmonik $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğridir ancak ve ancak*

$$k_1(s) = 0$$

dır.

Teorem 3.2.3: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin k_1 ve k_2 eğriliklerinin aşağıdaki eşitlikleri sağlamasıdır,*

$$\begin{cases} \lambda = k_2^2, \\ k_2 = sabit, \\ k_1 = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

İspat: γ, $\vec{N}_2$ vektörüne sahip E_1^3 uzayında birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{N}_2 = -k_2'\vec{T} - k_1k_2\vec{N}_1 + k_2^2\vec{N}_2 \tag{3.24}$$

eşitliğini hesaplamak için (1.1) ve (3.14) eşitliklerini kullanabiliriz.

$\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü bir eğri olduğunu kabul edelim. (1.7) denkleminde (3.24) denklemini yazarsak (3.23) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (3.23) eşitlikleri λ sabiti için sağlanırsa $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 3.2.4: *γ spacelike eğrisi, E_1^3 uzayında $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile verilen ve $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde γ, harmonik $\vec{N}_2$ vektörlü bir eğridir ancak ve ancak*

$$k_2(s) = 0.$$

dır.

Şimdi Laplace operatörü Δ e gore $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin genel karakterizasyonlarını inceleyelim. Bu takdirde Bishop çatısı $\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2$ vektörlerini göz önüne alarak aşağıdakileri elde ederiz.

Teorem 3.2.4: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu takdirde, λ,μ sabit olmak üzere $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için*

$$\Delta\vec{T} + \lambda\nabla_{\gamma}\vec{T} + \mu\vec{T} = 0 \tag{3.25}$$

geçerlidir ancak ve ancak c sabit olmak üzere

$$k_1 = ck_2, \qquad k_2 = \mp\sqrt{\frac{\mu}{c^2-1}}, \left(\frac{\mu}{c^2-1} > 0\right)$$

eğrilikleriyle γ eğrisi bir slant helistir.

İspat: (3.25) şartının $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için geçerli olduğunu varsayalım. (3.1) (3.20) ve (3.25) denklemlerinden

$$\begin{aligned} &k_2^2 - k_1^2 + \mu = 0 \\ &\lambda k_1 - k_1' = 0 \\ &k_2' - \lambda k_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

eşitliklerine sahibiz. (3.26) sisteminin 2. ve 3. denklemleri $\frac{k_1}{k_2}$ değerinin sabit olduğunu verir, yani $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi bir slant helistir. Üstelik (3.26) sisteminin eşitliklerinden c sabit olmak üzere

$$k_1 = ck_2 \tag{3.27}$$

ve

$$k_2 = \mp\sqrt{\frac{\mu}{c^2-1}}, \left(\frac{\mu}{c^2-1} > 0\right) \tag{3.28}$$

olur.

Tersine $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi sırasıyla (3.27) (3.28) denklemleriyle verilen k_1 ve k_2 eğrilikleriyle bir slant helis ise (3.25) denkleminin sağlandığını görmek kolaydır.

Teorem 3.2.5: *γ, E_1^3 uzayında birim hızlı $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ve μ sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{N}_1 + \mu\vec{N}_1 = 0 \tag{3.29}$$

eşitliği $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için sağlanır ancak ve ancak,

$$k_1 = \mp\sqrt{\mu},\ (\mu > 0), \qquad k_2 = 0 \tag{3.30}$$

olmalıdır.

İspat: $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için (3.29) eşitliği sağlansın. Bu takdirde (3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\mu - k_1^2 = 0 \\ &k_1 \cdot k_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) sistemi eşitliklerinden

$$k_1 = \mp\sqrt{\mu},\ (\mu > 0), \quad k_2 = 0.$$

olur.

Tersine (3.31) eşitlikleri sağlanıyorsa (3.29) eşitlikleri de sağlanır.

Teorem 3.2.6: *γ, E_1^3 uzayında birim hızlı $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ve ρ sıfırdan farklı sabit olsun. Bu takdirde, $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için*

$$\Delta\vec{N}_2 + \rho\vec{N}_2 = 0 \tag{3.32}$$

geçerlidir ancak ve ancak

$$k_2 = \mp\sqrt{-\rho}, \ (\rho < 0), \quad k_1 = 0 \tag{3.33}$$

olmalıdır.

İspat: $\vec{N}_2$ binormal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için (3.32) eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (3.24) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &k_2^2 + \rho = 0 \\ &k_1 \cdot k_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

(3.34) sistemi eşitliklerinden

$$k_2 = \mp\sqrt{-\rho}, \ (\rho < 0), \quad k_1 = 0 \tag{3.35}$$

dır.

Tersine (3.35) geçerliyse (3.32) eşitliklerinin sağlandığını görmek kolaydır.

3.3. $\vec{N}_1$ Asli Normal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin Bishop Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

γ, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ise Bishop çatısına göre γ eğrisinin sırasıyla doğal eğrilikleri k_1, k_2 baz vektörleri $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ ve

$$\kappa(s) = \sqrt{|k_1^2 - k_2^2|}$$

$$\theta(s) = \arg\tanh\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \ k_1 \neq 0$$

olmak üzere aşağıdaki alternatif çatı denklemlerine sahiptir:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\gamma'}\vec{T} \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \\ \nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{T} = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 = -k_1\vec{T}$$

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 = -k_2\vec{T}$$

$$<\vec{T},\vec{T}>_L = 1, <\vec{N}_1,\vec{N}_1>_L = 1, <\vec{N}_2,\vec{N}_2>_L = -1$$

dir [4]. Buradan $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğrileri karakterize eden aşağıdaki teoremleri inceliyebiliriz.

Teorem 3.3.1: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 eğrilikleriyle E_1^3 de birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{T}$ teğet vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\lambda_4 = f,$$
$$\lambda_3 = g,$$
$$\lambda_2 = (k_1k_2z + t - k_2^{'}k_1^3 - k_1^{'}k_2^3),$$
$$\lambda_1 = 3fh + g\kappa^2,$$

ve

$$f = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{'} k_2^2,\ g = k_2^{''}k_1 - k_1^{''}k_2,\ h = k_1k_1^{'} - k_2k_2^{'},\ z = k_2k_2^{'} + k_1k_1^{'},\ t = k_2^{'}k_1^{''} - k_2^{''}k_1^{'}$$

olmak üzere

$$\lambda_4\nabla_{\gamma'}^3\vec{T} + \lambda_3\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} + \lambda_2\nabla_{\gamma'}\vec{T} + \lambda_1\vec{T} = 0$$

olarak elde edilir.

İspat: γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 eğrinin eğrilikleri ile birim hızlı, γ, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. s parametresine göre $\vec{T}$ vektörünün üç kez türevi alınarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\nabla_{\gamma'}\vec{T} = k_1\vec{N}_1 - k_2\vec{N}_2 \tag{3.36}$$

$$\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} = (k_2^2 - k_1^2)\vec{T} + k_1^{'}\vec{N}_1 - k_2^{'}\vec{N}_2 \tag{3.37}$$

$$\nabla_{\gamma'}^3\vec{T} = 3(k_2k_2^{'} - k_1k_1^{'})\vec{T} + (-k_1^3 + k_1k_2^2 + k_1^{''})\vec{N}_1 + (-k_2^3 + k_1^2k_2 - k_2^{''})\vec{N}_2. \tag{3.38}$$

(3.36) ve (3.37) eşitliklerinden

$$\vec{N}_1 = \frac{k_2(k_1^2 - k_2^2)}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\vec{T} - \frac{k_2^{'}}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\nabla_{\gamma'}\vec{T} + \frac{k_2}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} \tag{3.39}$$

ve

$$\vec{N}_2 = \frac{k_1(k_1^2 - k_2^2)}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\vec{T} - \frac{k_1^{'}}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\nabla_{\gamma'}\vec{T} + \frac{k_1}{k_2k_1^{'} - k_2^{'}k_1}\nabla_{\gamma'}^2\vec{T} \tag{3.40}$$

bulunur. (3.38) denkleminde (3.39) ve (3.40) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$f=\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' k_2^2,\ g=k_1k_2^{''}-k_1^{''}k_2,\ h=k_1k_1^{'}-k_2k_2^{'},\ z=k_2k_2^{'}+k_1k_1^{'},\ t=k_2^{'}k_1^{''}-k_1^{'}k_2^{''}.$$

$$\lambda_4=f,$$
$$\lambda_3=g,$$
$$\lambda_2=(k_1k_2z+t-k_2^{'}k_1^3-k_1^{'}k_2^3),$$
$$\lambda_1=(3fh+g\kappa^2),$$

olmak üzere

$$f\nabla_{\gamma'}^3\vec{T}+g\nabla_{\gamma'}^2\vec{T}+(k_1k_2z+t-k_2^{'}k_1^3-k_1^{'}k_2^3)\nabla_{\gamma'}\vec{T}+(3hf+g\kappa^2)\vec{T}=0 \tag{3.41}$$

denklemini buluruz. (3.41) denkleminden

$$\lambda_4\nabla_{\gamma'}^3\vec{T}+\lambda_3\nabla_{\gamma'}^2\vec{T}+\lambda_2\nabla_{\gamma'}\vec{T}+\lambda_1\vec{T}=0$$

buluruz buda istenendir.

Teorem 3.3.2: *γ $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 eğrilikleriyle Minkowski 3-uzayında birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_1$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\beta_3=(-2\frac{k_1^{'}}{k_1}-\frac{k_2^{'}}{k_2}),$$
$$\beta_2=(2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2}+\frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2}-\frac{k_1^{''}}{k_1}+k_1^2-k_2^2),$$
$$\beta_1=(k_1k_1^{'}-\frac{k_1^2k_2^{'}}{k_2})$$

olmak üzere

$$\nabla_{\gamma'}^3\vec{N}_1+\beta_3\nabla_{\gamma'}^2\vec{N}_1+\beta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1+\beta_1\vec{N}_1=0$$

ile verilir.

İspat: γ $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı k_1, k_2 eğrinin doğal eğrilikleri ile birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_1$ vektörünün s parametresine göre üç kez türevini alarak aşağıdakileri buluruz:

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1=-k_1\vec{T} \tag{3.42}$$

$$\nabla_{\gamma'}^2\vec{N}_1=-k_1^{'}\vec{T}-k_1^2\vec{N}_1+k_1k_2\vec{N}_2 \tag{3.43}$$

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1=(k_1^3-k_1^{''}-k_1k_2^2)\vec{T}+(-3k_1k_1^{'})\vec{N}_1+(2k_1^{'}k_2+k_1k_2^{'})\vec{N}_2. \tag{3.44}$$

(3.42) ve (3.43) eşitliklerinden

$$\vec{T}=-\frac{1}{k_1}\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1 \tag{3.45}$$

ve

$$\vec{N}_2=\frac{1}{k_1k_2}\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1-\frac{k_1^{'}}{k_1^2k_2}\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1+\frac{k_1}{k_2}\vec{N}_1. \tag{3.46}$$

bulunur. (3.44) denkleminde (3.45) ve (3.46) eşitliklerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1&+\left(-2\frac{k_1^{'}}{k_1}-\frac{k_2^{'}}{k_2}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1+\left(2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2}+\frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2}-\frac{k_1^{''}}{k_1}+k_1^2-k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1\\&+\left(k_1k_1^{'}-\frac{k_1^2k_2^{'}}{k_2}\right)\vec{N}_1=0.\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\beta_3=(-2\frac{k_1^{'}}{k_1}-\frac{k_2^{'}}{k_2}),$$

$$\beta_2=(2\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2}+\frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2}-\frac{k_1^{''}}{k_1}+k_1^2-k_2^2),$$

$$\beta_1=(k_1k_1^{'}-\frac{k_1^2k_2^{'}}{k_2})$$

yazılarak (3.47) denkleminden

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1+\beta_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1+\beta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1+\beta_1\vec{N}_1=0$$

istenen denklem elde edilir.

Eğer $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi E_1^3 uzayında slant helis ise $\frac{k_1}{k_2}=sabit$ yani, $\frac{k_1^{'}}{k_1}=\frac{k_2^{'}}{k_2}$ dir. Bu durumda $\beta_1=0$ olur.Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.1: *γ, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğrisi, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 doğal eğrilikleri ile birlikte E_1^3 uzayında bir slant helis olsun. $\vec{N}_1$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_1+\left(-3\frac{k_1^{'}}{k_1}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_1+\left(3\frac{(k_1^{'})^2}{k_1^2}-\frac{k_1^{''}}{k_1}+k_1^2-k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_1=0$$

ile verilir.

Teorem 3.3.3: *γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı, k_1 ve k_2 eğrilikleriyle birlikte E_1^3 de birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun, $\vec{N}_2$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem,*

$$\eta_3 = (-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}),$$

$$\eta_2 = (2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1 k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} + k_1^2 - k_2^2),$$

$$\eta_1 = (\frac{k_2^2 k_1^{'}}{k_1} - k_2 k_2^{'})$$

olmak üzere

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_2 + \eta_3\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_2 + \eta_2\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 + \eta_1\vec{N}_2 = 0$$

ile verilir.

İspat: γ, $\{\vec{T},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ve k_1, k_2 eğrilikleriyle birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. $\vec{N}_2$ vektörünün s parametresine göre 3 kez türevi alınırsa aşağıdakiler bulunur.

$$\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 = -k_2\vec{T} \tag{3.48}$$

$$\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_2 = -k_2^{'}\vec{T} - k_2 k_1\vec{N}_1 + k_2^2\vec{N}_2 \tag{3.49}$$

$$\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_2 = (k_2k_1^2 - k_2^{''} - k_2^3)\vec{T} + (-2k_1k_2^{'} - k_1^{'}k_2)\vec{N}_1 + (3k_2k_2^{'})\vec{N}_2. \tag{3.50}$$

(3.48) ve (3.49) eşitliklerinden

$$\vec{T} = -\frac{\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2}{k_2} \tag{3.51}$$

ve

$$\vec{N}_1 = -\frac{1}{k_1k_2}\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_2 + \frac{k_2^{'}}{k_2^2k_1}\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 + \frac{k_2}{k_1}\vec{N}_2. \tag{3.52}$$

olur. (3.50) denkleminde (3.51) ve (3.52) eşitlikleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\nabla^3_{\gamma'}\vec{N}_2 &+ \left(-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}\right)\nabla^2_{\gamma'}\vec{N}_2 + \left(2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} + k_1^2 - k_2^2\right)\nabla_{\gamma'}\vec{N}_2 \\ &+ \left(\frac{k_1^{'}k_2^2}{k_1} - k_2k_2^{'}\right)\vec{N}_2 = 0\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir

$$\eta_3 = (-2\frac{k_2^{'}}{k_2} - \frac{k_1^{'}}{k_1}),$$

$$\eta_2 = (2\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} + \frac{k_1^{'}k_2^{'}}{k_1k_2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} + k_1^2 - k_2^2),$$

$$\eta_1 = (\frac{k_1^{'}k_2^2}{k_1} - k_2k_2^{'}).$$

yazılarak (3.53) denkleminden

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \eta_3 \nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \eta_2 \nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 + \eta_1 \vec{N}_2 = 0$$

istenen denklem elde edilir.

Eğer $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi E_1^3 uzayında bir slant helis ise $\frac{k_1^{'}}{k_1} = \frac{k_2^{'}}{k_2}$ olur, bu durumda aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.2: *$\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı k_1 ve k_2 eğrilikleriyle E_1^3 uzayında bir slant helis olsun. $\vec{N}_2$ vektörüne göre γ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem*

$$\nabla_{\gamma'}^3 \vec{N}_2 + \left(-3\frac{k_2^{'}}{k_2}\right)\nabla_{\gamma'}^2 \vec{N}_2 + \left(3\frac{(k_2^{'})^2}{k_2^2} - \frac{k_2^{''}}{k_2} + k_1^2 - k_2^2\right)\nabla_{\gamma'} \vec{N}_2 = 0$$

şeklinde olur.

3.4. Harmonik 1-Tipli $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ Vektörlü $\vec{N}_1$ Asli Normal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu bölümde Minkowski 3- uzayında harmonik 1-tipli $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörleri ile $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğrilerin karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 3.4.1: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olması için gerek ve yeter şart k_1 ve k_2 eğriliklerinin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır.*

λ, c_1, c_2 sabit olmak üzere

$$\begin{cases} \lambda = k_1^2 - k_2^2, \\ k_1 = c_1, \\ k_2 = c_2. \end{cases} \tag{3.54}$$

İspat: γ, $\vec{T}$ tanjant vektörüne sahip E_1^3 de birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{T} = (k_1^2 - k_2^2)\vec{T} - k_1^{'}\vec{N}_1 + k_2^{'}\vec{N}_2 \tag{3.55}$$

denklemini hesaplamak için (1.1) ve (3.37) denklemlerini kullanabiliriz. $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olduğunu varsayalım. (1.3) denkleminde (3.55) denklemini yerine koyarak (3.54) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (3.54) denklemleri λ sabiti için sağlanıyorsa $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 3.4.1: *γ Bishop çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ ile E_1^3 uzayında birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin harmonik 1-tipli tanjant vektörlü bir eğri olması için gerek ve yeter şart sabit eğrilik ve sabit burulmayla slant helis olmasıdır..*

Sonuç 3.4.2: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisi harmonik tanjant vektörlü bir eğridir ancak ve ancak*

$$k_1(s) = k_2(s) = 0$$

olmalıdır.

Şimdi $\vec{N}_1$ vektörüne göre $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin karakterizasyonunu düşünelim.

Teorem 3.4.2: *$\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile γ, E_1^3 uzayında birim hızlı, $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin k_1 ve k_2 eğriliklerinin aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır*

$$\begin{cases} \lambda = k_1^2, \\ k_1 = sabit, \\ k_2 = 0. \end{cases} \tag{3.56}$$

İspat: γ birim hızlı eğrisi E_1^3 uzayında $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{N}_1 = k_1^{'}\vec{T} + k_1^2\vec{N}_1 - k_1k_2\vec{N}_2 \tag{3.57}$$

eşitliğini hesaplamak için (1.1) ve (3.43) eşitliklerini kullanabiliriz.

$\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğri olduğunu varsayalım. (1.5) eşitliğinde (3.57) denklemini yerine yazarsak (3.56) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (3.56) eşitlikleri λ sabiti için sağlanıyorsa $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_1$ vektörlü eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 3.4.3: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısı ile E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun. Bu takdirde γ, harmonik $\vec{N}_1$ vektörlü bir eğridir ancak ve ancak*

$$k_1(s) = 0$$

olmalıdır.

Son olarak $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin $\vec{N}_2$ vektörüne göre karakterizasyonunu verelim.

Teorem 3.4.3: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü bir eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart γ eğrisinin k_1 ve k_2 eğriliklerinin aşağıdaki eşitlikleri sağlamasıdır,*

$$\begin{cases} \lambda = -k_2^2, \\ k_2 = sabit, \\ k_1 = 0. \end{cases} \tag{3.58}$$

İspat: γ, $\vec{N}_2$ vektörüne sahip E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri ve Δ, ∇ ile birleştirilmiş Laplace operatörü olsun.

$$\Delta\vec{N}_2 = k_2^{'}\vec{T} + k_1k_2\vec{N}_1 - k_2^2\vec{N}_2 \tag{3.59}$$

eşitliğini hesaplamak için (1.1) ve (3.49) eşitliklerini kullanabiliriz.

$\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü bir eğri olduğunu kabul edelim. (1.7) denkleminde (3.59) denklemini yazarsak (3.58) eşitliklerini elde ederiz.

Tersine (3.58) eşitlikleri λ sabiti için sağlanırsa $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisinin harmonik 1-tipli $\vec{N}_2$ vektörlü bir eğri olduğunu göstermek kolaydır.

Sonuç 3.4.4: *$\gamma, \{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun. Bu takdirde γ, $\vec{N}_2$ harmonik vektörüne sahiptir ancak ve ancak*

$$k_2(s) = 0$$

olmalıdır.

Şimdi Laplace operatörü Δ e göre bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrinin genel karakterizasyonlarını inceleyelim. Bu takdirde Bishop çatısı $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlerini göz önüne alarak aşağıdakileri elde ederiz.

Teorem 3.4.4: *γ, $\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Bishop çatısına sahip E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{T} + \lambda\nabla_{\gamma}\vec{T} + \mu\vec{T} = 0 \tag{3.60}$$

λ, μ sabit olmak üzere $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için geçerlidir ancak ve ancak c sabit olmak üzere

$$k_1 = ck_2, \quad k_2 = \mp\sqrt{\frac{\mu}{1-c^2}}, \left(\frac{\mu}{1-c^2} > 0\right),$$

eğrilikleriyle $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi bir slant helistir.

İspat: (3.60) şartının $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için geçerli olduğunu varsayalım. (3.36) ve (3.55) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &k_1^2 - k_2^2 + \mu = 0 \\ &\lambda k_1 - k_1' = 0 \\ &k_2' - \lambda k_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

eşitliklerine sahibiz. (3.61) sisteminin 2. ve 3. denklemleri $\frac{k_1}{k_2}$ değerinin sabit olduğunu verir, yani $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi bir slant helistir. Üstelik (3.61) sisteminin eşitliklerinden c sabit olmak üzere

$$k_1 = ck_2 \tag{3.62}$$

ve

$$k_2 = \mp\sqrt{\frac{\mu}{1-c^2}}, \left(\frac{\mu}{1-c^2} > 0\right) \tag{3.63}$$

bulunur.

Tersine $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi sırasıyla (3.62) (3.63) eşitlikleriyle verilen k_1, k_2 eğrilikleriyle bir slant helis ise (3.60) eşitliklerinin sağlandığını görmek kolaydır.

Teorem 3.4.5: *γ, E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri ve μ sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{N}_1 + \mu\vec{N}_1 = 0 \tag{3.64}$$

eşitliği γ eğrisi için sağlanır ancak ve ancak,

$$k_1 = \mp\sqrt{-\mu}, \ (\mu < 0), \quad k_2 = 0 \tag{3.65}$$

dır.

İspat: $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için (3.64) eşitliği sağlansın. Bu takdirde (3.57) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mu + k_1^2 &= 0 \\ k_1 \cdot k_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.66}$$

bulunur. (3.66) sistemi eşitliklerinden

$$k_1 = \mp\sqrt{-\mu}, \ (\mu < 0), \qquad k_2 = 0$$

elde edilir.

Tersine olarak (3.66) eşitliği sağlanıyorsa (3.64) denklemi sağlanır.

Teorem 3.4.6: *γ, E_1^3 uzayında birim hızlı bir $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğri ve ρ sıfırdan farklı sabit olsun. Bu takdirde,*

$$\Delta\vec{N}_2 + \rho\vec{N}_2 = 0 \tag{3.67}$$

γ eğrisi için geçerlidir ancak ve ancak

$$k_2 = \mp\sqrt{\rho},\ (\rho > 0),\quad k_1 = 0 \tag{3.68}$$

dır.

İspat: $\vec{N}_1$ asli normal vektörü spacelike olan spacelike γ eğrisi için (3.67) eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (3.59) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &\rho - k_2^2 = 0 \\ &k_1 \cdot k_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.69) sistemi eşitliklerinden

$$k_2 = \mp\sqrt{\rho},\ (\rho > 0),\quad k_1 = 0 \tag{3.70}$$

olur.

Tersine olarak, (3.70) geçerliyse (3.67) eşitliğinin sağlandığını görmek kolaydır.

KAYNAKLAR

[1] Ali, T.A., Turgut, M., Position Vector of a Time-like Slant helicex in Minkowski 3-Space, Journal of Math. Analysis and Appl., 365 (2010), 559-569.

[2] Ali, T.A., Turgut, M., Some Characterizations of Slant Helices in the Euclidean Space E^n, arXiv:0904.1187v1 [math. DG] Apr, 2009.

[3] Bishop, L.R., There is More Than One Way to Frame a Curve, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 246–251

[4] Bükçü, B., Karacan. M.K., Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 57(1), (2008), 13-22.

[5] Bükçü, B., Karacan., M.K., The Slant Helices according to Bishop Frame, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 3:2 2009.

[6] Bükçü, B., Karacan., M.K., On the Slant Helices according to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space, Tamkang Journal of Math., 39 (3), (2008), 255-262.

[7] Bükçü, B., Karacan., M.K., The Bishop Darboux Rotation Axis of The Spacelike Curve in Minkowski 3- Space, JFS, Vol 30, 1- 5, E.U.F.F. Turkey, 2007.

[8] Carmo P. , Monfedo P. , Differantial Geometry of Curves a Surfaces, Prentice- Hall, mc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

[9] Chen, B., Y., and Ishikawa, S., Biharmonic Surface in Pseudo-Euclidean Spaces, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A 45 (1991), 323-347.

[10] Duggal, K. L. and Beyancu, A., Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Appicatiens, Kluwer Academic Publisher, 1996.

[11] Güngör, İ., 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Normal Eğrilerin Karakterizasyonları, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 3-7, 2007.

[12] Hacısalihoğlu H. H. , Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, 1998.

[13] Hanson, A.J., Hui M., Parallel Transport Approach to Curve Framing, Indiana University,Tech. reports-TR425, January 11,1995.

[14] İlarslan, K., Nesovic E., Timelike and Null Normal Curves in Minkowski Space E_1^3, Indian J. Pure Appl. Math.,35(7):882, 2004.

[15] İlarslan, K., Some Special Curves on Non-Euclidean Manifolds, Ph. D. Thesis, Ankara University, (2002).

[16] Izumiya, S., Takeuchi, N., New Special Curves and Developable Surfaces, Turk J. Math., 28, (2004), 153-163.

[17] Karacan, M., Yaylı, Y., On the Geodesics of Tubular Surfaces in Minkowski 3-Space, Mathematics Subject Classification: 53A35, 53B30, 1-3, 2000.

[18] Kocayiğit, H., Arı, Z., Önder, M., Some Characterizations of Space Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space E^3, (Submitted).

[19] Kocayiğit, H., Lorentz Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak Geometri, Ph. D. Thesis, Ankara University, (2004).

[20] Kocayiğit, H., Hacısalihoğlu, H.H., 1-Type and Biharmonic Frenet Curves in Lorentzian 3-Space, Iranian Journal of Science &Technology, Transaction A, Vol. 33, No. A2 (2009), 159-168.

[21] Kocayiğit, H., Hacısalihoğlu, H.H., 1-Type Curves and Biharmonic Curves in Euclidean 3-Space, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 4 No. 1 (2011), 97-101.

[22] Kula, L., Yaylı, Y., On Slant Helix and Its Spherical Indicatrix, Appl. Math. Comp. 169 (2005), 600–607.

[23] Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y., İlarslan K., Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-space, Tur. J. Math. 33 (2009), 1–13.

[24] O'neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press 1983.

[25] Sabuncuoğlu A., Diferansiyel Geometri, Ankara, 2004.

[26] Struik, D. J., Lectures on Classical Differential Geometry, Addison Wesley, Dover, (1988).

[27] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayını No:06, Manisa, ISBN: 978-975-8628-24-7.

[28] Walrave, J., Curves and Surface in Minkowski Space, Ph. D. Thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, (1995).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Buket ARDA
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 28.01.1988 - İzmir
Medeni Hali	: Bekâr
Telefon	: (0232) 256 23 04
Mail	: bbuketarda@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	: Celal Bayar Üni. / Matematik Böl.	2012
Lisans	: Celal Bayar Üni. / Matematik Böl.	2010
Lise	: Vali Nevzat Ayaz Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-2012	Delta Dershanesi	Matematik Öğrt.

Yabancı Dil

İngilizce (Milli Eğt. Bakanlığı Sertifika)